Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Algumas Classes de Problemas Envolvendo o p-Laplaciano

Yane Lísley Ramos Araújo

2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Algumas Classes de Problemas Envolvendo o p-Laplaciano

por

Yane Lísley Ramos Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Março de 2012
João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Positivas para Algumas Classes de Problemas Envolvendo o p-Laplaciano

por

Yane Lísley Ramos Araújo

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza- UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros -UFPB

Gilberto Fernandes Vieira

Prof. Dr. Gilberto Fernandes Vieira -UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Suplente)

A663e Araújo, Yane Lísley Ramos.

Existência e multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas envolvendo o p-Laplaciano / Yane Lísley Ramos Araújo.– João Pessoa, 2012.

122f.

Orientador: Manassés Xavier de Souza

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Métodos variacionais. 3. Método de sub e supersolução. 4. Operador p-Laplaciano.

UFPB/BC CDU: 51(043)

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por todas as oportunidades que a mim foram proporcionadas e por toda força que tem me dado para superar todas as dificuldades. À minha família pelo apoio e compreensão, de forma especial às minhas mães Ana Rita Ramos Araújo e Ana Lúcia Carneiro Ramos pelo amor incondicional. Ao meu pai Gildeval Lima Araújo e meu irmão Tarles Walker Ramos Araújo por toda compreensão nos momentos de menos atenção.

Ao meu mais que namorado, amigo, colega, companheiro, Reginaldo Amaral Cordeiro Junior por toda paciência, carinho e apoio nos momentos mais difíceis. Aos meus colegas de mestrado, em particular, à Gilson Mamede de Carvalho que se revelou muito mais que um colega, um grande amigo e a Dayvid Marques pelas inúmeras discussões matemáticas travadas que contribuíram em muito para minha formação.

Agradeço também ao meu orientador Manassés Xavier de Souza pelas críticas construtivas, pela disponibilidade em todos os momentos e por todo apoio dado para o sucesso desse trabalho.

Por todos os incentivos que me foram dados para trilhar o caminho da matemática agradeço os professores dos colégios e universidades onde estudei, Joilson Lessa, Fabíola Pedreira e João Cardeal. Agradeço também aos professores com quem convivi no mestrado, mais especificamente, a Uberlandio Batista Severo pelo grande professor que és. E à CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, utilizando métodos variacionais e o método de sub e supersolução estudamos a existência e multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas envolvendo o operador $p-$Laplaciano em domínios limitados do $\mathbb{R}^N$. Inicialmente, estudamos um resultado de existência de solução positiva para um problema onde a não-linearidade não satisfaz a clássica condição de Ambrosetti-Rabinowitz, e em seguida estudamos um resultado de existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas onde a não-linearidade pode mudar de sinal.

Abstract

In this work, using variational methods and the sub and super solutions method we study the existence and multiplicity of positive solutions for some classes of problems involving the $p-$Laplacian operator in bounded domains of $\mathbb{R}^N$. Initially, we study a result of existence of positive solution for a problem where the nonlinearity does not satisfy the classical Ambrosetti-Rabinowitz condition, and then we study the existence and multiplicity result of positive solutions for a class of problems where the considered nonlinearity can change sign.

Notação

Ao longo deste trabalho faremos uso da seguinte simbologia:

- $C, C_0, C_1, C_2, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável, e $|\Omega|$ denota sua medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$;
- X^* é o dual topológico do espaço de Banach X;
- Denotemos a convergência fraca por " $\rightharpoonup$ " e a convergência forte por " $\rightarrow$ ";
- $u^+ = \max\{0, u\}$ e $u^- = \max\{0, -u\}$;
- $\mathcal{X}_\Omega$ denota a função característica do conjunto Ω;
- $B(a, R)$ denota a bola aberta de centro em a e raio R;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função u;
- $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ denota o operador $p-$Laplaciano;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty\right\}$ com $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, denota o espaço de Lebesgue com norma dada por
$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$
- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por
$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| < C \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$
- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω;

- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;

- $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ u \in C\left(\overline{\Omega}\right) : \sup\limits_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$;

- Para $1 \leq p < N$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev;

- Para $1 \leq p < \infty$, p' é o expoente conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$;

- $|u|$ denota a norma euclidiana da função u;

- $\|u\|$ denota a norma da função u em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\|u\|_{1,p}$ denota a norma da função u em $W^{1,p}(\Omega)$;

- $\|u\|_*$ denota a norma da função u no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\langle\ ,\ \rangle$ denota a aplicação dualidade;

- $[u \geq 0]$ denota o conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \geq 0\}$;

- J' denota a derivada de Gâteaux e a derivada de Fréchet do funcional J;

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas quaselineares envolvendo o operador $p-$Laplaciano. As classes de problemas que trataremos são bem particulares, no sentido de que tais problemas têm algumas características em comum: o crescimento subcrítico da não-linearidade e a limitação do domínio de definição do problema. Nestas condições, métodos variacionais do tipo minimax e o método de sub e supersolução podem ser usados, bem como as imersões de Sobolev.

Baseados no artigo de Iturriaga, Lorca e Ubilla [27], estudaremos inicialmente o seguinte problema:

Problema 1. Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N \, (N \geq 2)$ um domínio limitado com fronteira suave, encontraremos uma solução positiva para

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ denota o operador $p-$Laplaciano, com $1 < p < N$ e a não-linearidade $g(x,u)$ é uma função de Carathéodory que possui crescimento subcrítico e não satisfaz a condição clássica de Ambrosetti-Rabinowitz.

Na literatura existe uma vasta pesquisa sobre problemas de equações diferenciais parciais onde a não-linearidade satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. No entanto, atualmente muitos autores utilizam-se das mais variadas estratégias, e muitos esforços são empregados para desenvolver resultados de existência de soluções para problemas onde a não-linearidade não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Veja por exemplo [18], [34], [38], [39], [41], [50], [51] e [52] como alguns dos trabalhos que estudam problemas desse tipo.

Em seguida baseados no artigo de Brock, Iturriaga e Ubilla [12], estudaremos o seguinte problema:

Problema 2. Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N \, (N \geq 2)$ um domínio limitado com fronteira suave, provaremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad\;\; \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde a não-linearidade $f(x,u)$ se comporta como $|u|^{p-1}$ próximo de zero e no infinito e pode mudar de sinal, $1 < p < N$, e λ é um parâmetro real positivo.

Resultados de existência para problemas que trabalham com este tipo de não-linearidade têm sido estudado por vários autores. Veja por exemplo, o artigo [13] e suas referências.

É importante comparar também nosso problema com o caso dual que foi investigado no artigo clássico de Ambrosetti, Brezis e Cerami [4], onde eles consideram a equação $-\Delta u = \lambda u^q + u^r$, com $u \in H_0^1(\Omega)$ e $0 < q < 1 < r \leq 2^*$. A situação análoga para o $p-$Laplaciano foi estudada por García e Peral em [5], no entanto, neste trabalho, a não-linearidade considerada não muda de sinal. Finalmente é válido ressaltar que Ambrosetti, García e Peral estabeleceram em [3] a existência de soluções que mudam de sinal.

O operador $p-$Laplaciano tem recebido grande atenção durante as últimas duas décadas devido ao fato de que os problemas onde este operador está presente aparecem não só na matemática pura, mas em várias aplicações como por exemplo nos problemas envolvendo Mecânica dos fluidos, reação-difusão, extração do petróleo, elasticidade não-linear, astronomia, dentre outros. Para outras informações sobre problemas modelados pelo operador $p-$Laplaciano, veja, por exemplo, [1], [20], [21], [23] e [42].

A seguir detalharemos como este trabalho está organizado.

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados clássicos que serão utilizados ao longo do trabalho, os quais serão enunciados sem demonstração e com as devidas referências para possíveis consultas.

No capítulo 2, estudamos o Problema 1. Para garantir a existência de uma solução positiva, usamos o método minimax; mais precisamente, associamos ao problema um funcional energia e mostramos que este tem a geometria do passo da montanha. Daí utilizamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha que nos garante a existência de uma sequência de Cerami no nível minimax do passo da montanha. Em seguida, mostramos que essa sequência de Cerami é limitada; esta será uma das principais dificuldades encontradas ao longo deste capítulo, uma vez que $g(x,u)$ não satisfaz a clássica condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Além disso, mostramos também que a sequência em questão possui uma subsequência que converge fortemente para uma solução fraca não-trivial do problema estudado.

O capítulo 3 é voltado para o estudo do Problema 2. A fim de encontrarmos soluções positivas, utilizamos argumentos variacionais, bem como o método de sub e supersolução.

Mais especificamente, associamos funcionais aos problemas em questão, e mostramos que os pontos críticos desses funcionais são as soluções procuradas dos problemas. A partir disto, usamos um princípio do máximo para garantirmos que a solução encontrada para o Problema 2 é, de fato, positiva, e, utilizando alguns resultados de regularidade devido à [35] e [47], obtemos que essa solução é $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Finalmente, no Apêndice, provamos alguns resultados utilizados no decorrer deste trabalho. Mais especificamente, apresentamos a formulação fraca da classe de problemas que estamos estudando e fazemos o estudo dos funcionais. Além disso, mostramos que as soluções do Problema 2 são uniformemente limitadas em $L^{\infty}(\Omega)$.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo deste capítulo apresentaremos alguns resultados e definições que serão necessários para uma melhor compreensão do estudo que será feito nos capítulos subsequentes.

1.1 Resultados Básicos

Proposição 1.1 ([10], Proposição 3.5,(iii), p. 58) *Sejam E um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em E . Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca de E , então $(\|x_n\|)$ é limitada e temos que*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Proposição 1.2 ([10], Teorema 3.18, p. 69) *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E, então existe uma subsequência $\left(x_{n_j}\right)$ de (x_n) que converge na topologia fraca de E.*

Lema 1.3 ([17], Teorema 1.2, Obs: 1.1, p. 8-9) *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional tal que:*
i) ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente,
ii) ϕ é coercivo, isto é, $\phi(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$.
Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que $\phi(u_0) = \inf_{u\in E} \phi(u)$. Além disso, se ϕ tem derivada de Gâteaux em u_0, então u_0 é um ponto crítico, isto é, $\phi'(u_0) = 0$.

Lema 1.4 ([49], Lema A.3, p. 98) *Se $1 \leq p < \infty$ e $a \geq 0, b \geq 0$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{1.1}$$

Lema 1.5 ([42], Lema A.05, p. 80) *Seja $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico* *em* $\mathbb{R}^N$*. Então*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y\right\rangle \geq \begin{cases} c_p\,|x-y|^p\,, & se \quad p \geq 2, \\ c_p\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Teorema 1.6 (Desigualdade de Hölder, [10], Teorema 4.6, p. 92) *Assuma que* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}\,.$$

Proposição 1.7 (Desigualdade de Minkowski, [24], Proposição 4.2.2, p. 81) *Sejam* $f, g \in L^p(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então* $f + g \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

Definição 1.8 ([36], p. 243) *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos. Um conjunto* E *de aplicações* $f : M \to N$ *diz-se uniformemente equicontínuo quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que* $d_M(x,y) < \delta$*, implica que* $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ *para toda* $f \in E$*.*

Teorema 1.9 (Ascoli-Arzelá, [10], Teorema 4.25, p. 111) *Sejam* K, N *espaços métricos e* E *um subconjunto limitado de aplicações contínuas* $f : K \to N$*, onde* K *é compacto. Se* $E \subset C(K,N)$ *é uniformemente equicontínuo, então o fecho de* E *em* $C(K,N)$ *é compacto, ou seja, toda sequência de* E *possui subsequência convergente em* $C(K,N)$*.*

Agora enunciaremos o importante Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 1.10 ([10], Teorema 4.2, p. 90) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$*. Suponhamos que:*
i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω *e*
ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \;\; q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema 1.11 ([10], Teorema 4.9, p. 94) *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Então podemos extrair uma subsequência (f_{n_k}) *de* (f_n) *tal que*
(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω *e*
(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p em* Ω *para todo* k*, com* $h \in L^p(\Omega)$.

Lema 1.12 ([10], Lema 4.1, p. 90) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaz:*
(i) $f_n \geq 0$ *q.t.p em* Ω*, para todo* n*,*
(ii) $\sup_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}x < \infty$.
Consideremos $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ *q.t.p em* Ω*. Então* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}x.$$

Teorema 1.13 ([28], Corolário 9.7, p. 101) *Sejam* X *espaço de Banach e* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Se* φ *possui um par de mínimos (ou máximos) locais, então* φ *possui um terceiro ponto crítico.*

1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos alguns aspectos da teoria dos espaços de Sobolev, espaços esses que possuem uma configuração adequada para aplicarmos os resultados da análise funcional.

Definição 1.14 *O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$*, é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \textit{cujas derivadas fracas}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \textit{existem e}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, ..., N \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Proposição 1.15 ([10], Proposição 9.1, p. 264) *Com a norma acima, temos que* $W^{1,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach para todo* $1 \leq p < \infty$*. Além disso,* $W^{1,p}(\Omega)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$*, e é separável para* $1 \leq p < \infty$.

Consideremos o seguinte subespaço de $W^{1,p}(\Omega)$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Observação 1.16 *O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ tem as mesmas propriedades que $W^{1,p}(\Omega)$ enunciadas na Proposição 1.15.*

Uma outra caracterização desse subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é dada como sendo o espaço das funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam sobre $\partial\Omega$, vale ressaltar que o valor de u sobre $\partial\Omega$ é entendido no sentido do traço. Pois para Ω limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1, existe um operador linear e limitado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$

i) $T(u) = u\,|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

ii) $\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\,\|u\|_{1,p}$, com a constante C dependendo apenas de p e Ω.

Proposição 1.17 ([49], Proposição A.1, p. 99) *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \max\{0, -u\}$ e $|u| = u^+ + u^-$ pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$.*

Proposição 1.18 (Desigualdade de Poincaré [10], Corolário 9.19, p. 290) *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_p \leq C\,\|\nabla u\|_p\,.$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_p$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é equivalente a norma $\|u\|_{1,p}$.

A fim de estabelecermos uma relação entre os espaços de Sobolev e os espaços de Lebesgue, estaremos utilizando ao longo do nosso trabalho as imersões de Sobolev, imersões estas que estão resumidas nos próximos resultados.

Teorema 1.19 ([10], Corolário 9.14, p. 284-285) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe C^1 com fronteira limitada, e $1 \leq p < \infty$. Segue que,*

$$\begin{cases} \text{se } 1 \leq p < N, \text{ então } W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \text{ onde } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \text{se } p = N, \text{ então } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\,,\ \forall q \in [N, +\infty)\,, \\ \text{se } p > N, \text{ então } W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)\,, \end{cases}$$

e todas essas imersões são contínuas.

Teorema 1.20 (Rellich-Kondrachov [10], Teorema 9.16, p. 285) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1. Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{cases} \textit{se } 1 \leq p < N, \textit{ então } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*) \textit{ onde } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \textit{se } p = N, \textit{ então } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [N, +\infty), \\ \textit{se } p > N, \textit{ então } W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right). \end{cases}$$

1.3 Alguns Resultados para o Operador p-Laplaciano

Estudaremos o operador $p-$Laplaciano definido por $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$. Este é um operador típico que surge na modelagem de vários problemas físicos, como por exemplo, na mecânica dos fluidos, no estudo da fluência de torção, em algumas equações de reação-difusão e na extração do petróleo. Por esse motivo, nas últimas décadas tem recebido grande atenção.

O $p-$Laplaciano é o exemplo padrão de operador elíptico quaselinear, observe que se $p = 2$, torna-se o operador clássico de Laplace. A seguir, veremos alguns resultados para este operador, que serão de grande importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Consideremos, o problema de autovalor para o $p-$Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, com $1 < p < \infty$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$.

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dizemos que $(u, \lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$, $u \neq 0$ é uma solução de (1.2), se eles verificam (1.2) no sentido fraco.

O primeiro autovalor de (1.2) foi estudado por Peral em [42] e é caracterizado por:

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx : w \in W_0^{1,p}(\Omega); \int_\Omega |w|^p \, dx = 1 \right\}.$$

Os resultados a seguir dão informações extremamente utéis sobre ele.

Lema 1.21 ([42], Lema 1.4.3, p. 20) *Seja $\lambda_1(\Omega)$ um autovalor de (1.2), então toda autofunção u_1 associada a $\lambda_1(\Omega)$ não muda de sinal em Ω , isto é, ou $u_1 > 0$ ou $u_1 < 0$.*

Lema 1.22 ([42], Lema 1.4.5, p. 21) *$\lambda_1(\Omega)$ é simples, isto é, se u, v são duas autofunções correspondente ao autovalor $\lambda_1(\Omega)$, então $u = \alpha v$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Lema 1.23 ([42], Lema 1.4.7, p. 24) *$\lambda_1(\Omega)$ é isolado, isto é, $\lambda_1(\Omega)$ é o único autovalor em $[0, \lambda_1 + a]$, para algum $a > 0$. Além disso, $\lambda_1(\Omega) > 0$.*

Os próximos resultados dizem respeito à regularidade da solução para problemas quaselineares.

Teorema 1.24 ([42], Teorema E.0.20, p. 100) *Sejam* $1 < p < N$ *e* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$|f(x,u)| \leq C(1+|u|^r) \text{ com } r+1 \leq p^*.$$

Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

O próximo resultado é uma consequência do Corolário 1.1 apresentado em [26].

Lema 1.25 ([26], Corolário 1.1, p. 884) *Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^N$ *que possui fronteira suave e seja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *tal que* $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$, *com* $1 < p < N$. *Então* $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para algum* $\alpha \in (0,1)$.

A seguir apresentamos uma extensão do Lema de Hopf para o operador $p-$Laplaciano.

Lema 1.26 ([42], Lema A.08, p. 83-84) *Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^N$ *que possui fronteira suave. Se* $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *e verifica*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &\geq 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Então $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ *sobre* $\partial\Omega$.

O próximo resultado é um princípio de comparação forte provado em [19].

Teorema 1.27 ([19], Teorema 2.1, p. 725) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ *um domínio limitado cuja* $\partial\Omega$ *é uma variedade conexa* C^2. *Consideremos a seguinte classe de problemas elípticos quaselinear*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) - b(x,u) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Assuma que $a(x,\nabla u)$ *satisfaz as condições* (1) *e* (2) *e* $b(x,u)$ *satisfaz a condição* (3) *e* (4) *enunciadas a seguir:*

(1) $a = (a_1, ..., a_N)$, *e cada* $a_i(x, 0) = 0$ *para* $i = 1, ..., N$.

(2) *Para todo conjunto compacto* $K \subset \mathbb{R}^N / \{0\}$ *existe uma constante* $\alpha \in (0, 1)$ *tal que* $\dfrac{\partial a_i}{\partial \eta_j} \in C^\alpha \left(\overline{\Omega} \times K\right)$ *para todo* $i, j = 1, ..., N$.

(3) $|b(x, u)| \leq \gamma (k + |u|)^{p-2} |u|$ *com* $\gamma \in (0, \infty)$ *e* $k \in [0, 1]$.

(4) *Seja* $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $b(x, u)$ *é não-decrescente em* u *e (1.3) tem uma única solução não-negativa* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Além disso, sejam $f, g \in L^\infty(\Omega)$ *tais que* $0 \leq f \leq g$ *com* $f \neq g$ *em* Ω *e assuma finalmente que* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *são soluções não-negativas de (1.3). Então as seguintes desigualdades são válidas para* u *e* v,

$$0 \leq u < v \text{ em } \Omega,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

O próximo resultado é um princípio de comparação forte para uma equação envolvendo o $p-$Laplaciano.

Proposição 1.28 ([25], Proposição 5.1, p. 1238) *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com* $\partial\Omega$ *de classe* $C^{2,\alpha}(\Omega)$ *para algum* $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \leq p - 1$. *Assumimos que* $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$, *são, respectivamente, soluções fracas de*

$$-\Delta_p u_1 = a\psi_p(u_1) + f_1,$$
$$-\Delta_p u_2 = a\psi_p(u_2) + f_2,$$

onde $-\infty < a < 0$, *e* $f_1, f_2 \in C^\alpha(\Omega)$, *com* $0 \leq f_1 \leq f_2$ *e* $0 \leq u_1 \leq u_2$ *q.t.p em* Ω. *Além disso, existe* $\delta > 0$ *suficientemente pequeno tal que* $|\nabla u_1|, |\nabla u_2| > \delta$. *E* $\Sigma \subset \Omega_\delta$ *é uma componente conexa de* Ω_δ, *então ou*

$$u_1 \equiv u_2 \text{ em } \Sigma, \text{ ou,}$$

$$u_1 < u_2 \text{ em } \overline{\Sigma} \backslash \partial\Omega \text{ e } \frac{\partial u_1}{\partial \nu} > \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \text{ em } \overline{\Sigma} \cap \partial\Omega.$$

Teorema 1.29 (Princípio do Máximo Fraco [16], Teorema 17.6, p. 237) *Suponha que* u_1, u_2 *satisfazem, para toda* $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^{p-2} |\nabla u_i| \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f_i \varphi \, \mathrm{d}x, \; i = 1, 2.$$

Se $f_1 \leq f_2$ *em* Ω *e* $u_1 \leq u_2$ *sobre* $\partial\Omega$. *Então* $u_1 \leq u_2$ *q.t.p em* Ω.

Teorema 1.30 ([48], Teorema 5, p. 200) *Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ q.t.p em Ω, $\Delta_p u \leq \beta(u)$ q.t.p em Ω com $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, não-decrescente, $\beta(0) = 0$ e, ou $\beta(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ mas $\int_0^1 (\beta(s)s)^{-1/p}\,\mathrm{d}s = \infty$.*
Então se u não é identicamente nula em Ω, u é positiva q.t.p em Ω.

Proposição 1.31 ([26], Proposição 1.1, p. 881) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^2 e $p > 1$. Se f é uma função definida em Ω, consideremos a seguinte equação*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assuma que $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e $u \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Então existe $C \geq 0$, dependendo de p, N, Ω e $\|f\|_\infty$ tal que

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C.$$

Teorema 1.32 ([49], Teorema 1.10, p. 27) *Se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u) \leq 0.$$

Então $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

O próximo Teorema é crucial para mostrarmos a multiplicidade de soluções. Brezis e Nirenberg em [11] estudaram o caso $p = 2$, o caso geral enunciado a seguir foi provado em [6], neste trabalho Azorero, Manfredi e Peral apresentam uma prova bastante técnica. Já Brock, Iturriaga e Ubilla deram uma ideia de uma nova prova em [12].

Teorema 1.33 ([6], Teorema 1.2, p. 387) *Seja $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory que para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ satisfaz*

$$|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^r),$$

para alguma constante $C > 0$ e $r \in [0, p^* - 1)$. Assuma que $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Consideremos o funcional associado a (1.4) definido por:

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Se $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *é um mínimo local de* J *em* $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, *então* u_0 *é também um mínimo local em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Capítulo 2

Existência de Solução Positiva para um Problema Quaselinear sem a Condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Neste capítulo estudaremos a existência de uma solução positiva para a seguinte classe de problemas envolvendo o operador $p-$Laplaciano

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u & = & g\left(x,u\right) & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{P}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $1 < p < N$ com $N \geq 2$ e a não-linearidade $g\left(x,u\right)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(G_1) $g : \Omega \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função de Carathéodory, isto é, $g\left(\cdot,s\right)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$ e $g\left(x,\cdot\right)$ é contínua q.t.p em $\overline{\Omega}$.

(G_2) Existem constantes positivas C_1, C_2 e $q_0 \in \left(p-1,p^*-1\right)$, onde p^* denota o expoente crítico de Sobolev dado por $p^* = Np/\left(N-p\right)$, tais que para todo $t \geq 0$ e $x \in \Omega$, temos

$$g\left(x,t\right) \leq C_1 + C_2 t^{q_0}.$$

(G_3) $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{g\left(x,t\right)}{t^{p-1}} = 0$, uniformemente q.t.p em Ω.

(G_4) Para qualquer $M > 0$, existe $C_0 > 0$ tal que, para todo $t \geq 0$ e $x \in \overline{\Omega}$, temos

$$g\left(x,t\right) \geq Mt^{p-1} - C_0.$$

(G_5) Existe $R > 0$ tal que a função $t \mapsto g\left(x,t\right)t^{1-p}$ é não-decrescente se $t > R$ q.t.p em Ω.

Os resultados apresentados ao longo desse capítulo se baseiam no artigo de Iturriaga, Lorca e Ubilla [27], sendo o resultado principal o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Assumindo que $g(x,u)$ satisfaz as hipóteses $(G_1)-(G_5)$. Então (P) tem uma solução positiva.*

Hipóteses do tipo $(G_1)-(G_5)$ tem sido utilizados por diversos autores, veja, por exemplo, [29], [38] e suas referências. No entanto, a maioria deles impõe a condição (G_5) em $[0,+\infty)$, isto é $R=0$, aqui esta condição somente é assumida no infinito. Vale ressaltar também que as hipóteses do Teorema 2.1 não implicam na condição de Ambrosseti- Rabinowitz (A-R), condição esta que para o $p-$Laplaciano é enunciada em [37] da seguinte forma:
Condição (A-R) Existe um número $\mu>p$ e $R_0>0$ tal que para todo $(x,t)\in\Omega\times[R_0,+\infty]$,

$$0<\mu G(x,t)\leq tg(x,t).$$

Consideremos $g(x,t)=t^{p-1}\ln(t+1)$ e vejamos que $g(x,t)$ satisfaz as hipóteses $(G_1)-(G_5)$ porém não satisfaz a condição (A-R).

De fato, claramente temos que a hipótese (G_1) é satisfeita, uma vez que $g(x,t)$ é uma função de Carathéodory.

Além disso, notemos que $g(x,t)\leq C_1+C_2t^{q_0}$, pois

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g(x,t)}{t^{q_0}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{p-1}\ln(1+t)}{t^{q_0}}.$$

Como $q_0>p-1$, segue que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{p-1}\ln(1+t)}{t^{q_0}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{p-1}\ln(1+t)}{t^{p-1}\left(t^{q_0-p+1}\right)}.$$

Usando L'Hospital obtemos

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g(x,t)}{t^{q_0}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+t}}{(q_0-p+1)\,t^{q_0-p}}=0.$$

Assim, $g(x,t)\leq C_1+C_2t^{q_0}$ e, portanto, temos que a hipótese (G_2) é satisfeita.

A hipótese (G_3) vale, pois

$$\lim_{t\to0^+}\frac{g(x,t)}{t^{p-1}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^{p-1}\ln(t+1)}{t^{p-1}}=\lim_{t\to0^+}\ln(t+1)=0.$$

Além disso, temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{t^{p-1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{p-1}\ln(t+1)}{t^{p-1}} = \lim_{t\to+\infty} \ln(1+t) = +\infty.$$

Donde obtemos que $g(x,t) \geq Mt^{p-1}$ para qualquer $M > 0$, e assim a hipótese (G_4) é satisfeita, isto é, existe C_0 tal que $g(x,t) \geq Mt^{p-1} - C_0$ para qualquer $M > 0$.

Notemos que a hipótese (G_5) vale; para isso consideremos $h(t) = g(x,t)\,t^{1-p} = \ln(t+1)$. Para qualquer $t > 0$ temos que $h(t)$ é não-decrescente. Assim para qualquer $R > 0$ segue que $h(t)$ é não-decrescente para todo $t > R$.

Agora, vejamos que $g(x,t) = t^{p-1}\ln(t+1)$ não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

De fato, se $g(x,t)$ satisfizesse tal condição, teríamos para todo $(x,t) \in \Omega \times [R, +\infty]$ e $\mu > p$ que

$$0 \leq \mu G(x,t) \leq tg(x,t),$$

isto é, para todo $t > R$,

$$\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} \leq \frac{1}{\mu} < \frac{1}{p}.$$

Notemos que,

$$\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} = \frac{\int_0^t s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s}{t^p\ln(t+1)}.$$

e,

$$\int_0^t s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s = \int_0^R s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s + \int_R^t s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Logo,

$$\int_0^t s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s \geq \int_R^t s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s.$$

Agora notemos que, usando L'Hospital, dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t+1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

Então, para $t > t_0$ (suficientemente grande), temos que

$$\left|\frac{\ln t}{\ln(t+1)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Donde obtemos que, para $t > t_0$ (suficientemente grande),

$$\ln t < (\varepsilon+1)\ln(t+1).$$

Daí, considerando $R = t_0$ temos que

$$\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} \geq \frac{\int_R^t s^{p-1}\ln(s+1)\,\mathrm{d}s}{t^p\ln(t+1)} = \frac{\int_R^t s^{p-1}\dfrac{\ln(s)}{(\varepsilon+1)}\,\mathrm{d}s}{t^p\ln(t+1)} = \frac{\dfrac{1}{(\varepsilon+1)}\int_R^t s^{p-1}\ln(s)\,\mathrm{d}s}{t^p\ln(t+1)}.$$

Sendo $u = \ln s$ e $dv = s^{p-1}ds$, segue que $du = \frac{1}{s}ds$ e $v = \frac{s^p}{p}$. Assim, usando integração por partes, segue que

$$\int_R^t s^{p-1}\ln(s)\,\mathrm{d}s = \frac{t^p}{p}\ln(t) - \frac{1}{p^2}t^p - C_R.$$

Logo,

$$\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} \geq \frac{1}{(\varepsilon+1)}\left(\frac{t^p}{p}\ln(t) - \frac{1}{p^2}t^p - C_R\right)\frac{1}{t^p\ln(t+1)}.$$

Usando as propriedades de limite, obtemos que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} \geq \frac{1}{(\varepsilon+1)}\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t^p\ln(t)}{pt^p\ln(t+1)} - \lim_{t\to+\infty}\frac{t^p}{p^2t^p\ln(t+1)} - \lim_{t\to+\infty}\frac{C_R}{t^p\ln(t+1)}\right).$$

Donde,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} \geq \frac{1}{(\varepsilon+1)p},$$

uma vez que $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^p\ln(t)}{pt^p\ln(t+1)} = \frac{1}{p}$ e $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^p}{p^2t^p\ln(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_R}{t^p\ln(t+1)} = 0.$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que para todo $t > R$

$$\frac{G(x,t)}{tg(x,t)} \geq \frac{1}{p}.$$

Consequentemente $g(x,t)$ não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

2.1 Formulação Variacional

Nosso objetivo é encontrar soluções fracas para (P), isto é, encontrar funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazem

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ao problema (P) está associado o funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

onde

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\, \mathrm{d}s.$$

Para mais detalhes, veja Apêndice A.

Temos também que $I \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ e para toda $u, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi\, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\varphi\, \mathrm{d}x.$$

Veja Apêndice B para os detalhes.

Observação 2.2 *Como estamos interessados em obter soluções fracas positivas, estenderemos a função $g(x,t)$ para valores negativos de t como a seguir,*

$$\tilde{g}(x,t) = \begin{cases} g(x,t) & se \quad (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty), \\ 0 & se \quad (x,t) \in \Omega \times (-\infty, 0). \end{cases}$$

No que segue, escreveremos $g(x,t)$ em vez de $\tilde{g}(x,t)$.

2.2 Existência de Solução

Inicialmente, relembremos a definição de sequência de Cerami, introduzida em [14] e [15] por Cerami.

Definição 2.3 *Seja E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset E$ é de Cerami no nível c se,*

$$\begin{aligned} J(u_n) &\to c, \qquad (2.1)\\ (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\|_* &\to 0. \end{aligned}$$

O resultado de existência será obtido aplicando-se a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha, o qual nos garante a existência de uma sequência de Cerami no nível do passo da montanha. A versão a seguir do Teorema pode ser encontrada em [44].

Teorema 2.4 *Seja E um espaço de Banach real, com espaço dual E^* e suponha que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaça a condição*

$$\max\{J(0), J(u_1)\} \le \alpha < \beta \le \inf_{\|u\|_E = \rho} J(u) \qquad (2.2)$$

para alguns $\alpha, \beta, \rho > 0$ e $u_1 \in E$ com $\|u_1\|_E > \rho$. Seja c_M definido por

$$c_M = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \le \tau \le 1} J(\gamma(\tau)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C(([0,1]), E) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = u_1\}$ *é o conjunto de caminhos contínuos unindo* 0 *e* u_1. *Então existe uma sequência* $(u_n) \subset E$ *tal que quando* $n \to +\infty$,

$$\begin{cases} J(u_n) & \to & c_M \geq \beta, \\ (1 + \|u_n\|_E) \|J'(u_n)\|_* & \to & 0. \end{cases}$$

2.2.1 Geometria do Funcional

Vejamos que as hipóteses $(G_1) - (G_4)$ asseguram que o funcional energia I associado a (P) tem a geometria do passo da montanha. Para isso utilizaremos os lemas a seguir:

Lema 2.5 *Assumindo as hipóteses* $(G_1) - (G_3)$, *existem* $\rho, \beta > 0$ *tais que* $I(u) \geq \beta$ *para toda* $u \in W_0^{1.p}(\Omega)$, *com* $\|u\| = \rho$.

Demonstração: De fato, pela hipótese (G_3) temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, \delta]$

$$g(x,t) \leq \varepsilon t^{p-1}. \tag{2.3}$$

Por (G_2), para $|t| > \delta$, temos que $\dfrac{|t|^{q_0}}{\delta^{q_0}} > 1$, logo

$$\begin{aligned} g(x,t) &\leq C_1 + C_2 t^{q_0} \\ &\leq C_1 \frac{|t|^{q_0}}{\delta^{q_0}} + C_2 |t|^{q_0} \\ &= \left(\frac{C_1}{\delta^{q_0}} + C_2\right) |t|^{q_0}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto de (2.3) e (2.4), dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, temos

$$g(x,t) \leq \varepsilon |t|^{p-1} + C_\varepsilon |t|^{q_0}.$$

Daí,

$$\int_0^s g(x,t)\, \mathrm{d}t \leq \int_0^s \varepsilon |t|^{p-1}\, \mathrm{d}t + \int_0^s C_\varepsilon |t|^{q_0}\, \mathrm{d}t.$$

Logo,

$$G(x,s) \leq \frac{\varepsilon}{p} |s|^p + \frac{C_\varepsilon}{q_0 + 1} |s|^{q_0+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p} \|u\|^p - \int_\Omega G(x,u)\, \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\varepsilon}{p} \int_\Omega |u|^p\, \mathrm{d}x - \frac{C_\varepsilon}{q_0+1} \int_\Omega |u|^{q_0+1}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\varepsilon}{p} \|u\|_p^p - \frac{C_\varepsilon}{q_0+1} \|u\|_{q_0+1}^{q_0+1}. \end{aligned}$$

Usando a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$ e como $p < p^*$ e $q_0 + 1 < p^*$ concluímos que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\varepsilon C'}{p}\|u\|^p - \frac{C_\varepsilon C''}{q_0+1}\|u\|^{q_0+1} \\ &= \frac{\|u\|^p}{p}\left(1 - \varepsilon C' - \frac{C_\varepsilon C'' p}{q_0+1}\|u\|^{(q_0+1)-p}\right). \end{aligned}$$

Escolhendo ε de forma que $1 - \varepsilon C' > 0$ e considerando $\|u\| = \rho$ suficientemente pequeno de forma que

$$1 - \varepsilon C' > \frac{C_\varepsilon C'' p}{q_0+1}\rho^{(q_0+1)-p},$$

teremos que

$$I(u) \geq \beta := \frac{\rho^p}{p}\left(1 - \varepsilon C' - \frac{C_\varepsilon C'' p}{q_0+1}\rho^{(q_0+1)-p}\right) > 0.$$

■

Lema 2.6 *Assumindo a hipótese* (G_4) *existe* $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *com* $\|u_1\| > \rho$, *tal que* $I(u_1) < 0$.

Demonstração: De fato, pela hipótese (G_4) temos que para qualquer $M > 0$ existe C_0 tal que para todo $t \geq 0$ e $x \in \overline{\Omega}$,

$$g(x,t) \geq M t^{p-1} - C_0.$$

Integrando temos,

$$\int_0^s g(x,t)\,\mathrm{d}t \geq M\int_0^s t^{p-1}\,\mathrm{d}t - C_0\int_0^s \mathrm{d}t,$$

isto é,

$$G(x,s) \geq \frac{M}{p}s^p - C_0 s. \tag{2.5}$$

Se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é não-nula, para todo $t > 0$, temos que

$$I(tv) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(tv)|^p - \int_\Omega G(x,tv)\,\mathrm{d}x.$$

Usando a desigualdade (2.5), segue que

$$\begin{aligned} I(tv) &\leq \frac{t^p}{p}\|v\|^p - \frac{M}{p}\int_\Omega |tv|^p\,\mathrm{d}x + C_0\int_\Omega tv\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^p}{p}\|v\|^p - \frac{t^p M}{p}\|v\|_p^p + C_0 t\|v\|_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(tv) \leq \frac{t^p}{p}\left(\|v\|^p - M\|v\|_p^p\right) + C_0 t\|v\|_1.$$

Tomando $M > \dfrac{\|v\|^p}{\|v\|_p^p}$ temos que $\|v\|^p - M\|v\|_p^p < 0$. Assim, quando $t \to +\infty$, temos que $I(tv) \to -\infty$.
Portanto, para t grande, basta tomar $u_1 = tv$ e teremos que $I(u_1) < 0$. ■

Assim pelos Lemas 2.5 e 2.6, temos que o funcional I satisfaz a condição (2.2) no Teorema 2.4, logo podemos garantir a existência de uma sequência de Cerami $(u_n) \subset W_0^{1.p}(\Omega)$.

Nosso objetivo a partir de agora é mostrar a limitação dessa sequência (u_n), vale ressaltar que este é um dos pontos primordiais desse capítulo, uma vez que a não-linearidade não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

2.2.2 Limitação da Sequência de Cerami

A fim de provar a limitação da sequência de Cerami utilizaremos alguns resultados técnicos que serão apresentados ao longo desta seção.

Lema 2.7 *Assumindo as hipóteses* (G_2) *e* (G_5), *existe uma constante positiva* C *tal que para toda* $v \leq u$ *q.t.p em* Ω,

$$G(x,u) - G(x,v) \leq \frac{(u^p - v^p)\, g(x,u)}{pu^{p-1}} + C.$$

Demonstração: Temos três casos a serem analisados:
Caso 1: $R \leq v \leq u$
Consideremos $H(x,t) := G\left(x, t^{1/p}\right)$. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo para $H(x,t)$, teremos que

$$H(x,t) - H(x,s) = \int_s^t H'(x,\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Notemos que

$$H'(x,\xi) = G'\left(x, \xi^{1/p}\right) \frac{\xi^{(1/p)-1}}{p}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} H(x,t) - H(x,s) &= \int_s^t \frac{G'\left(x,\xi^{1/p}\right)\xi^{(1/p)-1}}{p}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_s^t \frac{g\left(x,\xi^{1/p}\right)}{p\xi^{(p-1)/p}}\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Pela definição de H, temos que

$$G\left(x,t^{1/p}\right)-G\left(x,s^{1/p}\right)=\int_s^t \frac{g\left(x,\xi^{1/p}\right)}{p\xi^{(p-1)/p}}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.6}$$

Pela hipótese (G_5), se $t>s>R$ temos que $g\left(x,t^{1/p}\right)t^{(1-p)/p}\geq g\left(x,R^{1/p}\right)R^{(1-p)/p}$. Logo em (2.6), resulta que

$$G\left(x,t^{1/p}\right)-G\left(x,s^{1/p}\right)\leq \frac{g\left(x,t^{1/p}\right)}{pt^{(p-1)/p}}\left(t-s\right).$$

Assim, para $u^p=t$ e $v^p=s$, obtemos que

$$G\left(x,u\right)-G\left(x,v\right)\leq \frac{\left(u^p-v^p\right)g\left(x,u\right)}{pu^{(p-1)/p}}.$$

Neste caso, basta tomar qualquer $C>0$, e

$$G\left(x,u\right)-G\left(x,v\right)\leq \frac{\left(u^p-v^p\right)g\left(x,u\right)}{pu^{(p-1)/p}}+C.$$

Caso 2: $v\leq u\leq R$

Pela hipótese (G_2), temos que para todo $t\geq 0$ e $x\in\overline{\Omega}$,

$$g\left(x,u\right)\leq C_1+C_2t^{q_0}.$$

Assim,

$$\int_v^u g\left(x,t\right)\,\mathrm{d}t\leq \int_v^u C_1\,\mathrm{d}t+\int_v^u C_2t^{q_0}\,\mathrm{d}t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} G\left(x,u\right)-G\left(x,v\right) &\leq C_1\left(u-v\right)+\frac{C_2}{q_0+1}\left(u-v\right)^{q_0+1} \\ &\leq C_1\left(|u|+|v|\right)+\frac{C_2}{q_0+1}2^{q_0}\left(|u|^{q_0+1}+|v|^{q_0+1}\right). \end{aligned}$$

Como $|u|\leq R$ e $|v|\leq R$, segue que

$$G\left(x,u\right)-G\left(x,v\right)\leq 2C_1R+\frac{2^{q_0}C_2}{q_0+1}2R^{q_0+1}.$$

Portanto, temos que

$$G\left(x,u\right)-G\left(x,v\right)\leq C\left(R\right).$$

Caso 3: $v\leq R\leq u$

Aqui usaremos uma combinação dos casos acima para chegarmos ao resultado desejado. Notemos que

$$G(x,u) - G(x,v) = G(x,u) - G(x,R) + G(x,R) - G(x,v).$$

Como $v \leq R$, pelo Caso 2, temos que $G(x,R) - G(x,v) \leq C(R)$. Além disso, como $R \leq u$, pelo Caso 1, temos que

$$G(x,u) - G(x,R) \leq \frac{(u^p - R^p)\, g(x,u)}{pu^{(p-1)/p}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} G(x,u) - G(x,v) &\leq \frac{(u^p - R^p)\, g(x,u)}{pu^{(p-1)/p}} + C(R) \\ &\leq \frac{(u^p - v^p)\, g(x,u)}{pu^{(p-1)/p}} + C(R). \end{aligned}$$

Portanto, combinando os casos acima, temos que para toda $v \leq u$ q.t.p em Ω,

$$G(x,u) - G(x,v) \leq \frac{(u^p - v^p)\, g(x,u)}{pu^{p-1}} + C.$$

■

Tomando a sequência de Cerami (u_n), consideremos $w_n(x) = \dfrac{u_n(x)}{\|u_n\|}$. Como $\|w_n\| = 1$, temos que (w_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é reflexivo; então, pela Proposição 1.2, a menos de subsequência, temos que $w_n \rightharpoonup w$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, como $1 < p < N$ e Ω é limitado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ compactamente para todo $q \in [1, p^*)$, em particular para $p < p^*$, logo $w_n \to w$ em $L^p(\Omega)$. Pelo Teorema 1.11, a menos de subsequência, segue que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em Ω e $|w_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω, com $h \in L^p(\Omega)$.

Provaremos, no lema a seguir, que $w_n^+ \rightharpoonup w^+$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 2.8 $w_n^+ \rightharpoonup w^+$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Considerando $A_n^+ = \{x \in \Omega : w_n(x) \geq 0\}$, temos

$$w_n^+(x) = \mathcal{X}_{A_n^+}(x)\, w_n(x).$$

Desde que $\|w_n^+\| \leq \|w_n\| = 1$, temos que (w_n^+) é limitada e, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, então pela Proposição 1.2, a menos de subsequência, temos que $w_n^+ \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde v é uma função não-negativa. Consequentemente, pelos mesmos argumentos usados acima para (w_n), temos que $w_n^+(x) \to v(x)$ q.t.p em Ω. Notemos que, para n suficientemente grande,

$$A_n^+ \subset A^+ = \{x \in \Omega : w(x) \geq 0\}.$$

De fato, seja $x \in A_n^+$ então $w_n(x) \geq 0$, isto é, $w_n(x) = w_n^+(x)$. Como $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em Ω e $w_n^+(x) \to v(x) \geq 0$ q.t.p em Ω, pela unicidade do limite temos que $w(x) = v(x) \geq 0$. Logo, $x \in A^+$.

Além disso, uma vez que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em Ω, temos que para n suficientemente grande, $w_n(x) = w(x)$ q.t.p em Ω, ou seja, $w_n(x) \neq w(x)$ apenas em um conjunto de medida nula. Assim, tomando n_0 suficientemente grande, o conjunto

$$B_{n_0} = A^+ \backslash A_{n_0}^+ = \{x \in \Omega : w_{n_0}(x) \neq w(x)\}$$

tem medida nula.

Logo, $v(x) = w^+(x)$ q.t.p em Ω, donde concluímos que $w_n^+ \rightharpoonup w^+$em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Observação 2.9 *Utilizando o Teorema de Rellich-Kondrachov, concluímos que* $w_n^+ \to w^+$ *em* $L^p(\Omega)$.

A partir de agora, vamos supor, para futura contradição, que $\|u_n\| \to +\infty$.

Lema 2.10 *Assumindo a hipótese* (G_4), *temos que* $w^+ = 0$ *q.t.p em* Ω.

Demonstração: Primeiramente, notemos que (2.1) implica que existe uma sequência de números positivos (ζ_n) tal que $\zeta_n \to 0$ e $\|u_n\|^p = \displaystyle\int_\Omega (g(x, u_n) u_n + \zeta_n) \, dx$.

De fato, em (2.1) temos que

$$(1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_* \to 0.$$

Como

$$\|I'(u_n)\|_* = \sup_{\|\varphi\|=1} |I'(u_n) \varphi|,$$

temos que

$$(1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_* = (1 + \|u_n\|) \sup_{\|\varphi\|=1} |I'(u_n) \varphi|.$$

Considerando $\varphi = w_n$, então

$$\begin{aligned} (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_* &\geq (1 + \|u_n\|) \left| I'(u_n) \frac{u_n}{\|u_n\|} \right| \\ &\geq \|u_n\| \left| I'(u_n) \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|. \end{aligned}$$

Pela definição de $I'(u_n)$, segue que

$$\begin{aligned}(1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|_* &\geq \|u_n\|\left|\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{\|u_n\|}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \|u_n\|^p - \int_\Omega g(x,u_n)\,u_n\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_n\|^p - \int_\Omega g(x,u_n)\,u_n\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Assim, podemos garantir a existência de uma sequência de números reais (ζ_n), com $\zeta_n \to 0$ tal que

$$\|u_n\|^p = \int_\Omega (g(x,u_n)\,u_n + \zeta_n)\,\mathrm{d}x.$$

Então, temos

$$\frac{\|u_n\|^p}{\|u_n\|^p} = \int_\Omega \left(g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x.$$

Logo,

$$1 = \int_\Omega \left(g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x.$$

Consideremos agora $\Omega^+ := \{x \in \Omega,\ w(x) > 0\}$ e suponhamos que $|\Omega^+| > 0$.
Daí,

$$1 = \int_{\Omega^+} \left(g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x + \int_{\Omega\setminus\Omega^+} \left(g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x.$$

Assim, temos que

$$1 \geq \int_{\Omega^+} \left(g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x.$$

Como para $n > n_0$, temos que $u_n \geq 0$, então pela hipótese (G_4), para qualquer $M > 0$, segue que

$$\int_{\Omega^+} \left(g(x,u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x \geq \int_{\Omega^+} \left(\left(Mu_n^{p-1} - C_0\right)\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$1 \geq \int_{\Omega^+} \left(Mw_n^p - C_0\frac{u_n}{\|u_n\|^p} + \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\right)\mathrm{d}x.$$

Tomando o limite na desigualdade acima, temos que

$$1 \geq M \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega^+} w_n^p\,\mathrm{d}x - C_0 \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega^+}\frac{u_n}{\|u_n\|^p}\,\mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega^+}\frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p}\,\mathrm{d}x.$$

Pela Observação 2.9, $w_n^+ \to w^+$ em $L^p(\Omega)$, logo, $\displaystyle\int_{\Omega^+} w_n^p \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega^+} w^p \,\mathrm{d}x$. Desde que $\zeta_n \to 0$ e $\|u_n\|^p \to +\infty$ segue que $\dfrac{\zeta_n}{\|u_n\|^p} \to 0$. Uma vez que toda sequência convergente em $\mathbb{R}$ é limitada, temos que $\dfrac{\zeta_n}{\|u_n\|^p} \leq C$. Então como o domínio é limitado, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que $\displaystyle\int_{\Omega^+} \frac{\zeta_n}{\|u_n\|^p} \,\mathrm{d}x \to 0$. Além disso, notemos que $\dfrac{u_n(x)}{\|u_n\|^p} = w_n(x) \dfrac{1}{\|u_n\|^{p-1}}$, como $\|u_n\|^p \to +\infty$ e $w_n(x)$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, temos que $\dfrac{u_n(x)}{\|u_n\|^p} \to 0$ e $\dfrac{u_n(x)}{\|u_n\|^p} \leq C$, então, novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que $\displaystyle\int_{\Omega^+} \frac{u_n}{\|u_n\|^p} \,\mathrm{d}x \to 0$. Donde segue que

$$M \int_{\Omega^+} w^p \,\mathrm{d}x \leq 1,$$

o que é uma contradição, uma vez que M é uma constante arbitrária.
Logo, temos que $|\Omega^+| = 0$, isto é, $w^+ = 0$ q.t.p em Ω. ∎

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$m_n := \max_{0 \leq t \leq \|u_n\|} I(tw_n).$$

Uma vez que I é contínuo e $[0, \|u_n\|]$ é compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, então I atinge o máximo, ou seja, existe t_n, $0 \leq t_n \leq \|u_n\|$ tal que

$$m_n = I(t_n w_n)$$

No lema a seguir, mostraremos que $m_n \to +\infty$.

Lema 2.11 *Assumindo as hipóteses* $(G_2) - (G_4)$*, temos que* $m_n \to +\infty$.

Demonstração: Como $\|u_n\| \to +\infty$, então dado $M > 0$, temos que $M \leq \|u_n\|$ para n suficientemente grande. Além disso, temos que $m_n \geq I(Mw_n)$ para todo $M \in [0, \|u_n\|]$. Assim,

$$\liminf_{n\to\infty} m_n \geq \liminf_{n\to\infty} I(Mw_n). \tag{2.7}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} I(Mw_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} \int_\Omega |Mw_n|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega G(x, Mw_n) \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{M^p}{p} \|w_n\|^p - \int_\Omega G(x, Mw_n) \,\mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

Como $\|w_n\| = 1$, obtemos que

$$\liminf_{n\to\infty} I\left(Mw_n\right) = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{M^p}{p} - \int_\Omega G\left(x, Mw_n\right)\, \mathrm{d}x \right).$$

Uma vez que $w_n \to w$ q.t.p em Ω, e pelo Lema 2.10, $w^+ = 0$ q.t.p em Ω, temos que $Mw_n \to -Mw^-$ q.t.p em Ω. Usando que $G\left(x, \cdot\right)$ é contínua segue que $G\left(x, Mw_n\right) \to G\left(x, -Mw^-\right)$ q.t.p em Ω. Mas, por definição, temos que $G\left(x, -w^-\right) = 0$. Consequentemente,

$$G\left(x, Mw_n\right) \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, pelas hipóteses (G_2) e (G_3), vimos na demonstração do Lema 2.5, que

$$G\left(x, Mw_n\right) \leq \frac{\varepsilon M^p}{p} \left|w_n\right|^p + \frac{C_\varepsilon M^{q_0+1}}{q_0+1} \left|w_n\right|^{q_0+1}.$$

Como $|w_n| \leq h \in L^p\left(\Omega\right)$, segue que

$$G\left(x, w_n\right) \leq \frac{\varepsilon M^p}{p} h^p + \frac{C_\varepsilon M^{q_0+1}}{q_0+1} h^{q_0+1} \in L^1\left(\Omega\right).$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_\Omega G\left(x, Mw_n\right)\, \mathrm{d}x \to 0.$$

Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} I\left(Mw_n\right) = \frac{M^p}{p}.$$

Logo, em (2.7) temos que

$$\liminf_{n\to\infty} m_n \geq \frac{M^p}{p}.$$

Desde que M é uma constante arbitrária, através dessa última expressão obtemos a conclusão desejada, isto é $m_n \to +\infty$. ■

Agora, estamos prontos para mostrar o seguinte resultado.

Proposição 2.12 *Assumindo as hipóteses* $(G_2) - (G_5)$, *toda sequência de Cerami* (u_n) *associada ao funcional* I *é limitada em* $W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$.

Demonstração: Observemos que, pela definição de I, temos

$$\begin{aligned} I\left(t_n w_n\right) - I\left(u_n\right) &= \frac{1}{p}\int_\Omega \left|\nabla(t_n w_n)\right|^p\, \mathrm{d}x - \int_\Omega G\left(x, t_n w_n\right)\, \mathrm{d}x \\ &- \left(\frac{1}{p}\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^p\, \mathrm{d}x - \int_\Omega G\left(x, u_n\right)\, \mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(t_n w_n) - I(u_n) &= \frac{t_n^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x, t_n w_n)\, \mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega G(x, u_n)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a definição da sequência (w_n), e considerando $s_n = \dfrac{t_n}{\|u_n\|}$, obtemos

$$I(t_n w_n) - I(u_n) = \frac{t_n^p \|u_n\|^p}{p\|u_n\|^p} - \frac{\|u_n\|^p}{p} - \int_\Omega \left(G(x, s_n u_n) - G(x, u_n)\right) \mathrm{d}x.$$

Assim,

$$I(t_n w_n) - I(u_n) = \frac{t_n^p - \|u_n\|^p}{p} + \int_\Omega \left(G(x, u_n) - G(x, s_n u_n)\right) \mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Como $s_n = \dfrac{t_n}{\|u_n\|} \leq 1$ pois $t_n \in [0, \|u_n\|]$ temos que $s_n u_n(x) \leq u_n(x)$. Assim por (2.8) e pelo Lema 2.7 temos que, para alguma constante positiva C,

$$\begin{aligned} I(t_n w_n) - I(u_n) &\leq \frac{t_n^p - \|u_n\|^p}{p} + \int_\Omega \frac{(u_n^p - s_n^p u_n^p)\, g(x, u_n)}{p u_n^{p-1}}\, \mathrm{d}x + C \\ &= \frac{t_n^p - \|u_n\|^p}{p} + \int_\Omega \frac{(1 - s_n^p)\, u_n^p g(x, u_n)}{p u_n^{p-1}}\, \mathrm{d}x + C. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} I(t_n w_n) - I(u_n) &\leq \frac{t_n^p - \|u_n\|^p}{p} + \int_\Omega \frac{(1 - s_n^p)\, g(x, u_n)\, u_n}{p}\, \mathrm{d}x + C \\ &= \frac{t_n^p - \|u_n\|^p}{p} + \frac{(1 - s_n^p)}{p}\int_\Omega g(x, u_n)\, u_n \, \mathrm{d}x + C. \end{aligned}$$

Como $t_n = s_n \|u_n\|$, segue que

$$I(t_n w_n) - I(u_n) \leq \frac{s_n^p \|u_n\|^p - \|u_n\|^p}{p} + \frac{(1 - s_n^p)}{p}\int_\Omega g(x, u_n)\, u_n \, \mathrm{d}x + C.$$

Daí,

$$I(t_n w_n) - I(u_n) \leq \frac{(1 - s_n^p)}{p}\left(-\|u_n\|^p + \int_\Omega g(x, u_n)\, u_n \, \mathrm{d}x\right) + C.$$

Pela definição de $I'(u_n)\, u_n$, obtemos

$$I(t_n w_n) - I(u_n) \leq \frac{(1 - s_n^p)}{p}\left(-I'(u_n)\, u_n\right) + C.$$

Assim, tomando o limite na desigualdade acima temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I(t_n w_n) - I(u_n)\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(1 - s_n^p)}{p}\left(-I'(u_n)\, u_n\right) + C\right),$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} m_n - \lim_{n\to+\infty} I(u_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(1-s_n^p)}{p} \left(-I'(u_n)\, u_n\right) + C \right). \tag{2.9}$$

Pelas propriedades da sequência (u_n), temos que $I'(u_n)\, u_n \to 0$ e $I(u_n) \to c$. Além disso, temos que (s_n) é limitada pois $s_n = \dfrac{t_n}{\|u_n\|} \leq 1$. Assim, o lado esquerdo da desigualdade (2.9) diverge, pois pelo Lema 2.11, $m_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, e o lado direito da mesma desigualdade é limitado por alguma constante positiva C, o que é uma contradição. Portanto (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e a Proposição está provada. ■

2.3 Prova do Teorema 2.1

Demonstração: Pela Proposição 2.12 temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo podemos extrair uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, como $1 < p < N$ e Ω é limitado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov temos que para todo $q \in [1, p^*)$, a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta. Portanto, $u_{n_k} \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$.
Além disso, $g(x, u_{n_k})$ é limitada em $L^{q'}(\Omega)$, pois,

$$\|g(x, u_{n_k})\|_{q'} = \left(\int_\Omega |g(x, u_{n_k})|^{q'} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q'}$$

E pela hipótese (G_2) temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |g(x, u_{n_k})|^{q'} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q'} &\leq \left(\int_\Omega \left|C_1 + C_2 u_{n_k}^{q_0}\right|^{q'} \mathrm{d}x \right)^{1/q'} \\
&\leq \left(\int_\Omega 2^{q'-1} C_1^{q'} \mathrm{d}x \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega 2^{q'-1} C_2^{q'} \left| u_{n_k}^{q_0 q'} \right| \mathrm{d}x \right)^{1/q'} \\
&\leq C(q', \Omega) + C(q', \Omega) \|u_{n_k}\|_{q_0 q'}^{q_0}.
\end{aligned}$$

Considerando $q = q_0 + 1$, temos que $q_0 q' = (q-1)\, q' = q$ e $p < q < p^*$. Assim, obtemos que

$$\|g(x, u_{n_k})\|_{q'} \leq C.$$

Temos que $I'(u_{n_k})\, \varphi \to 0$ para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em particular, para $\varphi = u$ segue que $I'(u_{n_k})\, u \to 0$. Além disso, como (u_{n_k}) é uma sequência de Cerami e limitada, temos que $|I'(u_{n_k}) u_{n_k}| \leq \|I'(u_{n_k})\|_* \|u_{n_k}\| \to 0$, donde podemos concluir que, $I'(u_{n_k})(u_{n_k} - u) \to 0$.
Notemos que

$$I'(u_{n_k})(u_{n_k} - u) = \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla (u_{n_k} - u) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u) \,\mathrm{d}x. \tag{2.10}$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\left|\int_\Omega g\left(x,u_{n_k}\right)\left(u_{n_k}-u\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left\|g\left(x,u_{n_k}\right)\right\|_{q'}\left\|u_{n_k}-u\right\|_q \to 0.$$

Logo por (2.10), obtemos que

$$\int_\Omega \left|\nabla u_{n_k}\right|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla\left(u_{n_k}-u\right)\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{2.11}$$

Como $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e vale (2.11), então pelo Teorema 1.32, $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$I'\left(u_{n_k}\right)\varphi \to I'(u)\varphi \text{ e } I'\left(u_{n_k}\right)\varphi \text{ é contínuo.}$$

Como $I'\left(u_{n_k}\right)\varphi \to 0$, temos que u é solução fraca de (P).
Notemos que u é solução não-trivial. Como I é contínuo e $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos que

$$I\left(u_{n_k}\right) \to I(u).$$

Mas, pelo Teorema 2.4, temos que $I\left(u_{n_k}\right) \to c_M > 0$. Então, pela unicidade do limite, segue que $I(u) = c_M$. Como $I(0) = 0$ e $c_M \neq 0$ segue que u é solução não-trivial.
Agora mostremos que a solução encontrada u é não negativa. Para isso, consideremos a seguinte função teste $\varphi = u^- = \max\{0,-u\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u^-\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x,u)\,u^-\,\mathrm{d}x.$$

Notemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u^-\,\mathrm{d}x = \int_{[u\geq 0]} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u^-\,\mathrm{d}x + \int_{[u\leq 0]} -\left|\nabla u^-\right|^{p-2}\nabla u^-\nabla u^-\,\mathrm{d}x.$$

Desde que $\nabla u^- = 0$ em $[u \geq 0]$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u^-\,\mathrm{d}x = \int_{[u\leq 0]} -\left|\nabla u^-\right|^{p}\,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Além disso,

$$\int_\Omega g(x,u)\,u^-\,\mathrm{d}x = \int_{[u\geq 0]} g(x,u)\,u^-\,\mathrm{d}x + \int_{[u\leq 0]} g(x,u)\,u^-\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) temos que

$$\left\|u^-\right\|^p_{W_0^{1,p}[u\leq 0]} = 0,$$

isto é, $u^- = 0$ q.t.p em Ω.

Como $u = u^+ - u^-$ e $u^- = 0$ q.t.p em Ω, segue que $u = u^+$, ou seja, $u \geq 0$, como queríamos.

Finalmente, como u é solução de (P) e temos que $|g(x,u)| \leq C_1 + C_2 u^{q_0}$ com $q_0 < p^* - 1$, pelo Teorema 1.24, temos que $u \in L^\infty(\Omega)$ e desde que $|\Delta_p u| \leq C_1 + C_2 u^{q_0} \in L^\infty(\Omega)$, pelo Lema 1.25 obtemos que $u \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso $\Delta_p u \in L^2(\Omega)$, pois Ω é limitado. Assim $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$. Uma vez que $-\Delta_p u = g(x,u) \geq 0$, temos que $\Delta_p u \leq 0$. Então, considerando $\beta(s) = 0$ para todo $s \in [0,+\infty)$, temos que $\Delta_p u \leq \beta(s)$ e todas as hipóteses do Teorema 1.30 são satisfeitas. Como já vimos que u não é identicamente nula, segue que $u_0 > 0$ q.t.p em Ω.

Portanto, o problema (P) tem uma solução positiva. ■

2.4 Uma Aplicação do Teorema 2.1

A fim de apresentar uma aplicação do Teorema 2.1, mostraremos a existência de uma solução positiva do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |\nabla u|^p + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$ e a não-linearidade $f(x,t)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(F_1) $f : \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função de Carathéodory.

(F_2) Existem $q \in \left(0, \dfrac{p^2}{(N-p)(p-1)}\right)$ e uma constante positiva b tais que para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,+\infty)$,

$$f(x,t) \leq b e^{qt}.$$

(F_3) $\lim_{t \to 0^+} f(x,t)\, t^{1-p} = 0$, uniformemente para todo $x \in \Omega$.

(F_4) Dado $M > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$,

$$f(x,t) \geq M.$$

(F_5) Existe $R > 0$ tal que a função $t \mapsto f(x,t)\, t^{1-p}$ é não-decrescente se $t \geq R$ q.t.p em Ω.

Nesta seção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.13 *Assuma que $f(x,t)$ satisfaz $(F_1) - (F_5)$. Então o problema (2.14) tem uma solução positiva.*

Observação 2.14 *Resultados de existência para problemas do tipo (2.14) foram estudados para o caso em que $p = 2$ e $f(x,u) = f(x)$ em [32] e [33], posteriormente foram consideradas equações elípticas com crescimento quadrático com respeito ao gradiente em [2] e [9]. No entanto a maioria dos trabalhos lidam com o caso em que a não-linearidade $f(x,u)$ não depende de u ou está entre potências de u, o que não ocorre neste trabalho, uma vez que consideramos, por exemplo, funções com crescimento exponencial no infinito, veja (F_2).*

A seguir, exibiremos um exemplo que verifica as hipóteses do Teorema acima.

Exemplo 2.15 *Um exemplo de não-linearidade que satisfaz as hipóteses $(F_1) - (F_5)$ é dado por*

$$f(x,t) = a(x)\, t^{p-1}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right),$$

onde $a(x)$ é uma função contínua positiva em $\overline{\Omega}$ com $\varepsilon > 0$ e $0 < q < \dfrac{p^2}{(N-p)(p-1)}$.

De fato, claramente temos que $f(\cdot,t)$ é uma função mensurável para todo $t \in [0,+\infty)$ e $f(x,\cdot)$ é uniformemente contínua q.t.p em Ω. Assim, temos que $f : \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função de Carathéodory. Logo, a hipótese (F_1) é satisfeita.

Quanto à hipótese (F_2), basta considerarmos $b = 2e^q \max_{x\in\overline{\Omega}} a(x)$ e teremos que $f(x,t) \le be^{qt}$. Para isso, notemos que

$$\begin{aligned} f(x,t) &= a(x)\, t^{p-1}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right) \\ &\le a(x)\, t^{p-1}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt}\right). \end{aligned}$$

Como $e^{qt} > t^{\varepsilon}$ para todo $t \in [0,+\infty)$, segue que

$$f(x,t) \le 2a(x)\left(t^{p-1}e^{qt}\right).$$

Temos, também, que $t^{p-1} < e^q$ para todo $t \in [0,+\infty)$, logo

$$f(x,t) \le 2a(x)\, e^q e^{qt} \le 2\max_{x\in\overline{\Omega}} a(x)\, e^q e^{qt}.$$

Donde, concluímos que, para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,+\infty)$, $f(x,t) \le be^{qt}$.

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} f(x,t)\, t^{1-p} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{a(x)\, t^{p-1}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right)}{t^{p-1}} \\ &= a(x) \lim_{t\to 0^+}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{qt} = 1$ e $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\varepsilon} = 0$, obtemos que, para todo $x \in \Omega$,

$$\lim_{t\to 0^+} f(x,t)\, t^{1-p} = 0.$$

O que implica que a hipótese (F_3) é satisfeita.

Seja $M = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} a(x)\, e^q = a(x_0)\, e^q > 0$, considerando $t_0 \geq 1$, mostraremos que para todo $t \geq t_0$, temos $f(x,t) \geq M$. De fato,

$$f(x,t) = a(x)\, t^{p-1}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right).$$

Como $t \geq t_0$, temos que

$$f(x,t) \geq a(x)\, t_0^{p-1}\left(t_0^{\varepsilon} + e^{qt_0} - 1\right).$$

Por outro lado, desde que $t_0 \geq 1$, segue que

$$f(x,t) \geq a(x)\, e^q \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} a(x)\, e^q = a(x_0)\, e^q = M.$$

O que garante que a hipótese (F_4) vale.

E por fim, seja $h(t) = f(x,t)\, t^{1-p}$, ou seja,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{a(x)\, t^{p-1}\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right)}{t^{p-1}} \\ &= a(x)\left(t^{\varepsilon} + e^{qt} - 1\right). \end{aligned}$$

Notemos que $h(t)$ é não decrescente para todo $t \in [0, +\infty)$, pois, como $a(x)$ é positiva, obtemos que

$$h'(t) = a(x)\left(\varepsilon t^{\varepsilon-1} + q e^{qt}\right) > 0.$$

Em partircular, para $t \geq R$, temos que (F_5) é satisfeita, qualquer que seja R.

Donde concluímos que a função dada $f(x,t)$ satisfaz as hipóteses $(F_1) - (F_5)$.

2.5 Prova do Teorema 2.13

Inicialmente consideremos o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta_p v = h(x,v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde

$$h(x,v) = \left(\frac{v+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,(p-1)\ln(v+1)).$$

Notemos que se que $f(x,s)$ satisfaz $(F_1)-(F_5)$, então a função $h(x,t)$ satisfaz as hipóteses $(G_1)-(G_5)$.

De fato, claramente temos que $h(\cdot,t)$ é uma função mensurável para todo $t \in [0,+\infty)$ e $h(x,\cdot)$ é contínua q.t.p em Ω, pois é a composta de funções contínuas, uma vez que por (F_1) temos que $f(x,\cdot)$ é contínua q.t.p em Ω. Assim temos que $h : \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função de Carathéodory. Logo, a hipótese (G_1) é satisfeita.
Quanto à hipótese (G_2), consideramos $C_2 = \dfrac{b}{(p-1)^{p-1}}$ e $q_0 = q(p-1)+(p-1)$, teremos que $0 \leq h(x,t) \leq C_1 + C_2 t^{q_0}$. Para isso, inicialmente, notemos que $q_0 \in (p-1, p^*-1)$. Com efeito, claramente $q_0 > p-1$. Mostremos, então, que $q_0 < p^*-1$. Como, por (F_2), temos que $q \in \left(0, \dfrac{p^2}{(N-p)(p-1)}\right)$, segue que $q_0 < \dfrac{p^2}{(N-p)} + (p-1)$. Logo,

$$\begin{aligned} q_0 - p^* + 1 &< \frac{p^2}{(N-p)} + (p-1) - \frac{Np}{(N-p)} + 1 \\ &= \frac{p^2 + (N-p)(p-1) - Np + (N-p)}{(N-p)} = 0. \end{aligned}$$

Donde concluímos que $q_0 < p^* + 1$.

Agora vejamos que $0 \leq h(x,t) \leq C_1 + C_2 t^{q_0}$. De fato, por definição, temos que $h(x,t) \geq 0$. E além disso, desde que

$$h(x,t) = \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,(p-1)\ln(t+1)),$$

por (F_2), temos que

$$\begin{aligned} h(x,t) &\leq \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} b e^{q(p-1)\ln(t+1)} \\ &= \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} b e^{\ln(t+1)^{q(p-1)}}. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$h(x,t) \leq \frac{(t+1)^{p-1}}{(p-1)^{p-1}} b (t+1)^{q(p-1)},$$

ou seja,

$$h(x,t) \leq \frac{b(t+1)^{q_0}}{(p-1)^{p-1}}.$$

Logo, para todo $t \geq t_0$, com t_0 é suficientemente grande, temos que

$$h(x,t) \leq \frac{bt^{q_0}}{(p-1)^{p-1}} = C_2 t^{q_0}. \tag{2.16}$$

E como $h(x,t)$ é contínua e $[0,t_0]$ é um conjunto compacto, temos que existe C_1 tal que para todo $t \in [0,t_0]$,

$$h(x,t) \leq C_1. \tag{2.17}$$

Portanto de (2.16) e (2.17) para todo $t \geq 0$, temos que a hipótese (G_2) é satisfeita, ou seja,

$$h(x,t) \leq C_1 + C_2 t^{q_0}.$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} h(x,t)\, t^{1-p} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{p-1}} \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,(p-1)\ln(t+1)) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{p-1}} \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,(p-1)\ln(t+1)) \frac{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(x,t)}{t^{p-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(t+1)^{p-1}[\ln(t+1)]^{p-1}}{t^{p-1}} \frac{f(x,(p-1)\ln(t+1))}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}.$$

Usando as propriedades de limite, segue-se que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(x,t)}{t^{p-1}} = \lim_{t\to 0^+} (t+1)^{p-1} \lim_{t\to 0^+} \frac{[\ln(t+1)]^{p-1}}{t^{p-1}} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,(p-1)\ln(t+1))}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}. \tag{2.18}$$

Por (F_3), temos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,(p-1)\ln(t+1))}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}} = 0.$$

Além disso, temos que $\lim_{t\to 0^+} (t+1)^{p-1} = 1$ e

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{[\ln(t+1)]^{p-1}}{t^{p-1}} = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\ln(t+1)}{t}\right)^{p-1}.$$

Usando L'Hospital, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{[\ln(t+1)]^{p-1}}{t^{p-1}} = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{p-1} = 1.$$

Portanto, por (2.18), temos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h(x,t)}{t^{p-1}} = 0.$$

O que implica que a hipótese (G_3) é satisfeita.

Agora, vamos mostrar a hipótese (G_4), isto é, que para qualquer $M > 0$, existe C_0 tal que para todo $t \geq 0$,

$$h(x,t) \geq Mt^{p-1} - C_0.$$

De fato, por (F_4) temos que, dado $M' > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que $f(x,s) \geq M'$ para todo $s(t) > s_0$, com $s(t) = (p-1)\ln(t+1)$. Assim temos que, para todo $s(t) > s_0$,

$$h(x,t) = \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,s(t)) \geq M' \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1}.$$

Como $t+1 \geq t$, segue que $(t+1)^{p-1} \geq t^{p-1}$; logo, para todo $s(t) > s_0$,

$$h(x,t) \geq \frac{M' t^{p-1}}{(p-1)^{p-1}}.$$

Notemos que se $s(t) > s_0$, então $t > t_0$. De fato, se $s(t) > s_{0,}$ então

$$(p-1)\ln(t+1) > (p-1)\ln(t_0+1),$$

logo $\ln(t+1) > \ln(t_0+1)$. Uma vez que a função logaritmo é crescente, temos que $t+1 > t_0+1$, e portanto $t > t_0$. Logo, considerando $M = \dfrac{M'}{(p-1)^{p-1}}$, temos que, para todo $t > t_0$,

$$h(x,t) \geq Mt^{p-1}. \tag{2.19}$$

Notemos que para $t \in [0, t_0]$ com $t_0 < \left(\dfrac{C_0}{M}\right)^{1/(p-1)}$, temos que $C_0 > Mt^{p-1}$ e

$$h(x,t) \geq Mt^{p-1} - C_0. \tag{2.20}$$

Portanto, de (2.19) e (2.20) segue que a hipotése (G_4) vale, isto é, para todo $t \geq 0$ existe C_0 tal que

$$h(x,t) \geq Mt^{p-1} - C_0.$$

E por fim, seja $p(t) = h(x,t)\, t^{1-p}$, ou seja,

$$\begin{aligned} p(t) &= \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,(p-1)\ln(t+1)) \frac{1}{t^{p-1}} \\ &= \left(\frac{t+1}{p-1}\right)^{p-1} f(x,(p-1)\ln(t+1)) \frac{1}{t^{p-1}} \frac{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}. \end{aligned}$$

Donde

$$p(t) = \left(\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}\right)^{p-1} \frac{f(x,(p-1)\ln(t+1))}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}.$$

Por (F_5), existe $R' > 0$ tal que $\dfrac{f(x,(p-1)\ln(t+1))}{[(p-1)\ln(t+1)]^{p-1}}$ é não-decrescente se $(p-1)\ln(t+1) > R'$, ou seja, se $t > e^{R'/(p-1)} - 1$.

Resta-nos mostrar, então, que $l(t) = \dfrac{(t+1)\ln(t+1)}{t}$ é não-decrescente, isto é, $l'(t) \geq 0$.
Para isso, notemos que

$$l'(t) = \frac{\left(\ln(t+1) + (t+1)\frac{1}{(t+1)}\right)t - [(t+1)\ln(t+1)]}{t^2}.$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned} l'(t) &= \frac{t\ln(t+1) + t - t\ln(t+1) - \ln(t+1)}{t^2} \\ &= \frac{t - \ln(t+1)}{t^2}. \end{aligned}$$

Assim, desde que $t \geq \ln(t+1)$ para todo $t \geq 0$, segue que, $l'(t) > 0$, ou seja, $l(t)$ é não decrescente para todo $t \geq 0$.
Portanto, considerando $R = \min\left\{0, e^{R'/(p-1)} - 1\right\}$ segue que para todo $t > R$, $p(t)$ é não-decrescente q.t.p em Ω. Portanto, a hipótese (G_5) é satisfeita.
Como a função $h(x,t)$ satisfaz as hipóteses $(G_1) - (G_5)$, aplicando o Teorema 2.1 temos que o problema (2.15) possui solução positiva, isto é, existe $v > 0$, solução de (2.15).

Consideremos $u = (p-1)\ln(v+1)$ e mostremos que u é solução fraca do problema (2.14), ou seja, que u satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \tilde{\varphi}\, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)\, \tilde{\varphi}\, \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^p\, \tilde{\varphi}\, \mathrm{d}x = 0,$$

para toda $\tilde{\varphi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Seja $v = e^{u/(p-1)} - 1 \in C^1(\Omega)$ solução fraca de (2.15), então para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi\, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x,v)\, \varphi\, \mathrm{d}x = 0. \tag{2.21}$$

Notemos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{e^{u/p-1}}{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Donde

$$|\nabla v| = \frac{e^{u/p-1}}{p-1}\,|\nabla u|\,.$$

Logo, por (2.21) temos que

$$\int_\Omega \left(\frac{e^{u/p-1}}{p-1}\right)^{p-2} |\nabla u|^{p-2}\,\frac{e^{u/p-1}}{p-1}\nabla u\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\frac{e^{u/p-1}}{p-1}\right)^{p-1} f\left(x,(p-1)\ln\left(e^{u/p-1}\right)\right)\varphi\,\mathrm{d}x = 0.$$

Isto é,

$$\int_\Omega \left(\frac{e^{u/p-1}}{p-1}\right)^{p-1} |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\frac{e^{u/p-1}}{p-1}\right)^{p-1} f\left(x,u\right)\varphi\,\mathrm{d}x = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\left(x,u\right)\frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\varphi\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.22}$$

Considerando a função teste

$$\tilde{\varphi} = \frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\varphi.$$

Segue que

$$\nabla\tilde{\varphi} = \frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\nabla\varphi + \frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\nabla u\varphi.$$

Daí, por (2.22) temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\left(\nabla\tilde{\varphi} - \frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\nabla u\varphi\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\left(x,u\right)\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\nabla\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\nabla u\frac{e^u}{(p-1)^{p-1}}\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\left(x,u\right)\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\nabla\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^{p}\,\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\left(x,u\right)\tilde{\varphi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Portanto, u é solução fraca do problema (2.14) como queríamos demonstrar.

Capítulo 3

Multiplicidade de Soluções Positivas para um Problema Quaselinear com Sinal Indefinido

Neste capítulo, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de problemas quaselineares:

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ é o operador p-Laplaciano, λ é um parâmetro positivo, Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, $1 < p < N$ e a não-linearidade $f(x,t)$ se comporta como $|t|^{p-1}$ próximo de zero e no infinito.

Os resultados apresentados ao longo deste capítulo são baseados no artigo de Brock, Iturriaga e Ubilla. Veja [12]. Para provar tais resultados, utilizaremos os métodos de sub e supersolução e o de minimização.

Nosso principal objetivo é especificar um intervalo para $\lambda \in (0,+\infty)$ no qual exista multiplicidade de soluções positivas para (P_λ). Para isso, assumiremos as seguintes condições sobre a não-linearidade $f(x,t)$:

(H_1) $f : \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $f(x,\cdot)$ é uniformemente contínua q.t.p em Ω e para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty)$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq C\left(1 + t^r\right),$$

com $r \in [0, p^* - 1)$, onde p^* denota o expoente crítico de Sobolev, isto é, $p^* = Np/(N-p)$.

(H_2) Existe uma função contínua não-decrescente $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfazendo

$g(0) = 0$ e tal que a função $t \mapsto f(x,t) + g(t)$ é não-decrescente uniformemente para todo $x \in \overline{\Omega}$.

(H_3) $\lim_{t \to 0^+} f(x,t)\, t^{1-p} = 0$, uniformemente para todo $x \in \overline{\Omega}$.

(H_4) $\limsup_{t \to \infty} f(x,t)\, t^{1-p} \leq 0$, uniformemente para todo $x \in \overline{\Omega}$.

(H_5) Nesta hipótese, temos duas situações:

(i) $f(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$, ou

(ii) Existem $\delta_1 > 0$ e uma bola $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset \Omega$, $\varepsilon_0 > 0$, $x_0 \in \Omega$, tais que

$$F(x,t) > 0 \text{ para todo } (x,t) \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \times (0,\delta_1],$$

onde

$$F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\, \mathrm{d}s,$$

e existe $q > p-1$ tal que a função $t \mapsto t^{-q} f(x,t)$ é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$ q.t.p em Ω.

(H_6) Existem constantes $C_0 \geq 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que a função $t \mapsto f(x,t) + C_0 t^{p-1}$ é não-decrescente para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,\delta_0]$.

O próximo teorema contém o resultado principal desse capítulo.

Teorema 3.1 *Assumindo que $f(x,t)$ satisfaz as condições $(H_1)-(H_6)$, existe uma constante positiva $\overline{\lambda}$ tal que o problema (P_λ) tem pelo menos duas soluções positivas para $\lambda > \overline{\lambda}$, pelo menos uma solução positiva para $\lambda = \overline{\lambda}$ e não possui solução positiva para $\lambda < \overline{\lambda}$.*

Observação 3.2 *Como estamos interessados em encontrar soluções positivas para (P_λ), por conveniência, estendemos a função $f(x,t)$ para valores negativos de t, da seguinte forma:*

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & se \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \\ 0 & se \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times (-\infty,0) \end{cases},$$

e passamos a estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \tilde{f}(x,u) \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\tilde{P}_\lambda$}$$

em vez do problema (P_λ).

Vejamos exemplos de funções que satisfazem as condições do Teorema 3.1.

Exemplo 3.3 *Uma típica não-linearidade satisfazendo as hipóteses* $(H_1)-(H_5)\,(i)$ *e* (H_6) *é*

$$f(x,t) = a(x)\ln(1+t^q),$$

onde $p-1<q$, $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, *com* $\inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} a(x) > 0$.

De fato, claramente temos que $f(x,t)$ é uma função mensurável e $f(x,\cdot)$ é uniformemente contínua q.t.p em Ω. Além disso,

$$|f(x,t)| = |a(x)|\,|\ln(1+t^q)|.$$

Donde,

$$|f(x,t)| \le C(1+t^q).$$

Logo, a hipótese (H_1) é satisfeita.

Quanto à hipótese (H_2), esta é de verificação imediata pois basta considerar $g(t)$ identicamente nula e assim teremos que a função $t \mapsto f(x,t) + g(t)$ é não-decrescente.

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} f(x,t)\,t^{1-p} &= \lim_{t\to 0^+} a(x)\ln(1+t^q)\,t^{1-p} \\
&= a(x)\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t^q)}{t^{p-1}}.
\end{aligned}$$

Como $p-1<q$, obtemos que

$$\lim_{t\to 0^+} f(x,t)\,t^{1-p} = 0,$$

o que implica a hipótese (H_3).

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to +\infty} f(x,t)\,t^{1-p} &= \lim_{t\to +\infty} a(x)\ln(1+t^q)\,t^{1-p} \\
&= a(x)\lim_{t\to +\infty} \ln(1+t^q)\,t^{1-p} \\
&= a(x)\lim_{t\to +\infty} \frac{qt^{q-1}}{p-1t^{p-2}+p-1t^{q+p-2}}.
\end{aligned}$$

Como $q+p-2>q-1$, temos que

$$\lim_{t\to +\infty} f(x,t)\,t^{1-p} = 0,$$

o que garante a hipótese (H_4).

Além disso, desde que $f(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$, temos que $f(x,t)$ satisfaz $(H_5)(i)$.

E por fim, como $f(x,t)$ é não decrescente para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$, temos que (H_6) é satisfeita para quaisquer constantes $C_0 \geq 0$ e $\delta_0 > 0$.

Exemplo 3.4 *Agora, a não-linearidade*

$$f(x,t) = a_1(x)\, t^q \left(1 - a_2(x)\, t^r\right),$$

com $p-1 < q$, $r > 0$, $a_1(x), a_2(x) \in L^\infty(\Omega)$, *com* $a_1(x)$ *não-negativa e* $\inf\limits_{x \in \overline{\Omega}} a_2(x) > 0$, *satisfaz as hipóteses* $(H_1) - (H_5)(ii)$ *e* (H_6).

Com efeito, claramente temos que $f(x,t)$ é mensurável e $f(x,\cdot)$ é uniformemente contínua q.t.p em Ω. Além disso,

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= |a_1(x)\, t^q (1 - a_2(x)\, t^r)| \\ &= |a_1(x)\, t^q|\, |1 - a_2(x)\, t^r|. \end{aligned}$$

Donde temos que

$$|f(x,t)| \leq |a_1(x)|\, t^q \leq \|a_1\|_\infty t^q \leq C_1(1 + t^q),$$

com $C_1 > 0$ e $q \in (p-1, p^* - 1)$. Assim, $f(x,t)$ satisfaz a hipótese (H_1).

Quanto à hipótese (H_2), basta considerar $g(t) = \|a_1\|_\infty t^q + \|a_1\|_\infty \|a_2\|_\infty t^{q+r}$, pois claramente temos que $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é contínua, não-decrescente e $g(0) = 0$. Além disso, a função $t \mapsto h(t) = f(x,t) + g(t)$ é não-decrescente. De fato,

$$\begin{aligned} h'(t) &= a_1(x)\, q t^{q-1} - a_1(x)\, a_2(x)\, (q+r)\, t^{q+r-1} + \|a_1\|_\infty q t^{q-1} \\ &\quad + \|a_1\|_\infty \|a_2\|_\infty (q+r)\, t^{q+r-1}. \end{aligned}$$

Como $\|a_1\|_\infty \|a_2\|_\infty > a_1(x)\, a_2(x)$ q.t.p em $\overline{\Omega}$, segue que,

$$h'(t) = (a_1(x) + \|a_1\|_\infty)\, q t^{q-1} + (\|a_1\|_\infty \|a_2\|_\infty - a_1(x)\, a_2(x))\, (q+r)\, t^{q+r-1} > 0.$$

Isto garante a hipótese (H_2).

Por outro lado, desde que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} f(x,t)\, t^{1-p} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{a_1(x)\, t^q - a_1(x)\, a_2(x)\, t^{q+r}}{t^{p-1}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{p-1}\left(a_1(x)\, t^{q-p+1} - a_1(x)\, a_2(x)\, t^{q+r-p+1}\right)}{t^{p-1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} f(x,t)\,t^{1-p} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{a_1(x)\,t^q - a_1(x)\,a_2(x)\,t^{q+r}}{t^{p-1}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{q+r}\left(a_1(x)\dfrac{1}{t^r} - a_1(x)\,a_2(x)\right)}{t^{p-1}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} t^{q+r-p+1}\left(a_1(x)\frac{1}{t^r} - a_1(x)\,a_2(x)\right) \\
&= -\infty,
\end{aligned}$$

segue que as hipóteses (H_3) e (H_4) são satisfeitas.

Sabemos apenas que $\inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} a_2(x) > 0$. Logo não podemos garantir que $\inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} a_2(x) < 1$, e assim, não podemos afirmar que $f(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$. Mostremos, então, que $f(x,t)$ satisfaz $(H_5)(ii)$.

Escolhendo $x_0 \in \Omega$ tal que $a_2(x_0) \neq 0$ e considerando

$$\delta_1 = \frac{\sqrt[r]{q+r+1/a_2(x_0)(q+1)}}{2},$$

temos que $F(x_0,t) > 0$, para todo $t \in (0,\delta_1]$. De fato, por definição temos que

$$F(x_0,t) = \int_0^t a_1(x_0)\,s^q - a_1(x_0)\,a_2(x_0)\,s^{q+r}\,\mathrm{d}s.$$

Integrando, segue-se

$$\begin{aligned}
F(x_0,t) &= \frac{a_1(x_0)}{q+1}t^{q+1} - \frac{a_1(x_0)\,a_2(x_0)}{q+r+1}t^{q+r+1} \\
&= t^{q+1}\left(\frac{a_1(x_0)}{q+1} - \frac{a_1(x_0)\,a_2(x_0)}{q+r+1}t^r\right).
\end{aligned}$$

Como $t \in (0,\delta_1]$, temos que $0 \le t^r \le \delta_1^r$, logo

$$\begin{aligned}
F(x_0,t) &\ge t^{q+1}\left(\frac{a_1(x_0)}{q+1} - \frac{a_1(x_0)\,a_2(x_0)}{q+r+1}\frac{q+r+1}{a_2(x_0)(q+1)\,2^r}\right) \\
&= t^{q+1}\left(\frac{a_1(x_0)}{q+1} - \frac{a_1(x_0)}{(q+1)\,2^r}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$F(x_0,t) \ge \frac{t^{q+1}a_1(x_0)}{q+1}\left(1 - \frac{1}{2^r}\right) > 0.$$

Desde que $F(x,t)$ é contínua q.t.p em Ω, temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $F(x,t) > 0$, para todo $x \in B_{\varepsilon_0}(x_0)$. Portanto, temos que $F(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \times (0,\delta_1]$.

Além disso, existe $q > p-1$ tal que a função $h(t) = t^{-q} f(x,t)$ é estritamente decrescente. De fato, temos

$$\begin{aligned} h(t) &= t^{-q}\left(a_1(x)\,t^q - a_1(x)\,a_2(x)\,t^{q+r}\right) \\ &= a_1(x) - a_1(x)\,a_2(x)\,t^r. \end{aligned}$$

Assim,

$$h'(t) = -a_1(x)\,a_2(x)\,rt^{r-1} < 0.$$

Portanto, $f(x,t)$ satisfaz $(H_5)\,(ii)$.

Por fim, existem $C_0 \geq 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que a função $h(t) = f(x,t) + C_0 t^{p-1}$ é não-decrescente para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,\delta_0]$. Para isto, analisemos dois casos:
(i) Se $\delta_0 \in (0,1)$, basta considerar

$$C_0 = \|a_1\|_\infty \left(\|a_2\|_\infty (q+r) - q\right) \geq 0.$$

Daí,

$$h(t) = a_1(x)\,t^q - a_1(x)\,a_2(x)\,t^{q+r} + \|a_1\|_\infty \left(\|a_2\|_\infty (q+r) - q\right) t^{p-1}.$$

Logo,

$$h'(t) = a_1(x)\,qt^{q-1} - a_1(x)\,a_2(x)\,(q+r)\,t^{q+r-1} + (p-1)\,\|a_1\|_\infty \left(\|a_2\|_\infty (q+r) - q\right) t^{p-2}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} h'(t) &= t^{p-2}(a_1(x)\,qt^{q-p+1} - a_1(x)\,a_2(x)\,(q+r)\,t^{q+r-p+1}) \\ &\quad + t^{p-2}((p-1)\,\|a_1\|_\infty \left(\|a_2\|_\infty (q+r) - q\right)). \end{aligned}$$

Desde que, para todo $t \in (0,1)$,

$$(p-1)\,\|a_1\|_\infty \left(\|a_2\|_\infty (q+r) - q\right) \geq a_1(x)\,a_2(x)\,(q+r)\,t^{q+r-p+1} - a_1(x)\,qt^{q-p+1},$$

segue que, $h'(t) > 0$.
(ii) Se $\delta_0 \geq 1$, basta considerar

$$C_0 = \left(\|a_1\|_\infty \delta_0^{q-p+1}\right)\left(\|a_2\|_\infty (q+r)\,\delta_0^r - q\right) \geq 0.$$

Como

$$h(t) = a_1(x)\,t^q - a_1(x)\,a_2(x)\,t^{q+r} + \left(\|a_1\|_\infty \delta_0^{q-p+1}\right)\left(\|a_2\|_\infty (q+r)\,\delta_0^r - q\right) t^{p-1}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} h'(t) &= t^{p-2}\left(a_1(x)\,qt^{q-p+1} - a_1(x)\,a_2(x)\,(q+r)\,t^{q+r-p+1}\right) \\ &\quad + t^{p-2}\left((p-1)\left(\|a_1\|_\infty \delta_0^{q-p+1}\right)\left(\|a_2\|_\infty (q+r)\,\delta_0^r - q\right)\right). \end{aligned}$$

Desde que, para todo $t \in (0, \delta_0]$,

$$(p-1)\left(\|a_1\|_\infty \delta_0^{q-p+1}\right)\left(\|a_2\|_\infty (q+r)\,\delta_0^r - q\right) \geq a_1(x)\,qt^{q-p+1} - a_1(x)\,a_2(x)\,(q+r)\,t^{q+r-p+1},$$

segue que $h'(t) > 0$.
Portanto, em qualquer dos casos, temos que a hipótese (H_6) é satisfeita.

Observação 3.5 *A não-linearidade do Exemplo 3.4 tem sido considerada por diversos autores, uma vez que modela processos de reação-difusão e problemas logísticos em dinâmica populacional. Veja ([40],[45]). Quando $a_1(x) = a_2(x) = 1$, um resultado de multiplicidade foi obtido por Takeuchi em [46] sobre a restrição $p > 2$. Depois, Dong e Cheng, em [22], provaram o mesmo resultado para todo $p > 1$.*

3.1 Formulação Variacional

Inicialmente, estamos interessados em encontrar soluções fracas para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$, isto é, determinar funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazem a equação:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u \nabla \varphi\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,u)\,\varphi\,\mathrm{d}x = 0.$$

Consequentemente, soluções fracas de $(\tilde{P}_\lambda)$ são pontos críticos do funcional $I_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,v)\,\mathrm{d}x.$$

Para mais detalhes, veja o Apêndice A.

Para provarmos a existência de soluções fracas para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ utilizaremos o método de sub e supersolução.

3.2 O Método de Sub e Supersolução

Definição 3.6 *Uma função $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é dita uma subsolução de $(\tilde{P}_\lambda)$ se*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\,\nabla \underline{u} \nabla \varphi\,\mathrm{d}x \leq \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,\underline{u})\,\varphi\,\mathrm{d}x \\ \text{para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \varphi \geq 0, \text{ e } \underline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, uma função $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *é dita uma supersolução de* $(\tilde{P}_\lambda)$ *se*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, \overline{u}) \varphi \, \mathrm{d}x \\ \text{para toda } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \varphi \geq 0, \text{ e } \overline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalmente, uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *que é uma subsolução e uma supersolução, é chamada uma solução fraca de* $(\tilde{P}_\lambda)$.

O lema que enunciaremos abaixo será utilizado para provarmos a próxima proposição.

Lema 3.7 *Para cada função não negativa* $h \in L^{p'}(\Omega)$, *o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda h(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

possui uma única solução não-negativa para todo $\lambda > 0$. *Além disso, o operador associado*

$$\begin{array}{rcl} T_\lambda : L^{p'}(\Omega) & \rightarrow & W_0^{1,p}(\Omega) \\ h & \mapsto & u_\lambda \end{array}$$

é contínuo e não-decrescente.

Demonstração: Consideremos o funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao Problema (3.1), definido por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega h(x) u \, \mathrm{d}x.$$

Encontrar as soluções fracas de (3.1) é determinar os pontos críticos do funcional J, pois para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, a derivada de Gâteaux é dada por

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega h(x) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Inicialmente, mostraremos que J satisfaz as hipóteses do Lema 1.3. Já sabemos que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo. E, claramente temos que J está bem definido, uma vez que a primeira parcela do funcional se trata da norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e para a segunda parcela, temos que $h \in L^{p'}(\Omega)$, logo pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\lambda \int_\Omega |h(x) u| \, \mathrm{d}x \leq \lambda \|h\|_{p'} \|u\|_p < \infty.$$

Portanto, $|J(u)| < \infty$.

Vejamos que J é coercivo. De fato, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega h(x)\, u \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda \|h\|_{p'} \|u\|_p .$$

Pela Desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda C_1 \|h\|_{p'} \|\nabla u\|_p .$$

Logo,

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - C\|u\| .$$

Assim, desde que $p > 1$, obtemos que $J(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.
Agora, vejamos que J é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.
É conhecido que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, ou seja, dada $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| .$$

Assim,

$$\frac{1}{p}\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\|u_n\| .$$

Como

$$\|u\|^p \leq (\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|)^p \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^p ,$$

temos que

$$\frac{1}{p}\|u\|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\|u_n\|^p ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, \mathrm{d}x.$$

Agora mostraremos que dada $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega h u_n \, \mathrm{d}x \to \int_\Omega h u \, \mathrm{d}x.$$

Para tanto, basta provarmos que

$$\left| \int_\Omega (h u_n - h u) \, \mathrm{d}x \right| \to 0.$$

Temos que

$$\left| \int_\Omega h(u_n - u) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega |h(u_n - u)| \, \mathrm{d}x.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega |h(u_n - u)| \,\mathrm{d}x \leq \|h\|_{p'} \|u_n - u\|_p .$$

Assim,

$$\left| \int_\Omega h(u_n - u) \,\mathrm{d}x \right| \leq \|h\|_{p'} \|u_n - u\|_p . \tag{3.2}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < N$ e Ω é limitado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1, p^*)$. Como $p < p^*$, em particular $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente. Daí, a menos de subsequência

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega). \tag{3.3}$$

Consequentemente, usando (3.2) e (3.3) obtemos

$$\left| \int_\Omega h(u_n - u) \,\mathrm{d}x \right| \to 0.$$

Donde concluímos que $J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$ sempre que $u_n \rightharpoonup u$. Isto é, J é fracamente semicontínuo inferiormente.

Portanto, pelo Lema 1.3, J é limitado inferiormente e existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que é um minimizador de J.

Além disso, temos que J é Gâteaux diferenciável e sua derivada de Gâteaux é dada por

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega h(x)\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Para ver isto, confira o Apêndice B, Lema B.3.

Assim, novamente pelo Lema 1.3, u_0 é ponto crítico de J, logo, solução do Problema (3.1).

Afirmamos que toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução do problema (3.1) é não-negativa.

De fato, sabemos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega h(x)\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Considerando $\varphi = u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como uma função teste, teremos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[u\geq 0]} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{[u\leq 0]} - |\nabla u^-|^{p-2} \nabla u^- \nabla u^- \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Desde que $\nabla u^- = 0$ em $[u \geq 0]$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \,\mathrm{d}x = \int_{[u\leq 0]} -\left|\nabla u^-\right|^p \mathrm{d}x.$$

Além disso,

$$\lambda \int_\Omega h(x)\, u^- \,\mathrm{d}x = \lambda \left(\int_{[u\geq 0]} h(x)\, u^- \,\mathrm{d}x + \int_{[u\leq 0]} h(x)\, u^- \,\mathrm{d}x \right).$$

Como $u^- = 0$ em $[u \geq 0]$, temos que

$$\lambda \int_\Omega h(x)\, u^- \,\mathrm{d}x = \lambda \int_{[u\leq 0]} h(x)\, u^- \,\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$-\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^p \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega h(x)\, u^- \,\mathrm{d}x.$$

Donde concluímos que $u^- = 0$ q.t.p em Ω, pois h é não negativa e $\lambda > 0$.
Como $u = u^+ - u^-$ e $u^- = 0$, segue que $u = u^+$, donde $u \geq 0$.
Além disso, afirmamos que esta solução u é única. De fato, suponhamos que existam duas soluções u_1, u_2 para (3.1), com $u_1, u_2 \geq 0$ em Ω. Daí, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega h(x)\, \varphi \,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega h(x)\, \varphi \,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Subtraindo (3.5) de (3.4) temos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \right] \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = 0.$$

Tomemos $\varphi = (u_1 - u_2) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como uma função teste. Daí,

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \right] (\nabla (u_1 - u_2))\, \mathrm{d}x = 0.$$

Considerando

$$A = \int_\Omega \left[|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \right] (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, \mathrm{d}x.$$

E usando o Lema 1.5, para $p \geq 2$, temos que

$$c_p \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p \, \mathrm{d}x \leq A = 0.$$

Ou seja,

$$\|u_1 - u_2\|^p = 0.$$

Logo, $u_1 = u_2$ q.t.p em Ω.
Para $1 < p < 2$, temos que

$$c_p \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} \, \mathrm{d}x \leq A = 0.$$

Como,

$$\frac{\|u_1 - u_2\|^2}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq c_p \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} \, \mathrm{d}x \leq A = 0,$$

obtemos

$$\frac{\|u_1 - u_2\|^2}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} = 0.$$

Daí,

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0.$$

Logo, $u_1 = u_2$ q.t.p em Ω.
Portanto, em qualquer dos casos $u_1 = u_2$ q.t.p em Ω, e assim, (3.1) possui uma única solução u não-negativa e desde que $h(x)$ não é identicamente nula temos que u não é a solução trivial.
Usando a unicidade da solução, temos que o operador T_λ está bem definido. Além disso, o operador T_λ é não-decrescente, pois se $h_1 \leq h_2$, temos que $T_\lambda(h_1) = u_1$ e $T_\lambda(h_2) = u_2$. Como u_1, u_2 são soluções de (3.1), temos pelo Lema 1.29 que

$$u_1 \leq u_2,$$

ou seja,

$$T_\lambda(h_1) \leq T_\lambda(h_2).$$

Finalmente, temos que T_λ é contínuo, ou seja, se $\|h_1 - h_2\|_{p'} < \frac{\delta}{C}$, então

$$\|T_\lambda(h_1) - T_\lambda(h_2)\| < \varepsilon = \delta^{1/(p-1)}.$$

De fato, como u_1, u_2 são soluções de (3.1), temos que, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega h_1(x) \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega h_2(x) \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Subtraindo (3.7) de (3.6), temos que, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \right) \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega (h_1 - h_2) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Tomando $\varphi = (u_1 - u_2)$ como uma função teste, temos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \right) \nabla (u_1 - u_2) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega (h_1 - h_2)(u_1 - u_2) \, \mathrm{d}x.$$

Daí, pelo Lema 1.5, se $p \geq 2$,

$$c_p \int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^p \, \mathrm{d}x \leq \lambda \int_\Omega (h_1 - h_2)(u_1 - u_2) \, \mathrm{d}x.$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$c_p \|u_1 - u_2\|^p \leq \lambda \|h_1 - h_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_p ,$$

ou seja,

$$\|u_1 - u_2\|^p \leq \frac{\lambda}{c_p} \|h_1 - h_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|_p .$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u_1 - u_2\|^p \leq C \|h_1 - h_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\| ,$$

isto é,

$$\|u_1 - u_2\|^{p-1} \leq C \|h_1 - h_2\|_{p'} .$$

Extraindo a raiz $(p-1)-$ésima, temos

$$\|u_1 - u_2\| \leq C^{1/(p-1)} \|h_1 - h_2\|_{p'}^{1/(p-1)} .$$

Consequentemente,

$$\|T_\lambda(h_1) - T_\lambda(h_2)\| \leq \delta^{1/(p-1)} = \varepsilon.$$

Se $1 < p < 2$,

$$c_p \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} \, \mathrm{d}x \leq \lambda c_p \|h_1 - h_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|. \tag{3.8}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)|^p \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^p}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)p/2}} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)p/2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(\frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)}} \right)^{p/2} ((|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p)^{(2-p)/2} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\|u_1 - u_2\|^p \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)}} \right) \mathrm{d}x \right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \right)^{(2-p)/2} \mathrm{d}x.$$

Extraindo a raiz $\left(\frac{2}{p}\right)$ $-$ésima, temos

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)}} \, \mathrm{d}x \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \right)^{(2-p)/p} \mathrm{d}x.$$

Assim,

$$\frac{\|u_1 - u_2\|^2}{(\|u_1\| + \|u_2\|)^{2-p}} \leq \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{(2-p)}} \, \mathrm{d}x.$$

Por (3.8), temos que

$$\frac{\|u_1 - u_2\|^2}{(\|u_1\| + \|u_2\|)^{2-p}} \leq \lambda c_p \|h_1 - h_2\|_{p'} \|u_1 - u_2\|.$$

Assim,

$$\frac{\|u_1 - u_2\|}{(\|u_1\| + \|u_2\|)^{2-p}} \leq C \|h_1 - h_2\|_{p'}.$$

Como $\|h_1 - h_2\|_{p'} < \frac{\delta}{C}$, obtemos que $\|u_1 - u_2\| < \delta = \varepsilon$.
Logo, em qualquer dos casos, temos que o operador T_λ é contínuo. ■

A seguir, definiremos solução minimal e maximal do problema em questão.

Definição 3.8 *Dizemos que u_λ (respectivamente v_λ) é uma solução minimal (maximal) para $(\tilde{P}_\lambda)$ no intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$ se para toda solução w de $(\tilde{P}_\lambda)$ em $[\underline{u}, \overline{u}]$ temos que $u_\lambda \leq w$ $(w \leq v_\lambda)$.*

Agora, estamos prontos para provar a proposição que, a partir da existência de uma sub e uma supersolução, garante a existência de uma solução minimal e uma maximal para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$.

Proposição 3.9 *Assumindo as hipóteses (H_1) e (H_2), consideremos o problema a seguir*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u & = & \lambda f(x, u(x)) = \lambda h(x) & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Sejam $\underline{u}, \bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ respectivamente, uma subsolução e uma supersolução do Problema $(\tilde{P}_\lambda)$, com $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.t.p em Ω. Então existe uma solução fraca minimal u_*, respectivamente, uma solução fraca maximal u^* para o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ no intervalo

$$[\underline{u}, \overline{u}] = \{u \in L^\infty(\Omega); \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \ \ q.t.p \ em \ \Omega\}.$$

Em particular, toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ de $(\tilde{P}_\lambda)$ também satisfaz

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \ \ q.t.p \ em \ \Omega.$$

Demonstração: Consideremos o seguinte operador

$$\begin{array}{rccl} S: & [\underline{u}, \bar{u}] & \rightarrow & L^{p'}(\Omega) \\ & v & \mapsto & S(v) = f(x, v) + g(v). \end{array}$$

Como g é contínua e $[\|\underline{u}\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty]$ é compacto, existe $C_1 > 0$, tal que $g(v) < C_1$. Assim dada $v \in L^\infty(\Omega)$, vejamos que S está bem definido, isto é, $f(x, v) + g(v) \in L^{p'}(\Omega)$.
De fato,

$$\|S(v)\|_{p'}^{p'} = \int_\Omega |S(v)|^{p'} \, dx = \int_\Omega |f(x, v) + g(v)|^{p'} \, dx.$$

Por (H_1), f é mensurável e

$$|f(x, v) + g(v)|^{p'} \leq |C(1 + v^r) + C_1|^{p'}.$$

Daí, como $v \in [\underline{u}, \bar{u}]$ temos que

$$\int_{,\Omega} |f(x, v) + g(v)|^{p'} \, dx \leq \int_\Omega |C(1 + v^r) + C_1|^{p'} \, dx \leq C|\Omega|.$$

Portanto, $S(v) \in L^{p'}(\Omega)$.
Além disso, vejamos que S é contínuo. Sejam $u_n, u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ com $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Temos $S(u_n) = f(x, u_n) + g(u_n)$ e $S(u) = f(x, u) + g(u)$.

Daí,

$$\begin{aligned}\|S(u_n)-S(u)\|_{p'}^{p'} &= \|f(x,u_n)+g(u_n)-(f(x,u)+g(u))\|_{p'}^{p'}\\ &= \int_\Omega |f(x,u_n)-f(x,u)+g(u_n)-g(u)|^{p'}\,\mathrm{d}x\\ &\leq 2^{p'-1}(\int_\Omega |f(x,u_n)-f(x,u)|^{p'}\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_\Omega |g(u_n)-g(u)|^{p'}\,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Como $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$.
Assim, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Usando que g é contínua, segue que

$$g(u_n) \to g(u) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Consequentemente,

$$|g(u_n)-g(u)|^{p'} \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, como Ω é limitado e $u_n, u \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos que

$$|g(u_n)-g(u)|^{p'} < C \in L^1(\Omega).$$

Analogamente, por (H_1) temos que $f(x,.)$ é uniformemente contínua q.t.p em Ω, daí,

$$|f(x,u_n)-f(x,u)|^{p'} \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

e

$$|f(x,u_n)-f(x,u)|^{p'} < C \in L^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega |g(u_n)-g(u)|^{p'}\,\mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\int_\Omega |f(x,u_n)-f(x,u)|^{p'}\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Logo $S(u_n) \to S(u)$ em $L^{p'}(\Omega)$.
Além disso, por (H_2), temos que S é não-decrescente. Assim, pelo Lema 3.7, podemos

associar ao problema (3.9) o seguinte operador contínuo e não-decrescente

$$\begin{array}{rccl} T_\lambda : & L^{p'}(\Omega) & \to & W_0^{1,p}(\Omega) \\ & \widehat{f} & \mapsto & T_\lambda(\hat{f}) = w_\lambda, \end{array}$$

com $\hat{f}(x,u) = f(x,u) + g(u)$ e w_λ a única solução fraca não-negativa do problema (3.9). Assim, podemos definir $\mathcal{F} := T_\lambda \circ S$ tal que

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F} : & [\underline{u}, \overline{u}] & \to & W_0^{1,p}(\Omega) \\ & v & \mapsto & F(v) = (T_\lambda \circ S)(v) = w, \end{array}$$

onde w é a única solução fraca não-negativa do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta_p w + \lambda g(v) & = & \lambda (f(x,v) + g(v)) & \text{em } \Omega, \\ w & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \tag{Q_λ}$$

Claramente, temos que $\mathcal{F}$ é um operador contínuo, pois é a composta de operadores contínuos e, além disso, também é um operador não-decrescente pois é a composta de operadores não-decrescentes.
Escrevendo $u_1 = \mathcal{F}(\underline{u})$ e $u^1 = \mathcal{F}(\overline{u})$, e utilizando a formulação fraca do problema (Q_λ), temos que, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi + \lambda g(\underline{u}) \varphi) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega (f(x,\underline{u}) + g(\underline{u}))\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Como $\underline{u}$ é uma subsolução, segue que para toda $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Analogamente, temos que

$$\int_\Omega \left|\nabla u^1\right|^{p-2} \nabla u^1 \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Desde que $\overline{u}$ é uma supersolução, segue que, para toda $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega \left|\nabla u^1\right|^{p-2} \nabla u^1 \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Levando em conta que $u_1, u^1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ são funções não-negativas, como temos as desigualdades (3.10) e (3.11), aplicando o Teorema 1.29 concluímos que $u_1 \geq \underline{u}$ e $u^1 \leq \overline{u}$ em Ω.

Desde que $\mathcal{F}$ é não-decrescente, dada $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos que

$$\underline{u} \leq \mathcal{F}(\underline{u}) \leq \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(\overline{u}) \leq \overline{u} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Usando o mesmo raciocínio, definimos as sequências (u^n) e (u_n) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por

$$\begin{array}{lll} u_0 = \underline{u} & u_n = \mathcal{F}(u_{n-1}) & u_{n+1} = \mathcal{F}(u_n), \\ u^0 = \overline{u} & u^n = \mathcal{F}(u^{n-1}) & u^{n+1} = \mathcal{F}(u^n), \end{array}$$

tais que para toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ do Problema (Q_λ) satisfazem:

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u \leq u^n \leq \ldots \leq u^1 \leq u^0 \text{ em } \Omega.$$

Note que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pois, como $\mathcal{F}(u_n) = u_{n+1}$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^{p-2} \nabla u_{n+1} \nabla \varphi + \lambda g(u_n) \varphi \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega [f(x, u_n) + g(u_n)] \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Tomando $\varphi = u_{n+1}$ como uma função teste, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^p \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega f(x, u_n) u_{n+1} \,\mathrm{d}x$$

Assim,

$$\|u_{n+1}\|^p \leq \lambda \int_\Omega C(1 + |\overline{u}|^r) \overline{u} \,\mathrm{d}x \leq C(\Omega) < \infty.$$

Analogamente, como $\mathcal{F}(u^n) = u^{n+1}$ e fazendo $\varphi = u^{n+1}$, obtemos que (u^n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Desde que (u_n) e (u^n) são limitadas em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é um espaço reflexivo, existem subsequências que convergem fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ou seja,

$$u_n \rightharpoonup u_\bullet \text{ e } u^n \rightharpoonup u^\bullet \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,

$$u_n \to u_\bullet \text{ e } u^n \to u^\bullet \text{ em } L^r(\Omega) \text{ para } 1 \leq r < p^*.$$

Então pelo Teorema 1.11,

$$u_n \to u_\bullet \text{ e } u^n \to u^\bullet \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, por construção, temos que $u_\bullet$, $u^\bullet \in [\underline{u}, \overline{u}]$ e $u_\bullet \leq u^\bullet$ q.t.p em Ω.
Como $p' < p^*$, temos que $u_n \to u_\bullet$ e $u^n \to u^\bullet$ em $L^{p'}(\Omega)$, sendo S contínuo em $L^{p'}(\Omega)$, segue que

$$S(u_n) \to S(u_\bullet) \text{ e } S(u^n) \to S(u^\bullet) \text{ em } L^{p'}(\Omega).$$

Usando a continuidade de T_λ,

$$T_\lambda(S(u_n)) \to T_\lambda(S(u_\bullet)) \text{ e } T_\lambda(S(u^n)) \to T_\lambda(S(u^\bullet)) \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ou seja,

$$\mathcal{F}(u_n) \to \mathcal{F}(u_\bullet) \text{ e } \mathcal{F}(u^n) \to \mathcal{F}(u^\bullet) \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Escrevendo $u_* = \mathcal{F}(u_\bullet)$ e $u^* = \mathcal{F}(u^\bullet)$, obtemos que

$$u_{n+1} \to u_* \text{ e } u^{n+1} \to u^* \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

Donde,

$$u_{n+1} \to u_* \text{ e } u^{n+1} \to u^* \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Assim, $u_*, u^* \in [\underline{u}, \overline{u}]$ são soluções de (Q_λ) (também são soluções de $(\tilde{P}_\lambda)$) tais que $\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \overline{u}$ em Ω.

Vejamos agora que u_* é solução minimal e u^* é solução maximal para o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ no intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$.
De fato, seja w uma solução arbitrária de $(\tilde{P}_\lambda)$ no intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$. Por construção, temos que

$$\underline{u} \leq u_\bullet \leq w \leq u^\bullet \leq \overline{u} \text{ em } \Omega.$$

Desde que $\mathcal{F}$ é não-decrescente, segue que

$$\mathcal{F}(\underline{u}) \leq \mathcal{F}(u_\bullet) \leq \mathcal{F}(w) \leq \mathcal{F}(u^\bullet) \leq \mathcal{F}(\overline{u}) \text{ em } \Omega.$$

Assim, temos que

$$\underline{u} \leq u_* \leq \mathcal{F}(w) \leq u^* \leq \overline{u} \text{ em } \Omega. \tag{3.12}$$

Notemos que $\mathcal{F}(w) = w$. De fato, seja $\mathcal{F}(w) = \tilde{w}$ solução de (Q_λ). Então, temos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (|\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \nabla \varphi + \lambda g(w)\varphi)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega (f(x,w) + g(w))\varphi\,\mathrm{d}x,$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \nabla \varphi\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega f(x,w)\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Como w é uma solução de $(\tilde{P}_\lambda)$, em particular, temos que w é uma supersolução, logo, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_\Omega f(x,w)\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Então, de (3.13) e (3.14) segue que

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Portanto, pelo Teorema 1.29, obtemos que $\tilde{w} \leq w$ q.t.p em Ω.
Além disso, temos que w é uma subsolução, logo para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \leq \lambda \int_\Omega f(x,w)\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

Então, de (3.13) e (3.15), segue que

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Portanto, novamente pelo Teorema 1.29, obtemos que $\tilde{w} \geq w$ q.t.p em Ω. Assim, podemos concluir que $\tilde{w} = w$ q.t.p em Ω. Portanto, $\mathcal{F}(w) = w$, como queríamos.
Logo, dada qualquer solução arbitrária w de $(\tilde{P}_\lambda)$ em $[\underline{u}, \overline{u}]$, temos em (3.12) que

$$\underline{u} \leq u_* \leq w \leq u^* \leq \overline{u} \text{ em } \Omega.$$

Donde concluímos que u_* é solução minimal de $(\tilde{P}_\lambda)$ no intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$ e u^* é solução maximal de $(\tilde{P}_\lambda)$ em $[\underline{u}, \overline{u}]$.
E em particular, toda solução fraca $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ de (Q_λ) também é solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ e satisfaz

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x) \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

■

Observação 3.10 1. *É válido ressaltar que pode ocorrer eventualmente que $u_* = u^*$.*
2. *A existência de solução neste Teorema, bem como a minimalidade e a maximalidade desta, devem ser entendidas com relação ao intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$, uma vez que podem existir soluções do problema fora desse intervalo, ou pode acontecer que o problema não possua solução minimal e maximal.*
3. *A condição $\underline{u} \leq \overline{u}$ q.t.p em Ω não é automaticamente satisfeita para quaisquer sub e supersolução. Por exemplo, veja [43], p. 3.*

3.3 Resultados de Existência e Multiplicidade

Nesta seção apresentaremos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$. Inicialmente, vejamos que toda solução não-trivial de $(\tilde{P}_\lambda)$ é positiva.

Proposição 3.11 *Toda solução não-trivial de $(\tilde{P}_\lambda)$ é positiva.*

Demonstração: Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$, então para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,u) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Consideremos a função teste $\varphi = u^- = \max\{0, -u\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{[u \geq 0]} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{[u \leq 0]} - |\nabla u^-|^{p-2} \nabla u^- \nabla u^- \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Desde que $\nabla u^- = 0$ em $[u \geq 0]$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u^- \, \mathrm{d}x = \int_{[u \leq 0]} - \left|\nabla u^-\right|^p \, \mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,u) u^- \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{[u \geq 0]} f(x,u) u^- \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{[u \leq 0]} \tilde{f}(x,u) u^- \, \mathrm{d}x = 0. \tag{3.17}$$

De (3.16) e (3.17) temos que

$$-\int_{[u \leq 0]} \left|\nabla u^-\right|^p \, \mathrm{d}x = 0,$$

ou seja,

$$\left\|u^-\right\|^p_{W_0^{1,p}([u \leq 0])} = 0.$$

Donde temos que

$$u^- = 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Como $u = u^+ - u^-$ e $u^- = 0$ q.t.p em Ω, $u = u^+$, ou seja, $u \geq 0$.
Assim, u é uma solução do problema $(\tilde{P}_\lambda)$ se, e somente se, u é também solução do problema (P_λ), pois $f(x,u) = \tilde{f}(x,u)$ quando $u \geq 0$.

Desde que $|f(x,t)| \leq C(1+t^r)$ com $r \in [0, p^* - 1)$, pelo Teorema 1.24, temos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Assim desde que $\Delta_p u \leq C_\lambda(1+u^r)$, segue que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$ e pelo Lema 1.25 temos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Além disso, como Ω é limitado, temos que $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e, daí, $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$. Desde que

$$|f(x,s)| \leq Cs^{p-1},$$

segue que

$$-Cs^{p-1} \leq f(x,s) \leq Cs^{p-1}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $\lambda > 0$, obtemos que

$$-C_\lambda s^{p-1} \leq \lambda f(x,s),$$

ou seja,

$$-\lambda f(x,s) \leq C_\lambda s^{p-1}.$$

Assim, considerando $\beta(s) = C_\lambda s^{p-1}$, temos que $\Delta_p u \leq \beta(u)$, com $\beta(u)$ contínua, não-decrescente, $\beta(0) = 0$, satisfazendo $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e

$$\int_0^1 \left(C_\lambda s^{p-1} s\right)^{-1/p} \mathrm{d}u = C_\lambda \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{s}\, \mathrm{d}s = C_\lambda \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty,$$

isto é, como u não é identicamente nula em Ω, temos que todas as hipóteses do Teorema 1.30 são satisfeitas; portanto $u > 0$ q.t.p em Ω. ∎

A proposição a seguir garantirá a existência de um número $\lambda_0 > 0$ a partir do qual apresentaremos um resultado de não existência de solução.

Proposição 3.12 *Assumindo as hipóteses (H_1), (H_3) e (H_4) segue que para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, +\infty)$, existe um número $\lambda_0 > 0$ tal que*

$$\lambda_1(\Omega)\, t^{p-1} \geq \lambda_0 \tilde{f}(x,t),$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema (1.2).

Demonstração: De fato, por (H_3) temos que $\lim_{t \to 0^+} \tilde{f}(x,t)\, t^{1-p} = 0$, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ e $t \in [0, \delta]$,

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right| \leq \varepsilon t^{p-1}. \tag{3.18}$$

Por (H_4) temos que $\limsup\limits_{t\to\infty} f(x,t)\, t^{1-p} \leq 0$, isto é, dado $C_1 > 0$ existe $t_0 \in [0,+\infty)$ tal que para todo $x \in \Omega$ e $t \geq t_0$,

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right| \leq C_1 t^{p-1}, \tag{3.19}$$

e por (H_1), para todo $x \in \Omega$ e $t \in [\delta, t_0]$, temos que

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right| \leq C\left(1+t_0^r\right) = M. \tag{3.20}$$

Como $\delta \leq t$ para todo $t \in [\delta, t_0]$, então $\delta^{p-1} \leq t^{p-1}$, pois $p-1>0$, então $1 \leq \dfrac{t^{p-1}}{\delta^{p-1}}$, donde concluímos que $M \leq M\dfrac{t^{p-1}}{\delta^{p-1}}$. Assim, em (3.20), temos que

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right| \leq \frac{M}{\delta^{p-1}} t^{p-1} = C_{\delta,t_0} t^{p-1}. \tag{3.21}$$

De (3.18), (3.19) e (3.21), considerando $C = \max\{C_1, \varepsilon, C_{\delta,t_0}\}$, teremos que para todo $t \in [0,+\infty)$

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right| \leq C t^{p-1}.$$

Como $\lambda_1(\Omega) > 0$, temos que

$$\lambda_1(\Omega)\tilde{f}(x,t) \leq \lambda_1(\Omega)\, C t^{p-1}.$$

Assim,

$$\frac{\lambda_1(\Omega)}{C}\tilde{f}(x,t) \leq \lambda_1(\Omega)\, t^{p-1}.$$

Considerando $\lambda_0 = \dfrac{\lambda_1}{C}$, teremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,+\infty)$,

$$\lambda_0 \tilde{f}(x,t) \leq \lambda_1(\Omega)\, t^{p-1}. \tag{3.22}$$

■

Apresentaremos, agora, um resultado de não-existência de solução positiva para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$.

Lema 3.13 *Assumindo as hipóteses* (H_1), (H_3) *e* (H_4), *o Problema* $\left(\tilde{P}_\lambda\right)$ *não tem solução positiva para* $\lambda < \lambda_0$, *onde* λ_0 *satisfaz para todo* $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,+\infty)$

$$\lambda_1(\Omega)\, t^{p-1} \geq \lambda_0 \tilde{f}(x,t). \tag{3.23}$$

Demonstração: Suponhamos que $(\tilde{P}_\lambda)$ admita uma solução fraca positiva u_λ para algum $\lambda < \lambda_0$. Como u_λ é uma solução, temos que, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda) \varphi \, dx.$$

Tomando $\varphi = u_\lambda$ como uma função teste, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p \, dx = \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda) u_\lambda \, dx.$$

Por (3.23), sabemos que

$$\lambda_1(\Omega)(u_\lambda)^{p-1} u_\lambda \geq \lambda_0 \tilde{f}(x, u_\lambda) u_\lambda.$$

Integrando em Ω, obtemos

$$\lambda_1(\Omega) \int_\Omega u_\lambda^p \, dx \geq \lambda_0 \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda) u_\lambda \, dx. \tag{3.24}$$

Como $\lambda < \lambda_0$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p \, dx = \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda) u_\lambda \, dx < \lambda_0 \int_\Omega \tilde{f}(x, u_\lambda) u_\lambda \, dx.$$

Por (3.24), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p \, dx < \lambda_1(\Omega) \int_\Omega u_\lambda^p \, dx,$$

ou seja,

$$\lambda_1(\Omega) > \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p \, dx}{\displaystyle\int_\Omega u_\lambda^p \, dx},$$

o que é uma contradição, pois

$$\lambda_1(\Omega) = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx : w \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega |w|^p \, dx = 1 \right\}.$$

Portanto, o Problema $\left(\tilde{P}_\lambda\right)$ não possui solução positiva quando $\lambda < \lambda_0$. ■

Lema 3.14 *Assumindo as hipóteses* (H_1)-(H_5), *suponha que para algum* $\lambda' > 0$, *o problema* $(\tilde{P}_{\lambda'})$ *admite uma solução positiva* $u_{\lambda'}$. *Então para todo* $\lambda > \lambda'$, *o problema* $(\tilde{P}_\lambda)$ *tem pelo menos uma solução positiva.*

A ideia é encontrar uma subsolução e uma supersolução. Assim, usaremos a Proposição 3.9 para garantir a existência de uma solução fraca minimal e uma maximal para $(\tilde{P}_\lambda)$.

Em particular, toda solução fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$ estará entre a minimal e a maximal.

Demonstração: Inicialmente encontraremos uma subsolução $\underline{u}$. Para isso, analisemos dois casos:

Caso 1) Assuma que f satisfaça $(H_5)(i)$, ou seja, $\tilde{f}(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$.

Como por hipótese $u_{\lambda'}$ é uma solução positiva de $\tilde{P}_{\lambda'}$, então temos que $u_{\lambda'}$ satisfaz $\tilde{P}_{\lambda'}$ no sentido fraco e $u_{\lambda'} = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Assim, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega |\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda' \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Como $\lambda > \lambda'$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x < \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Assim, $\underline{u} := u_{\lambda'}$ é uma subsolução de $(\tilde{P}_\lambda)$.

Caso 2) Agora, assumiremos que f satisfaz $(H_5), (ii)$, isto é, existe $\delta_1 > 0$ e uma bola $B(x_0, \varepsilon_0) \subset \Omega$,$\varepsilon_0 > 0, x_0 \in \Omega$ tal que $F(x,t) > 0$ na $B(\varepsilon_0, x_0) \times (0, \delta_1]$, onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\, \mathrm{d}s$ e existe $q > p-1$ tal que a função $t \mapsto t^{-q} f(x,t)$ é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$ q.t.p em Ω.

Afirmamos que existe $\sigma \in (0,1)$ tal que $\lambda' = \lambda \sigma^{q-p+1}$.

De fato, considere

$$\begin{array}{rcl} \Psi : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^{q-p+1}\lambda \end{array}$$

Notemos que Ψ é contínua, pois $q-p+1 > 0$. Além disso, $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(1) = \lambda$; daí

$$\Psi(0) < \lambda' < \Psi(1) = \lambda.$$

Então, pelo Teorema do valor intermediário, existe $\sigma \in (0,1)$ tal que $\Psi(\sigma) = \lambda' = \lambda \sigma^{q-p+1}$.

Logo,

$$\lambda' = \lambda \sigma^{q-p+1} = \frac{\lambda \sigma^q}{\sigma^{p-1}}.$$

Isto é,

$$\lambda' \sigma^{p-1} = \lambda \sigma^q. \tag{3.25}$$

Assim, provamos a afirmação.

Como $u_{\lambda'}$ é solução positiva de $\tilde{P}_{\lambda'}$, temos novamente que

$$\int_\Omega |\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda' \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Multiplicando a equação acima por σ^{p-1}, obtemos

$$\sigma^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda' \sigma^{p-1} \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla \sigma u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla \sigma u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda' \sigma^{p-1} \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Por (3.25), segue que

$$\int_\Omega |\nabla \sigma u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla \sigma u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \sigma^q \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

Como $\sigma u_{\lambda'}(x) \leq u_{\lambda'}(x)$ em Ω, pela hipótese $(H_5)(ii)$, temos que

$$(\sigma u_{\lambda'}(x))^{-q} \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) > (u_{\lambda'}(x))^{-q} \tilde{f}(x, u_{\lambda'}),$$

isto é,

$$\frac{(\sigma u_{\lambda'}(x))^{-q}}{(u_{\lambda'}(x))^{-q}} \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) > \tilde{f}(x, u_{\lambda'}).$$

Logo,

$$\int_\Omega \left(\frac{\sigma u_{\lambda'}(x)}{u_{\lambda'}(x)} \right)^{-q} \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) \, \mathrm{d}x > \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \, \mathrm{d}x.$$

Daí, em (3.26), para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0$ e $\sigma u_{\lambda'} = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla \sigma u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla \sigma u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x &< \lambda \sigma^q \int_\Omega \left(\frac{\sigma u_{\lambda'}(x)}{u_{\lambda'}(x)} \right)^{-q} \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda \sigma^q}{\sigma^q} \int_\Omega \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla \sigma u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla \sigma u_{\lambda'} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x < \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Assim, $\underline{u} := \sigma u_{\lambda'}$ é uma subsolução de $(\tilde{P}_\lambda)$.

Agora encontraremos uma supersolução como se segue. Seja e uma solução positiva do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p e &= 1 \quad \text{em } \Omega, \\ e &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A}$$

Sabemos que essa solução e existe pelo Lema 3.7 (uma vez que $1 \in L^{p'}$ pois Ω é limitado e 1 é não-negativa) e, além disso, $e \in C^{1,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Logo, $e \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e como $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $e \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Como $e, \underline{u} > 0$ e $\underline{u}$ é continua, então, no compacto $\overline{\Omega}$, temos que $\underline{u}$ atinge o máximo; daí, para $k > 0$ suficientemente grande, temos que $ke(x) > \underline{u}(x)$ em Ω.
Consideremos

$$e_0 := \sup\{e(x) : x \in \Omega\}.$$

Afirmamos que $\lambda \tilde{f}(x, kt) < k^{p-1}$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0, e_0]$.
De fato, analisaremos três casos:
Caso 1) Para $t = 0$ o resultado é imediato.
Caso 2) Para $0 < t \leq \delta$. Por (3.22) temos que

$$\lambda_0 \tilde{f}(x, kt) \leq \lambda_1(\Omega)(kt)^{p-1}.$$

Logo,

$$\tilde{f}(x, kt) \leq \frac{\lambda_1(\Omega) k^{p-1} t^{p-1}}{\lambda_0}.$$

Multiplicando por λ a desigualdade acima, e desde que $t \in (0, \delta]$, obtemos que

$$\lambda \tilde{f}(x, kt) \leq \lambda \frac{\lambda_1(\Omega)}{\lambda_0} k^{p-1} \delta^{p-1}.$$

Tomemos δ de forma que $\lambda \dfrac{\lambda_1(\Omega)}{\lambda_0} \delta^{p-1} < 1$. Daí

$$\lambda \tilde{f}(x, kt) < k^{p-1}.$$

Caso 3) Para $\delta < t \leq e_0$.
Por (H_4), temos que

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{\tilde{f}(x, kt)}{k^{p-1} t^{p-1}} \leq 0,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que para todo $k > k_\varepsilon$,

$$\frac{\tilde{f}(x, kt)}{k^{p-1} t^{p-1}} \leq \varepsilon.$$

Ou seja,

$$\tilde{f}(x, kt) \leq \varepsilon k^{p-1} t^{p-1}.$$

Desde que $t \leq e_0$, temos que

$$\tilde{f}(x, kt) \leq \varepsilon k^{p-1} e_0^{p-1}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por λ, obtemos

$$\lambda \tilde{f}(x, kt) \leq k^{p-1} \lambda \varepsilon e_0^{p-1}.$$

Tomemos ε de forma que $\lambda \varepsilon e_0^{p-1} < 1$. Daí

$$\lambda \tilde{f}(x, kt) < k^{p-1}.$$

Assim, combinando os casos acima, segue que $\lambda \tilde{f}(x, kt) < k^{p-1}$ para todo $(x, t) \in \Omega \times [0, e_0]$, como afirmamos.
Agora, notemos que

$$-\Delta_p(ke) = k^{p-1},$$

pois

$$\int_\Omega |\nabla(ke)|^{p-2} \nabla(ke) \nabla\varphi \,\mathrm{d}x = k^{p-1} \int_\Omega |\nabla e|^{p-2} \nabla e \nabla\varphi \,\mathrm{d}x.$$

E pelo problema (A), obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla(ke)|^{p-2} \nabla(ke) \nabla\varphi \,\mathrm{d}x = k^{p-1} \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}x,$$

isto é, $-\Delta_p(ke) = k^{p-1}$ como queríamos. Além disso, temos que $k^{p-1} > \lambda \tilde{f}(x, ke(x))$ em Ω pois $0 < e(x) < e_0(x)$.
Logo, considerando $\overline{u} := ke$, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ com $\overline{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla\varphi \,\mathrm{d}x > \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, \overline{u}) \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Portanto, $\overline{u}$ é uma supersolução de $(\tilde{P}_\lambda)$.
Assim, pela Proposição 3.9, existe uma solução fraca minimal u^* e maximal u^* de $(\tilde{P}_\lambda)$ no intervalo $[\underline{u}, \overline{u}] = \{u \in L^\infty; \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega\}$. Uma vez que pode ocorrer que a solução minimal coincida com a solução maximal, podemos garantir apenas que existe pelo menos uma solução positiva u de $(\tilde{P}_\lambda)$ satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Isto é, para todo $\lambda > \lambda'$, o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem pelo menos uma solução positiva. ■

No que segue, iremos trabalhar com o seguinte funcional energia associado ao problema $\left(\tilde{P}_\lambda\right)$, $I_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,v)\,\mathrm{d}x,$$

onde $\tilde{F}(x,t) := \displaystyle\int_0^t \tilde{f}(x,s)\,ds$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Temos que I_λ está bem definido e $I_\lambda \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R}\right)$, veja Apêndice A.1, com derivada de Fréchet dada por

$$I'_\lambda(v)\,\varphi = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\,|\nabla v|\,\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x,v)\,\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Lema 3.15 *Consideremos as hipóteses* (H_1), (H_3) ,(H_4) *e* (H_5) *e seja*

$$\bar{\lambda} := \inf\left\{\lambda : \tilde{P}_\lambda \textit{ tem uma solução positiva}\right\}.$$

Então $0 < \bar{\lambda} < \infty$ *e* $(\tilde{P}_\lambda)$ *tem uma solução positiva para todo* $\lambda > \bar{\lambda}$ *e não tem solução positiva para* $0 < \lambda < \bar{\lambda}$.

Demonstração: Notemos, primeiramente, que I_λ é coercivo, ou seja, $I_\lambda(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.
De fato, temos que

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

Notemos que, pela definição de $\tilde{F}(x,t)$,

$$\left|\tilde{F}(x,t)\right| = \left|\int_0^t \tilde{f}(x,s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^t \left|\tilde{f}(x,s)\right|\mathrm{d}s.$$

E como $\left|\tilde{f}(x,s)\right| \leq C(1+s^r)$ para $r \in [0,p^*-1)$, segue que

$$\left|\tilde{F}(x,t)\right| \leq \int_0^t C(1+s^r)\,\mathrm{d}s.$$

Calculando a integral, obtemos que para $1 \leq r+1 \leq p^*$,

$$\left|\tilde{F}(x,t)\right| \leq C|t| + \frac{C|t|^{r+1}}{r+1}. \tag{3.28}$$

Além disso, notemos que de (H_1) e (H_4) para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty)$, temos que

$$\lambda\tilde{f}(x,t) \leq C_\lambda + \left(\frac{1}{2}\right)\lambda_1(\Omega)\,t^{p-1}.$$

De fato, por (H_1), temos que, para todo $t \in [0, t_0]$,

$$\tilde{f}(x,t) \leq C_1 (1 + t_0^r) \leq C_2.$$

Por (H_4), dado $C' > 0$ tal que $C' \leq \dfrac{\lambda_1(\Omega)}{2\lambda}$, existe $t_{0'} \in [0, +\infty)$ tal que, para todo $t \geq t_{0'}$,

$$\tilde{f}(x,t) \leq C' t^{p-1}.$$

Como $[t_0, t_{0'}]$ é compacto e $\tilde{f}(x,t)$ é contínua, temos que, para todo $t \in [t_0, t_{0'}]$,

$$\tilde{f}(x,t) \leq C_1.$$

Assim, para todo $(x,t) \in \Omega \times [0, +\infty)$, considerando $C = \max\{C_1, C_2\}$, temos que

$$\tilde{f}(x,t) \leq C + C' t^{p-1}.$$

Como $\lambda > 0$, segue que

$$\lambda \tilde{f}(x,t) \leq \lambda C + \lambda C' t^{p-1}.$$

Desde que $C' \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda_1(\Omega)}{\lambda}\right)$, segue que, para todo $(x,t) \in \Omega \times [0, +\infty)$,

$$\lambda \tilde{f}(x,t) \leq C_\lambda + \left(\frac{1}{2}\right) \lambda_1(\Omega)\, t^{p-1}.$$

Integrando, obtemos que

$$\int_0^t \lambda \tilde{f}(x,s)\, \mathrm{d}s \leq \int_0^t C_\lambda ds + \int_0^t \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega)\, s^{p-1}\, \mathrm{d}s,$$

isto é,

$$\lambda \int_0^t \tilde{f}(x,s)\, \mathrm{d}s \leq C_\lambda |t| + \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega) \frac{|t|^p}{p}.$$

Donde, temos que

$$\lambda \tilde{F}(x,t) \leq C_\lambda |t| + \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega) \frac{|t|^p}{p}.$$

Integrando em Ω, segue que

$$\lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,u)\, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega C_\lambda |u|\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega) \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p\, \mathrm{d}x,$$

ou seja,

$$-\lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,u)\, \mathrm{d}x \geq -C_\lambda \|u\|_1 - \frac{\lambda_1}{2p} \|u\|_p^p.$$

Pela imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$-\lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x \geq -C'_\lambda \|u\| - \frac{\lambda_1}{2p}\|u\|_p^p.$$

Como

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x} \Rightarrow \lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x},$$

então, para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$,

$$-\lambda_1 \geq \frac{-\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x}.$$

Daí, em (3.27), temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{2p}\|u\|^p - C'_\lambda\|u\| \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p}\right)\|u\|^p - C'_\lambda\|u\| \\ &= \frac{1}{2p}\|u\|^p - C'_\lambda\|u\|. \end{aligned}$$

Donde, temos que $I_\lambda(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.
Além disso, notemos que I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente. De fato, seja $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então pela Proposição 1.1, temos que $\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|$. Daí,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x.$$

Como

$$\|u\|^p \leq \left(\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|\right)^p \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p.$$

Então

$$\frac{1}{p}\|u\|^p \leq \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p.$$

Agora, mostraremos que

$$\int_\Omega F(x,u_n)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Seja $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $1 < p < N$ e Ω limitado, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos a seguinte imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*)$. Então $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$.
Daí, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_n| \leq h_q \text{ em } L^q(\Omega) \text{ q.t.p em } \Omega. \end{cases}$$

Por (3.28), temos que para $1 \leq r+1 < p^*$

$$|F(x,t)| \leq C|t| + \frac{C}{r+1}|t|^{r+1},$$

e, além disso,

$$|u_n| \leq h_1 \in L^1(\Omega) \text{ e } |u_n|^{r+1} \leq h_2 \in L^{r+1}(\Omega).$$

Daí

$$\begin{aligned} |F(x,u_n)| &\leq C|u_n| + C\frac{|u_n|}{r+1}^{r+1} \\ &\leq \left(Ch_1 + \frac{C}{r+1}h_2\right) \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

E além disso, como

$$F(x,u_n) \to F(x,u) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada da Lebesgue, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} F(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Isto é,

$$\int_\Omega F(x,u_n)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{p}\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p + \liminf_{n\to\infty}\left(-\lambda\int_\Omega F(x,u_n)\,\mathrm{d}x\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega F(x,u_n)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n). \end{aligned}$$

Desde que I_λ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, então I_λ é limitado inferiormente e existe $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $I_\lambda(u_\lambda) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} I_\lambda(v)$, ou seja, u_λ é um minimizador global de I_λ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. E além disso, como I_λ é C^1, temos que esse ponto de mínimo u_λ é um ponto crítico, ou seja, u_λ é uma solução fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$.
Em vista da condição (H_5), I_λ atinge valores negativos se λ é suficientemente grande, ou seja, quando

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, \mathrm{d}x < \lambda \int \tilde{F}(x,v) \, \mathrm{d}x,$$

temos que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$.
Seja

$$\overline{\lambda} = \inf\left\{\lambda : (\tilde{P}_\lambda) \text{ tem uma solução positiva}\right\} \tag{3.29}$$

Observe que $\overline{\lambda}$ está bem definido, pois o conjunto (3.29) é não vazio, uma vez que, pelo argumento acima, existe $\lambda' > 0$ tal que $(\tilde{P}_\lambda)$ tem solução.
Então, pelo Lema 3.13 se $\lambda < \overline{\lambda}$ o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ não tem solução positiva. E pelo Lema 3.14, para todo $\lambda > \overline{\lambda}$, o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem pelo menos uma solução positiva. ■

Lema 3.16 *Considere (H_1), (H_3), (H_4), (H_5) e $\lambda > \overline{\lambda}$. Suponha que o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tenha uma única solução positiva u_λ. Então u_λ é um minimizador local de I_λ em $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.*

A ideia é encontrarmos uma sub e uma supersolução que são estritamente separadas da solução u_λ.

Demonstração: Seja $\bar{\lambda} < \lambda' < \lambda$ e definamos $\underline{u}$ e $\overline{u}$ como na prova do Lema 3.14, ou seja,

$$\begin{aligned}
&\underline{u} := u_{\lambda'} \text{ se } f \text{ satisfaz } H_5 \; i)\\
&\underline{u} := \sigma u_{\lambda'} \text{ se } f \text{ satisfaz } H_5 \; ii) \text{ com } \sigma \in (0,1)\\
&\overline{u} := ke \text{ onde } e \text{ é solução do problema } A
\end{aligned}$$

Primeiramente encontraremos uma supersolução. Como $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, temos que $u_\lambda \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Assim, podemos acrescentar a exigência que a função $\overline{u} := ke$ satisfaz:

$$\overline{u} = ke > u_\lambda,$$

pois como $\overline{u}$ é uma supersolução, temos que $\overline{u} \geq u_\lambda > 0$ em Ω. Então, podemos tomar k suficientemente grande de modo que $\overline{u} > u_\lambda$ em Ω.
Como e é uma solução do Problema (A), temos que

$$\begin{aligned}
-\Delta_p(ke) &= k^{p-1} > 0 \quad \text{em } \Omega,\\
ke &> 0 \quad \text{em } \Omega,\\
ke &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 1.26, temos que

$$\frac{\partial (ke)}{\partial v} < 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Assim,

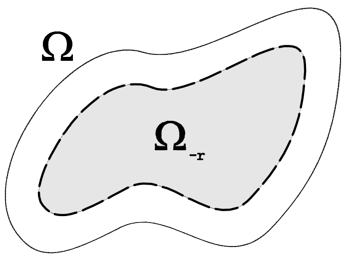
$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} < \frac{\partial u_\lambda}{\partial v} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Para encontrarmos uma subsolução $\underline{u}$, dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: Assumimos que f satisfaz (H_5) $i)$. Então, pelo Lema 3.14, temos que $\underline{u} := u_{\lambda'} \leq u_\lambda$ em Ω.
Considere $r > 0$ e

$$\Omega_{-r} := \{x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > r\}\,.$$

Uma ideia da visualização do conjunto Ω_{-r} no plano é dada pela figura abaixo:



Como Ω é suave e a função distância é contínua, segue que Ω_{-r} é um domínio C^2 para r suficientemente pequeno.
Notemos que como $u_\lambda, u_{\lambda'} \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, existe um número $r > 0$ tal que

$$\left|\nabla u_\lambda\right|, \left|\nabla u_{\lambda'}\right| > 0 \text{ em } \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}$$

e

$$u_\lambda\left(x\right), u_{\lambda'}\left(x\right) \in \left(0, \delta_0\right) \text{ em } \Omega\backslash\overline{\Omega_{-2r}}.$$

De fato, seja $x_0 \in \partial\Omega$. Desde que $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial v} < 0$, podemos escrever, para algum $\eta_0 > 0$,

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}\left(x_0\right) < -\eta_0.$$

Como $u_\lambda \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, temos que $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial v}$ é continua. Assim, dado $\eta = \dfrac{\eta_0}{2} > 0$, existe uma vizinhança $V_{\delta_0}\left(x_0\right) = B_{\delta_0}\left(x_0\right)$ tal que, para todo $x \in V_{\delta_0}\left(x_0\right)$,

$$\left|\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}\left(x\right) - \frac{\partial u_\lambda}{\partial v}\left(x_0\right)\right| < \eta.$$

Como

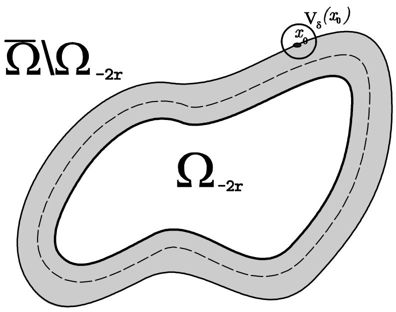
$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) - \frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x_0) \leq \left| \frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) - \frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x_0) \right| < \eta,$$

temos que, para todo $x \in V_{\delta_0}(x_0)$,

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) < \eta - \eta_0 \Rightarrow \frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) < \frac{-\eta_0}{2}.$$

Utilizando o mesmo raciocínio para os demais pontos $x_i \in \partial\Omega$, podemos cobrir toda a fronteira com abertos. E como $\partial\Omega$ é um conjunto compacto, podemos encontrar uma subcobertura finita $\bigcup\limits_{i\in\Lambda} V_{\delta_i}(x_i)$, com $\Lambda < +\infty$. Logo, teremos que, para cada $x_i \in \partial\Omega$, existe uma vizinhança $V_{\delta_i}(x_i) = B_{\delta_i}(x_i)$ tal que, para todo $x \in V_{\delta_i}(x_i)$,

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) < \frac{-\eta_i}{2}.$$



Note que quando r é suficientemente pequeno

$$\bigcup_{i\in\Lambda} V_{\delta_i}(x_i) \supseteq \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}.$$

Seja $\delta^* = \min\limits_{i\in\Lambda}\{\delta_i\}$ e $\eta^* = \min\limits_{i\in\Lambda}\left\{\frac{\eta_i}{2}\right\}$. Então temos que $\tilde{V}_{\delta^*}(x_i) = B_{\delta^*}(x_i) \cap \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}$ e para

$$0 < r \leq \frac{\delta^*}{2},$$

temos que

$$\bigcup_{i\in\Lambda} \tilde{V}_{\delta^*}(x_i) \supset \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}$$

e

$$\bigcup_{i\in\Lambda} \tilde{V}_{\delta^*}(x_i) \subset \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}.$$

Logo,

$$\bigcup_{i\in\Lambda} \tilde{V}_{\delta^*}(x_i) = \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}.$$

Assim, para todo $x \in \bigcup_{i \in \Lambda} V_{\delta^*}(x_i)$, ou seja, para todo $x \in \overline{\Omega} \backslash \Omega_{-2r}$, temos que

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) < -\eta^*.$$

Como

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial v}(x) = \nabla u_\lambda . v < -\eta^*,$$

segue que

$$-\nabla u_\lambda . v > \eta^*.$$

Daí

$$|\nabla u_\lambda . v| \geq -\nabla u_\lambda . v > \eta^* \Rightarrow |\nabla u_\lambda . v| > \eta^*.$$

Pela desigualdade de Cauchy Scharwz, obtemos

$$|\nabla u_\lambda| \, |v| \geq |\nabla u_\lambda . v| > \eta^* \Rightarrow |\nabla u_\lambda| > \frac{\eta^*}{|v|} > 0.$$

Donde,

$$|\nabla u_\lambda| > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \backslash \Omega_{-2r}.$$

Analogamente, chegamos que $|\nabla u_{\lambda'}| > 0$ em $\overline{\Omega} \backslash \Omega_{-2r}$.
E quando $r < \frac{\delta^*}{2}$(ou seja, r suficientemente pequeno), temos que $u_\lambda, u_{\lambda'}$ estão bem próximos a $\partial\Omega$, ou seja, estão decrescendo para zero, pois $\frac{\partial u_\lambda}{\partial v} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Daí $u_\lambda(x), u_{\lambda'}(x) \in (0, \delta_0)$ em $\Omega \backslash \overline{\Omega_{-2r}}$ para algum $\delta_0 > 0$.
Sabemos que $u_{\lambda'}$ é solução de $(\tilde{P}_{\lambda'})$, isto é, satisfaz, no sentido fraco, a seguinte equação

$$-\Delta_p u_{\lambda'} = \lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}).$$

Daí,

$$-\Delta_p u_{\lambda'} + \lambda c_0 (u_{\lambda'})^{p-1} = \lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) + \lambda c_0 (u_{\lambda'})^{p-1}.$$

Como $\lambda' < \lambda$,

$$\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) + \lambda c_0 (u_{\lambda'})^{p-1} < \lambda \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) + \lambda c_0 (u_{\lambda'})^{p-1}.$$

Desde que $u_{\lambda'} \leq u_\lambda$, $\tilde{f}(x,t) + c_0 t^{p-1}$ é não decrescente e $u_{\lambda'} \in (0, \delta_0)$ temos por (H_6) que

$$\tilde{f}(x, u_{\lambda'}) + c_0 u_{\lambda'}^{p-1} \leq \tilde{f}(x, u_\lambda) + c_0 u_\lambda^{p-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_{\lambda'} + \lambda c_0 (u_{\lambda'})^{p-1} &< \lambda \left(\tilde{f}(x, u_{\lambda'}) + c_0 (u_{\lambda'})^{p-1} \right) \\ &\leq \lambda \left(\tilde{f}(x, u_{\lambda}) + c_0 (u_{\lambda})^{p-1} \right) \\ &= -\Delta_p u_{\lambda} + \lambda c_0 (u_{\lambda})^{p-1}. \end{aligned}$$

Logo, no sentido fraco, temos que

$$-\Delta_p u_{\lambda'} + \lambda c_0 (u_{\lambda'})^{p-1} < -\Delta_p u_{\lambda} + \lambda c_0 (u_{\lambda})^{p-1} \text{ em } \Omega \backslash \overline{\Omega_{-2r}}.$$

Disto, temos que

$$\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) + \lambda c_0 u_{\lambda'}^{p-1} < \lambda \tilde{f}(x, u_{\lambda}) + \lambda c_0 (u_{\lambda})^{p-1} \text{ em } \Omega \backslash \overline{\Omega_{-2r}}.$$

Logo,

$$\tilde{f}(x, u_{\lambda'}) < \tilde{f}(x, u_{\lambda}) \, \text{em } \Omega \backslash \overline{\Omega_{-2r}}.$$

Então, pelo principio de comparação forte dado pela Proposição 1.28, teremos que

$$u_{\lambda'} < u_{\lambda} \text{ em } \Omega \backslash \overline{\Omega_{-2r}}$$

e

$$0 > \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial v} > \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial v} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

De fato, como $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$, podemos escrever $\Omega_\delta = \Omega \backslash \Omega_{-2r}$. Agora, notemos que

$$\Omega \backslash \Omega_{-2r} = (\Omega \backslash \Omega_{-r}) \cup (\Omega_{-r} \backslash \Omega_{-2r}).$$

E desde que as componentes conexas de $\Omega \backslash \Omega_{-2r}$ são subconjuntos conexos disjuntos cuja união é $\Omega \backslash \Omega_{-2r}$, temos que $\Omega \backslash \Omega_{-r}$ e $\Omega_{-r} \backslash \Omega_{-2r}$ são componentes conexas de $\Omega \backslash \Omega_{-2r}$. Uma vez que

$$\Omega \backslash \Omega_{-r} \subset \Omega \backslash \Omega_{-2r}$$

é uma componente conexa de $\Omega \backslash \Omega_{-2r}$, $u_\lambda, u_{\lambda'} \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $|\nabla u_\lambda| > 0$ e $|\nabla u_{\lambda'}| > 0$ em $\overline{\Omega}_\delta = \overline{\Omega} \backslash \Omega_{-2r}$ e $\tilde{f}(x, u_{\lambda'}) < \tilde{f}(x, u_\lambda)$ em $\Omega \backslash \overline{\Omega_{-2r}}$. Pela Proposição 1.28 temos que

$$u_{\lambda'} < u_{\lambda} \text{ em } \overline{\Omega \backslash \Omega_{-r}} \backslash \partial\Omega = \Omega \backslash \overline{\Omega_{-r}},$$

e

$$0 > \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial v} > \frac{\partial u_\lambda}{\partial v} \text{ sobre } \overline{\Omega\backslash\Omega_{-r}} \cap \partial\Omega = \partial\Omega.$$

Agora, seja $\Omega_{-r}\backslash\Omega_{-2r} \subset \Omega\backslash\Omega_{-2r}$ outra componente conexa de $\Omega\backslash\Omega_{-2r}$. Novamente, temos que $u_\lambda, u_{\lambda'} \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $|\nabla u_\lambda| > 0$ e $|\nabla u_{\lambda'}| > 0$ em $\overline{\Omega}_\delta = \overline{\Omega}\backslash\Omega_{-2r}$ e $\tilde{f}(x, u_{\lambda'}) < \tilde{f}(x, u_\lambda)$ em $\Omega\backslash\overline{\Omega_{-2r}}$. Notemos, também, que $\overline{\Omega_{-r}}\backslash\overline{\Omega_{-2r}} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Então, pela Proposição 1.28 teremos apenas que

$$u_{\lambda'} < u_\lambda \text{ em } \left(\overline{\Omega_{-r}}\backslash\overline{\Omega_{-2r}}\right)\backslash\partial\Omega = \overline{\Omega_{-r}}\backslash\overline{\Omega_{-2r}}.$$

Assim, temos que

$$u_{\lambda'} < u_\lambda \text{ em } \Omega\backslash\overline{\Omega_{-r}} \cup \overline{\Omega_{-r}}\backslash\overline{\Omega_{-2r}} = \Omega\backslash\overline{\Omega_{-2r}}$$

e

$$0 > \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial v} > \frac{\partial u_\lambda}{\partial v} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Como $u_{\lambda'} < u_\lambda$ em $\Omega\backslash\overline{\Omega_{-2r}}$ e $\partial\Omega_{-r} \subset \Omega\backslash\overline{\Omega_{-2r}}$, temos que existe um número $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$u_\lambda \geq \varepsilon_0 + u_{\lambda'} \text{ sobre } \partial\Omega_{-r}. \tag{3.30}$$

Isto implica que se $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, então $(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega_{-r})$. De fato, uma vez que $u_{\lambda'}, u_\lambda, \varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_{-r})$, temos que $u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_{-r})$. Logo $(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ \in W^{1,p}(\Omega_{-r})$. E, além disso, $(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ = 0$ sobre $\partial\Omega_{-r}$, pois como $\varepsilon_0 > \varepsilon$ sobre $\partial\Omega_{-r}$, de (3.30), temos que $u_\lambda \geq \varepsilon_0 + u_{\lambda'} > \varepsilon + u_{\lambda'}$.
Daí

$$\begin{aligned} u_\lambda - \varepsilon - u_{\lambda'} &> 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{-r}, \\ u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon &< 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{-r}. \end{aligned}$$

Logo

$$(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{-r}.$$

Sabemos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega_{-r})$

$$\int_{\Omega_{-r}} |\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda' \int_{\Omega_{-r}} \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \varphi \, \mathrm{d}x \tag{3.31}$$

e

$$\int_{\Omega_{-r}} |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\Omega_{-r}} \tilde{f}(x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

Subtraindo (3.32) de (3.31) temos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega_{-r})$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla\varphi\,\mathrm{d}x &= \lambda'\int_{\Omega_{-r}} \tilde f(x,u_{\lambda'})\varphi\,\mathrm{d}x \\ &\quad -\lambda\int_{\Omega_{-r}}\tilde f(x,u_\lambda)\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tomemos $\varphi = (u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+$ com $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$.
Daí,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega_{-r}}\left(\lambda'\tilde f(x,u_{\lambda'}) - \lambda\tilde f(x,u_\lambda)\right)(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Como sabemos que $u_{\lambda'} < u_\lambda$ em $\Omega\backslash\overline{\Omega_{-2r}} \supset \Omega_{-r}$, temos que $u_{\lambda'} - u_\lambda < 0$ em Ω_{-r}, daí

$$\begin{cases} u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon < 0 \Leftrightarrow u_{\lambda'} - u_\lambda < -\varepsilon, \\ u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon > 0 \Leftrightarrow u_{\lambda'} - u_\lambda > -\varepsilon.\end{cases}$$

Logo,

$$(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda)\begin{cases} = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega_{-r}, \\ < & 0 & \text{se } u_{\lambda'} - u_\lambda < -\varepsilon \text{ em } \Omega_{-r}, \\ > & 0 & \text{se } u_{\lambda'} - u_\lambda > -\varepsilon \text{ em } \Omega_{-r}.\end{cases}$$

Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda)^+\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{[u_{\lambda'} - u_\lambda < -\varepsilon]\cup[u_{\lambda'} - u_\lambda > -\varepsilon]} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda)^+\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{[u_{\lambda'} - u_\lambda < -\varepsilon]} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)(\nabla u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda)^+\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{[u_{\lambda'} - u_\lambda > -\varepsilon]} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Quando $u_{\lambda'} - u_\lambda < -\varepsilon$, temos que $u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon < 0$, logo $(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ = 0$ e, consequentemente, $\nabla(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ = 0$. Analogamente, quando $u_{\lambda'} - u_\lambda > -\varepsilon$, temos que $u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon > 0$, logo $(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ = u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon$ e, consequentemente, $\nabla(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon)^+ = \nabla(u_{\lambda'} - u_\lambda + \varepsilon) = \nabla u_{\lambda'} - \nabla u_\lambda + \nabla\varepsilon = \nabla(u_{\lambda'} - u_\lambda)$.
Portanto, temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda)^+\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2}\nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\right)\nabla(u_{\lambda'} - u_\lambda)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim, da igualdade acima e de (3.33), temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda\right) \nabla \left(u_{\lambda'} - u_\lambda\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega_{-r}} \left(\lambda' \widetilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\right) - \lambda \widetilde{f}\left(x, u_\lambda\right)\right) \left(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda\right)^+ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 1.5, com $x = \nabla u_{\lambda'}$ e $y = \nabla u_\lambda$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_{-r}} \left(|\nabla u_{\lambda'}|^{p-2} \nabla u_{\lambda'} - |\nabla u_\lambda|^{p-2} \nabla u_\lambda\right) \nabla \left(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda\right)^+ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega_{-r}} \left(\lambda' \widetilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\right) - \lambda \widetilde{f}\left(x, u_\lambda\right)\right) \left(u_{\lambda'} + \varepsilon - u_\lambda\right)^+ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Como $\lambda' < \lambda, u_{\lambda'} \leq u_\lambda$, $\tilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\left(x\right)\right) > 0$ em $\overline{\Omega_{-r}}$ e $\tilde{f}$ é continua na segunda variável, existe um número $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que $\lambda' \tilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\left(x\right)\right) - \lambda \tilde{f}\left(x, u_\lambda\left(x\right)\right) < 0$ em $\left\{x \in \Omega_{-r} : u_{\lambda'}\left(x\right) + \varepsilon_1 > u_\lambda\left(x\right)\right\}.$

De fato, como $u_{\lambda'}\left(x\right) + \varepsilon_1 > u_\lambda\left(x\right),$ temos que $u_{\lambda'}\left(x\right) - u_\lambda\left(x\right) > -\varepsilon_1\left(\varepsilon_0\right),$ o que implica que $u_\lambda\left(x\right) - u_{\lambda'}\left(x\right) < \varepsilon_1\left(\varepsilon_0\right).$

Como $\tilde{f}\left(x, u\right)$ é continua na segunda variável, dado $\eta > 0$, existe $\delta\left(\eta\right) > 0$ tal que

$$\lambda' \tilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\right) - \lambda' \tilde{f}\left(x, u_\lambda\right) < \eta \text{ sempre que } u_\lambda - u_{\lambda'} < \delta\left(\eta\right).$$

Podemos tomar $\delta\left(\eta\right) = \varepsilon_1\left(\varepsilon_0\right)$.

Assim, temos que em $\left\{x \in \Omega_{-r} : u_{\lambda'}\left(x\right) + \varepsilon_1 > u_\lambda\left(x\right)\right\},$

$$\lambda' \tilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\right) - \lambda' \tilde{f}\left(x, u_\lambda\right) < \eta \tag{3.35}$$

Como $\lambda' < \lambda$, podemos escrever $\lambda = \lambda' + \gamma$ com $\gamma > 0$. Daí, $\lambda' = \lambda - \gamma$; logo, em (3.35), temos que

$$\lambda' \tilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\right) - \left(\lambda - \gamma\right) \tilde{f}\left(x, u_\lambda\right) < \eta,$$

isto é,

$$\lambda' \tilde{f}\left(x, u_{\lambda'}\right) - \lambda \tilde{f}\left(x, u_\lambda\right) < \eta - \gamma \tilde{f}\left(x, u_\lambda\right). \tag{3.36}$$

Como $\widetilde{f}\left(x, u_\lambda\right) > 0$, seja

$$i\left(r\right) = \inf_{x \in \Omega_{-r}} f\left(x, u_\lambda\left(x\right)\right) > 0.$$

Tomemos $\eta < \gamma i\left(r\right).$ Daí $\eta - \gamma i\left(r\right) < 0$, logo $\eta - \gamma f\left(x, u_\lambda\left(x\right)\right) < 0$ para todo $x \in \Omega_{-r}$. Em particular, $\eta - \gamma f\left(x, u_\lambda\left(x\right)\right) < 0$ para $x \in \Omega_{-r}$ que satisfaz $u_{\lambda'}\left(x\right) + \varepsilon_1 > u_\lambda\left(x\right)$.

Portanto, em (3.36), temos que em $\{x \in \Omega_{-r} : u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 > u_\lambda(x)\}$,

$$\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda) < 0.$$

Agora, vejamos que $\{x \in \Omega_{-r} : u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 > u_\lambda(x)\} = \emptyset$. Para isto, observemos que se $x \in \Omega_{-r}$ é tal que $u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 \leq u_\lambda(x)$, então $u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 - u_\lambda(x) \leq 0$, donde obtemos que $(u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 - u_\lambda(x))^+ = 0$.
Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{-r}} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda)\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{[u_{\lambda'}(x)+\varepsilon_1 \leq u_\lambda(x)] \cup [u_{\lambda'}(x)+\varepsilon_1 > u_\lambda(x)]} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u)\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{[u_{\lambda'}(x)+\varepsilon_1 \leq u_\lambda(x)]} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda)\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{[u_{\lambda'}(x)+\varepsilon_1 > u_\lambda(x)]} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda)\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{[u_{\lambda'}(x)+\varepsilon_1 > u_\lambda(x)]} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda)\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x < 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega_{-r}} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}(x)) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda(x))\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x < 0,$$

o que é um absurdo, pois como vimos em (3.34), temos que

$$\int_{\Omega_{-r}} \Big(\lambda' \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) - \lambda \tilde{f}(x, u_\lambda)\Big)(u_{\lambda'} + \varepsilon_1 - u_\lambda)^+ \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Portanto,

$$\{x \in \Omega_{-r} : u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 > u_\lambda(x)\} = \emptyset.$$

Então, $u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1 \leq u_\lambda(x)$ para todo $x \in \Omega_{-r}$. Podemos tomar $\varepsilon_1' \in (0, \varepsilon_0)$ tal que $\varepsilon_1' < \varepsilon_1$ tal que $u_{\lambda'}(x) + \varepsilon_1' < u_\lambda(x)$ em Ω.

Neste primeiro caso consideramos a subsolução $\underline{u} = u_{\lambda'} + \varepsilon_1'$.

Caso 2) Assumimos, agora, que f satisfaz (H_5) *ii*).
Então, pelo Lema 3.14 temos que $\underline{u} := \sigma u_{\lambda'} \leq u_\lambda$ em Ω, ou seja $\underline{u}$ é uma subsolução de $(\tilde{P}_\lambda)$ onde $\lambda' = \lambda \sigma^{q-p+1}$.
Escolha $r > 0$. Como no Caso 1 e uma vez que $u_{\lambda'} \geq \sigma u_{\lambda'}$ teremos que

$$\sigma^q \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) < \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) \text{ em } \Omega.$$

Pois por (H_5) $ii)$, fazendo $t_0 = u_{\lambda'}$ e $t_1 = \sigma u_{\lambda'}$ temos que

$$\begin{aligned}
(\sigma u_{\lambda'})^{-q} \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) &> (u_{\lambda'})^{-q} \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \\
\frac{1}{(\sigma u_{\lambda'})^q} \tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) &> \frac{1}{(u_{\lambda'})^q} \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \\
\tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) &> \sigma^q \tilde{f}(x, u_{\lambda'}) \text{ em } \Omega.
\end{aligned}$$

Como $\sigma u_{\lambda'}, u_\lambda \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\tilde{f}(x, \sigma u_{\lambda'}) > \sigma^q \tilde{f}(x, u_{\lambda'})$ em Ω, pelo Teorema 1.27, temos que

$$\sigma u_{\lambda'} < u_\lambda \text{ em } \Omega$$

e

$$0 > \frac{\partial \sigma u_{\lambda'}}{\partial \nu} > \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Daí, temos que $\sigma u_{\lambda'} < u_\lambda$ em Ω.

Consideramos então nesse caso a subsolução dada por $\underline{u} = \sigma u_{\lambda'}$.

Mostremos enfim que u_λ é um minimizador local de I_λ em $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Para isso, fixemos o conjunto $\mathcal{A} = \left\{v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right), \underline{u} \leq v \leq \overline{u} \text{ q.t.p em } \Omega\right\}$.

Notemos que, em qualquer dos casos acima, isto é, desde que $\underline{u} < u_\lambda < \overline{u}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|u_\lambda - v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon$ então $\underline{u} \leq v \leq \overline{u}$. Ou seja, $B_{\delta_r/2}(u_\lambda) \subset \mathcal{A}$. De fato, como $\Omega_{-r} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$, podemos escrever $\overline{\Omega_{-r}} = \overline{\Omega \backslash A_r}$ com $A_r = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < r\}$. Escolhendo $r > 0$ suficientemente pequeno de modo que $|A_r| < \varepsilon(r)$, podemos considerar

$$\delta_r^1 := \min_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} \{u_\lambda - \underline{u}\} > 0 \text{ e } \delta_r^2 := \min_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} \{\overline{u} - u_\lambda\} > 0.$$

Seja

$$\delta_r := \min\left\{\delta_r^1, \delta_r^2\right\}.$$

Seja $v \in B_{\delta_r/2}(u_\lambda)$, então temos que $\|u_\lambda - v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} < \dfrac{\delta_r}{2}$.

Disto temos,

$$\|u_\lambda - v\|_{C_0^1(\overline{\Omega_{-r}})} = \sup_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} |u_\lambda(x) - v(x)| + \sum_{i=1}^N \sup_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} \left|\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right| < \frac{\delta_r}{2}.$$

Como

$$\sup_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} |u_\lambda(x) - v(x)| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} |u_\lambda(x) - v(x)| + \sum_{i=1}^N \sup_{x \in \overline{\Omega_{-r}}} \left|\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|.$$

Temos que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega_{-r}}} |u_\lambda(x) - v(x)| < \frac{\delta_r}{2}.$$

Daí,

$$|u_\lambda(x) - v(x)| < \frac{\delta_r}{2},$$

ou seja,

$$-\frac{\delta_r}{2} < u_\lambda(x) - v(x) < \frac{\delta_r}{2}.$$

Notemos que

$$\overline{u}(x) - v(x) = \overline{u}(x) - u_\lambda(x) + u_\lambda(x) - v(x).$$

Donde obtemos que para todo $x \in \overline{\Omega_{-r}}$,

$$\overline{u}(x) - v(x) \geq \delta_r^2 - \frac{\delta_r}{2} \geq \delta_r - \frac{\delta_r}{2} = \frac{\delta_r}{2} > 0.$$

Logo,

$$\overline{u}(x) \geq v(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Analogamente, temos que $v(x) \geq \underline{u}(x)$.
De fato, notemos que

$$v(x) - \underline{u}(x) = v(x) - u_\lambda(x) + u_\lambda(x) - \underline{u}(x).$$

Como, para todo $x \in \overline{\Omega_{-r}}$,

$$\frac{\delta_r}{2} \geq v(x) - u_\lambda(x) \geq -\frac{\delta_r}{2},$$

temos que

$$v(x) - \underline{u}(x) \geq -\frac{\delta_r}{2} + \delta_r^1 \geq -\frac{\delta_r}{2} + \delta_r = \frac{\delta_r}{2} > 0.$$

Logo,

$$v(x) \geq \underline{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Assim, $\underline{u}(x) \leq v(x) \leq \overline{u}(x)$. Portanto, $v \in \mathcal{A}$, como queríamos.

Vejamos que isto implica que u_λ é um minimizador local de I_λ em $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.
De fato, seja

$$\bar{f}(x,s) = \begin{cases} \tilde{f}(x,\underline{u}) & \text{se} \quad s < \underline{u} \\ \tilde{f}(x,s) & \text{se} \quad \underline{u} \leq s \leq \overline{u} \\ \tilde{f}(x,\overline{u}) & \text{se} \quad \overline{u} < s \end{cases},$$

e considere $\bar{F}(x,t) = \displaystyle\int_0^t \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Definamos o seguinte funcional

$$\bar{I}_\lambda(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p - \lambda \int_\Omega \bar{F}(x,v)\,\mathrm{d}x.$$

Das nossas hipóteses sobre a não linearidade da $\tilde{f}$ e repetindo argumentos padrões já usados para I_λ, segue que $\bar{I}_\lambda$ tem um minimizador global $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Claramente, u_0 é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = \lambda \bar{f}(x,u_0) & \text{em } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.37}$$

Além disso, os resultados de regularidade dados pelo Teorema 1.24 e pelo Lema 1.25 mostram que $u_0 \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.
Por (3.37) temos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega \bar{f}(x,u_0)\,\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Como $(\underline{u}-u_0)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$, consideremos $\varphi = (\underline{u}-u_0)^+$ como uma função teste.
Daí

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega \bar{f}(x,u_0)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x. \tag{3.38}$$

Além disso, sabemos que $\underline{u}$ é uma subsolução para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$, isto é, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \leq \lambda\int_\Omega \bar{f}(x,\underline{u})\,\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Consideremos novamente $\varphi = (\underline{u}-u_0)^+$. Então

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x \leq \lambda\int_\Omega \bar{f}(x,\underline{u})(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x. \tag{3.39}$$

Subtraindo (3.39) de (3.38), temos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x \\ &\leq \lambda\int_\Omega \left(\bar{f}(x,\underline{u}) - \bar{f}(x,u_0)\right)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Podemos reescrever a desigualdade acima como a seguir:

$$\begin{aligned}&\int_{[\underline{u}>u_0]\cup[u_0>\underline{u}]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\\ &\leq \lambda\int_{[\underline{u}>u_0]\cup[u_0>\underline{u}]}\left(\bar f(x,\underline{u})-\bar f(x,u_0)\right)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\\ &+\int_{[u_0>\underline{u}]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\\ &\leq \lambda\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(\bar f(x,\underline{u})-\bar f(x,u_0)\right)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x\\ &+\lambda\int_{[u_0>\underline{u}]}\left(\bar f(x,\underline{u})-\bar f(x,u_0)\right)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\\ &\leq \lambda\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(\bar f(x,\underline{u})-\bar f(x,u_0)\right)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.5, tomando $x=\nabla\underline{u}$ e $y=\nabla u_0$, temos que

$$\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{[\underline{u}>u_0]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\\ &\leq \lambda\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(\bar f(x,\underline{u})-\bar f(x,u_0)\right)(\underline{u}-u_0)^+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pela definição da $\overline{f}(x,s)$, temos que

$$\bar f(x,\underline{u})=\widetilde{f}(x,\underline{u}) \text{ e } \bar f(x,u_0)=\widetilde{f}(x,\underline{u}).$$

Daí,

$$0\leq\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x\leq 0,$$

donde concluímos que

$$\int_{[\underline{u}>u_0]}\left(|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}-|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(\underline{u}-u_0)^+ \,\mathrm{d}x=0.$$

Logo,

$$u_0 \geq \underline{u}.$$

Analogamente, tomando $\varphi = (u_0 - \overline{u})^+$ como a função teste, teremos que

$$u_0 \leq \overline{u}.$$

Assim,

$$\underline{u} \leq u_0 \leq \overline{u}. \tag{3.40}$$

Concluímos então que $u_0 \in \mathcal{A}$, uma vez que $u_0 \in C_0^1(\Omega)$ e temos as desigualdades em **(**3.40**).** E como u_λ é a única solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ temos que $u_\lambda = u_0$.
Uma vez que u_λ é um ponto interior de $\mathcal{A}$, então existe um número $\varepsilon > 0$ tal que para cada $u \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ temos que

$$\|u_\lambda - u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon.$$

Além disso, notemos que para toda $u \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) - \bar{I}_\lambda(u) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p - \lambda F(x,u)\right) \mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p - \lambda \bar{F}(x,u)\right) \mathrm{d}x \\
&= -\lambda \int_\Omega \left(F(x,u) - \bar{F}(x,u)\right) \mathrm{d}x \\
&= -\lambda \int_\Omega \left(\int_0^u f(x,s)\,\mathrm{d}s - \int_0^u \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$I_\lambda(u) - \bar{I}_\lambda(u) = -\lambda \int_\Omega \left(\int_0^u f(x,s) - \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}x. \tag{3.41}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\int_0^u f(x,s) - \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\underline{u}} f(x,s) - \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s + \int_{\underline{u}}^u f(x,s) - \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s \\
&= F(\underline{u}) - \bar{F}(\underline{u}) + \int_{\underline{u}}^u f(x,s)\,\mathrm{d}s - \int_{\underline{u}}^u \bar{f}(x,s)\,\mathrm{d}s \\
&= F(\underline{u}) - \bar{F}(\underline{u}).
\end{aligned}$$

Segue que em (3.41),

$$I_\lambda(u) - \bar{I}_\lambda(u) = -\lambda \int_\Omega F(\underline{u}) - \bar{F}(\underline{u})\,\mathrm{d}x = C.$$

Como

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) - \bar{I}_\lambda(u) &= C \\ I_\lambda(u) &= C + \bar{I}_\lambda(u) \\ &\geq C + \bar{I}_\lambda(u_\lambda) \\ &= I_\lambda(u_\lambda), \end{aligned}$$

temos que u_λ é minimizador local de I_λ em $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$. ■

Na seção a seguir, apresentaremos a prova do principal resultado deste capítulo. Para isso, necessitamos de dois resultados que serão apresentados a seguir:

Lema 3.17 *Sob as hipóteses (H_1) e (H_3) temos que o zero é um mínimo local de I_λ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Para isso, mostraremos que existem $\rho, \alpha > 0$ tal que para $\|u\| \leq \rho$ temos que $I_\lambda(u) \geq \alpha > 0$.
De fato, por (H_3), temos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $t \in [0, \delta_\varepsilon]$, temos que $\tilde{f}(x,t) \leq \varepsilon t^{p-1}$; logo, se $u \in [0, \delta_\varepsilon]$, temos

$$\int_0^u \tilde{f}(x,t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_0^u t^{p-1}\,\mathrm{d}t.$$

Daí,

$$\tilde{F}(x,u) \leq \frac{\varepsilon}{p}u^p. \tag{3.42}$$

Por (H_1), para todo $t \in [\delta_\varepsilon, +\infty)$ temos que $\tilde{f}(x,t) \leq C + Ct^r$; daí

$$\int_0^u \tilde{f}(x,t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^u C + Ct^r\,\mathrm{d}t.$$

Logo,

$$\tilde{F}(x,u) \leq Cu + \frac{C}{r+1}u^{r+1}. \tag{3.43}$$

Se $\delta_\varepsilon \leq u$, então $\delta_\varepsilon^{r+1} \leq u^{r+1}$ e, portanto, $u^{r+1} \geq \delta_\varepsilon^r u \geq \delta_\varepsilon^r\,\delta_\varepsilon$.
Assim,

$$Cu \leq \frac{C}{\delta_\varepsilon^r}\delta_\varepsilon^r u \leq \frac{C}{\delta_\varepsilon^r}u^{r+1} = C_{\delta_\varepsilon}u^{r+1}.$$

Portanto, em (3.43), temos que

$$\tilde{F}(x,u) \leq C_{\delta_\varepsilon}u^{r+1} + C_1 u^{r+1}. \tag{3.44}$$

De (3.42) e (3.44), temos que, para todo $u \in [0, +\infty)$ e $r \in [0, p^* - 1)$,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x,u) &\leq \frac{\varepsilon}{p}u^p + C_{\delta_\varepsilon}u^{r+1} + C_1u^{r+1} \\ &= \frac{\varepsilon}{p}u^p + C_{\delta_\varepsilon}u^{r+1}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x + C_{\delta_\varepsilon}\int_\Omega u^{r+1}\,\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$-\lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x \geq -\lambda\left(\frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x + C_{\delta_\varepsilon}\int_\Omega u^{r+1}\,\mathrm{d}x\right). \tag{3.45}$$

Note que $p - 1 < p^* - 1$, pois

$$\begin{aligned}(p^*-1)-(p-1) &= p^* - p = \frac{Np}{N-p} - p \\ &= \frac{Np-(N-p)\,p}{(N-p)} \\ &= \frac{Np - Np + p^2}{N-p} \\ &= \frac{p^2}{N-p} > 0.\end{aligned}$$

Daí, podemos tomar r tal que $p - 1 < r < p^* - 1$.
Como,

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \lambda\int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

por (3.45), temos que

$$\begin{aligned}I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda\varepsilon}{p}\int_\Omega u^p\,\mathrm{d}x - \lambda C_{\delta_\varepsilon}\int_\Omega u^{r+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda\varepsilon}{p}\|u\|_p^p - \lambda C_{\delta_\varepsilon}\|u\|_{r+1}^{r+1}.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda\varepsilon C'}{p}\|u\|^p - \lambda C_{\delta_\varepsilon}C''\|u\|^{r+1} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda\varepsilon C'}{p}\right)\|u\|^p - \lambda C_{\delta_\varepsilon}C''\|u\|^{r+1}.\end{aligned}$$

Como $p < r + 1$, tomando $\|u\| \leq \rho$ suficientemente pequeno e ε suficientemente pequeno de forma que

$$\frac{1-\lambda\varepsilon C'}{p} > 0 \text{ e } \frac{1-\lambda\varepsilon C'}{p}\|u\|^p > \lambda C_{\delta_\varepsilon}C''\|u\|^{r+1},$$

teremos que

$$I_\lambda(u) \geq \alpha > 0 \text{ com } \alpha := \frac{1-\lambda\varepsilon C'}{p}\rho^p - \lambda C_3(\delta_\varepsilon) C''\rho^{r+1},$$

como queríamos. ∎

Apresentamos a seguir a condição de Palais Smale:

Definição 3.18 (Condição de Palais-Smale [28], Definição 2.2, p. 16) *Seja X um espaço de Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, dizemos que φ satisfaz a condição de Palais-Smale, denotada (PS) se para qualquer $(u_n) \subset X$ tal que*

$$|\varphi(u_n)| \leq C \text{ e } \varphi'(u_n) \to 0,$$

temos que (u_n) possui uma subsequência convergente em X.

Lema 3.19 *I_λ satisfaz a condição (PS).*

Demonstração: Para isso, consideremos $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\lambda(u_n) \leq k \text{ e } I'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Como $|I_\lambda(u_n)| \leq k$, pela coercividade de I_λ provada ao longo da demonstração do Lema 3.15, temos que $\|u_n\| < C$, ou seja, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é reflexivo, então podemos extrair uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ para alguma $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como $I'_\lambda(u_{n_k})\varphi \to 0$ para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, considerando $\varphi = u_{n_k} - u$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u)\, dx - \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u)\, dx \to 0. \tag{3.46}$$

Desde que, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$, temos que $u_{n_k} \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$. Em particular, $u_{n_k} \to u$ em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < p^*$. Além disso, temos que $\left(\tilde{f}(x, u_{n_k})\right)$ é limitada em $L^{p'}(\Omega)$ pois

$$\left\|\tilde{f}(x, u_{n_k})\right\|_{p'} = \left(\int_\Omega \left|\tilde{f}(x, u_{n_k})\right|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Uma vez que $\left|\tilde{f}(x, u_{n_k})\right| \leq C|u_{n_k}|^{p-1}$, segue que

$$\left(\int_\Omega \left|\tilde{f}(x, u_{n_k})\right|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\int_\Omega C\left(|u_{n_k}|^{p-1}\right)^{p'}\right)^{1/p'} \leq C\|u_{n_k}\|_{(p-1)p'}^{p-1}.$$

Desde que $(p-1)p' = p$, temos que $\left\|\tilde{f}(x, u_{n_k})\right\|_{p'} \leq C$.

Assim, utilizando a Desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega \tilde{f}(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u)\, \mathrm{d}x \leq \left\| \tilde{f}(x, u_{n_k}) \right\|_{p'} \|u_{n_k} - u\|_p \to 0. \tag{3.47}$$

Logo, de (3.46) e (3.47), segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla (u_{n_k} - u)\, \mathrm{d}x \to 0.$$

Então, pelo Teorema 1.32, $u_{n_k} \to u$.
Portanto, como u_n possui subsequência convergente, temos que I_λ satisfaz a condição (PS). ■

3.4 Prova do Teorema 3.1

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que existe um número $\overline{\lambda} > 0$ tal que, para todo $\lambda > \overline{\lambda}$, o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem pelo menos duas soluções positivas. Para isto, argumentaremos por contradição, isto é, vamos supor que existe um número $\lambda > \overline{\lambda}$ tal que o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tenha uma única solução positiva u_λ.
Utilizando o Lema 3.16, concluímos que a solução u_λ é um minimizador local de I_λ em $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, e pelo Teorema 1.33, temos que u_λ é também um minimizador em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, pelo Lema 3.17, temos que o zero é outro minimizador de I_λ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, I_λ possui um par de mínimos locais.
Assim, como I_λ é C^1 e pelo Lema 3.19, satisfaz a condição (PS) e possui um par de mínimos locais. Então, pelo Teorema 1.13, obtemos a existência de um terceiro ponto crítico de I_λ. Sendo assim, $(\tilde{P}_\lambda)$ possuiria duas soluções positivas, o que é uma contradição, uma vez que estamos supondo que o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem uma única solução positiva.
Portanto, para $\lambda > \bar{\lambda}$, o Problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem pelo menos duas soluções positivas.

Mostremos, agora, que o Problema $(\tilde{P}_{\bar{\lambda}})$ tem uma solução positiva.
De fato, pela hipótese (H_3), temos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $t \in [0, t_0]$, temos

$$\left| \tilde{f}(x, t) \right| \leq \varepsilon t^{p-1}.$$

Escolhendo ε de forma que $\varepsilon \leq \dfrac{\lambda_1(\Omega)}{2\left(\bar{\lambda} + 1\right)}$, temos que

$$\left| \tilde{f}(x, t) \right| \leq \frac{\lambda_1(\Omega)}{2\left(\bar{\lambda} + 1\right)} t^{p-1}.$$

Daí,

$$\left(\bar{\lambda}+1\right)\left|\tilde{f}\left(x,t\right)\right| \leq \frac{\lambda_1\left(\Omega\right)}{2}t^{p-1}. \tag{3.48}$$

Consideremos (λ_n) uma sequência estritamente decrescente, com

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \bar{\lambda} \text{ onde } \lambda_n \in \left(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}+1\right),$$

e seja u_{λ_n} uma solução positiva de $(\tilde{P}_{\lambda_n})$, $n = 1, 2, \ldots.$ Mostremos agora que (3.48) implica que $\|u_{\lambda_n}\|_\infty > t_0$, $n = 1, 2, \ldots.$

De fato, suponhamos que $u_{\lambda_n} \leq t_0$ em Ω. Como u_{λ_n} é uma solução de $(\tilde{P}_{\lambda_n})$ temos que

$$\int_\Omega \left|\nabla u_{\lambda_n}\right|^{p-2}\nabla u_{\lambda_n}\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \lambda_n\int_\Omega \widetilde{f}(x,u_{\lambda_n})\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Tomando $\varphi = u_{\lambda_n}$, temos que

$$\int_\Omega \left|\nabla u_{\lambda_n}\right|^p\,\mathrm{d}x = \lambda_n\int_\Omega \tilde{f}(x,u_{\lambda n})u_{\lambda_n}\,\mathrm{d}x.$$

Desde que $\lambda_n < \bar{\lambda}+1$, temos, por (3.48), que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla u_{\lambda_n}\right|^p\,\mathrm{d}x &\leq \frac{\lambda_1(\Omega)}{2}\int_\Omega u_{\lambda_n}^{p-1}u_{\lambda_n}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda_1(\Omega)}{2}\int_\Omega u_{\lambda_n}^{p}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{\lambda_n}|^p\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega u_{\lambda_n}^p\,\mathrm{d}x} \leq \frac{\lambda_1(\Omega)}{2} < \lambda_1(\Omega),$$

o que contradiz a caracterização variacional de $\lambda_1(\Omega)$. Portanto, $||u_{\lambda n}||_\infty > t_0$, $n = 1, 2, \ldots$

Como as soluções u_{λ_n} são limitadas na norma $L^\infty(\Omega)$ (veja Apêndice C) e, além disso, temos que $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ e $u_{\lambda_n} \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Então, pela Proposição 1.31, existe $C > 0$ dependendo de p, N, Ω, $\|f\|_\infty$ e $\bar{\lambda}+1$ tal que

$$\|u_{\lambda_n}\|_{C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq C.$$

Notemos que as soluções u_{λ_n} são equicontínuas, pois, sendo $u_{\lambda_n} \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, temos

$$\left|u_{\lambda_n}(x) - u_{\lambda_n}(y)\right| \leq C_1\left|x-y\right|^\alpha.$$

Supondo que $|x-y|^{\alpha} < \delta^{\alpha}$, temos

$$|u_{\lambda_n}(x) - u_{\lambda_n}(y)| < C_1\delta^{\alpha} = \varepsilon,$$

isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$ implica que $|u_{\lambda_n}(x) - u_{\lambda_n}(y)| < \varepsilon$, para toda u_{λ_n}.

Então, pelo Teorema 1.9 (Ascoli-Arzelá), existe uma subsequência de (u_{λ_n}) que converge uniformemente em $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ para uma função $u \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Notemos que esta função $u \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ pode ser identificada facilmente como uma solução de $(\tilde{P}_{\bar{\lambda}})$. Pois, como u_{λ_n} é uma solução de $(\tilde{P}_{\lambda_n})$, temos que u_{λ_n} satisfaz

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda_n}|^{p-2} \nabla u_{\lambda_n} \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda_n \int_{\Omega} \widetilde{f}(x, u_{\lambda_n})\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Como $u_{\lambda_n} \to u$ uniformemente e $\lambda_n \to \bar{\lambda}$, tomando o limite em n na equação acima, pela convergência uniforme temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = \bar{\lambda} \int_{\Omega} \widetilde{f}(x, u)\varphi \, \mathrm{d}x.$$

E como vimos que $\|u_{\lambda_n}\|_{\infty} > t_0$ para $n = 1, 2, ...$,tomando o limite em n, temos que $\|u\|_{\infty} \geq t_{0.}$

Portanto, o problema $(\tilde{P}_{\bar{\lambda}})$ tem uma solução positiva.

Além disso, pelo Lema 3.15, temos que para $\lambda < \bar{\lambda}$, o problema $(\tilde{P}_{\lambda})$ não possui solução, o que conclui a prova do teorema. ■

Apêndice A

Formulação Fraca dos Problemas

A.1 Problema (P)

Uma solução clássica de (P) é uma função $u \in C_0^2(\Omega)$ que satisfaz a equação (P) pontualmente. Aqui estamos interessados em encontrarmos a solução fraca do problema (P). Supondo que u é uma solução clássica, faremos a formulação fraca de (P). Para isso, consideremos a seguinte equação:

$$-\Delta_p u = g(x, u).$$

Assim, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que

$$-\Delta_p u\varphi = g(x, u)\varphi.$$

Integrando em Ω, temos que

$$\int_\Omega -\Delta_p u\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x, u)\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta_p u\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes, obtemos que

$$\int_\Omega -\Delta_p u\varphi \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\nu^i \,\mathrm{d}x.$$

Como $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, resulta que

$$\int_\Omega -\Delta_p u\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x,u)\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Por densidade, segue que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x,u)\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{A.1}$$

Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz a equação (A.1) é dita uma solução fraca do problema (P).

Associaremos a (P) o seguinte funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,v) \, \mathrm{d}x.$$

Veremos no que $I \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ e para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\varphi \, \mathrm{d}x.$$

A.2 Problema ($\tilde{P}_\lambda$)

A fim de encontrarmos a formulação fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$ procederemos como feito acima. Assim, supondo que u é uma solução clássica, encontraremos a formulação fraca para o problema $(\tilde{P}_\lambda)$, isto é, teremos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,u)\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{A.2}$$

Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz a equação (A.2) é dita uma solução fraca de (P_λ).

Associaremos a $(\tilde{P}_\lambda)$ o seguinte funcional $I_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,v) \, \mathrm{d}x,$$

teremos que um ponto crítico de I_λ é uma soluçao fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$, pois

$$I'_\lambda(v)\varphi = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x,v)\varphi \, \mathrm{d}x,$$

para detalhes veja Apêndice B.

Apêndice B

Estudo dos Funcionais

B.1 Funcional Associado ao Problema (P)

Consideremos o seguinte funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u) \, \mathrm{d}x,$$

onde

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s) \, \mathrm{d}s.$$

Inicialmente vejamos que I está bem definido, de fato, pela hipótese (G_2) temos que

$$|G(x,t)| \le C_1 |t| + \frac{C_2}{q_0+1} |t|^{q_0+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |I(u)| &\le \frac{1}{p}\|u\|^p + \left(C_1 \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}x + \frac{C_2}{q_0+1}\int_\Omega |u|^{q_0+1} \, \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p + C_1\|u\|_1 + \frac{C_2}{q_0+1}\|u\|_{q_0+1} < \infty. \end{aligned}$$

Ressaltamos aqui que o argumento usado para mostrarmos que $I \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ é análogo ao que será usado para mostrarmos que $I_\lambda \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Por esse motivo, a fim de poupar o leitor, julgamos ser mais interessante apresentarmos abaixo apenas a prova para o funcional I_λ. Com pequenas modificações no que será apresentado teremos que para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\varphi \, \mathrm{d}x.$$

B.2 Funcional Associado ao Problema $(\tilde{P}_\lambda)$

Consideremos a seguir o funcional $I_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{p}\|v\|^p \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,v)\,\mathrm{d}x,$$

onde $\tilde{F}(x,t) := \displaystyle\int_0^t \tilde{f}(x,s)\,ds$, para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.
Primeiramente notemos que I_λ está bem definido, de fato temos que

$$I_\lambda(v) = \frac{1}{p}\|v\|^p - \lambda \int_\Omega \tilde{F}(x,v)\,\mathrm{d}x.$$

Por (3.28) para $1 \leq r+1 \leq p^*$ temos que

$$\left|\tilde{F}(x,t)\right| \leq c\,|t| + \frac{c\,|t|^{r+1}}{r+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |I_\lambda(v)| &\leq \frac{1}{p}\|v\|^p + \lambda\left(\int_\Omega c\,|v|\,\mathrm{d}v + \int_\Omega \frac{c\,|v|^{r+1}}{r+1}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{1}{p}\|v\|^p + \lambda c\,\|v\|_1 + \frac{\lambda c}{r+1}\|v\|_{r+1}^{r+1} < \infty. \end{aligned}$$

Além disso, veremos que $I_\lambda \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$, para isso utilizaremos os seguintes resultados:

Proposição B.1 ([30], Proposição 13.4, p. 54) *Seja E um espaço normado, $J : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Suponha que J é Gâteaux diferenciável em E e a derivada de Gâteaux dada por*

$$J'(x)\,y = \lim_{t\to 0} \frac{J(x+ty) - J(x)}{t} \text{ é contínua.}$$

Então, J é Fréchet diferenciável, e portanto, J é de classe C^1. Além disso a derivada de Gâteaux coincide com a derivada de Fréchet.

Lema B.2 ([49], Lema A.1, p. 95) (i) *Se $p \in [2,\infty)$ então vale:*

$$\left||z|^{p-2} z - |w|^{p-2} w\right| \leq \beta\,|z-w|\,(|z|+|w|)^{p-2}.$$

(ii) *Se $(1,2]$ então vale:*

$$\left||z|^{p-2} z - |w|^{p-2} w\right| \leq \overline{\beta}\,|z-w|^{p-1},$$

para todo $z, w \in \mathbb{R}^N$ *e* $\beta, \overline{\beta} \in \mathbb{R}$.

Para mostrarmos que $I_\lambda \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$, analisaremos separadamente as parcelas do funcional.

Lema B.3 *O funcional* $I_{\lambda,1} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *definido por* $I_{\lambda,1}(v) = \|v\|^p$ *é de classe* $C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ *e para toda* $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$I'_{\lambda,1}(v)\varphi = p\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi \, dx.$$

Demonstração: Já sabemos que $I_{\lambda,1}$ está bem definido, pois corresponde a norma do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(i) Mostremos a existência da derivada de Gâteaux de $I_{\lambda,1}$, ou seja, que

$$\lim_{t\to 0} \frac{I_{\lambda,1}(v+t\varphi) - I_{\lambda,1}(v)}{t} = I'_{\lambda,1}(v)\varphi.$$

Definamos,

$$\begin{array}{rccl} g: & (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & g(t) = |\nabla v + t\nabla\varphi|^p. \end{array}$$

Como g é contínua pelo teorema do valor médio, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que

$$g(t) - g(0) = g'(t_0)(t-0) = g'(t_0)\, t. \tag{B.1}$$

Podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, onde $\varepsilon \in (0,1)$.

Notemos que,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N \left(v_{x_i} + t\varphi_{x_i}\right)^2\right)^{p/2} \\ g'(t) &= \frac{p}{2}\left(\sum_{i=1}^N \left(v_{x_i} + t\varphi_{x_i}\right)^2\right)^{(p-2)/2} 2\left(\sum_{i=1}^N \left(v_{x_i} + t\varphi_{x_i}\right)\right)\varphi_{x_i} \\ g'(t) &= p\,|\nabla v + t\nabla\varphi|^{p-2}\left(\nabla v + t\nabla\varphi\right)\nabla\varphi. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Assim, por (B.1), temos que

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \frac{\left||\nabla v + t\nabla\varphi|^p - |\nabla v|^p\right|}{|t|} \\ &= p\,|\nabla v + \varepsilon t\nabla\varphi|^{p-2}\left|\left(\nabla v + \varepsilon t\nabla\varphi\right)\nabla\varphi\right| \\ &\le p\left(|\nabla v| + |\nabla\varphi|\right)^{p-2}\left(|\nabla v| + |\nabla\varphi|\right)|\nabla\varphi| \\ &= p\left(|\nabla v| + |\nabla\varphi|\right)^{p-1}|\nabla\varphi|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder para $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, com $p>1$, obtemos

$$p\int_\Omega \left(|\nabla v|+|\nabla\varphi|\right)^{p-1}|\nabla\varphi|\;\mathrm{d}x \le p\left(\int_\Omega \left(|\nabla v|+|\nabla\varphi|\right)^{p}\;\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\;\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{I_{\lambda,1}(v+t\varphi)-I_{\lambda,1}(v)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla v+t\nabla\varphi|^p-|\nabla v|^p}{t}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega p\,|\nabla v+\varepsilon t\nabla\varphi|^{p-2}\left(\nabla v+\varepsilon t\nabla\varphi\right)\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Considerando $t=t_n$ uma sequência em $\mathbb{R}$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (B.2), temos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{I_{\lambda,1}(v+t\varphi)-I_{\lambda,1}(v)}{t}=p\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Portanto, para toda $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que a derivada de Gâteaux de $I_{\lambda,1}$ é dada por:

$$I'_{\lambda,1}(v)\,\varphi=p\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Além disso, a derivada de Gâteaux $I'_{\lambda,1}(v):W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$ é linear e limitada, pois para toda $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\left|I'_{\lambda,1}(v)\,\varphi\right|\le p\,\|v\|^{p/p'}\,\|\varphi\|=C_v\,\|\varphi\|\,,$$

onde C_v é uma constante que depende de v. Assim, $I_{\lambda,1}$ é Gâteaux diferenciável.
Agora, consideremos o espaço produto $\mathcal{X}=\prod_{i=1}^{n}L^{p'}(\Omega)$ munido da norma

$$\|h\|_{\mathcal{X}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'},\ \text{para } h=(h_1,...h_N)\in\mathcal{X}.$$

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} g: & W_0^{1,p}(\Omega) & \to & \mathcal{X}\\ & u & \mapsto & |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\end{array}$$

Então $g(u)=(g_1(u),...,g_N(u))$ com $g_i(u)=|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,N$.
Esta função está bem definida e é limitada, isto é, aplica conjuntos limitados de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $\mathcal{X}$. De fato, para $i=1,2,...,N$, temos

$$\|g_i(u)\|_{p'}^{p'}=\int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'}\;\mathrm{d}x\le\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'}\;\mathrm{d}x=\int_\Omega |\nabla u|^p\;\mathrm{d}x=\|u\|^p\,.$$

Afirmação: g é contínua. De fato, pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que para toda $h \in \mathcal{X}$

$$\|h\|_{\mathcal{X}}^{p'} \leq C_1 \int_\Omega |h|^{p'} \, \mathrm{d}x.$$

Analisemos inicialmente o caso em que $p \geq 2$. Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}}^{p'} &\leq C_1 \int_\Omega |g(u) - g(v)|^{p'} \, \mathrm{d}x \\
&= C_1 \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right|^{p'} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pelo Lema B.2 (i), temos que

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}}^{p'} \leq C_1 \beta^{p'} \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2)} \, \mathrm{d}x.$$

Como $|\nabla u - \nabla v|^{p'} \in L^{p/p'}(\Omega)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2)} \in L^{p/p'(p-2)}(\Omega)$, segue pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}}^{p'} &\leq C_1 \beta^{p'} \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p' \frac{p}{p'}} \, \mathrm{d}x \right)^{p'/p} \left(\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2) \frac{p}{p'(p-2)}} \, \mathrm{d}x \right)^{p'(p-2)/p} \\
&= C_2 \|u - v\|^{p'} \| |\nabla u| + |\nabla v| \|_p^{p'(p-2)}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Minkowski, segue que

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}}^{p'} \leq C_2 \|u - v\|^{p'} \left(\|\nabla u\|_p + \|\nabla v\|_p \right)^{p'(p-2)}.$$

Donde temos que,

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}} \leq C_2^{1/p'} \|u - v\| (\|u\| + \|v\|)^{p-2},$$

assim,

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}} \leq C \|u - v\| (\|u\| + \|v\|)^{p-2}. \tag{B.3}$$

Onde $C = C_2^{1/p'}$, é uma constante positiva que independe de u e v.
Analisemos agora o caso em $1 < p < 2$. Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g(v)\|_{\mathcal{X}}^{p'} &\leq C_1 \int_\Omega |g(u) - g(v)|^{p'} \, \mathrm{d}x \\
&= C_1 \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right|^{p'} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pelo Lema B.2 (ii), segue que

$$\begin{aligned} \|g(u)-g(v)\|_{\mathcal{X}}^{p'} &\leq C_1\overline{\beta}^{p'}\int_\Omega |\nabla u-\nabla v|^{p'(p-1)}\,\mathrm{d}x \\ &= C_2'\int_\Omega |\nabla u-\nabla v|^{p}\,\mathrm{d}x \\ &= C_2'\|u-v\|^p. \end{aligned}$$

Donde,

$$\|g(u)-g(v)\|_{\mathcal{X}} \leq \left(C_2'\right)^{1/p'}\|u-v\|^{p/p'},$$

assim,

$$\|g(u)-g(v)\|_{\mathcal{X}} \leq C'\|u-v\|^{p-1}. \tag{B.4}$$

onde $C'=\left(C_2'\right)^{1/p'}$, é uma constante positiva que independe de u e v.
De (B.3) e (B.4) segue a continuidade de g.

(ii) Mostremos agora que $I_{\lambda,1}':W_0^{1,p}(\Omega)\to\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ é contínuo. Com efeito, pela continuidade de g, basta mostrarmos que

$$\left\|I_{\lambda,1}'(u)-I_{\lambda,1}'(v)\right\|_* \leq K\|g(u)-g(v)\|_{\mathcal{X}},$$

onde K é uma constante positiva independente de u, $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$.
De fato,

$$\begin{aligned} \left|\left(I_{\lambda,1}'(u)-I_{\lambda,1}'(v)\right)\cdot w\right| &= p\left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\,\mathrm{d}x-\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq p\int_\Omega \left|\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\right||\nabla w|\,\mathrm{d}x \\ &= p\int_\Omega |g(u)-g(v)||\nabla w|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, segue que

$$\begin{aligned} \left|\left(I_{\lambda,1}'(u)-I_{\lambda,1}'(v)\right)\cdot w\right| &\leq p\left(\int_\Omega |g(u)-g(v)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega |\nabla w|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &\leq Cp\left(\sum\|g_i(u)-g_i(v)\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'}\|\nabla w\|_p \\ &= Cp\|g(u)-g(v)\|_{\mathcal{X}}\|w\|. \end{aligned}$$

Seja $K=Cp$, então para todo $u,v,w\in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\left|\left(I_{\lambda,1}'(u)-I_{\lambda,1}'(v)\right)\cdot w\right| \leq K\|g(u)-g(v)\|_{\mathcal{X}}\|w\|.$$

Portanto, $I'_{\lambda,1}$ é contínuo. Concluímos, pela Proposição B.1 que $I_{\lambda,1} \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$.

■

Como consequência imediata deste lema, temos o seguinte resultado.

Corolário B.4 *O funcional $I_{\lambda,2} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $I_{\lambda,2}(v) = \dfrac{1}{p}\|v\|^p$ é de classe C^1 e para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$I'_{\lambda,2}(v)\varphi = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Lema B.5 *O funcional $I_{\lambda,3} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $I_{\lambda,3}(u) = \int_\Omega \tilde{F}(x,u)\,\mathrm{d}x$ é de classe C^1 e para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$I'_{\lambda,3}(u)v = \int_\Omega \tilde{f}(x,u)\, v \, \mathrm{d}x.$$

Demonstração: Mostremos primeiramente que $I_{\lambda,3}(u)$ é Gâteaux diferenciável. Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $0 < t < 1$, então

$$I_{\lambda,3}(u+tv) - I_{\lambda,3}(u) = \int_\Omega \left(\tilde{F}(x,u+tv) - \tilde{F}(x,u)\right) \mathrm{d}x.$$

Pelo Teorema do valor médio, existe $\theta \in [0,1]$ tal que:

$$\int_\Omega \left(\tilde{F}(x,u+tv) - \tilde{F}(x,u)\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial \tilde{F}}{\partial (tv)}(x, u+\theta tv) \; \mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\tilde{F}(x,u+tv) - \tilde{F}(x,u)\right) \mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla \tilde{F}(x,u+\theta tv)(0,tv) \; \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,u+\theta tv), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s}(x,u+\theta tv)\right)(0,tv) \; \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s}(x,u+\theta tv)\, tv \; \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \tilde{f}(x,u+\theta tv)\, tv \; \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{I_{\lambda,3}(u+tv) - I_{\lambda,3}(u)}{t} = \int_\Omega \tilde{f}(x,u+\theta tv)\, v \, \mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0} \frac{I_{\lambda,3}(u+tv) - I_{\lambda,3}(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \tilde{f}(x,u+\theta tv)\, v \, \mathrm{d}x. \tag{B.5}$$

Notemos que quando $t \to 0$, temos que

$$(x, u + \theta t v)\, v \to (x, u)\, v \text{ q.t.p em } \Omega.$$

E como $\tilde{f}(x, \cdot)$ é contínua, temos

$$\tilde{f}(x, u + \theta t v)\, v \to \tilde{f}(x, u)\, v \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ quando } t \to 0.$$

Observemos que $\tilde{f}(x, u) \in L^{p'}(\Omega)$, pois como

$$\left|\tilde{f}(x, u)\right| \leq C_1 |u|^{(p-1)},$$

temos que

$$\int_\Omega \left|\tilde{f}(x, u)\right|^{p'} \, dx \leq C_1^{p'} \int_\Omega |u|^{p'(p-1)} \, dx = C_1^{p'} \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f}(x, u + \theta t v)\, v\right| &= \left|\tilde{f}(x, u + \theta t v)\right| |v| \\
&\leq \left(C_1 |u + \theta t v|^{p-1}\right) |v| \\
&\leq 2^{p-1} C_1 \left(|u|^{p-1} + |\theta t v|^{p-1}\right) |v| \\
&\leq \left(2^{p-1} C_1 |u|^{p-1} + 2^{p-1} C_1 |v|^{p-1}\right) |v|.
\end{aligned}$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder para $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$, com $p > 1$, segue que

$$\int_\Omega \left(2^{p-1} C_1 |u|^{p-1} + 2^{p-1} C_1 |v|^{p-1}\right) |v| \, dx \leq \left\|2^{p-1} C_1 |u|^{p-1} + 2^{p-1} C_1 |v|^{p-1}\right\|_{p'} \|v\|_p < \infty.$$

Assim,

$$g = 2^{p-1} C_1 |u|^{p-1} + 2^{p-1} C_1 |v|^{p-1} \in L^1(\Omega).$$

Logo em (B.5) pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que,

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega \tilde{f}(x, u + \theta t v)\, v \, dx = \int_\Omega \tilde{f}(x, u)\, v \, dx.$$

Portanto $I_{\lambda,3}$ é Gâteaux diferenciavél e para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a derivada de Gâteaux é dada por

$$I'_{\lambda,3}(u)\, v = \int_\Omega \tilde{f}(x, u)\, v \, dx.$$

Notemos que a derivada de Gâteaux $I'_{\lambda,3}(u)\, v$ é claramente linear e além disso é limitada, pois

$$\left|I'_{\lambda,3}(u)\,v\right| = \left|\int_\Omega \tilde{f}(x,u)\,v\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega \left|\tilde{f}(x,u)\,v\,\mathrm{d}x\right| \leq \left\|\tilde{f}(x,u)\right\|_{p'} \|v\|_p\,.$$

Pela desigualdade de Poincaré temos que

$$\left|I'_{\lambda,3}(u)\,v\right| \leq C\left\|\tilde{f}(x,u)\right\|_{p'} \|v\| = C_1\|v\|\,.$$

Provemos agora que $I'_{\lambda,3}(u)$ é contínua. Seja $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\left\|I'_{\lambda,3}(u_n) - I'_{\lambda,3}(u)\right\|_* &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1}\left|\int_\Omega \left(\tilde{f}(x,u_n) - \tilde{f}(x,u)\right) v\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1}\int_\Omega \left|\left(\tilde{f}(x,u_n) - \tilde{f}(x,u)\right) v\right| \mathrm{d}x \\
&\leq C\left\|\tilde{f}(x,u_n) - \tilde{f}(x,u)\right\|_{p'} \|v\|_p\,.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento anterior teremos que

$$\left\|I'_{\lambda,3}(u_n) - I'_{\lambda,3}(u)\right\|_* \leq C\left\|\tilde{f}(x,u_n) - \tilde{f}(x,u)\right\|_{p'}\,.$$

Donde concluímos que quando $n \to \infty$

$$\left\|I'_{\lambda,3}(u_n) - I'_{\lambda,3}(u)\right\|_* \to 0.$$

Portanto $I'_{\lambda,3}$ é contínua e pela Proposição B.1 temos que $I_{\lambda,3}$ é $C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R}\right)$, com

$$I'_{\lambda,3}(u)\,v = \int_\Omega \tilde{f}(x,u)\,v\,\mathrm{d}x.$$

Logo dos Lemas B.3, B.4, B.5, temos que $I_\lambda \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R}\right)$ e

$$I'_\lambda(v)\,\varphi = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\,|\nabla v|\,\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f(x,v)\,\varphi\,\mathrm{d}x.$$

■

Apêndice C

Limitação em L^∞

Mostraremos agora que todas as soluções de $(\tilde{P}_\lambda)$ são uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega)$.

Lema C.1 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução de $(\tilde{P}_\lambda)$ temos que $u \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [p^*, +\infty]$.*

Demonstração: Sejam $\gamma = \dfrac{N}{N-p}$; $\sigma_n = p\gamma^n$ e $s_n = (\gamma^n - 1)p$. Provaremos por indução que $u \in L^{\sigma_n}(\Omega)$ para todo $n \geq 1$.
Para $n = 1$ temos que $\sigma_1 = p\gamma^1 = \dfrac{pN}{N-p} = p^*$ e pelo Teorema 1.19, temos que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, assim, $u \in L^{\sigma_1}(\Omega)$.
Agora, suponhamos que $u \in L^{\sigma_n}(\Omega)$ para algum n fixo e provaremos que $u \in L^{\sigma_{n+1}}(\Omega)$. Para isso consideremos para $k > 0$,

$$v_k = \begin{cases} k & \text{se} \quad u \geq k \\ u & \text{se} \quad u \leq k \end{cases}$$

e

$$w = |v_k|^{s_n} v_k, \quad z = |v_k|^{\gamma^n - 1} v_k.$$

Uma vez que $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pois $\nabla z = \gamma^n |v_k|^{\gamma^n} |\nabla v_k| \in L^p(\Omega)$, temos pelo Teorema 1.19, isto é, pela imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ que

$$\|z\|_{p*} \leq C(n,p) \|z\|.$$

Disso obtemos que,

$$\|z\|_{p*}^p \leq C^p \|z\|^p.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} &\leq C^p \int_\Omega \left| \nabla \left\{ |v_k|^{\gamma^n - 1} v_k \right\} \right|^p \,\mathrm{d}x \\
&= C^p \int_\Omega \left(\gamma^n |v_k|^{(\gamma^n - 1)} |\nabla v_k| \right)^p \,\mathrm{d}x \\
&= C^p \int_\Omega \gamma^{np} \, |v_k|^{(\gamma^n - 1)p} \, |\nabla v_k|^p \,\mathrm{d}x \\
&= C^p \gamma^{np} \int_\Omega |v_k|^{s_n} \, |\nabla v_k|^{p-2} \, |\nabla v_k|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\nabla v_k = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad u \geq k, \\ \nabla u & \text{se} \quad u \leq k, \end{cases}$$

temos que

$$|\nabla v_k| \leq |\nabla u| \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Assim,

$$\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} \leq C^p \gamma^{np} \int_\Omega |v_k|^{s_n} \, |\nabla u|^{p-2} \, \nabla u \nabla v_k \,\mathrm{d}x. \tag{C.1}$$

Notemos que

$$\nabla w = \nabla \left(|v_k|^{s_n} \, v_k \right) = (s_n + 1) \, |v_k|^{s_n} \, \nabla v_k. \tag{C.2}$$

De (C.1) e (C.2) temos que

$$\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} \leq C^p \gamma^{np} \frac{1}{(s_n + 1)} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \, \nabla u \nabla w \,\mathrm{d}x. \tag{C.3}$$

Desde que $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $\nabla w \in L^p(\Omega)$. Utilizando w como uma função teste em $(\tilde{P}_\lambda)$ temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \, \nabla u \nabla w \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u) \, w \,\mathrm{d}x. \tag{C.4}$$

Como $s_n + 1 = \gamma^n p - p + 1 = p(\gamma^n - 1) + 1$, e $\gamma > 1$ temos que $\gamma^n - 1 > 0$. Disto segue que $\gamma^n p - p + 1 > \gamma^n$, daí, $\dfrac{1}{s_n + 1} < \dfrac{1}{\gamma^n} = \gamma^{-n}$.
De (C.3) e (C.4) obtemos que

$$\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} \leq C^p \gamma^{n(p-1)} \lambda \int_\Omega \tilde{f}(x, u) \, w \,\mathrm{d}x.$$

Como visto na demonstraçao da Proposição 3.12 temos que para todo $t \in [0, +\infty)$,

$$\tilde{f}(x, t) \leq C_2 t^{p-1}.$$

Assim,

$$\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} \leq C^p \gamma^{n(p-1)} \lambda C_2 \int_\Omega |u|^{p-1} |w| \, \mathrm{d}x.$$

Como, $|w| = |v_k|^{s_n+1} \leq |u|^{s_n+1}$, temos que

$$\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} \leq C_0(N,p,C_2) \lambda \gamma^{n(p-1)} \int_\Omega |u|^{p-1} |u|^{s_n+1} \, \mathrm{d}x.$$

Notemos que $p - 1 + s_n + 1 = p + s_n = \sigma_n$. Logo,

$$\left\| |v_k|^{\gamma^n} \right\|_{\gamma p}^{p} \leq C_0 \lambda \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n}$$

e

$$\|v_k\|_{\sigma_{n+1}}^{\sigma_{n+1}} = \int_\Omega |v_k|^{\sigma_{n+1}} \, \mathrm{d}x \leq \left(C_0 \lambda \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n} \right)^{\gamma}.$$

Como por hipótese de indução $u \in L^{\sigma_n}(\Omega)$, temos que $v_k \in L^{\sigma_{n+1}}(\Omega)$ para todo $k > 0$. Além disso, temos que $v_k(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω. Então pelo Lema 1.12 temos que,

$$\int_\Omega |u|^{\sigma_{n+1}} \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |v_k|^{\sigma_{n+1}} \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \left(C_0 \lambda \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n} \right)^{\gamma}.$$

Logo,

$$\int_\Omega |u|^{\sigma_{n+1}} \, \mathrm{d}x \leq \left(C_0 \lambda \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n} \right)^{\gamma} < \infty.$$

Portanto, $u \in L^{\sigma_{n+1}}(\Omega)$, como queríamos demonstrar.
E além disso,

$$\|u\|_{\sigma_{n+1}}^{\sigma_{n+1}} \leq \left(C_0 \lambda \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n} \right)^{\gamma}. \tag{C.5}$$

Usando a desigualdade acima, mostraremos que as soluções u são uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega)$.
Observe que em (C.5) para $n = 1$, temos que

$$\|u\|_{\sigma_2}^{\sigma_2} \leq C_0^{\gamma} \lambda^{\gamma} \gamma^{\gamma(p-1)} \|u\|_{\sigma_1}^{\sigma_1 \gamma}.$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\sigma_3}^{\sigma_3} &\leq C_0^{\gamma} \lambda^{\gamma} \gamma^{2\gamma(p-1)} \|u\|_{\sigma_2}^{\sigma_2 \gamma} \\ &\leq C_0^{\gamma} \lambda^{\gamma} \gamma^{2\gamma(p-1)} \left(C_0^{\gamma} \lambda^{\gamma} \gamma^{\gamma(p-1)} \|u\|_{\sigma_1}^{\sigma_1 \gamma} \right)^{\gamma} \\ &= C_0^{\gamma+\gamma^2} \lambda^{\gamma+\gamma^2} \gamma^{(p-1)\left(2\gamma+\gamma^2\right)} \|u\|_{\sigma_1}^{\sigma_1 \gamma^2}. \end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\sigma_4}^{\sigma_4} &\leq C_0^{\gamma}\lambda^{\gamma}\gamma^{3\gamma(p-1)}\|u\|_{\sigma_3}^{\sigma_3\gamma} \\ &\leq C_0^{\gamma}\lambda^{\gamma}\gamma^{3\gamma(p-1)}\left(C_0^{\gamma+\gamma^2}\lambda^{\gamma+\gamma^2}\gamma^{(p-1)\left(2\gamma+\gamma^2\right)}\|u\|_{\sigma_1}^{\sigma_1\gamma^2}\right)^{\gamma} \\ &= C_0^{\gamma+\gamma^2+\gamma^3}\lambda^{\gamma+\gamma^2+\gamma^3}\gamma^{(p-1)\left(3\gamma+2\gamma^2+\gamma^3\right)}\|u\|_{\sigma_1}^{\sigma_1\gamma^3}. \end{aligned}$$

E assim, por recorrência para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que,

$$\|u\|_{\sigma_{n+1}}^{\sigma_{n+1}} \leq C_0^{\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\ldots+\gamma^n}\lambda^{\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\ldots+\gamma^n}\gamma^{(p-1)\left(n\gamma+(n-1)\gamma^2+\ldots+\gamma^n\right)}\|u\|_{\sigma_1}^{\sigma_1\gamma^n}. \tag{C.6}$$

Consideremos

$$\alpha_n = \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \ldots + \gamma^n$$

e

$$\beta_n = (p-1)\left(n\gamma + (n-1)\gamma^2 + \ldots + \gamma^n\right).$$

Notemos que os limites das sequências abaixo existem quando $n \to \infty$.

$$\left(\frac{\alpha_n}{\sigma_{n+1}}\right); \left(\frac{\beta_n}{\sigma_{n+1}}\right) \text{ e } \left(\frac{\gamma^n}{\sigma_{n+1}}\right).$$

De fato,

$$\frac{\alpha_n}{\sigma_{n+1}} = \frac{\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \ldots + \gamma^n}{p\gamma^{n+1}} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]$$

e sendo $\dfrac{1}{\gamma} < 1$, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\sigma_{n+1}} = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n = \alpha'.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n}{\sigma_{n+1}} &= \frac{(p-1)\left(n\gamma + (n-1)\gamma^2 + \ldots + \gamma^n\right)}{p\gamma^{n+1}} \\ &= \frac{p-1}{p}\left[n\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n + (n-1)\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\sigma_{n+1}} = \frac{p-1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\gamma^n}.$$

Claramente vemos que esta série converge pelo teste da razão,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{n+1}}{n\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{n}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\gamma^{n+1}}\frac{\gamma^n}{n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\gamma}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| \\
&= \frac{1}{\gamma} < 1.
\end{aligned}$$

Para a última sequência temos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\gamma^n}{\sigma_{n+1}} = \frac{\gamma^n}{p\gamma^{n+1}} = \frac{1}{p\gamma} = p^*.$$

Consequentemente, calculando a raiz $\sigma_{n+1} - \acute{e}sima$ de (C.6) segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{\sigma_{n+1}}^{\sigma_{n+1}} \leq C.$$

Assim, desde que $\sigma_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, para quase todo $x \in \Omega$, obtemos que

$$|u(x)| \leq \|u\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|u\|_{\sigma_{n+1}}^{\sigma_{n+1}} \leq C.$$

Portanto,

$$\|u\|_\infty \leq C(p, N, \Omega)\,\lambda^\beta.$$

Donde concluímos que as soluções de $\tilde{P}_\lambda$ são uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Abreu A. M. E., do Ó J. M., Medeiros E. S., *Multiplicity of positive solutions for a class of quasilinear nonhomogeneous Neumann problems.* Nonlinear Anal. Vol. 60, n. 8, p. 1443-1471, 2005.

[2] Abdellaoui B., Dall'Aglio A., Peral I. *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient.* J. Diff. Eqns Vol. 222, p. 21-62, 2006.

[3] Ambrosetti A., Azorero J. P. G., Peral I., *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations.* Journal of Functional Anal. Vol. 137, n. 1, p. 219-242, 1996.

[4] Ambrosetti A., Brezis H., Cerami G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.* Journal of Functional Anal. Vol. 122, n. 2, p. 519-543, 1994.

[5] Azorero J. P. G., Peral I., *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear Eigenvalues.* Commun. in PDE. Vol. 12, p. 1389-1430, 1987.

[6] Azorero J. P. G., J. Manfredi, Peral I., *Sobolev versus Holder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations.* Commun. Contemp. Math. Vol. 2, n. 3, p. 385-404, 2000.

[7] Bartle R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[8] Boccardo L., Murat F., *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations.* Nonlinear Analysis. Vol. 19, n. 6, p. 581-597, 1992.

[9] Boccardo L., Segura de León S., Trombetti C. *Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term.* J. Math. Pure Appl. Vol. 80, p. 919-940, 2001.

[10] Brezis H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, London, 1987.

[11] Brezis H., L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers*, C.R.A.S, n. 317, p. 465-472, Paris, 1993.

[12] Brock F.,Iturriaga L., Ubilla P., *A Multiplicity Result for the p-Laplacian Involving a Parameter.* Ann.Henri Poincaré. Vol. 9, p. 1371-1386, 2008.

[13] Cañada A., Drábek P., Gomez J. L., *Existence of Positive Solutions for some Problems with Nonlinear Diffusion.* Transactions of the AMS. Vol. 349, n. 10, p. 4231-4249, 1997.

[14] Cerami G., *An Existence Criterion for the Critical Points on Unbounded Manifolds.* Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. Vol. 112, p. 332-336, Italy, 1978.

[15] Cerami G., *On the Existence of Eigenvalues for a Nonlinear Boundary Value Problem.* Annali. Mat. Pura Appl. Vol. 129, p. 161-179, Italy, 1980.

[16] Chipot M., *Elliptic Equations: An introductory Course.* Birkhäuser, Berlin, 2009.

[17] Costa G. D., *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations.* Birkhäuser, Boston, 2007.

[18] Costa G. D., Magalhães C. A., *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity.* Nonlinear Analysis. Vol. 23, n. 11, p. 1401-1412, 1994.

[19] Cuesta M.,Takác P., *A Strong Comparison Principle for Positive Solutions of Degenerate Elliptic Equations.* Differential e Integral Equations, Vol. 134, n. 4-6, p. 721-746, 2000.

[20] Díaz J. I., *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries.* Vol. I, Pitman, Boston, 1985.

[21] Dinca G., Jebelian P., Mawhin J., *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian.* Port. Math, Vol. 58, n. 3, p. 339-378, 2001.

[22] Dong W., Chen J. T., *Existence and Multiplicity Results for a Degenerate Elliptic Equation,* Acta Mathematica Sinica, Vol. 22, n. 3, p. 665-670, 2006.

[23] Drábek P., Kufner A., Nicolosi, F., *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities.* De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Vol. 5, Berlin, 1997.

[24] Fernandez J. P., *Medida e integração.* Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2007.

[25] Fleckinger-Pellé J., Takáč P. *Uniqueness of positive solutions for nonlinear cooperative systems with the p-Laplacian.* Indiana Univ. Math. Journal. Vol. 43, n. 4, p. 1227-1253, 1994.

[26] Guedda M., Veron L., *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Nonlinear Analysis. Vol. 13, n. 8, p. 879-902, 1989.

[27] Iturriaga L., Lorca S., Ubilla P., *A Quasilinear Problem without the Ambrosseti-Rabinowitz- type Condition.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 140A, p. 391-398, 2010.

[28] Jabri, Y., *The Mountain Pass Theorem,Variants, generalizations and some application.* Cambridge, 2003.

[29] Jeanjean, L., *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on* $\mathbb{R}^N$. Proc. R. Soc. Edinb. Vol. 129, p. 787-809, 1999.

[30] Kavian O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques.* Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[31] Kazdan J. L., Kramer R. J., *Invariant Criteria for Existence of Solutions to Second-order Quasi-linear Elliptic Equations.* Commun. Pure Appl. Math. Vol. 31, p. 619-645, 1978.

[32] Ladyzhenskaja O. A., Ural'ceva N. N. *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press, New York, 1968.

[33] Leray J., Lions J.-L. *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty–Browder.* Bull. Soc. Math. Vol. 93, p. 97-107, France, 1965.

[34] Li G., Yang C., *The existence of a nontrivial solution to a nonlinear elliptic boundary value problem of p-Laplacian type without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.* Nonlinear Analysis, Vol. 72, n. 12, p. 4602-4613, 2010.

[35] Lieberman G., *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal. Vol. 12, p. 1203-1219, 1988.

[36] Lima, E. L., *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[37] Liu S., *On superlinear problems without the Ambrosetti and Rabinowitz condition.* Nonlinear Analysis. Vol. 73, p. 788-795, 2010.

[38] Liu S. B., Li S.J., *Infinitely many solutions for a superlinear elliptic equation.* Acta Math. Sinica. Vol. 46, n. 4, p. 625-630, 2003.

[39] Liu Z., Wang Z-Q., *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition.* Adv. Nonlinear Stud. Vol. 4, n. 4, p. 563-574, 2004.

[40] Logan J. D. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations,* J.Wiley e Sons, N.Y., 1994.

[41] Miyagaki O.H., Souto M. A. S., *Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition.* Journal of Differential Equations. n. 245, p. 3628-3638, 2008.

[42] Peral I., *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian.* Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Diferential Equations. Italy, 1997.

[43] Rădulescu V. D., *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations.* Hindawi Publishing Corporation, New York, 2008.

[44] Schechter M., *A Variation of the Mountain Pass Lemma and Applications.* J. Lond. Math. Soc. (2). Vol. 44, p. 491-502, 1991.

[45] Takeuchi S.,Yamada Y., *Asymptotic Properties of a Reaction-Diffusion Equation with Degenerate p-Laplacian.* Nonlinear Anal. Vol. 42, n. 1, p. 41-61, 2000.

[46] Takeuchi S., *Positive Solutions of a Degenerate Elliptic Equation with Logistic Reaction.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 129, n. 2, p. 433-441, 2001.

[47] Tolksdorf P., *Regularity for a More General Class of Quasilinear Elliptic Equations.* Journal of Differential Equations. Vol. 51, p.126-150, 1984.

[48] Vazquez J. L., *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.* Appl. Math. Optim. Vol. 12, p. 191-202, 1984.

[49] Vieira F. G., *Existência de soluções para algumas classes de problemas envolvendo o operador p-laplaciano.* 2006. 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.

[50] Wang J., Tang, C. L., *Existence and multiplicity of solutions for a class of superlinear p-Laplacian equations.* Bound. Value Probl., 2006.

[51] Zhou H-S., *Existence of asymptotically linear Dirichlet problem.* Nonlinear Anal. Vol. 44, p. 909-918, 2001.

[52] Zhou H-S., Li G., *Asymptotically linear Dirichlet problem for the p-Laplacian.* Vol. 43, p. 1043-1055, 2001.