Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Variedades Involutivas e Aplicações Enumerativas

por

Rainelly Cunha de Medeiros

2012

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Variedades Involutivas e Aplicações Enumerativas

por

Rainelly Cunha de Medeiros

sob a orientação de

Profª. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2012

João Pessoa - PB

M155v Medeiros, Rainelly Cunha de.
Variedades involutivas e aplicações enumerativas / Rainelly Cunha de Medeiros.-- João Pessoa, 2012.
84f. : il.
Orientadora: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Variedade involutiva. 3. Colchete de Poisson.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Variedades Involutivas e Aplicações Enumerativas

por

Rainelly Cunha de Medeiros

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada por:

Prof^{a}. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia - UFPB (Orientadora)

André Luiz Meireles Araújo

Prof. Dr. André Luiz Meireles Araújo - UFPE

Antonio de Andrade e Silva

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Dedicatória

Aos meus pais e irmãos.

Agradecimentos

Agradeço:

- À Deus por ter me dado forças pra chegar até aqui e por cuidar tão bem de mim e daqueles que amo.
- À minha orientadora Profª Jacqueline não apenas pela orientação, mas também por seu apoio, paciencia, carinho e pelos conhecimentos matemáticos e didáticos.
- Aos meus pais Raimundo e Vera Neide e aos meus irmãos Moisés, Raineide, Raiane, Maria, Josefa, Medeiros, Rondnelly, Raikellison e Rayssa por acreditarem em mim, por todo amor, zelo e compreensão. "Enquanto houver você do outro lado, aqui do outro eu consigo me orientar".
- À Flávio Carvalho, Marcos Carvalho, Flaviano Carvalho, Fabiana Carvalho e Francielma Carvalho por terem me acolhido durante o verão e por todo apoio. Serei sempre grata.
- À Gil e Desterro pela amizade, ajuda e pelos muitos sorrisos.
- Aos professores Cleto, Bruno e Elisandra pelo incentivo, entusiasmo e conhecimento matemático e didático. Também à Uberlandio e Everaldo por estarem sempre dispostos a ajudar.
- Aos professores do DM-UFRN, em especial Viviane Simiolli, Fagner Lemos, Marcelo Pereira, Gabriela Lucheze, Rubens Leão e Ronaldo Freire pelos ensinamentos e apoio para fazer o mestrado.

- Aos meus colegas de mestrado Tiago(Go), Desterro(Di) e Rafael(Rafinha) pelos muitos dias de estudo compartilhados. Também à Pammela, Rosi, Diego, Kleber, Pedro, Jojó, Guilherme, Bruna, Eberson, Mariana, Alex, wallace, Elisânia, Elisabeth, Tati, Maykon, Viviane, Jane, Karine e Gérsica.

- Aos amigos Rosana, Dayvid, Igor, Otto, Romildo, Laís, Rafaela, Karlinha e Elvis: Sinto o carinho de vocês ainda que estejamos distantes uns dos outros.

- Aos professores da banca examinadora pelas sugestões que contribuiram para a melhoria deste trabalho.

- Aos frequentemente encontrados na salinha do mestrado: obrigada pelos momentos de descontração.

- Ao PGMAT-UFPB pela oportunidade.

- À Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho são introduzidos os conceitos de variedades involutiva afim e projetiva. Tendo em consideração que toda variedade projetiva em $\mathbb{P}^{2n-1}$ tem dimensão maior ou igual a $n-1$ e que toda hipersuperfície é involutiva, colocamos nosso foco no estudo das curvas involutivas em $\mathbb{P}^3$, destacando que uma curva em $\mathbb{P}^3$ contida em um plano será involutiva se, e somente, se for uma união de retas passando pelo ponto associado ao plano suporte, pela correspondência entre planos e pontos determinada pela forma simplética padrão em $\mathbb{P}^3$. Começamos utilizando o critério da invariância do ideal de definição da variedade sob o colchete de Poisson para determinar as retas e cônicas involutivas em $\mathbb{P}^3$. Em seguida, exibimos famílias de cúbicas reversas involutivas. Finalmente, tendo em consideração que os espaços de parâmetros determinados para retas e cônicas involutivas tem dimensão 3 e 5, respectivamente, discutimos o problema de determinar quantas retas (resp. cônicas) involutivas encontram simultaneamente 3 (resp. 5) retas dadas em $\mathbb{P}^3$.

Palavras - chave: Variedade involutiva, Colchete de Poisson.

Abstract

In this work are introduced the concepts of involutive affine and projective varieties. Taking into account that every projective variety in $\mathbb{P}^{2n-1}$ has dimension greater than or equal to $n-1$ and that every hypersurface is involutive, we put our focus on the study of involutive curves in $\mathbb{P}^3$, noting that a curve in $\mathbb{P}^3$ contained in a plane will be involutive if and only if it is a union of lines passing through the point associated to the suported by plane the correspondence between points and planes determined by the standard symplectic form in $\mathbb{P}^3$. We started using the Poisson bracelete invariance of the definition ideal of a varity criterion to determine the involutive lines and conics in $\mathbb{P}^3$. Moreover, we exhibit a family of involutive twisted curves. Finally, having in mind that the parameters spaces for involutive lines and conics are 3 and 5 dimensional spaces, respectively. We find how many involutive lines and conic meet 3 and 5 given lines in $\mathbb{P}^3$, respectively.

Keywords: Involutive variety, Poisson bracelete.

Sumário

Introdução

O estudo das variedades afins homogêneas involutivas em $\mathbb{C}^{2n}$ começou em 1988 com o trabalho de Berstein e Lunts [2]. O interesse por ditas variedades é motivado, em parte, pelo fato de que elas aparecem naturalmente na teoria de $\mathcal{D}$-módulos, como variedades características de módulos sobre a álgebra de Weyl A_n, que é a álgebra (não comutativa) sobre os complexos, gerada pelas funções coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ e os operadores diferenciais $\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n$.

O foco desta dissertação é o conceito de involutividade e a resolução, no caso involutivo, de alguns problemas enumerativos.

Uma das fontes de inspiração deste trabalho foi o artigo de Levcovitz e Vainsencher [8], onde é dada uma fórmula para o número de curvas planas involutivas de um dado grau em $\mathbb{P}^3$, encontrando um número apropriado de retas. Nos interessa, em particular, o seguinte problema lá exposto:

Dadas 5 retas em posição geral em $\mathbb{P}^3$, digamos $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ e l_5, determinar o número de cônicas involutivas (pares de retas involutivas) que as intersectam simultaneamente.

Sabe-se que existem exatamente 40 soluções (veja o exemplo (i) na página 354 em [8]). Assim, com o objetivo de resolver o problema supra citado, estudando a posição relativa das 5 retas dadas, nos concentramos na questão $\mathbf{P}k$, que trata de determinar quantas retas involutivas em $\mathbb{P}^3$ encontram k retas dadas, para $k = 1, 2, 3$.

A compreensão de tais problemas e suas resoluções envolvem o conhecimento de alguns objetos geométricos do espaço projetivo $\mathbb{P}^3$, como retas e cônicas, bem como do próprio conceito de involutividade, o qual está intimamente relacionado com a forma simplética padrão em $\mathbb{C}^4$. Iniciamos este trabalho introduzindo o conceito de involutividade para variedades afins. No apendice desta dissertação, são dados conhecimentos acerca de espaços vetorias simpléticos e variedades afins, que podem contribuir para uma melhor compreensão do leitor. Ao longo do texto faremos referência a vários resultados que constam em tal apendice.

No Capítulo 1 apresentamos o conceito de variedade involutiva afim e estabelecemos critérios para checar involutividade. Verificamos que as únicas variedades afins involutivas e próprias em $\mathbb{A}^2$ são as hipersuperfícies e em seguida discutimos sobre a involutividade de algumas variedades afins homogêneas de $\mathbb{A}^4$.

No Capítulo 2 introduzimos a noção de variedade projetiva involutiva e estabelecemos critérios de involutividade, tomando por base o conhecimento já adquirido no capítulo 1. Mostramos que as retas involutivas em $\mathbb{P}^3$ se identificam com uma seção hiperplana da quádrica de Plücker e caracterizamos as cônicas involutivas em $\mathbb{P}^3$, visando a obtenção de um espaço de parâmetros para os problemas enumerativos que serão apresentados no capítulo 3.

No Capítulo 3 resolvemos as questões enumerativas acima citadas. Observamos que a determinação de ditas soluções depende fortemente da construção de um espaço de parâmetros adequado. Finalmente, tendo em consideração que toda superfície em $\mathbb{P}^3$ é involutiva, e que toda curva plana reduzida é uma união finita de retas passando pelo ponto associado ao plano suporte pela correspondência φ definida em 2.1. Incursionamos no estudo das cúbicas reversas, destacando que a cúbica reversa padrão não é involutiva e exibindo uma família 3-dimensional de cúbicas reversas involutivas. Concluímos observando que as cúbicas reversas formam uma família 7-dimensional (cf. [8]), e que a construção de um espaço de parâmetros para cúbicas reversas involutivas precisa do conhecimento de mapas estáveis introduzidos por Maxin Kontsevich (cf. [8]).

Capítulo 1

Variedades Afins Involutivas

Nesta dissertação trabalhamos sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, e denotamos por $\mathbb{A}^n$ o espaço afim n-dimensional sobre $\mathbb{C}$.

Iniciamos este trabalho estudando as variedades afins involutivas, uma vez que o entendimento destas é crucial para o tratamento das variedades projetivas involutivas que será feito nos capítulos subsequentes. Neste capítulo apresentamos o conceito de variedade involutiva afim e estabelecemos critérios para checar involutividade. Em seguida, verificamos que as únicas variedades involutivas afins e próprias em $\mathbb{A}^2$ são as hipersuperfícies, e estabelecemos condições sobre algumas variedades afins homogêneas de $\mathbb{A}^4$ para que satisfaçam a condição de involutividade.

1.1 Variedades Involutivas Afins

Considere $\omega_0 : \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ a forma simplética padrão em $\mathbb{C}^{2n}$, isto é, $\omega_0(u, v) = \sum_{i=1}^{n}(x_i w_i - y_i z_i)$, se $u = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ e $v = (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n)$.

Lembremos que, para cada subespaço vetorial $W \subset \mathbb{C}^{2n}$, denotamos por $W^\perp$ o subespaço de $\mathbb{C}^{2n}$ constituído pelos vetores $u \in \mathbb{C}^{2n}$ tais que $\omega_0(u, w) = 0$, para todo $w \in W$.

Definição 1.1 *Seja $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim. Dizemos que X é involutiva se, e somente se, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$, verifica-se que T_pX é involutivo, ou seja, $(T_pX)^\perp \subset T_pX$.*

Exemplo 1.2 *Seja $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma hipersuperfície, com $\Im(X) = \langle f \rangle$. Assim, se $p \in X$, então*

$$T_pX = \left\{ (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{C}^{2n} : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)a_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(p)b_i = 0 \right\}.$$

Logo,

$$T_pX = \begin{cases} \mathbb{C}^{2n}, & se \quad p \in \mathrm{Sing}(X) \ (\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y_i}(p) \ \forall \ i = 1, ..., n) \\ hiperplano, & se \quad p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X) \end{cases}$$

Sabemos da Proposição A.12, no Apendice A, que $(T_pX)^{\perp} \subset T_pX$, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$, uma vez que T_pX é um hiperplano, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$. Logo, X é uma variedade afim involutiva.
Portanto, toda hipersuperfície $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ é involutiva.

A seguinte proposição estabele uma condição, sobre a dimensão de uma variedade afim em $\mathbb{A}^{2n}$, para que esta seja involutiva.

Proposição 1.3 *Seja $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim irredutível e involutiva. Então $dimX \geq n$.*

Prova. Sabemos que $(T_pX)^{\perp} \subset T_pX$, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$, desde que $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ é involutiva. Além disso, segue da Proposição A.7, no Apendice A, que

$$dimT_pX + dim(T_pX)^{\perp} = 2n.$$

Assim,

$$2n = dimT_pX + dim(T_pX)^{\perp} \leq 2dimT_pX,$$

ou seja, $n \leq dimT_pX$, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$.
Sendo p um ponto não singular e X uma variedade afim irredutível segue que $dimT_pX = dimX$. Portanto, $n \leq dimX$. ■

Corolário 1.4 *Se $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ é uma variedade afim irredutível e involutiva de dimensão n, então X é lagrangeana, isto é, $(T_pX)^{\perp} = T_pX$, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$.*

A seguir, apresentamos uma ferramenta que será bastante eficaz no trato das variedades afins involutivas, como veremos mais adiante.

Definição 1.5 *Sejam* $f, g \in \boldsymbol{A} = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$. *Definimos o colchete de Poisson de* f *e* g*, que denotaremos* $\{f, g\}$*, da seguinte forma:*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}).$$

Observação 1.6 *Para quaisquer* $f, g, h \in \boldsymbol{A}$ *e* $a, b \in \mathbb{C}$*, verifica-se que* $\{\ ,\ \} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$*, definida por* $(f, g) \mapsto \{f, g\}$*, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\{\ ,\ \}$ *é* $\mathbb{C}$*-bilinear, ou seja,* $\{\ f, ag + bh\ \} = a\{\ f, g\ \} + b\{\ f, h\ \}$ *e* $\{\ af + bg, h\ \} = a\{\ f, h\ \} + b\{\ g, h\ \}$.

2. $\{\ f, g\ \} = -\{\ g, f\ \}$. *Em particular, temos que* $\{\ f, f\ \} = 0$.

3. $\{\ f, gh\ \} = \{\ f, g\ \}h + g\{\ f, h\ \}$.

4. $\{\ ,\ \}$ *satisfaz a identidade de Jacobi:*

$$\{\ f, \{\ g, h\ \}\ \} + \{\ g, \{\ h, f\ \}\ \} + \{\ h, \{\ f, g\ \}\ \} = 0.$$

Proposição 1.7 *Seja* ω_0 *a forma simplética padrão em* $\mathbb{C}^{2n}$ *e considere o isomorfismo linear*

$$\begin{array}{rccl} I: & \mathbb{C}^{2n} & \to & \mathbb{C}^{2n*} \\ & u & \mapsto & I_u = \omega_0(u, \cdot) \end{array}. \tag{1.1}$$

Então, para quaisquer $f, g \in \boldsymbol{A}$ *e* $p \in \mathbb{C}^{2n}$*, verifica-se que:*

1. $\{\ f, g\ \}(p) = \omega_0(I^{-1}(d_p f), I^{-1}(d_p g))$;

2. $\{\ f, g\ \}(p) = d_p f(I^{-1}(d_p g))$;

onde $d_p h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}(p)e_i^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_i}(p)e_{n+i}^*$*, se* $h \in \boldsymbol{A}$.

Prova.

1. Note que dado $L = a_1e_1^* + \cdots + a_ne_n^* + b_1e_{n+1}^* + \cdots + b_ne_{2n}^* \in \mathbb{C}^{2n^*}$ temos $I(u) = L$, se $u = (b_1, ..., b_n, -a_1, ..., -a_n)$. De fato, considere $e_i \in \mathbb{C}^{2n}$, com $1 \leq i \leq n$. Temos que $I(u)(e_i) = \omega_0(u, e_i) = \omega_0((b_1, ..., b_n, -a_1, ..., -a_n), e_i) = a_i = L(e_i)$. Do mesmo modo, se $e_i \in \mathbb{C}^{2n}$, com $n + 1 \leq i \leq 2n$, então $I(u)(e_i) = \omega_0(u, e_i) = \omega_0((b_1, ..., b_n, -a_1, ..., -a_n), e_i) = b_i = L(e_i)$.
   Como os funcionais d_pf e d_pg são lineares, temos que
   $$I^{-1}(d_pf) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial y_n}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), ..., -\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$
   e
   $$I^{-1}(d_pg) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(p), ..., \frac{\partial g}{\partial y_n}(p), -\frac{\partial g}{\partial x_1}(p), ..., -\frac{\partial g}{\partial x_n}(p)\right).$$
   Assim,
   $$\begin{aligned} \omega_0(I^{-1}(d_pf), I^{-1}(d_pg)) &= \sum_{i=1}^n \left(-\tfrac{\partial f}{\partial y_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial x_i}(p) + \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial y_i}(p)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial y_i}(p) - \tfrac{\partial f}{\partial y_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial x_i}(p)\right) \\ &= \{\ f, g\ \}(p). \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} d_pf(I^{-1}(d_pg)) &= d_pf\left(\tfrac{\partial g}{\partial y_1}(p), ..., \tfrac{\partial g}{\partial y_n}(p), -\tfrac{\partial g}{\partial x_1}(p), ..., -\tfrac{\partial g}{\partial x_n}(p)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial y_i}(p) - \sum_{i=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial y_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial y_i}(p) - \tfrac{\partial f}{\partial y_i}(p)\tfrac{\partial g}{\partial x_i}(p)) \\ &= \{\ f, g\ \}(p). \end{aligned}$$

■

De posse do isomorfismo I, definido em (1.1) e da proposição acima, podemos enunciar e provar o critério da invariância do ideal de definição da variedade afim sob o colchete de Poisson, para variedades afins involutivas.

Proposição 1.8 *Seja $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim. Então X é involutiva se, e somente se, $\{\ f, g\ \} \in \Im(X)$, para quaisquer $f, g \in \Im(X)$.*

Prova. Sabemos que se $g \in \Im(X)$, então $I_{I^{-1}(d_pg)}|_{T_pX} = d_pg|_{T_pX} \equiv 0$, para todo $p \in X$. Logo, segue da Proposição A.7, no Apendice A, que $I^{-1}(d_pg) \in T_pX^{\perp}$. Como $T_pX^{\perp} \subset T_pX$, uma vez que X é involutiva, concluímos que $I^{-1}(d_pg) \in T_pX$, para quaisquer $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ e $g \in \Im(X)$.

Temos ainda, da Proposição 1.7, que $\{ f, g \}(q) = d_q f(I^{-1}(d_q g))$, para todos $f, g \in \Im(X)$ e $q \in \mathbb{C}^{2n}$. Assim, se $p \in X \setminus \operatorname{sing}(X)$, então

$$\{ f, g \}(p) = d_p f(I^{-1}(d_p g)) = 0,$$

uma vez que $I^{-1}(d_p g) \in T_p X$ e $d_p f|_{T_p X} \equiv 0$.
Disso obtemos $X \setminus \operatorname{sing}(X) \subset Z(\{ f, g \})$, o que nos dá $\overline{X \setminus \operatorname{sing}(X)} \subset Z(\{ f, g \})$. Como $X \setminus \operatorname{sing}(X)$ é um aberto não vazio e denso em X, concluímos que $X \subset Z(\{ f, g \})$. Logo, $\Im(Z(\{ f, g \})) \subset \Im(X)$. O Teorema dos zeros de Hilbert nos dá $\Im(Z(\{ f, g \})) = \sqrt{\langle \{ f, g \} \rangle}$, o que nos permite concluir que $\{ f, g \} \in \sqrt{\langle \{ f, g \} \rangle} \subset \Im(X)$. Portanto, se X é involutiva, então $\{ f, g \} \in \Im(X)$.
Reciprocamente, considere $p \in X \setminus \operatorname{Sing}(X)$ e $w \in T_p X^{\perp}$. Mostraremos que $w \in T_p X$, ou seja, $d_p f(w) = 0$, para todo $f \in \Im(X)$.
Como $w \in T_p X^{\perp}$ temos que $I_w|_{T_p X} \equiv 0$. Aplicando o Lema B.47, no Apendice B, para θ definida por $\theta(p) = (p, I_w)$, concluímos que existe $g \in \Im(X)$ tal que $I_w = d_p g$, isto é, $w = I^{-1}(d_p g)$, para algum $g \in \Im(X)$.
Tomando $f \in \Im(X)$ arbitrário temos, por hipótese, que $\{ f, g \}(q) = 0$, para todo $q \in X$. Assim, da Proposição 1.7, obtemos

$$d_p f(w) = d_p f(I^{-1}(d_p g)) = \{ f, g \}(p) = 0.$$

Logo, $w \in T_p X$ e, portanto, X é involutiva. ∎

Observação 1.9 *Seja $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim tal que $\Im(X) = \langle f_1, ..., f_k \rangle$. Então verifica-se que X é involutiva se, e somente se, $\{ f_i, f_j \} \in \Im(X)$, para quaisquer $i, j \in \{1, ..., k\}$.*

Conforme a Observação B.19, no apendice B, toda variedade afim pode ser escrita como união finita de componentes irretutíveis. A seguinte proposição, caracteriza as variedades afins involutivas em termos destas componentes:

Proposição 1.10 *Seja $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim que admite a seguinte decomposição em componentes irredutíveis:*

$$X = X_1 \cup ... \cup X_k.$$

Então X é involutiva se, e somente se, X_i é involutiva, para todo $i \in \{1, ..., k\}$.

Prova. Fixe $i \in \{1, ..., k\}$. A seguir mostraremos que se X é involutiva, então, para quaisquer $f,\ g \in \Im(X_i)$, então $\{\ f, g\ \} \in \Im(X_i)$, se X for involutiva.
Escolha $h \in \Im(X_1)...\Im(X_{i-1})\Im(X_{i+1})...\Im(X_k) \setminus \Im(X_i)$. Temos que $\{\ fh, gh\ \} \in \Im(X)$, pois $fh, gh \in \Im(X)$ e X é involutiva. Como $X_i \subset X$ temos que $\Im(X) \subset \Im(X_i)$. Logo, $\{\ fh, gh\ \} \in \Im(X_i)$. Note que

$$\{\ fh, gh\ \} = f\{\ h, gh\ \} + \{\ f, gh\ \}h = fh\{\ h, g\ \} + \{\ f, h\ \}gh + \{\ f, g\ \}h^2.$$

Como $f,\ g \in \Im(X_i)$, temos $fh\{\ h, g\ \},\ \{\ f, h\ \}gh \in \Im(X_i)$. Assim, $\{\ f, g\ \}h^2 \in \Im(X_i)$, o que implica que $\{\ f, g\ \} \in \Im(X_i)$, uma vez que $h \notin \Im(X_i)$ e $\Im(X_i)$ é primo. Portanto, X_i é involutiva.
Reciprocamente, sejam $f, g \in \Im(X)$. Como $\Im(X) \subset \Im(X_i)$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, concluímos que $f, g \in \Im(X_i)$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Logo, $\{\ f, g\ \} \in \Im(X_i)$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, pois X_i é involutiva.
Observe que $\Im(X) = \sqrt{\Im(X_1)\Im(X_2)\cdots\Im(X_k)}$. Assim, $\Im(X_1)\Im(X_1)...\Im(X_k) \subset \Im(X)$. Como $\{\ f, g\ \} \in \Im(X_i)$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, temos que $\{\ f, g\ \}^k \in \Im(X)$. Logo, $\{\ f, g\ \} \in \sqrt{\Im(X)} = \Im(X)$. Portanto, X é involutiva. ∎

Exemplo 1.11 *Vejamos quais são as variedades afins involutivas em* $\mathbb{A}^2$.
Sabemos que $X \subset \mathbb{A}^2$ *é uma variedade afim involutivase, e somente se, toda componente irredutível é involutiva. Assim, determinemos as variedades afins irredutíveis e involutivas de* $\mathbb{A}^2$.
Se $X \subset \mathbb{A}^2$ *é uma variedade afim irredutível e involutiva, então* $\Im(X)$ *é um ideal primo e dim* $X \geq 1$.
Se $\Im(X) = \{0\}$, *então* $X = \mathbb{A}^2$. *Neste caso* X *é involutiva, pois todo ponto de* X *é não singular e* $(T_pX)^\perp = (\mathbb{C}^2)^\perp = \{(0,0)\} \subset T_pX = \mathbb{C}^2$.
Se $\Im(X) \neq \{0\}$ *tome* $f \in \Im(X)$ *irredutível. Temos duas possibilidades:*

- $\langle f \rangle = \Im(X)$ *e, neste caso,* X *é uma hipersuperfície, sendo portanto involutiva, conforme Exemplo 1.2.*

- $\langle f \rangle \subsetneq \Im(X)$.
  Neste caso, escolha $g \in \Im(X) \setminus \langle f \rangle$ *irredutível. Assim,* f *e* g *não possuem fator comum. Como* $f, g \in \Im(X)$ *temos que* $\langle f, g \rangle \subset \Im(X)$, *donde* $X \subset Z(\langle f, g \rangle) =$

$Z(f) \cap Z(g)$. Pela Proposição 3, na pág. 20 de [13], segue-se que $Z(f) \cap Z(g)$ é finito e, portanto, X é finito. Como X é irredutível, devemos ter $X = \{(a,b)\}$. Logo, $dim X = 0$, o que é um absurdo, pois $dim X \geq 1$.

Em resumo, uma variedade afim $X \subset \mathbb{A}^2$ é irredutível e involutiva se, e somente se, $X = \mathbb{A}^2$ ou X é uma curva plana afim.
Por exemplo, considere as variedades $X = Z(x_1 y_1)$ e $Y = Z(x_1) \cup \{(a,b)\}$, com $a \neq 0$ em $\mathbb{A}^2$. Sabemos que $\Im(X) = \sqrt{\langle x_1 y_1 \rangle} = \langle x_1 y_1 \rangle$ é um ideal principal. Do que foi visto acima, segue-se que X é involutiva. Por outro lado, como a componente irredutível $Y_1 = \{(a,b)\}$ de Y tem dimensão zero, temos que Y_1 não é involutiva e, portanto, Y não é involutiva.

1.1.1 Variedades Afins Involutivas em $\mathbb{A}^4$

Nesta seção direcionamos nosso foco para as variedades afins homogêneas em $\mathbb{A}^4$. Como o leitor poderá constatar posteriormente, os casos estudados aqui nos auxiliarão na compreensão dos elementos do espaço projetivo, que estão envolvidos nas questões enumerativas do Capítulo 3.

Sejam $\mathbf{S} = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ e $\mathbf{S}_d$, com $d \geq 0$, o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dos polinômios homogêneos de grau d em $\mathbf{S}$. Considere o isomorfismo linear $\psi : \mathbb{C}^{4*} \to \mathbf{S}_1$ dado por $e_i^* \mapsto x_i$ e $e_{i+2}^* \mapsto y_i$, para $i = 1, 2$. Observe que o isomorfismo I em (1.1) nos permite definir o isomorfismo linear $\phi = \psi \circ I : \mathbb{C}^4 \to \mathbf{S}_1$ dado por $\phi(p) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_1 y_1 + b_2 y_2$, se $p = (b_1, b_2, -a_1, -a_2)$, que será bastante útil na demonstração do resultado que se segue.

Proposição 1.12 *Sejam $h, f_1 \in \boldsymbol{S}_1$ linearmente independentes. Escolha $f_2 \in \boldsymbol{S}_2 \setminus h\boldsymbol{S}_1$ livre de quadrados. Se $X_j = Z(I_j)$, onde $I_j = \langle h, f_j \rangle$, com $j = 1, 2$, e $p \in \mathbb{C}^4$ é tal que $\phi(p) = h$, então:*

1. *X_1 é involutiva $\Leftrightarrow$ $p \in Z(f_1)$.*

2. *X_2 é involutiva $\Leftrightarrow$ X_2 é redutível e p pertence a cada componente irredutível de X_2.*

Prova. Seja $h = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2$ não nula em $\mathbf{S}_1$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor $h = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + y_2$. Logo, $I^{-1}(h) = (b_1, 1, -a_1, -a_2) = p$.

1. Seja $f_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + d_1y_1 + d_2y_2$. Note que podemos escrever

$$f_1 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3y_1 + d_2h,$$

onde $\alpha_i = c_i - d_2a_i$, para $i = 1, 2$, e $\alpha_3 = d_1 - d_2b_1$. Assim,

$$I_1 = \langle h, f_1\rangle = \langle h, \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3y_1\rangle .$$

Observe que se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, então $f_1 = d_2h$, o que é um absurdo, pois f_1 e h são L.I.

Vamos supor que $\alpha_3 \neq 0$. Temos que $\langle h, f_1\rangle = \langle h, g_1\rangle$, com $g_1 = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + y_1$, onde $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_3}$, para $i = 1, 2$.

Se $X_1 = Z(h, f_1) = Z(h, g_1)$ é involutiva, então $\{\ h, g_1\ \} \in \Im(X_1) = \langle h, f_1\rangle = \langle h, g_1\rangle$. Assim,

$$\{\ h, g_1\ \} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \beta_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 - b_1\beta_1 - \beta_2 \ \in\ \Im(X_1),$$

o que implica que $a_1 - b_1\beta_1 - \beta_2 = 0$.

Desse modo, $g_1(p) = -(a_1 - b_1\beta_1 - \beta_2) = 0$ e $h(p) = a_1b_1 + a_2 - b_1a_1 - a_2 = 0$.

Logo, $f_1(p) = \alpha_3g_1(p) + d_2h(p) = 0$, e portanto, $p \in Z(f_1)$.

Reciprocamente, temos $0 = f_1(p) = \alpha_3g_1(p) + d_2h(p)$. Como $\alpha_3 \neq 0$ e $h(p) = 0$ temos que $\beta_1b_1 + \beta_2 - a_1 = g_1(p) = 0$. Logo, $\{\ h, g_1\ \} = a_1 - b_1\beta_1 - \beta_2 = 0 \in \Im(X_1)$. Como $\Im(X_1) = \langle f_1, h\rangle = \langle g_1, h\rangle$, concluímos que X_1 é involutiva.

2. Considere $f_2 \in \mathbf{S}_2 \setminus h\mathbf{S}_1$ livre de quadrados. Observe que podemos escrever $f_2 = hl + g_2$, para algum $l \in \mathbf{S}_1$ e $g_2 \in \mathbf{S}_2$ da forma $g_2 = d_0x_1^2 + d_1x_1x_2 + d_2x_1y_1 + d_3x_2^2 + d_4x_2y_1 + d_5y_1^2$, onde $d_i \in \mathbb{C}$, para $i = 0, ..., 5$.

Note que $g_2 \neq 0$, pois caso contrário, teríamos $f_2 \in h\mathbf{S}_1$. Além disso,

$$I_2 = \langle h, f_2\rangle = \langle h, h\ell + g_2\rangle = \langle h, g_2\rangle .$$

Logo, podemos supor que $f_2 = g_2 = d_0x_1^2 + d_1x_1x_2 + d_2x_1y_1 + d_3x_2^2 + d_4x_2y_1 + y_1^2$.

Se X_2 é involutiva, então $\{\ h, g_2\ \} \in \Im(Z(I_2)) = \sqrt{I_2} = I_2$. Calculando

$\{\ h, g_2\ \}$, obtemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 2d_0x_1 + d_1x_2 + d_2y_1 & d_2x_1 + d_4x_2 + 2y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ d_1x_1 + 2d_3x_2 + d_4y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1d_2 - 2d_0b_1 - d_1)x_1 + (a_1d_4 - b_1d_1 - 2d_3)x_2 + (2a_1 - b_1d_2 - d_4)y_1 \in I_2.$$

Note que $\{h, g_2\} \in \langle h \rangle$, pois $g_2 \in \mathbf{S}_2$. Logo, $\{h, g_2\} = 0$, ou seja, $a_1d_2 - 2d_0b_1 = d_1$, $\frac{a_1d_4 - b_1d_1}{2} = d_3$ e $2a_1 - b_1d_2 = d_4$.
Substituindo estes valores em g_2, obtemos a seguinte expressão:

$$g_2 = d_0x_1^2 + (a_1d_2 - 2d_0b_1)x_1x_2 + d_2x_1y_1 + (\tfrac{a_1(2a_1 - b_1d_2) - b_1d_1}{2})x_2^2 + (2a_1 - b_1d_2)x_2y_1 + y_1^2.$$

Com isto podemos escrever $g_2 = L \cdot M$, onde $L = -(\frac{d_2 - \sqrt{d_2^2 - 4d_0}}{2})h_1 + h_2$ e $M = -(\frac{d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_0}}{2})h_1 + h_2$, com $h_1 = b_1x_2 - x_1$ e $h_2 = a_1x_2 + y_1$.
Assim, $X_2 = Z(\langle h, g_2 \rangle) = Z(\langle h, L \cdot M \rangle) = Z(\langle h, L \rangle) \cup Z(\langle h, M \rangle)$ é redutível. Observe que $L(p) = M(p) = 0$, ou seja, p pertence a cada componente irredutível.
Reciprocamente, seja $X_2 = X \cup Y$ uma decomposição de X_2 em componentes irredutíveis. Claramente $X = Z(\langle h, g_1 \rangle)$ e $Y = Z(\langle h, g_2 \rangle)$, onde $g_1, g_2 \in \mathbf{S}_1$. Por argumentos utilizados no item 1 desta proposição, podemos admitir $g_1 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3y_1$ e $g_2 = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3y_1$. Como, por hipótese, p pertence a cada componente irredutível de X_2, $g_1(p) = \alpha_1b_1 + \alpha_2 - \alpha_3a_1 = 0 = \beta_1a_1 + \beta_2 - \beta_3a_1 = g_2(p)$. Note que

$$\{h, g_1\} = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1\alpha_3 - b_1\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \in \ \Im(X) = \langle h, g_1 \rangle \,.$$

Do mesmo modo,

$$\{h, g_2\} = \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ b_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1\beta_3 - b_1\beta_1 - \beta_2 = 0 \in \ \Im(Y) = \langle h, g_2 \rangle \,.$$

Isto nos garante que X e Y são involutivas. Segue da Proposição 1.10 que X_2 é involutiva.

■

Lema 1.13 *Sejam $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva e $L : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ um isomorfismo simplético. Então $L(X)$ é uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva.*

Prova. Primeiro tome $q = L(p) \in L(X)$. Como X é homogênea temos que $\lambda p \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, e assim, pela linearidade de L, $\lambda q = \lambda L(p) = L(\lambda p) \in L(X)$. Logo, $L(X)$ é homogênea. Agora suponha que $L(X)$ é redutível. Então podemos escrever $L(X) = Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1 e Y_2 são subconjuntos fechados próprios de $L(X)$. Assim, $X = L^{-1}(L(X)) = L^{-1}(Y_1) \cup L^{-1}(Y_2)$, onde $L^{-1}(Y_1)$ e $L^{-1}(Y_2)$ são subconjuntos fechados próprios de X, uma contradição, pois X é irredutível. Logo, L(X) é irredutível.

Mostremos que $L(X)$ é involutiva. Seja $q = L(p) \in L(X) \setminus \mathrm{Sing}(L(X))$. Então pela Observação B.32, no Apendice B, $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ e, pela involutividade de X, $(T_pX)^\perp \subset T_pX$. Também da Observação B.32 temos que $(T_qL(X))^\perp = (L(T_pX))^\perp$ e $L(T_pX) = T_qL(X)$. Logo,

$$(T_qL(X))^\perp = (L(T_pX))^\perp = L((T_pX)^\perp) \subset L(T_pX) = T_qL(X).$$

Portanto, $(T_qL(X))^\perp \subset T_qL(X)$, para todo $q \in L(X) \setminus \mathrm{Sing}(L(X))$, ou seja, $L(X)$ é involutiva. ∎

Definição 1.14 *Sejam $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ variedades afins homogêneas. X e Y são ditas "projetivamente equivalentes" se existir um isomorfismo linear $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $L(X) = Y$.*

Proposição 1.15 *Sejam $X \subset \mathbb{A}^{2n}$ uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva contida no hiperplano homogêneo H. Então existem um isomorfismo simplético $L : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ e uma variedade homogênea irredutivel e involutiva $X_0 \subset \mathbb{A}^{2(n-1)}$ tais que $L(X)$ e $X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$ são "projetivamente equivalentes".*

Prova. Segue do Lema B.31, no Apendice B, que existe um isomorfismo simplético $L : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ tal que $L(H) = Z(y_n)$. Além disso, $L(X) \subset Z(y_n)$ e , pelo Lema 1.13, $L(X)$ é uma variedade homogênea irretutível e involutiva.

Se $L(X) = Z(y_n)$, então $L(X)$ e $\mathbb{A}^{2(n-1)} \times \mathbb{C} \times \{0\}$ são "projetivamente equivalentes".

Vejamos o caso em que $L(X) \subsetneq Z(y_n)$. Seja $f \in \Im(L(X)) \setminus \langle y_n \rangle$. Segue do algoritmo da divisão que existem $q \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$ e $g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{n-1}]$ tais que $f = q \cdot y_n + g$, com $g \neq 0$. Observe que $g \in \Im(L(X))$, uma vez que $y_n \in \Im(L(X))$. Pela involutividade de $L(X)$ temos $\{g, y_n\} \in \Im(L(X))$.

Sendo $g \neq 0$, podemos supor $g = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m$, com $a_i \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}]$ e $a_m \neq 0$. Assim,

$$\{g, y_n\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial g}{\partial x_n} = a_1 + \cdots + m a_m x_n^{m-1}.$$

Logo, $\frac{\partial g}{\partial x_n} \in \Im(L(X))$. Analogamente concluímos que $\left\{ \frac{\partial g}{\partial x_n}, y_n \right\} = \frac{\partial g}{\partial^2 x_n} \in \Im(L(X))$. E após m passos, concluímos que $a_m \in \Im(L(X))$. Deste modo, $g - a_m x_n^m = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_{m-1} x_n^{m-1} \in \Im(L(X))$. Logo, usando o mesmo procedimento concluímos que $a_{m-1}, ..., a_1, a_0 \in \Im(L(X))$.

Seja $I_0 = \Im(L(X)) \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}]$. Afirmamos que I_0 é um ideal primo, homogêneo tal que $\{I_0, I_0\} \subset I_0$.

De fato, se X é uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva, então pelo Lema 1.13 $L(X)$ é uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva. Logo, $\Im(L(X))$ é um ideal homogêneo, primo e fechado para o colchete de Poisson. É claro $I_0 \subset \Im(L(X))$ é homogêneo. Mostremos que I_0 é primo. Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$ tais que $f \cdot g \in I_0 \subset \Im(L(X))$. Então $f, g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}]$ e, como $\Im(L(X))$ é primo, $f \in \Im(L(X))$ ou $g \in \Im(L(X))$, ou seja, $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}] \cap \Im(L(X)) = I_0$ ou $g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}] \cap \Im(L(X)) = I_0$. Portanto, I_0 é primo. Resta mostrar que $\{I_0, I_0\} \subset I_0$. Se $f, g \in I_0 \subset \Im(L(X))$, então $\{f, g\} \in \Im(X)$, pois $\Im(L(X))$ é fechado para o colchete de Poisson. Além disso, é claro que $\{f, g\} \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}]$. Logo, $\{f, g\} \in I_0$.

Disto, segue que $X_0 = Z(I_0) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2(n-1)}$ é uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva.

Observe ainda que $\Im(L(X)) = I_0[x_n] + \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]y_n$. Com efeito, seja $f \in \Im(L(X))$. Se $f \in \langle y_n \rangle$, então claramente $f \in I_0[x_n] + \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]y_n$. Se $f \notin \langle y_n \rangle$, vimos anteriormente que $f = q \cdot y_n + g$, onde $g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]$ e $g = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m$ não nulo tal que $a_i \in I_0$, para todo $i = 1, ..., m$. Logo, $f \in I_0[x_n] + \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]y_n$ também neste caso. Portanto,

$\Im(L(X)) \subset I_0[x_n] + \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]y_n$. Para a outra inclusão, basta notar que $I_0[x_n], \langle y_n \rangle \subset \Im(L(X))$.

Por fim, provaremos que $L(X)$ e $X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$ são "projetivamente equivalentes".

Seja $p \in L(X)$. Como $L(X) \subset Z(y_n)$, temos que $p = (x_1, ..., x_n, y_1, ...y_{n-1}, 0)$. Além disso, $h(p) = 0$, para todo $h \in I_0 \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}]$, uma vez que $I_0 \subset \Im(L(X))$. Deste modo, $p \in L(X)$ implica que $(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}) \in X_0$. Isto torna bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \zeta : & L(X) & \to & X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\} \\ & (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{n-1}, 0) & \mapsto & (x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}, x_n, 0) \end{array},$$

que claramente é injetiva.

Agora seja $q = (x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}, \lambda, 0) \in X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$. Mostraremos que $p = (x_1, ..., x_{n-1}, \lambda, y_1, ..., y_{n-1}, 0) \in L(X)$, ou seja, $f(p) = 0$, para todo $f \in \Im(L(X))$. Desde que $\Im(L(X)) = I_0[x_n] + \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]y_n$ temos que se $f \in \Im(L(X))$, então $f = g + h$, com $g = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_mx_m^m \in I_0[x_n]$ e $h \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]y_n$. Logo, $f(p) = g(p) + h(p) = a_0(p) + a_1(p)\lambda + \cdots + a_m(p)\lambda^m$. Note que $a_i(p) = a_i(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}) = 0$, para todo $i = 1, ..., m$, uma vez que $(x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}) \in X_0$ e $a_i \in I_0$ para todo $i = 1, ..., m$. Logo, $f(p) = 0$.

Assim, temos uma bijeção $\eta : L(X) \to X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$. Sabemos que existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ tal que $T(L(X)) = X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$ e $T|_{L(X)} = \eta$. Logo, $T(L(X)) = \eta(L(X)) = X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$, ou seja, $L(X)$ e $X_0 \times \mathbb{C} \times \{0\}$ são "projetivamente equivalentes". ∎

Corolário 1.16 *Sejam $X \subset \mathbb{A}^4$ uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva contida no hiperplano homogêneo H. Então X é um plano, ou seja, X é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^4$ de dimensão 2.*

Prova. Sabemos que existe um isomorfismo simplético $L : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tal que $Z = L(X) \subsetneq L(H) = Z(y_2)$ e que $\Im(Z) = I_0[x_2] + \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]y_2$, onde $I_0 = \Im(Z) \cap \mathbb{C}[x_1, y_1]$. Observe que I_0 não pode ser o ideal nulo, uma vez que $\langle y_2 \rangle \subsetneq \Im(Z)$. Além disso, como $I_0 \neq 0$ define uma variedade afim irredutível e involutiva em $\mathbb{A}^2$, concluímos do Exemplo 1.11,que $I_0 = \langle h \rangle$, onde $h = ax_1 + by_1$, com a e b não ambos nulos em $\mathbb{C}$. Assim, $\Im(Z) = I_0[x_2] + \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]y_2 = \langle h, y_2 \rangle$.

Portanto,

$$L(X) = Z = Z(h, y_2) = \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^4 : aa_1 + bb_1 = 0 \text{ e } b_2 = 0)\} =$$
$$[(0,1,0,0),(b,0,a,0)].$$

Como L é isomorfismo linear temos que $X = L^{-1}([(0,1,0,0),(b,0,a,0)])$ é um plano em $\mathbb{C}^4$. ∎

Capítulo 2

Variedades Projetivas Involutivas

Neste capítulo introduzimos a noção de variedade projetiva involutiva. Mostramos que as retas involutivas em $\mathbb{P}^3$ se identificam com uma seção hiperplana da quádrica de Plücker e, por fim, caracterizamos as cônicas involutivas em $\mathbb{P}^3$, visando a obtenção de um espaço de parâmetros para os problemas enumerativos que serão apresentados no capítulo subsequente.

2.1 Espaço Projetivo

Definição 2.1 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Defina a seguinte relação de equivalência em $V \setminus \{0\}$:*

$$u \sim v \Leftrightarrow \ \exists\ \lambda \in \mathbb{K} \ \textit{tal que}\ u = \lambda v.$$

O conjunto quociente, denotado por $\mathbb{P}(V)$, é denominado de projetivização de V.

Notação. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{C}^{n+1}$, então $\mathbb{P}(V)$ será denotado por $\mathbb{P}^n$ e chamado n-Espaço Projetivo. Para cada $v = (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ denotaremos sua classe de equivalência por $[v] = [a_0 : a_1 : ... : a_n]$ e denominaremos $a_0, ..., a_n$ de coordenadas homogêneas de $[v]$.

2.2 Conjuntos Algébricos Projetivos

Dado um polinômio qualquer $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ não podemos dizer se f se anula ou não em pontos de $\mathbb{P}^n$. Porém se $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$, onde $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$ denota o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dos polinômios homogêneos de grau d nas variáveis $x_1, ..., x_n$, então

$$f(\lambda a_0, ..., \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, ..., a_n), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Nesse caso, faz sentido dizer se f se anula ou não em $[a_0 : a_1 : ... : a_n] \in \mathbb{P}^n$.

Definição 2.2 *Seja $f \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$. Definimos o conjunto dos zeros de f por*

$$Z(f) = \{[a_0 : ... : a_n] \in \mathbb{P}^n \ : f(a_0, ..., a_n) = 0\}$$

Para cada ideal homogêneo $I \subset \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ o conjunto dos zeros de I, o qual denotaremos $Z(I)$, é definido por $Z(I) = Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_k)$, onde $\{f_1, ..., f_k\}$ é um conjunto de geradores homogêneos de I.

Por exemplo, tome $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ um polinômio homogêneo.

(i) Se $f = 0$, então $Z(f) = \mathbb{P}^1$.

(ii) Se $f \neq 0$ e $grau(f) = 0$, então $f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $Z(f) = \emptyset$.

(iii) Se $f \neq 0$ e $grau(f) = d \neq 0$, então $f = \prod_{i=1}^{d}(a_i x_0 - b_i x_1)$, onde $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$, para $i = 1, ..., d$. Assim,

$$\begin{aligned} Z(f) &= \{[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1 : f(u_0, u_1) = 0\} \\ &= \{[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1 : a_i u_0 - b_i u_1 = 0, \text{ para algum } i \in 1, ..., d\} \end{aligned}.$$

Logo,

$$Z(f) = \{[b_1 : a_1], ..., [b_d : a_d]\}.$$

Assim, se $I = \langle f_1, ..., f_k \rangle \subset \mathbb{C}[x_0, x_1]$ é um ideal homogêneo, então

$$Z(I) = \begin{cases} \mathbb{P}^1, & \text{se } \quad I = \{0\} \\ \emptyset, & \text{se } \quad I = \langle 1 \rangle \\ \{p_1, ..., p_l\}, & \text{se } \quad f_i \text{ é não constante e } f_i(p_j) = 0, \ \forall \ i \in \{1, ..., k\} \end{cases}$$

Observação 2.3 *A família $\tau = \{Z(I)\}$, onde I percorre os ideais homogêneos de $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$, determina uma topologia em $\mathbb{P}^n$ denominada topologia de Zariski. Nessa topologia os conjuntos fechados são denominados de conjuntos algébricos ou variedades projetivas. Deste modo, $X \subset \mathbb{P}^n$ é denominada de variedade projetiva se existir um ideal homogêneo $I \subset \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ tal que $X = Z(I)$.*

Definição 2.4 *Uma variedade $X = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$ é dita reduzida se I é um ideal radical em $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.*

Definição 2.5 *Uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é denominada de variedade linear de dimensão r se $X = Z(I)$, onde $I \subset \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ é um ideal homogêneo gerado por formas lineares $L_1, ..., L_k$ de maneira que $dim[L_1, ..., L_k] = n - r$. Uma variedade linear de dimensão 1 é denominada de reta; Uma variedade linear de dimensão 2 é denominada de plano.*

Exemplo 2.6 *Seja $l \subset \mathbb{P}^n$ uma reta. Então existe um subespaço vetorial $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão 2 tal que $l = \mathbb{P}(W)$.*
De fato, segue da Definição 2.5, que existem $L_1, ..., L_{n-1}$ formas lineares L.I. tais que $l = Z(L_1, ..., L_{n-1})$. Cada L_i induz o funcional linear

$$\begin{array}{rcl} \widehat{L_i}: & \mathbb{C}^{n+1} & \to \mathbb{C} \\ & v & \mapsto L_i(v) \end{array},$$

de modo que dim $N(\widehat{L_i}) = n$.
Segue do fato B.37 que dim $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} N(\widehat{L_i}) = n + 1 - (n-1) = 2$.
Finalmente, observe que $l = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} N(\widehat{L_i}))$.

É importante considerar que na geometria dos espaços projetivos, duas retas contidas num plano sempre se intersectam. Mais precisamente, se l_1 e l_2 são retas contidas no plano π, então $l_1 = l_2$ ou $l_1 \cap l_2$ consiste de um único ponto. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [10]. Além disso, quaisquer dois pontos no plano projetivo determinam uma única reta projetiva. Para mais detalhes o leitor poderá consultar [3].

Observe ainda que se $l \subset \mathbb{P}^3$ é uma reta e $[p] \in \mathbb{P}^3$ é um ponto fora de l, então existe um único plano passando por $[p]$ e contendo l. De fato, l é a projetivização de um subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{A}^4$, digamos $l = \mathbb{P}([u, v])$. Como $[p] \notin l$, temos que $p \notin [u, v]$, ou seja, $[u, v, p]$ é um subespaço de dimensão 3 em $\mathbb{A}^4$. Sabemos que se X o subespaço ortogonal de $[u, v, p]$, então $dim X = 1$. Tome $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in X$. Temos que $Z(L) \subset \mathbb{P}^3$, onde $L = a_1X_1 + a_2X_2 + b_1Y_1 + b_2Y_2$, é um plano passando por $[p]$ e contendo l. Tal plano é único, pois todo vetor de X é múltiplo escalar de

(a_1, a_2, b_1, b_2). Por conseguinte, duas retas em $\mathbb{P}^3$ que se intersectam determinam um único plano.

Definição 2.7 *Uma hipersuperfície quádrica $Q \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2 em $n+1$ variáveis. Se $n = 2$, a hipersuperfície Q é denominada cônica.*

Figura 2.1: cônicas em $\mathbb{P}^2$.

As cônicas no plano projetivo são dos seguintes tipos: uma reta dupla, duas retas, um ponto, um circulo unitário ou conjunto vazio. Uma demonstração desse fato, e dada no Teorema 5.1 em [3].

Definição 2.8 *Seja $T : V \to V$ um isomorfismo linear. Então T induz uma bijeção em $\mathbb{P}(V)$, que denotaremos por $\mathbb{T}$ e chamaremos de mudança de coordenadas projetivas (Mcp), definida por $\mathbb{T}([v]) = [T(v)]$.*

Observe que o fato do isomorfismo linear T preservar subespaços implica que retas, planos, etc. são levados, respectivamente, em retas, planos, etc. pela mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T}$ e são chamadas de projetivamente equivalentes.

Definição 2.9 *Para cada subconjunto $Y \subset \mathbb{P}^n$ definimos o ideal associado a Y por*

$$\Im(Y) = \{f \in \mathbb{K}[x_0, ..., x_n] : f(p) = 0, \text{ para todo } p \in Y\}.$$

Verifica-se que $\Im(Y)$ é um ideal homogêneo radical.

2.3 Cone Afim

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rll} \Pi : & \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} & \to \mathbb{P}^n \\ & (a_0, ..., a_n) & \mapsto [a_0 : ... : a_n] \end{array}.$$

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva definimos o Cone Afim associado a X, que denotaremos $C(X)$, por

$$C(X) = \Pi^{-1}(X) \cup \{0\}\,.$$

Observação 2.10 *Observe que:*

1. *$C(X)$ é uma variedade afim homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}$.*

   De fato, seja $I \subset \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ um ideal radical homogêneo tal que $X = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$. Afirmamos que $C(X) = Z(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Suponha que $I = \langle f_1, ..., f_k\rangle$, onde cada f_i é homogêneo. Deste modo $f_i(0) = 0$, para todo i, ou seja, $0 \in Z(I)$. A seguir considere $a = (a_0, ..., a_n) \in C(X) \setminus \{0\}$. Temos que $\Pi(a) = [a_0 : ... : a_n] \in X = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$. Logo, $f_i(a) = 0$, para todo $i = 1, ..., k$, ou seja, $a \in Z(f_i) \subset \mathbb{A}^{n+1}$, para todo $i = 1, ..., k$. Disto concluímos que $a \in Z(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Portanto, $C(X) \subset Z(I)$. Mostraremos agora a inclusão contrária. Seja $a \in Z(I)$. Se $a = 0$, então, por definição, $a \in C(X)$. Se $a = (a_0, ..., a_n) \neq 0$, então $f_i(a) = 0$, para todo $i = 1, ..., k$, o que implica em $\Pi(a) = [a_0 : ... : a_n] \in X = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$, donde $a \in \Pi^{-1}(X)$. Portanto, $Z(I) \subset \Pi^{-1}(X) \cup \{0\} = C(X)$.

2. *Observe que Π é sobrejetiva. Além disso, se considerarmos a topologia de Zariski em $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{P}^n$, respectivamente, podemos concluir que Π é contínua, desde que para toda variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ verifica-se que $\Pi^{-1}(X)$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, pois $C(X)$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}^{n+1}$. De fato, $C(X) \cap (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}) = \Pi^{-1}(X)$.*

3. *$X \subset \mathbb{P}^n$ é irredutível se, e somente se, $C(X) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ é irredutível. Analogamente ao que foi feito na proposição B.13 pode-se verificar que uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é irredutível se, e somente se, $\Im(X)$ é um ideal*

primo. Por sua vez, $\Im(X) = \Im(C(X))$ é primo se, e somente se, $C(X) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ é irredutível.

Exemplo 2.11 *Se $X = \{[a_0 : a_1]\} \subset \mathbb{P}^1$, então $X = Z(I)$, com $I = \langle a_1x_0 - a_0x_1 \rangle$. Deste modo $C(X) = Z(I) = \{(u_0, u_1) \in \mathbb{A}^2 : a_1u_0 - a_0u_1 = 0\} = [(a_0, a_1)]$ é uma reta.*

Proposição 2.12 *$X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade linear projetiva de dimensão r se, e somente se, $C(X)$ é um subespaço linear de $\mathbb{A}^{n+1}$ de dimensão $r + 1$.*

Prova. Lembremos que $X \subset \mathbb{P}^n$ é denominada de variedade linear de dimensão r se, e somente se, $\Im(X) = \langle L_1, ..., L_{n-r} \rangle$, onde $L_1, ..., L_{n-r}$ é um conjunto L.I. de formas lineares. Assim, $C(X) = Z(\langle L_1, ..., L_{n-r} \rangle) = Z(L_1) \cap \cdots \cap Z(L_{n-r})$.
Denotando por $\widehat{L_i}$ o funcional linear associado a L_i, temos que $Z(L_i) = N(\widehat{L}_i)$, para $i = 1, ..., n-r$. Como $\widehat{L}_1, ..., \widehat{L}_{n-r}$ são linearmente independentes segue do Fato B.37 que $dim(Z(L_1) \cap \cdots \cap Z(L_{n-r})) = (n + 1) - (n - r) = r + 1$. Portanto, $C(X)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{A}^{n+1}$ de dimensão $r + 1$.
Reciprocamente, suponha que $C(X)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{A}^{n+1}$ de dimensão $r + 1$ e considere $\{u_0, ..., u_r\}$ uma base de $C(X)$. Seja $[u_0, ..., u_r]^0$ o anulador de $C(X)$ no espaço dual de $\mathbb{C}^{n+1}$. Sabemos que $dim\,[u_0, ..., u_r]^0 = n + 1 - (r + 1) = n - r$. Seja $\{f_1, ..., f_{n-r}\}$ uma base de $[u_0, ..., u_r]^0$ e considere o isomorfismo linear $\psi : \mathbb{C}^{n+1*} \to \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_1$ definido por $\psi(e_i^*) = x_{i-1}$, onde $\left\{e_1^*, ..., e_{n+1}^*\right\}$ é a base dual associada a base canônica de $\mathbb{C}^{n+1}$. Tome $L_i = \psi(f_i)$, para $i = 1, ..., n - r$. Observe que $\{L_1, ..., L_{n-r}\}$ é um conjunto L.I. de formas lineares em $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_1$. Além disso, $N(f_i) = Z(L_i)$, para $i = 1, ..., n - r$.
Também temos que $C(X) = N(f_1) \cap \cdots \cap N(f_{n-r}) = Z(L_1) \cap \cdots \cap Z(L_{n-r}) = Z(I)$, onde $I = \langle L_1, ..., L_{n-r} \rangle$. Logo, $X = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$. Portanto, X é uma variedade linear de $\mathbb{P}^n$ de dimensão r. ■

Definição 2.13 *A dimensão de uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é definida por $dimX = dimC(X) - 1$.*

2.4 Variedades Projetivas Involutivas

Definição 2.14 *Uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^{2n-1}$ será denominada de variedade projetiva involutiva se, e somente se, seu cone afim $C(X) \subset \mathbb{A}^{2n}$ for uma variedade afim involutiva.*

Observação 2.15 *Lembremos que se uma variedade afim $Y \subset \mathbb{A}^{2n}$ é involutiva, então $dimY \geq n$. Portanto, $X \subset \mathbb{P}^{2n-1}$ será uma variedade involutiva se, e somente se, $dimX \geq n-1$.*

Proposição 2.16 *Seja $X \subset \mathbb{P}^{2n-1}$ uma hipersuperfície de grau d. Então X é uma variedade projetiva involutiva.*

Prova. Se X é uma hipersuperfície de grau d, então $\Im(X) = \langle f \rangle$, onde f é um polinômio homogêneo de grau d com $d \geq 1$. Sabemos que $C(X) = Z(f)$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{A}^{2n}$.
Logo, segue do Exemplo 1.2 que $C(X)$ é involutiva. Portanto, X é involutiva. ■

Observação 2.17 *Lembremos que uma variedade afim $Y \subset \mathbb{A}^2$ é involutiva se, e somente se, $Y = \mathbb{A}^2$ ou $Y = Z(f)$ é uma curva. Logo, uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^1$ é involutiva se, e somente se, $X = \mathbb{P}^1$ ou X é um conjunto finito de pontos. Portanto, toda variedade projetiva em $\mathbb{P}^1$ é involutiva.*

Caberia neste momento o questionamento sobre quais são as variedades projetivas involutivas em $\mathbb{P}^3$. A seguir faremos um estudo sobre as variedades projetivas irredutíveis e involutivas em $\mathbb{P}^3$, visto que uma dada variedade será involutiva se, e somente se, cada componente irredutível for involutiva.

Já vimos que se $X \subset \mathbb{P}^3$ for uma variedade projetiva irredutível e involutiva, então $dimX \geq 1$. Observe que:

1. Se $dimX = 3$, então $X = \mathbb{P}^3$. Logo, X é involutiva.

2. Se $dimX = 2$, então X é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^3$. Segue-se da Proposição anterior que X é involutiva.

Resta estudar o caso em que $dimX = 1$, isto é, X é uma curva.

Conforme mostram os exemplos a seguir podemos ter em $\mathbb{P}^3$ curvas involutivas e não involutivas.

Exemplo 2.18 *Considere a reta* $l_1 = Z(y_2, y_1) \subset \mathbb{P}^3$. *Temos* $C(l_1) = Z(y_2, y_1) \subset \mathbb{A}^4$. *Logo,* $\Im(C(l_1)) = \langle y_2, y_1 \rangle$. *Sabemos que* $C(l_1)$ *é involutiva se, e somente se,* $\{y_2, y_1\} \in \langle y_2, y_1 \rangle$. *Note que*

$$\{y_2, y_1\} = \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial y_2}{\partial x_i}\frac{\partial y_1}{\partial y_i} - \frac{\partial y_2}{\partial y_i}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}) = 0 \in \langle y_2, y_1 \rangle \,.$$

Logo, $C(l_1) \subset \mathbb{A}^4$ *é involutiva e, portanto,* $l_1 \subset \mathbb{P}^3$ *é involutiva.*
Já a reta $l_2 = Z(x_2, y_2) \subset \mathbb{P}^3$ *não é involutiva. Com efeito, como* $\Im(C(l_2)) = \langle x_2, y_2 \rangle$ *temos* $C(l_2)$ *não involutiva, pois*

$$\{x_2, y_2\} = \sum_{i=1}^{2} (\frac{\partial x_2}{\partial x_i}\frac{\partial y_2}{\partial y_i} - \frac{\partial x_2}{\partial y_i}\frac{\partial y_2}{\partial x_i}) = 1 \notin \langle x_2, y_2 \rangle \,.$$

Portanto, l_2 *não é involutiva.*

A seguir iniciaremos nosso estudo pelas curvas irredutíveis mais simples, as retas em $\mathbb{P}^3$.

2.4.1 Retas Involutivas em $\mathbb{P}^3$

Iniciamos esta subseção introduzindo as seguintes notações:

- Ω_p é o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ que passam pelo ponto p.
- $\Omega(\pi)$ é o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ contidas no plano π.
- $\Omega_p(\pi) = \Omega_p \cap \Omega(\pi)$ é o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ contidas no plano π que passam pelo ponto p.
- Σ é o conjunto das retas involutivas de $\mathbb{P}^3$.

A seguir observe que o isomorfismo linear $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbf{S}_1$, dado por $\phi(p) = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2$ se $p = (b_1, b_2, -a_1, -a_2)$, nos permite definir uma correspondência entre $\check{\mathbb{P}}^3 = \{\pi \subset \mathbb{P}^3 : \pi \text{ é um plano}\}$ e $\mathbb{P}^3$. A saber:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \{\pi \subset \mathbb{P}^3 : \pi \text{ é um plano}\} & \to & \mathbb{P}^3 \\ & \pi & \mapsto & \varphi(\pi) = [b_1 : b_2 : -a_1 : -a_2] \end{array} \tag{2.1}$$

se $\pi = Z(f)$, com $f = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2$. Observe que $\varphi(\pi) \in \pi$.

De posse de tal correspondência iremos caracterizar as retas involutivas em $\mathbb{P}^3$.

Salientamos que $\{V_i\}_{i=0}^3$, onde $V_i = \{[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3 : a_i \neq 0\}$, é uma cobertura aberta de $\mathbb{P}^3$. Sendo assim, é suficiente mostrar os resultados que se seguem em cada um desses abertos.

Proposição 2.19 *Sejam $\pi \subset \mathbb{P}^3$ um plano e $q = \varphi(\pi)$. Então $\Omega(\pi) \cap \Sigma = \Omega_q(\pi)$.*

Prova. Sabemos que $\pi = Z(f)$, onde $f = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2$, com $[a_1 : a_2 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^3$. Suponha que $[a_1 : a_2 : b_1 : b_2] \in V_3$ e, sem perda de generalidade, que $b_2 = 1$. Assim, $q = \varphi(\pi) = [b_1 : 1 : -a_1 : -a_2]$.
Seja $l \in \Omega(\pi)$. Então $f \in \Im(l)$. Logo, podemos supor que $\Im(l) = \langle f, g\rangle$, onde $g = Ax_1 + Bx_2 + Cy_1$, com $[A : B : C] \in \mathbb{P}^2$. Observe que $g(q) = b_1A + B - a_1C$ e que

$$\{f, g\} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ A & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ B & 0 \end{vmatrix} = a_1C - b_1A - B = -g(q) \in \mathbb{C}$$

Assim, se $l \in \Sigma$, então $-g(q) \in \langle f, g\rangle$. Como $\langle f, g\rangle$ é um ideal próprio de $\mathbf{S}$ e $-g(q) \in \mathbb{C}$, devemos ter $g(q) = 0$, e assim, $q \in Z(\Im(l)) = l$. Logo, $l \in \Omega_q(\pi)$ e, portanto, $\Omega(\pi) \cap \Sigma \subset \Omega_q(\pi)$
Por outro lado, se $l \in \Omega_q(\pi)$, então $0 = g(q) = b_1A + B - a_1C = -\{f, g\}$, implicando que $\{f, g\} = 0 \in \Im(l)$, ou seja, $l \in \Sigma$. Portanto, $\Omega_q(\pi) \subset \Omega(\pi) \cap \Sigma$.
Isto nos garante que $l \subset \pi$ é involutiva se, e somente se, $\varphi(\pi) = q \in l$.
Procedendo de modo análogo nos demais abertos, concluímos o resultado. ■

Observe que o resultado acima pode ser visto como consequência da Proposição 1.12, no Capítulo 1. De fato, nas mesmas notações acima, $l \in \Omega(\pi)$ é uma variedade projetiva involutiva se, e somente se, seu cone afim $C(l) = Z(f, g)$ é uma variedade afim involutiva. Mas pela proposição supra citada $C(l) = Z(f, g)$ é involutiva se, e somente se, $q \in Z(g)$, ou seja, $l \in \Omega_q$.

Corolário 2.20 *Se $p \in \mathbb{P}^3$, então $\Omega_p \cap \Sigma = \Omega_p(\pi_p)$, onde $\pi_p = \varphi^{-1}(p)$.*

Prova. Seja $l \in \Omega_p \cap \Sigma$ e suponha que $l \not\subset \pi_p$. Seja $H \subset \mathbb{P}^3$ um plano contendo l. Temos que $m = H \cap \pi_p \subset \pi_p$ é uma reta involutiva, pois $p \in m$. Além disso, $q = \varphi(H) \in m$, pois m é uma reta involutiva contida em H.
Por outro lado, como $l \subset H$ é involutiva devemos ter $q \in l$. Assim, $p, q \in m$ e $p, q \in l$. Portanto, $m = l$, o que é um absurdo. Logo, $\Omega_p \cap \Sigma \subset \Omega_p(\pi_p)$.
Reciprocamente, se $l \in \Omega_p(\pi_p)$, então $l \in \Omega_p$. Como $l \subset \pi_p = \varphi^{-1}(p)$ e $p \in l$ temos que l é involutiva. ∎

Proposição 2.21 *Sejam $\pi \subset \mathbb{P}^3$ um plano, $p \in \pi$ e $q = \varphi(\pi)$. Então*

$$\Omega_p(\pi) \cap \Sigma = \begin{cases} \Omega_q(\pi) & se\ p = q \\ \{l_{p,q}\} & se\ p \neq q \end{cases}$$

Prova. Seja $l \subset \pi$ uma reta em $\mathbb{P}^3$ passando pelo ponto p. Suponha que $\pi = Z(f)$, onde $f = a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + y_2$, e $p = [\alpha_1 : \alpha_2 : \beta_1 : -a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - b_1\beta_1]$. Desse modo $q = [b_1 : 1 : -a_1 : -a_2]$ e $l = Z(f, g)$ com $g = Ax_1 + Bx_2 + Cy_1$ para certos A, B e C, não todos nulos.
Como $p \in Z(f)$ temos que $p \in l$ se, e somente se, $p \in Z(g)$, ou seja, se a seguinte igualdade é satisfeita:

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\beta_1 = 0.$$

Por outro lado, segue-se da Proposição anterior que $l \in \Omega(\pi)$ é involutiva se, e somente se, $q \in l$.
Desse modo $l \in \Omega_p(\pi) \cap \Sigma$ se, e somente se, o seguinte sistema é satisfeito:

$$\begin{cases} B = a_1C - b_1A \\ 0 = A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\beta_1 \end{cases}$$

o que implica em

$$A(\alpha_1 - b_1\alpha_2) + C(a_1\alpha_2 + \beta_1) = 0.$$

Se $\alpha_1 - b_1\alpha_2 = a_1\alpha_2 + \beta_1 = 0$, então

$$p = [b_1\alpha_2 : \alpha_2 : -a_1\alpha_2 : -a_1b_1\alpha_2 - a_2\alpha_2 + b_1a_1\alpha_2] = [b_1 : 1 : -a_1 : -a_2] = q$$

e deste modo $\Omega_p(\pi) \cap \Sigma = \Omega_q(\pi)$ se $p = q$.
Agora, se $[\alpha_1 - b_1\alpha_2 : a_1\alpha_2 + \beta_1] \in \mathbb{P}^1$, então existe $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tal que $A = \lambda(a_1\alpha_2 + \beta_1)$

e $C = -\lambda(\alpha_1 - b_1\alpha_2)$. Logo, podemos escolher $g = (a_1\alpha_2 + \beta_1)x_1 + (a_1(\alpha_1 - b_1\alpha_2) - b_1(a_1\alpha_2 + \beta_1))x_2 - (\alpha_1 - b_1\alpha_2)y_1 = (a_1\alpha_2 + \beta_1)(x_1 - b_1x_2) - (\alpha_1 - b_1\alpha_2)(y_1 + a_1x_2)$. Note que $q \in Z(g)$ e deste modo $q \in Z(f, g) = l$.

Como existe uma uma única reta passando por p e q, uma vez que $p \neq q$, temos que $\Omega_p(\pi) \cap \Sigma = \{l_{p,q}\}$. ■

Agora nos interessa conhecer o conjunto Σ das retas involutivas em $\mathbb{P}^3$. Para isso, apresentamos a noção de Grassmanniana e o mergulho de Plücker.

Definição 2.22 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n+1$. Para cada $0 \leq d \leq n+1$. Chamamos de d-*Grassmanniana *e denotamos por $G(d, V)$, o conjunto*

$$G(d, V) = \Big\{W \subset V : W \textit{ é um subespaço vetorial de } V \textit{ de dimensão } d\Big\}.$$

Assim, a projetivização de V pode ser vista como a Grassmanniana de subespaços de dimensão 1 do espaço V através do mapa

$$\begin{array}{cccc} \varpi : & \mathbb{P}(V) & \to & G(1, V) \\ & [p_0 : ... : p_n] & \mapsto & [(p_0, ..., p_n)] \end{array}.$$

Em particular,

$$\mathbb{P}^n = G(1, \mathbb{C}^{n+1}).$$

Além disso, $G(2, \mathbb{C}^{n+1})$ é chamada de Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^n$, pois, como vimos no Exemplo 2.6, toda reta $l \subset \mathbb{P}^n$ é definida como a projetivização de um subespaço vetorial W de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão 2. Particularmente, temos uma identificação entre $\{l \subset \mathbb{P}^3 : l \text{ é uma reta}\}$ e $G(2, \mathbb{C}^4)$ através do mapa:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \{l \subset \mathbb{P}^3 : l \text{ é uma reta}\} & \to & G(2, \mathbb{C}^4) \\ & l & \mapsto & C(l) \end{array}. \tag{2.2}$$

Outrossim, a Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$ pode ser mergulhada no espaço projetivo $\mathbb{P}^5$ através do mapa:

$$\begin{array}{rccl} \omega : & G(2, \mathbb{C}^4) & \to & \mathbb{P}^5 \\ & [u, v] & \mapsto & [d_{01} : d_{02} : d_{03} : d_{12} : d_{13} : d_{23}] \end{array}, \tag{2.3}$$

onde $d_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$, se $u = [u_0 : u_1 : u_2 : u_3]$ e $v = [v_0 : v_1 : v_2 : v_3]$.

Observe que $d_{ij} = u_i v_j - u_j v_i \neq 0$, para algum $i < j$, pois $\{u, v\}$ é L.I.

Considere $F = x_1 y_3 - x_2 y_2 + x_3 y_1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ e a hipersuperfície quádrica $\mathcal{Q} = Z(F) \subset \mathbb{P}^5$. Verifica-se que $Im(\omega) = \mathcal{Q}$.

A aplicação ω, definida acima, denomina-se Mergulho de Plücker e $\mathcal{Q}$ denomina-se Quádrica de Plücker.

Uma boa estratégia para estudar um conjunto é cobri-lo por subconjuntos cuja estrutura conhecemos. Faremos algo parecido com $G(2, \mathbb{C}^4)$. Sabemos que $\{V_i\}_{i=0}^5$, onde $V_i = \{[a_0 : ... : a_5] \in \mathbb{P}^5 : a_i \neq 0\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{P}^5$. Tome $p = [1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3] \in V_0$. Se $p \in \mathcal{Q}$, então $F(p) = b_3 - a_2 b_2 + a_3 b_1 = 0$, ou seja, $p = [1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : a_2 b_2 - a_3 b_1]$.

Note que $p = \omega^{-1}([u, v])$, onde $u = (1, 0, -b_1, -b_2)$ e $v = (0, 1, a_2, a_3)$.

Fazendo $U_{12} = \{[(1, 0, \alpha, \beta), (0, 1, \gamma, \delta)] \in G(2, \mathbb{C}^4) : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}\}$, temos que $p = \omega^{-1}([u, v]) \in \omega^{-1}(U_{12})$, ou seja, $V_0 \cap \mathcal{Q} \subset \omega^{-1}(U_{12})$. Por outro lado, se $p \in \omega^{-1}(U_{12})$, então $p = \omega([u, v])$, com $u = (1, 0, \alpha, \beta)$ e $v = (0, 1, \gamma, \delta)$ para certos $\alpha, \beta, \gamma \delta \in \mathbb{C}$. Assim, $p = [1 : \gamma : \delta : -\alpha : -\beta : \alpha\delta - \beta\gamma] \in V_0$ e $F(p) = \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\gamma - \alpha\delta = 0$.

Portanto, $V_0 \cap \mathcal{Q} = \omega^{-1}(U_{12})$.

Seguindo a ideia acima descrita concluímos que $\{U_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$ é uma cobertura aberta de $G(2, \mathbb{C}^4)$.

Do que foi visto, a composta $\widetilde{\omega} = \omega \circ \Phi$ das aplicações definidas em (2.2) e (2.3) induz uma identificação entre $\{l \subset \mathbb{P}^3 : l \text{ é uma reta}\}$ e $\mathcal{Q}$. Observe que se $l = \mathbb{P}([u, v])$, então $\widetilde{\omega}(l) = \omega([u, v])$.

Por exemplo, se $W = [(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)]$ é tal que $l = \mathbb{P}(W)$, vejamos como determinar duas formas lineares linearmente independentes L e M tais que $\Im(l) = \langle L, M \rangle$. Seja $L = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma Y_1 + \delta Y_2$ e $M = sX_1 + tX_2 + uY_1 + vY_2$. Devemos ter $\alpha + \gamma a + \delta b = 0 = \beta + \gamma c + \delta d$ e $s + ua + vb = 0 = t + uc + vd$, donde $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(s, t, u, v) \in [(-a, -c, 1, 0), (-b, -b, 0, 1)]$. Como L e M são L.I., podemos tomar $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-a, -c, 1, 0)$ e $(s, t, u, v) = (-b, -d, 0, 1)]$. Assim, $L = -aX_1 - cX_2 + Y_1$ e $M = -bX_1 - dX_2 + Y_2$.

Com isso, podemos enunciar e provar o nosso próximo resultado, que evidencia o fato de que as retas involutivas em $\mathbb{P}^3$ formam uma família tridimensional. Na verdade, como veremos Σ se identifica com uma seção hiperplana da quádrica de Plücker.

Proposição 2.23 *Considere $\widetilde{\omega}$ a aplicação descrita acima. Então $\widetilde{\omega}(\Sigma) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = Z(x_2 + y_2)$.*

Prova.

- $\widetilde{\omega}(\Sigma) \subset \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$

  Se $p \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$, então $p = \widetilde{\omega}(l)$ com $l \in \Sigma$. Sabemos que $l = \mathbb{P}(W)$, para algum $W \in G(2, \mathbb{C}^4)$.

  Caso 1: $W = [(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)] \in U_{12}$, para certos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
  Se $l = \mathbb{P}(W)$, então $\Im(l) = \langle L, M\rangle$, onde $L = y_1 - ax_1 - cx_2$ e $M = y_2 - bx_1 - dx_2$.
  Como l é involutiva temos que

  $$\{L, M\} = \begin{vmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -c & -d \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = b - c \in \Im(l),$$

  donde $b - c = 0$.
  Por outro lado, $p = [1 : c : d : -a : -b : ad - bc]$. Como $b - c = 0$ concluímos que $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{H} = Z(x_2 + y_2) \subset \mathbb{P}^5$. Note ainda que $F(p) = ad - bc - bc - ad = 0$. Portanto, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$.

  Caso 2: $W = [(1, a, 0, b), (0, c, 1, d)] \in U_{13}$, para certos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
  Se $l = \mathbb{P}(W)$, então $\Im(l) = \langle L, M\rangle$, onde $L = x_2 - ax_1 - cy_1$ e $M = y_2 - bx_1 - dy_1$.
  Como l é involutiva temos que

  $$\{L, M\} = \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc + 1 \in \Im(l),$$

  e, assim, $ad - bc = -1$.
  Por outro lado, $p = [c : 1 : d : a : ad - bc : -b] = [c : 1 : d : a : -1 : -b]$.

Logo, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{H} = Z(x_2 + y_2) \subset \mathbb{P}^5$. Note ainda que $F(p) = -bc + 1 + ad = 0$. Portanto, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$.

Caso 3: $W = [(1, a, b, 0), (0, c, d, 1)] \in U_{14}$, para certos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
Se $l = \mathbb{P}(W)$, então $\Im(l) = \langle L, M\rangle$, onde $L = x_2 - ax_1 - cy_2$ e $M = y_1 - bx_1 - dy_2$.
Como l é involutiva temos que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} -a & -b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{vmatrix} = -a - d \in \Im(l),$$

e, assim, $-a - d = 0$.
Por outro lado, $p = [c : d : 1 : ad - bc : a : b]$. Como $a + d = 0$ concluímos que $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{H} = Z(x_2 + y_2) \subset \mathbb{P}^5$. Note ainda que $F(p) = bc - ad + ad - bc = 0$. Portanto, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$.

Caso 4: $W = [(a, 1, 0, b), (c, 0, 1, d)] \in U_{23}$, para certos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
Se $l = \mathbb{P}(W)$, então $\Im(l) = \langle L, M\rangle$, onde $L = x_1 - ax_2 - cy_1$ e $M = y_2 - bx_2 - dy_1$.
Como l é involutiva temos que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -c & -d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = -d - a \in \Im(l),$$

e, assim, $-a - d = 0$.
Por outro lado, $p = [-c : a : ad - bc : 1 : d : -b]$. Como $a + d = 0$ concluímos que $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{H} = Z(x_2 + y_2) \subset \mathbb{P}^5$. Note ainda que $F(p) = bc - ad + ad - bc = 0$. Portanto, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$.

caso 5: $W = [(a, 1, b, 0), (c, 0, d, 1)] \in U_{24}$, para certos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
Se $l = \mathbb{P}(W)$, então $\Im(l) = \langle L, M\rangle$, onde $L = x_1 - ax_2 - cy_2$ e $M = y_1 - bx_2 - dy_2$.
Como l é involutiva temos

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix} = 1 + ad - bc \in \Im(l),$$

e, assim, $ad - bc = -1$.
Por outro lado, $p = [-c : ad - bc : a : d : 1 : b]$. Como $ad - bc = -1$ concluímos que $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{H} = Z(x_2 + y_2) \subset \mathbb{P}^5$. Note ainda que $F(p) = -bc - ad + bc + ad = 0$. Portanto, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$.

Caso 6: $W = [(a, b, 0, 1), (c, d, 1, 0)] \in U_{34}$, para certos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Se $l = \mathbb{P}(W)$, então $\Im(l) = \langle L, M \rangle$ onde $L = x_1 - ay_1 - cy_2$ e $M = x_2 - by_1 - dy_2$.

Como l é involutiva temos que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 0 & -b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -c & -d \end{vmatrix} = -b + c \in \Im(l),$$

e, assim, $-b + c = 0$.

Por outro lado, $p = [ad - bc : -c : a : -d : b : 1]$. Como $-c + b = 0$, concluímos que $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{H} = Z(x_2 + y_2) \subset \mathbb{P}^5$. Note ainda que $F(p) = ad - bc + ac - ad = 0$. Portanto, $\widetilde{\omega}(l) \in \mathcal{Q} \cap (H)$.

Por conseguinte, $\widetilde{\omega}(\Sigma) \subset \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$.

- $\widetilde{\omega}(\Sigma) \supset \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$

Seja $p = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5] \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H} \subset \mathbb{P}^5$.

Caso 1: $a_0 \neq 0$

Neste caso podemos supor $p = [1 : a_1 : a_2 : a_3 : -a_1 : a_5]$. Como $a_1 + a_4 = 0$ e $F(p) = a_5 + a_1^2 + a_2 a_3 = 0$ temso que $p = [1 : a_1 : a_2 : a_3 : -a_1 : -a_1^2 - a_2 a_3] = \omega([u, v])$ onde $u = (1, 0 - a_3, a_1)$ e $v = (0, 1, a_1, a_2)$.

Considere $l = \mathbb{P}([u, v])$. Assim, $l = Z(L, M)$, com $L = y_1 + a_3 x_1 - a_1 x_2$ e $M = y_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2$.

Observe que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -a_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_1 & 0 \\ -a_2 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - a_1 = 0 \in \Im(l),$$

ou seja, l é involutiva. Portanto, $p = \omega([u, v]) = \widetilde{\omega}(l) \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$.

Caso 2: $p = [a_0 : 1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$

Neste caso devemos ter $a_4 = -1$ e $a_0 a_5 + a_2 a_3 = -1$. Assim, $p = [a_0 : 1 : a_2 : a_3 : -1 : a_5] = \omega([u, v])$, com $u = (1, a_3, 0, -a_5)$ e $v = (0, a_0, 1, a_2)$.

Considere $l = \mathbb{P}([u, v])$. Temos $l = Z(L, M)$ com $L = x_2 - a_3 x_1 - a_0 y_1$ e $M = y_2 + a_5 x_1 - a_2 y_1$.

Note que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} -a_3 & a_5 \\ -a_0 & -a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2 a_3 + a_0 a_5 + 1 = -1 + 1 = 0 \in \Im(l).$$

Logo, l é involutiva e $p = \omega([u, v]) = \widetilde{\omega}(l) \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$.

Caso 3: $p = [a_0 : a_1 : 1 : a_3 : a_4 : a_5]$

Neste caso devemos ter $a_4 = -a_1$ e $a_0a_5 + a_1^2 = -a_3$. Assim, $p = [a_0 : a_1 : 1 : -a_0a_5 - a_1^2 : -a_1 : a_5] = \omega([u, v])$, com $u = (1, -a_1, a_5, 0)$ e $v = (0, a_0, a_1, 0)$.

Considere $l = \mathbb{P}([u, v])$. Temos $l = Z(L, M)$, com $L = x_2 + a_1x_1 - a_0y_2$ e $M = y_1 - a_5x_1 - a_1y_2$.

Note que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ -a_5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -a_0 \\ 0 & -a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_1 = 0 \in \Im(l).$$

Logo, l é involutiva e $p = \omega([u, v]) = \widetilde{\omega}(l) \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$.

Caso 4: $p = [a_0 : a_1 : a_2 : 1 : -a_1 : a_5]$

Neste caso devemos ter $a_0a_5 + a_1^2 = -a_2$. Assim, $p = [a_0 : a_1 : -a_0a_5 - a_1^2 : 1 : -a_1 : a_5] = \omega([u, v])$, com $u = (a_1, 1, 0, -a_5)$ e $v = (-a_0, 0, 1, -a_1)$.

Considere $l = \mathbb{P}([u, v])$. Temos $l = Z(L, M)$, com $L = x_1 - a_1x_2 + a_0y_1$ e $M = y_2 + a_5x_2 + a_1y_1$.

Note que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_1 & 0 \\ a_5 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - a_1 = 0 \in \Im(l).$$

Logo, l é involutiva e $p = \omega([u, v]) = \widetilde{\omega}(l) \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$.

Caso 5: $p = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : 1 : a_5]$

Neste caso devemos ter $a_1 = -1$ e $a_0a_5 + a_2a_3 = -1$. Assim, $p = [a_0 : -1 : a_2 : a_3 : 1 : a_5] = \omega([u, v])$, com $u = (a_2, 1, a_5, 0)$ e $v = (-a_0, 0, a_3, 1)$.

Considere $l = \mathbb{P}([u, v])$. Temos $l = Z(L, M)$, com $L = x_1 - a_2x_2 + a_0y_2$ e $M = y_1 - a_5x_2 - a_3y_2$.

Note que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_2 & a_0 \\ -a_5 & -a_3 \end{vmatrix} = 1 + a_2a_3 + a_0a_5 = 1 + (-1) = 0 \in \Im(l).$$

Logo, l é involutiva e $p = \omega([u, v]) = \widetilde{\omega}(l) \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$.

Caso 6: $p = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : 1]$

Neste caso devemos ter $a_4 = -a_1$ e $a_0 = -a_1^2 - a_2a_3$. Assim, $p = [-a_2a_3 - a_1^2 :$

$a_1 : a_2 : a_3 : -a_1 : a_5] = \omega([u,v])$, com $u = (a_2, -a_1, 1, 0)$ e $v = (-a_1, -a_3, 0, 1)$. Considere $l = \mathbb{P}([u,v])$. Temos $l = Z(L, M)$, com $L = x_2 + a_1x_1 - a_0y_2$ e $M = y_1 - a_5x_1 - a_1y_2$.

Note que

$$\{L, M\} = \begin{vmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 - a_1 = 0 \in \Im(l).$$

Logo, l é involutiva e $p = \omega([u,v]) = \widetilde{\omega}(l) \in \widetilde{\omega}(\Sigma)$.

■

2.4.2 Cônicas Involutivas em $\mathbb{P}^3$

Lembremos que $C \subset \mathbb{P}^2$ é uma cônica se, e somente se, $C = Z(f)$, com $f = a_0x^2 + a_1xy + a_2xz + a_3y^2 + a_4yz + a_5z^2$.

Seja V o espaço vetorial de dimensão 6 dos polinômios homogêneos de grau 2 nas varíaveis x, y, z. Temos uma correspondência natural entre $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}^5$ dada por $[f] \to [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$, se $f = a_0x^2 + a_1xy + a_2xz + a_3y^2 + a_4yz + a_5z^2$. Como $Z(f) = Z(\lambda f)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ também podemos considerar a seguinte identificação: $[f] \to Z(f)$. Disto resulta uma identificação entre o espaço das cônicas planas e $\mathbb{P}^5$, por isso dizemos que $\mathbb{P}^5$ parametriza as cônicas do plano projetivo.

Feitas as considerações acima dizemos que $C \subset \mathbb{P}^3$ é uma cônica se, e somente se, $\Im(C) = \langle h, f \rangle$, onde $h \in \mathbf{S}_1 \setminus \{0\}$ e $f \in \mathbf{S}_2 \setminus h\mathbf{S}_1$. Denominamos $Z(h)$ de plano suporte de C.

Observe com isso que as cônicas em $\mathbb{P}^3$ são parametrizadas por um $\mathbb{P}^5$-fibrado projetivo sobre $\check{\mathbb{P}}^3$.

Tomando $h = x_1 + ax_2 + by_1 + cy_2$ e $f = x_2^2 + d_1x_2y_1 + d_2x_2y_2 + d_3y_1^2 + d_4y_1y_2 + d_5y_2^2$ arbitrários a condição de involutividade pode ser expressa como:

$\{h, f\} = \sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\partial h}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}) = d_1x_2 + 2d_3y_1 + d_4y_2 + a(d_2x_2 + d_4y_1 + 2d_5y_2) - c(2x_2 + d_1y_1 + d_2y_2) = (d_1 + ad_2 - 2c)x_2 + (2d_3 + ad_4 - cd_1)y_1 + (d_4 + 2ad_5 - cd_2)y_2 \in \langle h, f \rangle$.

Como $f \in \mathbf{S}_2$, devemos ter $(d_1 + ad_2 - 2c)x_2 + (2d_3 + ad_4 - cd_1)y_1 + (d_4 + 2ad_5 - cd_2)y_2 \in \langle h \rangle$. Logo, $d_1 + ad_2 - 2c = 2d_3 + ad_4 - cd_1 = d_4 + 2ad_5 + cd_2 = 0$. Assim,

C é involutiva se, e somente se,

$$\begin{cases} d_1 = -ad_2 + 2c \\ d_4 = -2ad_5 + cd_2 \\ d_3 = a^2d_5 + c^2 \end{cases}$$

ou seja, $C = Z(h, f)$, com $h = x_1 + ax_2 + by_1 + cy_2$ e $f = x_2^2 + (2c - ad_2)x_2y_1 + d_2x_2y_2 + (a^2d_5 + c^2)y_1^2 + (cd_2 - 2ad_5)y_1y_2 + d_5y_2^2$.

O próximo resultado garante que as cônicas reduzidas involutivas são redutíveis.

Proposição 2.24 *Sejam $C \subset \mathbb{P}^3$ uma cônica reduzida definida pelo ideal $\Im(C) = \langle h, f\rangle$, onde $h \in \boldsymbol{S}_1$ e $f \in \boldsymbol{S}_2 \setminus h\boldsymbol{S}_1$, e $H \subset \mathbb{P}^3$ seu plano suporte. Então C é involutiva se, e somente, $\varphi(H) \in \mathrm{Sing}(C)$.*

Prova. Suponha que C é involutiva e que $C = Z(h, f)$, com $h = x_1+ax_2+by_1+cy_2$ e $f = x_2^2 + (2c - ad_2)x_2y_1 + d_2x_2y_2 + (a^2d_5 + c^2)y_1^2 + (cd_2 - 2ad_5)y_1y_2 + d_5y_2^2$. Temos que $q = \varphi(H) = [-b : -c : 1 : a]$ e, assim, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(q) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(q) = -2c+(2c-ad_2)+d_2a = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}(q) = (-2c^2+acd_2)+2(a^2d_5+c^2)+(cd_2-2ad_5)a = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y_2}(q) = -cd_2 + (cd_2 - 2ad_5) + 2d_5a = 0$.Logo, $q \in \mathrm{Sing}(C)$.
Reciprocamente, suponha que $\Im(C) = \langle h, f\rangle$, com $h = x_1 + ax_2 + by_1 + cy_2$ e $f = x_2^2+d_1x_2y_1+d_2x_2y_2+d_3y_1^2+d_4y_1y_2+d_5y_2^2$. Seja $H = Z(h)$ é o plano suporte de C. Se $q = \varphi(H) \in \mathrm{Sing}(C)$, então $\frac{\partial f}{\partial x_2}(q) = d_1 + ad_2 - 2c$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}(q) = 2d_3 + ad_4 - cd_1$ e $\frac{\partial f}{\partial y_2}(q) = d_4 + 2ad_5 - cd_2$ são todos nulos.
Logo,

$$\{h, f\} = (d_1 + ad_2 - 2c)x_2 + (2d_3 + ad_4 - cd_1)y_1 + (d_4 + 2ad_5 - cd_2)y_2 = 0 \in \langle h, f\rangle$$

e isto nos garante que C é involutiva. ■

Outra forma de demonstrar a Proposição acima, é usando Proposição 1.12. De fato, nas mesmas condições e notações acima, seja $X = Z(h, f)$ o cone afim da cônica reduzida C. Sabemos que C é involutiva, se e somente se, X é involutiva. Pela Proposição 1.12 temos que X é involutiva se, e somente se, X é redutível e $p = \phi^{-1}(h) = (b_1, b_2, -a_1, -a_2)$ pertence a cada componente irredutível de X. Mais precisamente, como X é uma variedade afim homogênea, temos que X é involutiva se, e somente se, X é redutível e λp pertence a cada componente irredutível de X, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mas isto equivale a dizer que C é redutível e $[p] = q = \varphi(H)$ pertence a cada componente irredutível de C. Como uma cônica reduzida e redutível no plano projetivo consiste de duas retas que são incidentes no seu ponto de singularidade, temos que C é involutiva se, e somente se, $q \in \mathrm{Sing}(C)$.

Com isso, concluímos que uma cônica reduzida involutiva é a união de duas retas passando pelo ponto associado ao plano suporte pela correspondência φ. Um resultado análogo é válido para qualquer curva plana involutiva em $\mathbb{P}^3$:

Proposição 2.25 *Seja $X \subset \mathbb{P}^3$ uma curva involutiva de grau d contida em um plano $H = Z(h)$. Então X consiste de um número finito de retas involutivas passando pelo ponto $\varphi(H)$.*

Prova. Escreva $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ como a união de suas componentes irredutíveis. Como X é uma curva plana involutiva, temos que X_i é uma variedade projetiva irredutível e involutiva contida no plano H, ou seja, seu cone afim $C(X_i) \subset \mathbb{A}^4$ é uma variedade afim homogênea, irredutível e involutiva contida no hiperplano homogêneo H, para todo $i = 1, ..., k$. Pelo Corolário 1.16 temos que cada $C(X_i)$ é um subespaço vetorial de dimensão 2. Logo, pela Proposição 2.6, X_i é uma reta, para todo $i = 1, ..., k$, pois $\mathbb{P}(C(X_i)) = X_i$. Como cada X_i é involutiva, segue da Proposição 2.19 que $\varphi(H) \in X_i$, para todo $i = 1, ..., k$. Portanto, $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ é a união de k retas passando pelo ponto $\varphi(H)$. ∎

Capítulo 3

Aplicações Enumerativas

3.1 Problema das Retas de Schubert Involutivo

Iniciamos esta seção enunciando o que iremos denominar de problema das retas de Schubert involutivo (PRSI).

PRSI: *Dadas 3 retas em posição geral em $\mathbb{P}^3$, determinar quantas retas involutivas intersectam as 3 retas dadas simultaneamente.*

Pensando na resolução do problema acima enunciado e outros problemas enumerativos que discutiremos mais adiante, a seguir nos concentramos na resolução dos problemas **P1**, **P2** e **P3**. Antes disso, porém, introduzimos as seguintes notações:

- $l_{p,q}$ denota a única reta em $\mathbb{P}^3$ passando pelos pontos distintos p e q.
- $\check{\mathbb{P}}^3$ denota o conjunto dos planos de $\mathbb{P}^3$.
- $\check{\mathbb{P}}^3_l$ denota o conjunto dos planos em $\mathbb{P}^3$ que contém a reta l.

P1 *Fixe $l \subset \mathbb{P}^3$ uma reta. Existe $m \subset \mathbb{P}^3$ reta involutiva tal que $m \cap l \neq \emptyset$?*
Seja $S^1 = \{m \in \Sigma : m \cap l \neq \emptyset\}$. Inicialmente, observamos que se π é um plano contendo a reta l, então qualquer reta $m \in \Omega_q(\pi)$, com $q = \varphi(\pi)$, é involutiva e intersecta l, ou seja, $\Omega_q(\pi) \subset S^1$. Desse modo, podemos afimar que existem infinitas

soluções para o problema **P1**. Mais ainda, o conjunto solução pode ser caracterizado da seguinte forma:

$$S^1 = \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}^3_l} \Omega_{\varphi(H)}(H).$$

P2 *Fixadas l_1 e l_2 retas distintas em $\mathbb{P}^3$, existe $m \subset \mathbb{P}^3$ reta involutiva tal que m encontra estas duas retas simultaneamente?*

Seja $S^2 = \{m \in \Sigma : m \cap l_i \neq \emptyset, \text{ para } i = 1, 2\}$. Temos duas opções a considerar, a saber: a) as duas retas são concorrentes; b) as duas retas não são concorrentes.

a) l_1 e l_2 determinam o plano π_{12}.

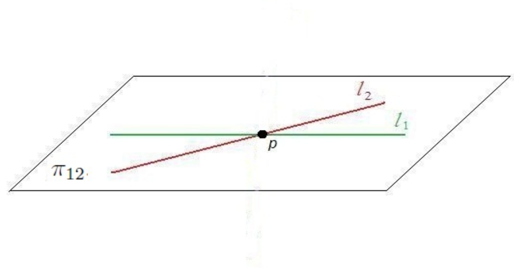

Figura 3.1: Retas determinando o plano π_{12}.

Sabemos que se $m \in \Omega_{q_{12}}(\pi_{12})$, onde $q_{12} = \varphi(\pi_{12})$, então $m \in S^2$. Com isso garantimos a existência de infinitas soluções para o problema **P2**.

Sejam p o ponto onde l_1 e l_2 se intersectam e $m \in S^2$.

Se $p \in m$ temos, por involutividade, que $m \subset \pi_p$, onde $\pi_p = \varphi^{-1}(p)$. Logo, $m \in \Omega_p(\pi_p)$.

Se $p \notin m$, então $m \cap l_1 = \{p_1\}$, $m \cap l_2 = \{p_2\} \subset \pi_{12}$, com $p_1 \neq p_2$. Logo, $m \subset \pi_{12}$. Como m é involutiva, devemos ter $q_{12} = \varphi(\pi_{12}) \in m$. Portanto, $m \in \Omega_{q_{12}}(\pi_{12})$.

Disso resulta que $S^2 = \Omega_p(\pi_p) \cup \Omega_{q_{12}}(\pi_{12})$.

b) l_1 e l_2 não são concorrentes.

Sejam p um ponto qualquer de l_2, π o único plano passando por p e contendo l_1 e $q = \varphi(\pi)$. Se $p = q$, então toda reta $m \in \Omega_p(\pi)$ é involutiva e intersecta l_2 no ponto p. Além disso, como $l_1 \subset \pi$ temos que $m \cap l_1 \neq \emptyset$, qualquer que seja $m \in \Omega_p(\pi)$. Logo, $\Omega_p(\pi) \subset S^2$, e isso nos garante que S^2 é um conjunto

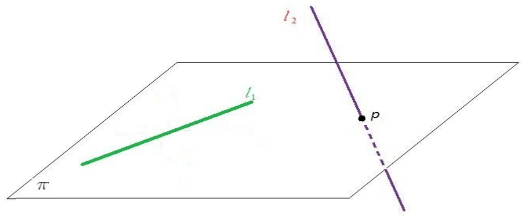

Figura 3.2: Retas não concorrentes.

infinito.

Caso p e q sejam distintos, $l_{p,q} \in \Omega_q(\pi)$ é uma reta involutiva contendo $p \in l_2$. Mais ainda, como l_1 e $l_{p,q}$ são distintas em π, uma vez que $l_{p,q} \cap l_2 = \{p\}$ e $l_1 \cap l_2 = \emptyset$, temos que $l_{p,q} \in S^2$. Sendo p arbitrário em l_2 obtemos, também nesse caso, infinitas soluções para o problema **P2**.

Estudando mais detalhadamente, observamos se l_1 ou l_2 é involutiva, então S^2 se identifica com uma reta. De fato, suponha que $l_1 \in \Sigma$.

Observe que se $p \in l_1$, então $l_1 \subset \pi_p = \varphi^{-1}(p)$, pois $l_1 \in \Sigma$. Assim, $l_2 \not\subset \pi_p$ e $p \notin l_2$. Portanto, $\pi_p \cap l_2 = \{q\}$, com $q \neq p$. Com isso, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{h}: & l_1 & \to & S^2 \\ & p & \mapsto & l_{p,q} \end{array},$$

onde $\{q\} = \pi_p \cap l_2$ com $\pi_p = \varphi^{-1}(p)$.

A seguir verificaremos que $l_{p,q} \in \Sigma$.

Tendo em consideração que $p, q \in \pi_p$, concluímos que $l_{p,q} \subset \pi_p$. Como $p \in l_{p,q} \subset \pi_p$ temos que $l_{p,q}$ é involutiva. Mais ainda, ela é a única reta em S^2 passando por p. Com efeito, se supomos a existência de uma reta $m \in S^2$ tal que $p \in m$, então, por involutividade, $m \subset \pi_p$. Logo, $m \cap l_2 \subset \pi_p \cap l_2 = \{q\}$. Disso e de $m \cap l_2 \neq \emptyset$, segue que $p, q \in m$, o que implica em $m = l_{p,q}$. Portanto, $\mathbf{h}$ está bem definida. Mostraremos que $\mathbf{h}$ é uma bijeção.

Seja $m \in S^2$. Assim, $m \cap l_1 = \{a\}$. Temos, por involutividade, que $a \in m \subset \pi_a = \varphi^{-1}(a)$ e, com isso, que $m \cap l_2 \subset \pi_a \cap l_2 = \{q\}$, donde $q \in m$, já que $m \cap l_2 \neq \emptyset$. Como $a \in m$ e $a \neq q$, uma vez que $l_1 \cap l_2 = \emptyset$, temos que $m = l_{a,q}$. Isso prova a sobrejetividade de $\mathbf{h}$.

Agora suponha que existam $p_1, p_2 \in l_1$ distintos tais que $\mathbf{h}(p_1) = \mathbf{h}(p_2)$. Assim, $l_{p_1,q_1} \subset H_{p_1} \cap H_{p_2} = l_1$, pois $\mathbf{h}(p_1) = l_{p_1,q_1} \subset H_{p_1}$ e $\mathbf{h}(p_2) = l_{p_2,q_2} \subset H_{p_2}$. Disso, temos que $q_1 \in l_1$, o que é um absurdo, pois $\{q_1\} = l_2 \cap H_{p_1} \subset l_2$ e $l_1 \cap l_2 = \emptyset$. Logo, $\mathbf{h}$ é injetora.

Portanto, S^2 pode ser identificado com l_1.

Por outro lado, se l_1 e l_2 não são involutivas, considere o subconjunto fechado de l_1

$$\Lambda = \{p \in l_1 : l_2 \subset \pi_p\}.$$

Uma vez que l_1 se identifica com $\mathbb{P}^1$, temos as seguintes possibilidades para Λ: $\emptyset$, l_1 ou $\{p_1, ..., p_k\} \subset l_1$.

Note que $l_1 \not\subset \pi_p$, pois $p \in l_1$ e $l_1 \notin \Sigma$.

- $\Lambda = \emptyset$ significa que $l_2 \not\subset \pi_p$ qualquer que seja $p \in l_1$. A figura seguinte ilustra esse caso:

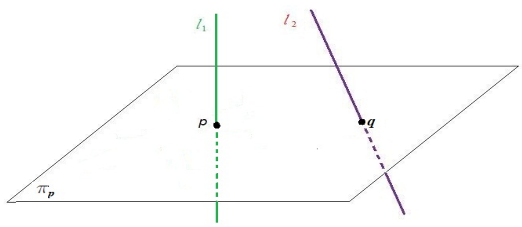

Figura 3.3: $\Lambda = \emptyset$

  Fixe $p \in l_1$. Como $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ temos que $p \notin l_2$. Logo, $l_2 \cap \pi_p = \{q\}$, com $p \neq q$. assim, $l_{p,q} \in S^2$, uma vez que $p \in l_{p,q} \subset \pi_p$. Com isso garantimos que S^2 é um conjunto infinito, desde que p percorre l_1.

  Observe que se $m \in S^2$, então $m \cap l_i = a_i$, $i = 1, 2$ com $a_1 \neq a_2$. Assim, $a_1 \in m \subset \pi_{a_1} = \varphi^{-1}(a_1)$. Logo, $\{a_2\} = m \cap l_2 \subset \pi_{a_1} \cap l_2$. Como $l_2 \not\subset \pi_{a_1}$ temos que $\{a_2\} = \pi_{a_1} \cap l_2$. Portanto, $m = l_{a_1,a_2}$, com $a_1 \in l_1$ e $\{a_2\} = \pi_{a_1} \cap l_2$.

  Portanto, $S^2 = \{l_{p,q} : p \in l_1 \text{ e } \{q\} = l_2 \cap \pi_p\}$.

- $\Lambda = l_1$ significa que, para todo $p \in l_1$, tem-se $l_2 \subset \pi_p$, conforme figura a seguir:

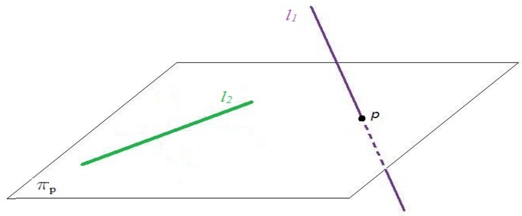

Figura 3.4: $\Lambda = l_1$

Fixado $p \in l_1$ temos $l_1 \not\subset \pi_p$ e $p \notin l_2$, pois $l_2 \subset \pi_p$ e l_1 e l_2 não são involutivas.

Sabemos que se $p \in m \subset \pi_p$, então $m \in S^2$, ou seja, $\Omega_p(\pi_p) \subset S^2$. Assim, temos infinitas soluções.

Note que se $m \in S^2$, então $m \cap l_1 = \{a_1\}$ e, por involutividade, $m \subset \pi_{a_1}$, ou seja, $m \in \Omega_{a_1}(\pi_{a_1})$.

Logo, $S^2 = \bigcup_{p \in l_1} \Omega_p(\pi_p)$.

- $\Lambda = \{p_1, ..., p_k\} \subset l_1$

  Temos $l_2 \subset \pi_{p_i}$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, e, em total analogia com o item anterior, concluímos que $\Omega_{p_i}(\pi_{p_i}) \subset S^2$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$, o que nos garante que S^2 é um conjunto infinito.

P3 *Fixadas l_1, l_2 e l_3 retas duas a duas distintas em $\mathbb{P}^3$. Existe $m \subset \mathbb{P}^3$ reta involutiva tal que m encontra estas três retas simultaneamente?*

Seja $S^3 = \{m \in \Sigma : m \cap l_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3\}\}$.

1. Se as retas são concorrentes, ou seja, se existir $p \in l_1 \cap l_2 \cap l_3$ temos dois casos a considerar, a saber: a) as três retas são coplanares; b) as três retas não são coplanares.

   a) l_1, l_2 e l_3 estão contidas no plano π.

   Inicialmente, observamos que se $m \in \Omega_p(\pi_p)$, com $\pi_p = \varphi^{-1}(p)$, então $m \in S^3$. Agora, seja $m \in S^3 \setminus \Omega_p(\pi_p)$. Temos duas possibilidades: $p \notin m$ ou $m \not\subset \pi_p$.

   (i) Se $p \notin m$, então m intersecta l_1 e l_2 em pontos diferentes de

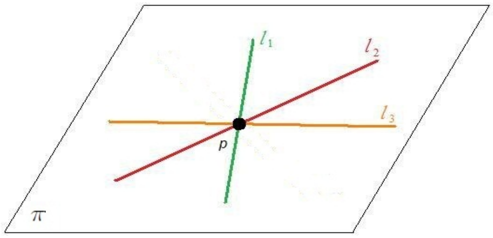

Figura 3.5: Retas contidas no plano π passando pelo ponto p.

π, o que implica que $m \subset \pi$. Como m é involutiva temos que $m \in \Omega(\pi) \cap \Sigma = \Omega_q(\pi)$, com $q = \varphi(\pi)$.

(ii) Se $m \not\subset \pi_p$, então, por involutividade, $p \notin m$, o que nos leva à mesma conclusão do item acima.

Por conseguinte, $S^3 = \Omega_p(\pi_p) \cup \Omega_q(\pi)$.

b) l_1, l_2 e l_3 não são coplanares.

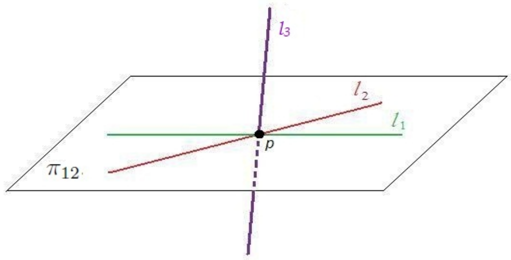

Figura 3.6: Retas não coplanares passando pelo ponto p.

É sabido que $\Omega_p(\pi_p) \subset S^3$.

Seja π_{12} o plano determinado pelas retas l_1 e l_2.

Suponha que existe $m \in S^3$ tal que $p \notin m$, ou seja, m intersecta l_1 e l_2 em dois pontos distintos de π_{12} e, consequentemente, $m \subset \pi_{12}$. Assim, $m \cap l_3 \subset \pi_{12} \cap l_3 = \{p\}$. Desde que $m \in S^3$ temos $m \cap l_3 = \{p\}$, o que é absurdo, pois $p \notin m$. Logo, $S^3 \subset \Omega_p(\pi_p)$ e, portanto, $S^3 = \Omega_p(\pi_p)$.

2. As três retas estão contidas num plano π e não são concorrentes.

Sabemos que se $m \in \Omega(\pi) \cap \Sigma = \Omega_q(\pi)$, com $q = \varphi(\pi)$, então $m \in S^3$. Agora suponha que $m \in S^3$ é tal que $m \not\subset \pi$. Tomando $\{p\} = m \cap \pi$, devemos ter

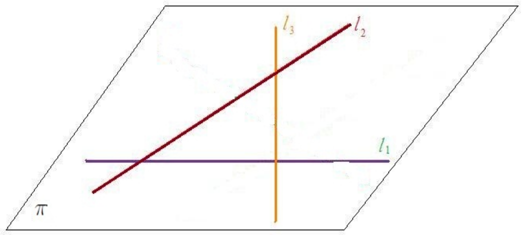

Figura 3.7: Retas coplanares e não concorrentes.

$m \cap l_i \subset m \cap \pi = \{p\}$, para $i = 1, 2, 3$. Como $m \cap l_i \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, 3$, devemos ter $p \in l_1 \cap l_2 \cap l_3$, o que contradiz o fato de que as três retas não são concorrentes.

Portanto, $S^3 = \Omega_q(\pi)$, com $q = \varphi(\pi)$.

3. As três retas não são concorrentes nem coplanares.

   Neste caso podemos considerar as duas situações seguintes:

   (i) Suponhamos que duas das três retas, digamos l_1e l_2, se intersectam num ponto p. Sejam π_{12} o plano determinado por l_1 e l_2, e $\{q\} = \pi_{12} \cap l_3$.

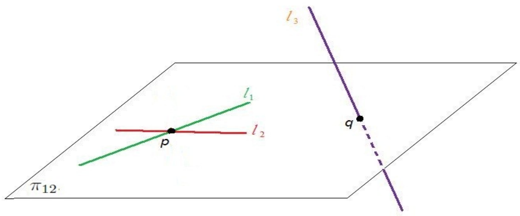

Figura 3.8: Retas não coplanares e não concorrentes: caso (i)

Denote por $\langle p, l_3 \rangle$ o único plano passando por p e contendo l_3. Afirmamos que $S^3 = (\Omega_q(\pi_{12}) \cap \Sigma) \cup (\Omega_p(\langle p, l_3 \rangle) \cap \Sigma)$.

Com efeito, seja $m \in S^3$. Se $m \subset \pi_{12}$, então $l_3 \cap m \subset l_3 \cap \pi_{12} = \{q\}$, donde $q \in m$, uma vez que $l_3 \cap m \neq \emptyset$. Logo, $m \in \Omega_q(\pi_{12}) \cap \Sigma$. Se $m \not\subset \pi_{12}$, então $p \in m$, pois caso contrário m intersectaria l_1 e l_2 em pontos distintos de π_{12} e, consequentemente, teríamos $m \subset \pi_{12}$. Além disso, se $\{r\} = l_3 \cap m$, então $p, r \in m$ e $p, r \in \langle p, l_3 \rangle$. Logo, $m \subset \langle p, l_3 \rangle$ e, portanto, $m \in \Omega_p(\langle p, l_3 \rangle) \cap \Sigma$. Isso mostra o que queríamos.

Sabemos que $\Omega_q(\pi_{12}) \cap \Sigma = \{l_{q,q_1}\}$, se $q_1 = \varphi(\pi_{12}) \neq q$, e que $\Omega_p(\langle p, l_3 \rangle) \cap \Sigma = \{l_{p,p_1}\}$, se $p_1 = \varphi(\langle p, l_3 \rangle) \neq p$. Sob tais condições obtemos, para esse caso de **P3**, uma ou duas soluções. Em condições contrárias, ou seja, se $p_1 = p$ ou $q_1 = q$, S^3 é um conjunto infinito.

(ii) As três retas são disjuntas duas a duas.

Afim de determinar as soluções para esse caso utilizaremos os resultados subsequentes.

Proposição 3.1 *Sejam l_1, l_2 e l_3 retas em $\mathbb{P}^3$ tais que $l_i \cap l_j = \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq 3$. Então existe uma superfície quádrica não singular Q em $\mathbb{P}^3$ contendo l_1, l_2 e l_3.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [9] páginas 32 a 33.

Proposição 3.2 *Seja Q uma superfície quádrica não singular em $\mathbb{P}^3$. Então existem duas famílias de retas $\mathcal{L} = \{L_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$ e $\mathcal{M} = \{M_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$ em Q parametrizadas por $\mathbb{P}^1$ (isto é, estão em bijeção com $\mathbb{P}^1$) tal que*

(a) $L_p \cap L_q = \emptyset$ e $M_p \cap M_q = \emptyset$, para todos L_p, $L_q \in \mathcal{L}$, M_p, $M_q \in \mathcal{M}$ e $p \neq q \in \mathbb{P}^1$.

(b) $L_p \cap M_q \neq \emptyset$, para todo $L_p \in \mathcal{L}$, $M_q \in \mathcal{M}$ e p, $q \in \mathbb{P}^1$.

(c) Se l é uma reta contida em Q, então $l \in \mathcal{L}$ ou $l \in \mathcal{M}$.

(d) Dado $x \in Q$, existem únicas retas $L_{p(x)} \in \mathcal{L}$ e $M_{q(x)} \in \mathcal{M}$ tais que $\{x\} = L_{p(x)} \cap M_{q(x)}$.

A demonstração da Proposição 3.2 pode ser encontrada em [10] páginas 66 a 68.

Observação 3.3 *As famílias $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ se identificam com cônicas situadas em planos disjuntos e complementares ortogonais da Quádrica de Plücker $\mathcal{Q}$. Mais precisamente, $\widetilde{\omega}(\mathcal{L}) = \Pi_1 \cap \mathcal{Q}$ e $\widetilde{\omega}(\mathcal{M}) = \Pi_2 \cap \mathcal{Q}$, onde $\Pi_1 = Z(x_1 + y_3, x_2 - y_2, x_3 + y_1)$ e $\Pi_2 = Z(x_1 - y_3, x_2 + y_2, x_3 - y_1)$. Para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar [9] páginas 35 a*

37.

Assim,

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{M}) = \Pi_2 \cap \mathcal{Q} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{Q},$$

onde $\mathcal{H} = Z(x_2 + y_2)$, *ou seja,* $\widetilde{\omega}(\mathcal{M}) \subset \widetilde{\omega}(\Sigma)$. *Como* $\widetilde{\omega}$ *é injetiva, concluímos que* $\mathcal{M} \subset \Sigma$.

Por outro lado,

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{L} \cap \Sigma) = \widetilde{\omega}(\mathcal{L}) \cap \widetilde{\omega}(\Sigma) = \Pi_1 \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{Q} =$$
$$Z(x_1 + y_3, x_2 - y_2, x_3 + y_1, x_2 + y_2, x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1).$$

Desse modo, se $p \in \widetilde{\omega}(\mathcal{L} \cap \Sigma)$, *então* $p = [-i : 0 : 1 : -1 : 0 : i]$ *ou* $p = [i : 0 : 1 : -1 : 0 : -i]$, *ou seja,* $\widetilde{\omega}(\mathcal{L} \cap \Sigma)$ *consiste de exatamente dois pontos. Da injetividade de* $\widetilde{\omega}$, *segue que existem duas retas involutivas na família* $\mathcal{L}$.

Note que $[-i : 0 : 1 : -1 : 0 : i] = \omega([(1, 0, i, 0), (0, -i, 0, 1)]) = \widetilde{\omega}(L_1)$, *com* $L_1 = Z(x_2 + iy_2, y_1 - ix_1)$, *e* $[i : 0 : 1 : -1 : 0 : i] = \omega([(1, 0, -i, 0), (0, i, 0, 1)]) = \widetilde{\omega}(L_2)$, *com* $L_2 = Z(x_2 - iy_2, y_1 + ix_1)$.

Será útil também o seguinte fato, cuja demonstração pode ser encontrada em [9], página 8.

Fato 3.4 *Seja* $F \in \mathbf{S}_d$ *não nulo* ($d \geq 1$) *e* $l \subset \mathbb{P}^3$ *uma reta. Então* $Z(F) \cap l \neq \emptyset$. *Além disso ou* $l \subset Z(F)$ *ou* $Z(F) \cap l$ *consiste de no máximo* d *pontos.*

Retomando o problema **P3**, segue da Proposição 3.1 que existe uma superfície quádrica não singular $Q \subset \mathbb{P}^3$ contendo l_1, l_2 e l_3. Assim, pela Proposição 3.2, devemos ter $l_1, l_2, l_3 \subset \mathcal{L}$ ou $l_1, l_2, l_3 \subset \mathcal{M}$.

Se $l_1, l_2, l_3 \subset \mathcal{L}$, então, pelo fato 3.4, toda solução $m \in S^3$ está contida em Q, pois tomando $\{p_i\} = l_i \cap m$, temos $\{p_1, p_2, p_3\} \subset m \cap Q$. Assim, segue proposição que $m \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M} \subset \Sigma$ obtemos infinitas soluções.

Se $l_1, l_2, l_3 \subset \mathcal{M}$, pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, conclúimos que toda solução $m \in S^3$ deve pertencer à família $\mathcal{L}$. Como

$l \in \Sigma$, concluímos que existem exatamente duas soluções, a saber L_1 e L_2 citados na observação 3.3.

Concluímos esta seção observando que Σ é um espaço de parâmetros para as retas involutivas em $\mathbb{P}^3$ e é uma variedade de dimensão 3. Assim, se exigimos que as retas involutivas intersectem $3(= dim\Sigma)$ retas em posição geral, temos um número finito de soluções. Das análises feitas no problema $\mathbb{P}^3$, vimos que sob condições geométricas adequadas, existem duas retas involutivas intersectando as 3 retas dadas. Desse modo, existem finitas soluções para o problema PRSI, a saber, duas.

3.2 Cônicas Involutivas Interceptando 5 Retas de $\mathbb{P}^3$

Segue-se da Proposição 2.24 que uma cônica reduzida involutiva $C \subset \mathbb{P}^3$ é a união de duas retas involutivas contidas no plano suporte H de C e passando por $\varphi(H)$. Assim, as cônicas reduzidas involutivas em $\mathbb{P}^3$ são parametrizadas pela família

$$\Gamma = \left\{(\pi, l_1, l_2) : l_i \in \Omega_{\varphi(\pi)}(\pi), \text{ para } i = 1, 2, \text{ e } l_1 \neq l_2\right\} \subset \check{\mathbb{P}}^3 \times G(2, \mathbb{C}^4) \times G(2, \mathbb{C}^4).$$

Considere a projeção ρ_1 sobre a primeira coordenada e fixe $\pi_0 \in \check{\mathbb{P}}^3$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_1^{-1}(\pi_0) &\equiv \left\{(l_1, l_2) : l_i \in \Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0), \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } l_1 \neq l_2\right\} \\ &= \Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0) \times \Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0) \setminus \Delta \end{aligned},$$

onde Δ é a diagonal de $\Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0) \times \Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0)$.

Observe que $\Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0) \times \Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0)$ é um conjunto irredutível. Além disso, $\Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0)$ se identifica com uma reta na quádrica de Plücker. Assim, $dim(\Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0) \times \Omega_{\varphi(\pi_0)}(\pi_0)) = 1 + 1 = 2$.

Portanto $dim\rho^{-1}(\pi_0) = 2$, para todo $\pi_0 \in \check{\mathbb{P}}^3$.

Assim, segue do teorema da dimensão da fibra (cf. pág. 60 [11]) que $dim\Gamma = dim\ \check{\mathbb{P}}^3 + dim\ \rho_1^{-1}(\pi_0) = 3 + 2 = 5$.

Isso nos garante que, sob condições geométricas adequadas, o número de cônicas reduzidas involutivas em $\mathbb{P}^3$ que intersectam 5 retas de $\mathbb{P}^3$ dadas em posição geral será finito.

Considere $\mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{P}^3 : C$ *é uma cônica reduzida involutiva*$\}$. *Dadas cinco retas distintas, digamos* l_1, l_2, l_3, l_4 *e* l_5, *em* $\mathbb{P}^3$ *queremos determinar*

$\# \{C \in \mathcal{C} : C \cap l_i \neq \emptyset \ para \ i = 1, 2, 3, 4, 5\}.$

Já vimos que C é uma cônica reduzida involutiva se, e somente se, $C = m_1 \cup m_2$ onde m_1 e m_2 são retas involutivas distintas no plano suporte de C. Assim, a condição $C \cap l_i \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, implica em $m_1 \cap l_i \neq \emptyset$ ou $m_2 \cap l_i \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Desse modo, a existência de uma cônica reduzida involutiva intersectando as 5 retas dadas implica na ocorrência de um dos seguintes casos:

caso 1 Existe $m \in \Sigma$ tal que $m \cap l_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

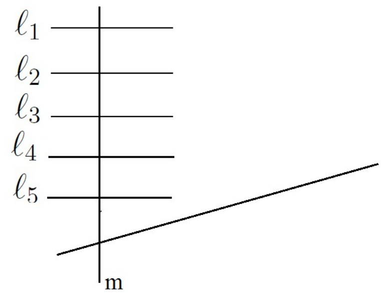

Figura 3.9: Existe m uma reta involutiva intersectando as 5 retas

Nesse caso, para cada reta involutiva $l \neq m$ intersectando m, temos uma cônica reduzida involutiva $m \cup l$ intersectando as 5 retas dadas. Considere $S^1 = \bigcup \Omega_{\varphi(H)}(H)$, com H percorrendo $\check{\mathbb{P}}^3_m$. Do que foi visto no problema **P1**, cada reta $l \in S^1$ é involutiva e intersecta m. Deste modo, $\{m \cup l\}_{l \in S^1}$ é um conjunto infinito de cônicas intersectando as 5 retas dadas.

Logo, para esse caso, $\{C \in \mathcal{C} : C \cap l_i \neq \emptyset, \ \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ é um conjunto infinito.

caso 2 Existe $m \in \Sigma$ tal que $m \cap l_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, e $m \cap l_5 = \emptyset$.

Note que se l é uma reta involutiva intersectando m e l_5, então $m \cup l$ é uma cônica reduzida involutiva intersectando as 5 retas. Do que foi visto na resolução do problema **P2**, o conjunto S^2 de retas involutivas intersectando m e l_5, pode ser identificado com m, uma vez que m é involutiva, ou seja, S^2 é um conjunto infinito. Assim, $\{m \cup l\}_{l \in S^2}$ é um conjunto infinito de

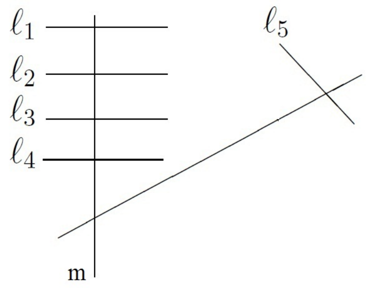

Figura 3.10: Existe m uma reta involutiva intersectando 4 dentre as 5 retas

cônicas intersectando l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5. Logo, também nesse caso, temos que $\{C \in \mathcal{C} : C \cap l_i \neq \emptyset, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ é um conjunto infinito.

caso 3 Existe $m \in \Sigma$ tal que $m \cap l_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ e $m \cap l_j = \emptyset$, para $j = 4, 5$.

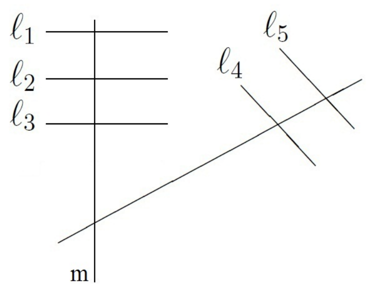

Figura 3.11: Existe m uma reta involutiva intersectando 3 dentre as 5 retas

Observe que l é uma reta involutiva intersectando m, l_4 e l_5 se, e somente se, $m \cup l$ é uma cônica reduzida involutiva intersectando as 5 retas. Do que foi visto no problemas **P3**, concluímos que a depender da posição das retas m, l_4 e l_5 podemos ter finitas (no máximo duas) ou infinitas retas intersectando-as. Como $m \cap l_j = \emptyset$, para $j = 4, 5$, temos as seguintes possibilidades:

3.1 l_4 e l_5 se intersectam num ponto p.

Seja π_{45} o plano determinado por l_4 e l_5 e $\{q\} = \pi_{45} \cap m$. Considere $\langle p, m \rangle$ o único plano passando por p contendo a reta m. Em total analogia com o caso **3**(**i**) do problema **P3**, concluímos que o conjunto das retas involutivas intersectando m, l_4 e l_5 é $S^3 = (\Omega_q(\pi_{45}) \cap \Sigma) \cup (\Omega_p(\langle p, m \rangle) \cap \Sigma)$. Assim, $\{m \cup l\}_{l \in S^3}$ é um conjunto de cônicas reduzidas involutivas intersectando as 5 retas.

Sabemos da proposição 2.21 que $\Omega_q(\pi_{45}) \cap \Sigma = \{l_{q,q_{45}}\}$, se $q_{45} = \varphi(\pi_{45}) \neq q$, e que $\Omega_p(\langle p, l_3 \rangle) \cap \Sigma = \{l_{p,p_1}\}$, se $p_1 = \varphi(\langle p, m \rangle) \neq p$. Sob tais condições S^3 possui um ou dois elementos e, desse modo, temos uma ou duas cônicas reduzidas involutivas intersectando as 5 retas dadas, a saber $m \cup l_{q,q_{45}}$ e $m \cup l_{p,p_1}$. Do contrário, S^3 é um conjunto infinito e, portanto, $\{C \in \mathcal{C} : C \cap l_i \neq \emptyset, \text{ para } i = 1,2,3,4,5\} = \{m \cup l\}_{l \in S^3}$ é um conjunto infinito.

3.2 l_4 e l_5 não se intersectam

Neste caso m, l_4 e l_5 não se intersectam. Pela proposição 3.1 existe uma quádrica Q contendo tais retas. Da proposição 3 temos que $m, l_4, l_5 \in \mathcal{M}$ ou $m, l_4, l_5 \in \mathcal{L}$. Usando os argumentos utilizados no caso **3**(**ii**) do problema **P3**, concluímos que no primeiro caso existem exatamente duas retas involutivas intersectando m, l_4 e l_5, a saber L_1 e L_2, e no segundo caso, que toda reta na família $\mathcal{M}$ é involutiva e intersecta as três retas dadas.

Logo, se $m, l_4, l_5 \in \mathcal{M}$ temos exatamente duas cônicas reduzidas involutivas intersectando as retas l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5, a saber $m \cup L_1$ e $m \cup L_2$. Se $m, l_4, l_5 \in \mathcal{L}$ então $\{C \in \mathcal{C} : C \cap l_i \neq \emptyset \text{ para } i = 1,2,3,4,5\} = \{m \cup l\}_{l \in \mathcal{M}}$ é um conjunto infinito.

Observe que dadas 5 retas em posição geral, podemos escolher 3 retas de 10 maneiras diferentes. Fixadas três retas, digamos $l_1, l_2,$ e l_3, existem 2 retas involutivas, digamos L_1^{123}, L_2^{123}, encontrando-as. Tomando agora L_1^{123}, l_4, l_5 existem 2 retas, digamos M_1^{45}, M_2^{45}, involutivas encontrando-as. Deste modo,encontramos $40 = 2 \cdot 2 \cdot 10$ cônicas involutivas intersectando as 5 retas dadas.

3.3 Cúbicas Reversas

A seguir definimos e estudamos o que vem a ser o protótipo de uma cúbica reversa, que denominaremos de cúbica reversa padrão.

Seja $C_0 = Z(f_0, f_1, f_2) \subset \mathbb{P}^3$, onde $f_0 = x_1y_1 - x_2^2, f_1 = x_1y_2 - x_2y_1$ e

$f_2 = x_2y_2 - y_1^2$, e considere o mapa

$$\begin{array}{rccc} \upsilon: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^3 \\ & [u:v] & \mapsto & [u^3 : u^2v : uv^2 : v^3] \end{array}.$$

Note que todo $p \in \upsilon(\mathbb{P}^1)$ também pertence a C_0. Afirmamos que $\upsilon(\mathbb{P}^1) = C_0$.

Com efeito, se $p = [a_1 : a_2 : b_1 : b_2] \in C_0$, então $a_2^2 = a_1b_1$, $a_1b_2 = a_2b_1$ e $a_2b_2 = b_1^2$. Assim, se $a_1 = 0$, então $a_2 = 0 = b_1$, o que nos dá $b_2 \neq 0$. Nesse caso, $p \in \upsilon(\mathbb{P}^1)$, pois $p = [0:0:0:1] = \upsilon([0:1])$.
Se $a_1 \neq 0$, podemos supor $p = [1 : a_2 : b_1 : b_2]$. Assim, teremos $b_1 = a_2^2$, $b_2 = a_2b_1 = a_2^3$. Logo, $p = [1 : a_2 : a_2^2 : a_2^3] = \upsilon([1 : a_2]) \in \upsilon(\mathbb{P}^1)$. Portanto, $C_0 = \upsilon(\mathbb{P}^1)$.

Observação 3.5 *Isso mostra que $\upsilon(\mathbb{P}^1)$ é uma variedade projetiva. Dita variedade é conhecida como variedade de veronese de grau 2.*

A seguir verificaremos algumas propriedades da cúbica reversa padrão:

Propriedade 1 *C_0 é uma variedade projetiva irredutível.*

Basta notar que $\upsilon : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ é um morfismo de variedades. Desse modo, $\upsilon(\mathbb{P}^1) = C_0$ é uma variedade projetiva irredutível, uma vez que $\mathbb{P}^1$ o é.

Denote por $X = Z(f_0, f_1, f_2) \subset \mathbb{A}^4$ o cone afim de C_0.

Propriedade 2 *C_0 é uma curva não degenerada.*

Encontremos a dimensão de X. Como C_0 é irredutível temos que X é irredutível. Logo, $dimX = min\{dimT_pX : p \in X\}$, onde $T_pX = \bigcap_{i=0}^2 W_i$, com $W_i = N(d_pf_i)$. Observe que se $w = (a,b,c,d)$ e $p = (u^3, u^2v, uv^2, v^3) \in X$, então $d_pf_0(w) = uv^2a - 2u^2vb + u^3c$, $d_pf_1(w) = v^3a - uv^2b - u^2vc + u^3d$ e $d_pf_2(w) = v^3b - 2uv^2c + u^2vd$. Se $u = 0$, então $p = (0,0,0,1)$ e $d_pf_0(w) = 0$, $d_pf_1(w) = v^3a$ e $d_pf_2(w) = v^3b$, ou seja, $W_0 = \mathbb{C}^4$, $W_1 = [e_2, e_3, e_4]$ e $W_2 = [e_1, e_3, e_4]$. Logo, $T_pX = [e_3, e_4]$ tem dimensão 2. Se $u = 1$, então $p = (1, v, v^2, v^3)$ e $d_pf_0(w) = v^2a - 2vb + c$, $d_pf_1(w) = v^3a - v^2b - vc + d$ e $d_pf_2(w) = v^3b - 2v^2c + vd$, de modo que $d_pf_2 = -v^2d_pf_0 + vd_pf_1$. Logo, $dim[d_pf_0, d_pf_1, d_pf_2] = 2$ e, pelo Fato B.37, $dim\bigcap_{i=0}^2 W_i = 4 - 2 = 2$, ou seja, $dimT_pX = 2$. No caso em que $u \neq 0$ é qualquer, podemos escrever $d_pf_0(w) = u^3(\frac{v^2}{u^2}a - 2\frac{v}{u}b + c)$, $d_pf_1(w) = u^3(\frac{v^3}{u^3}a - \frac{v^2}{u^2}b - \frac{v}{u}c + d)$ e $d_pf_2(w) = u_3(\frac{v^3}{u^3}b - 2\frac{v^2}{u^2}c + \frac{v}{u}d)$. Como no caso anterior temos $dim[d_pf_0, d_pf_1, d_pf_2] = 2$ e portanto $dimT_pX = dim\bigcap_{i=0}^{2} W_i = 2$.

Disto concluímos que $dimX = 2$ e, por conseguinte, que $dimC_0 = dimX - 1 = 1$.

Agora suponha que $C_0 \subset \pi = Z(a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2) \subset \mathbb{P}^3$. Então, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, $a_1u^3 + a_2u^2v + b_1uv^2 + b_2v^3 = 0$. Tomando $p_1 = [0 : 1]$ e $p_2 = [1 : 0]$ obtemos, respectivamente, $b_2 = 0$ e $a_1 = 0$. Donde $\pi = Z(a_2x_2 + b_1y_1)$. Se tomarmos $p = [1 : 1]$ obtemos $a_2 = -b_1$ e assim, podemos admitir que $\pi = Z(x_2 - y_1)$. Sendo assim, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, temos $u^2v - uv^2 = 0$. Em particular, para $p = [1 : 2]$, $2 - 4 = 0$, o que é um absurdo. Logo, C_0 não está contida em nenhum plano de $\mathbb{P}^3$, isto é, C_0 é não degenerada.

Propriedade 3 *C_0 não é involutiva.*

Lembremos que C_0 é involutiva se, e somente se, X é involutiva. Sabemos que $f_0, f_2 \in \Im(X)$. Temos que $\{f_0, f_2\} = -2(y_1^2 + x_2^2) \notin \sqrt{\langle f_0, f_1, f_2\rangle}$, pois, caso contrário, teríamos $(u^2v)^2 + (uv^2)^2 = 0$, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$, e isso nos dá, para $[1 : 2] \in \mathbb{P}^1$, o absurdo $4 + 16 = 0$. Logo, $X \subset \mathbb{A}^4$ não é involutiva e, portanto, C_0 não é involutiva.

Nosso próximo passo é mostrar C_0 não é a interseção de quaisquer duas quádricas.

Propriedade 4 *Sejam Q_a e Q_b duas superfícies quádricas contendo C_0. Q_a e Q_b se intersectarão na união de C_0 com uma reta.*

Sabemos que $C_0 = Z(f_0, f_1, f_2)$ e verifica-se que $\Im(C_0) = \langle f_0, f_1, f_2\rangle$. Escolha Q_a e Q_b duas superfícies quádricas contendo C_0. Então $Q_a = Z(a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2)$ e $Q_b = Z(b_0f_0 + b_1f_1 + b_2f_2)$ com $[a_0 : a_1 : a_2]$, $[b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^2$. Considere $l = Z(L, M)$, com $L = (-a_1b_0 + b_1a_0)x_1 - (a_2b_0 - b_2a_0)x_2 + (-a_2b_1 + b_2a_1)y_1$ e $M = (-a_1b_0 + b_1a_0)x_2 - (a_2b_0 - b_2a_0)y_1 + (-a_2b_1 + b_2a_1)y_2$. Mostraremos que $l \subset Q_a \cap Q_b$. De início, mostraremos que $f_a = a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 \in \langle L, M\rangle$.

Se $-a_1b_0 + b_1a_0 \neq 0$, então $f = J \cdot L + K \cdot M$, com $J = a_0y_1 + a_1y_2$ e $K = a_0x_2 + a_1y_1$

não nulos, pois $-a_1b_0 + b_1a_0 \neq 0$. Se $-a_1b_0 + b_1a_0 = 0$ e $-a_2b_0 + b_2a_0 \neq 0$, então $f_a = J \cdot L + K \cdot M$, com $J = -a_0x_2 + a_2y_2$ e $K = a_0x_1 - a_2y_1$ não nulos, pois $-a_2b_0 + b_2a_0 \neq 0$.

Vejamos o caso em que $-a_1b_0 + b_1a_0 = 0 = -a_2b_0 + b_2a_0$ e $b_2a_1 - a_2b_1 \neq 0$. Observe que, nesse caso, a_1 e a_2 não podem ser nulos ao mesmo tempo e que

$$\begin{array}{c} -a_1b_0 + b_1a_0 = 0 \\ -a_2b_0 + b_2a_0 \end{array} \Rightarrow a_0(b_2a_1 - a_2b_1) = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Assim, temos $f_a = J \cdot L + K \cdot M$, com $J = a_1x_2 + a_2y_1$ e $K = a_1x_1 + a_2x_2$ não nulos, pois $-a_2b_0 + b_2a_0 \neq 0$. Disto concluímos que $l \subset Q_a$.

Da mesma forma $f_b = b_0f_0 + b_1f_1 + b_2f_2 \in \langle L, M\rangle$, ou seja, $l \subset Q_b$ e, portanto, $C_0 \cup l \subset Q_a \cap Q_b$.

Agora observe que:

- $f_0L = (b_1x_1 + b_2x_2)f_a - (a_1x_1 + a_2x_2)f_b$;
- $f_1L = -(b_0x_1 - b_2y_1)f_a + (a_0x_1 - a_2y_1)f_b$;
- $f_2L = -(b_0x_2 + b_1y_1)f_a + (a_0x_2 + a_1y_1)f_b$;
- $f_0M = (b_1x_2 + b_2y_1)f_a - (a_1x_2 + a_2y_1)f_b$;
- $f_1M = -(b_0x_2 - b_2y_2)f_a + (a_0x_2 - a_2y_2)f_b$;
- $f_2M = -(b_0y_1 + b_1y_2)f_a + (a_0y_1 + a_1y_2)f_b$;

Assim,

$$\Im(C_0 \cup l) = \Im(C_0)\Im(l) \subset \langle f_a, f_b\rangle \subset \sqrt{\langle f_a, f_b\rangle} = \Im(Q_a \cap Q_b).$$

Logo, $Q_a \cap Q_b \subset C_0 \cup l$.

Definição 3.6 *Uma variedade projetiva $C \subset \mathbb{P}^3$ é denominada de cúbica reversa se C for projetivamente equivalente a C_0.*

Exemplo 3.7 *Sejam $L_1 = x_1$, $L_2 = x_1 + x_2$, $L_3 = x_1 + y_1$, $M_1 = x_2$, $M_2 = x_2 + y_1$ e $M_3 = y_1 + y_2$. A seguir verificaremos que $\chi_{[a:b]} = \{aL_1 + bM_1, aL_2 + bM_2, aL_3 + bM_3\}$ é L.I., para todo $[a : b] \in \mathbb{P}^1$. De fato, considere α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha(aL_1 + bM_1) + \beta(aL_2 + bM_2) + \gamma(aL_3 + bM_3) = 0$. Assim,*

$$\alpha(ax_1+bx_2)+\beta(a(x_1+x_2)+b(x_2+y_1))+\gamma(a(x_1+y_1)+b(y_1+y_2))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)a=0 \\ \alpha b+\beta(a+b)=0 \\ \beta b+\gamma(a+b)=0 \\ \gamma b=0 \end{cases}$$

Caso 1: $b=0$.

Nesse caso, como $a\neq 0$, *devemos ter* $a\gamma=0=a\beta=(\alpha+\beta+\gamma)$, *ou seja,* $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Caso 2: $b\neq 0$.

Nesse caso devemos ter $0=\gamma=\beta=\alpha$. *Assim, podemos definir um morfismo*

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^3 \\ & [a:b] & \to & P_{[a:b]} \end{array},$$

onde $P_{[a:b]}$ *é determinado pelos zeros das formas lineares em* $\chi_{[a:b]}$.

Observe que se supomos $b\neq 0$, *então*

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=0 \\ a(x_1+x_2)+b(x_2+y_1)=0 \\ a(x_1+y_1)+b(y_1+y_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2=-\frac{a}{b}x_1,\ y_1=\frac{a^2}{b^2}x_1 \text{ e } y_2=-\frac{ab^2+a^3+ba^2}{b^3}.$$

Assim, $P_{[a:b]}=[b^3:-ab^2:a^2b:-ab^2-a^3-a^2b]$.

Considere o isomorfismo linear $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ *dado por* $T(u_1,u_2,v_1,v_2)=(v_2,-v_1,u_2,-v_1-u_1-u_2)$. *Observe que* T *induz uma Mcp* $\mathbb{T}$ *tal que tal que* $\mathbb{T}(C_0)=\theta(\mathbb{P}^1)$. *Logo,* $\theta(\mathbb{P}^1)$ *é uma cúbica reversa.*

Além disso, verifica-se que se

$$D=\left\{p\in\mathbb{P}^3 : posto \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}(p)\leq 1\right\},$$

então $D=\theta(\mathbb{P}^1)$.

De fato, seja $p=\theta([a:b])\in\theta(\mathbb{P}^1)$. *Sabemos que* $\{p\}=Z(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3)$, *onde* $\Lambda_1=aL_1+bM_2$, $\Lambda_2=aL_2+bM_2$ *e* $\Lambda_3=aL_3+bM_3$. *Assim,* $L_2\Lambda_1-L_1\Lambda_2=b(M_1L_2-M_2L_1)$, $M_2\Lambda_1-M_1\Lambda_2=-a(M_1L_2-M_2L_1)$, $L_3\Lambda_1-L_1\Lambda_3=b(M_1L_3-M_3L_1)$, $M_3\Lambda_1-M_1\Lambda_3=-a(M_1L_3-M_3L_1)$, $L_3\Lambda_2-L_2\Lambda_3=b(M_2L_3-M_3L_2)$ *e* $M_3\Lambda_2-M_2\Lambda_3=-a(M_2L_3-M_3L_2)$ *se anulam em* p. *Como* $a\neq 0$ *ou* $b\neq 0$, *concluímos que os menores de ordem 2 da matriz*

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}(p)$$

são todos nulos, ou seja, a matriz acima tem posto menor ou igual a 1. Portanto $\theta(\mathbb{P}^1) \subset D$.

Agora, se $p = [a_1 : a_2 : b_1 : b_2] \in D$, *então*

$$\begin{cases} a_1b_1 - a_2^2 = 0 \\ a_1b_1 + a_1b_2 - a_1a_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1b_2 + a_2b_2 - a_1a_2 - b_1^2 = 0 \end{cases}$$

Como $\Im(C_0) = \langle f_0, f_1, f_2 \rangle$ *temos que* $\Im(\theta(\mathbb{P}^1)) = \langle g_0, g_1, g_2 \rangle$, *onde* $g_0 = f_0(T^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2))$, $g_1 = f_1(T^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2))$ *e* $g_2 = f_2(T^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2))$. *Assim,* $g_0 = f_0(-y_2 - y_1 + x_2, y_1, -x_2, x_1) = x_2y_2 + x_2y_1 - x_2^2 - y_1^2$, $g_1 = f_1(-y_2 - y_1 + x_2, y_1, -x_2, x_1) = -x_1y_2 - x_1y_1 + x_1x_2 + x_2y_1$ *e* $g_2 = f_2(-y_2 - y_1 + x_2, y_1, -x_2, x_1) = x_1y_1 - x_2^2$.

Logo, $g_0(p) = a_2b_2 + a_2b_1 - a_2^2 - b_1^2 = (a_1b_1 - a_2^2) + (a_1b_2 + a_2b_2 - a_1a_2 - b_1^2) - (a_1b_1 + a_1b_2 - a_1a_2 - a_2b_1)$, $g_1(p)$ *e* $g_2(p)$ *são nulos. Portanto,* $\langle g_0, g_1, g_2 \rangle \subset \Im(D)$, *ou seja,* $D \subset \theta(\mathbb{P}^1)$, *como queríamos.*

Assim, o exemplo acima é um reflexo de como podemos construir cúbicas reversas por meio de variedades determinantais. Mais precisamente verifica-se que:

Fato 3.8 *Sejam* L_1, L_2, L_3, M_1, M_2 *e* M_3 *formas lineares em* $\mathbf{S}$. *Então* $\{aL_1 + bM_1, aL_2 + bM_2, aL_3 + bM_3\}$ *é L.I., para todo* $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ *se, e somente se, o conjunto*

$$\left\{ p \in \mathbb{P}^3 : posto \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} (p) \leq 1 \right\}$$

define uma cúbica reversa em $\mathbb{P}^3$.

Fixada $l \subset \mathbb{P}^3$ uma reta denotaremos $S_2^l = \{f \in \mathbf{S}_2 : l \subset Z(f)\}$.

Lema 3.9 *Fixe a reta* $l_0 = Z(x_1, x_2) \subset \mathbb{P}^3$. *Existe um aberto não vazio* $U \subset \mathbb{P}(S_2^{l_0}) \times \mathbb{P}(S_2^{l_0})$ *tal que, para todo* $([F], [G]) \in U$, *verifica-se que* $Z(F) \cap Z(G) = l_0 \cup C$, *onde* C *é uma cúbica reversa.*

Prova. Sabemos que $S_2^{l_0}$ é um espaço vetorial de dimensão 7 sobre $\mathbb{C}$ tendo $\{x_1^2, x_1x_2, x_1y_1, x_1y_2, x_2^2, x_2y_1, x_2y_2\}$ por base. Assim, podemos considerar a seguinte identificação entre $\mathbb{P}(S_2^{l_0})$ e $\mathbb{P}^6$:

$$[F] \to [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 : \alpha_5 : \alpha_6],$$

se $F = \alpha_0 x_1^2 + \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 y_1 + \alpha_3 x_1 y_2 + \alpha_4 x_2^2 + \alpha_5 x_2 y_1 + \alpha_6 x_2 y_2$.
Seja $([F],[G]) \in \mathbb{P}(S_2^{l_0}) \times \mathbb{P}(S_2^{l_0})$. Assim, $F = x_1(a_0x_1 + a_1x_2 + a_2y_1 + a_3y_2) + x_2(b_1x_2 + b_2y_1 + b_3y_2)$ e $G = x_1(c_0x_1 + c_1x_2 + c_2y_1 + c_3y_2) + x_2(d_1x_2 + d_2y_1 + d_3y_2)$.
Logo, $([F],[G])$ se corresponde com o ponto $([a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : b_1 : b_2 : b_3], [c_0 : c_1 : c_2 : c_3 : d_1 : d_2 : d_3]) \in \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$. Chame $L_a = a_0x_1 + a_1x_2 + a_2y_1 + a_3y_2$, $L_b = b_1x_2 + b_2y_1 + b_3y_2$, $L_c = c_0x_1 + c_1x_2 + c_2y_1 + c_3y_2$ e $L_d = d_1x_2 + d_2y_1 + d_3y_2$ e considere a matriz de formas lineares

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & -L_b & -L_d \\ x_2 & L_a & L_c \end{bmatrix}.$$

Para cada $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$, seja $\chi_{[\alpha:\beta]} = \{\alpha x_1 + \beta x_2, -\alpha L_b + \beta L_a, -\alpha L_d + \beta L_c\}$. Suponha que exista $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ tal que $\chi_{[\alpha:\beta]}$ é L.D. Assim, o posto da matriz a seguir é menor ou igual a 2:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta a_0 & -\alpha b_1 + \beta a_1 & -\alpha b_2 + \beta a_2 & -\alpha b_3 + \beta a_3 \\ \beta c_0 & -\alpha d_1 + \beta c_1 & -\alpha d_2 + \beta c_2 & -\alpha d_3 + \beta c_3 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Isto nos diz que os determinantes dos menores de ordem 3 são nulos. Tomando, por exemplo, o menor formado pelas colunas 1, 3 e 4, temos $([F],[G]) \in Z(p_1(x,y))$, onde $p_1(x,y) = \alpha(\alpha^2 x_5y_6 - \alpha\beta x_5y_3 - \alpha\beta x_2y_6 + \beta^2 x_2y_3 - \alpha^2 x_6y_5 + \alpha\beta x_3y_5 + \alpha\beta x_6y_2 - \beta^2 x_3y_2) \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_6, y_0, ..., y_6]$ é bihomogêneo de grau 1 em x e em y.
Observamos com isso, que os quatro menores 3×3 da matriz acima dão origem a 4 polinômios $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$, $p_3(x,y)$ e $p_4(x,y)$ bihomogênos de grau 1 em x e em y e que o conjunto dos zeros destes polinômios definem um conjunto fechado em $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$. Assim,

$$\mathcal{F}_{[\alpha:\beta]} = \left\{([F],[G]) \in \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6 : \chi_{[\alpha:\beta]} \text{ é L.D. } \right\}$$

é um fechado em $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$.

Observe que, para $[F] = [0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0]$ e $[G] = [0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0]$, obtemos de 3.1 a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

que tem posto 3.

Logo, $\mathcal{F}_{[\alpha:\beta]}$ é um fechado próprio de $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$.

Agora considere $\widetilde{p_i}(u, v, x_0, ..., x_6, y_0, ..., y_6)$, $i = 1, ..., 4$, os polinômios originados pelos menores de ordem 3 da matriz

$$\begin{bmatrix} u & v & 0 & 0 \\ vx_0 & -ux_4 + vx_1 & -ux_5 + vx_2 & -ux_6 + vx_3 \\ vy_0 & -uy_4 + vy_1 & -uy_5 + vy_2 & -uy_6 + vy_3 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Temos que $Z = Z(\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{p_3}, \widetilde{p_4}) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$ é dado por

$$\left\{([\alpha : \beta], [F], [G]) : F = x_1L_a + x_2L_b,\ G = x_1L_c + x_2L_d \text{ e } \ \chi_{[\alpha:\beta]} \text{ é L.D.}\right\}.$$

Considere ρ_2 a projeção para $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$. Como ρ_2 é fechada, temos que $\widetilde{Z} = \rho_2(Z) = \left\{([F], [G]) : F = x_1L_a + x_2L_b,\ G = x_1L_c + x_2L_d \text{ e } \exists\ [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\ \chi_{[\alpha:\beta]} \text{ é L.D.}\right\}$ é um fechado em $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$. Do que foi visto anteriormente, $\widetilde{Z}$ é um fechado próprio. Assim, $U = \widetilde{Z}^c$ é um aberto não vazio de $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$. Observe que U é dado por

$$\left\{([F], [G]) : F = x_1L_a + x_2L_b,\ G = x_1L_c + x_2L_d \text{ e } \chi_{[\alpha:\beta]} \text{ é L.I., para todo } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\right\}.$$

Sabemos que $D = \left\{ q \in \mathbb{P}^3 : posto \begin{bmatrix} x_1 & -L_b & -L_d \\ x_2 & L_a & L_c \end{bmatrix} (q) \leq 1 \right\}$ é uma cúbica reversa. Mostraremos que, para todo $([F], [G]) \in U$, tem-se $Z(F) \cap Z(G) = l_0 \cup D$. Seja $q \in Z(F) \cap Z(G)$. Suponha que $q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \notin l_0$, ou seja, $q_0 \neq 0$ ou $q_1 \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} L_cF - L_aG &= x_2(L_cL_b - L_aL_d) \\ L_dF - L_bG &= x_1(L_aL_d - L_cL_b) \end{aligned}.$$

Calculando em q os polinômios acima, concluímos que $(L_aL_d - L_cL_b)(q) = 0$.
Segue da definição de D e do fato de $q \in Z(F) \cap Z(G) \setminus l_0$ que $q \in D$. Logo, $Z(F) \cap Z(G) \subset l_0 \cup D$.
A inclusão contrária é imediata. Portanto $Z(F) \cap Z(G) = D \cup l_0$. ∎

Denote por $\mathbf{S}_2^{C_0}$ o conjunto $\{f \in \mathbf{S}_2 : C_0 \subset Z(f)\}$.

Teorema 3.10 *Seja $\mathcal{H} = \{C \subset \mathbb{P}^3 : C$ é uma cúbica reversa$\}$. Então $dim\mathcal{H} = 12$*

Prova. Defina

$$\Gamma = \{(l, C, [F], [G]) : Z(F) \cap Z(G) = C \cup l\} \subset G(2, \mathbb{C}^4) \times \mathcal{H} \times \mathbb{P}(S_2^l) \times \mathbb{P}(S_2^l).$$

Considere $\rho_1 : \Gamma \to G(2, \mathbb{C}^4)$ a projeção na primeira coordenada. Fixe $l_0 = Z(x_1, x_2) \in G(2, \mathbb{C}^4)$. Temos $\rho_1^{-1}(l_0) = \{(l_0, C, [F], [G]) : Z(F) \cap Z(G) = l_0 \cup C\}$. Tomando a projeção $q : \rho_1^{-1}(l_0) \to \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$ e o aberto não vazio $U \subset \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$ do Lema 3.9 temos $q^{-1}(U) = \rho_1^{-1}(l_0)$. De fato, sabemos que todo $([F], [G]) \in U$ satisfaz $Z(F) \cap Z(G) = l_0 \cup C$, onde C é uma cúbica reversa. Assim, é claro que $q^{-1}(U) \subset \rho_1^{-1}(l_0)$. Mostraremos que $q^{-1}(U) = \rho_1^{-1}(l_0)$. Seja $\xi = (l_0, C, [F], [G]) \in \rho_1^{-1}(l_0)$. Assim, $Z(F) \cap Z(G) = l_0 \cup C$, onde C é uma curva canônica. Como $l_0 \subset Z(F) \cap Z(G)$ temos que $F = x_1L_a + x_2L_b$ e $G = x_1L_c + x_2L_d$. Considere

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & -L_b & -L_d \\ x_2 & L_a & L_c \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que $C = Z(F, G, H)$, onde $H = L_aL_d - L_bL_c$. Logo, $C = \{q \in \mathbb{P}^3 : postoA(q) \leq 1\}$. Portanto, segue do Fato 3.8 que $\chi_{[\alpha:\beta]} = \{\alpha x_1 + \beta x_2, -\alpha L_b + \beta L_a, -\alpha L_d + \beta L_c\}$ é L.I. para todo $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$.
Logo, $q(\xi) = ([F], [G]) \in U$.
Assim,

$$\begin{array}{ccc} q^{-1}(U) & = & \rho_1^{-1}(l_0) \\ & & \downarrow q \\ U & \subset & \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6. \end{array}$$

Segue do Teorema da dimensão da fibra (cf pág. 60 [11]) que existe um aberto não vazio $V \subset \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$ tal que, para todo $v \in V$, verifica-se que $dimq^{-1}(v) = dim\rho_1^{-1}(l_0) - dim\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$.

Como $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$ é irredutível, verifica-se que $U \cap V \neq \emptyset$, desde que U e V são abertos não vazios. Note que, para todo $v \in U \cap V$, $q^{-1}(v)$ consiste de um único ponto. Assim, $dim q^{-1}(v) = 0$, para todo $v \in U \cap V$. Como $dim \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6 = 12$, concluímos que $dim \rho_1^{-1}(l_0) = 12$.

Usando mudança de coordenadas projetivas conclui-se que, para qualquer reta $l \in G(2, \mathbb{C}^4)$, $dim \rho_1^{-1}(l) = 12$.

Assim, como $\rho_1 : \Gamma \to G(2, \mathbb{C}^4)$ é sobrejetivo, concluímos do Teorema da dimensão da fibra que existe um aberto não vazio $U \subset G(2, \mathbb{C}^4)$ tal que

$$dim \rho^{-1}(l) = dim \Gamma - dim G(2, \mathbb{C}^4) \ \forall \ l \in U.$$

Assim, $dim \Gamma = dim \rho^{-1}(l) + dim G(2, \mathbb{C}^4) = 12 + 4 = 16$.

Agora considere $\rho_2 : \Gamma \to \mathcal{H}$ a projeção sobre a 2ª coordenada. Fixe C_0 a cúbica reversa padrão. Temos que $\rho_2^{-1}(C_0) = \{(l, C_0, [F], [G]) : Z(F) \cap Z(G) = l \cup C_0\}$. Note que se $C_0 \subset Z(F) \cap Z(G)$, então $F, G \in S_2^{C_0}$, que é um subespaço tridimensional de S_2. Assim, podemos considerar a projeção $h : \rho_2^{-1}(C_0) \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ ($\mathbb{P}^2 \equiv \mathbb{P}(S_2^{C_0})$). Seja Δ a diagonal em $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Observe que $\widetilde{U} = h(\rho_2^{-1}(C_0)) = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \setminus \Delta$ é um aberto não vazio. Assim, temos

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}(\widetilde{U}) & = & \rho_2^{-1}(C_0) \\ & & \downarrow h \\ \widetilde{U} & \subset & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2. \end{array}$$

Usando novamente o Teorema da dimensão da fibra concluímos que existe um aberto não vazio $\widetilde{V} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ tal que, para todo $a \in \widetilde{V}$, $dim h^{-1}(a) = dim \rho_2^{-1}(C_0) - dim \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

Novamente, apelando para o fato de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ ser irredutível e pela injetividade de h, concluímos que

$$0 = dim h^{-1}(a) = dim \rho_2^{-1}(C_0) - dim \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \ \forall \ a \in \widetilde{U} \cap \widetilde{V}.$$

Portanto $dim \rho_2^{-1}(C_0) = 4$.

Usando mudança de coordenadas projetivas, concluímos que $dim \rho_2^{-1}(C) = 4$, para todo $C \in \mathcal{H}$.

Assim, como $\rho_2 : \Gamma \to \mathcal{H}$ é sobrejetivo e aplicando mais uma vez o Teorema da

dimensão da fibra, concluímos que existe um aberto não vazio $V \subset \mathcal{H}$ tal que, para toda cúbica reversa $C \in V$, $dim\rho_2^{-1}(C) = dim\Gamma - dim\mathcal{H}$.
Portanto $dim\mathcal{H} = dim\Gamma - dim\rho_2^{-1}(C) = 16 - 4 = 12$.

■

Como observamos nos problemas das retas de Schubert e cônicas (caso involutivo), a formulação de uma questão enumerativa e sua solução dependem fortemente da determinação de um espaço de parâmetros adequado.

Por exemplo, já observamos que a cúbica revesa padrão não é involutiva. Por outro lado considere o mapa

$$\begin{array}{cccc} \eta : & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^3 \\ & [s:t] & \mapsto & [as^3 : bs^2t : ct^3 : dst^2] \end{array},$$

onde $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Deixamos ao leitor interessado a verificação de que $\Im(\eta(\mathbb{P}^1)) = \langle g_0, g_1, g_2 \rangle$ onde $g_0 = b^2x_1x_2 - adx_2^2$, $g_1 = bdx_1y_1 - acx_2y_2$ e $g_2 = d^2x_2y_1 - bcy_2^2$. Observe que o isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dado por $T(x_1, x_2, y_1, y_2) = (ax_1, bx_2, cy_2, dy_1)$ define uma *Mcp* $\mathbb{T}$, tal que $\mathbb{T}(C_0) = \eta(\mathbb{P}^1)$, ou seja, $\eta(\mathbb{P}^1)$ é uma cúbica reversa. Mostraremos que $\eta(\mathbb{P}^1)$ é involutiva se, e somente se, $3ac + bd = 0$.

Observe que

- $\{g_0, g_1\} = (bd + ac)b^2x_1y_2 - 2ac(adx_2^2)$
- $\{g_0, g_2\} = (b^2d^2 + 4abcd)x_2y_2 - b^2d^2x_1y_1$
- $\{g_1, g_2\} = (bd^3 + acd^2)x_2y_1 + 2ac^2by_2^2$

Se $\eta(\mathbb{P}^1)$ é involutiva, então $\{g_0, g_1\} = (bd + ac)b^2x_1y_2 - 2ac(adx_2^2) \in \Im(\eta(\mathbb{P}^1))$. Assim, precisamos que $bd + ac = -2ac$, ou equivalentemente, $bd = -3ac$.

Reciprocamente, se $bd = -3ac$, então $\{g_0, g_1\} = -2ac(b^2x_1y_2 - adx_2^2)$, $\{g_0, g_2\} = -3ac(acx_2y_2 - bdx_1y_1)$, $\{g_1, g_2\} = 2bd(d^2x_2y_1 - bcy_2^2) \in \Im(\eta(\mathbb{P}^1))$. Logo, $\eta(\mathbb{P}^1)$ é involutiva.

Disso, concluímos que existem infinitas cúbicas reversas involutivas.

Pode-se mostrar que a dimensão de um espaço de parâmetros para as cúbicas reversas involutivas é 7. Agora a determinação de um espaço de parametros requer ferramentas que fogem do escopo deste trabalho.

Como podemos conferir em [8] são sugeridas várias aproximações e dentre estas a utilização dos espaços de Kontsevich $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^3, d)$ de mapas estáveis de gênero zero com n marcas em $\mathbb{P}^3$.

Apêndice A

Espaços Vetoriais Simpléticos

A.1 Espaços Vetoriais Simpléticos

Definição A.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear em V. O par (V, ω) é denominado espaço vetorial simplético se ω verifica as seguintes condições:*

1. *$\omega(v_1, v_2) = -\omega(v_2, v_1),\ \forall\ v_1, v_2 \in V$. ($\omega$ é antissimétrica)*

2. *Se $v \in V$ é tal que $\omega(v, w) = 0,\ \forall\ w \in V$, então $v = 0$. (ω é não degenerada)*

Caso satisfaça as condições acima ω é dita uma forma simplética em V.

Exemplo A.2 *Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $V = \mathbb{K}^{2n}$. Defina $\omega_0 : \mathbb{K}^{2n} \times \mathbb{K}^{2n} \to \mathbb{K}$ da seguinte forma:*

$$(u, v) \longmapsto \omega_0(u, v) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i w_i - y_i z_i),$$

se $u = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ e $v = (z_1, ..., z_n, w_1, ...w_n)$.
Afirmação: $(\mathbb{K}^{2n}, \omega_0)$ é um espaço vetorial simplético.

1. *ω_o é antissimétrica:*
   Note que $\omega_0(u, v) = \sum_{i=1}^{n}(x_i w_i - y_i z_i) = -\sum_{i=1}^{n}(y_i z_i - x_i w_i) = -\omega_0(u, v)$.

2. *ω_o é não degenerada:*
   Seja $u = (a_1, ...a_n, b_1, ...b_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ tal que $\omega_0(u, v) = 0,\ \forall\ v \in \mathbb{K}^{2n}$.
   Observe que $\omega_0(u, v) = \sum_{i=1}^{n}(a_i w_i - b_i z_i)$.
   Assim, escolhendo $v = e_i = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$, com $1 \leq i \leq 2n$, obtemos:

$$0 = \omega_0(u,v) = \begin{cases} a_i, & se \quad 1 \leq i \leq n \\ -b_j, & se \quad n+1 \leq j \leq 2n \end{cases}$$

Logo, $u = 0$.

A forma bilinear ω_0 é dita a forma simplética padrão em $\mathbb{K}^{2n}$.

Observações A.3 *Seja* (V, ω) *um espaço vetorial simplético. Suponha que* V *é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$, *com* $charc(\mathbb{K}) \neq 2$. *Então:*

1. $\omega(u,u) = 0 \ \forall \ u \in V$.

   Com efeito, $\omega(u,v) = -\omega(v,u), \ \forall \ u, v \in V$. *Em particular,* $\omega(u,u) = -\omega(u,u), \ \forall \ u \in V$. *Assim,*

   $$\omega(u,u) + \omega(u,u) = 0 \Rightarrow \omega(u,u)(1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}) = \omega(u,u) \cdot 1_{\mathbb{K}}^2 \Rightarrow \omega(u,u) = 0 \ ou \ 1_{\mathbb{K}}^2 = 0$$

   Logo, como $charc(\mathbb{K}) \neq 2$, *devemos ter* $\omega(u,u) = 0$.

2. *dim* $V \geq 2$.

   Suponha, por absurdo, que dim $V = 1$ *e considere* $\alpha = \{u\}$ *uma base de* V

   Afirmação 1: $\omega \equiv 0$.

   De fato, sejam $v_1, v_2 \in V$ *quaisquer. Então existem* $a, b \in \mathbb{K}$ *tais que* $v_1 = au$ *e* $v_2 = bu$. *Logo, pela antissimetria de* ω *obtemos:*

   $$\omega(v_1, v_2) = \omega(au, bu) = ab \cdot \omega(u,u) = ab \cdot 0 = 0$$

   Afirmação 2: Se $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ *for identicamente nula, isto é, se* $\omega(v_1, v_2) = 0, \ \forall \ v_1, v_2 \in V$, *então* ω *é degenerada.*

   Com efeito, considere mais uma vez $\alpha = \{u\}$ *base de* V *e note que*

   $$\omega(u,v) = \omega(u, au) = a\omega(u,u) = 0, \ \forall \ v \in V.$$

   Absurdo, pois (V, ω) *é espaço vetorial simplético. Portanto, dim* $V \neq 1$.

Assumiremos neste trabalho, que todo corpo tem característica diferente de 2.

Definição A.4 *(V, ω) um espaço vetorial simplético e W um subespaço vetorial de V. Definimos o complemento ortogonal ou $\omega-$complemento de W, que denotaremos por $W^{\perp}$, da seguinte forma:*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \omega(v, w) = 0, \ \forall \ w \in W\}.$$

Observação A.5 *Se $\{w_1, ..., w_k\}$ é uma base de W, então*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \omega(v, w_i) = 0, \ \text{para todo } i = 1, ...k\}$$

Exemplo A.6 *Fixe $V = \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ e $\omega_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\omega_0((x, y), (z, w)) = xw - yz$.*
Se $W = \{(0, 0)\}$, então $W^{\perp} = \mathbb{R}^2$.
Se $W = [(a, b)]$, com $(a, b) \neq (0, 0)$, então

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega_0((x, y), (ra, rb)) = 0, \ \forall \ r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r\omega_0((x, y), (a, b)) = 0, \ \forall \ r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r \cdot (xb - ya) = 0, \ \forall \ r \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Mas, $r \cdot (xb - ya) = 0, \ \forall \ r \in \mathbb{R} \Rightarrow (xb - ya) = 0 \Rightarrow xb = ya$.
Como $(a, b) \neq (0, 0)$, suponha sem perda de generalidade, que $a \neq 0$. Assim, obtemos $y = \dfrac{xb}{a}$. Daí,

$$W^{\perp} = \left\{(x, \tfrac{xb}{a}) : x \in \mathbb{R}\right\} = [(1, \tfrac{b}{a})] = [(a, b)] = W$$

Portanto, $W^{\perp} = W$.
Se $W = \mathbb{R}^2$, então $W^{\perp} = \{(0, 0)\}$, pois ω_0 é não degenerada.

Proposição A.7 *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e $W \leq V$. Defina $I : V \to V^*$ por $I(u) = I_u$, onde $I_u : V \to \mathbb{K}$ é dada por $I_u(v) = \omega(u, v)$. Temos que:*

1. *I é um isomorfismo linear.*

2. *Se $I_u|_W \equiv 0$, então $u \in W^{\perp}$.*

3. *$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.*

Prova.

1. Verifica-se facilmente que I é uma transformação linear.

   Observe que o núcleo de I é dado por:

   $$N(I) = \{u \in V : I_u(v) = 0, \ \forall \ v \in V\} = \{u \in V : \omega(u,v) = 0, \ \forall \ v \in V\} = \{0\},$$

   uma vez que ω é não degenerada.

   Como $dimV = dimV^* < \infty$, concluímos a partir do Teorema do núcleo e da imagem que I é um isomorfismo linear.

2. Note que $I_u|_W : W \to \mathbb{K}$ é dada por $I_u(w) = \omega(u,w), \ \forall \ w \in W$. Assim,

   $$I_u|_W \equiv 0 \Rightarrow u \in W^\perp.$$

3. Afirmamos que $I(W^\perp) = W^0 = \{f \in V^* : f(w) = 0, \ \forall \ w \in W\}$.

   De fato, se e $g \in I(W^\perp)$, então existe $u \in W^\perp$ tal que $g = I(u) = I_u \in V^*$. Note que $g(w) = I_u(w) = \omega(u,w) = 0, \ \forall \ w \in W$, pois $u \in W^\perp$. Logo, $g = I_u \in W^0$ e, portanto, $I(W^\perp) \subset W^0$.

   Por outro lado, se $f \in W^0$, então $f \in V^*$ e $f(w) = 0, \ \forall \ w \in W$. Como I é um isomorfismo linear, existe $u \in V$ tal que $I_u = I(u) = f$. Daí, tomando $\{w_1, ..., w_k\}$ uma base de W temos $I_u(w_i) = f(w_i) = 0$, para todo $1 \leq i \leq k$. Logo, $I_u(w) = 0$ para todo $w \in W$ e assim, $u \in W^\perp$. Portanto, $f = I(u) \in I(W^\perp)$ e temos a outra inclusão.

   Como I é isomorfismo linear resulta que $dimW^\perp = dimI(W^\perp) = dimW^0$. Usando que $dimV = dimW + dimW^0$ obtemos o resultado.

■

Exemplo A.8 *Se* $H = \left\{(x_1, ..., x_n, y_1, .., y_n) \in \mathbb{C}^{2n} : \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j y_j + y_n = 0\right\}$, *então queremos mostrar que* $H^\perp = [w]$, *onde* $w = (b_1, ..., b_{n-1}, 1, -a_1, ..., -a_n)$.
De fato, observe que $\{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_{n-1}\}$, *onde* $u_i = e_i - a_i e_{2n}$, *para* $i = 1, ..., n$, *e* $v_j = e_{n+j} - b_j e_{2n}$, *para* $j = 1...n-1$, *é uma base de* H. *Assim, segue da Proposição A.7 que* $H^\perp$ *tem dimensão 1.*
Por outro lado, verifica-se facilmente que $w = (b_1, ..., b_{n-1}, 1, -a_1, ..., -a_n) \in H^\perp$.

Teorema A.9 *Seja* (V, ω) *um espaço vetorial simplético. Então existe uma base* $\{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n\}$ *de* V *tal que* $\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0, \ \forall \ 1 \leq i \leq j \leq n$, *e*

$\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$. Em particular, $dimV$ é par. Dita base é denominada base simplética de V.

Prova. Seja $d = dimV$. Faremos a prova usando indução sobre d. Já sabemos que $d \geq 2$ (caso contrário, $\omega \equiv 0$ ou seja, ω seria degenerada).
Suponha $d = 2$. Seja $u \in V$ não nulo. Como ω é não degenerada, existe $v \in V$ não nulo tal que $\omega(u, v) \neq 0$. Afirmamos que $\{u, v\}$ é base de V.
De fato, suponha que $v = au$, para algum $a \in \mathbb{K}$. Então

$$\omega(u, v) = a \cdot \omega(u, u) = 0.$$

O que é um absurdo. Logo, u e v são linearmente independentes e assim, $\{u, v\}$ é base de V.
Seja $\lambda = \omega(u, v) \neq 0$. Considere $u_1 = u$ e $v_1 = \frac{1}{\lambda}v$. Note que $\omega(u_1, v_1) = \frac{1}{\lambda}\omega(u, v) = \frac{1}{\lambda}\lambda = 1$.
Suponha que o teorema é válido para todo espaço vetorial simplético de dimensão menor que d e considere (V, ω) um espaço vetorial simplético de dimensão d. Como $d \geq 2$, podemos determinar $u_1, v_1 \in V$ linearmente independentes tais que $\omega(u_1, v_1) = 1$.
Seja $W = [u_1, v_1]$. A seguir mostraremos que $(W^{\perp}, \omega^{\perp})$, onde $\omega^{\perp} = \omega|_{(W^{\perp} \times W^{\perp})}$, é um espaço vetorial simplético.
Basta mostrar que $\omega^{\perp}$ é não degenerada.
Afirmação 1: $W \oplus W^{\perp} = V$.

1. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$
   Seja $w \in W \cap W^{\perp}$. Então $w = au_1 + bv_1 \in W$ e $w \in W^{\perp}$. Assim, $\omega(w, \alpha) = a\omega(u_1, \alpha) + b\omega(v_1, \alpha) = 0, \ \forall \ \alpha \in W$. Fazendo $\alpha = u_1$ obtemos $-b = b\omega(v_1, u_1) = 0$, ou seja, $b = 0$. Análogamente, fazendo $\alpha = v_1$ obtemos $a = 0$. Logo, $w = au_1 + bv_1 = 0$.

2. $V = W + W^{\perp}$.
   Temos que $dim(W + W^{\perp}) = dimW + dimW^{\perp} - dim(W \cap W^{\perp}) = dimV + 0 = dimV$ e, além disso, que $W + W^{\perp} \subset V$. Logo, $W + W^{\perp} = V$.

Afirmação 2: $\omega^{\perp} : W^{\perp} \times W^{\perp} \to \mathbb{K}$, dada por $\omega^{\perp}(u, v) = \omega(u, v)$, é não degenerada, ou seja, se $u \in W^{\perp}$ é tal que $\omega(u, v) = 0 \ \forall \ v \in W^{\perp}$, então $u = 0$.

Considere $u \in W^{\perp}$ tal que $\omega(u,v) = 0, \ \forall \ v \in W^{\perp}$. Seja $\alpha \in V$ qualquer. Como $W \oplus W^{\perp} = V$, podemos escrever $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, onde $\alpha_1 \in W$ e $\alpha_2 \in W^{\perp}$. Assim,

$$\omega(u,\alpha) = \omega(u,\alpha_1) + \omega(u,\alpha_2) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, $\omega(u,\alpha) = 0, \ \forall \ \alpha \in V$. Como ω é não degenerada, concluímos que $u = 0$.
Portanto, $\omega^{\perp}$ é não degenerada e $(W^{\perp}, \omega^{\perp})$ um espaço vetorial simplético.
Agora note que $dimW^{\perp} = dimV - dimW = d - 2$. Então segue da hipótese indutiva que existe $\beta = \{u_2, ..., u_n, v_2, ..., v_n\}$ uma base de $W^{\perp}$ tal que $\omega^{\perp}(u_i, u_j) = 0 = \omega^{\perp}(v_i, v_j)$ e $\omega^{\perp}(u_i, v_j) = \delta_{ij}, \ \forall \ i,j \in \{2, ..., n\}$.
Afirmação: $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n\}$ é base de V e satisfaz $\omega(u_i, u_j) = 0 = \omega(v_i, v_j)$ e $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}, \ \forall \ i,j \in \{1, 2, ..., n\}$.
De fato, tendo em consideração que $\{u_1, v_1\}$ e β são bases de W e $W^{\perp}$, respectivamente, e $V = W \oplus W^{\perp}$, concluímos que α é base de V.
Por outro lado,

$$\omega(u_1, v_j) = \omega(u_j, v_1) = \omega(v_1, v_j) = \omega(u_1, u_j) = 0, \ \forall \ j \in \{2, ..., m\} \text{ e } \omega(u_1, v_1) = 1,$$

pois $u_1, v_1 \in W$ e $u_j, v_j \in W^{\perp}$ e u_1 e u_2 foram tomados de modo a satisfazer a última destas igualdades.
Portanto, α é uma base e satisfaz as condições do teorema. ■

Observação A.10 *A base canônica de $\mathbb{C}^{2n}$ é uma base simplética relativa à forma simplética padrão ω_0, onde $\omega_0(u,v) = \sum_{i=1}^{n}(x_i w_i - y_i z_i)$, para $u = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ e $v = (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n)$.*

Definição A.11 *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e W um subespaço de V.*

1. *W é dito isotrópico $\Leftrightarrow W \subset W^{\perp}$.*

2. *W é dito co-isotrópico ou involutivo $\Leftrightarrow W^{\perp} \subset W$.*

3. *W é dito lagrangeano $\Leftrightarrow W = W^{\perp}$.*

Proposição A.12 *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e W um hiperplano em V, ou seja, W é um subespaço de V de dimensão $dimV - 1$. Então W é involutivo.*

Prova. Suponha que $W^{\perp} \not\subset W$. Logo, existe $w \in W^{\perp}$ tal que $w \notin W$.Como $dimW = dimV - 1$ e $w \notin W$, podemos escrever $V = W \oplus [w]$. Assim, qualquer $v \in V$ pode ser escrito na forma $v = \alpha + aw$, onde $\alpha \in W$ e $a \in \mathbb{K}$. Daí, para todo $v \in V$,

$$\omega(w, v) = \omega(w, \alpha) + a\omega(w, w) = 0,$$

uma vez que $\omega(w, w) = 0$, pela Observação A.3 , e $\omega(w, \alpha) = 0$, pois $\alpha \in W$ e $w \in W^{\perp}$.
Como ω é não degenerada, concluímos que $w = 0$, o que é um absurdo, pois $0 \in W$. Portanto, $W^{\perp} \subset W$, ou seja, W é involutivo. ∎

A.2 Transformação Linear Simplética

Definição A.13 *Sejam (V, ω) e (V_1, ω_1) espaços vetoriais simpléticos sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear $T : V \to V_1$ é denominada de transformação linear simplética se $T^*\omega_1 = \omega$, isto é ,*

$$\omega_1(T(v_1), T(v_2)) = \omega(v_1, v_2), \ \forall \ v_1, v_2 \in V.$$

Denotaremos por $S_p(V, \omega)$ o conjunto definido por:

$$S_p(V, \omega) = \{T \in Aut(V) : T^*\omega = \omega\},$$

onde $Aut(V)$ é o conjunto dos isomorfismo lineares de V.

Observação A.14 *$(S_p(V, \omega), \circ)$ é um grupo.*
Com efeito, a composição de funções é associativa e a aplicação $Id_V : V \to V$ dada por $Id_V(v) = v$ é um isomorfismo linear simplético, sendo, pois, o elemento neutro de $S_P(V, \omega)$. Resta mostrar que todo elemento de $S_p(V, \omega)$ possui inverso em $S_p(V, \omega)$. Seja $T \in S_p(V, \omega)$. Se $T \in Aut(V)$, então existe $T^{-1} \in Aut(V)$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id_V$. Mostremos que $T^{-1} \in S_p(V, \omega)$. Sejam $v, w \in V$. Então

$$\omega(T^{-1}(v), T^{-1}(w)) = \omega(T(T^{-1}(v)), T(t^{-1}(w))) = \omega(v, w).$$

Logo, $(T^{-1})^*\omega = \omega$ e, portanto, $T^{-1} \in S_p(V, \omega)$.

Proposição A.15 *Sejam* (V,ω) *um espaço vetorial simplético sobre* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) de dimensão* $2n$ *e* $(\mathbb{K}^{2n}, \omega_0)$ *o espaço vetorial simplético, onde* ω_0 *é definido por*

$$\omega_0(u,v) = \sum_{i=1}^{n}(x_i w_i - y_i z_i),$$

se $u = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ *e* $v = (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n)$. *Então existe um isomorfismo linear* $T : V \to \mathbb{K}^{2n}$ *tal que* $T^*\omega_0 = \omega$*, ou seja,* T *é um isomorfismo simplético.*

Prova. Considere $\alpha = \{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n\}$ uma base simplética de V. Defina $T : V \to V$ por $T(v) = (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n)$, se $v = a_1u_1 + ... + a_nu_n + b_1v_1 + ... + b_nv_n$. Observe que T assim definida é isomorfismo linear. Mostremos que T é uma transformação simplética.
Sejam $v, w \in V$ dados por $v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$ e $w = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n + d_1v_1 + \cdots + d_nv_n$, com $v, w \in V$. Note que:

$$\omega_0(T(v), T(w)) = \omega_0((a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n), (c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n)) = \sum_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i).$$

Usando a bilinearidade de ω e o fato de α ser base simplética obtemos

$$\omega(u,v) = \omega(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i, \sum_{i=1}^{n} c_i u_i + \sum_{i=1}^{n} d_i v_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i).$$

Donde concluímos o resultado. ■

Observe que o isomorfismo simplético $T : V \to \mathbb{K}^{2n}$ na Proposição acima nos permite mostrar que os grupos $S_p(V,\omega)$ e $S_p(\mathbb{K}^{2n}, \omega_0)$ são isomorfos.

Observação A.16 *Sejam* (V,ω) *um espaço vetorial simplético e* $L : V \to V$ *um isomorfismo simplético. Para cada* W *subespaço de* V*, verifica-se que* $L(W^\perp) = (L(W))^\perp$.
De fato, se $v \in L(W^\perp)$*, então* $v = L(u)$*, para algum* $u \in W^\perp$*. Assim, para cada* $w \in W$*, temos* $\omega(v, L(w)) = \omega(L(u), L(w)) = \omega(u,w) = 0$*. Logo,* $v \in L(W)^\perp$*.*
Reciprocamente, se $u \in (L(W))^\perp$*, então* $\omega(u, L(w)) = 0$*, para todo* $w \in W$*. Como* L *é um isomorfismo existe* $v \in V$ *tal que* $u = L(v)$*. Logo,*

$$0 = \omega(u, L(w)) = \omega(L(v), L(w)) = \omega(v,w) \Rightarrow v \in W^\perp \Rightarrow u = L(v) \in L(W^\perp).$$

Apêndice B

Variedades Afins

B.1 Variedades Afins

Definição B.1 *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo e* S *um subconjunto de* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$*. Definimos o conjunto dos zeros de* S*, o qual denotamos* $Z(S)$*, por*

$$Z(S) = \{\underline{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n : f(\underline{a}) = 0, \ \forall \ f \in S\}.$$

Observações B.2 *Sejam* $S, S_1 \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *e* I *um ideal em* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$*.*

1. *Se* $S \subset S_1$*, então* $Z(S_1) \subset Z(S)$*.*

2. $Z(S) = Z(\langle S \rangle)$*, onde* $\langle S \rangle$ *denota o ideal gerado por* S *em* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$*.*

3. $Z(I) = \{\underline{a} \in \mathbb{K}^n : f_i(\underline{a}) = 0 \ , \ i = 1, ..., k\}$ *se* $I = \langle f_1, ..., f_k \rangle$*.*

Definição B.3 *Um subconjunto* $X \subset \mathbb{K}^n$ *é denominado uma variedade afim se, e somente se, existe um ideal* I *de* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *tal que* $X = Z(I)$*.*

Exemplo B.4 *Como* $\mathbb{K}[x]$ *é um domínio de ideais principais,* $X \subset \mathbb{K}$ *é uma variedade afim, se, e somente se,* $X = Z(p(x))$*, para algum* $p(x) \in \mathbb{K}[x]$*. Em particular, se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, então*

$$X = \begin{cases} \mathbb{C}, & se \quad p(x) = 0 \\ \emptyset, & se \quad p(x) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \{a_1, ..., a_k\}, & se \quad p(x) = (x_1 - a_1)^{m_1} ... (x_1 - a_k)^{m_k}. \end{cases}$$

Exemplo B.5 *O conjunto* $Y = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b \geq 0\}$ *não é uma variedade afim. Suponha o contrário, ou seja, suponha que existe um ideal* $I \subset \mathbb{R}[x_1, x_2]$ *tal que* $Z(I) = Y$*. Note que* I *não pode ser o ideal nulo.*
Considere $f(x_1, x_2) \in I$ *não nulo, então podemos escrever:*

$$f(x_1, x_2) = a_0(x_1) + a_1(x_1)x_2 + a_2(x_1)x_2^2 + \cdots + a_d(x_1)x_2^d.$$

Sejam $a \in \mathbb{R}$ *fixo e* $f_a(x_2) = f(a, x_2) \in \mathbb{R}[x_2]$*. Como* $f \in I$ *e* $Y = Z(I)$ *temos que* $f(a,b) = 0$*, para todo* $b \in \mathbb{R}$ *não negativo, ou seja,* $f_a(b) = 0$*,para todo* $b \geq 0$*. Assim,* $f_a(x_2) \in \mathbb{R}[x_2]$ *tem infinitas raízes, o que implica que* $f_a(x_2) = 0$*. Daí,* $a_0(a) = a_1(a) = \cdots = a_d(a) = 0$*.*
Como $a \in \mathbb{R}$ *foi qualquer,* $a_0(x_1), a_1(x_1), ..., a_d(x_1) \in \mathbb{R}[x_1]$ *possuem infinitas raízes, donde* $a_0(x_1) = a_1(x_1) = \cdots = a_d(x_1) = 0$*. Absurdo, pois* $f(x_1, x_2)$ *foi tomado não nulo.*

Proposição B.6 *A união finita e a interseção de variedades afins é uma variedade afim. Os conjuntos* $\emptyset$ *e* $\mathbb{K}^n$ *são variedades afins.*

Prova. Conferir a Proposição 1.1, pág. 2 em [6]. ∎

Logo, a família

$$\Lambda = \{Z(I)\}\,, \text{ com } I \text{ percorrendo o conjuntos dos ideais em } \mathbb{K}[x_1, ..., x_n],$$

define uma topologia em $\mathbb{K}^n$, a qual denomina-se topologia de Zariski. O espaço $\mathbb{K}^n$ munido da topologia de Zariski será denotado por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e denominado n-espaço afim. Os subconjuntos fechados em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ serão denominados de conjuntos algébricos ou variedades afins.

Observação B.7 *Se* $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *é um polinômio não constante, então* $X = Z(f)$ *é dita uma hipersuperfície definida por* f*. Uma hipersuperficie em* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ *é chamada um curva plana afim. Se* f *é um polinomio de grau um, então* $X = Z(f)$ *é denominada de hiperplano em* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*.*

Definição B.8 *Seja* Y *um subconjunto de* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*. O ideal associado a* Y *em* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$*, que denotaremos* $\Im(Y)$*, é descrito da seguinte forma:*

$$\Im(Y) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f(a) = 0, \text{ para todo } a \in Y\}\,.$$

Exemplo B.9 *Se* $Y = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \cdot b = 0\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*, então o ideal associado a* Y *é* $\Im(Y) = \langle x_1 x_2 \rangle$*.*

É claro que $\Im(Y) \supset \langle x_1 x_2 \rangle$*. Agora, seja* $f(x_1, x_2) \in \Im(Y)$*. Podemos escrever*

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \cdot g(x_1, x_2) + x_1 \cdot h_1(x_1) + x_2 \cdot h_2(x_2) + a_0.$$

Temos que $f(a, 0) = a \cdot h_1(a) + a_0 = 0$ *e* $f(0, b) = b \cdot h_2(a) + a_0 = 0$*, para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*. Tomando* $H(x_1) = x_1 \cdot h_1(x_1) + a_0 \in \mathbb{R}[x_1]$*, temos* $H(a) = a \cdot h_1(a) + a_0 = 0$*, para todo* $a \in \mathbb{R}$*. Assim,* $H(x_1) \in \mathbb{R}[x_1]$ *possui infinitas raízes, ou seja,* $H(x_1) = 0$*, donde concluímos que* $h_1(x_1) = 0 = a_0$*. De modo análogo, concluímos que* $h_2(x_2) = 0$*.*

Desse modo $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \cdot g(x_1, x_2) \in \langle x_1 x_2 \rangle$*, ou seja,* $\Im(Y) \subset \langle x_1 x_2 \rangle$*.*

Portanto $\Im(Y) = \langle x_1 x_2 \rangle$*.*

A proposição a seguir mostra algumas das relações entre ideais e conjuntos algébricos.

Proposição B.10 *Sejam* Y *e* Y_1 *subconjuntos de* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *e* I *um ideal de* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$*. Então:*

1. $\Im(Y)$ *é um ideal radical, isto é,* $\Im(Y) = \sqrt{\Im(Y)}$*.*

2. *Se* $Y \subset Y_1$*, então* $\Im(Y_1) \subset \Im(Y)$*.*

3. *Teorema dos Zeros de Hilbert:* $\Im(Z(I)) = \sqrt{I}$*, se* $\mathbb{K}$ *for algébricamente fechado.*

4. $Z(\Im(Y)) = \overline{Y}$*, se* $\mathbb{K}$ *for algébricamente fechado.*

Prova. Consultar Proposição 1.2, pág. 3 em [6]. ∎

B.2 Conjuntos Irredutíveis

Definição B.11 *Sejam* X *um espaço topológico e* Y *um subconjunto de* X *munido da topologia induzida pela topologia de* X*.* Y *é dito irredutível se, e somente se, para todos* F_1, F_2 *fechados em* Y *tais que* $Y = F_1 \cup F_2$*, verifica-se que* $F_1 = Y$ *ou* $F_2 = Y$*, ou seja,* Y *não pode ser escrito como união de dois subconjuntos fechados próprios de* Y*. Do contrário,* Y *é dito redutível.*

Exemplo B.12 *O conjunto $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, é redutível, pois podemos escrever $\mathbb{R} = I \cup J$, onde $I = (-\infty, 0]$ e $J = [0, +\infty)$ são fechados próprios em $\mathbb{R}$. Considere agora $\mathbb{R}$ munido da topologia de Zariski. Um subconjunto $F \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ é fechado se, e somente se, $F = Z(I)$, onde $I = \langle p(x) \rangle$ é um ideal em $\mathbb{R}[x]$. Assim,*

$$F = \begin{cases} \emptyset, & se \quad p(x) \text{ não possui raízes reais} \\ \mathbb{R}, & se \quad p(x) = 0 \\ \{a_1, ..., a_k\}, & se \quad a_1, ..., a_k \text{ são as raízes reais de } p(x) \end{cases}$$

Logo, o espaço afim $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ é irredutível pois é infinito e seus subconjuntos fechados próprios são finitos.

Proposição B.13 *Seja $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim. X é irredutível se, e somente se, o ideal associado $\Im(X)$ é primo.*

Prova. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tais que $fg \in \Im(X)$. Temos $X \subset Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Assim, se X é irredutível, então $X \subset Z(f)$ ou $X \subset Z(g)$, isto é, $f \in \Im(X)$ ou $g \in \Im(X)$. Logo, $\Im(X)$ é primo.

Reciprocamente, seja $\Im(X)$ primo. Suponha, por absurdo, que $X = Y \cup Z$, com Y e Z subvariedades próprias de X. Então $\Im(Y)$ e $\Im(Z)$ contêm $\Im(X)$ propriamente. Assim, dados $f \in \Im(Y) \setminus \Im(X)$ e $g \in \Im(Z) \setminus \Im(X)$ temos:

$$fg \in \Im(Y)\Im(Z) \subset \Im(Y) \cap \Im(Z) = \Im(Y \cup Z) = \Im(X).$$

Absurdo, pois $\Im(X)$ é primo. Portanto, X é irredutível. ■

Exemplo B.14 $X = \{(a, b) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : a \cdot b = 0\}$ *é uma variedade afim tal que* $\Im(X) = \langle x_1 x_2 \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2]$. *Como $\Im(X)$ não é primo, concluímos que X é redutível.*

Definição B.15 *Um espaço topológico X é dito noetheriano se ele satisfaz a condição da cadeia descendente para conjuntos fechados , isto é, para toda cadeia de fechados*

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_n \supset \cdots$$

existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$.

Proposição B.16 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *é um espaço topológico noetheriano.*

Prova. Consultar Exemplo 1.4.7, pág. 5 em [6]. ∎

Proposição B.17 *Se X é um espaço topológico noetheriano, então todo subconjunto fechado não vazio Y pode ser escrito como uma união finita $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$ de subconjuntos fechados irredutíveis $Y_i \subset Y$. Além disso, se for exigido que $Y_i \not\supset Y_j$, para $i \neq j$, então os Y_i's são unicamente determinados.*

Prova. Consultar Proposição 1.5, pág. 5 [6]. ∎

Definição B.18 *Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um fechado irredutível. Y é chamado de componente irredutível de X, se para todo Z fechado irredutível em X tal que $Y \subset Z$ tem-se $Y = Z$.*

Observação B.19 *Como toda variedade afim é um espaço topológico noetheriano, concluímos que $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ pode ser escrita na forma $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, onde $X_1, ..., X_k$ são as componentes irredutíveis (unicamente determinadas conforme B.17).*

B.3 Espaço Tangente de Zariski

A cada polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ e $p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ fixo, podemos associar o funcional linear $d_p f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definido por:

$$d_p f(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i = \nabla f(p) \cdot v, \text{ onde } v = (v_1, ..., v_n).$$

Definição B.20 *Seja $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim. Para cada $p \in X$, definimos T_pX, o espaço tangente de Zariski em p, por:*

$$T_pX = \bigcap_{f \in \Im(X)} N(d_p f).$$

Observação B.21 *Seja $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim tal que $\Im(X) = \langle f_1, ..., f_k \rangle$. Então $T_pX = \bigcap_{i=1}^k N(d_p f_i)$, para todo $p \in X$.*
De fato, segue da definição que $T_pX \subset \bigcap_{i=1}^k N(d_p f_i)$.
Por outro lado, se $v \in \bigcap_{i=1}^k N(d_p f_i)$, então $0 = d_p f_i(v)$, para todo $i = 1, ..., k$. Assim, dado $f = P_1 f_1 + \cdots + P_k f_k \in \Im(X) = \langle f_1, ..., f_k \rangle$ temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{k} (\frac{\partial P_j}{\partial x_i}(p) \cdot f_j(p) + P_j(p) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)) = \sum_{j=1}^{k} P_j(p) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p).$$

Daí, se $v = (v_1, ..., v_n)$ *então* $d_pf(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i$ *é igual a*

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k} P_j(p) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p))v_i = \sum_{j=1}^{k} P_j(p) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} v_i = \sum_{j=1}^{k} P_j(p) \cdot 0 = 0.$$

Logo, $v \in T_pX$.

Exemplo B.22 *Considere* $X = \{(a_1, ..., a_n)\} \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. *Temos que* $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *pode ser escrito da seguinte forma:*

$$f = (x_n - a_n)q_1(x_1, ..., x_n) + (x_{n-1} - a_{n-1})q_2(x_1, ..., x_{n-1}) + \cdots + (x_1 - a_1)q_n(x_1) + r_0.$$

Como $f(a_1, ..., a_n) = r_0$, *se* $f \in \Im(X)$, *concluímos que* $r_0 = 0$. *Portanto,* $\Im(X) = \langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n\rangle$. *Assim, pela observação B.21,* $T_pX = \bigcap_{i=1}^{n} N(d_pf_i)$, *onde* $f_i = x_i - a_i$ *e* $p = (a_1, ..., a_n)$.
Note que se $u = (u_1, ..., u_n)$, *então* $d_pf_i(u) = 1 \cdot u_i = u_i$, *para* $i = 1, ..., n$. *Logo, se* $u \in \bigcap_{i=1}^{n} N(d_pf_i)$, *então* $u_i = 0$, $\forall\ i = 1, ..., n$ *e, portanto,* $T_pX = \{(0, ..., 0)\}$.

Proposição B.23 *Seja* $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *uma variedade afim. Considere* $d = min\{dim\ T_xX : x \in X\}$. *Então o conjunto*

$$\{p \in X : dim\ T_pX = d\}$$

é um aberto não vazio de X.

Prova. Suponha que $\Im(X) = \langle f_1, ..., f_k\rangle \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Para cada $p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, considere a aplicação linear $T_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ cuja matriz é

$$J(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

Observe que se $p \in X$, então:

1. O núcleo de T_p é

$$\begin{aligned} N(T_p) &= \left\{v \in \mathbb{K}^n : \tfrac{\partial f_i}{\partial x_1}v_1 + \tfrac{\partial f_i}{\partial x_2}v_2 + \cdots + \tfrac{\partial f_i}{\partial x_n}v_n = 0,\ i = 1, ..., k\right\} \\ &= \{v \in \mathbb{K}^n : d_pf_i(v) = 0,\ i = 1, ..., k\} = T_pX. \end{aligned}$$

2.

$$dim\ T_pX = dim N(T_p) = n - dim\ Im(T_p) = n - posto(J(p)). \tag{B.1}$$

Seja I_m o ideal de $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ gerado pelos determinantes dos menores de ordem $m \times m$ da matriz

$$J(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n)\right)_{ij}.$$

Note que $I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_2 \subset I_1$. Assim, se $A_i = Z(I_i),\ i = 1, ..., k$, então $A_k \supset A_{k-1} \supset \cdots \subset A_2 \subset A_1$. Além disso, t

$$A_{l+1} \setminus A_l = \{p \in \mathbb{K}^n : posto(J(p)) = l\} = \{p \in \mathbb{K}^n : dim\ N(T_p) = n - l\}.$$

Como $d = min\,\{dim\ T_pX : p \in X\}$, existe $x_0 \in X$ tal que $dim\ T_{x_0}X = d$ e, desse modo, $x_0 \in A_{n-d+1} \setminus A_{n-d} = \{p \in \mathbb{K}^n : dim\ N(T_p) = n - (n-d) = d\}$.
Afirmamos que $X \subset A_{n-d+1}$. De fato, suponha que $X \not\subset A_{n-d+1}$. Logo, existe $x \in X$ tal que $x \notin A_{n-d+1}$, ou seja, existe pelo menos um menor de ordem $(n-d+1) \times (n-d+1)$ da matriz $J(x)$ cujo determinante é não nulo. Portanto, $posto(J(x)) \geq n - d + 1$.
Assim, por (B.1), $n - dim\ T_xX = posto(J(x)) \geq n - d + 1$. Donde $d - 1 \geq dim\ T_xX$, o que é um absurdo pela escolha de d.
Logo,

$$\begin{aligned} \{p \in X : dim\ T_pX = d\} &= X \cap (A_{n-d+1} \setminus A_{n-d}) \\ &= X \cap (A_{n-d+1} \cap (A_{n-d})^C) \\ &= X \cap (A_{n-d})^C. \end{aligned}$$

Assim, $\{p \in X : dim\ T_pX = d\}$ é um aberto não vazio de X, desde que $x_0 \in X \cap (A_{n-d})^C$. ■

Observação B.24 *Notações como acima, verifica-se que* $\{p \in X : dim\ T_pX = d\}$ *é um aberto denso em* X *(cf. Corolário 13.13 páginas 191-192 em [7]).*

B.4 Dimensão e Pontos Singulares

Definição B.25 *Seja* $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *uma variedade afim e considere* $d = min\,\{dim\ T_xX : x \in X\}$. *Um ponto* $p \in X$ *é dito não singular se, e somente se,* *dim* $T_pX = d$. *Caso contrário, p é denominado de ponto singular.*

O lugar singular de X será denotado por $\text{Sing}(X)$, ou seja,

$$\text{Sing}(X) = \{p \in X : p \text{ é ponto singular de } X\}.$$

Definição B.26 *Sejam* $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *uma variedade afim. Se X é irredutível, definimos a dimensão de X, que denotaremos* $dimX$, *por* $dimX = d$, *onde* $d = min\{dim\ T_xX : x \in X\}$. *Se X é redutível, então* $dimX = max\{dimX_i : 1 \leq i \leq k\}$, *onde* $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ *é a decomposição de X em componentes irredutíveis.*

Exemplo B.27 *Se* $X = \{a, b\} \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, *com* $a \neq b$, *então podemos escrever* $X = X_1 \cup X_2$, *onde* $X_1 = \{a\}$ *e* $X_2 = \{b\}$ *são irredutíveis. Vimos, no Exemplo B.22, que* $T_aX_1 = T_bX_2 = \{(0, ..., 0)\}$. *Logo,* $dimX_1 = dimX_2 = 0$ *e, portanto,* $dimX = max\{dimX_1, dimX_2\} = 0$. *Assim, todo subconjunto finito de* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *tem dimensão zero.*

Exemplo B.28 *Se* $X = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, *então* $T_pX = \mathbb{K}^n$, *para todo* $p \in X$, *uma vez que* $\Im(X) = \langle 0 \rangle$. *Logo, como X é irredutível temos* $dimX = n$ *e* $\text{Sing}(X) = \emptyset$, *isto é, todo ponto de* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *é não singular.*

B.5 Variedades Afins Homogêneas

Definição B.29 *Seja* $X \subset \mathbb{A}^n$ *uma variedade afim. X será denominada de variedade homogênea se, e somente se, para todo* $p \in X$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{C}$, *verifica-se que* $\lambda p \in X$.

Observação B.30 *Uma variedade afim* $X \subset \mathbb{A}^n$ *é homogênea se, e somente se,* $\Im(X)$ *é homogêneo.*
Com efeito, suponha $\Im(X)$ *homogêneo. Logo,* $\Im(X)$ *admite um conjunto de geradores homogêneos, digamos* $f_1, ..., f_k$, *com grau* $f_i = d_i$, *para* $i = 1, ...k$. *Assim, para todo* $p \in X$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tem-se:*

$$f_i(\lambda p) = \lambda^{d_i} f_i(p) = 0, \ i = 1, ..., k.$$

Desse modo, $\lambda p \in Z(\Im(X)) = X$, isto é, X é homogênea.

Reciprocamente, suponha que X é homogênea . Seja $f \in \Im(X)$ qualquer. Podemos escrever $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i. Assim, para cada $p \in X$,

$$0 = f(\lambda p) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i f_i(p), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C},$$

donde $0 = f_0(p) = \cdots = f_n(p)$. Portanto, deduzimos que $f_i \in \Im(X)$, para todo $i = 1, ..., n$. Assim, $\Im(X)$ é homogêneo.

Do que foi visto acima segue-se que $H \subset \mathbb{A}^{2n}$ é um hiperplano homogêneo se, e somente se, $H = Z(h)$, onde $h \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n]_1$ é não nulo.

Lema B.31 *Seja $H \subset \mathbb{A}^{2n}_{\mathbb{C}}$ um hiperplano homogêneo. Então existe um isomorfismo simplético $L:\ \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ tal que $L(H) = Z(y_n)$.*

Prova. Suponha que $H = Z(h)$, com $h = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b_1y_1 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1} + y_n$. Assim,

$$(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in H \Leftrightarrow y_n = -a_1x_1 - \cdots - a_nx_n - b_1y_1 + \cdots - b_{n-1}y_{n-1}.$$

Logo, $H = [u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_{n-1}] \subset \mathbb{C}^{2n}$, onde $u_i = e_i - a_ie_{2n}$, para $i = 1, ..., n$, e $v_j = e_{n+j} - b_je_{2n}$, para $j = 1, ..., n-1$.

Segue, do Exemplo A.8, que $H^{\perp} = [w]$, onde $w = (b_1, ..., b_{n-1}, 1, -a_1, ..., -a_n)$. Afirmamos que $\{u_1, ..., u_{n-1}, w, v_1, ..., v_{n-1}, e_{2n}\}$ é uma base simplética de $\mathbb{C}^{2n}$ relativa à forma simplética padrão ω_0. Com efeito, usando a Observação A.10 temos:

- $\omega_0(u_i, u_j) = \omega_0(e_i - a_ie_{2n}, e_j - a_je_{2n}) = \omega_0(e_i, e_i) - a_j\omega_0(e_i, e_{2n}) - a_i\omega_0(e_{2n}, e_j) + a_1a_j\omega_0(e_{2n}, e_{2n}) = 0.$

- $\omega_0(u_i, w) = 0$, pois $u_i \in H$, para todo $i = 1, ..., n-1$ e $w \in H^{\perp}$.

- $\omega_0(v_i, v_j) = \omega_0(e_{n+i} - b_ie_{2n}, e_{n+j} - b_je_{2n}) = \omega_0(e_{n+i}, e_{n+j}) - b_j\omega_0(e_{n+i}, e_{2n}) - b_i\omega_0(e_{2n}, e_{n+j}) + b_ib_j\omega_0(e_{2n}, e_{2n}) = 0.$

- $\omega_0(v_j, e_{2n}) = \omega_0(e_{n+j} - b_je_{2n}, e_{2n}) = \omega_0(e_{n+j}, e_{2n}) - b_j\omega_0(e_{2n}, e_{2n}) = 0.$

- $\omega_0(u_i, v_j) = \omega_0(e_i, e_{n+j}) - b_j\omega_0(e_i, e_{2n}) - a_i\omega_0(e_{2n}, e_{n+j}) + a_ib_j\omega_0(e_{2n}, e_{2n}) = \omega_0(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij}$.

- $\omega_0(w, v_j) = 0$, pois $v_j \in H$, para todo $j = 1, ..., n-1$ e $w \in H^{\perp}$.

- $\omega_0(u_i, e_{2n}) = \omega_0(e_i, e_{2n}) - a_i\omega_0(e_{2n}, e_{2n}) = 0$.

- $\omega_0(w, e_{2n}) = \omega_0(b_1e_1 + ... + b_{n-1}e_{n-1} + e_n - a_1e_{n+1} - ... - a_ne_{2n}, e_{2n}) = \omega_0(e_n, e_{2n}) = 1$.

Considere o isomorfismo linear $L : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ dado por $u_i \mapsto e_i$, $w \mapsto e_n$ e $v_i \mapsto e_{n+i}$. Observe que L leva base simplética em base simplética. Logo, L é um isomorfismo simplético.
Além disso, $L(H) = [e_1, ..., e_{2n-1}] = Z(y_n)$. ■

Observação B.32 *Seja $L : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ uma mudança de coordenadas afim.*

1. *Se $X \subset \mathbb{A}^n$ for uma variedade afim, então $L(X)$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}^n$.*

2. *$p \in \operatorname{Sing}(X)$ se, e somente se, $L(p) \in \operatorname{Sing}(L(X))$.*

3. *Se $p \in X$, então $L(T_pX) = T_{L(p)}L(X)$.*

B.6 Anel de Coordenadas de uma Variedade Afim

Definição B.33 *Seja $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim. Definimos o anel de coordenadas de X, que será denotado por $A(X)$, por*

$$A(X) = \frac{\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]}{\Im(X)}.$$

Exemplo B.34 *$A(X) = \frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n\rangle} \cong \mathbb{K}$, se $X = \{a = (a_1, ..., a_n)\}$.*
De fato, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] & \to & \mathbb{K} \\ & p & \mapsto & p(a) \end{array}.$$

Como $N(\varphi_a) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f(a) = 0\} = \Im(X)$ e φ_a é um homomorfismo de anéis sobrejetivo, segue do teorema dos isomorfismos que

$$A(X) = \frac{\mathbb{K}[x_1,...,x_n]}{\Im(X)} \cong \mathbb{K}.$$

B.6.1 Definição Intrínseca do Espaço Tangente de Zariski

Sejam $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim e $p \in X$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p : & A(X) & \to & \mathbb{K} \\ & \overline{f} & \mapsto & f(p) \end{array},$$

onde $A(X) = \frac{\mathbb{R}[x_1,...,x_n]}{\Im(X)}$ é o anel de coordenadas de X.

Note que φ_p está bem definida e é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Denotemos por $\mathbf{m}_p$, o núcleo de φ_p. Segue, do Teorema dos isomorfismos, que

$$\frac{A(X)}{\mathbf{m}_p} \cong \mathbb{K}.$$

Portanto, $\mathbf{m}_p$ é um ideal maximal de $A(X)$.

Observação B.35 *$\boldsymbol{m}_p$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com a seguinte ação:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \boldsymbol{m}_p & \to & \boldsymbol{m}_p \\ (k, \overline{f}) & \mapsto & k \cdot \overline{f} = \overline{kf} \end{array}.$$

Fato B.36 *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tais que $f - g \in \Im(X)$, onde $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade afim. Considere $p \in X$. Então*

$$d_p f|_{T_pX} = d_p g|_{T_pX}.$$

Prova. Sabemos que existe $h \in \Im(X)$ tal que $f - g = h$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(p) \ , \ i = 1, ..., n.$$

Seja $v = (v_1, ..., v_n) \in T_pX \leq \mathbb{K}^n$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)v_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}(p)v_i \ , \ i = 1, ..., n.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}(p)v_i,$$

ou seja,

$$d_pf(v) - d_pg(v) = d_ph(v) = 0 \ , \ \text{pois } h \in \Im(X) \text{ e } v \in T_pX.$$

Portanto $d_pf|_{T_pX} = d_pg|_{T_pX}$. ■

Fato B.37 *Sejam $L_1, ..., L_s \in V^*$, onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita n. Considere $W_i = N(L_i)$, $i = 1, ..., s$. Então $dim(W_1 \cap ... \cap W_s) = n - j$ se, e somente se, $dim[L_1, ..., L_s] = j$.*

Prova. Conferir o Lema 1.2.3 em [9]. ■

Lema B.38 *Seja $L \in (\mathbb{K}^n)^*$ tal que $L|_{T_pX} = 0$, onde $p \in X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade afim tal que $\Im(X) = \langle f_1, ..., f_s \rangle$. Então $L \in [d_pf_1, ..., d_pf_s]$.*

Prova. Lembremos que $T_pX = \cap_{i=1}^s N(d_pf_i)$. Assim, pelo fato B.37, $dim\ T_pX = n - j$, onde $j = dim\ [d_pf_1, ..., d_pf_s]$. Escolha $\{v_1, ..., v_{n-j}\}$ uma base de T_pX e considere $\{v_1, ..., v_{n-j}, w_1, ..., w_j\}$ uma base de $\mathbb{K}^n$. Além disso, considere $\{v_1^*, ..., v_{n-j}^*, w_1^*, ..., w_j^*\}$ base dual de $(\mathbb{K}^n)^*$.
Note que $[d_pf_1, ..., d_pf_s] \subset (T_pX)^0 = [v_1, ..., v_{n-j}]^0 = [w_1^*, ..., w_j^*]$. Como $dim\ [d_pf_1, ..., d_pf_s] = j$, temos que $[d_pf_1, ..., d_pf_s] = [w_1^*, ..., w_j^*]$.
Temos também que $L \in (\mathbb{K}^n)^*$. Assim, existem $a_1, ..., a_{n-j}, b_1, ..., b_j \in \mathbb{K}$ tais que $L = a_1v_1^* + \cdots + a_{n-j}v_{n-j}^* + b_1w_1^* + \cdots + b_jw_j^*$. Além disso, $L|_{TpX} = 0$, ou seja, $0 = L(v_i) = a_i$, para todo $i = 1, ..., n - j$. Portanto, $L = b_1w_1^* + \cdots + b_jw_j^* \in [w_1^*, ..., w_j^*] = [d_pf_1, ..., d_pf_s]$. ■

Proposição B.39 *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim e $p = (p_1, ..., p_n) \in X$. Então*

$$\frac{\boldsymbol{m}_p}{\boldsymbol{m}_p^2} \cong (T_pX)^*.$$

Prova. Defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbf{m}_p & \rightarrow & (T_pX)^* \\ & \overline{f} & \mapsto & d_pf \end{array},$$

a qual está bem definida pelo fato B.36. Afirmamos que φ é sobrejetiva.
De fato, seja $L \in (T_pX)^*$. Considere $\widetilde{L} \in (\mathbb{K}^n)^*$ uma extensão de L e $f = \sum_{i=1}^n \widetilde{L}(e_i)(x_i - p_i) \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Note que $f(p) = 0$, ou seja, $\overline{f} \in \mathbf{m}_p$.
Além disso, se $\alpha = \{v_1, ..., v_k\}$ é uma base de T_pX, onde $v_i = (v_{i1}, ..., v_{in})$, para $i = 1, ..., k$, então

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)v_{ij} = \sum_{j=1}^n \widetilde{L}(e_j)v_{ij} = \widetilde{L}(\sum_{j=1}^n v_{ij}e_j) = \widetilde{L}(v_i) = L(v_i),$$

ou seja, $d_pf(v_i) = L(v_i),\ \forall\ v_i \in \alpha$. Logo, $d_pf = L$ em T_pX e, portanto, $L = \varphi(\overline{f})$, com $\overline{f} \in \mathbf{m}_p$.

Então segue-se do Teorema dos isomorfismos que $\frac{\mathbf{m}_p}{N(\varphi)} \cong (T_pX)^*$. Mostremos que $N(\varphi) = \mathbf{m}_p^2$.

Se $\overline{f} \in \mathbf{m}_p^2$, então existem $\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_k}, \overline{\beta_1}, ..., \overline{\beta_k} \in \mathbf{m}_p^2$ tais que $\overline{f} = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\overline{\beta_i}$.

Assim,

$\overline{f} = \overline{\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i} \in \mathbf{m}_p \subset A(X) \Rightarrow f - \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i = h$ para algum $h \in \Im(X) \Rightarrow$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial h}{\partial X_i}(p),\ i = 1, ..., n \Rightarrow d_pf(v) = d_ph(v)\ \forall\ v \in T_pX$.

Como $h \in \Im(X)$ e $v \in T_pX$ temos que $d_ph(v) = 0$. Logo, $d_pf(v) = 0,\ \forall\ v \in T_pX$.

Portanto, $\overline{f} \in N(\varphi)$ e vale $N(\varphi) \supset \mathbf{m}_p^2$.

Agora, seja $\overline{f} \in N(\varphi)$. Então $\overline{f} \in \mathbf{m}_p$ e $d_pf : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ satisfaz $d_pf|_{T_pX} = \widehat{0}$. Assim, se $\Im(X) = \langle f_1, ..., f_s\rangle$ segue do Lema anterior que existem $a_1, ..., a_s \in \mathbb{K}$ tais que $d_pf = a_1d_pf_1 + \cdots + a_sd_pf_s$.

Considere $g = f - \sum_{j=1}^s a_jf_j \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Note que:

1. $f_j(p) = 0$, uma vez que $p \in X$ e $f_j \in \Im(X)$. Além disso, $f(p) = 0$, pois $\overline{f} \in \mathbf{m}_p$. Logo, $g(p) = f(p) - \sum_{j=1}^k a_jf_j(p) = 0$.

2. $\overline{f} = \overline{g}$, pois $g - f = -\sum_{j=1}^k a_jf_j \in \Im(X)$.

Afirmamos que $\overline{g} \in \mathbf{m}_p^2$.

De fato, como $g(p) = 0$ podemos escrever

$$g = \sum_{i=1}^n q_i(x_i - p_i) = \sum_{i=1}^n (q_i - q_i(p))(x_i - p_i) + \sum_{i=1}^n q_i(p)(x_i - p_i).$$

Assim, $q_i(p) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$.

Já vimos que $d_pf = a_1d_pf_1 + ... + a_sd_pf_s \in \mathbb{K}^{n*}$. Daí,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i = a_1\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)v_i + \cdots + a_s\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(p)v_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)e_i^* = a_1\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p)e_i^* + \cdots + a_s\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(p)e_i^* \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = a_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p) + \cdots + a_s\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^s a_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p).$$

Logo, $q_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 0$, $i = 1, ..., n$. Desse modo, $g = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - p_i)$, onde $q_i(p) = 0 = (x_i - p_i)(p)$, o que significa que $\overline{g} = \sum_{i=1}^{n} \overline{q_i}\overline{(x_i - p_i)} \in \mathbf{m}_p^2$.
Como $\overline{f} = \overline{g}$, concluimos que $\overline{f} \in \mathbf{m}_p^2$, o que implica que $N(\varphi) \subset \mathbf{m}_p^2$.
Portanto, $N(\varphi) = \mathbf{m}_p^2$ e temos o resultado. ∎

B.7 Funções Regulares e 1-formas

Definição B.40 *Sejam $U \subset X$ aberto, $f : U \to \mathbb{K}$ e $p \in U$. Dizemos que f é regular em p se, e somente se, existem uma vizinhança V de p em U, e funções $h, g \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ tais que $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, $\forall\, x \in V$. Se f for regular em todos os pontos de U dizemos que f é uma função regular em U.*

Para cada $U \subset X$ aberto, denotaremos $O_X(U) = \{f : U \to \mathbb{K} : f \text{ é regular}\}$.

Observação B.41 *$O_X(U)$ é um anel comutativo com unidade com as operações usuais de adição e multiplicação de funções. Desde que $f + g, f \cdot g \in O_X(U)$, se $f, g \in O_X(U)$.*

Observação B.42 *Se $f \in O_X(U)$, então $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \in O_X(U)$.*

Proposição B.43 *Seja $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ uma variedade afim. Defina*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A(X) & \to & O_X(X) \\ & \overline{f} & \mapsto & \widehat{f} \end{array},$$

onde $\widehat{f} : X \to \mathbb{K}$ é dada por $\widehat{f}(p) = f(p)$. Então verifica-se que φ é um isomorfismo de anéis.

Prova. Conferir Teorema 3.2, pág 17 em [6]. ∎

Defina

$$\Phi[U] = \left\{ \varphi : U \to \bigcup_{p \in U} \{p\} \times (T_pX)^* : \varphi(p) \in \{p\} \times (T_pX)^*,\ \forall\, p \in U \right\}.$$

Afirmamos que $\Phi[U]$ é um $O_X(U)$-módulo com as operações dadas a seguir:
Se $f \in O_X(U)$ e $\varphi, \psi \in \Phi[U]$, com $\varphi(x) = (x, L_x)$ e $\psi(x) = (x, M_x)$, onde $L_x, M_x \in (T_pX)^*$, então:

1. $\varphi + \psi$ é definida por $(\varphi + \psi)(x) = (x, L_x + M_x)$

2. $f \cdot \varphi$ é definida por $(f \cdot \varphi)(x) = (x, f(x)L_x)$.

Observação B.44 *A cada $f \in O_X(U)$ podemos associar $df \in \Phi[U]$, definida da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rcl} df: \ U & \to & \bigcup_{p \in U} \{p\} \times (T_pX)^*, \\ x & \mapsto & df(x) = (x, d_xf) \end{array}$$

com $d_xf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i^*$, onde $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ é a base dual canônica em $(\mathbb{K}^n)^*$.

Definição B.45 *Seja $\varphi \in \Phi[X]$. φ é uma 1-forma em X se, e somente se, $\forall\ p \in X$, existe uma vizinhança U_p de p tal que $\varphi|_{U_p}$ pertence ao $O_X(U)$-módulo gerado por $\{df \in \Phi[U_p] : f \in O_X(U)\}$. O conjunto das 1-formas em X será denotado por $\Omega[X]$. Assim, $\varphi \in \Omega[X] \Leftrightarrow \forall\ p \in X\ \exists\ U_p \subset X$, vizinhança de p, e $f_1, ..., f_k, g_1, ..., g_k \in O_X(U_p)$ tais que $\varphi|_{U_p} = f_1dg_1 + \cdots + f_kdg_k \in \Phi[U_p]$.*

Exemplo B.46 *Considere $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e as aplicações*

$$\begin{array}{rcl} t_1: \ \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} t_2: \ \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & b \end{array}.$$

Observe que

$$\begin{array}{rcl} dt_1: \ \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \to & \bigcup \{p\} \times (T_pX)^* \\ x & \mapsto & (x, e_1^*) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} dt_2: \ \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \to & \bigcup \{p\} \times (T_pX)^* \\ x & \mapsto & (x, e_2^*) \end{array}.$$

Afirmamos que dt_1 e dt_2 geram o $O_X(X)$-módulo $\Omega[X]$, isto é, $\forall\ \varphi \in \Omega[X]$, existem $f_1, f_2 \in O_X(X)$ tais que $\varphi = f_1dt_1 + f_2dt_2$.
Note que se $U \subset X$ é um aberto e $f \in O_X(U)$, então

$$df(p) = (p, d_pf) = (p, \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(p)e_1^* + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(p)e_2^*) = (p, \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(p)e_1^*) + (p, \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(p)e_2^*) =$$
$$\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(p)(p, e_1^*) + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(p)(p, e_2^*) = \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(p)dt_1(p) + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(p)dt_2(p) =$$
$$(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}dt_1 + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}dt_2)(p),\ \forall\ p \in U.$$

Agora se $\varphi \in \Omega[X] \subset \Phi[X]$, então $\varphi(p) = (p, a_1(p)e_1^* + a_2(p)e^*) = a_1dt_1(p) + a_2dt_2(p),\ \forall\ p \in X$.
Por outro lado, para todo $p \in X$, existe uma vizinhança U_p de p e $f_1, ..., f_k, g_1, ..., g_k \in$

$O_X(U_p)$ tais que $\varphi|_{U_p} = f_1 dg_1 + \cdots + f_k dg_k$. Como $g_1, ..., g_k \in O_X(U_p)$ temos que $dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} dt_1|_{U_p} + \frac{\partial g_i}{\partial x_2} dt_2|_{U_p}$, $\forall\ i = 1, ..., k$.

Logo,

$$\varphi|_{U_p} = f_1(\tfrac{\partial g_1}{\partial x_1} dt_1|_{U_p} + \tfrac{\partial g_1}{\partial x_2} dt_2|_{U_p}) + ... + f_k(\tfrac{\partial g_k}{\partial x_1} dt_1|_{U_p} + \tfrac{\partial g_k}{\partial x_2} dt_2|_{U_p}) =$$
$$(\textstyle\sum_{j=1}^k f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_1}) dt_1|_{U_p} + (\sum_{j=1}^k f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_2}) dt_2|_{U_p}.$$

Donde concluímos que $a_i|_{U_p} = \sum_{j=1}^k f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, para $i = 1, 2$, ou seja, $a_1, a_2 \in O_X(X)$. Assim, $\varphi = a_1 dt_1 + a_2 dt_2$, com $a_1, a_2 \in O_X(X)$ e, portanto, $\Omega[X] = O_X(X)dt_1 + O_X(X)dt_2$. Afirmamos ainda que se $\varphi \in \Omega[X]$ é tal que $\varphi = a_1 dt_1 + a_2 dt_2 = b_1 dt_1 + b_2 dt_2$, com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in O_X(X)$, então $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Logo, $\Omega[X]$ é um $O_X(X)$-módulo livre de posto 2, tendo por base $\{dt_1, dt_2\}$.

Escreve-se $\Omega[X] \cong O_X(X) \oplus O_X(X) \cong O_X^2(X)$.

De modo mais geral, se $X = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, então $\Omega[X] \cong O_X^n(X)$ é gerado por $\{dt_1, ..., dt_n\}$, onde

$$\begin{array}{rccc} t_i : & \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

é a projeção na i-ésima coordenada, para cada $i = 1, ..., n$.

Lema B.47 *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim e $p \in X$. Se $\theta \in \Omega[\mathbb{A}^n]$, dada por $\theta(p) = (p, \theta_p)$, é tal que $\theta_p|_{T_pX} = 0$, então existe $f \in \Im(X)$ tal que $d_p f = \theta_p$.*

Prova. Considere $\Im(X) = \langle f_1, ..., f_k \rangle$. Note que $\theta_p \in (\mathbb{C}^n)^*$ e que $\theta_p|_{T_pX} = 0$. Então, pelo Lema B.38, existem $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$ tais que $\theta_p = a_1 d_p f_1 + \cdots + a_k d_p f_k$. Tomando $f = a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k \in \Im(X)$ temos que $d_p f = a_1 d_p f_1 + \cdots + a_k d_p f_k = \theta_p$.

■

Referências Bibliográficas

[1] Avritzer, D. *Introdução à Geometria Enumerativa via Teoria de Deformações.* 2ª Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, 2004.

[2] Berstein J. e Lunts V. *On non-holonomic irreducible D-módulos.* Invent. Math. 94 (1988), 223-243.

[3] Bix, R. *Conics and cubics: A concrete introduction to algebraic curves.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] Coutinho, S. *On Involutive varieties and representation of Weyl algebras.* Journal of Algebra 227, 195-210, 2000.

[5] Harris, J. *Algebraic geometry: a first course.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992.

[6] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics : 52. Springer-Verlag, New York, 1977.

[7] Kemper, G. *A course in commutative algebra.* Springer; 1st Edition. edition (December 10, 2010).

[8] Levcovitz, D. e Vainsencher, I. *Symplectic enumeration.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, vol. 42, Number 3 (2011), 347-358.

[9] Lisboa, V. *O Problema das 4 retas do Cálculo de Schubert.* Dissertação de Mestrado UFPB, 2011.

[10] Rojas, J. e Mendoza, R. *Álgebra Linear e o problema das quatro retas do cálculo de Schubert.* Revista Matemática Universitária, nº 45, 55 - 69, 2009.

[11] Shafarevich, I. *Basic algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[12] Silva, M. *O Teorema da dimensão das fibras para pontos não-fechados e aplicações*. Dissertação de Mestrado UFPE, 2011.

[13] Vainsencher, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2009.