Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets

Eberson Ferreira da Silva

João Pessoa – PB
Abril de 2013

EBERSON FERREIRA DA SILVA

Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets

Dissertação apresentada em 08 de abril de 2013 ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

João Pessoa – PB
Abril de 2013

S586t Silva, Eberson Ferreira da.
Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets / Eberson Ferreira da Silva.-- João Pessoa, 2013.
76f.
Orientador: Carlos Bocker Neto
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Expoentes de Lyapunov. 4. Ergódica. 5. Probabilidade Invariante. 6. Pontos Regulares. 7. Fibrados.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets

por

Eberson Ferreira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em

Aprovado em 08 de abril de 2013.

Banca Examinadora:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto–UFPB

(Orientador)

Krerley Olivi

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira – UFAL

(Examinador Externo)

Alexandre de B. Simas

Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas–UFPB

(Examinador Interno)

Aos meus Pais

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me acompanhado e guiado em todos os momentos de minha vida.

Agradeço a minha mãe Eliete por ter dedicado a mim um amor incomensurável. Por ter me ensinado, através de exemplos, como ser uma pessoa boa e honesta, por ter me apoiado em todas as decisões, por ter sempre zelado pelo bem de nossa família e por todos os sacrifícios feitos até hoje. Tudo o que sou como homem e cidadão é responsabilidade dessa mulher maravilhosa que sempre fez o melhor por mim e expressar o quanto sou grato em um texto seria impossível.

Agradeço ao meu pai Edson, que me mostrou desde cedo o valor do trabalho duro. Que mesmo nas dificuldades nunca deixou de me dar suporte. Agradeço pelo seu carinho e por seu bom humor presente em nosso lar.

Agradeço a Suelen, por ter me apoiado nesse ultimo ano, por sua compreensão nas horas difíceis e por ter me dedicado seu amor.

Agradeço ao amigo Sanderson por ter me apoiado no começo dessa jornada, por ter assumido responsabilidades que não eram suas para poder me ajudar. Agradeço muito pela força e grande parte dessa conquista eu devo a você.

Agradeço muito aos meus professores de graduação , Maité Kulesza e Jorge Antonio Hinojosa, pois além de me passarem seus conhecimentos, me incentivaram bastante a seguir a carreira acadêmica. Agradeço aos meus professores do mestrado, em especial ao professor Fagner Araruna, que confiou em mim e me recomendou para o mestrado na UFPB.

Agradeço aos meu amigos e colegas do mestrado pelo apoio nas horas complicadas e pelos momentos de divertimento que também são essenciais. Um agradecimento especial à Mariana, Wanderson, Rainelly, Paulo e Francisco. Agradeço também a Islanita Cecilia que me acolheu na minha chegada em João Pessoa e me deu dicas valiosas sobre o mestrado. Enfim, à todos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Agradeço muito ao amigo Rafael Barbosa com quem partilhei esse dois anos de mestrado. Obrigado pela convivência e paciência. Pelas conversas produtivas, pelas coisas que me ensinou e por ter me ajudado sempre que possível. Agradeço ao amigo Felipe Fernando por toda paciência, pelo apoio “técnico”, por todas as conversas e pela amizade.

Agradeço meu orientador Carlos Bocker pela sua paciência e por ter me ajudado nesse trabalho. Meus agradecimentos também aos componentes da banca, por terem aceitado examinar meu trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis"

René Descartes

Resumo:

Neste trabalho, estudamos uma versão do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets para difeomorfismos de classe C^1 sobre uma variedade Riemanniana compacta de dimensão finita que garante a existência dos expoentes de Lyapunov em quase todo ponto com relação a uma medida de probabilidade boreliana invariante pelo difeomorfismo. Na verdade, demonstraremos o teorema em uma versão mais geral, a saber, no contexto de cociclos lineares. O teorema de Oseledets para difeomorfismos será estabelecido como um caso particular desta versão.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Expoentes de Lyapunov , Ergódica, Probabilidade Invariante, Pontos Regulares, Fibrados.

Abstract

In this paper, we study a version of the Multiplicative Ergodic Theorem of Oseledets for diffeomorphisms of class C^1 on a compact Riemannian manifold of finite dimension which ensures the existence of Lyapunov exponents at almost every point with respect to a Borel probability measure invariant by diffeomorphism. In fact, we demonstrate the theorem in a more general version, namely in the context of linear cocycles. The theorem of Oseledets for diffeomorphisms will be established as a special case of this version.

Keywords: Dynamical Systems, Lyapunov exponents, Ergodic, Invariant Probability, Regular Points, bundles.

Sumário

Introdução

Quando estudamos um sistema dinâmico, uma das questões mais frequentes é a sensibilidade do comportamento do sistema em relação as condições iniciais. Para medirmos o quão sensível é o sistema é necessário sabermos como se comporta a taxa com a qual dois pontos muito próximos, isto é, com condições iniciais muito próximas se distanciam mediante a evolução do sistema. Um método desenvolvido pelo matemático russo Alexander M. Lyapunov (1857-1918) mede o afastamento entre dois pontos iniciais considerando que a taxa de aumento da distância entre eles seja exponencial. A sensibilidade às condições iniciais de um sistema pode ser medida pelo número real denominado expoente de Lyapunov. É natural questionar o que ocorre em um sistema dinâmico quando o número de iterações sobre seus pontos tende a infinito. Neste caso, o expoente de Lyapunov é definido como um limite para cada ponto do espaço onde o sistema se desenvolve , e portanto também podemos questionar sobre a existência ou não do expoente de Lyapunov para cada ponto. Sob o ponto de vista probabilístico o teorema conhecido como Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets (devido a Valery Oseledets) garante a existência dos expoentes de Lyapunov para quase todo ponto de um sistema dinâmico sob certas condições. Em 1965, Valery Oseledets era um estudante de pós-graduação sob a orientação de Y. Sinai. Do trabalho de Sinai tornou-se claro que a entropia positiva nos sistemas dinâmicos clássicos está relacionado a divergência exponencial de órbitas originadas em pontos próximos. Esta conexão se tornou o ponto de partida do interesse de Oseledets no problema de divergência exponencial. Em 1965, durante o workshop sobre teoria ergódica em Khumsan, ele provou o Teorema Ergódico Multiplicativo. A ideia principal da prova é reduzir o caso geral para o caso de cociclos triangulares. Em 1966, Oseledets deu uma palestra intitulada "A lei forte dos grandes números para os processos de matrizes aleatórias"no Congresso Internacional de Matemáticos, em Moscou. Um ano depois, ele defendeu sua tese doutorado , o terceiro capítulo desta tese foi chamado de "A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems"("Teorema ergódico multiplicativo. Números de Lyapunov característicos de sistemas dinâmicos"). Finalmente, em 1968, o artigo com o mesmo título, foi publicado. Ragunathan deu mais uma prova do Teorema Ergódico Multiplicativo explorando o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman. Outras demonstrações alternativas e em vários contextos do Teorema Ergódico Multiplicativo foram sendo dadas desde então.

Neste trabalho apresentaremos uma versão do Teorema de Oseledets seguindo a demonstração dada por Marcelo Viana (referência [13]) que é um aperfeiçoamento da demonstração dada por Mañé ([10]).

O intuito do Capítulo 1 será estabelecer notações e dar definições e resultados importantes para o restante do texto. Iniciaremos com alguns conceitos da Teoria da Medida que aparecerão com frequência durante o texto. Alguns teoremas deste capítulo não serão demonstrados, pois os mesmos são teoremas clássicos e são facilmente encontrados nos textos sobre o assunto. No entanto, será dado a referência onde pode-se encontrar tais demonstrações.

Logo após, no Capítulo 2, passaremos a dar definições importantes de Teoria Ergódica, tais como a definição de Medida Invariante e Ergodicidade. Ainda será apresentado alguns resultados importantes, como o Teorema de Recorrência de Poincaré e o Teorema Ergódico de Birkhoff.

No Capítulo 3, iniciaremos com definições do expoente de Lyapunov mostrando sua relação com os iterados de pontos em condições muito próximas. Depois, passamos a definir pontos regulares, expoentes de Lyapunov e espaços próprios de um difeomorfismo de classe C^1 em um ponto qualquer de uma variedade Riemanniana compacta de dimensão finita. Neste capítulo será apresentado o resultado principal da nossa dissertação que é o Teorema de Oseledets. A demonstração do Teorema de Oseledets vai seguir de um resultado mais geral cuja a demonstração será dada em etapas e as definições e resultados necessários para seu entendimento serão introduzidas ao longo do capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições e notações básicas ao entendimento do texto e também resultados que serão utilizados futuramente. Não será apresentado todas as demonstrações, mas indicaremos as referências onde podem ser encontradas.

1.1 Tópicos em Teoria da Medida

1.1.1 Espaços de medida

Definição 1.1. *Uma álgebra no conjunto X é uma família Σ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) $\emptyset, X \in \Sigma$.
(ii) Se $A \in \Sigma$, *então* $A^C := X \backslash A \in \Sigma$.
(iii) Se $A, B \in \Sigma$, *então* $A \cup B \in \Sigma$.

Desta definição , temos também que

$$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \Sigma \text{ e } A \backslash B = A \cap B^C \in \Sigma.$$

Definição 1.2. *Dizemos que uma álgebra Σ no conjunto X é uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X, se*

$$A_n \in \Sigma \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$$

Definição 1.3. *O par ordenado (X, Σ), composto pelo conjunto X e por sua $\sigma-$álgebra é chamado de espaço mensurável. Os elementos da $\sigma-$álgebra são ditos conjuntos mensuráveis.*

Vemos também que

$$A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C)^C \in \Sigma.$$

Dada uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, dizemos que uma $\sigma-$álgebra $\Sigma(\mathcal{F})$ é a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{F}$, se $\mathcal{F} \subset \Sigma(\mathcal{F})$ e para toda $\sigma-$álgebra Ω de subconjuntos de X tal que $\mathcal{F} \subset \Omega$ tivermos $\Sigma(\mathcal{F}) \subset \Omega$. Notemos que a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{F}$ é a menor $\sigma-$álgebra em X que contém $\mathcal{F}$.

Se X é um espaço topológico a $\sigma-$álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos recebe o nome de *$\sigma-$álgebra de Borel de X* e a denotamos $\mathcal{B}(X)$. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de *conjuntos de Borel* ou *borelianos* de X.

Definição 1.4. *Uma medida num espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ que satisfaz:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequencia de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ é dita *finita* se $\mu(X) < \infty$, e dita $\sigma -$ *finita* se existirem conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$ para todo n.

Definição 1.5. *A tripla (X, Σ, μ) é chamada espaço de medida. Se $\mu(X) = 1$ dizemos que μ é uma medida de probabilidade(ou apenas, probabilidade). Neste caso, chamamos (X, Σ, μ) de espaço de probabilidade.*

Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, dizemos que um conjunto $C \subset X$ tem medida 0 se existe $A \in \Sigma$ tal que $C \subset A$ e $\mu(A) = 0$. Uma propriedade aplicável a pontos de um conjunto $S \subset X$ vale em *quase todo ponto $x \in S$ com relação a medida μ*(abreviadamente $\mu-$q.t.p.) se o conjunto dos pontos de S onde não vale a propriedade é de medida zero.

Proposição 1.1. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então:*

1. *Se $A, B \in \Sigma$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Se $A, B \in \Sigma$ e $A \subseteq B$ e $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
3. *Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.*

4. *Se* $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ *e* $\mu(A_1) < \infty$*, então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

5. $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Demonstração. Ver as referências [2] , [4]. □

1.1.2 Funções Mensuráveis

Definição 1.6. *Dados dois espaços mensuráveis* (X, Σ) *e* (Y, Ω) *dizemos que a aplicação* $T : X \to Y$ *é mensurável se* $T^{-1}(A) \in \Sigma$ *para todo* $A \in \Omega$*.*

Se X e Y são espaços topológicos dizemos que $T : X \to Y$ é mensurável se o é com respeito às $\sigma-$álgebras de borelianos.

Proposição 1.2. *Sejam* C *uma família de subconjuntos de* Y *e* $\Sigma_2 = \Sigma(C)$ *a* $\sigma-$*álgebra gerada por* C*. Então* $f : (X, \Sigma_1) \to (Y, \Sigma_2)$ *é mensurável se, e somente se* $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ *para cada* $A \in C$*.*

Demonstração. Uma das implicações é obvia. Então basta mostrar que se $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ para cada $A \in C$ então f é mensurável. Mostremos inicialmente que o conjunto

$$Q = \{A \in \Sigma_2 : f^{-1}(A) \in \Sigma_1\}$$

é uma $\sigma-$ álgebra em X. De fato,pois

1. $\emptyset \in Q$, pois $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \Sigma_1$

2. Seja $A \in Q$. Notemos que $f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Ou seja , $A^C := Y \backslash A \in Q$.

3. Se $A_n \in Q$ para todo n, então $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \Sigma_1$, ou seja, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in Q$.

Como $C \subset Q$, segue que $\Sigma_2 \subset Q$ e, portanto $f^{-1}(B) \in \Sigma_1, \quad \forall B \in \Sigma_2$, isto é , f é mensurável. □

Desta forma, *se* $T : X \to Y$*, onde* X *e* Y *são espaços topológicos, é contínua, então* T *é mensurável.* De fato, continuidade significa que a pré-imagem de qualquer aberto de Y é um aberto de X e, portanto, está na $\sigma-$álgebra de Borel de X. Como os abertos de Y geram a $\sigma-$álgebra de Borel de Y, segue que a pré-imagem de qualquer boreliano de Y também é um boreliano na $\sigma-$álgebra de Borel de X.

Passaremos agora a apresentar definições e teoremas que relacionam convergência e mensurabilidade. Alguns dos resultados a seguir serão de utilidade no decorrer do texto.

Definição 1.7. *Se X é um conjunto e Y um espaço topológico, dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \to Y$ converge pontualmente para uma função $f : X \to Y$, se*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in X$.

Proposição 1.3. *Se (X, Σ) e $(Y, \mathcal{B}(Y))$ são espaços mensuráveis, onde Y é um espaço métrico, e $f_n : X \to Y$, $n \geq 1$ é uma sequência de funções mensuráveis convergindo pontualmente para uma função $f : X \to Y$, então f é mensurável.*

Demonstração. Observemos que pela Proposição 1.2, basta apenas mostrar que $f^{-1}(U) \in \Sigma$ para todo aberto U em Y. Definamos o conjunto

$$F_m := \{y \in U : B(y, \frac{1}{m}) \subset U\},$$

onde $B(y, r) := \{v : d(v, y) < r\}$. Então F_m é fechado: Se $y_j \in F_m$, para todo $j \in \mathbb{N}$, $y_j \to y$, e $d(v, y) < \frac{1}{m}$, então para j suficientemente grande temos $d(v, y_j) < \frac{1}{m}$, assim $v \in U$. Agora, $f(x) \in U$ se e somente se $f(x) \in F_m$ para algum m, e então para n suficientemente grande temos que

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{2m}$$

e isto implica que $f_n(x) \in F_{2m}$ para n suficientemente grande. Reciprocamente, se $f_n(x) \in F_m$ para n suficientemente grande , então como F_m é fechado temos $f(x) \in F_m \subset U$. Portanto, mostramos que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_m \bigcup_k \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}(F_m)$$

e como $f_n^{-1}(F_m) \in \Sigma$, pois cada f_n é mensurável, segue que $f^{-1}(U) \in \Sigma$ como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 1.4. *Sejam (A, Σ) e (B, Ω) espaços mensuráveis e uma aplicação $f : A \to B$. Se existe uma cobertura enumerável $(A_n)_n$ de A por conjuntos mensuráveis, tal que $f|_{A_n} : A_n \to B$ é uma aplicação mensurável para cada $n \geq 1$, então $f : A \to B$ é uma aplicação mensurável.*

Demonstração. Seja $Y \in \Omega$. Temos que $(f|_{A_n})^{-1}(Y) \in \Sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (f|_{A_n})^{-1}(Y) \in \Sigma$. Agora, mostremos que

$$f^{-1}(Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f|_{A_n})^{-1}(Y).$$

De fato, uma das inclusões é obvia, provemos então que $f^{-1}(Y) \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (f|_{A_n})^{-1}(Y)$. Seja $x \in$

$f^{-1}(Y)$. Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue que $x \in A_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, logo vemos que $x \in (f|_{A_{n_0}})^{-1}(Y)$. Desta forma, concluímos que

$$f^{-1}(Y) \subset (f|_{A_{n_0}})^{-1}(Y) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (f|_{A_n})^{-1}(Y).$$

Donde segue o resultado. □

Definição 1.8. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e Y um espaço topológico, dizemos que uma sequência $f_n : X \to Y$, $n \geq 1$, converge em $\mu-$quase todo lugar ($\mu-$q.t.p $x \in X$) se existe $M \in \Sigma$ com $\mu(M) = 0$ tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall x \in X \backslash M.$$

Teorema 1.1. *(Egorov) Seja (X, Σ, μ)um espaço de probabilidade, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, $f_n : X \to \mathbb{R}, n \geq 1$, uma sequência de funções mensuráveis tal que $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ em $\mu-$q.t.p. $x \in X$. Então a sequência f_n converge quase uniformemente a f, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$ com $\mu(A) \leq \epsilon$ tal que a sequência $f_n|A^C$ converge uniformemente a $f|A^C$.*

Demonstração. Ver referências [2], [3] e [4]. □

Definição 1.9. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge em medida à uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$:*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Dizemos também que f_n é de Cauchy em medida se

$$\lim_{n,m \to +\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) = 0, \ \forall \epsilon > 0.$$

Proposição 1.5. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge em medida , então f_n é de Cauchy em medida.*

Demonstração. Se f_n converge em medida então para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Notemos que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ temos

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|.$$

Deste modo,

$$\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Logo,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) + \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}).$$

Fazendo agora, n, m ir para o infinito, temos

$$\lim_{m,n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) \leq 0$$

donde

$$\lim_{m,n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

$\square$

Teorema 1.2. *Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida e $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que f_n converge em medida para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$, então existe uma subsequência f_{n_k} de f_n que converge em $\mu-$q.t.p $x \in X$ para f.*

Demonstração. Pela Proposição anterior, temos que (f_n) é de Cauchy em medida. Assim, tomemos uma subsequência $(f_{n_k}) = (g_k)$ de (f_n) tal que para o conjunto

$$E_k = \{x \in X : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\}$$

tenha-se $\mu(E_k) < 2^{-k}$. Seja $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$, onde vemos que $F_k \in \Sigma$ e

$$\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) < \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-(k-1)}.$$

Se $i \geq j \geq k$ e $x \notin F_k$, então

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + ... + |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^{i-1}} + ... + \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{1}{2^{j-1}}. \end{aligned}$$

Agora, considere $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Assim, $F \in \Sigma$ e $\mu(F) = \lim_{k \to \infty} \mu(F_k) = 0$. Podemos concluir então que (g_k) é uma sequência de Cauchy que converge em $X \backslash F$. Se definirmos uma função f por

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_k(x), & x \notin F \\ 0 & x \in F \end{cases}$$

Temos que (g_k) converge em $\mu-$q.t.p. para a função mensurável f. □

1.1.3 Integração em Espaços de Medida.

Definição 1.10. *Seja $B \subset X$. Uma função $\mathcal{X}_B : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{X}_B(x) = \begin{cases} \mathcal{X}_B(x) = 1 & \textit{se} \quad x \in B \\ \mathcal{X}_B(x) = 0 & \textit{se} \quad x \notin B \end{cases}$$

*é chamada **função característica de B**.*

Definição 1.11. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é **simples** se existem $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$ e conjuntos mensuráveis $A_1, ..., A_k \in \Sigma$ disjuntos dois-a-dois tais que*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$$

Existe uma única representação $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$ tal que $a_1, a_2, ..., a_k$ são números reais não nulos e distintos e $X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, neste caso dizemos que é a **representação padrão** de φ.

Denotemos por $M(X, \Sigma)$ como o conjunto das funções mensuráveis $f : (X, \Sigma) \to \mathbb{R}$ e por $M^+(X, \Sigma)$ o conjunto das funções mensuráveis não negativas.

Proposição 1.6. *Seja $X \to [-\infty, \infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sequência (φ_n) de funções simples tal que $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo n e*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x) \textit{ para todo } x \in X.$$

Se f é limitada então a sequência pode ser tomada de modo que a convergência seja uniforme. Se $f \in M^+(X, \Sigma)$ então podemos escolher $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq ... \leq f$.

Demonstração. Ver as referências [2] , [4] e [5]. □

Definição 1.12. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida.*

1. *A* ***integral*** *da função simples* $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$, *cuja a representação padrão é* $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{A_i}$, *em relação à medida* μ *é definida por*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

2. *A* ***integral*** *da função* $f \in M^+(X, \Sigma)$ *em relação à medida* μ *é definida por*

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \ \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

3. *Para* $f \in M^+(X, \Sigma)$ *e* $A \in \Sigma$, *define-se*

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathcal{X}_A d\mu.$$

Proposição 1.7. *Sejam* $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ *e* $A, B \in \Sigma$.

1. *Se* $f \leq g$, *então* $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
2. *Se* $A \subseteq B$, *então* $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
3. $\int_X f d\mu = 0$ *se , e somente se,* $f = 0$ $\mu-$*q.t.p.*

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ defina as funções $f^+, f^- : X \to [0, +\infty)$ como

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \text{ e } f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}.$$

Notemos que $f = f^+ - f^-$ e que f^+, f^- são não negativas. Observemos ainda que

$$f \in M(X, \Sigma) \Leftrightarrow f^+, f^- \in M^+(X, \Sigma).$$

Definição 1.13. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Dizemos que uma função* $f \in M(X, \Sigma)$ *é integrável (ou* $\mu-$*integrável quando existir a necessidade de especificar sob qual medida estamos considerando) se*

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \text{ e } \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

Neste caso definimos
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Proposição 1.8. *Sejam $f, g \in M(X, \Sigma)$ integráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então cf e $f + g$ são integráveis e*

$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu \ \text{ e } \ \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Proposição 1.9. *Uma função $f \in M(X, \Sigma)$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso temos*
$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Definição 1.14. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é dita integrável se as funções $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ são integráveis, onde*

$$f_1(x) = Re(f(x)) \ \text{ e } \ f_2(x) = Im(f(x)).$$

Neste caso definimos
$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu.$$

O conjunto de todas as funções integráveis $f : X \to \mathbb{K}$ é denotada por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$. Seja $p \geq 1$. Denota-se $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável.

Passemos agora a enunciar alguns dos mais importantes teoremas em Teoria da Medida relacionados a convergência e integral.

Teorema 1.3. ***(Convergência monótona)*** *Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, uma sequência de funções integráveis tal que para $\mu - q.t.p$ $x \in X$ a sequência $\{f_n(x)\}_n$ é monótona crescente e*

$$\sup_n \int_X f_n d\mu < +\infty.$$

Então a função $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ é integrável e

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Teorema 1.4. ***(Fatou)*** *Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções positivas e integráveis tal que*

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu < +\infty$$

e convergindo em $\mu-$q.t.p para $f : X \to \mathbb{R}$. Então f é integrável e

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$$

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Teorema 1.5. ***(Teorema da Convergência Dominada)*** *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que converge $\mu-$q.t.p. para uma função $f : X \to \mathbb{K}$. Se existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$ para todo n, então $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Definição 1.15. *Seja X um conjunto e Σ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X. Se $\mu : X \to [0, +\infty)$ e $\nu : X \to [0, +\infty)$ são medidas, dizemos que μ é absolutamente contínua com respeito a ν, denotamos $\mu \ll \nu$, se $A \in \Sigma$ e $\nu(A) = 0$ implica $\mu(A) = 0$.*

Teorema 1.6. ***(Radon-Nikodym)*** *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $\nu : \Sigma \to [0 : +\infty)$ uma medida satisfazendo $\mu \ll \nu$. Se (X, Σ, μ) é $\sigma-$finito (isto é,se existe uma cobertura enumerável de X por conjuntos em Σ de medida μ finita), então existe uma função $\nu-$integrável $f : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $A \in \Sigma$:*

$$\mu(A) = \int_A f d\nu$$

Mais ainda, uma função $g : X \to \mathbb{C}$ é $\mu-$integrável se, e somente se, fg é $\nu-$integrável e

$$\int_X g d\mu = \int_X f g d\nu.$$

A função f é única em $\nu-$q.t.p e é chamada de derivada de Radon-Nikodym de μ com respeito a μ e a denotamos por $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Demonstração. Ver referências [2] e [4]. □

Capítulo 2

Tópicos em Teoria Ergódica.

2.1 Medida Invariante e Teorema de Recorrência de Poincaré

A matéria de estudo da Teoria Ergódica são sistemas dinâmicos que possuem medidas invariantes sob a ação da dinâmica. Entederemos por sistemas dinâmicos de tempo discreto transformações do tipo $f : M \to M$, sendo M é um espaço qualquer, onde consideramos o comportamento do conjunto $\{f^n(x) \in M : x \in M\}$, denominado órbita de x por f. Consideraremos também sistemas dinâmicos com tempo contínuo, neste caso estaremos lidando com *fluxos*, isto é, com uma família de transformações $f^t : M \to M,\ t \in \mathbb{R}$ satisfazendo $f^0 = id$ e $f^t \circ f^s = f^{t+s}$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Notemos que na definição de fluxo temos que f^t é invertível e sua inversa é f^{-t}. O sistema dinâmico é dito mensurável quando o espaço M está munido de uma $\sigma-$álgebra Σ de subconjuntos mensuráveis e $f^{-1}(A) \in \Sigma,\ \forall A \in \Sigma$, (ou $f^{-t}(A) \in \Sigma, \forall A \in \Sigma$ e $\forall t \in \mathbb{R}$).

Definição 2.1. *Sejam (M, Σ, μ) um espaço de medida e $f : M \to M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é invariante por f, ou que f preserva μ, se*

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \text{ para todo subconjunto mensurável } B \subset M.$$

Dizemos que uma medida μ é invariante pelo fluxo $(f^t)_t$ se ela é invariante para cada transformação f^t, isto é , se

$$\mu(B) = \mu(f^{-t}(B)) \text{ para todo subconjunto } B \subset M \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que a definição dada de medida invariante foi dada para uma transformação mensurável $f : M \to M$. Na verdade, a definição 2.1 acima é um caso particular da seguinte definição:

Definição 2.2. *Sejam (X, Σ, μ) e (Y, Ω, ν) espaços de medida. Dizemos que uma transformação $T : X \to Y$ preserva medida se é mensurável e $\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A),\ \forall A \in \Omega$.*

O próximo resultado caracteriza quando uma medida μ é invariante por um transformação f em um espaço M.

Proposição 2.1. *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida em M. Então f preserva a medida μ se, e somente se, para cada função $\mu-$integrável $\psi : M \to \mathbb{R}$ vale :*

$$\int \psi d\mu = \int \psi \circ f d\mu. \tag{2.1}$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que f preserva a medida μ. Se ψ é uma função característica , digamos de um conjunto $B \subset M$ mensurável, então $\psi(x) = \mathcal{X}_B(x)$ onde

$$\mu(B) = \int \mathcal{X}_B d\mu \quad \text{e} \quad \mu(f^{-1}(B)) = \mathcal{X}_{f^{-1}(B)} = \int \mathcal{X}_B \circ f d\mu.$$

Como μ é invariante por suposição, segue $\int \mathcal{X}_B d\mu = \int \mathcal{X}_B \circ f d\mu$. Dessa forma, fica provado que $\int \psi d\mu = \int \psi \circ f d\mu$ quando ψ é uma função característica. Logo, por linearidade da integral, segue que 2.1 também vale para funções simples. Agora, considere uma função $\mu-$integrável $\psi : M \to \mathbb{R}$ qualquer. Seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência de funções simples convergindo para ψ com $|\varphi_n| \leq |\psi|, \forall n$. A existência da sequência (φ_n) é garantida pela Proposição 1.6 . Agora, usando o teorema da convergência dominada (Teorema 1.5) , temos

$$\int \psi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu \quad \text{e} \quad \int \psi \circ f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \circ f d\mu.$$

Notemos que $\int \varphi_n d\mu = \int \varphi_n \circ f d\mu$, pois φ_n é simples, então segue que

$$\int \psi d\mu = \int \psi \circ f d\mu.$$

A reciproca é imediata, dado um conjunto mensurável B e tomando $\psi = \mathcal{X}_B$, então

$$\int \psi d\mu = \int \psi \circ f d\mu \Rightarrow \mu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

□

O resultado a seguir garante a existência de medidas invariantes sob certas condições. A demonstração de tal fato encontra-se nas referências [3], [10] e [12].

Teorema 2.1. *Seja $T : X \to X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma probabilidade invariante por T.*

2.1.1 Teorema de Recorrência de Poincaré

Apresentamos agora um importante teorema de recorrência, devido a Poincaré, que na sua versão probabilística afirma que para medidas invariantes finitas por uma transformação mensurável $f : M \to M$ em algum espaço M, quase todo ponto x de um conjunto mensurável E com medida positiva retorna infinita vezes ao conjunto por f.

Teorema 2.2. *(Recorrência de Poincaré) Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por f. Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável tal que $\mu(E) > 0$. Então, para $\mu-$quase todo ponto $x \in E$ tem-se que $f^n(x) \in E$ para um número infinito de índices n.*

Prova: Denotemos por $E_0 = \{x \in E : f^n(x) \notin E, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$, isto é , E_0 é o subconjunto de E dos pontos que nunca regressam a E por f. Vamos mostrar primeiramente que E_0 tem medida nula. Afirmamos que $f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0) = \emptyset$, $\forall m > n \geq 1$. De fato, suponha que exista um elemento $x \in f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0)$ e seja $y = f^n(x)$. Desta forma temos que $y \in E_0$ e que $f^{m-n}(y) = f^m(f^{-n}(y)) = f^m(x) \in E_0 \subset E$, ou seja, y retorna a E pelo menos uma vez mais, o que contradiz a definição de E_0. Portanto, da nossa afirmação e da invariância de μ , concluímos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0)$$

Como supomos μ finita temos que o lado esquerdo da igualdade acima é finito e como o lado direito é uma soma de infinitas parcelas iguais, só nos resta que $\mu(E_0) = 0$. Assim, quase todo ponto x retorna a E pelo menos uma vez.

Considere agora o conjunto F dos pontos de E que retornam por f a E apenas um número finito de vezes. Afirmamos que

$$F \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E_0).$$

De fato, seja $x \in F$, logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in E$ e $f^j(x) \notin E$ para todo $j > k$, isto é, $f^k(x) \in E_0$ e assim $x \in f^{-k}(E_0) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E_0)$. Como $\mu(E_0) = 0$ e μ é invariante por f, temos

$$\mu(F) \leq \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0.$$

Portanto, $\mu(F) = 0$ e isto conclui a demonstração do teorema. ■

Na sua versão topológica o Teorema de recorrência de Poincaré considera M um espaço topológico munido da $\sigma-$álgebra de Borel. Dizemos que um ponto $x \in M$ é recorrente se para toda vizinhança U de x existe algum iterado $f^n(x)$ em U. Consideraremos ainda que M admite uma base enumerável de abertos, isto é, uma família enumerável de conjuntos abertos $\{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$

tal que todo aberto de M pode ser escrito como união de elementos U_α dessa família,

Teorema 2.3. *(Recorrência de Poincaré-Versão Topológica) Suponhamos que M admite uma base enumerável de abertos. Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida invariante finita. Então, $\mu-$quase todo ponto $x \in M$ é recorrente para f.*

Demonstração. Para cada α representamos por U_α^0 o conjunto dos pontos $x \in U_\alpha$ que nunca regressam a U_α. De acordo com o Teorema 2.2, U_α^0 tem medida nula para cada α. Logo, a união enumerável

$$\widetilde{U} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha^0$$

tem medida nula. Desta forma, para demonstrar o teorema teremos que mostrar apenas que se $x \notin \widetilde{U}$, então x é recorrente. Seja $x \in M \backslash \widetilde{U}$ e seja U uma vizinhança qualquer de x. Como M admite uma base de abertos , segue que U pode ser escrito como união de elementos U_α dessa base. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k$ com $U_k \subset U$. Sendo assim, como $x \notin \widetilde{U}$, também $x \notin U_k^0$ e, com isso x tem algum iterado $f^n(x),\ n \geq 1$ que está em U_k. Em particular $f^n(x) \in U$ e como supomos U uma vizinhança qualquer de x, segue que x é um ponto recorrente. □

2.2 Teorema Ergódico de Birkhoff

Trataremos agora de um resultado de grande importância na Teoria Ergódica demonstrado primeiramente por George David Birkhoff em 1931. A demonstração que apresentamos segue da referência [14], veja também [8].

Teorema 2.4. *(Teorema Ergódico de Birkhoff) Seja (X, Σ, μ) um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação que preserva a medida μ. Então, dada qualquer função integrável $f : X \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\widehat{f}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \tag{2.2}$$

existe para $\mu-$quase todo ponto $x \in X$. Além disso, $\widehat{f}$ é uma função integrável com

$$\int \widehat{f} d\mu = \int f d\mu \quad e \quad \widehat{f} \circ T = \widehat{f}.$$

Demonstração. Comecemos a prova mostrando que $\widehat{f} \circ T = \widehat{f}$. De fato, esta igualdade segue de

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(T(x)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(T(x))) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) - \frac{1}{n} f(x) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) = \widehat{f}(x).
\end{aligned}$$

Agora iremos provar a existência (em $\mu-$q.t.p) do Limite 2.2. Como toda função pode ser escrita como diferença de duas funções não negativas, isto é,

$$f = \max\{f, 0\} - \max\{-f, 0\}$$

podemos sem restrição, supor $f \geq 0$. Sejam as funções

$$\overline{f}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \qquad \text{e} \qquad \underline{f}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)).$$

Se conseguirmos mostrar que

$$\int \overline{f} d\mu \leq \int f d\mu \leq \int \underline{f} d\mu, \tag{2.3}$$

então segue que $\int (\overline{f} - \underline{f}) d\mu \leq 0$ e, como $(\overline{f} - \underline{f}) \geq 0$, temos $\overline{f} = \underline{f}$ em $\mu-$q.t.p, que é exatamente o que precisamos concluir.

Vamos inicialmente provar a primeira desigualdade em 2.3 . Para isto, consideremos $\overline{f}_K = \min\{\overline{f}, K\}$, onde $K \in \mathbb{N}$ é um inteiro fixado (grande). Também fixamos $\epsilon > 0$ (pequeno) e para cada $x \in X$ definimos

$$t(x) = \min\left\{ n \geq 1 : \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \geq \overline{f}_K(x) - \epsilon \right\}. \tag{2.4}$$

Notemos que $t(x)$ sempre existe pela definição de $\limsup$ e porque $\overline{f} \geq \overline{f}_K$. Notemos ainda que 2.4 implica

$$\sum_{j=0}^{t(x)-1} f(T^j(x)) \geq t(x)(\overline{f}_K(x) - \epsilon). \tag{2.5}$$

Escolhemos $M \in \mathbb{N}$ grande de modo que o conjunto

$$E = \{x \in X : t(x) > M\}$$

tenha $\mu(E) \leq (\epsilon/K)$. Notemos que isso é sempre possível, uma vez que a família de conjuntos $E_n = \{x \in M : t(x) = n\}$ forma uma partição do espaço X e desta forma tem-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(X) = 1$, logo $\mu(E) = \sum_{n>M} \mu(E_n) \leq (\epsilon/K)$ desde que M seja suficientemente grande.

Agora para cada $x \in X$ e $n \geq 1$ definamos sequências x_i (de iterados de x) e t_i (de inteiros positivos), da seguinte forma:

1. Tomamos $x = x_0$.
2. Suponhamos que x_i já foi definido. Para a definição de t_i e de x_{i+1} temos duas possibilidades:
   (a) Se $t(x_i) \leq M$ então tomamos $t_i = t(x_i)$ e $x_{i+1} = T^{t_i}(x_i)$.
   (b) Se $t(x_i) > M$ então tomamos $t_i = 1$ e $x_{i+1} = T(x_i)$.
3. Terminamos quando encontramos x_s tal que $t_0 + t_1 + ... + t_{s-1} + t_s \geq n$.

Do fato que cada $t_i \geq M$ e $t_0 + t_1 + ... + t_{s-1} + t_s \geq n$, segue que

$$t_0 + t_1 + ... + t_{s-1} \geq n - M. \tag{2.6}$$

No caso (a) acima, usando 2.5 obtemos

$$\sum_{j=0}^{t_i-1} (f + K\mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) \geq \sum_{j=0}^{t_i-1} f(T^j(x_i)) \geq t_i(\overline{f}_K(x_i) - \epsilon) = t_i(\overline{f}_K(x) - \epsilon), \tag{2.7}$$

onde a ultima igualdade segue de que $\overline{f}_K(T(y)) = \overline{f}_k(y)$ (a prova disto é análoga a de $\widehat{f}(T(x)) = \widehat{f}(x)$). Por outro lado, no caso (b) temos

$$\sum_{j=0}^{t_i-1} (f + K\mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) = f(x_i) + K \geq K \geq t_i(\overline{f}_K(x) - \epsilon). \tag{2.8}$$

Então, usando 2.7 , 2.8 , e 2.6 , e escrevendo $\tau = t_0 + ... + t_{s-1}$, para simplificar a notação) ,temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (f + K\mathcal{X}_E)(T^j(x)) &= \sum_{i=0}^{s-1} (\sum_{j=0}^{t_i-1} (f + K\mathcal{X}_E)(T^j(x))) + \sum_{j=\tau}^{n-1} (f + K\mathcal{X}_E)(T^j(x)) \\ &\geq (\sum_{i=0}^{s-1} t_i)(\overline{f}_K(x) - \epsilon) + 0 \geq (n - M)(\overline{f}_K(x) - \epsilon). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Observando que $\displaystyle\int (f + K\mathcal{X}_E) \circ T^j d\mu = \int (f + K\mathcal{X}_E) d\mu$ para todo j, pois μ é $T-$invariante, e integrando o primeiro e o ultimo membro da desigualdade 2.9 acima , temos

$$n\left(\int f d\mu + K\mu(E)\right) \geq (n - M)\left(\int \overline{f}_K d\mu - \epsilon\right).$$

Dividindo ambos os membros por n e fazendo $n \to \infty$, vemos que

$$\int f d\mu + K\mu(E) \geq \int \overline{f}_K d\mu - \epsilon \Longrightarrow \int f d\mu \geq \int \overline{f}_K d\mu - \epsilon - \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0$$

e portanto $\displaystyle\int f d\mu \geq \int \overline{f}_K d\mu$.

Agora, observemos que f_K é uma sequência crescente (em K) que converge monotonamente para $\overline{f}$. Assim usando o Teorema 1.3 , obtemos

$$\int f d\mu \geq \int \overline{f} d\mu.$$

A segunda desigualdade em 2.3 é provada basicamente da mesma forma, apenas com algumas diferenças com relação ao caso anterior. Vamos indicar tais diferenças. Consideremos

$$t(x) = \min\left\{n \geq 1 : \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \leq \underline{f}(x) + \epsilon\right\}. \tag{2.10}$$

e definamos x_i, t_i de mesmo modo que antes. Tomemos o conjunto E da mesma forma que antes, mas com M fixado de tal forma que

$$\int_E f d\mu \leq \epsilon. \tag{2.11}$$

Aplicando a $(f - f\mathcal{X}_E)$ o mesmo tipo de cálculo que usamos em 2.7 , 2.8 , 2.9 para a função $(f + K\mathcal{X}_E)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(f - f\mathcal{X}_E)(T^j(x)) &= \sum_{i=0}^{s-1}\left(\sum_{j=0}^{t_i-1}(f - f\mathcal{X}_E)(T^j(x))\right) + \sum_{j=\tau}^{n-1}(f - f\mathcal{X}_E)(T^j(x)) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{s-1} t_i\right)(\underline{f}(x) + \epsilon) + \sum_{j=\tau}^{n-1} f(T^j(x)) \\
&\leq n(\underline{f}(x) + \epsilon) + \sum_{j=\tau}^{n-1} f(T^j(x)).
\end{aligned}$$

Observemos que , por 2.6 , $n - \tau \leq M$, e integrando o primeiro e ultimo membro da desigualdade

acima , temos
$$n\left(\int fd\mu - \int_E fd\mu\right) \leq n\left(\int \underline{f}d\mu + \epsilon\right) + M\int fd\mu.$$
Dividindo ambos os lados por n, fazendo $n \to \infty$ e usando 2.11, temos

$$\int fd\mu \leq \int \underline{f}d\mu + \epsilon + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0$$

e portanto $\int fd\mu \leq \int \underline{f}d\mu$. Isto conclui a prova de 2.3 .

Dos argumentos apresentados segue também que $\int \widehat{f}d\mu = \int fd\mu$. Desta forma a prova do Teorema está completa. □

Definição 2.3. *O limite* $\widehat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$ *dado pelo Teorema Ergódico de Birkhoff é chamado de média temporal de* f*.*

Considerando ainda uma transformação mensurável $f : X \to X$, dado um conjunto $E \subset X$ mensurável com medida positiva e $x \in X$, definamos a fração

$$\tau_n(x,E) = \frac{1}{n}\#\{j \in \{0,1,...,n-1\} : f^j(x) \in E\}.$$

Notemos que
$$\tau_n(x,E) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x))$$

Definição 2.4. *Chamamos tempo médio de visita da órbita de* x *a* E *o limite*

$$\tau(x,E) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(x,E).$$

Como o tempo médio de visita é definido como um limite é natural perguntar se tal limite existe ou não. Vemos que esse limite existe para $\mu-$quase todo ponto $x \in X$ para toda medida μ de probabilidade, pois basta aplicar o Teorema Ergódico de Birkhoff para a função mensurável $\mathcal{X}_E$ e além disso temos ainda que

$$\int \tau(x,E)d\mu = \int \mathcal{X}_E d\mu = \mu(E) \quad \text{ e } \quad \tau(x,E) = \tau(f(x),E).$$

2.3 Ergodicidade

Definição 2.5. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e uma transformação $T : X \to X$ que preserva medida. Um conjunto $A \subset X$ mensurável é dito $T-$invariante se $T^{-1}(A) = A$. Uma função mensurável $\psi : X \to \mathbb{R}$ é dita $T-$invariante se $\psi \circ T = \psi$ em $\mu-$q.t.p.*

Proposição 2.2. *Seja (M, Σ, μ) uma espaço de probabilidade onde μ é invariante por uma transformação $f : M \to M$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para toda função integrável $\psi : M \to \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) = \int \psi d\mu$, para $\mu-$ quase todo ponto.*
2. *Para todo subconjunto mensurável $E \subset M$ tem-se $\tau(x, E) = \mu(E)$, para $\mu-$quse todo ponto.*
3. *Para todo subconjunto mensurável $f-$invariante E tem-se $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.*
4. *Toda função integrável $f-$invariante $\psi : M \to \mathbb{R}$ é constante em $\mu-$quase todo ponto.*

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ De fato, temos

$$\tau(x, E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)) = \int \mathcal{X}_E d\mu = \mu(E)$$

em $\mu-$quase todo ponto.
$(2 \Rightarrow 3)$ Seja $E \subset M$ um conjunto mensurável $f-$invariante. Temos, por (2), que

$$\mu(E) = \tau(x, E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)).$$

Como E é $f-$ invariante, segue que $x \in E$ se, e somente se, $f(x) \in E$. Logo $\mathcal{X}_E(f^j(x)) = \mathcal{X}_E(x)$, para todo j. Desta forma, se $x \notin E$, então $\mu(E) = 0$ e se $x \in E$ então $\mu(E) = 1$.
$(3 \Rightarrow 4)$ Seja uma função integrável $f-$invariante $\psi : M \to \mathbb{R}$. Considere o conjunto

$$B_\alpha = \{x \in M : \psi(x) \leq \alpha\} \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$f^{-1}(B_\alpha) = \{x \in M : f(x) \in B_\alpha\} = \{x \in M : \psi(f(x)) \leq \alpha\} = \{x \in M : \psi(x) \leq \alpha\} = B_\alpha.$$

Isto é, B_α é $f-$invariante. Logo $\mu(B_\alpha) = 0$ ou $\mu(B_\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Observemos ainda que a função $g : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ definida por $g(\alpha) = \mu(B_\alpha)$ é não-decrescente, ou seja, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_1 \leq \alpha_2$, então $g(\alpha_1) = \mu(B_{\alpha_1}) \leq \mu(B_{\alpha_2}) = g(\alpha_2)$. Assim, existe $\widehat{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(B_\alpha) = 0$

para todo $\alpha < \widehat{\alpha}$ e $\mu(B_\alpha) = 1$ para todo $\alpha \geq \widehat{\alpha}$. Donde concluímos que $\psi(x) = \widehat{\alpha}$ para $\mu-$quase todo ponto.

$(4 \Rightarrow 1)$ Seja $\psi : M \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Pelo Teorema 2.4 temos que em $\mu-$ q.t.p. existe a função

$$\widehat{\psi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x))$$

onde $\int \widehat{\psi} d\mu = \int \psi d\mu$ e $\widehat{\psi} \circ f = \psi$ em $\mu-$quase todo ponto. Donde vemos que $\widehat{\psi}$ é $f-$invariante e portanto $\widehat{\psi}(x) = A$ com $A \in \mathbb{R}$. Observamos também que $\int \widehat{\psi} d\mu = A$, isto é, $\int \widehat{\psi} d\mu = \widehat{\psi}(x)$. Assim, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) = \widehat{\psi}(x) = \int \widehat{\psi} d\mu = \int \psi d\mu$$

em $\mu-$quase todo ponto. □

Definição 2.6. *Uma transformação $f : M \to M$ diz-se* ***ergódica*** *para uma probabilidade invariante μ se uma das condições dadas na Proposição 2.2 (e portanto todas) é satisfeita. (Também dizemos que a medida μ é ergódica para f, ou que o sistema (f, μ) é ergódico)*

Lema 2.1. *Seja uma transformação $f : M \to M$ qualquer. Se μ e ν são probabilidades invariantes tais que μ é ergódica e ν é absolutamente contínua com relação a μ então $\mu = \nu$.*

Prova: Seja $\psi : M \to \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada qualquer, e consideremos

$$\widehat{\psi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x))$$

a sua média temporal. Como μ é invariante e ergódica, segue que a média temporal é constante

$$\widehat{\psi}(x) = \int \psi d\mu$$

para $\mu-$q.t.p. Temos que isto vale também para $\nu-$q.t.p., pois $\nu << \mu$. Assim, concluímos que

$$\int \widehat{\psi}(x) d\nu = \int \psi(x) d\mu.$$

Por outro lado, pelo teorema ergódico de Birkhoff 2.4 , temos

$$\int \widehat{\psi}(x) d\nu = \int \psi(x) d\nu.$$

Ou seja, temos $\int \psi(x) d\nu = \int \psi(x) d\mu$ para qualquer que seja a função limitada ψ. Logo, tomando funções características, $\nu = \mu$. ■

Observe que se μ_1 e μ_2 são probabilidades invariantes por uma transformação $f: M \to M$, então $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ com $t \in (0,1)$ é também uma probabilidade invariante. De forma que o conjunto de todas as probabilidades invariantes é convexo.

Definição 2.7. *Seja X um conjunto convexo. Um ponto $p \in X$ é dito extremal, se para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$, $x + t(y-x) = p$ implica que $t = 0$ ou $t = 1$.*

Proposição 2.3. *Uma probabilidade invariante μ é ergódica se, e somente se não é possível escrevê-la na forma $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ com $t \in (0,1)$ e μ_1, μ_2 probabilidades invariantes distintas.*

Demonstração. Primeiro provemos a parte "se". Suponha que μ não é ergódica. Então pela Proposição 2.2 , temos que existe um conjunto invariante A com $0 < \mu(A) < 1$. defina μ_1 e μ_2 como sendo

$$\mu_1(E) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)} \quad \text{e} \quad \mu_2(E) = \frac{\mu(E \cap A^C)}{\mu(A^C)}.$$

Como A e A^C são conjuntos invariantes e μ é invariante, μ_1 e μ_2 são também medidas probabilidades invariantes. Onde vemos que $\mu = \mu(A)\mu_1 + \mu(A^C)\mu_2$ e assim, μ não é extremal. Agora, mostremos a recíproca. Suponha μ ergódica e que temos $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ com $t \in (0,1)$. Notemos que se $\mu(E) = 0$ então devemos ter $\mu_1(E) = 0$ e $\mu_2(E) = 0$, donde μ_1 e μ_2 são absolutamente contínuas com respeito a μ. Logo, pelo Lema 2.1, temos $\mu_1 = \mu = \mu_2$. Portanto μ é extremal. □

A proposição acima afirma que medidas ergódicas são elementos extremais no conjunto de todas as probabilidades invariantes por $f: M \to M$.

2.3.1 Decomposição ergódica de medidas invariantes

Nesta subseção não apresentaremos todos os detalhes, para maiores informações e demonstrações consultar [10, Cap.II,§6] .

Definição 2.8. *Seja X um espaço topológico e seja μ uma medida na $\sigma-$álgebra de Borel de X. O suporte supp(μ) da medida μ é o conjunto formado pelos pontos $x \in X$ tais que $\mu(V) > 0$ para qualquer vizinhança V de x.*

Seja X um espaço métrico compacto. Denotemos por $C^0(X)$ o espaço de todas as funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ provido da norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Teorema 2.5. *(Riesz) Seja X um espaço métrico compacto. Seja $\varphi : C^0(X) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo limitado, isto é, uma aplicação linear tal que $\varphi(f) \geq 0$ para todo $f \in C^0(X)$ com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e $\varphi(1) = 1$(onde $1 \in C^0(X)$ é a função identicamente 1). Então existe uma única medida de probabilidade boreliana finita μ em X tal que*

$$\int f d\mu = \varphi(f)$$

para todo $f \in C^0(X)$.

A partir de agora consideraremos, salvo menção contrária, que X é um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma transformação mensurável. Denotemos por $\mathcal{M}_T(X)$ o conjunto das probabilidades $T-$invariantes sobre os borelianos de X. Observemos que pelo Teorema 2.1, se T é contínua então $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$. Quando $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$ convém perguntar se existem elementos ergódicos neste conjunto. A resposta é afirmativa pelo resultado que iremos apresentar.

Definamos

$$\Sigma_0(T) = \{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)),\ \forall f \in C^0(X)\}.$$

Para cada $x \in \Sigma_0(T)$, o funcional linear $L_x : C^0(X) \to \mathbb{R}$ dado por

$$L_x(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

é positivo e $L_x(1) = 1$. Logo pelo Teorema 2.5 existe uma única probabilidade μ_x sobre os borelianos de X tal que

$$\int f d\mu_x = L_x(f).$$

Em seguida definamos $\Sigma_1(T) = \{x \in \Sigma_0(T) : \mu_x \text{ é } T - \text{invariante }\}$. Notemos que se T é contínua então $\Sigma_0(T) = \Sigma_1(T)$, pois para toda $f \in C^0(X)$ temos:

$$\int (f \circ T) d\mu_x = L_x(f \circ T) = L_x(f) = \int f d\mu_x.$$

Finalmente definamos

$$\Sigma_2(T) = \{x \in \Sigma_1(T) : \mu_x \text{ é ergódica}\} \quad \text{e} \quad \Sigma(T) = \{x \in \Sigma_2(T) : x \in \text{ supp}(\mu_x)\}.$$

Pode-se mostrar $\Sigma_0(T),\ \Sigma_1(T), \Sigma_2(T)$ e $\Sigma(T)$ são borelianos.

Definição 2.9. *Um conjunto mensurável* $A \subset X$ *tem* ***probabilidade total*** *se* $\mu(A) = 1$ *para toda* $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

O próximo resultado garante a existência de elementos ergódicos em $\mathcal{M}_T(X)$ desde que o mesmo seja não-vazio.

Teorema 2.6. *Se* $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$, *então* $\Sigma(T)$ *é um conjunto de probabilidade total.*

Lema 2.2. *Se $f : \Sigma_0(T) \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada, a igualdade:*

$$\int_X f d\mu_x = \widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

vale para um conjunto de probabilidade total de valores x.

O teorema seguinte mostra que uma medida invariante pode ser decomposta em medidas ergódicas.

Teorema 2.7. *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável e $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$. Então toda função f $\mu-$integrável é μ_x-integrável para $\mu-$q.t.p. com $x \in \Sigma(T)$ e*

$$\int \left(\int f d\mu_x \right) d\mu = \int f d\mu.$$

Prova: Quando $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada, pelo Lema 2.2:

$$\int_X f d\mu_x = \widetilde{f}(x)$$

para $\mu-$q.t.p. $x \in X$. Então

$$\int_X \left(\int_X f d\mu_x \right) d\mu = \int_X \widetilde{f} d\mu = \int_X f d\mu.$$

Quando $f \in \mathcal{L}(\mu)$ podemos supor ,sem perda de generalidade, que f é positiva. Logo, existe uma sequência monótona crescente de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis limitadas que converge em todo ponto a f. Assim,

$$\int_X f d\mu_x = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu_x = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}_n(x)$$

para $\mu-$q.t.p. x. Como a sequência $\widetilde{f}_n$ é monótona crescente, pois f_n é monótona crescente, e como

$$\int_X \widetilde{f}_n d\mu = \int_X f_n d\mu$$

podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona e obtemos

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_X f d\mu_x \right) d\mu(x) = & \int_X \left(\lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}_n \right) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \widetilde{f}_n d\mu \\ = & \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

■

Observação 1. *Observemos que se* $f = \mathcal{X}_A$, *onde* $A \in X$ *é um conjunto mensurável, no Teorema 2.7 acima, então*

$$\int \mu_x(A) d\mu = \mu(A).$$

O corolário seguinte segue do Teorema 2.7 e da Observação 1 e será de grande utilidade no nosso trabalho.

Corolário 2.1. *Um conjunto* $A \subset X$ *é de probabilidade total se* $\mu(A) = 1$ *para toda probabilidade* $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ *ergódica.*

Capítulo 3

Teorema de Oseledets

3.1 Expoentes de Lyapunov

De maneira informal vamos introduzir inicialmente a definição dos expoentes de Lyapunov em uma dimensão para uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideremos $x \in \mathbb{R}$ e seja $\Delta x \in \mathbb{R}$ pequeno de modo que x e $x + \Delta x$ estejam bem próximos (condições iniciais próximas) . Vamos observar o comportamento dos iterados destes dois pontos com relação a distância entre eles depois de $n \geq 1$ iterações. Ou seja, vamos descrever o que ocorre com valor

$$|f^n(x + \Delta x) - f^n(x)|.$$

Notemos que para Δx suficientemente pequeno temos

$$\frac{|f^n(x + \Delta x) - f^n(x)|}{|\Delta x|} \approx |(f^n)'(x)|$$

Ou seja,

$$|f^n(x + \Delta x) - f^n(x)| \approx |(f^n)'(x)||\Delta x|$$

tomemos agora a raiz $n-$ésima em ambos lados da aproximação acima, logo

$$(|f^n(x + \Delta x) - f^n(x)|)^{\frac{1}{n}} \approx |(f^n)'(x)|^{\frac{1}{n}}|\Delta x|^{\frac{1}{n}}.$$

Aplicando a Regra da Cadeia vemos que

$$|(f^n)'(x)| = |\prod_{j=1}^{n-1} f'(f^j(x))|$$

e assim,

$$|f^n(x+\Delta x) - f^n(x)|^{\frac{1}{n}} \approx |\prod_{j=1}^{n-1} f'(f^j(x))|^{\frac{1}{n}} |\Delta x|^{\frac{1}{n}}.$$

Aplicando agora o logaritmo e depois fazendo n ir para o infinito, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|f^n(x+\Delta x) - f^n(x)| \approx \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \log|f'(f^j(x))| \right).$$

Se o limite do lado direito existe, definimos $\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \log|f'(f^j(x))| \right)$ como o expoente de Lyapunov em x. Observemos que para n suficientemente grande, temos

$$|f^n(x+\Delta x) - f^n(x)| \approx e^{n\lambda(x)}$$

onde observamos que dependendo do sinal de $\lambda(x)$ os iterados de x e $x+\Delta x$ se aproximam ou se afastam. Desta forma, considerando a existência de $\lambda(x)$ podemos caracterizar o que ocorre com as órbitas de pontos sob condições iniciais muito próximas. Notemos ainda que se a função $\log|f'|$ for integrável com relação a uma medida μ finita definida sobre os Borelianos de $\mathbb{R}$ e f for uma função que preserva μ, então pelo Teorema de Birkhoff 2.4 temos que $\lambda(x)$ existe em $\mu-$q.t.p.

No caso de $\mathbb{R}^m$, podemos introduzir também de maneira informal a definição de expoente de Lyapunov em um ponto x na direção de um vetor v unitário. Sejam $f : U \to U$ um difeomorfismo sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^m, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$ uma direção qualquer. Consideremos os pontos $x \in U$ e $x + t\vec{v}$ com $t \neq 0$ em $\mathbb{R}$, suficientemente pequeno (condições iniciais próximas). Da mesma forma que antes vamos tentar analisar o comportamento dos iterados desses pontos, isto é, vamos tentar analisar o comportamento do valor

$$\|f^n(x+t\vec{v}) - f^n(x)\|$$

com $n \geq 1$. Observemos que

$$\|f^n(x+t\vec{v}) - f^n(x)\| \approx \|D_x(f^n)\vec{v}\||t|$$

onde $D_x(f^n)\vec{v}$ é a derivada direcional de f^n na direção de $\vec{v}$. Tomemos a raiz $n-$ésima , assim

$$\|f^n(x+t\vec{v}) - f^n(x)\|^{\frac{1}{n}} \approx \|D_x(f^n)\vec{v}\|^{\frac{1}{n}} |t|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.1}$$

Observemos que pela Regra da Cadeia , temos

$$\|D_x(f^n)\vec{v}\| = \|D_{f^{n-1}(x)}f \circ D_{f^{n-2}(x)}f \circ ... \circ D_x f\vec{v}\|$$

no entanto, essa igualdade não pode ser decomposta num produtório como no caso unidimensional. Desta forma tomando o logaritmo em 3.1 , temos

$$\frac{1}{n}\log\|f^n(x+t\vec{v})-f^n(x)\|\approx\frac{1}{n}\log\|D_x(f^n)\vec{v}\|+\frac{1}{n}\log|t|.$$

Agora façamos n tender para infinito, logo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|f^n(x+t\vec{v})-f^n(x)\|\approx\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_x(f^n)\vec{v}\|.$$

Então , desde que o limite no lado direito exista, parece natural definir o expoente de Lyapunov em um ponto x na direção de $\vec{v}$ como

$$\lambda_{\vec{v}}(x):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_x(f^n)\vec{v}\|$$

A existência no caso $m-$ dimensional dos expoentes de Lyapunov sob certas condições é dada pelo Teorema de Oseledets. Na próxima seção apresentaremos uma versão da definição de expoentes de Lyapunov onde estaremos lidando com variedades Riemannianas compactas de dimensão finita e f será um difeomorfismo de classe C^1. Além de provar a existência em μ q.t.p. dos expoentes de Lyapunov, o Teorema de Oseledets vai também garantir a existência de subespaços com certas propriedades associados aos expoentes.

3.2 Pontos Regulares e Expoentes de Lyapunov

Definição 3.1. *Seja $f: M\to M$ um difeomorfismo de classe C^1 sobre uma variedade Riemanniana compacta M de dimensão finita. Dizemos que $x\in M$ é um ponto regular para f se existem números reais $\lambda_1(x)>\lambda_2(x)>\ldots>\lambda_l(x)$ e uma decomposição $T_xM=E_1(x)\oplus\ldots\oplus E_l(x)$ do espaço tangente de M em x, tais que*

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\|=\lambda_j(x)\ \textit{para todo}\ u\in E_j(x)\backslash\{0\}\ \textit{e}\ 1\leq\ j\leq l.$$

Observe que $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l\}$ deve coincidir com

$$\{\lambda\in\mathbb{R}:\lambda=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\|\ \text{para algum}\ u\in T_xM\backslash\{0\}\}$$

e devemos ter também

$$E_j(x)=\{u\in T_xM:\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\|\to\ \lambda_j\ \text{quando}\ n\to\pm\infty\}$$

Proposição 3.1. *Quando existem, os reais $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_l(x)$ e os subespaços $E_1(x), \ldots, E_l(x)$ são unicamente determinados.*

Prova: Para provar esta proposição vamos utilizar o seguinte resultado:

Lema 3.1. *Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ e $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k$ sequências em um espaço vetorial normado qualquer com $x_n^i \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, k$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|x_n^1\| = \lambda_1 > \ldots > \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|x_n^k\| = \lambda_k$. Então temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\sum\limits_{i=1}^{k} x_n^i\| = \lambda_1$.*

Demonstração. Notemos que mostrar a igualdade

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\sum_{i=1}^{k} x_n^i\| = \lambda_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|x_n^1\|$$

equivale a mostrar que para a sequencia definida por

$$\omega_n = \frac{1}{n} \log \|\sum_{i=1}^{k} x_n^i\| - \frac{1}{n} \log \|x_n^1\| = \frac{1}{n} \log \frac{\|\sum_{i=1}^{k} x_n^i\|}{\|x_n^1\|}$$

tem-se que $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = 0$. Sendo assim, passaremos a demonstrar isso.
Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|x_n^i\| = \lambda_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$, segue que dado $\epsilon > 0$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n > N_i \Rightarrow & -n\epsilon < \log \|x_n^i\| - n\lambda_i < n\epsilon \\ & \Rightarrow \exp(-n\epsilon) < \|x_n^i\| \exp(-n\lambda_i) < \exp(n\epsilon) \\ & \Rightarrow \exp(n[\lambda_i - \epsilon]) < \|x_n^i\| < \exp(n[\lambda_i + \epsilon]). \end{aligned}$$

Tomemos $N = \max\{N_i \ ; \ i = 1, \ldots, k\}$, assim

$$\begin{aligned} n > N \Rightarrow & \frac{1}{\|x_n^1\|} < \exp(-n[\lambda_1 - \epsilon]) \text{ e } \|x_n^i\| < \exp(n[\lambda_i + \epsilon]) \ , \ \forall i = 2, \ldots, k \\ \Rightarrow & \frac{\|x_n^i\|}{\|x_n^1\|} < \exp(n[\lambda_i + \epsilon] - n[\lambda_1 - \epsilon]), \ \forall i = 2, \ldots, k \\ \Rightarrow & \frac{\|x_n^i\|}{\|x_n^1\|} < \exp(-n[\lambda_1 - \lambda_i - 2\epsilon]), \ \forall i = 2, \ldots, k \ (*). \end{aligned}$$

Temos que $\lambda_1 - \lambda_i > 0,\ \forall i = 2, \ldots, k$ e como ϵ é arbitrário segue que podemos considerar $\lambda_1 - \lambda_i - 2\epsilon > 0$. Assim, fazendo $n \to +\infty$ em $(*)$ temos que $\frac{\|x_n^i\|}{\|x_n^1\|} \to 0$ e com isso $\sum\limits_{i=2}^{k} \frac{\|x_n^i\|}{\|x_n^1\|} \to 0$.

Portanto, para n suficientemente grande temos

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{\|x_n^i\|}{\|x_n^1\|}\leq C,\quad \text{com } 0<C<1$$

Desta forma,

$$1+C\geq\frac{\|\sum_{i=1}^{k}x_n^i\|}{\|x_n^1\|}\geq 1-\frac{\|\sum_{i=2}^{k}x_n^i\|}{\|x_n^1\|}\geq 1-C\Rightarrow\frac{1}{n}\log(1+C)\geq w_n\geq\frac{1}{n}\log(1-C),$$

para todo n suficientemente grande. Logo,

$$0=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(1+C)\geq\lim_{n\to+\infty}\omega_n\geq\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(1-C)=0.$$

Como queríamos mostrar. □

Agora, considere x um ponto regular para f e seja $u\in T_xM$. Como $T_xM=\bigoplus_{i=1}^{l}E_i(x)$ podemos escrever $u=\sum_{i=1}^{l}u_i$, com $u_i\in E_i(x)$. Assim, pelo Lema 3.1 segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)(\sum_{i=1}^{l}u_i)\|\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|\sum_{i=1}^{l}Df^n(x)u_i\|=\lambda_j(x)\end{aligned}$$

onde $j=\inf\{1\leq i\leq l: u_i\neq 0\}$. Além disso, aplicando também o Lema 3.1 considerando as sequencias $x_n^i=Df^{-n}(x)u_i$, temos

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\|=\lambda_k(x)\text{ onde } k=\sup\{1\leq i\leq l: u_i\neq 0\}.$$

Portanto $\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u\|$ se, e somente se, $j=k$, ou seja, u pertence a algum subespaço $E_j(x)$, $1\leq j\leq l$. Agora, consideremos uma outra decomposição $T_xM=\widehat{E}_1(x)\oplus\ldots\oplus\widehat{E}_m(x)$. Seja $u_j\in E_j(x)\backslash\{0\}$. Logo, $u_j=\sum_{i=1}^{m}\widehat{v}_i$ com $\widehat{v}_i\in\widehat{E}_i(x)$. Assim,

$$\lambda_j(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x)u_j\|=\widehat{\lambda}_{k^+}(x)$$

onde $k^+ = \inf\{1 \leq i \leq m : \widehat{v}_i \neq 0\}$ e

$$\lambda_j(x) = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)u_j\| = \widehat{\lambda}_{k^-}(x)$$

onde $k^- = \sup\{1 \leq i \leq m : \widehat{v}_i \neq 0\}$. Portanto, $\widehat{\lambda}_{k^+}(x) = \widehat{\lambda}_{k^-}(x)$ e $k^+ = k^- = k$. Logo, $u_j \in \widehat{E}_k(x)$ e com isso $E_j(x) \subset \widehat{E}_k(x)$. Podemos, de modo análogo, mostrar que $\widehat{E}_k(x) \subset E_j(x)$. Como T_xM tem dimensão finita, segue-se que $l = m$ e como

$$\lambda_l(x) > \lambda_2(x) > \ldots > \lambda_l(x) \quad \text{e} \quad \widehat{\lambda}_l(x) > \widehat{\lambda}_2(x) > \ldots > \widehat{\lambda}_l(x)$$

concluímos que $\lambda_i(x) = \widehat{\lambda}_i(x)$ e que $E_i(x) = \widehat{E}_i(x)$ para todo $1 \leq i \leq l$. ∎

Os números $\lambda_i(x)$ são chamados de **expoentes de Lyapunov** , os espaços $E_i(x)$ são chamados de **espaços próprios** de f no ponto regular x e a decomposição $T_xM = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_l(x)$ é chamada de **decomposição de Oseledets**.

Denotemos por $R(f)$ o conjunto de todos os pontos regulares de f. Temos que $R(f)$ é um conjunto f-invariante sob iteração, ou seja, $f(R(f)) = R(f)$, com $E_j(f(x)) = Df(x)E_j(x)$ e $\lambda_j(f(x)) = \lambda_j(x)$ para todo j e todo $x \in R(f)$. De fato, mostremos que $f(R(f)) \subset R(f)$. Seja $y \in f(R(f))$, logo existe $x \in R(f)$ tal que $y = f(x)$. Como x é um ponto regular temos que $T_xM = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_l(x)$. Temos ainda que $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}M$ e sendo $Df(x)$ linear segue que $T_{f(x)}M = Df(x)T_xM = Df(x)E_1(x) \oplus \ldots \oplus Df(x)E_l(x)$. Agora pelo fato de f ser um difeomorfismo, temos $Df(x)$ um isomorfismo. Assim, dado $v \in Df(x)E_j(x)\backslash\{0\}$ existe $u \in E_j(x)$ tal que $Df(x)u = v$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda_j(x) &= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n+1} \log \|Df^{n+1}(x)u\| \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n} \log \|Df^n(f(x))Df(x)u\| \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(f(x))v\| = \lambda_j(f(x)).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que $y = f(x) \in R(f)$. Notemos ainda que $Df(x)E_j(x) = E_j(f(x))$. Agora, seja $x \in R(f)$. Se provarmos que $f^{-1}(x) \in R(f)$ então teremos que $x \in f(R(f))$. Utilizando os mesmos argumentos acima podemos mostrar que $\lambda_j(f^{-1}(x)) = \lambda_j(x)$ e que $Df^{-1}(x)E_j(x) = E_j(f^{-1}(x))$ para cada $j = 1, \ldots, l$. Segue então que $f^{-1}(x) \in R(f)$.

Vamos agora dar alguns exemplos, inicialmente mostremos que os expoentes de Lyapunov em uma Isometria são todos nulos.

Exemplo 3.1. *Uma transformação linear $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é dita uma Isometria se*

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários. Como a derivada de uma transformação linear é a própria, temos que $Df(x) = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. E, portanto,

$$Df^n(x)v = f^n(v) \quad \textit{para todo } x, v \in \mathbb{R}^m.$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$, tem-se

$$\lambda(x, v) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|f^n(v)\| = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|v\| = 0$$

O que mostra que todos os expoentes de Lyapunov são 0 e a decomposição é a trivial, $E_x = \mathbb{R}^m$ para todo x.

Mais geralmente, vamos obter a decomposição de Oseledets e os expoentes de Lyapunov de um operador linear invertível $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ num ponto $x \in \mathbb{C}^d$. Note que, por linearidade de f, $Df^n(x) = f^n$, $\forall x \in \mathbb{C}^d$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.2. *Seja $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ um operador linear invertível e sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in \mathbb{C}$ seus autovalores distintos ordenados por suas normas, isto é, $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq ... \geq |\alpha_s|$. Pela forma canônica de Jordan existem subespaços $f-$invariantes $E_1, ..., E_s$ tais que*

$$\mathbb{C}^d = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_s \tag{3.2}$$

e operadores $f_i = f|E_i = \alpha_i I_{E_i} + N_i$, com $1 \leq i \leq s$, onde I_{E_i} é o operador identidade em E_i, N_i é um operador nilpotente e obviamente $N^d = 0$. Assim, para qualquer $n > d$ temos

$$f_i^n = (\alpha_i I_{E_i} + N_i)^n = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \alpha_i^{n-p} N_i^p = \alpha_i^n \sum_{p=0}^{d-1} \begin{pmatrix} d-1 \\ p \end{pmatrix} \alpha_i^{-p} N_i^p.$$

Chamemos $\sum_{p=0}^{d-1} \begin{pmatrix} d-1 \\ p \end{pmatrix} \alpha_i^{-p} N_i^p$ de A_i, note que A_i não depende de n. Logo, para todo $u \in E_i \backslash \{0\}$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|f_i^n(u)\| = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \log |\alpha_i|^n + \frac{1}{n} \log \|A_i u\| \right) = \log |\alpha_i|.$$

Analogamente, temos

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \log \|f_i^n(u)\| = \log |\alpha_i|,$$

basta notar que $f_i^{-1} = \alpha_i^{-1} I_{E_i} + \widetilde{N_i}$, com $\widetilde{N_i}$ nilpotente , a saber

$$\widetilde{N_i} = -\frac{N_i}{\alpha^2} + \frac{N_i^2}{\alpha^3} - \frac{N_i^3}{\alpha^4} + ... + (-1)^{d-1} \frac{N_i^{d-1}}{\alpha^d}.$$

Portanto, a decomposição de Oseledets para $Df(x) = f$, *no caso em que* $|\alpha_1| > |\alpha_2| > ... > |\alpha_s|$ *é dada pela decomposição 3.2 acima e os expoentes de Lyapounov associados coincidem com o logaritmo da norma dos valores característicos do operador. No caso geral, isto é,* $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq ... \geq |\alpha_s|$, *definimos*

$$j_1 = \max\{1 \leq j \leq s : |\alpha_j| = |\alpha_1|\},\ j_2 = \max\{j_1 + 1 \leq j \leq s : |\alpha_j| = |\alpha_{j_1+1}|\}, ...,$$

paramos este processo em j_k *onde* $k \in \{1, ..., s\}$ *é tal que* $j_k = s$. *Neste caso a decomposição de Oseledets é dada por* $\mathbb{C}^d = \widehat{E_1} \oplus ... \oplus \widehat{E_k}$, *onde*

$$\widehat{E_1} = E_1 \oplus ... \oplus E_{j_1},\ \widehat{E_2} = E_{j_1+1} \oplus ... \oplus E_{j_2},\ ...,\ \widehat{E_k} = E_{j_{k-1}+1} \oplus ... \oplus E_s.$$

E os expoentes de Lyapunov associados a cada $\widehat{E_j}$ *continuam sendo o logaritmo da norma de qualquer valor característico de* $f|\widehat{E_j}$. *Assim, notemos que todo ponto* $x \in \mathbb{C}^d$ *é regular para* f.

Mostremos agora, um caso onde os expoentes de Lyapunov existem em apenas dois pontos fixos de um difeomorfismo em S^1.

Exemplo 3.3. *Seja* $f : S^1 \to S^1$ *o difeomorfismo do círculo dado por* $f(x) = x + \frac{1}{3\pi}\sin(2\pi x)$, *onde* $0 \leq x < 1$ *é a coordenada cíclica em* S^1. *Tem-se dois pontos fixos para* f, $x_0 = 0$ *e* $x_1 = \frac{1}{2}$. *Temos que* $f'(x) = 1 + \frac{2}{3}\cos(2\pi x)$, *logo* $f'(x_0) = \frac{5}{3}$ *e* $f'(x_1) = \frac{1}{3}$. *Dessa forma, usando a Regra da Cadeia, temos*

$$\frac{1}{n}\log\|(f^n)'(x_0)\| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\log\|f'(f^j(x_0))\| = (\frac{n-1}{n})\log(f'(x_0)) = (\frac{n-1}{n})\log(\frac{5}{3})$$

assim o expoente de Lyapunov em x_0 *é*

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|(f^n)'(x_0)\| = \log(\frac{5}{3}) > 0$$

e da mesma forma tem-se

$$\lambda(x_1) = \lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|(f^n)'(x_1)\| = \log(\frac{1}{3}) < 0.$$

Agora podemos observar que para qualquer ponto $p \in (0, \frac{1}{2})$ *temos* $f^n(p) \to \frac{1}{2}$ *e* $f^n(p) \to 0$ *quando* $n \to +\infty$. *Logo, para qualquer vetor não nulo* $v \in T_p(S^1)$ *temos*

$$\log(\frac{5}{3}) = \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|(f^n)'(p)v\| \neq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|(f^n)'(p)v\| = \log(\frac{1}{3}) < 0.$$

Portanto não existe expoente de Lyapunov para qualquer ponto $p \in (0, \frac{1}{2})$. *Do mesmo modo, vê-se também que não existe expoente de Lyapunov para* $p \in (\frac{1}{2}, 1)$.

3.2.1 Teorema de Oseledets

Em geral o conjunto $R(f)$ é um subconjunto topologicamente pequeno de M, podendo constituir um conjunto magro (primeira categoria de Baire), pode até mesmo ser finito. Contudo sob o ponto de vista da Teoria da Medida a situação é justamente oposta como afirma o teorema a seguir:

Teorema 3.1. *(Oseledets): Se M é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão finita, então o conjunto dos pontos regulares $R(f)$ de um difeomorfismo de classe C^1, $f : M \to M$, tem probabilidade total para cada medida de probabilidade boreliana em M, invariante por f.*

Vamos provar este teorema a partir de um resultado mais geral que enunciaremos um pouco mais adiante. Fixemos antes algumas notações. Sejam M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo e F um fibrado vetorial de dimensão finita sobre M dotado de uma métrica Riemanniana contínua. Sejam $\pi : F \to M$ a projeção e $L : F \to F$ um isomorfismo de fibrados vetoriais contínuos cobrindo f (isto é, $\pi \circ L = f \circ \pi$), onde $L(x, v) = (f(x), L_x(v))$, para todo $x \in M$ e $v \in F_x$, e tal que L e L^{-1} tenham normas limitadas. L é o que chamamos de **Cociclo Linear.** Denote por L_n o $n-$ésimo iterado de L:

$$L_n(x) = L(f^{n-1}(x)) \circ \ldots \circ L(f(x)) \circ L(x), \text{ se } n > 0$$

$$L_{-n}(x) = L^{-1}(f^{-n}(x)) \circ \ldots \circ L^{-1}(f^{-2}(x)) \circ L^{-1}(f^{-1}(x)).$$

Para $n_1, \ldots, n_l \geq 1$, defina $\Lambda(n_1, \ldots, n_l)$ como o conjunto de pontos $x \in M$ tais que a fibra F_x de F sobre x admite uma decomposição $F_x = \bigoplus_{j=1}^{l} E_j$ tal que $dim\ E_j = n_j$ para $1 \leq j \leq l$ e existem números reais $\lambda_1 > \ldots > \lambda_l$ satisfazendo

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v\| = \lambda_j \text{ para todo } u \in E_j \backslash \{0\} \text{ e } 1 \leq j \leq l.$$

Neste caso, diremos que x é um ponto regular de L.

Teorema 3.2. *: a) O conjunto $\Lambda(n_1, \ldots, n_l)$ é um subconjunto mensurável de M, para todo $n_1 \ldots, n_l \geq 1$. Além disso, para cada $1 \leq j \leq l$, E_j é um subfibrado mensurável da restrição de F a $\Lambda(n_1, \ldots, n_l)$ e a aplicação $\Lambda(n_1, \ldots, n_l) \ni x \mapsto \lambda_j(x)$ é mensurável.*

b) O conjunto de pontos regulares de L, dado por $R(L) = \bigcup_{n_1,\ldots,n_l} \Lambda(n_1, \ldots, n_l)$ tem probabilidade total em M.

Vejamos que o Teorema 3.2 implica no Teorema de Oseledets 3.1 . Seja F o fibrado tangente de M e $L = Df$, a derivada de $f : M \to M$. Como f é um difeomorfismo de classe C^1, Df é um isomorfismo contínuo. Assim, pela parte b) do Teorema 3.2, temos que o conjunto dos pontos regulares de Df, ou seja $R(Df)$, tem probabilidade total em M. Bem, se $x \in M$ é um ponto regular de Df, então x também é um ponto regular de f. De fato, temos que $F_x = T_xM$, logo se $x \in R(Df)$ então existe uma decomposição $T_xM = E_1 \oplus \ldots \oplus E_l$ tal que $dim\ E_j = n_j$, para $1 \leq j \leq l$ e existem números reais $\lambda_1 > \ldots > \lambda_l$ satisfazendo $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{1}{n} \log \|Df^n(x)u\| = \lambda_j$ para todo $u \in E_j \backslash \{0\}$. Donde vemos que $x \in R(f)$. Se $x \in R(f)$ ver-se facilmente que $x \in R(Df)$. Ou seja, temos $R(f) = R(Df)$. Portanto $R(f)$ tem probabilidade total em M. Passamos agora a provar o Teorema 3.2 .

3.3 Prova do Teorema 3.2 : Mensurabilidade

Sejam $n_1, \ldots, n_l$ inteiros positivos fixados. Para $k \geq 1$ denote por A_k o conjunto das $2l-$uplas de números racionais $\alpha_1 > \beta_1 > \ldots > \alpha_l > \beta_l$ com $(\alpha_j - \beta_j) < \frac{1}{k}$ para $1 \leq j \leq l$. Para $m \geq 1$ e $(\alpha_1, \ldots, \beta_l) \in A_k$, seja $\Lambda(m, \alpha_1, \ldots, \beta_l)$ o conjunto de pontos $x \in M$ para os quais existe uma decomposição $F_x = F_1(x) \oplus \ldots \oplus F_l(x)$ com $dim\ F_j(x) = n_j$ e

$$\exp(n\alpha_j)\|u\| \geq \|L_n(x)u\| \geq \exp(n\beta_j)\|u\| \tag{3.3}$$

$$\exp(-n\beta_j)\|u\| \geq \|L_{-n}(x)u\| \geq \exp(-n\alpha_j)\|u\| \tag{3.4}$$

para todo $n \geq m,\ 1 \leq j \leq l,$ e $u \in F_j(x)\backslash\{0\}$.

Para cada $x \in \Lambda(m, \alpha_1, \ldots, \beta_l)$ definamos o conjunto

$$K_j(x) = \{u \in F_x; \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} \leq \exp(n\alpha_j) \text{ e } \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \leq \exp(-n\beta_j) \text{ se } n \geq m\} \tag{3.5}$$

Mostraremos que $K_j(x)$ caracteriza os $F_j(x)$, isto é, $F_j(x) = K_j(x)$, e , portanto, tal decomposição é única, pois se existisse outra de composição $F_x = \widehat{F_1}(x) \oplus ... \oplus \widehat{F_l}(x)$ com $\dim\widehat{F_j}(x) = n_j$ satisfazendo 3.3 e 3.4, então $\widehat{F_j}(x) = K_j(x)$. Para isto, necessitamos do seguinte resultado:

Lema 3.2. *Seja $x \in \Lambda(m, \alpha_1, ..., \beta_l)$.*

(a) *Se $\|L_n(x)u\| \leq \exp(n\alpha_j)\|u\|,\ \forall n \geq m,$ então $u \in F_j(x) \oplus \ldots \oplus F_l(x)$*

(b) *Se $\|L_{-n}(x)u\| \leq \exp(-n\beta_j)\|u\|,\ \forall n \geq m,$ então $u \in F_1(x) \oplus \ldots \oplus F_j(x)$.*

Assuma o Lema 3.2, se $u \in F_j(x)$, então segue diretamente das definições de $K_j(x)$ e $F_j(x)$ que $u \in K_j(x)$. Portanto $F_j(x) \subset K_j(x)$. Agora seja $u \in K_j(x)$, pelo item (a) do Lema 3.2, $u \in F_j(x) \oplus \ldots \oplus F_l(x)$ e pelo item (b) $u \in F_1(x) \oplus \ldots \oplus F_j(x)$, portanto $u \in F_j(x)$, o que conclui a prova de $F_j(x) = K_j(x)$.

Agora demonstremos a parte (a) do Lema 3.2 , pois a parte (b) é análoga. Primeiramente, note que por 3.3

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|L_n(x)v_i\|}{\|L_n(x)v_k\|} = 0, \text{ sempre que } v_i \in F_i(x), v_k \in F_k(x), \text{ com } i > k,$$

pois neste caso

$$\frac{\|L_n(x)v_i\|}{\|L_n(x)v_k\|} \leq \exp[n(\alpha_i - \beta_k)] \frac{\|v_i\|}{\|v_k\|} \tag{3.6}$$

e o lado direito da desigualdade de 3.6 tende a zero porque $\alpha_i - \beta_k < 0$. Consequentemente se $v = v_p + v_{p+1} + ... + v_l$ com $v_i \in F_i(x),\ i = p, ..., l$ e $v_p \neq 0$. Então

$$\|L_n(x)v_p\| \left(1 - \sum_{i=p+1}^{l} \frac{\|L_n(x)v_i\|}{\|L_n(x)v_p\|}\right) \leq \|L_n(x)v\| \leq \|L_n(x)v_p\| \left(1 + \sum_{i=p+1}^{l} \frac{\|L_n(x)v_i\|}{\|L_n(x)v_p\|}\right),$$

logo, aplicando o logaritmo e dividindo por n a desigualdade acima e notando que, por 3.6 , temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left(1 \pm \sum_{i=p+1}^{l} \frac{\|L_n(x)v_i\|}{\|L_n(x)v_p\|}\right) = 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} \beta_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v_p\| &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v\| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v\| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v_p\| \leq \alpha_p. \end{aligned}$$

Portanto, se u é tal que

$$\|L_n(x)u\| \leq \exp(n\alpha_j)\|u\|, \forall n \geq m,$$

então, pela observação acima, u não pode ter componente diferente de zero em $F_p(x)$, para $p < j$, pois isto implicaria que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} \geq \beta_p > \alpha_j,$$

o que implica ainda que existe $n_0 > m$ tal que

$$\|L_{n_0}(x)u\| > \exp(n_0\alpha_j)\|u\|$$

e isto seria uma contradição.

Lema 3.3. *$\Lambda(m, \alpha_1, ..., \beta_l)$ é um conjunto fechado em M e a aplicação*

$$\Phi_j : x \in \Lambda(m, \alpha_1, ..., \beta_l) \mapsto F_j(x)$$

é contínua para todo $j = 1, ..., l$.

Demonstração. Seja $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\Lambda(m,\alpha_1,...,\beta_l)$ convergindo para um ponto $x \in M$. Considere para cada $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1,...,l$, uma base ortonormal $\mathfrak{B}_j^k = \{u_{1j}^k,...,u_{n_jj}^k\}$ de $F_j(x^k)$. Note que os u_{ij}^k formam sequências limitadas em $F_j(x^k)$. Dessa forma, a menos de tomarmos subsequência, u_{ij}^k converge para algum $u_{ij} \in F_x$ quando $k \to +\infty$ e
$\mathfrak{B}_j = \{u_{1j},...,u_{n_jj}\}$ é um conjunto ortonormal de F_x para cada j.

Definamos $F_j(x) = [\ \mathfrak{B}_j\ ]$(conjunto gerado por $\mathfrak{B}_j$). Vemos que $\dim F_j(x) = n_j$. Afirmamos que

$$F_x = F_1(x) \oplus ... \oplus F_l(x)$$

e que

$$\begin{cases} \exp(n\alpha_j)\|u\| \geq \|L_n(x)u\| \geq \exp(n\beta_j)\|u\| \\ \exp(-n\beta_j)\|u\| \geq \|L_{-n}(x)u\| \geq \exp(-n\alpha_j)\|u\| \end{cases} \forall n \geq m \text{ e } \forall u \in F_j(x). \tag{3.7}$$

De fato, seja $u \in F_j(x)$, logo u é da forma $u = a_1u_{1j} + ... + a_{n_j}u_{n_j}$. Então $u^k = a_1u_{1j}^k + ... + a_{n_j}u_{n_j}^k \in F_j(x^k)$ é tal que $u^k \to u$ e, portanto

$$\begin{cases} \exp(n\alpha_j)\|u^k\| \geq \|L_n(x)u^k\| \geq \exp(n\beta_j)\|u^k\| \\ \exp(-n\beta_j)\|u^k\| \geq \|L_{-n}(x)u^k\| \geq \exp(-n\alpha_j)\|u^k\| \end{cases} \forall n \geq m$$

Passando então ao limite nas desigualdades acima quando $k \to +\infty$, concluímos 3.7. Além disso, 3.7 garante também que a soma $F_x = F_1(x) \oplus ... \oplus F_l(x)$ é direta, pois se não fosse existiriam $u_p \in F_p(x)$ não todos nulos tais que $u_1 + ... + u_l = 0$(digamos $u_1 \neq 0$). Então $u_1 = -(u_2 + ... + u_l)$. A definição de $F_1(x)$ garante que $\|L_n(x)u_1\| \geq \exp(n\beta_1)\|u_1\|$ para todo $n \geq m$ e portanto

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u_1\| \geq \beta_1 > \alpha_2.$$

Por outro lado, por um argumento utilizado na demonstração do Lema 3.2, temos

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u_1\| \leq \alpha_2.$$

Esta contradição , mostra que a soma é direta . Portanto $x \in \Lambda(m,\alpha_1,...,\beta_l)$, e com isso $\Lambda(m,\alpha_1,...,\beta_l)$ é um conjunto fechado em M. A unicidade da decomposição também mostra que $F_j(x^k)$ converge para $F_j(x)$, o que prova a continuidade de Φ_j

□

Para mostrar então que $\Lambda(n_1,\ldots,n_l)$ é um conjunto de Borel provaremos a seguinte igualdade

$$\Lambda(n_1,\ldots,n_l) = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\beta_l)\in A_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m,\alpha_1,\ldots,\beta_l). \tag{3.8}$$

Primeiro mostraremos que

$$\Lambda(n_1,\ldots,n_l) \subset \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\beta_l)\in A_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m,\alpha_1,\ldots,\beta_l).$$

Seja $x \in \Lambda(n_1,\ldots,n_l)$. Logo a fibra F_x de F admite uma decomposição $F_x = E_1 \oplus \ldots \oplus E_l$ tal que $dim\ E_j = n_j$, para $1 \leq j \leq l$ e existem números reais $\lambda_1 > \ldots > \lambda_l$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_j$$

para todo $u \in E_j\backslash\{0\}$ e $1 \leq j \leq l$. Queremos mostrar que para qualquer inteiro positivo k existem $(\alpha_1,\ldots,\beta_l) \in A_k$ e um $m \in \mathbb{N}$ tais que $x \in \Lambda(m,\alpha_1,\ldots,\beta_l)$. Bem, seja k um inteiro positivo qualquer e considere $\frac{u}{\|u\|} \in E_j\backslash\{0\}$. Dado $0 < \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{2k}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{n}\log\|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| - \lambda_j < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow n(\lambda_j - \frac{\epsilon}{2}) < \log\|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| < n(\lambda_j + \frac{\epsilon}{2})$$

$$\Rightarrow \exp(n(\lambda_j - \frac{\epsilon}{2})) < \|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| < \exp(n(\lambda_j + \frac{\epsilon}{2}))$$

$$\Rightarrow \|u\|\exp(n(\lambda_j - \frac{\epsilon}{2})) < \|L_n(x)u\| < \|u\|\exp(n(\lambda_j + \frac{\epsilon}{2}))$$

Tomemos agora α_j e β_j racionais tais que

$$\lambda_j \leq \alpha_j < \lambda_j + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_j - \frac{\epsilon}{2} < \beta_j \leq \lambda_j$$

Podemos ainda considerar n_0 suficientemente grande tal que se tenha

$$\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| < \alpha_j < \lambda_j + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_j - \frac{\epsilon}{2} < \beta_j < \frac{1}{n}\log\|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\|$$

assim,

$$\alpha_j - \beta_j < \lambda_j + \frac{\epsilon}{2} - \lambda_j + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon < 2\frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

e portanto, temos que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|u\|\exp(n\beta_j) < \|L_n(x)u\| < \|u\|\exp(n\alpha_j)$$

De modo análogo mostra-se que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se tenha

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u\|\exp(-n\alpha_j) < \|L_{-n}(x)u\| < \|u\|\exp(-n\beta_j)$$

Logo, tomando $m = \max\{n_0, n_1\}$ tem-se para $n \geq m$ que

$$\|u\| \exp(n\beta_j) < \|L_n(x)u\| < \|u\| \exp(n\alpha_j)$$

$$\|u\| \exp(-n\alpha_j) < \|L_{-n}(x)u\| < \|u\| \exp(-n\beta_j)$$

com $u \in E_j \backslash \{0\}$ e $1 \leq j \leq \ l$. Portanto, $x \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\beta_l)\in A_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m, \alpha_1, \ldots, \beta_l)$.

Provaremos agora a inclusão contrária. Seja $y \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\beta_l)\in A_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m, \alpha_1, \ldots, \beta_l)$. Assim, para todo inteiro positivo k existem $(\alpha_1, \ldots, \beta_l) \in A_k$ e $m_0 \geq 1$ tais que $y \in \Lambda(m_0, \alpha_1, \ldots, \beta_l)$. Logo a fibra F_y de F admite uma decomposição $F_y = F_1 \oplus \ldots \oplus F_l$ com $dim\ F_j = n_j$ e

$$\|u\| \exp(n\beta_j^k) \leq \|L_n(x)u\| \leq \|u\| \exp(n\alpha_j^k)$$

$$\|u\| \exp(-n\alpha_j^k) \leq \|L_{-n}(x)u\| \leq \|u\| \exp(-n\beta_j^k)$$

para todo $n \geq m_0$, $u \in F_j \backslash \{0\}$ e $1 \leq j \leq l$. A notação α_j^k, β_j^k é para deixar claro a dependência de α_j, β_j de k pela relação $\alpha_j^k - \beta_j^k < \dfrac{1}{k}$. Notemos que a sequência (em k) α_j^k é limitada. De fato, deixando $n \geq m_0$ fixo e supondo que tenhamos $\alpha_j^k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$, e portanto teríamos também que $\beta_j^k \to +\infty$, pois $\alpha_j^k < \beta_j^k + \dfrac{1}{k}$. Podemos concluir então que teríamos

$$\frac{1}{n} \log \|L_n(y)u\| = +\infty$$

mas isto é um absurdo , pois temos que $\|L\|$ é limitada. Da mesma forma , se supormos que $\alpha_j^k \to -\infty$ chegamos que

$$\frac{1}{n} \log \|L_{-n}(y)u\| = +\infty$$

o que é também um absurdo, pois $\|L^{-1}\|$ é limitada. Portanto temos $|\alpha_j^k| < B$ para algum real $B > 0$. Assim, existe uma subsequência $\alpha_j^{k_t}$ de α_j^k tal que

$$\alpha_j^{k_t} \to \lambda_j.$$

Note ainda que existe uma subsequência $\beta_j^{k_t}$ de β_j^k tal que

$$\beta_j^{k_t} \to \lambda_j$$

pois $\beta_j^{k_t} = (\beta_j^{k_t} - \alpha_j^{k_t}) + \alpha_j^{k_t}$. Logo, fazendo $t \to +\infty$ em

$$\|u\| \exp(n\beta_j^{k_t}) \leq \|L_n(x)u\| \leq \|u\| \exp(n\alpha_j^{k_t})$$

tem-se

$$\|u\| \exp(n\lambda_j) \leq \|L_n(x)u\| \leq \|u\| \exp(n\lambda_j)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|L_n(x)u\| = \|u\| \exp(n\lambda_j) &\Rightarrow \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} = \exp(n\lambda_j) \\
&\Rightarrow \log \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} = n\lambda_j \\
&\Rightarrow \frac{1}{n} \log \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} = \lambda_j \\
&\Rightarrow \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| - \frac{1}{n} \log \|u\| = \lambda_j
\end{aligned}$$

Fazendo agora $n \to \pm\infty$ na igualdade acima temos

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_j$$

e como , para t suficientemente grande , temos

$$\alpha_j^{kt} < \lambda_j + \epsilon \ \text{ e } \ \beta_j^{k_t} > \lambda_j - \epsilon, \qquad \text{com } \epsilon > 0$$

e como

$$\alpha_1^{k_t} > \beta_1^{k_t} > \ldots > \alpha_l^{k_t} > \beta_l^{k_t}$$

segue que

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_l.$$

Portanto, temos que $y \in \Lambda(n_1, \ldots, n_l)$. Assim, a igualdade 3.8 está provada.

Vamos mostrar agora que os subfibrados $E_j(x)$ são mensuráveis em $\Lambda(n_1, \ldots, n_l)$. Pelo Lema 3.3 e pela Proposição 1.4, é suficiente mostrar a seguinte implicação

$$\forall x \in \Lambda(n_1, \ldots, n_l) \bigcap \Lambda(m, \alpha_1, \ldots, \beta_l) \Rightarrow E_j(x) = F_j(x),$$

para todo $1 \leq j \leq l$. Note primeiramente que $E_j(x) \subset F_i(x)$ para algum $1 \leq i \leq l$. Pois todos os vetores em $E_j(x)$ geram o mesmo expoente de Lyapounov $\lambda_j(x)$ quando $n \to \pm\infty$. Temos ainda que $\alpha_i \geq \lambda_j \geq \beta_i$ e notando que $\lambda_1 > \ldots > \lambda_l$ e $\alpha_1 > \beta_1 > \ldots > \alpha_l > \beta_l$, segue então que $i = j$. Como também temos $dim\ E_j(x) = dim\ F_j(x) = n_j$, resulta que $E_j(x) = F_j(x)$. Finalmente, a mensurabilidade de $\lambda_j(x)$ resulta de

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)|E_j(x)\| = \lambda_j(x),$$

pois temos que $\frac{1}{n} \log \|L_n(x)|E_j(x)\|$ forma uma sequencia de funções mensuráveis. Com isto concluímos a demonstração da parte a) do Teorema 3.2

Antes de continuar e demonstrar a parte b) do Teorema 3.2, vamos dar algumas definições e propriedades que serão muito utilizadas nesta parte da demonstração.

3.4 Crescimento Subexponencial

Definição 3.2. *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Uma função mensurável $C : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ter crescimento subexponencial para a medida μ em M se*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log(C\circ f^n) = 0,\ \mu-\ q.t.p$$

Nesta seção mostraremos que certas funções relacionadas com os iterados de L, e que desempenham papel importante na demonstração do Teorema 3.2, tem crescimento subexponencial para toda medida μ de probabilidade f-invariante.

Sejam μ uma medida de probabilidade f- invariante, E um subfibrado mensurável L-invariante de F, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para todo $u \in E_x\backslash\{0\}$ e $\mu-\ q.t.p\ \ x \in M$. Note que λ sempre existe , pois consideramos $\|L\|$ limitada. Para $\epsilon > 0$, defina

$$C_\epsilon(x) = \sup\left\{\frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|u\|}\ :\ n \geq 0 \text{ e } u \in E_x\backslash\{0\}\right\}$$

Proposição 3.2. *C_ϵ tem crescimento subexponencial para μ.*

Vamos usar o seguinte lema na demonstração da proposição 3.2. Lema este que nos dá um critério para crescimento subexponencial.

Lema 3.4. *Sejam $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação mensurável e μ uma medida de probabilidade f-invariante em M. Seja $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\phi\circ f - \phi$ é integrável. Então $\frac{1}{n}(\phi\circ f^n) \to 0$ μ-q.t.p quando $n \to +\infty$.*

Demonstração. Aplicando o Teorema ergódico de Birkhoff em $(\phi\circ f - \phi)$, segue que existe ψ, tal que

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ f-\phi)(f^j(x))\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ f^{j+1}(x)-\phi(f^j(x))\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}\phi\circ f^{j+1}(x)+\phi\circ f^n(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\phi(f^j(x))\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}\phi\circ f^{j+1}(x)+\phi\circ f^n(x)-\sum_{j=1}^{n-1}\phi(f^j(x))-\phi(x)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\phi\circ f^n(x))-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\phi(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\phi\circ f^n(x)) \qquad \mu-q.t.p
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $\delta>0$ fixo temos que

$$\begin{aligned}
\mu(\{x:\frac{1}{n}|\phi\circ f^n(x)|\geq\delta\}) &= \mu(\{x:\frac{1}{n}(\phi\circ f^n(x))\geq\delta \text{ ou } \frac{1}{n}(\phi\circ f^n(x))\leq-\delta\})\\
&= \mu(\{x:\phi\circ f^n(x)\geq n\delta \text{ ou } \phi\circ f^n(x)\leq -n\delta\})\\
&= \mu(\{x:\phi\circ f^n(x)\in(-n\delta,n\delta)^c\})\\
&= \mu(f^{-n}\circ\phi^{-1}(-n\delta,n\delta)^c)\\
&= \mu(\phi^{-1}(-n\delta,n\delta)^c)\to 0,
\end{aligned}$$

quando $n\to+\infty$. Assim, $\frac{1}{n}(\phi\circ f^n)$ converge para 0 em medida. Logo, pelo Teorema 1.2 , $\frac{1}{n_k}(\phi\circ f^{n_k})\to 0$ em quase todo lugar para alguma subsequencia $n_k\to+\infty$. Isto prova que $\psi(x)=0$ em $\mu-q.t.p \quad x\in M$. $\square$

Demonstração da Proposição 3.2 : Para $u\in E_x\backslash\{0\}$, defina

$$C_\epsilon(x,u)=\sup_{n\geq 0}\frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|u\|}$$

Note que se $n=0$, então $\frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|u\|}=1$ e que

$$\begin{aligned}
\frac{\|L_{n+1}(x)u\|}{\exp((n+1)(\lambda+\epsilon))\|u\|} &= \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|}\frac{\|L_n(f(x))L(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|L(x)u\|}\\
&\leq \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|}C_\epsilon(f(x),L(x)u)
\end{aligned}$$

Assim,

$$C_\epsilon(x,u) = \max\left\{1, \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} C_\epsilon(f(x), L(x)u)\right\}$$

Considere agora $a, b > 0$ tais que

$$a \leq \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} \leq b$$

Perceba que a, b existem pois consideramos que $\|L\|$ é limitada. Desta forma,

$$C_\epsilon(x,u) \geq \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} C_\epsilon(f(x), L(x)u) \geq a C_\epsilon(f(x), L(x)u)$$

logo,

$$\frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x), L(x)u)} \geq a.$$

Se tivermos $C_\epsilon(x,u) = 1$, então $\dfrac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x), L(x)u)} = \dfrac{1}{C_\epsilon(f(x), L(x)u)} \leq 1$. Mas se for

$$C_\epsilon(x,u) = \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} C_\epsilon(f(x), L(x)u),$$

então $\dfrac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x), L(x)u)} = \dfrac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} \leq b.$

Portanto,

$$a \leq \frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x), L(x)u)} \leq \max\{1, b\} \tag{3.9}$$

para todo x e $u \in E_x \backslash \{0\}$.

Vamos mostar que 3.9 implica que

$$a \leq \frac{C_\epsilon(x)}{C_\epsilon(f(x))} \leq \max\{1, b\}. \tag{3.10}$$

Primeiramente, observe que $C_\epsilon(x) = \sup\limits_{u \in E_x \backslash \{0\}} C_\epsilon(x,u)$. Logo, existe uma sequência $(u^k)_k$ em $E_x \backslash \{0\}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} C_\epsilon(x, u^k) = C_\epsilon(x).$$

além disso, temos

$$\frac{C_\epsilon(x,u^k)}{C_\epsilon(f(x))} \leq \frac{C_\epsilon(x,u^k)}{C_\epsilon(f(x), L(x)u^k)} \leq \max\{1, b\}$$

e, portanto, passando ao limite quando $k \to +\infty$, temos

$$\frac{C_\epsilon(x)}{C_\epsilon(f(x))} \leq \max\{1, b\}.$$

Da mesma forma, existe uma sequencia (v^k) em $E_x \backslash \{0\}$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} C_\epsilon(f(x), L(x)v^k) = C_\epsilon(f(x))$$

e temos também

$$\frac{C_\epsilon(x)}{C_\epsilon(f(x), L(x)v^k)} \geq \frac{C_\epsilon(x, v^k)}{C_\epsilon(f(x), L(x)v^k)} \geq a,$$

logo, passando ao limite quando $k \to +\infty$, temos

$$\frac{C_\epsilon(x)}{C_\epsilon(f(x))} \geq a.$$

Portanto, por 3.10 , podemos concluir que $\log(C_\epsilon \circ f) - \log C_\epsilon$ é limitada, em particular, integrável. Para o caso quando $n \to -\infty$, defina

$$C_\epsilon(x, u) = \sup_{n \geq 0} \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\exp(-n(\lambda + \epsilon))\|u\|}.$$

Podemos do mesmo modo concluir que $\log(C_\epsilon \circ f^{-1}) - \log C_\epsilon$ é limitada e, em particular, integrável. Assim, pelo Lema 3.4,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(C_\epsilon \circ f^n) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log(C_\epsilon \circ f^n) = 0$$

em $\mu-$q.t.p. Isto conclui com a demonstração da Proposição 3.2 .

■

A próxima proposição, que é uma consequência da Proposição 3.2, será importante na demonstração do Teorema 3.2 item b).

Proposição 3.3. *Sejam E um subfibrado mensurável $L-$invariante de F, $\lambda \in \mathbb{R}$, e μ uma medida de probabilidade $f-$invariante em M. Então*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda \ \textit{para}\ \mu - q.t.p\ \ x \in M\ \textit{e todo}\ u \in E_x \backslash \{0\}$$

se, e somente se

$$\limsup_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda \ \textit{para}\ \mu - q.t.p\ \ x \in M\ \textit{e todo}\ u \in E_x \backslash \{0\}$$

Mais ainda, isto continua sendo verdade se trocarmos $\limsup$ *e* $\leq$ *por* $\liminf$ *e* $\geq$ *(ou por* $\lim$ *e* $=$*), respectivamente.*

Demonstração. Vamos provar apenas a parte ***somente se***, a outra parte tem demonstração inteiramente análoga. Então, suponha que tenhamos

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda \text{ para } \mu - q.t.p \;\; x \in M \text{ e todo } u \in E_x \backslash \{0\}.$$

Considere também

$$C_\epsilon(x) = \sup \left\{ \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|u\|} \; : \; n \geq 0 \text{ e } u \in E_x \backslash \{0\} \right\}.$$

Note que

$$\begin{aligned} L_n(f^{-n}(x)) &= L(f^{n-1}(f^{-n}(x))) \circ \ldots \circ L(f(f^{-n}(x))) \circ L(f^{-n}(x)) \\ &= L(f^{-1}(x)) \circ \ldots \circ L(f^{-n+1}(x)) \circ L(f^{-n}(x)) \\ &= L_{-n}^{-1}(x) \end{aligned}$$

Assim,

$$L_n(f^{-n}(x))L_{-n}(x)u = L_{-n}^{-1}(x)L_{-n}(x)u = u,$$

denotando $L_{-n}(x)u = v$, temos

$$\begin{aligned} \|u\| = \|L_n(f^{-n}(x))v\| &= \frac{\|L_n(f^{-n}(x))v\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|v\|} \exp(n(\lambda+\epsilon))\|v\| \\ &\leq C_\epsilon(f^{-n}(x)) \exp(n(\lambda+\epsilon))\|L_{-n}(x)u\| \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{n}\log\|u\| \leq \frac{1}{n}\log C_\epsilon(f^{-n}(x)) + \lambda + \epsilon + \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

para todo $n \geq 1$. Como C_ϵ tem crescimento subexponencial (Proposição 3.2), segue que

$$0 \leq \lambda + \epsilon + \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \geq -\lambda$$

$$-\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \leq \lambda$$

Notando que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| = -\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|$$

logo,

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

como queríamos demonstrar. As outras afirmações seguem de forma análoga. □

3.5 Prova do Teorema 3.2 : Probabilidade Total

Agora vamos provar que $R(L)$ tem probabilidade total. Pelo Corolário 2.1, é suficiente mostrar que $\mu(R(L)) = 1$ para toda medida de probabilidade ergódica $f-$invariante em M. Portanto, de agora em diante consideraremos μ ergódica.

Seja

$$\lambda_1(L,x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)\| \text{ e } \lambda_1(L) = \int \lambda_1(L,x)d\mu(x).$$

Note que

$$\|L_n(x)\| = \|L(f^{n-1}(x))\dots L(x)\| \leq \|L(f^{n-1}(x))\|\dots\|L(x)\| \leq (\sup_{x\in M}\|L(x)\|)^n$$

logo,

$$\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\| \leq \log\sup_{x\in M}\|L(x)\| \leq \sup_{x\in M}\|L(x)\|$$

e assim, temos

$$\lambda_1(L,x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)\| \leq \sup_{x\in M}\|L(x)\|.$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L,x) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L_n(f(x))L(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \log(\|L_n(f(x))\|\|L(x)\|) \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L_n(f(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}) \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))\| = \lambda_1(L,f(x))
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_1(L,x) \leq \lambda_1(L,f(x))$. Por outro lado, vemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L,f(x)) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))L(x)L^{-1}(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))L(x)\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L^{-1}(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))L(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n}) \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)\| = \lambda_1(L,x)
\end{aligned}$$

logo, $\lambda_1(L,f(x)) \leq \lambda_1(L,x)$. Portanto, concluímos que $\lambda_1(L,x) = \lambda_1(L,f(x))$ e com isso $\lambda_1(L,x)$ é invariante por f. Sendo μ ergódica, temos que $\lambda_1(L,x)$ é constante em μ-quase todo ponto $x \in M$ e assim,

$$\lambda_1(L) = \lambda_1(L,x) \text{ para } \mu - q.t.p.\ x \in M$$

Considere o subfibrado G de F definido por

$$G_x = \{u \in F_x; \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \geq \lambda_1(L)\}.$$

Para seguirmos com a demonstração do Teorema 3.2 item b), precisaremos do seguinte resultado cuja a prova será dada mais adiante na próxima seção.

Lema 3.5. *G é um subfibrado mensurável invariante por L com dimensão estritamente positiva e*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

para μ-quase todo ponto $x \in M$ e todo $u \in G_x \backslash \{0\}$.

Assuma 3.5 . Se tivermos $G_x = F_x$ para quase todo ponto $x \in M$, então escrevemos $G = F$ e, neste caso a demonstração do Teorema 3.2 item b) está completa, pois basta fazer $E_1 = G$ que, pelo Lema 3.5 tem-se

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

para quase todo ponto $x \in M$ e todo $u \in E_1 \backslash \{0\}$.

No entanto, se tivermos $G \neq F$, considere $G^{\perp}$ o complemento ortogonal de G. Considere ainda $p : F \to G^{\perp}$ a projeção ortogonal e escreva $\hat{L} = p \circ L : G^{\perp} \to G^{\perp}$.

Lema 3.6. *Se $F \neq G$ então $\lambda_1(\hat{L}) < \lambda_1(L)$.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar por indução sobre n que $\hat{L}_n(x) = p(L_n(x))$. Para $n = 1$ não há nada a fazer. Suponhamos que para $k \in \mathbb{N}$ tenhamos $\hat{L}_k(x) = p(L_k(x))$. Temos,

$$\hat{L}_{k+1}(x)u = \hat{L}(f^k(x))\hat{L}_k(x)u$$

e

$$L_{k+1}(x)u = L(f^k(x))L_k(x)u.$$

Escrevendo $L_k(x)u = p(L_k(x)u) + v,\ v \in G$, ou seja, $L_k(x)u = \hat{L}_k(x)u + v$, tem-se

$$L_{k+1}(x)u = L(f^k(x))L_k(x)u = L(f^k(x))\hat{L}_k(x)u + L(f^k(x))v$$

e assim,

$$p(L_{k+1}(x)u) = p(L(f^k(x))\hat{L}_k(x)u) + p(L(f^k(x))v).$$

Como G é invariante por f, segue que $p(L(f^k(x))v) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} p(L_{k+1}(x)u) &= p(L(f^k(x))\hat{L}_k(x)u) = p \circ L(f^k(x)) \circ \hat{L}_k(x)u \\ &= \hat{L}(f^k(x))\hat{L}_k(x)u = \hat{L}_{k+1}(x)u \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração por indução. Desta forma temos que

$$\|\hat{L}_n(x)u\| = \|p(L_n(x)u)\| \leq \|L_n(x)u\|.$$

Seja $\hat{G}$ um subfibrado de $G^{\perp}$, dado pelo Lema 3.5 , para $\hat{L}$ e $\lambda_1(\hat{L})$, ou seja, $\hat{G}$ é um subfibrado $\hat{L}-$invariante de $G^{\perp}$ tal que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|\hat{L}_n(x)u\| = \lambda_1(\hat{L})$$

para $\mu-$quase todo ponto x e todo $u \in \hat{G}_x \backslash \{0\}$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\hat{L}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\hat{L}_n(x)u\| &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda_1(L). \end{aligned}$$

Isto mostra que $\lambda_1(\hat{L}) \leq \lambda_1(L)$ e que se tivermos a igualdade, então

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\hat{L}_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

para $u \in \hat{G}_x \backslash \{0\}$. Pela Proposição 3.3 , temos ainda que

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|\hat{L}_n(x)u\| = \lambda_1(L).$$

Desta forma concluímos que $u \in G_x$. Ou seja, temos $u \in \hat{G}_x \cap G_x = \{0\}$, o que contradiz o fato de u ser não nulo. Portanto, $\lambda_1(\hat{L}) < \lambda_1(L)$. $\square$

Para podermos finalmente concluir a demonstração do Teorema 3.2 item b) assumiremos o importante lema seguinte que também será demonstrado em uma seção mais a frente, logo após a prova do Lema 3.5.

Lema 3.7. *Se $F \neq G$ então existe um subfibrado mensurável $L-$invariante H de F tal que $G \oplus H = F$ e $\lambda_1(L|H) = \lambda_1(\hat{L}) < \lambda_1(L)$.*

Escrevendo $E_1 = G$ e $H_1 = H$, temos pelo Lema 3.5 que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L) = \lambda_1$$

para todo $u \in E_1 \backslash \{0\}$ e, pelo Lema 3.7, existe uma decomposição $F = E_1 \oplus H_1$ tal que $\lambda_1 > \lambda_1(L|H_1)$. Considere agora a aplicação $L|H_1$ e denote $\lambda_2 = \lambda_1(L|H_1)$. Aplicando o procedimento anterior, temos que existem subfibrados $L-$invariantes, E_2 e H_2, tais que para $\mu-$quase todo ponto $x \in M$, tem-se $H_1 = E_2 \oplus H_2$, $\lambda_1(L|H_2) < \lambda_2$ e

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v\| = \lambda_2$$

para todo $v \in E_2 \backslash \{0\}$. Assim, até este passo temos para $\mu-$q.t.p $x \in M$, $F = E_1 \oplus E_2 \oplus H_2$ com

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_i$$

para todo $u \in E_i \backslash \{0\}, 1 \leq i \leq 2$, e $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_1(L|H_2)$. Dado então qualquer $j \geq 1$, suponhamos que já tivéssemos obtido uma decomposição $L-$invariante $F = E_1 \oplus \ldots \oplus E_i \oplus H_i$ com

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_i$$

para todo $u \in E_i \backslash \{0\}$, $1 \leq i \leq j$ e $\lambda_1 > \ldots > \lambda_j > \lambda_1(L|H_j)$. Aplicando o Lema 3.5, temos que existe um subfibrado E_{j+1} de H_j tal que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_{j+1} = \lambda_1(L|H_j), \ \forall E_i \backslash \{0\}$$

e aplicando o Lema 3.7 temos que existe uma decomposição $H_j = E_{j+1} \oplus H_{j+1}$ tal que $\lambda_1(L|H_{j+1}) < \lambda_{j+1}$. Como consideramos, por hipótese, que F tem dimensão finita e sabemos que os subfibrados E_j tem dimensão estritamente positiva, segue que a sequencia das dimensões dos H_j é estritamente decrescente. Assim, este processo deve ser interrompido após um número l finito de vezes. Temos então como resultado que para em $\mu-$ quase todo ponto $x \in M$ tem-se

$$F = E_1 \oplus \ldots \oplus E_l$$

e

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_i,$$

para todo $u \in E_j \backslash \{0\}$, $1 \leq i \leq l$ e $\lambda_1 > \ldots > \lambda_l$. Portanto, $\mu-$quase todo ponto $x \in M$ é regular e isto completa a demonstração do Teorema 3.2.

3.6 Prova do Lema 3.5 .

Vamos agora demonstrar o Lema 3.5 . Denotando por $\hat{\Lambda}(j)$ o conjunto dos pontos x para os quais $dim\ G_x = j$, iremos mostrar que estes subconjuntos de M são mensuráveis e que a restrição de G em cada $\hat{\Lambda}(j)$ é um subfibrado mensurável da restrição de F à $\hat{\Lambda}(j)$. Assuma por um instante já demonstrado isso. Seja $x \in \hat{\Lambda}(j)$. Observando que L é um isomorfismo, temos que $dim\ G_x = dim\ L(G_x)$. Note ainda que $L(G_x) = G_{f(x)}$. De fato, mostremos que $L(G_x) \subset G_{f(x)}$. Seja $u \in G_x \backslash \{0\}$. Temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))L(x)u\| &= \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{n+1}(x)u\| \\
&= \liminf_{n\to-\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)u\| \\
&\geq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)u\| \geq \lambda_1(L).
\end{aligned}$$

Logo, $L(x)u \in G_{f(x)}$. A outra inclusão segue de modo análogo. Vemos então que $f(x) \in \hat{\Lambda}(j)$, donde concluímos que $\hat{\Lambda}(j)$ é um conjunto $f-$ invariante e, como assumimos μ ergódica, segue que $\mu(\hat{\Lambda}(j)) = 1$, para algum j.

Iremos mostrar então que G é um subfibrado mensurável de F_x. Para isto, vamos dividir a demonstração em três etapas. Depois, iremos checar que $j \geq 1$.

Primeiro passo: Para $k \geq 1$ e $x \in M$ defina

$$G_x(k) = \{u \in F_x : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k}\} \cup \{0\}.$$

Note que $G_x(k)$ é um subespaço vetorial de F_x. De fato, temos que $G_x(k)$ é não vazio, pois $0 \in G_x(k)$. Dados $u \in G_x(k)$ e β um escalar não nulo, tem-se

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)(\beta u)\| &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\beta L_{-n}(x)u\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |\beta| \|L_{-n}(x)u\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} (\log |\beta| + \log \|L_{-n}(x)u\|) \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |\beta| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

e, dados $v, w \in G_x(k)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)(v+w)\| &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)v + L_{-n}(x)w\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log 2\max\{\|L_{-n}(x)v\|, \|L_{-n}(x)w\|\} \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log 2 + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\max\{\|L_{-n}(x)v\|, \|L_{-n}(x)w\|\} \\
&\leq -\lambda_1 + \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Donde vemos que βu e $v + w$ estão em $G_x(k)$.

Seja agora $M_k = \{x \in M : G_x(k) = G_x\}$. Afirmamos que $(M_k)_k$ cobre M. De fato, para qualquer $x \in M$ fixo, $(G_x(k))_k$ forma uma sequencia decrescente de subespaços de F_x e , como *dim* F_x é finita, deve existir $k_x \geq 1$ tal que $G_x(k) = G_x$, para todo $k \geq k_x$. Vamos mostrar agora que M_k é um conjunto mensurável. Para isto, vamos considerar as seguintes funções

$$\lambda_1 : M \to \mathbb{R},\ \lambda_1(x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)\|$$

e

$$\phi : F \to \mathbb{R},\ \phi(x,u) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|.$$

Note que tratam-se de funções mensuráveis, pois $(\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\|)_n$ e $(\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|)_n$ são sequencias limitadas de funções mensuráveis. Considere agora a projeção fibrada $\pi : F \to M$. Temos que

$$\begin{aligned}
x \notin M_k &\iff G_x(k) \neq G_x \\
&\iff \exists u \in F_x \text{ com } u \notin G_x \text{ tal que } \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1(x) + \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \text{ com } u \notin G_x \text{ tal que } \phi(x,u) \leq -\lambda_1(x) + \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \text{ com } u \notin G_x \text{ tal que } \phi(x,u) + \lambda_1\circ\pi(x,u) \leq \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \text{ com } u \notin G_x \text{ tal que } (\phi + \lambda_1\circ\pi)(x,u) \leq \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \text{ com } u \notin G_x \text{ tal que } (x,u) \in (\phi + \lambda_1\circ\pi)^{-1}((0,\frac{1}{k}]) \\
&\iff \exists u \in F_x \text{ com } u \notin G_x \text{ tal que } \pi(x,u) \in \pi((\phi + \lambda_1\circ\pi)^{-1}((0,\frac{1}{k}])) \\
&\iff x \in \pi((\phi + \lambda_1\circ\pi)^{-1}((0,\frac{1}{k}])),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$M_k = M\backslash\pi((\phi + \lambda_1\circ\pi)^{-1}((0,\frac{1}{k}])).$$

Sabendo que a projeção aplica conjuntos mensuráveis em conjuntos mensuráveis, temos $\pi((\phi+\lambda_1\circ\pi)^{-1}((0,\frac{1}{k}]))$ mensurável, o que implica que $M\backslash\pi((\phi+\lambda_1\circ\pi)^{-1}((0,\frac{1}{k}]))$ é mensurável e, portanto M_k é também mensurável.

Segundo passo: Fixemos $k\geq 1$ e, para cada $x\in M_k$ e $m\geq 1$, definamos

$$G_x(k,m)=\{u\in F_x:\|L_{-n}(x)u\|\leq m\exp(-n(\lambda_1-\frac{1}{k}))\|u\|,\forall n\}.$$

Afirmamos que $G_x(k)=\bigcup_m G_x(k,m)$, para todo $x\in M_k$. De fato, seja $u\in G_x(k)$. Podemos encontrar $k_x\geq 1$ tal que $G_x(k)=G_x$, para todo $k\geq k_x$, isto é, $x\in M_k$. Assim,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|\leq-\lambda_1.$$

portanto, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|-\frac{1}{n}\log\|u\|\leq-\lambda_1+\frac{1}{k}$$

para todo $n\geq n_0$, o que é equivalente a

$$\|L_{-n}(x)u\|\leq\exp(-n(\lambda_1-\frac{1}{k}))\|u\|,\quad\forall n\geq n_0.$$

Agora , seja $m_0\geq 1$ tal que

$$\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|-\frac{1}{n}\log\|u\|\leq\log m_0-\lambda_1+\frac{1}{k}$$

para $n=1,2,...,n_0$. Então,

$$\|L_{-n}(x)u\|\leq m_0\exp(-n(\lambda_1-\frac{1}{k}))\|u\|,\quad\forall n$$

e portanto, $u\in G_x(m_0,k)$. Agora mostremos a outra inclusão. Seja $u\in\bigcup_m G_x(k,m)$. Então, $u\in G_x(k,m_1)$, para algum m_1, e com isso, temos

$$\|L_{-n}(x)u\|\leq m_1\exp(-n(\lambda_1-\frac{1}{k}))\|u\|\Longrightarrow\log\|L_{-n}(x)u\|\leq\log m_1-n(\lambda_1-\frac{1}{k})+\log\|u\|.$$

Desta forma,

$$-\frac{1}{n}\log m_1+(\lambda_1-\frac{1}{k})-\frac{1}{n}\log\|u\|\leq-\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

e, assim

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \frac{1}{k} \leq \liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| &\Longrightarrow \lambda_1 - \frac{1}{k} \leq -\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \\ &\Longrightarrow \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow \ u \in G_x(k),\end{aligned}$$

portanto, $\bigcup_m G_x(k,m) \subset G_x(k)$. O que prova a nossa afirmação.

Definamos agora $M_{k,m} = \{x \in M_k : G_x(k) = G_x(k,m)\}$. Note, pelo que foi mostrado até agora, que

$$\begin{aligned}x \in M_{k,m} \Leftrightarrow G_x(k) = G_x(k,m) \Leftrightarrow G_x(k,m) &= \bigcup_{\hat{m}} G_x(k,\hat{m}) \\ \Leftrightarrow G_x(k,m) &= G_x(k,l), \text{para todo } l \geq m.\end{aligned}$$

Desta forma

$$M_{k,m} = \{x \in M_k : G_x(k) = G_x(k,m)\} = \{x \in M_k; G_x(k,m) = G_x(k,l),\ \forall l \geq m\}.$$

Note ainda que

$$x \in M_{k,m} \Longleftrightarrow G_x = G_x(k) = G_x(k,m).$$

Mostremos que $M_{k,m}$ é mensurável, para tanto considere a função

$$\psi_k : \pi^{-1}(M_k) \to \mathbb{R}, \qquad \psi_k(x,u) = \sup_{n>0}\left\{\frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|}\exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\right\}.$$

Observe que esta função é também mensurável, pois $f_n(x,u) = \dfrac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|}\exp(n(\lambda_1 - \dfrac{1}{k}))$ define uma sequência de funções contínuas e, portanto mensuráveis. Assim,

$$\begin{aligned}
x \notin M_{k,m} &\Longleftrightarrow G_x(k,m) \neq G_x(k,l), \text{ para algum } l \geq m \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in G_x(k,l) \text{ tal que } \|L_{-n}(x)u\| > m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|, \text{ para algum } n \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in G_x(k,l) \text{ tal que } \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|}\exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k})) > m, \text{ para algum } n \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in G_x(k,l) \text{ tal que } \sup_{n>0}\left\{\frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|}\exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\right\} > m \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in F_x \text{ e } l \geq m \text{ tal que } m < \psi_k(x,u) \leq l \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in F_x \text{ e } l \geq m \text{ tal que } \psi_k(x,u) \in (m,l] \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in F_x \text{ e } l \geq m \text{ tal que } (x,u) \in \psi_k^{-1}((m,l]) \\
&\Longleftrightarrow \exists u \in F_x \text{ e } l \geq m \text{ tal que } \pi(x,u) \in \pi(\psi_k^{-1}((m,l])) \\
&\Longleftrightarrow \exists l \geq m \text{ tal que } x \in \pi(\psi_k^{-1}((m,l])),
\end{aligned}$$

ou seja, $M_{k,m} = M_k \backslash \bigcup_{l=m}^{\infty} \pi(\psi_k^{-1}((m,l]))$. Observando que $\bigcup_{l=m}^{\infty} \pi(\psi_k^{-1}((m,l]))$ é mensurável, segue que $M_{k,m}$ também é mensurável. Vamos provar agora que $(M_{k,m})_m$ é uma cobertura de M_k. Para isto, seja $x \in M_k$ e $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base ortogonal de $G_x(k)$. Tomemos $m_1, \ldots, m_s \geq 1$ tais que $u_i \in G_x(k, m_i)$, para todo $1 \leq i \leq s$, e consideremos $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$. Para cada $u = \sum_{i=1}^{s} a_i u_i \in G_x(k)$ e para cada $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|L_{-n}(x)u\| = \|L_{-n}(x)\sum_{i=1}^{s} a_i u_i\| &\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i|\|L_{-n}(x)u_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i| m_i \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i| m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\| \\
&= m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\sum_{i=1}^{s} |a_i|\|u_i\| \\
&= m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|_{soma},
\end{aligned}$$

assim, $\|L_{-n}(x)u\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))C\|u\|$, onde C depende da escolha da norma em F. Podemos concluir então que $G_x(k) \subset G_x(k, Cm+1)$ e, portanto, $x \in M_{k,Cm+1}$.

Terceiro passo: Afirmamos que G_x é semicontínua inferiormente em cada $M_{k,m}$, ou seja, dada uma sequência $(x_i)_i$ em $M_{k,m}$ convergindo para algum $x \in M_{k,m}$, tem-se $\lim G_{x_i} \subset G_x$. De fato, dada uma sequencia $u_i \in G_{x_i},\ i \geq 1$, que converge para algum $u \in F_x$, temos

$$\|L_{-n}(x_i)u_i\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\|,$$

para todo $i \geq 1$ e $n \geq 1$. Passando ao limite, obtemos

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|,$$

o que implica $u \in G_x(k,m) = G_x(k) = G_x$, pois $x \in M_{k,m}$. Como consequência disto, temos que cada conjunto $M_{k,m,j} = \{x \in M_{k,m} : dimG_x \geq j\}$ é fechado e que G_x varia continuamente com x em cada $M_{k,m,j} \backslash M_{k,m,j+1}$. Dos Passos 1 e 2, sabemos que $(M_k)_k$ é uma cobertura de M e que $(M_{k,m})_m$ é uma cobertura de M_k, donde podemos concluir que $(M_{k,m,j} \backslash M_{k,m,j+1})$ é uma cobertura de $\hat{\Lambda}(j)$ por conjuntos mensuráveis. Notemos que $\pi^{-1}|(M_{k,m,j} \backslash M_{k,m,j+1}) = G|(M_{k,m,j} \backslash M_{k,m,j+1})$. Logo, pela Proposição 1.4, segue que $G|\hat{\Lambda}(j)$ é um subfibrado mensurável de $F|\hat{\Lambda}(j)$.

Passaremos agora à segunda parte da demonstração. Iremos provar que $dimG_x > 0$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in M$. Para isto, basta checar que , para todo $k \geq 1$, $G_x \neq \{0\}$ em $\mu-$quase todo ponto $x \in M$. Considere $k \geq 1$ fixo e, para $m \geq 1$, definamos Y_m como o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que existe $u \in F_x \backslash \{0\}$ satisfazendo

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\| \tag{3.11}$$

para $1 \leq n \leq m$. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(Y_m) \geq \delta \text{ para } m \geq 1. \tag{3.12}$$

Observemos que esta afirmação implica que o conjunto $Y = \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m$ tem medida positiva, pois $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \ldots$ e cada Y_m tem medida positiva. Se $x \in Y$ então existe uma sequencia de vetores unitários $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, com $v_i \in Y_i$, tais que vale 3.11. Consideremos um vetor v que seja limite de alguma subsequencia de (v_n), então vale 3.11 e $v \in G_x(k) \backslash \{0\}$. Notemos que

$$L_n(x)G_x(k) = G_{f^n(x)}(k)$$

e então tem-se $dimG_x(k) > 0$ se $x \in \bigcup_{n \geq 0} f^n(\bigcap_{m \geq 1} Y_m)$. Como $\bigcup_{n \geq 0} f^n(\bigcap_{m \geq 1} Y_m)$ é invariante e tem medida positiva, pois contem Y, segue da ergodicidade de μ que para $\mu-$quase todo ponto tem-se $dimG_x(k) > 0$. Desta forma, para a demonstração do lema, precisamos verificar agora a afirmação em 3.12. Para isto, provaremos e utilizaremos o resultado abaixo devido a Pliss.

Lema 3.8. ***(Pliss)***: *Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ e $A > 0$, existe $\delta = \delta(\lambda, \epsilon, A) > 0$ tal que se dada qualquer sequencia $a_0, \ldots, a_{N-1}$ em $\mathbb{R}$, com $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \leq N\lambda$ e $|a_k| \leq A$, para todo $0 \leq k \leq N-1$, então existem $l \geq N\delta$ e $0 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_l \leq N-1$ tais que*

$$\sum_{j=n}^{n_i-1} a_j \leq (n_i - n)(\lambda + \epsilon), \text{ para todo } 0 \leq n < n_i \text{ e } 1 \leq i \leq l.$$

Demonstração. Seja $S(n) = \sum_{j=n}^{N-1}(a_j - (\lambda + \epsilon))$ e tomemos $n_1 < \ldots < n_l$ aqueles números inteiros do conjunto $\{0, \ldots, N-1\}$ que satisfazem

$$S(n) \leq S(n_i), \text{ para todo } 0 \leq n < n_i. \tag{3.13}$$

Então, para $0 \leq n < n_i$,

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{j=n}^{N-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) = \sum_{j=n}^{n_i-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) + \sum_{j=n_i}^{N-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) \\ &= \sum_{j=n}^{n_i-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) + S(n_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{n_i-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) = S(n) - S(n_i) &\Rightarrow \sum_{j=n}^{n_1-1} a_j - \sum_{j=n}^{n_i-1}(\lambda+\epsilon) = S(n) - S(n_i) \\ &\Rightarrow \sum_{j=n}^{n_1-1} a_j = S(n) - S(n_i) + \sum_{j=n}^{n_i-1}(\lambda+\epsilon) \\ &\Rightarrow \sum_{j=n}^{n_1-1} a_j = S(n) - S(n_i) + [(n_i-1) - n + 1](\lambda+\epsilon) \\ &\Rightarrow \sum_{j=n}^{n_1-1} a_j = S(n) - S(n_i) + (n_i - n)(\lambda+\epsilon)) \\ &\Rightarrow \sum_{j=n}^{n_1-1} a_j \leq (n_i - n)(\lambda+\epsilon), \end{aligned}$$

pois $S(n) - S(n_i) \leq 0$. Temos ainda que estimar o valor de l. Antes, porém, observemos que $S(n_{i-1}) \geq S(n_i - 1)$ para todo $i > 1$, porque, caso contrário, haveria $n_{i-1} < m < n_i$ tal que $S(n) \leq S(m)$ para todo $1 \leq n \leq m$, o que contraria a definição do conjunto $\{n_1, \ldots, n_l\}$. Assim, para todo $i > 1$, temos

$$S(n_{i-1}) \geq S(n_i - 1) \Rightarrow S(n_{i-1}) \geq \sum_{n_1-1}^{N-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) = \sum_{n_1}^{N-1}(a_j - (\lambda+\epsilon)) + a_{n_i-1} - (\lambda+\epsilon)$$
$$\Rightarrow S(n_{i-1}) \geq S(n_i) + (a_{n_i-1} - (\lambda+\epsilon)) \geq S(n_i) - (\lambda+\epsilon+A),$$

onde a última desigualdade se justifica porque $a_{n_i-1} \geq -A$. Em particular, note que

$$S(n_1) \geq S(n_2) - (\lambda+\epsilon+A)$$
$$S(n_2) \geq S(n_3) - (\lambda+\epsilon+A) \Rightarrow S(n_1) \geq S(n_3) - 2(\lambda+\epsilon+A)$$

e, por indutividade, segue que

$$S(n_1) \geq S(n_l) - (l-1)(\lambda+\epsilon+A).$$

Como 0 é o menor elemento de $\{0, ..., N-1\}$ que satisfaz 3.13, então

$$S(n_1) = S(0) = \sum_{k=0}^{N-1}(a_k - (\lambda+\epsilon)) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k - N(\lambda+\epsilon) \leq N\lambda - N(\lambda+\epsilon) = -N\epsilon.$$

Temos ainda, que

$$S(n_l) \geq S(N-1) = a_{N-1} - (\lambda+\epsilon)$$

(isto porque n_l é o maior elemento de $0, ..., N-1$ que satisfaz 3.13). Assim,

$$-N\epsilon \geq S(n_1) \geq S(n_l) - (l-1)(\lambda+\epsilon+A) \geq a_{N-1} - (\lambda+\epsilon) - (l-1)(\lambda+\epsilon+A)$$
$$\Rightarrow -N\epsilon \geq a_{N-1} - (\lambda+\epsilon) - l(\lambda+\epsilon+A) + (\lambda+\epsilon+A)$$

Uma vez que $a_{N-1} \geq -A$, segue que

$$-N\epsilon \geq -A - (\lambda+\epsilon) - l(\lambda+\epsilon+A) + (\lambda+\epsilon+A) = -l(\lambda+\epsilon+A)$$
$$\Rightarrow N\epsilon \leq l(\lambda+\epsilon+A).$$

Desta forma, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{\lambda+\epsilon+A}$ fica provado o resultado. $\square$

Continuaremos agora com a demonstração do lema 3.5, iniciando a verificação de 3.12 . Sejam $u \in F_x, N \geq 1$ tais que $\dfrac{\|L_N(x)u\|}{\|u\|} \geq \exp(N(\lambda_1 - \dfrac{1}{2k}))$ e definamos

$$a_i = \log \|L^{-1}(f^i(x))(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\|,$$

para todo $0 \leq i \leq N-1$. Notemos que

$$\log \|L^{-1}(f^i(x))(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\| \leq \log \|L^{-1}(f^i(x))\| \|(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\| = \log \|L^{-1}(f^i(x))\|,$$

assim, $a_i \leq \log \|L^{-1}\|$. Notemos ainda que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} a_j &= \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{\|L^{-1}(f^j(x))L_{j+1}(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} = \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{\|L^{-1}(f^j(x))L(f^j(x))L_j(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \log \frac{\|L_j(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} = \log \frac{\|u\|}{\|L(x)u\|} + \ldots \log \frac{\|L_{N-1}(x)u\|}{L_N(x)u} \\
&= \log \|u\| - \log \|L(x)u\| + \ldots + \log \|L_{N-1}(x)u\| - \log \|L_N(x)u\| \\
&= \log \frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|} \leq \log(\exp(-N(\lambda_1 - \frac{1}{2k}))) = N(-\lambda_1 + \frac{1}{2k}).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.8, tomando $\lambda = -\lambda_1 + \dfrac{1}{2k}$, $\epsilon = \dfrac{1}{2k}$ e $A = \log \|L^{-1}\|$, obtemos números $n_1, ..., n_l$ tais que $0 \leq n_1 < ... < n_l \leq N-1$, com $l \geq N\delta$ e satisfazendo

$$\log \frac{\|L_n(x)u\|}{\|L_{n_i}(x)u\|} = \sum_{j=n}^{n_i-1} a_j \leq (n_i - n)(-\lambda + \frac{1}{k}) \tag{3.14}$$

para todo $0 \leq n < n_i$. Considere $v_i = \dfrac{L_{n_i(x)u}}{\|L_{n_i}(x)u\|}$. Observando que

$$L_n(x)u = L_{n-n_i}(f^{n_i}(x))L_{n_i}(x)u,$$

obtemos de 3.14

$$\|L_{n-n_i}(f^{n_i}(x))v_i\| \leq \exp\left((n-n_i)(\lambda_1 - \frac{1}{k})\right)$$

para $1 \leq n_i - n < n_i$, e isto implica que $f^{n_i}(x) \in Y_{n_i}$. Do fato que $Y_{n_i} \subset Y_m$ quando $n_i \geq m$, segue que

$$\frac{1}{N}\#\{0 \leq j < N; f^j(x) \in Y_m\} \geq \frac{l-m}{N} \geq \frac{N\delta - m}{N} = \delta - \frac{m}{N}.$$

Agora façamos $N \to +\infty$, assim temos

$$\tau(x, Y_m) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\#\{0 \leq j < N; f^j(x) \in Y_m\} \geq \delta$$

Como μ é ergódica, segue que $\mu(Y_m) = \tau(x, Y_m) \geq \delta$, provando assim a nossa afirmação.

Para finalizar a demonstração do lema 3.5, definamos

$$C_\epsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \left\{ \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda_1 + \epsilon))\|u\|}; u \in G_x \backslash \{0\} \right\}.$$

Notando que

$$u = L_n(f^{-n}(x))L_{-n}(x)u,$$

temos

$$\|u\| \leq C_\epsilon(f^{-n}(x)) \exp(n(\lambda_1 + \epsilon))\|L_{-n}(x)u\|$$

logo,

$$\frac{1}{n}\log \|u\| \leq \frac{1}{n}\log C_\epsilon(f^{-n}(x)) + (\lambda_1 + \epsilon) + \frac{1}{n}\log \|L_{-n}(x)u\|,$$

podemos, como foi feito na Seção 3.4, mostrar que $C_\epsilon(x)$ tem crescimento subexponencial, sendo assim segue que

$$0 \leq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log \|L_{-n}(x)u\| + \lambda_1 + \epsilon = -\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|L_n(x)u\| + \lambda_1 + \epsilon$$

e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|L_n(x)u\| \leq \lambda_1.$$

Pela Proposição 3.3, temos também

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log \|L_n(x)u\| \leq \lambda_1.$$

Agora, se definirmos

$$C_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0}\left\{\frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1+\epsilon))\|u\|}; u \in G_x\backslash\{0\}\right\}$$

e, observando que

$$u = L_{-n}(f^n(x))L_n(x)u$$

temos

$$\|u\| \leq C_\epsilon(f^n(x)) \exp(-n(\lambda_1 + \epsilon))\|L_n(x)u\|$$

donde

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|L_n(x)u\| - \lambda_1 - \epsilon$$

e, portanto,

$$\lambda_1 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|L_n(x)u\|.$$

Aplicando novamente a Proposição 3.3, tem-se também

$$\lambda_1 \leq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log \|L_n(x)u\|.$$

Como, dada qualquer sequência limitada (x_n) de números reais vale

$$\limsup x_n \geq \liminf x_n,$$

segue que

$$\liminf_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| = \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|$$

e, com isso, temos

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| = \lambda_1,$$

o que completa finalmente a demonstração do Lema 3.5.

3.7 Prova do Lema 3.7

Seja Σ o espaço dos morfismos de fibrados vetoriais mensuráveis $G^\perp \to G$. Obteremos um morfismo $A \in \Sigma$ tal que $H = graf(A) = \{u + Au; u \in G^\perp\}$ seja o subfibrado como no enunciado do Lema 3.7. Seja a transformação $\Phi : \Sigma \to \Sigma$, definida por

$$\Phi(A)(x) = L^{-1}(f(x))A(f(x))\widehat{L}(x)$$

e considere ainda, $P = (L|G^\perp - \widehat{L}) : G^\perp \to G$. Dado $u \in G^\perp$,

$$\begin{aligned} L(u + Au) &= Lu + LAu = \widehat{L}u + Pu + LAu \\ &= \widehat{L}u + A(\widehat{L}u) + L(L^{-1}Pu) + LAu - L(L^{-1}A\widehat{L}u) \\ &= \widehat{L}u + A(\widehat{L}u) + L(L^{-1}P + A - L^{-1}A\widehat{L})u. \end{aligned}$$

Observemos que a primeira parcela na soma acima está em $G^\perp$enquanto que as duas últimas pertencem a G. Portanto, H é invariante por L se, e somente se,

$$A - \Phi(A) = -L^{-1}P \tag{3.15}$$

Seja $B = -L^{-1}P$. Vamos mostrar que existem $\lambda < 0$ e uma função mensurável $C : M \to \mathbb{R}$ tais que $\|\Phi^n(B)x\| \leq C(x)\exp(\lambda n)$ para todo $n \geq 0$ e $\mu-$ quase toda parte. Isto assegura que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)x$ é convergente em $\mu-$quase toda parte. De fato, consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} C(x)\exp(\lambda n)$e observemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{C(x)\exp(\lambda(n+1))}{C(x)\exp(\lambda n)} = \lim_{n\to+\infty} \exp(\lambda) = \exp(\lambda) < 1$$

e, pelo teste da razão, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} C(x)\exp(\lambda n)$ converge. Utilizando também o teste da comparação, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^n(B)x\|$ converge e, portanto $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)x)$ também é convergente. Definindo $A = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)$, vemos que A satisfaz 3.15 , pois

$$A - \Phi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B) - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1}(B) = B + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n(B) - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1}(B) = B.$$

Desta forma, resta encontrar λ e C. Para tanto, tomemos $\epsilon > 0$ e definamos

$$K_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|\widehat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}+\epsilon)))} \quad \text{e} \quad C_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)\|}{\exp(n(\lambda(L^{-1}|G)+\epsilon))}.$$

Notemos que

$$\|\Phi^n(B)x\| = \|(L^{-1}|G)_n(f^n(x))B(f^n(x))\widehat{L}_n(x)\| \leq \|(L^{-1}|G)_n(f^n(x))\|B(f^n(x))\|\widehat{L}_n(x)\|$$

e, como temos

$$\frac{\|\widehat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}+\epsilon)))} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\|\widehat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}+\epsilon)))}$$

e

$$\frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)\|}{\exp(n(\lambda(L^{-1}|G)+\epsilon))} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)\|}{\exp(n(\lambda(L^{-1}|G)+\epsilon))}$$

segue que

$$\|\Phi^n(B)x\| \leq C_\epsilon(f^n(x))\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 2\epsilon)).$$

Utilizando os mesmos argumentos na demonstração da Proposição 3.2 na Seção 3.4 , podemos ver que $C_\epsilon(x)$ e $K_\epsilon(x)$ têm crescimento subexponencial. Agora, definamos

$$D_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{C_\epsilon(f^n(x))}{\exp(n\epsilon)}.$$

Observemos que temos $D_\epsilon(x)$ finito, pois $C_\epsilon(f^n(x))$ é limitado e $\exp(-n\epsilon) \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Phi^n(B)x\| &\leq C_\epsilon(f^n(x))\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 2\epsilon)) \\
&\leq \frac{C_\epsilon(f^n(x))}{\exp(n\epsilon)}\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 3\epsilon)) \\
&\leq D_\epsilon(x)\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 3\epsilon)).
\end{aligned}$$

Então basta tomar $\lambda = \lambda_1(\widehat{L}) - \lambda_1 + 3\epsilon$ e $C(x) = D_\epsilon(x)\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)$, onde escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $\lambda < 0$.

Para terminar a demonstração do Lema 3.7, resta agora apenas mostrar que $\lambda_1(L|H) = \lambda_1(\widehat{L})$. Com este propósito, considere $\widetilde{A} : G^\perp \to H$ dada por $\widetilde{A}u = u + Au$. Temos que

$$L \circ \widetilde{A}u = L(u + Au) = Lu + LAu = \widehat{L}u + A(\widehat{L}u) = \widetilde{A} \circ \widehat{L}u,$$

ou seja, $L \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \widehat{L}$, desta forma,

$$(L|H)(x) = \widetilde{A}(f(x))\widehat{L}(x)(\widetilde{A})^{-1}(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L|H, x) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(L|H)_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(f^n(x))\widehat{L}_n(x)(\widetilde{A})^{-1}(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(f^n(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{L}_n(x)\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(f^n(x))\| + \lambda_1(\widehat{L}).
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(f^n(x))\| = 0. \tag{3.16}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
1 \leq \|id\| \leq \|\widetilde{A}(f^n(x))\| &= \|id + A(f^n(x))\| \leq 1 + \|A(f^n(x))\| \\
&= 1 + \|\sum_{m=0}^{\infty} \Phi^m(B(f^n(x)))\| \leq 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \|\Phi^m(B(f^n(x)))\| \\
&\leq 1 + C(f^n(x)) \sum_{m=0}^{\infty} \exp(\lambda m) = 1 + \frac{C(f^n(x))}{1 - \exp(\lambda)},
\end{aligned}$$

logo,

$$1 \leq 1 + \|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq 1 + \frac{C(f^n(x))}{1 - \exp(\lambda)} \Rightarrow 0 \leq \|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq \frac{C(f^n(x))}{1 - \exp(\lambda)}.$$

Daí, temos

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log C(f^n(x)).$$

Novamente procedendo de forma análoga como na demonstração da Proposição 3.2 na Seção 3.4 , temos que $D_\epsilon(x)$ tem crescimento subexponencial. Lembrando ainda que $C(x) = D_\epsilon(x)\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)$ e que $B = -L^{-1}P$ tem norma limitada, segue que

$$\frac{1}{n} \log C(f^n(x)) = \frac{1}{n} \log D_\epsilon(f^n(x)) + \frac{1}{n} \log \|B(f^n(x))\| + \frac{1}{n} \log K_\epsilon(f^n(x))$$

e, portanto, podemos concluir que $C(x)$ tem crescimento subexponencial. Desta forma 3.16 se verifica e, com isso, temos $\lambda_1(L|H) \leq \lambda_1(\widehat{L})$.

Agora, tendo em vista que $\widehat{L}(x) = (\widetilde{A})^{-1}(f(x))(L|H)(x)\widetilde{A}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\widehat{L}) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{L}_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))(L|H)_n(x)\widetilde{A}(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(L|H)_n(x)\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))\| + \lambda_1(L|H, x).
\end{aligned}$$

Uma vez que $\|(\widetilde{A})^{-1}\| \leq 1$ (pois $(\widetilde{A})^{-1} = \pi|H : H \to G^{\perp}$) em $\mu-$quase toda parte, concluímos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))\| = 0.$$

Portanto, $\lambda_1(\widehat{L}) \leq \lambda_1(L|H, x)$ e isto conclui a prova do Lema 3.7 .

Referências Bibliográficas

[1] BARREIRA, L., PESIN, Y., *Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Proc. Sympos. Pure Math., 69, 3-106, Amer. Math. Soc., 2001.

[2] BARTLE, R. ; *The Elements of Integration*, New York, J. Wiley, 1966.

[3] CHERNOV, N.; MARKARIAN, R.; *Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards*, Monografías del IMCA. IMCA, Lima, 2001.

[4] ISNARD, C.; *Introdução à Medida e Integração*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[5] DUDLEY, R. M. ;*Real Analysis and Probability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 74. Cambridge Universaty Press, New York, 2004.

[6] DOS SANTOS, L.C.; *Expoentes de Lyapunov para o Estádio Circular*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

[7] ALVES, F.F. ; *Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2010.

[8] KATZNELSON; WEISS.; *A simple proof of some ergodic theorems*, Israel Journal of Mathematics 42 (1982), 291-296.

[9] LIMA, E. L; *Variedades Diferenciáveis*, Publicações Matemáticas. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[10] MAÑÉ, R.; *Teoria Ergódica*, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[11] OLIVEIRA, K ; *Um Primeiro Curso em Teoria Ergódica com Aplicações*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2005.

[12] OLIVEIRA, K.; VIANA, M.; *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Endereço eletrônico http://www.impa.br/ viana/out/fte.pdf

[13] VIANA, M.; *Multiplicative Ergodic Theorem of Oseledets*. (Texto encontrado na página pessoal de Marcelo Viana em http://www.impa.br/ viana/out/oseledets.pdf)

[14] VIANA, M. ; *Teorema Ergódico de Birkhoff*. (Texto encontrado na página pessoal de Marcelo Viana em http://www.impa.br/ viana/)

[15] WALTERS, P.; *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, no 79. Springer-Verlag, New York, 1982.