Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Extensões de Ore e Álgebras de Weyl †

por

Pedro Alfredo Eugenio

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

abril/2013

João Pessoa - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Extensões de Ore e Álgebras de Weyl

por

Pedro Alfredo Eugenio

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB

Prof. Dr. Aron Simis - UFPE

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

abril/2013

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus em primeiro lugar.
À minha mãe, Josefa Maria da Conceição (in memorian)e meu pai Manoel Alfredo Eugenio, que não se negaram em momento algum em disponibilizar condições para os meus estudos.
À minha esposa e companheira incondicional Glauciete Maria da Silva Eugenio, pela compreensão nas minhas ausências. Aos meus irmão e parentes que, mesmo distantes não pouparam manifestação de incentivo.
Ao meu orientador, Napoleón Caro Tuesta, que foi de fundamental importância no desenvolvimento deste trabalho.
Aos professores Aron Simis e Roberto Bedregal, por participarem da banca, e a todos os outros professores do departamento de matemática da UFPB, pela contribução na minha formação.
Por fim, a todos os meus amigos, em especial os de turma com os quais compartilhei, estudos, problemas e alegrias.

Dedicatória

Aos meus pais.

Resumo

Neste trabalho estudaremos as definições, exemplos e propriedades básicas das extensões de Ore. Em particular, apresentaremos um tipo especial de extensões de Ore, as álgebras de Weyl $A_n(\mathbb{K})$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Veremos que $A_n(\mathbb{K})$ é um domínio noetheriano simples. Estudaremos também a dimensão $d(M)$ de um A_n-módulo finitamente gerado M e provaremos a desigualdade de Bernstein, $n \leq d(M) \leq 2n$. Finalmente estudaremos os $A_n(\mathbb{K})$-módulos holonômicos, isto é, os $A_n(\mathbb{K})$-módulos finitamente gerados tais que $d(M) = n$.

Palavras chaves : Extensões de Ore, Álgebras de Weyl, módulos holonômicos.

Abstract

In this work we will study the definitions, examples and basic properties of Ore extensions. In particular, we will present a special case of Ore extensions, the Weyl algebras $A_n(\mathbb{K})$ over a field $\mathbb{K}$. We will see that $A_n(\mathbb{K})$ is a simple noetherian domain. We will study also the dimension $d(M)$ of a finitely generated $A_n(\mathbb{K})$-module and we will prove the Bernstein's inequality, $n \leq d(M) \leq 2n$. Finally we will study the holonomic $A_n(\mathbb{K})$-modules, that is, the finitely generated $A_n(\mathbb{K})$-modules such that $d(M) = n$.

Key words : Ore extensions, Weyl algebras, holomic modules.

Sumário

Introdução

Em 1933 o matemático norueguês Oystein Ore introduziu um tipo especial de extensões de aneis. Ele considerou polinômios sobre um anel R numa indeterminada x, a qual não comuta com os elementos de R. Como polinômios, é desejado que cada elemento seja escrito de maneira única na forma $\sum r_i x^i$, para alguns $r_i \in R$. Isto tem que se aplicar, é claro, ao elemento xr, para cada $r \in R$. É de esperar que tais polinômios tenham um bom comportamento com relação ao grau, isto é, $grau(fg) \leq grau(f) + grau(g)$, portanto é requerido que $xr \in Rx + R$, isto é, $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$. Nestas condições, é claro que α e δ são endomorfismos do grupo aditivo de R. Mais ainda,

$$x(rs) = \alpha(rs)x + \delta(rs) \quad \text{e} \quad (xr)s = (\alpha(r)\alpha(s))x + (\delta(r)s + \alpha(r)\delta(s)).$$

Portanto α tem que ser um endomorfismo do anel R e δ uma aplicação aditiva que satisfaz a condição

$$\delta(rs) = \delta(r)s + \alpha(r)\delta(s),$$

que é a propriedade que define uma **α-derivação** sobre R.

No primeiro capítulo de nosso trabalho mostraremos que para toda α-derivação δ sobre um anel R é possível construir um anel S com as seguintes propriedades :
(i) R é um subanel de S, (ii) Existe um elemento $x \in S$ tal que S é um R-módulo livre com base $\{1, x, x^2, ...\}$ e (iii) $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ para todo $r \in R$.
Mais ainda provaremos que tal anel satisfaz uma propriedade universal e nesse sentido é único. O anel S é uma **extensão de Ore** do anel R e é denotado por $S = R[x; \alpha, \delta]$. Exibiremos alguns exemplos interessantes de aneis e provaremos que são extensões de Ore. Também demonstraremos, além de outras propriedades, um resultado semelhante ao teorema das bases de Hilbert para aneis de polinômios, se o anel R é um anel noetheriano à esquerda (à direita) e α é um automorfismo de R, então S é um anel noetheriano à esquerda (à direita).

No capítulo 2 estudaremos um tipo especial de extensões de Ore, as **álgebras de Weyl**, que foram introduzidas por Hermann Weyl, para estudar o princípio de incerteza de Heisenberg em mecânica quântica. Definiremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima álgebra de Weyl $A_n(\mathbb{K})$ como o anel de operadores diferenciais do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ e provaremos que $A_n(\mathbb{K})$ é uma extensão de Ore e portanto herdam as propriedades demonstradas no capítulo 1, em particular veremos que $A_n(\mathbb{K})$ é um domínio noetheriano simples.

O capítulo 3 está dedicado ao estudo dos $A_n(\mathbb{K})$-módulos graduados e filtrados. Em particular estudaremos a **filtração de Berstein** de $A_n(\mathbb{K})$ e veremos que o anel graduado associado é isomorfo ao anel de polinômios em $2n$ indeterminadas com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$.

Finalmente, no capítulo 4 estudaremos, usando polinômios de Hilbert, a dimensão $d(M)$ de um $A_n(\mathbb{K})$-módulo finitamente gerado M. Provaremos que $n \leq d(M) \leq 2n$, resultado conhecido como **desigualdade de Bernstein**. Os $A_n(\mathbb{K})$-módulos M tais que $d(M) = n$ são os **módulos holonômicos** e serão estudados com alguns detalhes.

Capítulo 1

Extensões de Ore

1.1 Definições e exemplos

No que segue, R denotará um anel e $\alpha : R \longrightarrow R$ um endomorfismo de R.

Definição 1.1 *Uma α-**derivação** de R é uma aplicação aditiva $\delta : R \longrightarrow R$ com a seguinte propriedade,*

$$\delta(rs) = \delta(r)s + \alpha(r)\delta(s), \text{ para todo } r, s \in R$$

Notemos que $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \alpha(1)\delta(1) + \delta(1)1 = \delta(1) + \delta(1)$, donde $\delta(1) = 0$. Se α é a aplicação identidade de R, a propriedade acima é conhecida como **regra de Leibniz**. Neste caso, as α-derivações são **derivações** de R.

Exemplo 1.2 A aplicação nula $\delta = 0$ é uma α-derivação para qualquer endomorfismo α de R.

Exemplo 1.3 Seja R o anel das funções reais de classe C^∞ , isto é, $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f$ é de classe $C^\infty\}$, então a derivada $\dfrac{d}{dx}$, é uma derivação sobre R.

Exemplo 1.4 Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja $R = \mathbb{K}[x]$ $(R = \mathbb{K}[[x]])$ o anel de polinômios (anel de séries de potências formais, respectivamente) com coeficientes em $\mathbb{K}$. A regra $\delta(\sum_i a_i x^i) = \sum_i i a_i x^{i-1}$ define uma derivação δ sobre R, que é denotada por $\dfrac{d}{dx}$. Mais geralmente, se $R = K[x_1, ..., x_n](R = K[[x_1, ..., x_n]])$ é um anel de polinômios em n-indeterminadas (anel de séries de potências formais, respectivamente), cada derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, ..., n$ define uma derivação em R.

Exemplo 1.5 Seja $\mathbb{K}[x]$ o anel de polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $q \in \mathbb{K}$ tal que $q \neq 0$, $q \neq 1$ e seja α o $\mathbb{K}$-automorfismo de álgebras de $\mathbb{K}[x]$ tal que $\alpha(x) = qx$. Então a regra $\delta(f(x)) = \dfrac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$, define uma α-derivação de $\mathbb{K}[x]$ conhecida como **derivada Euleriana** ou **q-operador de diferença**.

Dado um anel R e δ uma α-derivação de R construiremos, um anel S que contém R como subanel, que tem como elementos, "polinômios "numa indeterminada x com coeficientes a "esquerda"em R e com uma multiplicação que satisfaz a relação
$xr = \alpha(r)x + \delta(r)$, para todo $r \in R$. Mais precisamente, temos o seguinte :

Teorema 1.6 *Seja δ uma α-derivação de R. Então existe um anel S com as seguintes propriedades:*
(a) R é um subanel de S.
(b) Existe um elemento $x \in S$ tal que S é um R-módulo livre à esquerda com base $\{1, x, x^2, ...\}$.
(c) $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$, para todo $r \in R$

Demonstração: Seja $E = End_{\mathbb{Z}}(R[z])$, onde $R[z]$ é o anel de polinômios (ordinário) na indeterminada z com coeficientes em R. Consideremos o homomorfismo de aneis $\lambda : R \longrightarrow E$ tal que para $r \in R$ e $p(z) \in R[z]$, $\lambda(r)(p(z)) = rp(z)$. É claro que λ é injetivo, logo podemos identificar R com o subanel $\lambda(R) \subset E$.

Agora, definimos $x \in E$ pela regra

$$x(\sum_i r_i z^i) = \sum_i (\alpha(r_i) z^{i+1} + \delta(r_i) z^i),$$

e seja S o subanel de E gerado por $R \cup \{x\}$.
Para $r \in R$ e $p(z) = \sum_i r_i z^i \in R[z]$, temos que
$(xr)(p(z)) = x(\sum_i r r_i z^i) = \sum_i (\alpha(r r_i) z^{i+1} + \delta(r r_i) z^i) = \sum_i \alpha(r)\alpha(r_i) z^{i+1} + \sum_i (\alpha(r)\delta(r_i) + \delta(r) r_i) z^i = \alpha(r) \sum_i (\alpha(r_i) z^{i+1} + \delta(r_i) z^i) + \delta(r) \sum_i r_i z^i = (\alpha(r)x + \delta(r))(p(z))$.
Portanto, $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ para todo $r \in R$. Em particular, $xR \subseteq Rx + R$. Desta relação, segue por indução que

$$x^i R \subseteq Rx^i + Rx^{i-1} + ... + Rx + R, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}^+,$$

e consequentemente,

$$(Rx^i)(Rx^j) \subseteq Rx^{i+j} + Rx^{i+j-1} + ... + Rx^j, \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z}^+$$

Isto implica que $\sum_{i=0}^{\infty} Rx^i$ é um subanel de E.

Seja $S = \sum_{i=0}^{\infty} Rx^i$. Então o conjunto $\{1, x, x^2, ...\}$ gera S como R-módulo à esquerda. Só falta mostrar que $\{1, x, x^2, ...\}$ é linearmente independente sobre R. Para isto, sejam $r_0, r_1, ..., r_n \in R$, tais que $r_0 + r_1 x + ... + r_n x^n = 0$. Aplicando no polinômio constante 1, temos que $(r_0 + r_1 x + ... + r_n x^n)(1) = 0$ em $R[z]$. Mas $x^i(1) = z^i$, para todo $i \geq 0$. Portanto, $r_0 + r_1 z + ... + r_n z^n = 0$ em $R[z]$, donde $r_0 = r_1 = ... = r_n = 0$. ∎

Definição 1.7 *O anel S construído acima é conhecido como uma* ***extensão de Ore*** *de R e é denotado por $R[x; \alpha, \delta]$.*
Na literatura em inglês tal anel é conhecido como um ***"skew polynomial ring"*** *de R.*
Se δ é a derivação nula, escreveremos $R = [x; \alpha]$ no lugar de $R[x; \alpha, 0]$.
Se $\alpha = 1_R$ é a aplicação identidade de R, escreveremos $R[x; \delta]$ no lugar de $R[x; 1_R, \delta]$. O anel $R[x; \delta]$ é conhecido também como um ***anel de operadores diferenciais.***

As extensões de Ore possuem a seguinte propriedade universal:

Teorema 1.8 *Seja $S = R[x; \alpha, \delta]$ uma extensão de Ore de R. Suponhamos que T é um anel, $\varphi : R \longrightarrow T$ é um homomorfismo de aneis e $y \in T$ tal que $y\varphi(r) = \varphi\alpha(r)y + \varphi\delta(r)$ para todo $r \in R$. Então, existe um único homomorfismo de aneis $\Psi : S \longrightarrow T$ tal que $\Psi|_R = \varphi$ e $\Psi(x) = y$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr, dashed, "\exists!\Psi"] & \\ R \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"'] & T \end{tikzcd}$$

Demonstração: Definamos a aplicação $\Psi : S \longrightarrow T$ por $\Psi(\sum_i r_i x^i) = \sum_i \varphi(r_i) y^i$. Então, $\Psi|_R = \varphi$ e $\Psi(x) = y$. Além disso, Ψ é um homomorfismo de aneis. De fato, primeiro note que se $t = \sum_j b_j x^j$ é um elemento arbitrário de S, então $\Psi(xt) = \Psi(\sum_j \alpha(b_j)x^{j+1} + \sum_j \delta(b_j)x^j) = \sum_j \varphi\alpha(b_j)y^{j+1} + \sum_j \varphi\delta(b_j)y^j = \sum_j(\varphi\alpha(b_j)y + \varphi\delta(b_j))y^j = \sum_j y\varphi(b_j)y^j = y\Psi(t)$.
Segue-se por indução que $\Psi(x^i t) = y^i \Psi(t)$, para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ e $t \in S$.

Mais ainda, se $a \in R$, então

$$\Psi(at) = \sum_j \varphi(ab_j)y^j = \sum_j \varphi(a)\varphi(b_j)y^j = \varphi(a)\Psi(t).$$

Consequentemente, dado $s = \sum_i a_i x^i$ em S, temos

$$\Psi(st) = \sum_i \Psi(a_i x^i t) = \sum_i \varphi(a_i)\Psi(x_i t) = \sum_i \varphi(a_i)y^i\Psi(t) = \Psi(s)\Psi(t).$$

Por outro lado, é claro que $\Psi(s+t) = \Psi(s) + \Psi(t)$. Portanto, Ψ é um homomorfismo de aneis que satisfaz a propriedade desejada.

Finalmente, seja $\Psi' : S \longrightarrow T$ um outro homomorfismo de aneis tal que $\Psi'|_R = \varphi$ e $\Psi'(x) = y$. Então,

$$\Psi'(\sum_i r_i x^i) = \sum_i \Psi'(r_i)(\Psi'(x))^i = \sum_i \varphi(r_i)y^i = \Psi(\sum_i r_i x^i)$$

O que prova a unicidade de Ψ. ∎

Corolário 1.9 *Sejam $S = R[x;\alpha,\delta]$ e $S' = R[x';\alpha,\delta]$ extensões de Ore de R, então existe um único isomorfismo de aneis $\Psi : S \longrightarrow S'$ tal que $\Psi(x) = x'$ e $\Psi|_R = 1_R$.*

Demonstração: Se aplicarmos o teorema com $\varphi : R \longrightarrow S'$ sendo a inclusão, obtemos um único homomorfismo $\Psi : S \longrightarrow S'$ tal que $\Psi|_R = \varphi$ e $\Psi(x) = x'$. Portanto, $\Psi|_R = 1_R$ e $\Psi(x) = x'$.

Por simetria, o teorema garante a existência de um único isomorfismo $\Psi' : S' \longrightarrow S$ tal que $\Psi'(x') = x$ e $\Psi'|_R = 1_R$. A aplicação 1_S tem a mesma propriedade, então pela unicidade temos que $\Psi'\Psi = 1_S$. De maneira semelhante, prova-se que $\Psi\Psi' = 1_{S'}$. Consequentemente, Ψ é o único isomorfismo procurado. ∎

Exemplo 1.10 Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja $q \in \mathbb{K}$, $q \neq 0$. Por definição, **o anel de coordenadas quantizado** de $\mathbb{K}^2$ ou **plano quântico** $\mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2)$ é a $\mathbb{K}$-álgebra apresentada pelos geradores u e v e a relação $uv = qvu$. Isto é, se $\mathbb{K}\langle U, V\rangle$ é a álgebra livre com duas letras U e V e $\langle UV - qVU\rangle$ denota o ideal gerado por $UV - qVU$, então

$$\mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2) = \frac{\mathbb{K}\langle U, V\rangle}{\langle UV - qVU\rangle}.$$

Os elementos u e v na definição são então as classes de U e V módulo $\langle UV - qVU\rangle$.

Afirmação: O plano quântico $\mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2)$ é uma extensão de Ore do anel de polinômios ordinários $\mathbb{K}[y]$. Mais precisamente, se α é o automorfismo de $\mathbb{K}[y]$ tal que $\alpha(y) = qy$, mostraremos que $\mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2) \cong \mathbb{K}[y][x;\alpha]$.

Para isto, seja $\sigma : \mathbb{K}\langle U, V\rangle \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\alpha]$ o $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras tal que $\sigma(U) = x$ e $\sigma(V) = y$. Então $\sigma(UV - qVU) = xy - qyx = 0$ e portanto $\langle UV - qVU\rangle \subseteq ker\sigma$. Pelo teorema fundamental dos homomorfismos, σ induz um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\Phi : \mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2) = \dfrac{\mathbb{K}\langle U, V\rangle}{\langle UV - qVU\rangle} \longrightarrow \mathbb{K}[y][x,\alpha]$
tal que $\Phi(u) = x$ e $\Phi(v) = y$, onde $u = U + \langle UV - qVU\rangle$ e $v = V + \langle UV - qVU\rangle$

Por outro lado, como $\mathbb{K}[y]$ é um anel de polinômios sobre $\mathbb{K}$, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\eta : \mathbb{K}[y] \longrightarrow \mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2)$ tal que $\eta(y) = v$.

Logo, se $p = \sum_i a_i y^i \in K[y]$, então $\eta(p) = \sum_i a_i v^i$ e $\alpha(p) = \sum_i a_i\alpha(y)^i = \sum_i a_i q^i y^i$.
Donde, $\eta(\alpha(p))u = \sum_i a_i q^i v^i u = \sum_i a_i u v^i = u(\sum_i a_i v^i) = u\eta(p)$, ou seja, $\eta(\alpha(p))u = u\eta(p)$. A propriedade universal das extensões de Ore garante a existência de um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\Psi : \mathbb{K}[y][x,\alpha] \longrightarrow \mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2)$
tal que $\Psi|_{\mathbb{K}[y]} = \eta$ e $\Psi(x) = u$. Em particular, $\Psi(y) = \eta(y) = v$

Como $\Phi\circ\Psi(y) = \Phi(v) = y$, $\Phi\circ\Psi(x) = \Phi(u) = x$, $\Psi\circ\Phi(u) = \Psi(x) = u$ e $\Psi\circ\Phi(v) = \Psi(y) = v$. Logo, $\Phi\circ\Psi = 1$ e $\Psi\circ\Phi = 1$. Portanto, Φ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, o que prova nossa afirmação.

Exemplo 1.11 Seja $\mathbb{K}$ um corpo e A a $\mathbb{K}$-álgebra apresentada pelos dois geradores u, v e relação $vu - uv = u$. Por outro lado, seja $\mathbb{K}[y][x,\alpha]$ a extensão de Ore do anel de polinômios $\mathbb{K}[y]$, onde α é o $\mathbb{K}$-automorfismo de $\mathbb{K}[y]$ tal que $\alpha(y) = y - 1$. Em $\mathbb{K}[y][x,\alpha]$, temos que $xy = \alpha(y)x$, o que implica que $xy - yx = x$. Portanto, procedendo como no exemplo anterior, podemos provar que existe um único $\mathbb{K}$-isomorfismo de álgebras
$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{K}[y][x,\alpha]$ tal que $\varphi(u) = x$ e $\varphi(v) = y$.

Exemplo 1.12 Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2 sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\{X, Y\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$.

A $\mathbb{K}$-álgebra envolvente (universal) de $\mathfrak{g}$ é $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I$, onde $T(\mathfrak{g})$ é a $\mathbb{K}$-álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$ e I é o ideal bilateral de $T(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos da forma

$$a\otimes b - b\otimes a - [a,b], \quad a, b \in \mathfrak{g}.$$

Afirmação: $U(\mathfrak{g})$ é uma extensão de Ore do anel de polinômios $\mathbb{K}[y]$. Mais precisamente, seja δ a única derivação de $\mathbb{K}[y]$ tal que $\delta(y) = y$, ou seja, $\delta(p(y)) = y\dfrac{d}{dy}p(y)$, para $p(y) \in \mathbb{K}[y]$. No anel $\mathbb{K}[y][x;\delta]$, temos $xy = yx + \delta(y) = yx + y$. Provaremos que

$U(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{K}[y][x;\delta]$ como $\mathbb{K}$-álgebras.

Com efeito, seja $\eta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\delta]$ o $\mathbb{K}$-homomorfismo linear tal que $\eta(X) = x$ e $\eta(Y) = y$. Então, pela propriedade universal da álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$, podemos extender η a um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\tilde{\eta} : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\delta]$. Agora, notemos que para $a, b \in \mathfrak{g}$, existem escalares $\lambda_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq 2$, tais que $a = \lambda_1 X + \beta_1 Y$ e $b = \lambda_2 X + \beta_2 Y$. Donde, $\tilde{\eta}(a \otimes b - b \otimes a - [a,b]) = (\lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1)(xy - yx - y) = 0$. Isto implica que o ideal I está contido em $ker(\tilde{\eta})$. Então, pelo teorema fundamental dos homomorfismos, existe um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras

$$\varphi : U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\delta]$$

tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} T(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tilde{\eta}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{K}[y][x,\delta] \\ T(\mathfrak{g})/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Em particular, $\varphi(X + I) = \tilde{\eta}(X) = x$ e $\varphi(Y + I) = \tilde{\eta}(Y) = y$.

Por outro lado, como $\mathbb{K}[y]$ é um anel de polinômios, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\sigma : \mathbb{K}[y] \longrightarrow T(\mathfrak{g})/I$ tal que $\sigma(y) = Y + I$.

Seja $p(y) = \sum_i a_i y^i \in \mathbb{K}[y]$, então $\sigma(p(y))(X + I) + \sigma(\delta(p(y))) =$
$= \sum_i a_i(Y^i X + I) + \sigma(\sum_i i a_i y^i) = \sum_i a_i(Y^i X + I) + \sum_i i a_i(Y^i + I) =$
$= \sum_i a_i(Y^i X + iY^i + I)$ ....(*)

Como $XY + I = (YX + Y) + I$, então por indução $XY^i + I = (Y^i X + iY^i) + I$, para todo $i \geq 1$. Logo, em (*),

$\sigma(p(y))(X+I) + \sigma(\delta(p(y))) = \sum_i a_i(XY^i + I) = (X+I)\sum_i a_i(Y^i + I) = (X+I)\sigma(p(y))$.

Agora, a propriedade universal das extensões de Ore, garante a existência de um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\Psi : \mathbb{K}[y][x,\delta] \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ tal que $\Psi|_{\mathbb{K}[y]} = \sigma$ e $\Psi(x) = X + I$. Isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[y][x;\delta] \arrow[dr, dashed, "\exists!\Psi"] & \\ \mathbb{K}[y] \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\sigma"'] & U(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Finalmente, notemos que $\Psi \circ \varphi(X + I) = \Psi(x) = X + I$, $\varphi \circ \Psi(y) = \varphi(Y + I) = y$ e $\varphi \circ \Psi(x) = \varphi(X + I) = x$. Isto implica que Ψ e φ são mutuamente inversos, o que prova nossa afirmação.

Exemplo 1.13 Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \; tal \; que \; Tr(A) = 0\}$ a álgebra de Lie especial linear, com colchete de Lie $[A, B] = AB - BA$. Em particular, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ é de dimensão 3 e uma base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ está formada pelas matrizes:

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Os produtos de Lie de tais matrizes são: $[E, F] = H$, $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F \cdots$ (*)

A $\mathbb{K}$-álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ é $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})) := T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))/I$ a $\mathbb{K}$, onde $T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$é a $\mathbb{K}$-álgebra tensorial de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ e I é o ideal bilateral de $T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ gerado pelos elementos da forma

$a \otimes b - b \otimes a - [a, b]$, $a, b \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Sejam $e := E + I$, $f := F + I$ e $h := H + I$. Usando (*), temos na álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ as relações $ef - fe = h$, $he - eh = 2e$, $hf - fh = -2f$. Equivalentemente, $eh = (h - 2)e$, $fh = (h + 2)f$, $fe = ef - h \cdots$ (**)

Agora seja $\mathbb{K}[y]$ o anel de polinômios na indeterminada y e com coeficientes em $\mathbb{K}$. Seja $\sigma : \mathbb{K}[y] \longrightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ o único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras tal que $\sigma(y) = h$ e seja $\alpha : \mathbb{K}[y] \longrightarrow \mathbb{K}[y]$ o $\mathbb{K}$-automorfismo de $\mathbb{K}[y]$ tal que $\alpha(y) = y - 2$. Usando as relações $(**)$, temos em $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ que $e\sigma(y) = eh = (h - 2)e = \sigma(y - 2)e = \sigma(\alpha(y))e$.

Portanto, pela propriedade universal das extensões de Ore, existe um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\tilde{\sigma} : \mathbb{K}[y][x; \alpha] \longrightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ tal que $\tilde{\sigma}|_{\mathbb{K}[y]} = \sigma$ e $\tilde{\sigma}(x) = e$, ou seja o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[y][x;\alpha] \arrow[dr, dashed, "\exists!\tilde{\sigma}"] & \\
\mathbb{K}[y] \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\sigma"] & U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

Agora seja β o único $\mathbb{K}$-automorfismo de $\mathbb{K}[y][x, \alpha]$ tal que $\beta(y) = y + 2$ e $\beta(x) = x$. Seja também δ a única β-derivação de $\mathbb{K}[y][x; \alpha]$ tal que $\delta(y) = 0$ e $\delta(x) = -y$.

Usando as equações (**), temos as seguintes relações em $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$:

$f\tilde{\sigma}(y) = fh = (h + 2)f = \tilde{\sigma}(y + 2)f = \tilde{\sigma}(\beta(y))f + \tilde{\sigma}\delta(y)$ e $f\tilde{\sigma}(x) = fe = ef - h = \tilde{\sigma}(\beta(x))f + \tilde{\sigma}\delta(x)$. Portanto, pela propriedade universal das extensões de Ore, existe um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras

$$\varphi : \mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta] \longrightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$$

que extende $\tilde{\sigma}$ e $\varphi(z) = f$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta] \arrow[dr, dashed, "\exists!\varphi"] & \\
\mathbb{K}[y][x;\alpha] \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))
\end{tikzcd}$$

Em particular, $\varphi(y) = \tilde{\sigma}(y) = h$, $\varphi(x) = \tilde{\sigma}(x) = e$ e $\varphi(z) = f$.

Afirmação: φ é um $\mathbb{K}$-isomorfismo de álgebras e portanto, a álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ é uma extensão de Ore (iterada) do anel de polinômios $\mathbb{K}[y]$.

Com efeito, considere o único homomorfismo $\mathbb{K}$-linear $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta]$ tal que $\phi(H) = y$, $\phi(E) = x$ e $\phi(F) = z$. Então, pela propriedade universal da álgebra tensorial, a aplicação $\mathbb{K}$-linear ϕ pode ser extendida para um único $\mathbb{K}$-homomorfismo $\hat{\phi} : T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta]$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi"] & T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})) \arrow[dl, dashed, "\exists!\hat{\phi}"] \\
\mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta] &
\end{tikzcd}$$

As equações (*) e (**) implicam que $E, F, H \in ker\hat{\phi}$ e consequentemente $I \subset ker\hat{\phi}$. Portanto podemos fatorar $\hat{\phi}$, isto é, existe um único $\mathbb{K}$- homomorfismo de álgebras

$$\Phi : T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))/I \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta]$$

tal que $\Phi \circ \pi = \hat{\phi}$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{K}[y][x,\alpha][z,b,\delta] \\
T(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\Phi"] &
\end{tikzcd}$$

Em particular, $\Phi(h) = \tilde{\phi}(H) = y$, $\Phi(e) = \tilde{\phi}(E) = x$ e $\Phi(f) = \tilde{\phi}(F) = z$.

Agora é claro que ϕ e φ são $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras mutuamente inversos. Em conclusão:

$U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[y][x;\alpha][z;\beta,\delta]$ como $\mathbb{K}$-álgebras e portanto a álgebra universal envolvente da álgebra de Lie especial linear $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ é uma extensão de Ore do anel de polinômios $\mathbb{K}[y]$.

Na seguinte seção estudaremos algumas propriedades das extensões de Ore.

1.2 Propriedades

Definição 1.14 *Seja $R[x;\alpha,\delta]$ uma extensão de Ore de R e seja $p \in R[x;\alpha,\delta]$ um elemento diferente de zero,então p pode ser escrito de maneira única como*

$$p = r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + ... + r_1 x + r_0,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e alguns $r_i \in R$, $i = 0, ..., n$ tal que $r_n \neq 0$. O inteiro n é chamado ***grau de p*** *e é denotado por $n = gr(p)$. O elemento r_n é chamado* ***coeficiente líder de*** *p. Por convenção, dizemos que o grau do elemento zero de $R[x;\alpha,\delta]$ é $-\infty$.*

Observação 1.15 *No caso de um anel de operadores diferenciais, ou seja, $R[x;\delta]$, diremos que n é a* ***ordem*** *de p.*

Lema 1.16 *Seja $R[x;\alpha,\delta]$ uma extensão de Ore e sejam $r \in R$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$x^n r = \alpha^n(r)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + \delta^n(r)$$

para alguns $a_{n-1}, ..., a_1 \in R$. Portanto, se $r \neq 0$ e α é injetiva, então $x^n r$ tem grau n e coeficiente líder $\alpha^n(r)$.

Demonstração: Provemos a primeira parte por indução sobre n.
Se $n = 0$ não há nada a provar. O caso $n = 1$ é simplesmente a regra da multiplicação em $R[x;\alpha,\delta]$.
Suponha que para $n \geq 1$, existem $a_{n-1}, ..., a_1 \in R$ tais que
$x^n r = \alpha^n(r)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + \delta^n(r)$. Então,
$x^{n+1}r = x\alpha^n(r)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + xa_{n-1}x^{n-1} + \cdots + xa_1 x + x\delta^n(r) =$
$(\alpha^{n+1}(r)x + \delta(\alpha^n(r)))x^n + (\alpha(a_{n-1})x + \delta(a_{n-1}))x^{n-1} + \cdots + \delta^{n+1}(r) =$
$\alpha^{n+1}(r)x^{n+1} + (\delta(\alpha^n(r)) + \alpha(a_{n-1}))x^n + \cdots + \delta^{n+1}(r)$.
Assim, $x^{n+1}r$ pode ser escrito na forma desejada. A segunda parte segue-se do fato que se α é injetiva, α^n é injetiva. Portanto, se $r \neq 0$, então $\alpha^n(r) \neq 0$. ■

Proposição 1.17 *Sejam R um domínio de integridade e α um endomorfismo injetivo de R. Então, $gr(pq) = gr(p) + gr(q)$ para todo $p, q \in R[x; \alpha, \delta]$. Consequentemente $R[x; \alpha, \delta]$ é um domínio de integridade.*

Demonstração: Se p ou q é o elemento zero, a igualdade segue-se da convenção que $-\infty + n = -\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $-\infty + -\infty = -\infty$.
Suponhamos que $p \neq 0$ e $q \neq 0$. Então, podemos escrever de maneira única

$$p = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0, \quad \text{onde} \quad n = gr(p)$$

$$q = s_m x^m + s_{m-1} x^{m-1} + \cdots + s_1 x + s_0, \quad \text{onde} \quad m = gr(q)$$

Agora, $(r_n x^n)(s_m x^m) = r_n (x^n s_m) x^m$ e usando o lema anterior, podemos escrever

$$x^n s_m = \alpha^n(s_m) x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + \delta^n(s_m), \text{ para alguns } \ a_{n-1}, ..., a_1 \in R$$

$$\text{Logo, } \ (r_n x^n)(s_m x^m) = r_n \alpha^n(s_m) x^{m+n} + \text{ (termos de menor grau).}$$

Isto implica que o coeficiente líder de pq é $r_n \alpha^n(s_m)$ e como $r_n \neq 0$, α é um endomorfismo injetivo e R é um domínio, $r_n \alpha^n(s_m) \neq 0$. Portanto, $gr(pq) = m + n$. O fato anterior garante que se $p \neq 0$ e $q \neq 0$, então $pq \neq 0$. Consequentemente, $R[x; \alpha, \delta]$ é um domínio de integridade. ■

Lema 1.18 *Seja $R[x; \alpha, \delta]$ uma extensão de Ore de R onde α é um automorfismo de R. Então α^{-1} é um automorfismo do anel oposto R^{op} e $-\delta\alpha^{-1}$ é uma α^{-1}-derivação de R^{op}. Mais ainda, $R[x; \alpha, \delta]^{op} = R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$.*

Demonstração: Provemos primeiro que α^{-1} é um automorfismo de R^{op}. Denotemos com $*$ a operação em R^{op}, isto é, se $a, b \in R^{op}$, $a * b = ba$. Como α^{-1} é um homomorfismo de R, temos que $\alpha^{-1}(a * b) = \alpha^{-1}(ba) = \alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a) = \alpha^{-1}(a) * \alpha^{-1}(b)$.
Mostremos agora que $-\delta\alpha^{-1}$ é uma α^{-1}-derivação em R^{op}. Com efeito, $-\delta\alpha^{-1}(r * s) = -\delta(\alpha^{-1}(sr)) = -\delta(\alpha^{-1}(s)\alpha^{-1}(r)) = -(\delta(\alpha^{-1}(s))\alpha^{-1}(r) + \alpha^{-1}(s) + \delta(\alpha^{-1}(r)) = -\,(\alpha^{-1}(r) * \delta(\alpha^{-1}(s)) + \delta(\alpha^{-1}(r)) * \alpha^{-1}(s)) = -(\alpha^{-1} * \delta\alpha^{-1}(s) + \delta\alpha^{-1}(r) * \alpha^{-1}(s))$.
Finalmente, provemos que $R[x; \alpha, \delta]^{op} = R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$. Com efeito, em $R[x; \alpha, \delta]$, temos que $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ para todo $r \in R$. Logo, $x\alpha^{-1}(r) = rx + \delta(\alpha^{-1}(r))$, e daí $rx = x\alpha^{-1}(r) - \delta(\alpha^{-1}(r))$. Assim em $R[x; \alpha, \delta]^{op}$, temos que $x * r = \alpha^{-1}(r) * x - \delta(\alpha^{-1}(r))$. Mas esta é a mesma regra de operação em $R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$. Consequentemente, $R[x; \alpha, \delta]^{op} = R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$.

■

O Teorema das Base de Hilbert demonstra que se R é noetheriano à direita (à esquerda), então um anel de polinômios (ordinário) é também noetheriano à direita (à esquerda, respectivamente). Nós provaremos um resultado semelhante para extensões de Ore.

Teorema 1.19 *Seja $S = R[x;\alpha,\delta]$ uma extensão de Ore de R, onde α é um automorfismo de R. Se R é um anel noetheriano à direita (esquerda), então S é um anel noetheriano à direita(esquerda).*

Demonstração:

Caso I: Suponhamos primeiro que R é noetheriano à direita. Provaremos neste caso que qualquer ideal não-nulo I à direita de S é finitamente gerado. Seguiremos os seguintes passos:

Passo 1: Seja J o conjunto dos coeficientes líderes de I juntamente com 0, isto é,

$$J = \left\{ r \in R \ / \ rx^d + r_{d-1}x^{d-1} + ... + r_0 \in I, \text{ para alguns } r_{d-1}, ..., r_0 \in R \right\}.$$

É claro que J é um subgrupo aditivo de R. Agora considere elementos $r \in J$ e $a \in R$, então existe algum $p \in I$ da forma $p = rx^d +$[termos de menor grau] em I. Então $pa \in I$. Como $pa = r\alpha^d(a)x^d +$ [termos de menor grau], concluímos que $r\alpha^d(a) \in J$. Para obtermos ra, devemos substituir a por $\alpha^{-d}(a)$. Mais precisamente, temos $p\alpha^{-d}(a) \in I$ e

$$p\alpha^{-d}(a) = rax^d + [\text{termos de menor grau}].$$

Portanto $ra \in J$. Isto mostra que J é um ideal à direita de R.

Passo 2: Como R é noetheriano à direita, J é finitamente gerado. Suponhamos que $r_1, ..., r_k$ é um conjunto de geradores para J, então existem $p_1, ..., p_k \in I$ tal que cada p_i tem coeficiente líder r_i e grau n_i. Seja $n = max\{n_1, ..., n_k\}$. Notemos que $p_i x^{n-n_i}$ é um elemento de I com coeficiente líder r_i mas com grau n. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que todos os p_i possuem o mesmo grau n, isto é,

$$p_i = r_i x^n + [\text{termos de menor grau}].$$

Passo 3: Seja $N = R + Rx + ... + Rx^{n-1}$, o conjunto dos elementos de S com grau menor que n. Pelo lema 1.16, $N = R + xR + ... + x^{n-1}R$. Consequentemente, N é um R-submódulo à direita de S. Visto como R-módulo, N é finitamente gerado, e portanto é noetheriano. Assim, seu submódulo $I \cap N$ é um R-módulo à direita finitamente gerado.

Digamos que $q_1, ..., q_t$ geram $I \cap N$.

Passo 4 Seja I_0 o ideal à direita de S gerado por $p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_t$, então, $I_0 \subseteq I$. A inclusão anterior na verdade é uma igualdade. Com efeito, seja $p \in I$ com grau menor que n, então $p \in I \cap N$ e $p = q_1 a_1 + ... + q_t a_t$ para alguns $a_j \in R$ e portanto $p \in I_0$.

Passo 5 Agora considere algum $p \in I$ com grau $m \geq n$, e suponha que todos os elementos de I com grau menor que m estão em I_0. seja r o coeficiente líder de p; assim

$$p = rx^m + [\text{termos de menor grau}].$$

Como $p \in I$, seu coeficiente líder r está em J, e assim $r = r_1 a_1 + ... + r_k a_k$ para alguns $a_i \in R$. Desejamos construir um elemento de I_0 que também tem grau m e coeficiente líder r. Devemos aplicar as potências negativas apropriadas de α em a_i. Mais precisamente, observemos que

$$p_i \alpha^{-n}(a_i) = r_i a_i x^n + [\text{termos de menor grau}]$$

para todo i. Consequentemente, se $q = (p_1 \alpha^{-n}(a_1) + ... + p_k \alpha^{-n}(a_k))x^{m-n}$, então $q \in I_0$ e

$$q = rx^m + [\text{termos de menor grau}].$$

Agora $p - q$ é um elemento de I com grau menor que m. Pela hipótese de indução, $p - q \in I_0$, e assim $p \in I_0$. Esta indução mostra que $I = I_0$. Assim, I é finitamente gerado. Portanto, S é noetheriano.

Caso II. Suponhamos agora que R é noetheriano à esquerda. Então o anel oposto R^{op} é noetheriano à direita. Pelo lema 1.18 , α^{-1} é um automorfismo de R^{op} e $-\delta\alpha^{-1}$ é uma α^{-1} derivação de R^{op}. Logo, pelo caso I acima, $R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$ é noetheriano à direita. Mas, pelo mesmo lema, $R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}] = R[x; \alpha, \delta]^{op}$. Em consequencia, $R[x; \alpha, \delta]$ é noetheriano à esquerda.

■

Corolário 1.20 *O plano quântico $\mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2)$, a álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie não abeliana $\mathfrak{g}$ de dimensão 2 e a álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$ da álgebra de Lie especial $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ são aneis noetherianos.*

Demonstração: Segue-se dos exemplos 1.9, 1.11, 1.12 e do teorema 1.19.

■

Corolário 1.21 *Seja $S = R[x_1; \alpha_1, \delta_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_n; \alpha_n, \delta_n]$ uma extensão de Ore iterada, onde cada α_i é um automorfismo do anel $R[x_1; \alpha_1, \delta_1] \cdots R[x_{i-1}; \alpha_{i-1}, \delta_{i-1}]$, para cada $i = 1, ..., n$. Se R é um anel noetheriano à direita (esquerda), então S é um anel noetheriano à direita (esquerda).*

Teorema 1.22 *Seja R é um anel de divisão e seja $S = R[x; \alpha, \delta]$ uma extensão de Ore de R. Então S é um domínio de ideais principais à esquerda. Se além disso, α é um automorfismo de R, então S é também um domínio de ideais principais à direita.*

Demonstração: Como R é um anel de divisão, α é um endomorfismo injetivo e portanto S é um domínio de integridade.

Agora, dado um ideal J à esquerda não nulo de S, seja m o menor grau dos elementos não-nulos de J, e escolha $p \in J$ com grau m. Se r é o coeficiente líder de p, então p pode ser substituído por $r^{-1}p$, e assim não há perda de generalidade em assumir que p tem coeficiente líder 1.

Afirmação: $J = Sp$. Com efeito, é claro que $Sp \subseteq J$. Provemos a inclusão recíproca por indução sobre k. O único elemento de J com grau menor que m é 0 e certamente $0 \in Sp$. Agora assuma que para um inteiro $k \geq m$, todos os elementos de J com grau menor que k estão em Sp. Seja q um elemento de J com grau k, e seja a o coeficiente líder de q. Agora $ax^{k-m}p$ tem grau k e coeficiente líder a, portanto $q - ax^{k-m}p$ é um elemento de J com grau menor que k. Pela hipótese de indução, $q - ax^{k-m}p$ está em Sp, e assim, $q \in Sp$. Isto prova que $J = Sp$. Portanto, S é um domínio de ideais principais à esquerda.

Suponhamos agora que α é um automorfismo de R. Então, pela primeira parte e o lema 1.18, $R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$ é um domínio de ideais principais à esquerda. Assim, $R[x; \alpha, \delta]^{op} = R^{op}[x; \alpha^{-1}, -\delta\alpha^{-1}]$ é um anel de ideais principais à esquerda. Portanto, $R[x; \alpha, \delta]$ é um anel de ideais principais à direita.

■

Observação 1.23 *Para cada $a \in R$, a regra $\delta_a(r) = ar - ra$, $r \in R$ define uma derivação δ_a em R.*

Definição 1.24 *Uma derivação δ em R é uma **derivação interior** se $\delta = \delta_a$ para algum $a \in R$. Caso contrário, diremos que δ é uma **derivação exterior**.*

Definição 1.25 *Seja δ uma derivação de R e seja I um ideal de R. Dizemos que I é um δ-**ideal** se $\delta(I) \subset I$.*
*O anel R é chamado δ-**simples** se os únicos δ-ideais de R são 0 e R.*

Lema 1.26 *Seja δ uma derivação de R e seja $S = R[x; \delta]$ uma extensão de Ore de R.*

(a) *Se $\delta = \delta_a$ para algum $a \in R$, então $S = R[x - a]$, um anel de polinômios ordinário. Portanto, $S(x - a)$ é um ideal próprio não-nulo de S.*

(b) *Se I é um δ-ideal de R, então $IS = SI$. Assim IS é um ideal de S. Mais ainda, se $I \neq R$, então $IS \neq S$ e se $I \neq 0$, então $IS \neq 0$.*

Demonstração:

(a) Note que $xr = rx + \delta_a(r)$. Assim, $xr = rx + ar - ra$. Desse modo, $xr - ar = rx - ra$ e, portanto, $(x - a)r = r(x - a)$ para todo $r \in R$. Logo, $S = R[x - a]$, ou seja, S é visto como anel de polinômios na variável $x - a$. Portanto, $S(x - a)$ é um ideal próprio não-nulo.

(b) Provemos que $IS = SI$. Seja $j \in I$. Como I é um δ-ideal, $rxj = r(xj) = r(jx + \delta(j)) = rjx + r\delta(j) \in IS$. Reciprocamente, $jrx = xrj - \delta(jr) \in SI$. O resultado segue, claramente.

■

Definição 1.27 *Um anel S é dito **simples** se os únicos ideais bilaterais de S são 0 e S.*

Proposição 1.28 *Seja R uma $\mathbb{Q}$-álgebra e seja δ uma derivação de R. Então $R[x; \delta]$ é um anel simples se, e somente se, R é δ-simples e δ é uma derivação exterior.*

Demonstração: Seja $S = R[x; \delta]$. Pelo lema anterior se R não é δ-simples ou se δ é interior, então S não é simples.
Reciprocamente, suponhamos que R é δ-simples e que δ é uma derivação exterior. Seja I um ideal não-nulo de S e n o menor grau dos elementos não-nulos de I. Seja J o subconjunto de R consistindo de 0, juntamente com os coeficientes líderes daqueles elementos de I que têm grau n. Não é difícil ver que J é um ideal não-nulo de R.
Afirmação: J é um δ-ideal de R. Com efeito, todo elemento não-nulo $r \in J$ é o coeficiente líder de algum $p \in I$ com grau n, isto é, $p = rx^n + r'x^{n-1}+$[termos de grau menor].

Observemos que $xp - px \in I$ e que $xp - px = \delta(r)x^n+$[termos de grau menor]).
Portanto, $\delta(r) \in J$, e consequentemente J é um δ-ideal.

Como R é δ-simples e $J \neq 0$, necessariamente $J = R$. Portanto, I contém um elemento q com grau n e coeficiente líder 1. Se $n = 0$, então $q = 1$ e $I = S$. Mostraremos que se assumirmos $n > 0$, teremos uma contradição. Com efeito,

Escrevamos $q = x^n + ax^{n-1}+$[termos de grau menor], para algum $a \in R$. Por outro lado, para cada $r \in R$, observemos que $rq - qr \in I$ e que
$rq - qr = (rx^n + rax^{n-1}) +$ [termos de grau menor] $- (rx^n + n\delta(r)x^{n-1} + arx^{n-1}) +$ [termos de grau menor]) $= (ra - n\delta(r) - ar)x^{n-1}+$ [termos de grau menor].
Pela minimalidade de n, devemos ter $rq - qr = 0$, e portanto $ra - n\delta(r) - ar = 0$. Como $n > 0$ e R é uma $\mathbb{Q}$-álgebra, obtemos $\delta(r) = (-a/n)r - r(-a/n)$ para todo $r \in R$, o que contradiz o fato de que δ é exterior.

Assim, $n = 0$ e $I = S$. Portanto, S é um anel simples.

■

No capítulo 2 usaremos este resultado para provar que as álgebras de Weyl sobre um corpo de característica zero são aneis simples.

1.3 Aneis de polinômios de Laurent

Dado um anel R e um automorfismo α de R construiremos um anel que tem como elementos "polinômios de Laurent"numa indeterminada x com coeficientes à "esquerda"em R, isto é onde a indeterminada x é invertível. Mais precisamente temos o seguinte:

Teorema 1.29 *Seja α um automorfismo do anel R. Então existe um anel T com as seguintes propriedades:*
(a) R é um subanel de T.
(b) Existe um elemento invertível $x \in T$ tal que T é um R-módulo livre à esquerda com base $\{1, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, ...\}$.
(c) $xr = \alpha(r)x$, para todo $r \in R$.

Demonstração: Consideremos o seguinte conjunto:

$$T := \left\{ a = (a_i) \in \prod_{i \in \mathbb{Z}} R / \text{ existe } n = n(a) \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z} \text{ com } |i| > n(a) \right\}$$

O conjunto T é um anel com as operações de soma e produto, definidas por,

$$a + b = (a_i + b_i) \quad \text{e} \quad ab = (c_i), \text{ onde } c_i := \sum_{k+j=i} a_k \alpha^k(b_j).$$

Notemos que o elemento unitário de T é $1 = (a_i)$, onde $a_i = 1$ se $i = 0$ e $a_i = 0$ se $i \neq 0$. Definamos os elementos $x, y \in T$ por: $x := (x_i)$, onde $x_i = 1$ se $i = 1$ e $x_i = 0$ se $i \neq 1$ e $y := (y_j)$, onde $y_j = 1$ se $j = -1$ e $y_j = 0$ se $j \neq -1$.

Então, pela definição de produto, $xy = yx = 1$. Portanto, x é um elemento invertível de T e $x^{-1} = y$.

Por outro lado, por indução sobre $k \in \mathbb{Z}$, temos que $x^k := (x_i)$, onde $x_i = 1$ se $i = k$ e $x_i = 0$ se $i \neq 0$.

Provemos agora que o anel T satisfaz as condições do teorema. Com efeito,

(a) R é um subanel de T. De fato, a aplicação $\varphi : R \longrightarrow T$ definida por $\varphi(a) = (a_i)$, onde $a_i = a$ se $i = 0$ e $a_i = 0$ se $i \neq 0$ é um homomorfismo injetivo de aneis. Portanto, podemos identificar R com um subanel de T.

(b) De maneira natural T é um R-módulo à esquerda. Por outro lado, seja $a = (a_i) \in T$, então existe $n = n(a) \in \mathbb{N}$, tal que $a_i = 0$ para todo $|i| > n(a)$. Então podemos escrever de maneira única $a = a_{-n}x^{-n} + \cdots + a_0 + \cdots + a_n x^n$. Isto prova que $\{1, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, ...\}$ é uma base de T como R-módulo.

(c) Agora seja $r \in R$. Então $xr = (a_i)$, onde $a_i = \sum_{k+j=i} x_k \alpha^k(r_j)$, $x = (x_k)$ e $r = (r_j)$. Das definições acima, temos que $a_i = \alpha(r)$ se $i = 1$ e $a_i = 0$ se $i \neq 1$.

Por outro lado, $\alpha(r)x = (b_i)$, onde $b_i = \sum_{k+j=i} (\alpha_k)\alpha^k(x_j)$ e $\alpha(r) = (\alpha_k)$. Como $\alpha_k = \alpha(r)$ se $k = 0$ e $\alpha_k = 0$ se $k \neq 0$, temos que, $b_i = \alpha(r)$ se $i = 1$ e $b_i = 0$ se $i \neq 1$.

Comparando as equações acima, concluimos que $xr = \alpha(r)x$ para todo $r \in R$.

∎

Definição 1.30 *O anel T construido acima é conhecido como* ***anel de polinômios de Laurent*** *de R e é denotado por $R[x^{\pm 1}; \alpha]$.*

Na literatura em inglês tal anel é conhecido como um ***"skew-Laurent ring"*** *de R.*

Observação 1.31 *Notemos que que $R[x; \alpha]$ é um subanel de $R[x^{\pm 1}; \alpha]$.*

Os aneis de polinômios de Laurent possuem a seguinte propriedade universal:

Teorema 1.32 *Seja α um automorfismo de um anel R e $T = [x^{\pm 1}; \alpha]$. Suponhamos que U é um anel, $\varphi : R \longrightarrow U$ é um homomorfismo de aneis e y é um elemento invertível de U tal que $y\varphi(r) = \varphi\alpha(r)y$ para todo $r \in R$. Então, existe um único homomorfismo de aneis $\Psi : T \longrightarrow U$ tal que $\Psi|_R = \varphi$ e $\Psi(x) = y$. Ou seja o seguinte diagrama comuta :*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists!\Psi"] & \\
R \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"] & U
\end{tikzcd}$$

Demonstração: A demonstração é semelhante ao Teorema 1.8.

■

Corolário 1.33 *Sejam $T = R[x^{\pm 1}; \alpha]$ e $U = R[y^{\pm 1}; \alpha]$ dois aneis de polinômios de Laurent referentes ao mesmo automorfismo α de R. Então existe um único isomorfismo $\Psi : T \longrightarrow U$ tal que $\Psi(x) = y$ e $\Psi|_R$ é a identidade em R.*

Demonstração: A prova é análoga à do corolário 1.9.

■

Exemplo 1.34 Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $q \in \mathbb{K},\ q \neq 0$. Por definição, o **anel de cordenadas quantizado** de $(\mathbb{K}^*)^2$ é a $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ presentada pelos geradores u, u', v, v' e as relações $uu^{'} = u^{'}u = vv^{'} = v^{'}v = 1$ e $uv - qvu = 0$.
Isto é, se $\mathbb{K}\langle U, U', V, V'\rangle$ é a $\mathbb{K}$-álgebra livre com letras U, U', V, V'. Então,

$$\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2) = \frac{\mathbb{K}\langle U, U', V, V'\rangle}{I}$$

onde, I é o ideal gerado por $UU' - 1,\ U'U - 1, VV' - 1,\ V'V - 1$ e $UV - qVU$.
Os elementos u, u', v e v' da definição são então as classes de $U,\ U',\ V$ e V' módulo I, respectivamente.
Em Geometria Algébrica, $(\mathbb{K}^*)^2$ é conhecido como **toro algébrico**, e portanto, $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ é chamado **toro quântico**.
Afirmação: $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ é um anel de polinômios de Laurent. Mais precisamente se $\mathbb{K}[y^{\pm 1}]$ é um anel de polinômios ordinário de Laurent e α é o único $\mathbb{K}$-automorfismo de álgebras de $\mathbb{K}[y^{\pm 1}]$ tal que $\alpha(y) = qy$, então $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2) = \mathbb{K}[y^{\pm 1}][x^{\pm 1}; \alpha]$
Com efeito, definamos o $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\sigma : \mathbb{K}\langle U, U', V, V'\rangle \longrightarrow \mathbb{K}[y^{\pm 1}][x^{\pm 1}; \alpha]$ tal que $\sigma(U) = x$, $\sigma(U') = x^{-1}$, $\sigma(V) = y$ e $\sigma(V') = y^{-1}$. Então,

$\sigma(UU'-1) = xx^{-1}-1 = 0$, $\sigma(U'U-1) = x^{-1}x-1 = 0$, $\sigma(VV'-1) = xx^{-1}-1 = 0$ e $\sigma(V'V-1) = xx^{-1}-1 = 0$. Assim, $I \subset Ker(\sigma)$. Portanto, existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras

$$\Psi : \mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2) \longrightarrow \mathbb{K}[y^{\pm}][x^{\pm};\alpha] \text{ tal que } \Psi(u) = x, \Psi(v) = y, \Psi(u^{'}) = x^{-1} \text{ e } \Psi(v^{'}) = y^{-1}.$$

Por outro lado, como $\mathbb{K}[y^{\pm 1}]$ é um anel de polinômios de Laurent, existe um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\eta : \mathbb{K}[y^{\pm 1}] \longrightarrow \mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ tal que $\eta(y) = v$ e $\eta(y^{-1}) = v^{'}$.
Agora, seja $p(y) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i y^i \in \mathbb{K}[y^{\pm}]$. Então $\eta(p(y)) = \sum_{i\geq 0} a_i v^i + \sum_{i<0} a_i (v^{'})^i$ e $\alpha(p(y)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i(\alpha(y))^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i q^i y^i$. Assim temos que, $\eta(\alpha(p(y)))u = (\sum_{i\geq 0} a_i q^i v^i + \sum_{i<0} a_i q^i (v^{'})^i)u = \sum_{i\geq 0} a_i q^i v^i u + \sum_{i<0} a_i q^i (v^{'})^i u = \sum_{i\geq 0} a_i u v^i + \sum_{i<0} a_i u (v^{'})^i = u(\sum_{i\geq 0} a_i v^i + \sum_{i<0} a_i (v^{'})^i) = u\eta(p(y))$.

Pela propriedade universal dos aneis de polinômios de Laurent, existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras

$$\varphi : \mathbb{K}[y^{\pm 1}][x^{\pm 1};\alpha] \longrightarrow \mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2) \text{ tal que } \varphi|_{\mathbb{K}[y^{\pm 1}]} = \eta \text{ e } \varphi(x) = u.$$

Assim, $\varphi(x^{-1}) = u^{'}$. Mais ainda, $\varphi(y) = \eta(y) = v$ e $\varphi(y^{-1}) = \eta(y^{-1}) = v^{'}$.

Finalmente, provemos que as aplicações Ψ e φ são mutuamente inversas. De fato, $\varphi\circ\Psi(u) = \varphi(x) = u$, $\varphi\circ\Psi(v) = \varphi(y) = v$, $\varphi\circ\Psi(u^{'}) = \varphi(x^{-1}) = u^{'}$ e $\varphi\circ\Psi(v^{'}) = \varphi(y^{-1}) = v^{'}$.
Por outro lado, $\Psi\circ\varphi(x) = \Psi(u) = x$, $\Psi\circ\varphi(y) = \Psi(v) = y$, $\Psi\circ\varphi(x^{-1}) = \Psi(u^{'}) = x^{-1}$ e $\Psi\circ\varphi(y^{-1}) = \Psi(v^{'}) = y^{-1}$.
O que prova que Ψ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras e portanto nossa afirmação.

Exemplo 1.35 Seja $\mathbb{K}$ um corpo e H o **grupo de Heisenberg**, que é apresentado por três geradores x, y, z e as relações

$$xyx^{-1}y^{-1} = z, \quad xz = zx \text{ e } \; yz = zy$$

Os elementos de H podem ser escritos de maneira única como produtos $z^i y^j x^m$ para inteiros i, j, m e estes produtos formam uma base para a álgebra de grupo $\mathbb{K}[H]$. Como y e z comutam, a subálgebra de $\mathbb{K}[H]$ gerada por $y^{\pm 1}$ e $z^{\pm 1}$ é um anel de polinômios ordinário de Laurent, $\mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. Por outro lado, observemos que, como $xyx^{-1} = zy$ e $xzx^{-1} = z$, temos que $x(\mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}])x^{-1} = \mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. De fato, conjugando os elementos de $\mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ por x temos o mesmo efeito que aplicando o $\mathbb{K}$-automorfismo de álgebras α do anel $\mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ tal que $\alpha(y) = zy$ e $\alpha(z) = z$, isto é, $xr = \alpha(r)x$ para todo elemento $r \in \mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. Como os produtos $z^i y^j x^m$ forma uma base para $\mathbb{K}[H]$ sobre $\mathbb{K}$, as potências x^m, $m \in \mathbb{Z}$ formam uma base para $\mathbb{K}[H]$ como um módulo livre à esquerda sobre $\mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. Portanto, concluímos que a álgebra de grupo do grupo de Heisenberg é um anel de polinômios de Laurent. Mais precisamente,

$$\mathbb{K}[H] = \mathbb{K}[y^{\pm 1}, z^{\pm 1}][x^{\pm 1}; \alpha].$$

Assim como para as extensões de Ore, temos um resultado análogo ao da Base de Hilbert para aneis de polinômios de Laurent. De fato, usaremos o resultado já provado para extensões de Ore no seguinte:

Teorema 1.36 *Seja α um automorfismo de R e seja $T = R[x^{\pm 1}; \alpha]$ um anel de polinômios de Laurent. Se R é noetheriano, então T é noetheriano.*

Demonstração: Seja $S = R[x; \alpha]$ a extensão de Ore de R com respeito a α.
Afirmação: Se $s \in S$, então os elementos $x^{-1}sx$ e xsx^{-1} pertencem a S. Com efeito, Seja $r \in R$, então $x^{-1}rx = x^{-1}x\alpha^{-1}(r) = \alpha^{-1}(r) \in S$. Por outro lado, $x^{-1}rx^2 = (x^{-1}rx)x = \alpha^{-1}(r)x \in S$. Por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, temos $x^{-1}rx^{n+1} = \alpha^{-n}(r)x^n \in S$. Seja agora $s = \sum\limits_n r_n x^n \in S$, então $x^{-1}(\sum\limits_n r_n x^n)x = \sum\limits_n x^{-1} r_n x^{n+1} = \sum\limits_n \alpha^{-n}(r_n)x^n \in S$. De forma análoga podemos provar que xsx^{-1} pertence a S.

Definamos a aplicação $\beta : S \longrightarrow S$, por $\beta(s) = x^{-1}sx$. É claro que β é um homomorfismo de aneis. Mais ainda, β é automorfismo. Com efeito,
Se $\beta(s) = 0$, então $x^{-1}sx = \sum\limits_n \alpha^{-n}(r_n)x^n = 0$ Assim, $\alpha^n(r_n) = 0$ para todo $n \geq 0$. Portanto, $r_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Logo, $s = \sum_n r_n x^n = 0$. Isto mostra que, β é injetiva. Por outro lado, β é sobrejetiva, pois para $s \in S$ existe $xsx^{-1} \in S$ tal que $\beta(xsx^{-1}) = s$.
Consideremos agora a extensão de Ore $S[y; \beta]$ e a inclusão $\iota : S \longrightarrow T$.
Seja $s \in S$. Então, $\iota(\beta(s))x^{-1} = \beta(s)x^{-1} = (x^{-1}sx)x^{-1} = x^{-1}s = x^{-1}\iota(s)$. Pela propriedade universal das extensões de Ore, existe um homomorfismo $\Psi : S[y; \beta] \longrightarrow T$ tal que $\Psi(y) = x^{-1}$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S[y;\beta] \arrow[dr, "\exists!\Psi"] & \\ S \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] & T \end{tikzcd}$$

Notemos que Ψ é sobrejetiva. Assim, pelo teorema fundamental dos homomorfismos, temos que, $T \cong \dfrac{S[y;\beta]}{ker(\Psi)}$. Agora, como R é um anel noetheriano, S e $S[y;\beta]$ também são aneis noetherianos (veja o Teorema 1.19) e portanto todo quociente de $S[y;\beta]$ é noetheriano. Portanto, T é um anel noetheriano ,como queríamos provar.

■

Corolário 1.37 *O toro quântico $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ e a álgebra de grupo $\mathbb{K}[H]$ do grupo de Heisenberg são aneis noetherianos.*

Demonstração: Segue-se dos exemplos 1.34, 1.35 e do Teorema 1.36.

■

Definição 1.38 *Seja α um automorfismo e I um ideal do anel R. Dizemos que I é um $\alpha-$**ideal**, se $\alpha(I) = I$. É claro que 0 e R são α-ideais de R.*

*O anel R é dito α-**simples** se os únicos α-ideais de R são 0 e R.*

Lema 1.39 *Seja α um automorfismo de R e sejam $S = R[x;\alpha]$ e $T = [x^{\pm 1};\alpha]$. Se I é um α-ideal de R e $\hat{\alpha}$ é o automorfismo de R/I induzido por α ($\hat{\alpha}(r+I) = \alpha(r) + I, r \in R$). Então são válidas as seguintes identidades:*

a)$IS = SI$ e $IT = TI$

b)$IS \cap R = IT \cap R = I$

c)$(R + IS)/IS \subseteq S/SI$ e $(R + IT)/IT \subseteq T/IT$ são isomorfos a R/I.

d)$S/IS \cong (R/I)[\hat{x};\hat{\alpha}]$ e $T/IT \cong (R/I)[\hat{x};\hat{\alpha}]$.

Demonstração:

(a) Note que se $rxj \in SI$. Então $rxj = r\alpha(j)x \in IS$. Por outro lado, se $\alpha^{-1}(jr)x \in IS$, então $\alpha(\alpha^{-1}(jr)x = xjr \in SI$. De maneira análoga, prova-se que $IT = TI$.

(b) Se $p \in IS \cap R$, então p é uma constante que está em I. Reciprocamente, é claro que $I \subseteq IS \cap R$, pois $I \subseteq R$ e $I \subseteq IS$. Do mesmo modo, temos que $IS \cap T = I$.

(c) Note que $(R + IS)/IS \subseteq S/IS$. Por outro lado, temos que R é subanel de S e IS é ideal de S. Pelo teorema dos isomorfismos $(R + IS)/IS \cong R/R \cap IS = R/I$. Analogamente, prova-se o caso $(R + IT)/IT \cong R/R \cap IT = R/I$.

(*d*) Consideremos o automorfismo $\hat{\alpha} : R/I \longrightarrow R/I$ induzido por α, $\hat{\alpha}(r+I) := \alpha(r)+I$. Seja $(R/I)[\hat{x};\hat{\alpha}]$ a extensão de Ore de R/I com respecto a $\hat{\alpha}$.

Notemos que $x(\iota(r+I)) = x(r+I) = xr + I = \alpha(r)x + \alpha(I) = (\alpha(r)+I)x = \hat{\alpha}(r+I)x = \iota(\hat{\alpha}(r+I))x$. Então, pela propriedade universal das extensões de Ore, existe $\Psi : R/I[\hat{x},\hat{\alpha}] \longrightarrow S/IS$ tal que $\Psi(\hat{x}) = x$

$$\begin{tikzcd}
(R/I)[\hat{x};\hat{\alpha}] \arrow[dr, "\exists!\Psi"] & \\
(R/I) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\iota"] & S/SI
\end{tikzcd}$$

■

Lema 1.40 *Seja α é um automorfismo de R e seja $T = R[x^{\pm 1};\alpha]$. Se T é simples, então não existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que α^n é um automorfismo interno de R.*

Demonstração: Suponha que alguma potência inteira positiva α^n é um automorfismo interno de R, isto é, existe uma unidade $u \in R$ tal que $\alpha^n(r) = uru^{-1}$ para todo $r \in R$. Por indução sobre $i \in \mathbb{Z}$, podemos provar que $\alpha^i(u)r\alpha^i(u)^{-1} = \alpha^n(r)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e $r \in R$. Por tanto, para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos que, $\alpha^i(u)u = \alpha^{n+i}(u) = u\alpha^i(u)$.
Seja $v := u\alpha(u)\alpha^2(u)\cdots\alpha^{n-1}(u) \in R$. É claro que v é uma unidade de R, mais ainda, $v^{-1} = u^{-2}v$ e como u comuta com toda potência $\alpha^i(u)$, cumpre-se que $\alpha(v) = v$.
Afirmação: O elemento $v^{-1}x^{n^2} \in T$ está no centro de T.
De fato, note primeiro que $vrv^{-1} = \alpha^{n^2}(r)$ para todo $r \in R$. Agora provemos por indução sobre k que $rx^kv^{-1}x^{n^2} = v^{-1}x^{n^2}rx^k$. Se $k = 0$, $rv^{-1}x^{n^2} = v^{-1}\alpha^{n^2}(r)x^{n^2} = v^{-1}x^{n^2}r$. Se $k = 1$, $rxv^{-1}x^{n^2} = r\alpha(v^{-1})xx^{n^2} = rv^{-1}x^{n^2+1}$. Por outro lado, $v^{-1}x^{n^2}rx = v^{-1}\alpha^{n^2}(r)x^{n^2+1}$. Logo, $rxv^{-1}x^{n^2} = v^{-1}x^{n^2}rx$, para todo $r \in R$.
Suponha agora, que para $k > 0$, $rx^kv^{-1}x^{n^2} = v^{-1}x^{n^2}rx^k$. Então, para $k+1$, $rx^{k+1}v^{-1}x^{n^2} = rxx^kv^{-1}x^{n^2} = rxv^{-1}x^{n^2}x^k = v^{-1}x^{n^2}rxx^k = v^{-1}x^{n^2}rx^{k+1}$.
Agora é claro que $v^{-1}x^{n^2} \in T$ está no centro de T, o que prova nossa afirmação.

Por outro lado, $1 + v^{-1}x^{n^2}$ não é uma unidade de T. Assim $T(1 + v^{-1}x^{n^2})$ é um ideal bilateral próprio e não nulo de T. Por tanto, T não é simples.

■

Teorema 1.41 *Seja α é um automorfismo de R e seja $T = R[x^{\pm 1};\alpha]$. Então T é simples se, e somente se, valem as seguintes afirmações:*

(a) *R é um anel α-simples.*

(b) *Não existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que α^n é um automorfismo interno de R.*

Demonstração: Os lemas anteriores provam que se R é simples, então se cumprem os items (a) e (b).
Reciprocamente, suponhamos que (a) e (b) valem. Seja I um ideal não nulo de T. Devemos mostrar que $I = T$. Seja $S = R[x; \alpha]$. Temos que $I = (I \cap S)T$. Assim, $I \cap S \neq 0$. Como I é um ideal em T, podemos multiplicar por x ou x^{-1}. Dessa forma, $xIx^{-1} \subseteq I$ e $x^{-1}Ix \subseteq I$. Portanto, $xIx^{-1} = I$. Mais ainda, por um argumento usado na prova do Teorema 1.36, temos que $xSx^{-1} = S$ e, portanto, $x(I \cap S)x^{-1} = I \cap S$.

Seja n o menor grau dos elementos não-nulos de $I \cap S$. Definamos o seguinte conjunto:

$$J := \left\{ r \in R / rx^n + r_{n-1}x^{n-1} + ... + r_0 \in I \cap S,\ r_{n-1}, ..., r_0 \in R \right\}.$$

Não é difícil ver que J é um ideal não nulo de R. Dado $r \in R$, existe $p \in I \cap S$ da forma $p = rx^n$+[termos de menor grau]. Logo, o elemento $xpx^{-1} = \alpha(r)x^n$+[termos de menor grau] também estão em $I \cap S$ e assim, $\alpha(r) \in J$. Portanto, $\alpha(J) \subseteq J$. De maneira análoga, podemos provar que $\alpha^{-1}(J) \subseteq J$. Em consequencia, $\alpha(J) = J$ e portanto, J é um α-ideal de R. Como R é α-simples, devemos ter $J = R$ e, desse modo, $1 \in J$. Então existe um elemento $p \in I \cap S$ da forma

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ para alguns } a_i \in R,\ i = 0, ..., n-1.$$

Se $a_0 = 0$, então $px^{-1} = x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ é um elemento não-nulo de $I \cap S$ com grau $n-1$, contradizendo a minimalidade de n. Portanto, $a_0 \neq 0$. Por outro lado, observemos que

$$xpx^{-1} = x^n + \alpha(a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \alpha(a_0),$$

e que, $xpx^{-1} - p$ é um elemento de $I \cap S$ de grau no máximo $n-1$. A minimalidade de n implica que $xpx^{-1} - p = 0$ e, portanto $\alpha(a_i) = a_i$ para todo i.

Agora seja $r \in R$ e notemos que

$$pr = \alpha^n(r)x^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}(r)x^{n-1} + \cdots + a_0 r$$

$$\alpha^n(r)p = \alpha^n(r)x^n + \alpha^n(r)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha^n(r)a_0.$$

Então, $pr - \alpha^n(r)p$ é um elemento de $I \cap S$ com grau no máximo igual a $n-1$ e, assim $pr - \alpha^n(r)p = 0$. Em particular, segue que $a_0 r = \alpha^n(r)a_0$. Como isto vale para todo $r \in R$, temos que $a_0R \subseteq Ra_0$. Por outro lado, tomando $r = \alpha^{-n}(r')$ temos que $r'a_0 = a_0\alpha^{-n}(r')$, para todo $r' \in R$ e portanto, $Ra_0 \subseteq a_0R$. Logo, $a_0R = Ra_0$

Agora, $a_0R = Ra_0$ é um α-ideal não-nulo de R, pois $\alpha(a_0) = a_0$. Como R é α-simples, temos que $a_0R = Ra_0 = R$. Assim, a_0 é invertível em R. Consequentemente as equações $a_0r = \alpha^n(r)a_0$, para todo $r \in R$ implicam que α^n é um automorfismo interno de R. Pelo item (b), temos que $n = 0$. Assim, $p = 1$ e, como $p \in I$, concluímos que $I = T$. Portanto, T é um anel simples.

■

Corolário 1.42 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $q \in \mathbb{K}$, $q \neq 0$. Então o toro quântico $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ é um anel simples se, e somente se, q não é uma raiz da unidade.*

Demonstração: Seja $T = \mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$. Pelo exemplo 1.34, $T = \mathbb{K}[y^{\pm 1}][x^{\pm 1}; \alpha]$ onde α é o automorfismo de $\mathbb{K}[y^{\pm 1}]$ tal que $\alpha(y) = qy$. Como $R = \mathbb{K}[y^{\pm 1}]$ é um anel comutativo, o único automorfismo interno de R é a aplicação identidade.
Se q é uma raiz da unidade, digamos $q^n = 1$ para algum inteiro positivo n, então α^n é a identidade de R. O teorema anterior prova que T não é simples neste caso.

Reciprocamente, suponhamos que q não é uma raiz da unidade. Então, nenhuma potência positiva de α é um automorfismo interno. Resta, agora, verificar a condição (a) do teorema anterior.
Seja I um α ideal não-nulo de R. devemos mostrar que $I = R$. Observemos que $I \cap \mathbb{K}[y]$ é não-nulo e escolhamos um polinômio mônico $f \in I \cap \mathbb{K}[y]$ de grau mínimo, digamos, $f = y^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ para algum $m \in \mathbb{Z}^+$ e $a_i \in \mathbb{K}$. Como I é um α-ideal, temos também $\alpha(f) \in I \cap \mathbb{K}[y]$. Agora, $\alpha(f) = q^m y^m + q^{m-1}a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$, e assim, $\alpha(f) - q^m f$ é um polinômio em $I \cap \mathbb{K}[y]$ com grau no máximo $m - 1$. Pela minimalidade de m, devemos ter $\alpha(f) - q^m f = 0$. Disto segue que $q^i a_i = q^m a_i$ para todo i, isto é, $(q^{m-i} - 1)a_i = 0$. Como q não é raiz da unidade, concluímos que $a_i = 0$ para todo $i \neq m$. Consequentemente, $f = y^m$, que é invertível em R. Portanto, $I = R$. ■

1.4 Domínios de Ore

Definição 1.43 *Um domínio R é um* ***domínio de Ore à esquerda*** *se $Rx \cap Ry \neq 0$ para todo par de elementos diferentes de zero $x, y \in R$. Analogamente, um domínio R é um* ***domínio de Ore à direita*** *se $xR \cap yR \neq 0$ para todo par de elementos $x, y \in R$. Um domínio R é um* ***domínio de Ore*** *se é um domínio de Ore à esquerda e à direita.*

Definição 1.44 *Seja R um domínio de integridade. Um* ***anel de frações à esquerda*** *para R é um anel de divisão D com as seguintes propriedades:*

(*a*) *R é um subanel de D.*

(*b*) *Se $\delta \in D$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = b^{-1}a$.*

Proposição 1.45 *Suponhamos que R é um domínio de Ore à esquerda, então existe um anel de frações à esquerda para R.*

Demonstração: No conjunto $R \times R^*$ definimos uma relação $\sim$ como segue: $(a, b) \sim (c, d)$ se existem $r, s \in R^*$ tais que $ra = sc$ e $rb = sd \neq 0$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, a reflexividade e a simetria são claras. Por outro lado, se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então existem $r, s, t, u \in R^*$ tais que $ra = sc, rb = sd \neq 0, tc = ue, td = uf \neq 0$; por outro lado, como R é um domínio de Ore à esquerda temos que $xs = yt$ para alguns $x, y \in R^*$, logo $(xr)a = (yu)e$ e $(xr)b = (ye)f \neq 0$ e portanto $(a, b) \sim (e, f)$ o que mostra que $\sim$ é transitiva.
Denotemos por $[a, b]$ a classe de equivalência do par $(a, b) \in R \times R^*$ e o conjunto quociente por $D := R \times R^*/\sim$. Agor vamos definir uma estrutura de anel sobre D:
Dados $[a, b]$ e $[c, d]$ em D, escolhemos $r, s \in R^*$ tais que $rb = sd$ e colocamos $[a, b] + [c, d] = [ra + sc, rb]$. Então $+$ é uma operação bem definida.

Por outro lado, dados $[a, b]$ e $[c, d]$ em D, escolhemos $r \in R^*$ e $s \in R$ tais que $ra = sd$, e colocamos $[a, b].[c, d] = [sc, rb]$. Então . é uma operação bem definida.
O sistema $(D, +, .)$ é um anel, onde $[0, 1]$ é o elemento zero e $[1, 1]$ é o elemento unitário de D. Mais ainda, a aplicação $r \longrightarrow [r, 1]$ é um homomorfismo injetivo de aneis. Com efeito, o fato de ser homomorfismo segue-se das definições e por outro lado, se $[r, 1] = [0, 1]$ para algum $r \in R$ temos que $(r, 1) \sim (0, 1)$ e portanto existem $t, u \in R^*$ tais que $tr = s.0 = 0$ e como R é um domínio, concluimos que $r = 0$. O homomorfismo injetivo anterior permite

identificar R com um subanel de D e quando fazemos esta identificação, R torna-se um subanel de D. Além disso, o anel D é um anel de divisão. De fato, se $[a,b]$ é um elemento diferente de zero em D, então $a,b \in R$, logo $[b,a] \in D$, mais ainda $[a,b].[b,a] = [1,1]$ e $[b,a].[a,b] = [1,1]$. Notemos que se $r \in R^*$, então $[r,1]^{-1} = [1,r]$. Usaremos a notação r^{-1} para o inverso de $r \in R$.

Finalmente, se $\delta \in D$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = [a,b]$, que pode ser escrito como $[a,b] = [1,b].[a,1] = [b,1]^{-1}.[a,1]$. Logo, se usamos a identificação de R como um subanel de D e a notação acima, temos que $\delta = b^{-1}a$.

■

Os aneis de frações à esquerda possuem a seguinte propriedade universal :

Proposição 1.46 *Seja R um domínio de Ore à esquerda e D um anel de frações à esquerda para R. Suponhamos que $\phi : R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de aneis tal que $\phi(x)$ é uma unidade de S para cada $x \in R^*$. Então, ϕ extende-se de maneira única a um homomorfismo de aneis $\Phi : D \longrightarrow S$. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, dashed, "\exists!\Phi"] & \\ R \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\phi"] & S \end{tikzcd}$$

Demonstração: Seja $\delta \in D$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = b^{-1}a$. Colocamos $\Phi(\delta) = \phi(b)^{-1}\phi(a)$;em primeiro lugar temos que ver que Φ está bem definida. Com efeito, suponhamos que δ tem outra representação como $\delta = d^{-1}c$ para alguns $c \in R$ e $d \in R^*$. Então $b^{-1}a = d^{-1}c$ e como R é um domínio de Ore à esquerda, existem $r, s \in R^*$ tais que $ra = sc$ e $rb = sd \neq 0$. Mas $\phi(rb), \phi(r), \phi(sd), \phi(s)$ são unidades em S. Logo, $\phi(b)^{-1}\phi(a) = \phi(rb)^{-1}\phi(ra) = \phi(sd)^{-1}\phi(sc) = \phi(d)^{-1}\phi(c)$. Portanto, a regra $\Phi(b^{-1}a) = \phi(b)^{-1}\phi(a)$ define uma aplicação $\Phi : D \longrightarrow S$. Notemos que $\phi(r) = \Phi(1^{-1}r) = \phi(1)^{-1}\phi(r) = \phi(r)$ para todo $r \in R$. Portanto, Φ extende ϕ a D. Em particular $\Phi(1) = 1$.

Agora mostremos que de fato ϕ é um homomorfismo de aneis. Com efeito, sejam $a, c \in R$ e $b, d \in R^*$, então existem $r, s \in R^*$ tais que $rb = sd$. Logo
$\Phi(b^{-1}a + d^{-1}c) = \Phi((rb)^{-1}(ra + sc)) = \phi(rb)^{-1}\phi(ra + sc) = \phi(rb)^{-1}\phi(ra) + \phi(rb)^{-1}\phi(sc) = \phi(b)^{-1}\phi(a) + \phi(d)^{-1}\phi(c) = \Phi(b^{-1}a) + \Phi(d^{-1}c)$.

por outro lado, existem $t \in R$ e $u \in R^*$ tais que $ua = td$. Logo
$\Phi(b^{-1}ad^{-1}c) = \Phi((ub)^{-1}tc) = \phi(ub)^{-1}\phi(tc) = \phi(b)^{-1}\phi(u^{-1}t)\phi(c) = \phi(b)^{-1}\phi(ad^{-1})\phi(c) =$

$(\phi(b)^{-1}\phi(a))(\phi(d)^{-1}\phi(c)) = \Phi(b^{-1}a)\Phi(d^{-1}c)$.Portanto, Φ é um homomorfismo de aneis.

Finalmente, se $\varphi : D \longrightarrow S$ é outro homomorfismo de aneis que extende ϕ, temos que para $a \in R$ e $b \in R^*$, $\varphi(b^{-1}a) = \varphi(b)^{-1}\varphi(a) = \phi(b)^{-1}\phi(a) = \Phi(b^{-1}a)$. Portanto, $\varphi = \Phi$, o que mostra a unicidade da extensão. ∎

Corolário 1.47 *Seja R um domínio de Ore à esquerda e sejam D, D' aneis de frações à esquerda para R. Então a aplicação identidade de R extende-se a um único isomorfismo de D sobre D'.*

No sentido do corolário anterior, um anel de frações à esquerda para um domínio de Ore à esquerda é único.

Definição 1.48 *Seja R um domínio de integridade.* ***Um anel de frações à direita para*** *R é um anel de divisão E com as seguintes propriedades:*

(a) *R é um subanel de E.*

(b) *Se $\xi \in E$, então existem $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\xi = ab^{-1}$.*

É claro que proposições semelhantes são verdadeiras para domínios de Ore à direita.

Proposição 1.49 *Suponhamos que R é um domínio de Ore à direita, então existe um anel de frações à direita para R.*

Proposição 1.50 *Seja R um domínio de Ore à direita e E um anel de frações à direita para R. Suponhamos que $\phi : R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de aneis tal que $\phi(x)$ é uma unidade de S para cada $x \in R^*$. Então ϕ extende-se de maneira única a um homomorfismo de aneis $\Phi : E \longrightarrow S$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "\exists!\Phi"] & \\ R \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\phi"] & S \end{tikzcd}$$

Corolário 1.51 *Seja R um domínio de Ore à direita e sejam E, E' aneis de frações à direita para R. Então a aplicação identidade de R extende-se a um único isomorfismo de E sobre E'.*

No sentido do corolário anterior, um anel de frações à direita para um domínio de Ore à direita é único.

Proposição 1.52 *Suponhamos que R é um domínio de Ore. Então os aneis de frações à esquerda e à direita são iguais.*

Demonstração: Seja D o anel de frações à esquerda de R e E o anel de frações à direita de R. Então se $\delta \in D$, existem elementos $a \in R$ e $b \in R^*$ tais que $\delta = b^{-1}a$. Desde que R é um domínio de Ore à direita, existem $r \in R$ e $s \in S$ tais que $as = br$, logo $\delta = rs^{-1}$ e portanto $\delta \in E$, o que mostra que $D \subset E$. Analogamente, pode-se provar que $E \subset D$ e, portanto, $D = E$.

■

Proposição 1.53 *Seja R um domínio. Então ou R é um domínio de Ore à esquerda ou R contém um ideal à esquerda que é livre e de posto infinito como R-módulo. Em particular, todo domínio noetheriano à esquerda é um domínio de Ore à esquerda.*

Demonstração: Suponhamos que R não é um domínio de Ore à esquerda. Então existem $a, b \in R^*$ tais que $Ra \cap Rb = 0$. Afirmação: os elementos $a, ab, ab^2, ab^3, ...,$ são linearmente independentes à esquerda sobre R. Portanto o ideal à esquerda gerado por eles é livre de posto infinito. De fato, caso contrário, haveria uma relação $\sum c_i ab^i$, onde os c_i não são todos iguais a zero. Seja c_r o primeiro coeficiente diferente de zero, então podemos cancelar b^r e obter uma relação

$$c_r a + c_{r+1}ab + ... + c_n ab^{n-r} = 0.$$

Donde

$$(c_{r+1}a + ... + c_n ab^{n-r-1})b = -c_r a.$$

O que contradiz a hipótese inicial sobre a e b.

■

Um resultado análogo é válido para "direita"em lugar de "esquerda". Mais precisamente temos a seguinte:

Proposição 1.54 *Seja R um domínio. Então ou R é um domínio de Ore à direita ou R contém um ideal à direita que é livre e de posto infinito como R-módulo. Em particular, todo domínio noetheriano à direita é um domínio de Ore à direita.*

Corolário 1.55 *Todo domínio noetheriano é um domínio de Ore. Em particular, se R é um domínio noetheriano, então toda extensão de Ore $R[x;\alpha,\delta]$ é um domínio de Ore. Além disso, se R é noetheriano e α é um automorfismo de R, então $R[x^{\pm 1};\alpha]$ é um domínio de Ore.*

Observação 1.56 *Dos exemplos 1.9, 1.11, 1.12, 1.32, 1.33, temos que os aneis $\mathcal{O}_q(\mathbb{K}^2)$, $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}))$, $\mathcal{O}_q((\mathbb{K}^*)^2)$ e $\mathbb{K}[H]$ são domínios de Ore e portanto, possuem aneis de frações.*
No seguinte capítulo, estudaremos as álgebras de Weyl sobre um corpo de característica zero e veremos que são domínios noetherianos, portanto são domínios de Ore e possuem aneis de frações.

Capítulo 2

Álgebras de Weyl

2.1 Definições e Propriedades

Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $n \geq 1$ um inteiro positivo e $\mathbb{K}[x] := \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Seja $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x])$ a $\mathbb{K}$-álgebra dos endomorfismos $\mathbb{K}$-lineares do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}[x]$. Como o produto nesta álgebra é a composição de endomorfismos, então $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x])$ é um anel não comutativo com unidade.

Seja $f \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio. A multiplicação por f,

$$\phi_f : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x], \text{ definida por } \phi_f(g) = fg \text{ para todo } g \in \mathbb{K}[x]$$

é um $\mathbb{K}$-endomorfismo linear de $\mathbb{K}[x]$. O elemento unitário do anel $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x])$ é a aplicação identidade que coincide com ϕ_1.

Para cada $1 \leq i \leq n$, a derivada parcial com respecto a i,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$$

é também $\mathbb{K}$-endomorfismo linear de $\mathbb{K}[x]$. Usaremos a notação ∂_i no lugar de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Assim, para todo $f \in \mathbb{K}[x]$, temos $\partial_i(f) := \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Definição 2.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $n \geq 1$ um inteiro. A **n-ésima Álgebra de Weyl**, denotada por $A_n(\mathbb{K})$, é a subálgebra de $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x])$, gerada pelos endomorfismos*

$$\phi_{x_1}, ..., \phi_{x_n}, \partial_1, ..., \partial_n.$$

Por convenção, $A_0(\mathbb{K}) := \mathbb{K}$ e por simplicidade de notação, escreveremos A_n no lugar de $A_n(\mathbb{K})$.

A n-ésima Álgebra de Weyl A_n, é conhecida também como ***Anel de Operadores Lineares Diferenciais com coeficientes polinomiais.***

Observação 2.2 *Um elemento em A_n é simplesmente uma combinação linear de palavras nos geradores $\phi_{x_1}, ..., \phi_{x_n}, \partial_1, ..., \partial_n$. Cada palavra é identificada com o endomorfismo correspondente construído pela composição de geradores presentes nela.*

Observação 2.3 *A_n é uma álgebra não-comutativa.*
Com efeito, seja $f \in \mathbb{K}[x]$. Então, $(\partial_i \circ \phi_{x_i})(f) = \partial_i(x_i f) = f + x_i\partial_i(f) = f + (\phi_{x_i} \circ \partial_i)(f)$. Como f é arbitrário, $\partial_i \circ \phi_{x_i} = \phi_{x_i} \circ \partial_i + 1$.
De um modo mais geral, para todo $f, g \in \mathbb{K}[x]$ e $1 \leq i \leq n$, temos $(\partial_i \circ \phi_g)(f) = \partial_i(gf) = \partial_i(g)f + g\partial_i(f) = \phi_{\partial_i(g)}(f) + (\phi_g \circ \partial_i)(f)$. Assim, $\partial_i \circ \phi_g = \phi_g \circ \partial_i + \phi_{\partial_i(g)}$.

Proposição 2.4 *As seguintes igualdades valem em A_n:*

(a) $\partial_i \circ \phi_{x_j} = \phi_{x_j} \circ \partial_i$, *para todo* $1 \leq i, j \leq n$, *com* $i \neq j$.

(b) $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$, *para todo* $1 \leq i \leq j \leq n$.

(c) $\phi_{x_i}\phi_{x_j} = \phi_{x_j}\phi_{x_i}$, *para todo* $1 \leq i \leq j \leq n$.

Demonstração: Provemos o item (a). Os outros itens podem ser provados de maneira análoga.
Seja $f \in \mathbb{K}[x]$ um elemento arbitrário. Então, $(\partial_i \circ \phi_{x_j})(f) = \partial_i(\phi_{x_j}(f)) = \partial_i(x_j f) = (\partial_i x_j)f + x_j(\partial_i f) = \phi_{x_j}(\partial_i f) = (\phi_{x_j} \circ \partial_i)f$.

■

Proposição 2.5 *A aplicação $\mathbb{K}[x] \longrightarrow A_n$ definida por $f \mapsto \phi_f$ é um homomorfismo injetivo de $\mathbb{K}$-álgebras.*

Demonstração: A prova segue igualdades :

$$\phi_{f+g}(h) = (f+g)h = fh + gh = \phi_f h + \phi_g h = (\phi_f + \phi_g)(h)$$

e

$$\phi_{fg}(h) = (fg)h = f(gh) = \phi_f(\phi_g(h)) = (\phi_f \circ \phi_g)(h),$$

que são verdadeiras para todo $f, g, h \in \mathbb{K}[x]$.

Finalmente, se $\phi_f = 0$, então $f = f.1 = \phi_f(1) = 0$. Isto mostra a injetividade da aplicação.

■

Observação 2.6 *Por motivos de simplicidade, escreveremos* x_i *no lugar de* ϕ_{x_i} *e* PQ *no lugar de* $P \circ Q$ *para o produto em* A_n.

Para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *escreveremos* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *para indicar um monômio em* $\mathbb{K}[x]$ *e o correspondente elemento em* A_n. *Também escreveremos* $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \in A_n$. *Por convenção,* $x_i^0 = 1$ *e* $\partial_i^0 = 1$ *para* $i = 1, ..., n$.

Um elemento $x^\alpha \partial^\beta \in A_n$ *para* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ *é denominado* ***monômio em*** A_n.

Proposição 2.7 *Em* A_n *são válidas as seguintes propriedades:*

(*a*) *Seja* $f \in \mathbb{K}[x]$ *e* $\beta \in \mathbb{N}^n$. *O produto* $\partial^\beta f$ *em* A_n *satisfaz a igualdade*

$$\partial^\beta f = \sum_{\sigma \ll \beta} \binom{\beta}{\sigma} \partial^\sigma(f) \partial^{\beta - \sigma}$$

onde $\sigma \ll \beta$ *significa que* $\sigma_i \leq \beta_i$ *para* $i = 1, ..., n$, $\binom{\beta}{\sigma} = \frac{\beta!}{\sigma!(\beta-\sigma)!}$ *e* $\beta! = \beta_1!...\beta_n!$.

(*b*) *Se* $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, *então temos* $\partial^\beta(x^\gamma) = \beta!\binom{\gamma}{\beta}x^{\gamma-\beta}$, *onde* $\binom{\gamma}{\beta} = 0$ *se a relação* $\beta \ll \gamma$ *não vale.*

(*c*) *Se* $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}^n$, *temos*

$$x^\alpha \partial^\beta x^{\alpha'} \partial^{\beta'} = x^{\alpha+\alpha'} \partial^{\beta+\beta'} + \sum_{\sigma \ll \beta, \sigma \ll \alpha', \sigma \neq 0} \sigma! \binom{\beta}{\sigma} \binom{\alpha'}{\sigma} x^{\alpha+\alpha'-\sigma} \partial^{\beta+\beta'-\sigma}.$$

Demonstração:

(*a*) A prova segue do caso $n = 1$ e da distributividade do produto com respeito à soma em A_n. Para $n = 1$ (escrevendo t e ∂_t no lugar de x_1 e ∂_1) a fórmula $\partial_t^j f = \sum_{k=0}^{j} \partial_t^k(f) \partial_t^{j-k}$ pode ser provada por indução sobre j.

(*b*) A fórmula segue-se por indução sobre n. O caso $n = 1$, prova-se por indução em β_1.

(*c*) Segue-se de (*a*) e (*b*).

■

Proposição 2.8 *O conjunto dos monômios* $\mathcal{B} = \left\{x^\alpha \partial^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}$ *é uma base de* A_n *como* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial . Cada elemento não-nulo* P *em* A_n *pode ser escrito de maneira única como uma soma finita*

$$P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

para alguns $p_{\alpha\beta} \in \mathbb{K}$*. Mais ainda,* $P = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta$ *com* $p_\beta(x) = \sum_\alpha p_{\alpha\beta} x^\alpha$*.*

Demonstração: Bastará provar a primeira afirmação, pois a segunda é consequência da primeira.

Pela observação 2.2, toda palavra nos geradores $x_1, ..., x_n, \partial_1, ..., \partial_n$ é um produto de monômios. Mais ainda, pela proposição 2.7(c), um produto de monômios é uma combinação linear com coeficientes em $\mathbb{K}$ de elementos em $\mathcal{B}$. Isto prova que $\mathcal{B}$ gera A_n como espaço vetorial. Agora provemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Com efeito, seja $P = \sum p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$ uma combinação linear não trivial em $\mathcal{B}$. Seja $\beta' \in \mathbb{N}^n$ o menor elemento, com respeito à ordem lexicográfica, que aparece como expoente de ∂ em P. Notemos que $P(x^{\beta'}) = (\beta'!)(\sum_\alpha p_{\alpha\beta'} x^\alpha)$, pois se β' é estritamente menor que β, na ordem lexicográfica, então $\partial^\beta(x^{\beta'}) = 0$. Pela escolha de β', existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $p_{\alpha\beta'} \neq 0$. Logo, $P(x^{\beta'})$ é não-nulo. Em particular, o endomorfismo $P \in A_n$ é não-nulo.

■

A continuação provaremos que as álgebras de Weyl A_n são extensões (iteradas) de Ore do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$.

Lema 2.9 *Suponhamos que* $\delta_1, ..., \delta_n$ *são derivações sobre um anel* R *tais que* $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$*, para todo* $1 \leq i, j \leq n$*.*

(a) *Seja* $S_1 = R[x_1; \delta_1]$*. Então, existe uma única derivação* $\hat{\delta_2}$ *sobre* S_1 *tal que* $\hat{\delta_2}|_R = \delta_2$ *e* $\hat{\delta_2}(x_1) = 0$*. Isto permite definir* $S_2 := S_1[x_2; \hat{\delta_2}]$

(b) *De modo semelhante, uma vez construído* S_i *para* $i < n$*, existe uma única derivação* $\hat{\delta_{i+1}}$ *sobre* S_i *tal que* $\hat{\delta_{i+1}}|_{S_i} = \delta_i$ *e* $\hat{\delta_{i+1}}(x_i) = 0$*. Isto permite definir* $S_{i+1} := S_i[x_{i+1}; \hat{\delta_{i+1}}]$*.*

Demonstração:

(a) Seja $p \in S_1$, então existem únicos $a_0, a_1, ..., a_k \in R$ tais que $p = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_1^k$. Definimos $\hat{\delta_2}(p) := \delta_2(a_0) + \delta_2(a_1)x_1 + \cdot + \delta_2(a_k)x_1^k$. Não é difícil ver que $\hat{\delta_2}|_R = \delta_2$ e $\hat{\delta_2}(x_1) = 0$. Mais ainda $\hat{\delta_2}$ é a única derivação sobre S_1 com tal condição.

(b) Pode ser provado de maneira análoga a (a).

■

Observação 2.10 *O lema anterior permita definir o anel* $S := S_n = R[x_1;\delta_1][x_2;\hat{\delta_2}]\cdots[x_n;\hat{\delta_n}]$. *A notação canônica é* $S = R[x_1,...,x_n,\delta_1,...,\delta_n]$.

Teorema 2.11 *A n-ésima Álgebra de Weyl,* A_n *é uma extensão (iterada)de Ore do anel de polinômios* $\mathbb{K}[y_1,...,y_n]$. *Mais precisamente,* $A_n \cong \mathbb{K}[y_1,...,y_n][x_1,...,x_n,\partial_1,...,\partial_n]$.

Demonstração:

Vamos provar para os casos $n = 1$ e $n = 2$. O caso geral pode ser provado de maneira análoga.

Seja $\mathbb{K}[z]$ o anel de polinômios na indeterminada z. Então $A_1(\mathbb{K})$ é a $\mathbb{K}$-subálgebra de $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[z])$ gerada por z e ∂_z, onde tais geradores satisfazem a relação,

$$\partial_z \cdot z = z \cdot \partial_z + 1.$$

Afirmação: $A_1(\mathbb{K})$ é uma extensão de Ore de $\mathbb{K}[y]$. Mais especificamente,
$A_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[y][x;\delta]$, onde $\delta : \mathbb{K}[y] \longrightarrow \mathbb{K}[y]$ é a derivação tal que $\delta(y) = 1$.
De fato, seja $\varphi : \mathbb{K}[y] \longrightarrow A_1(\mathbb{K})$ o $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras tal que $\varphi(y) = z$.

Notemos que em $A_1(\mathbb{K})$ cumpre-se $\partial_z \cdot \varphi(y) = \partial_z \cdot z = z \cdot \partial_z + 1 = \varphi(y)\partial_z + \varphi(\delta(y))$.
Pela propriedade universal de $\mathbb{K}[y][x;\delta]$, existe um (único) morfismo $\mathbb{K}$-álgebras
$\Psi : \mathbb{K}[y][x;\delta] \longrightarrow A_1(\mathbb{K})$ tal que $\Psi(x) = \partial_z$ e $\Psi|_{\mathbb{K}[y]} = \varphi$. Em particular, $\Psi(y) = z$ e $\Psi(x) = \partial_z$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[y][x;\delta] \arrow[dr, dashed, "\exists!\Psi"] & \\ \mathbb{K}[y] \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"] & A_1(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

Por outro lado, se $p \in A_1(\mathbb{K})$, podemos escrever de maneira única como uma soma finita, $p = \sum_i p_i(z)\partial_z^i$, onde $p_i(z) \in \mathbb{K}[z]$. Definamos a aplicação

$$\sigma : A_1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}[y][x;\delta], \text{ por } \sigma(p) = \sum_i p_i(y)x^i.$$

Não é difícil ver que σ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Mais ainda, como $\sigma(z) = y$ e $\sigma(\partial_z) = x$, temos que $\Psi \circ \sigma = 1$ e $\sigma \circ \Psi = 1$ e portanto, Ψ e σ são isomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras. Isto prova nossa afirmação.

Agora, seja $\mathbb{K}[z_1, z_2]$ o anel de polinômios nas indeterminadas z_1 e z_2 com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$. Então $A_2(\mathbb{K})$ é a $\mathbb{K}$-subálgebra de $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[z_1, z_2])$ gerada por $z_1, z_2, \partial_{z_1}, \partial_{z_2}$, onde tais geradores satisfaçem as relações,

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad \partial_1 \cdot \partial_2 = \partial_2 \cdot \partial_1, \quad \partial_{z_1} \cdot z_1 = z_1 \cdot \partial_{z_1} + 1, \quad \partial_{z_2} \cdot z_2 = z_2 \cdot \partial_{z_2} + 1$$

Afirmação: $A_2(\mathbb{K})$ é uma extensão (iterada) de Ore de $\mathbb{K}[y_1, y_2]$. Mais precisamente, Sejam $\delta_1 := \partial_{y_1}$ e $\delta_2 := \partial_{y_2}$ as derivações usuais sobre $\mathbb{K}[y_1, y_2]$. Seja $S_1 := \mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1]$. Como δ_1 e δ_2 comutam, o lema anterior garante a existência do anel $S_2 = S_1[x_2; \hat{\delta_2}]$, onde $\hat{\delta_2}$ é a única derivação sobre o anel S_1 tal que $\hat{\delta_2}$ coincide com δ_2 em $\mathbb{K}[y_1, y_2]$ e $\hat{\delta_2}(x_1) = 0$. Como já observamos depois do lema 2.10, a notação canônica para S_2 é $\mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1][x_2; \delta_2]$. Afirmamos que $A_2(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1][x_2; \delta_2]$ como $\mathbb{K}$-álgebras.
De fato, como $\mathbb{K}[y_1, y_2]$ é um anel de polinômios, existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo φ tal que $\varphi(y_1) = z_1$ e $\varphi(y_2) = z_2$.
Em $A_2(\mathbb{K})$, existe ∂_{z_1} tal que $\partial_{z_1} \cdot \varphi(y_1) = \partial_{z_1} \cdot z_1 = z_1 \cdot \partial_{z_1} + 1 = \varphi(y_1)\partial_{z_1} + \varphi(\delta_1(y_1))$ e $\partial_{z_1} \cdot \varphi(y_2) = \partial_{z_1} \cdot z_2 = z_2 \cdot \partial_{z_1} + 1 = \varphi(y_2)\partial_{z_1} + \varphi(\delta_1(y_2))$.
Pela propriedade universal da extensão de Ore $\mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1]$, existe um (único) homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1] \longrightarrow A_2(\mathbb{K})$ tal que $\widetilde{\varphi}|_{\mathbb{K}[y_1,y_2]} = \varphi$ e $\widetilde{\varphi}(x_1) = \partial_{z_1}$.
Em particular, $\widetilde{\varphi}(y_1) = z_1$, $\widetilde{\varphi}(y_2) = z_2$ e $\widetilde{\varphi}(x_1) = \partial_{z_1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1] \arrow[dr, dashed, "\exists! \widetilde{\varphi}"] & \\
\mathbb{K}[y_1, y_2] \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\varphi"] & A_2(\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

Além disso, existe em $A_2(\mathbb{K})$, o elemento ∂_{z_2} tal que $\partial_{z_2} \cdot \widetilde{\phi}(x_1) = \partial_{z_2} \cdot \partial_{z_1} = \partial_{z_1} \cdot \partial_{z_2} = \widetilde{\phi}(x_1) \cdot \partial_{z_2} + \widetilde{\phi}(\delta_2(x_1))$. Então, pela propriedade universal de $\mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1][x_2, \delta_2]$, existe um único $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras $\Psi : \mathbb{K}[y_1, y_2][x_1; \delta_1][x_2; \delta_2] \longrightarrow A_2(\mathbb{K})$ tal que

$\Psi|_{\mathbb{K}[y_1,y_2][x_1;\delta_1]} = \widetilde{\varphi}, \quad \Psi(x_2) = \partial_{z_2}, \quad \Psi(y_1) = z_1, \ \Psi(y_2) = z_2$ e $\Psi(x_1) = \partial_{z_1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[y_1,y_2][x_1;\delta_1][x_2;\delta_2] \arrow[drr, dashed, "\exists!\Psi"] & & \\ \mathbb{K}[y_1,y_2][x_1;\delta_1] \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[rr, "\widetilde{\varphi}"] & & A_2(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

Por outro lado, cada $p \in A_2(\mathbb{K})$ pode ser escrita de maneira única como uma soma finita, $p = \sum_{i,j} p_{ij}(z_1,z_2)\partial_{z_1}^i \partial_{z_2}^j$, onde $p_{ij}(z_1,z_2) \in \mathbb{K}[z_1,z_2]$. Definamos a aplicação

$$\sigma : A_2 \longrightarrow \mathbb{K}[y_1,y_2][x_1,\delta_1][x_2,\delta_2] \quad \text{por} \quad \sigma(p) = \sum_{i,j} p_{ij}(y_1,y_2)x_1^i x_2^j$$

Não é difícil ver que σ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Mais ainda, como $\sigma(z_1) = y_1, \ \sigma(z_2) = y_2, \ \sigma(\partial_{z_1}) = x_1$ e $\sigma(\partial_{z_2}) = x_2$, temos que $\Psi \circ \sigma = 1$ e $\sigma \circ \Psi = 1$ e portanto, Ψ e σ são isomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras. Isto prova nossa afirmação.

■

Corolário 2.12 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Para todo $n \geq 1$, $A_n(\mathbb{K})$ é um domínio noetheriano. Logo, $A_n(\mathbb{K})$ é um domínio de Ore e portanto, $A_n(\mathbb{K})$ possui um anel de frações.*

Demonstração: Segue-se do teorema 1.19 e do corolário 1.55.

■

Corolário 2.13 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero, então todas as Álgebras de Weyl $A_n(\mathbb{K})$ são aneis simples.*

Demonstração: Note que $A_n \cong A_1(A_{n-1}(\mathbb{K}))$ para todo $n \geq 2$. Portanto, é suficiente provar que $A_1(R)$ é simples para toda $\mathbb{Q}$-álgebra R simples, onde $A_1(R) = R[y][x;\delta]$, onde y é uma indeterminada e $\delta = d/dy$. Como $\delta(y) \neq 0$ e y é um elemento central de $R[y]$, então δ não pode ser uma derivação interior de $R[y]$. Mostraremos que $R[y]$ é δ-simples.

Sejam I algum δ-ideal não-nulo de $R[y]$ e n o menor grau para elementos não-nulos de I, e escolha $p \in I$ com grau n. Se p tem coeficiente líder r, então

$\delta(p) = nry^{n-1}$+[expoentes menores]

Como $\delta(p) \in I$, a minimalidade de n força $\delta(p) = 0$, e assim $nr = 0$. Como $r \neq 0$ e R é uma $\mathbb{Q}$-álgebra, $n = 0$. Portanto, p é um elemento não-nulo de R. Agora $RpR = R$, pois R é simples, e portanto $I = R[y]$. Assim, $R[y]$ é δ-simples.

Pela proposição 1.27, $A_1(R)$ é um anel simples.

■

2.2 Teorema de Divisão em A_n.

Definição 2.14 *Uma boa ordem $\prec$ em $\mathbb{N}^n$ é dita* ***ordem monomial*** *se é compatível com a soma: $\alpha \prec \beta$ implica que $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$ para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$.*

Para qualquer ordem monomial $\prec$ em $\mathbb{N}^n$ temos $0 = (0, ..., 0) \prec \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Mais ainda, se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ são tais que $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo i, então $\alpha \prec \beta$.

Usualmente podemos transladar qualquer ordem $\prec$ em $\mathbb{N}$ para uma ordem (também denotada por $\prec$) no conjunto dos monômios $\{x^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, escrevendo $x^\alpha \prec x^\beta$ se, e somente se, $\alpha \prec \beta$.

Exemplo 2.15 A **ordem lexicográfica** (denotada por $<_{lex}$) em $\mathbb{N}^n$ é definida como segue:

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n) <_{lex} (\beta_1, ..., \beta_n)$$

se, e somente se, a primeira componente não-nula de

$$(\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n)$$

é negativa. A ordem lexicográfica $<_{lex}$ é uma ordem monomial.

Exemplo 2.16 Seja $\prec$ uma ordem monomial em $\mathbb{N}^n$. Seja $L : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}$ uma forma linear com coeficientes não-negativos. A relação binária $\prec_L$ definida em $\mathbb{N}^n$ por

$$\alpha \prec_L \beta \ \text{ se } \begin{cases} L(\alpha) < L(\beta) \\ \text{ou } L(\alpha) = L(\beta) \text{ e } \alpha \prec \beta \end{cases}$$

é uma ordem monomial em $\mathbb{N}^n$.

Seja $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta, p_{\alpha\beta} \in \mathbb{K}$ um elemento de A_n. O **diagrama de Newton** de P é o conjunto

$$\mathcal{N}(P) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \ \text{ tal que } \ p_{\alpha\beta} \neq 0\}.$$

Exemplo 2.17 Seja $P = 2x_1^2 x_2 \partial_1 \partial_2 + x_1^2 - x_2 \partial_1^3 \partial_2^2$.
Então $P \in A_2$ e $\mathcal{N}(P) = \{(2, 1, 1, 1), (2, 0, 0, 0), (0, 1, 3, 2)\}$.

Fixemos agora uma ordem monomial $\prec$ em $\mathbb{N}^{2n}$.

Definição 2.18 *Seja $P \in A_n, P \neq 0$. O **expoente privilegiado** com respeito a $\prec$, denotado por $exp_{\prec}(P)$, é o maior $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, com respeito a $\prec$ tal que $p_{\alpha\beta} \neq 0$. Em outras palavras,*

$$exp_{\prec}(P) = max_{\prec}\mathcal{N}(P).$$

Exemplo 2.19 Seja $P = 2x_1x_2\partial_1^2\partial_2^3 + 3x_1^2x_2\partial_1 - 2x_1x_2^2\partial_1\partial_2 \in A_2$ com a ordem lexicográfica $\prec_{lex}$.
Então $exp_{\prec_{lex}}(P) = max_{\prec_{lex}}\{(1,1,2,3),(2,1,1,0),(1,2,1,1)\} = (2,1,1,0)$

Escreveremos simplesmente $exp(P)$ no lugar de $exp_{\prec}(P)$. Algumas propriedades do expoente privilegiado que seguem diretamente da definição são enunciadas no seguinte:

Lema 2.20 *Sejam $P, Q \in A_n, P, Q \neq 0$. Então*

i) $exp(PQ) = exp(P) + exp(Q)$.

ii) *Se $exp(P) \neq exp(Q)$, então $exp(P+Q) = max_{\prec}\{exp(P), exp(Q)\}$. Mais geralmente, para toda família $P_1, ..., P_m \in A_n, P_i \neq 0$ tal que $exp(P_i) \neq exp(P_j), i \neq j$, temos que $exp(\sum_i P_i) = max_{\prec}\{exp(P_i), \quad i = 1, ..., m\}$*

A cada m-tupla $((\alpha^1, \beta^1), ..., (\alpha^m, \beta^m)$ de elementos de $\mathbb{N}^{2n}$ associaremos uma **partição**

$$\{\triangle^0, \triangle^1, ..., \triangle^m\}$$

de $\mathbb{N}^{2n}$ da seguinte forma:

$$\triangle^1 := (\alpha^1, \beta^1) + \mathbb{N}^{2n}$$

$$\triangle^{i+1} := ((\alpha^{i+1}, \beta^{i+1}) + \mathbb{N}^{2n}) \backslash (\triangle^1 \cup \cdots \cup \triangle^i) \text{ se } i \geq 1$$

$$\triangle^0 := \mathbb{N}^{2n} \backslash (\cup_{i=1}^m \triangle^i)$$

.

O seguinte teorema generaliza o teorema de divisão para polinômios em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$.

Proposição 2.21 ***Teorema da Divisão em** A_n. Sejam $(P_1, ..., P_m)$ uma m-tupla de elementos não-nulos de A_n e seja $\{\triangle^0, \triangle^1, ..., \triangle^m\}$ a partição de $\mathbb{N}^{2n}$ associada com $(exp(P_1), ..., exp(P_m))$. Então, para todo P em A_n, existe uma única $(m+1)$-tuple $(Q_1, ..., Q_m, R)$ de elementos em A_n tais que:*

(i) $P = Q_1P_1 + ... + Q_mP_m + R$.

(ii) $exp(P_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subset \triangle^i, i = 1, ..., m$.

(iii) $\mathcal{N}(R) \subset \triangle^0$.

Demonstração: (Unicidade). Suponhamos que existam duas m-tuplas $(Q_1, ..., Q_m, R)$ e $(Q'_1, ..., Q'_m, R')$, satisfazendo as condições do teorema. Assim, temos

$$\sum_{i=1}^{m}(Q_i - Q'_i)P_i + R - R' = 0 \qquad (1)$$

Se $Q_i \neq Q'_i$, então $exp((Q_i - Q'_i)P_i) \in \triangle^i$. Se $R \neq R'$, então $exp(R - R') \in \triangle^0$. Como $\triangle^0, \triangle^1, ..., \triangle^m$ é uma partição de $\mathbb{N}^{2n}$, a relação (1) só é possível se $Q_i = Q'_i$ para todo i e $R = R'$.

(Existência) Basta provar a existência para os monômios $x^\alpha\partial^\beta \in A_n$. Usaremos indução sobre (α, β). Se $x^\alpha\partial^\beta = 1$, isto é, se $\alpha = \beta = (0, ..., 0)$, temos dois casos a considerar:

$a)$ $exp(P_i) \neq 0 \in \mathbb{N}^{2n}$ para todo i. Neste caso, escrevemos $1 = \sum_{i=1}^{m} 0P_i + 1$.

Como $Q_i = 0$ para todo i, $\mathcal{N}(Q_i) = \emptyset$ e, assim, $exp(P_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subset \triangle^i$ para todo i.

Por outro lado, $R = 1$. Assim, $\mathcal{N}(R) = \{(0, 0)\} \subset \triangle^0$, pois $(0, 0) \notin \triangle^i$, para todo i.

$b)$ Existe um inteiro j tal que $exp(P_j) = 0 \in \mathbb{N}^{2n}$. Neste caso, P_j é uma constante não-nula. Assumamos j minimal e escrevamos $1 = \sum_{i\neq j} 0.P_i + (1/P_j)P_j + 0$.

Se $i \neq j$, então $Q_i = 0$ e daí $exp(P_i) \subset \triangle^i$. Por outro lado, P_j e $Q_j = 1/P_j$ são constantes não- nulas. Assim, $exp(P_j) + \mathcal{N}(Q_j) = (0, 0) \in \triangle^j$.

Agora, como $(0, 0) \in \triangle^j$, temos que $\triangle^0 = \emptyset$. Isto prova a existência no primeiro passo da indução.

Suponha que o resultado está provado para todo (α', β') estritamente menor que algum $(\alpha, \beta) \neq 0 \in \mathbb{N}^{2n}$. Seja $j \in \{0, 1, ..., m\}$ tal que $(\alpha, \beta)\triangle^j$. Se $j = 0$, podemos escrever

$$x^\alpha\partial^\beta = \sum_{i=0}^{m} 0.P_i + x^\alpha\partial^\beta.$$

Note que $Q_i = 0$, para todo i. Assim, $exp(P_i) + \mathcal{N}(Q_i) = exp(P_i) \subset \triangle^i$. Além disso, $R = x^\alpha\partial^\beta$. Assim, $\mathcal{N}(R) = (\alpha, \beta) \subset \triangle^0$.

Se $j \geq 1$, seja $(\gamma, \delta) = (\alpha, \beta) - exp(P_j) \in \mathbb{N}^{2n}$. Podemos escrever

$$x^\alpha\partial^\beta = \frac{1}{c_j}x^\gamma\partial^\delta P_j + G_j$$

onde c_j é o coeficiente do monômio privilegiado de P_j e os monômios em G_j são menores que (α, β). Pela hipótese de indução, existe $(Q'_1, ..., Q'_m, R')$ satisfazendo as condições do teorema para $P = G_j$. Assim, temos
$x^\alpha \partial^\beta = \frac{1}{c_j} x^\gamma \partial^\delta + \sum_{i \neq j} Q'_i P_i + R' = \sum_{i \neq j} Q'_i P_i + (\frac{1}{c_j} x^\gamma \partial^\delta + Q'_j) P_j + R'$.
Isto prova o resultado para (α, β). Portanto, a existência está provada para todo $P \in A_n$.

■

Exemplo 2.22 Sejam $P = x\partial$ e $P_1 = \partial$. Tome $Q_1 = x$ e $R = -1$.
Assim, $P_1 Q_1 + R = \partial \cdot x + (-1) = x\partial + 1 - 1 = x\partial = P$.
Além disso, $exp(P_1) + \mathcal{N}(Q_1) = (0,1) + (1,0) = (1,1) \in \triangle^1$ e $\mathcal{N}(R) = (0,0) \in \triangle^0$.

2.3 Módulos sobre Álgebras de Weyl

Existe uma ação natural de A_n no anel de polinômios $\mathbb{K}[x]$, pois cada elemento $P \in A_n$ é um endomorfismo do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}[x]$. A ação de x_i em $\mathbb{K}[x]$ é dada pela multiplicação, enquanto que ∂_i age pela diferenciação com respeito a x_i Esta ação natural induz sobre $\mathbb{K}[x]$ uma estrutura de A_n-módulo à esquerda. De acordo com a proposição 2.8, a ação de um elemento $P = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta \in A_n$ em um elemento $g \in \mathbb{K}[x]$ pode ser escrita como

$$P(g) = \sum_\beta p_\beta(x) \frac{\partial^{\beta_1 + ... + \beta_n}(g)}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}}$$

Essa ação justifica o nome de **Operadores Lineares Diferenciais com coeficientes polinomiais** para as álgebras de Weyl.

Antes de apresentar as primeiras propriedades de $\mathbb{K}[x]$ como A_n-módulo, mostraremos o seguinte:

Lema 2.23 *Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda simples.*

(a) *Se $0 \neq u \in M$, então $M \cong R/ann_R(u)$.*

(b) *Se R não é um anel de divisão, então M é um módulo de torção.*

Demonstração: Considere a função $\varphi : R \longrightarrow M$ definida por $\varphi(1) = u$. φ é um homomorfismo de R-módulo. Como $u \neq 0$ e M é simples, φ é sobrejetiva. Temos que $ker(\varphi) = ann_R(u)$. Pelo teorema do isomorfismo para módulos, temos que $M \cong R/ann_R(u)$, o que prova o item (a).

Agora suponha que $ann_R(u) = 0$ para algum $0 \neq u \in M$. Segue do item (a) que $M \cong R$. Como M é simples, isto só pode acontecer se os ideais à esquerda de R são triviais. Mas neste caso R é um anel de divisão, contradizendo a hipótese. Assim, $ann_R(u) \neq 0$,para todo $0 \neq u \in M$, o que prova o item (b). ∎

Vamos aplicar este resultado para o A_n-módulo $\mathbb{K}[x]$.

Proposição 2.24 $\mathbb{K}[x]$ *é um* A_n*-módulo de torção simples. Além disso,*

$$\mathbb{K}[x] \cong A_n / \sum_{1}^{n} A_n \partial_i.$$

Demonstração: Primeiramente, note que 1 é um gerador de $\mathbb{K}[x]$. Agora suponha que $f \neq 0$ é um polinômio e considere o submódulo $A_n \cdot f$. Seja $x_1^{i_1}, ..., x_n^{i_n}$ um monômio de maior grau possível entre os monômios que aparecem em f com coeficientes não-nulos. Seja a seu coeficiente. Assim, $\partial_1^{i_1}, ..., \partial_n^{i_n} \cdot f = i_1!...i_n! \cdot a$ é uma constante não-nula no submódulo gerado por f. Portanto, $A_n \cdot f = \mathbb{K}[x]$. Assim $\mathbb{K}[x]$ é simples. Como A_n não é um anel de divisão, segue do lema anterior que $\mathbb{K}[X]$ é um módulo de torção. Agora 1 é um elemento não-nulo de $\mathbb{K}[x]$ que é anulado por $\partial_1, ..., \partial_n$. Portanto, o ideal à esquerda J gerado por $\partial_1, ..., \partial_n$, está contido em $ann_R(1)$. Reciprocamente, seja $P \in ann_R(1)$. Então, P pode ser escrito na forma $f + Q$, onde $Q \in J$ e $f \in \mathbb{K}[x]$. Assim, $0 = P \cdot 1 = f \cdot 1$, que implica $f = 0$. Portanto, $P = Q \in J$. Concluímos que $J = ann_R(1)$. Pelo lema anterior, temos que

$$\mathbb{K}[x] \cong A_n / \sum_{1}^{n} A_n \partial_i.$$

∎

Seja agora R um anel e M um R-módulo. Suponhamos que σ é um isomorfismo de R. Definamos um novo módulo à esquerda M_σ, como segue: Como grupo abeliano, $M = M_\sigma$ e a ação de R sobre M_σ é dada por $a \cdot u = \sigma(a)u$, onde $a \in R$ e $u \in M$. O módulo M_σ é chamado **módulo torcido de** M **por** σ. O módulo torcido M_σ herda muitas das propriedades de M que podemos resumir na seguinte:

Proposição 2.25 *Seja* R *um anel,* M *um* R*-módulo à esquerda e* σ *um automorfismo de* R*. Então:*

(a) M_σ *é simples se, e somente se,* M *é simples.*

(b) M_σ é um módulo de torção se, e somente se, M é um módulo de torção.

c) Se N é um submódulo de M, então $(\frac{M}{N})_\sigma \cong \frac{M_\sigma}{N_\sigma}$.

(d) Seja J um ideal à esquerda de R. O conjunto $\sigma(J) = \{\sigma(r) : r \in J\}$ é um ideal à esquerda de A_n e $(\frac{R}{J})_\sigma \cong \frac{R}{\sigma^{-1}(J)}$.

Demonstração: Um R-módulo M é simples se, e somente se, dados quaisquer elementos não-nulos $u, v \in M$, existe $a \in R$ tal que $au = v$. Esta equação traduz-se como $\sigma^{-1}(a).u = 0$ em M_σ, oque prova oo item (a). De maneira análoga, a equação $au = 0$ nos dá $\sigma^{-1}(a).u = 0$, provando o item (b). Para provar (c), aplicamos o teorema do isomorfismo para módulos. Provemos agora o item (d). Note que $\sigma(J)$ é um ideal à esquerda, pois σ é um automorfismo de A_n. Seja $\varphi : R \longrightarrow (\frac{R}{J})_\sigma$ um automorfismo de R-módulos definido por $\varphi(1) = 1 + J$. Se $b \in R$, então $\varphi(b) = b\varphi(1) = \sigma(b) + J$. Portanto, φ é sobrejetiva e seu núcleo é $\sigma^{-1}(J)$. Aplicando o primeiro teorema do isomorfismo, temos o resultado desejado. ■

Nós podemos utilizar a construção acima para produzir uma família infinita de A_n-módulos simples não-isomorfos dois a dois. Para isto, consideremos para cada inteiro positivo r, o automorfismo σ_r de A_n tal que $\sigma_r(x_i) = x_i$ e $\sigma_r(\partial_i) = \partial_i - x_i^r$.

Teorema 2.26 *Os módulos $\mathbb{K}[x]_\sigma$ formam uma família infinita de módulos simples e dois a dois não isomórfos sobre A_n.*

Demonstração: Sejam r, t inteiros positivos tais que $r < t$, e suponhamos que existe um isomorfismo $\varphi : K[X]_{\sigma_r} \longrightarrow K[X]_{\sigma_t}$. Como $K[X]_{\sigma_r}$ é irredutível, então ele é gerado por 1. Assim, φ é completamente determinada pela imagem de 1, digamos, $\varphi(1) = f \neq 0$. Agora, a equação $\varphi(\partial_i \cdot 1) = \partial_i \cdot \varphi(1)$ transforma-se na equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = (x_i^t - x_i^r)f.$$

O lado esquerdo da equação tem grau $\leq gr(f) - 1$. Como $f \neq 0$ e $r < t$, o lado direito tem grau $gr(f) + t$. Isto é uma contradição. Portanto, a proposição está provada. ■

Capítulo 3

A_n-módulos graduados e filtrados

3.1 Módulos graduados e filtrados

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e R uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 3.1 *Dizemos que R é **graduada** se existem $\mathbb{K}$-subespaços vetoriais R_i, $i \in \mathbb{N}$ de R tais que:*

(a) $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$,

(b) $R_i . R_j \subseteq R_{i+j}$.

*Os R_i são chamados de **componentes homogêneas** de R. Os elementos de R_i são os **elementos homogêneos** de grau i.*

O mais importante exemplo de álgebra graduada é o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Os monômios $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ com $k_1 + \cdots + k_n = m$ formam uma base para as componentes homogêneas de grau m.

Seja R uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada. Um ideal I de R é um **ideal homogêneo** se é gerado por elementos homogêneos. Neste caso, $I = \bigoplus_{i \geq 0} (I \cap R_i)$.

Agora, seja $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ outra $\mathbb{K}$-álgebra graduada. Um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\varphi : R \longrightarrow S$ é dito **graduado** se $\varphi(R_i) \subseteq S_i$ para todo $i \geq 0$. Assim, um homomorfismo graduado preserva o grau.

Os conceitos de homomorfismo graduado e ideal homogêneo são relacionados na seguinte:

Proposição 3.2 *Sejam $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ e $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ álgebras sobre $\mathbb{K}$. Então,*

(a) *O núcleo de um homomorfismo graduado de $\mathbb{K}$-álgebras $\varphi : R \longrightarrow S$ é um ideal homogêneo de R.*

(b) *Se I é um ideal homogêneo de R, então R/I é uma K-álgebra graduada.*

Demonstração:

(a) Suponha que φ é um homomorfismo graduado. Seja $a = a_0 \oplus ... \oplus a_s$ um elemento do núcleo de φ. Assim,

$$\varphi(a) = \varphi(a_0) + ... + \varphi(a_s).$$

Como φ é graduado, esta soma é direta. Assim, $a_i \in Nuc(\varphi)$ para $i = 0, ..., s$. Isto prova o item (a).

(b) Agora, seja $I = Nuc(\varphi)$ um ideal homogêneo. Então, podemos decompor o anel quociente R/I em uma soma direta de K-espaços vetoriais,

$$R/I \cong \bigoplus_{i \geq 0} (R_i/(I \cap R_i).$$

Se $a_i \in R_i$ e $a_j \in R_j$, então $(a_i + I)(a_j + J) = a_i a_j + I$ corresponde a um elemento de $R_{i+j}/(I \cap R_{i+j})$ sob este isomorfismo. Portanto, R/I é um anel graduado, o que prova (b).

■

Seja agora $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada e M um R-módulo à esquerda.

Definição 3.3 *Dizemos que M é um **R-módulo graduado**, se existem $\mathbb{K}$-subespaços vetoriais M_i, $i \in \mathbb{N}$, tais que:*

(a) $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$.

(b) $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$.

*Os M_i são as **componentes homogêneas** de grau i de M.*

Um submódulo N de M é um **submódulo graduado** se N é gerado por elementos homogêneos. Neste caso, $N = \bigoplus_{i \geq 0} (N \cap M_i)$.

Seja $M' = \bigoplus_{i\geq 0} M'_i$ outro R-módulo graduado. Um homomorfismo de R-módulos $\theta : M \longrightarrow M'$ é **graduado** se $\theta(M_i) \subseteq M'_i$. Segue também que $Nuc(\theta)$ é um submódulo homogêneo e que o módulo quociente M/N também é homogêneo.

Seja agora R uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 3.4 *Uma família $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\geq 0}$ de K-espaços vetoriais é uma **filtração** de R se*

(a) $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq ... \subseteq R,$

(b) $R = \bigcup_{i\geq 0} F_i,$

(c) $F_iF_j \subseteq F_{i+j}$, *para todo* $i, j \in \mathbb{N}$.

Uma $\mathbb{K}$-álgebra munida de uma filtração $\mathcal{F}$ é denominada **álgebra filtrada**.

Vamos mostrar agora que toda álgebra graduada é filtrada. Suponhamos que $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ é uma álgebra graduada. Consideremos os espaços vetoriais $F_k = \bigoplus_{i=0}^{k} R_i$. Claramente, $F_k \subseteq F_{k+1}$ e $R = \bigcup_{k\geq 0} F_k$. Como $F_kF_m = \bigoplus_{i+j\leq k+m} R_iR_j$, e $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$, temos que $F_k.F_m \subseteq F_{k+m}$. Portanto, $\{F_k\}_{k\geq 0}$ é uma filtração em R.

Reciprocamente, podemos utilizar uma filtração de uma álgebra para construir uma álgebra graduada. De fato, sejam R uma $\mathbb{K}$-álgebra. Suponhamos que $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ é uma filtração de R. Para construírmos a álgebra graduada, introduziremos a **função símbolo de ordem** k, que é a projeção canônica de espaços vetoriais

$$\sigma_k : F_k \longrightarrow F_k/F_{k-1}.$$

Assim, para um operador $d \in F_k$, o símbolo $\sigma_k(d)$ é não-nulo se, e somente se, $d \notin F_{k-1}$.

Consideremos agora o $\mathbb{K}$-espaço vetorial

$$gr^{\mathcal{F}}R = \bigoplus_{i\geq 0}(F_i/F_{i-1}).$$

Queremos transformá-lo em um anel graduado. Para isto basta definir a multiplicação de dois elementos homogêneos e extender por linearidade. Um elemento homogêneo de

$gr^{\mathcal{F}}R$ é da forma $\sigma_k(a)$ para algum $a \in F_k$. Seja $\sigma_m(b)$, para $b \in F_m$ um outro elemento homogêneo e defina seu produto por

$$\sigma_k(a)\sigma_m(b) = \sigma_{m+k}(ab).$$

Um cálculo simples mostra que $gr^{\mathcal{F}}R$ com esta multiplicação é uma K-álgebra graduada, com componentes homogêneas F_i/F_{i-1}.
A álgebra $gr^{\mathcal{F}}R$ é chamada **álgebra graduada de R associada** à filtração $\mathcal{F}$.

Na próxima definição utilizaremos a seguinte notação: $|\beta| = \sum_i \beta_i$, onde $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ é um elemento de $\mathbb{N}^n$.

Definição 3.5 *Para um operador não nulo $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta \in A_n(\mathbb{K})$, o máximo dos $|\beta|$ tais que $p_\beta(x) \neq 0$ é chamado* ***ordem*** *de P e é denotado por $ord(P)$. O máximo dos $|\alpha| + |\beta|$ tais que $p_{\alpha\beta} \neq 0$ é chamado de* ***ordem total*** *de P e é denotado por $ord^T(P)$. Por convenção escreveremos $ord(0) = ord^T(0) = -\infty$.*

O ***símbolo principal*** *do operador $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta = \sum_\beta p_\beta(x)\partial^\beta$ é o polinômio $\sigma(P) = \sum_{|\beta|=ord(P)} p_\beta(x)\xi^\beta \in \mathbb{K}[x,\xi] = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n]$ onde $\xi_1, ..., \xi_n$ são novas variáveis. O* ***símbolo principal total*** *é o polinômio $\sigma^T(P) = \sum_{|\alpha+\beta|=ord^T(P)} p_{\alpha\beta}x^\alpha\xi^\beta \in \mathbb{K}[x,\xi]$*

Algumas propriedades que seguem diretamente da definição são resumidas na seguinte:

Proposição 3.6 *Para $P, Q \in A_n$, temos:*

(a) *$ord(PQ) = ord(P) + ord(Q)$ e $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$.*

(b) *$ord^T(PQ) = ord^T(P) + ord^T(Q)$ e $\sigma^T(PQ) = \sigma^T(P)\sigma^T(Q)$.*

(c) *$ord(PQ - QP) \leq ord(P) + ord(Q) - 1$ e$ord^T(PQ - QP) \leq ord^T(P) + ord^T(Q) - 2$.*

(d) *$ord(P + Q) \leq max\{ord(P), ord(Q)\}$ (analogamente para ord^T)*

(e) *Se $ord(P) = ord(Q)$ e $\sigma(P)+\sigma(Q) \neq 0$, então $\sigma(P+Q) = \sigma(P)+\sigma(Q)$ (analogamente para ord^T e σ^T).*
Estamos assumindo $-\infty + k = k + (-\infty) = -\infty$. para $k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Neste trabalho discutiremos duas filtrações da álgebra de Weyl A_n : a $\mathcal{F}$-filtração e a $\mathcal{B}$-filtração.

Para cada $k \geq 0$ consideremos os seguintes conjuntos

$$F_k(A_n) := \{P \in A_n | \ ord(P) \leq k\} \quad \text{e} \quad B_k(A_n) := \left\{P \in A_n | \ ord^T(P) \leq k\right\}$$

Denotemos tais conjuntos simplesmente por $F_k = F_k(A_n)$ e $B_k = B_k(A_n)$.

Proposição 3.7 *As seguintes propriedades valem:*

(a) $B_k = F_k = \{0\}$ *para* $k \leq -1$.

(b) $B_k \subset F_k$*para* $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $B_k \subset B_{k+1}, F_k \subset F_{k+1}$*para* $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $B_k B_l \subset B_{k+l}, F_k F_l \subset F_{k+l}$*para* $k, l \in \mathbb{Z}$.

(e) $A_n = \cup_k B_k = \cup_k F_k$.

(f) $1 \in B_0 = \mathbb{K}, 1 \in F_0 = \mathbb{K}[x]$.

(g) *Cada* B_k *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão* $\binom{2n+k}{k}$.

(h) *Cada* F_k *é um* $\mathbb{K}[x]$*-módulo livre de posto* $\binom{n+k}{k}$.

Demonstração: Segue das definições de F_k e B_k. ∎

Definição 3.8 *As famílias* $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k\geq 0}$ *e* $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 0}$ *são chamadas respectivamente de* ***filtração ordem*** *e* ***filtração ordem total*** *ou* ***filtração de Bernstein****.*

Proposição 3.9 *Cada quociente* $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com dimensão* $\binom{2n+k-1}{2n-1}$.

Demonstração: A classe residual $\overline{x^\alpha \partial^\beta} = x^\alpha \partial^\beta + B_{k-1}$, com $|\alpha + \beta| = k$ gera o espaço vetorial quociente B_k/B_{k-1}. Mais ainda, eles são linearmente independente, pois uma combinação linear $\displaystyle\sum_{|\alpha+\beta|=k} \lambda_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$ pertence a B_{k-1} se, e somente se, todos os $\lambda_{\alpha\beta}$ são zero. ∎

Proposição 3.10 *Cada quociente* F_k/F_{k-1} *é um* $\mathbb{K}[x]$*-módulo livre com posto* $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Demonstração: As classes residuais $\overline{\partial^\beta} = \partial^\beta + F_{k-1}$, com $|\beta| = k$ geram o $\mathbb{K}[x]$-módulo quociente F_k/F_{k-1}. Além disso, elas são linearmente independente sobre $\mathbb{K}[x]$, pois a $\mathbb{K}[x]$-combinação linear $\sum_{|\beta|=k} \lambda_\beta(x) \partial^\beta$ pertence a F_{k-1} se, e somente se, cada $\lambda_\beta(x)$ é zero. ∎

Observação 3.11 *O anel de polinômios $\mathbb{K}[x,\xi]$ também pode ser dotado com a graduação definida pelo grau em ξ:*

$$\mathbb{K}[x,\xi] = \bigoplus_k \mathbb{K}[x,\xi]_{(k)}$$

onde

$$\mathbb{K}[x,\xi]_{(k)} = \sum_{|\beta|=k} \mathbb{K}[x]\xi^\beta.$$

*Chamaremos esta graduação de ξ-**graduação** em $\mathbb{K}[x,\xi]$.*

Proposição 3.12 *Os grupos abelianos*

$$gr^{\mathcal{B}}(A_n) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{B_k}{B_{k-1}} \quad e \quad gr^{\mathcal{F}}(A_n) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{F_k}{F_{k-1}}$$

têm uma estrutura natural de anel comutativo com 1.

Demonstração: Provemos o resultado para $\{B_k\}_{k\geq 0}$. O outro caso é análogo. Consideremos para $k,l \in \mathbb{K}$ a aplicação

$$\mu_{kl} : \frac{B_k}{B_{k-1}} \times \frac{B_l}{B_{l-1}} \longrightarrow \frac{B_{k+l}}{B_{k+l-1}}$$

definida por $\mu_{kl}(P + B_{k-1}, Q + B_{l-1}) = PQ + B_{k+l-1}$, para $P \in B_k, Q \in B_l$.

A aplicação μ_{kl} está bem definida: $PQ + B_{k+l-1}$ não depende da escolha dos representantes $P \in B_k$ e $Q \in B_l$.
Denotaremos por $\overline{P} = P + B_{k-1}$, $\overline{Q} = Q + B_{k-1}$ e $\overline{PQ}$ no lugar de $\mu_{kl}(\overline{P},\overline{Q})$.

Pela proposição 3.7, se $P \in B_k$ e $Q \in B_l$, então $PQ - Qp \in B_{k+l-1}$. Logo, $\overline{PQ} = \overline{QP}$. Mais ainda, temos que $\overline{P}(\bar{Q}\overline{R}) = \bar{P}(\overline{QR})overline P(QR) = \overline{(PQ)R} = (\overline{PQ})\overline{R} = (\overline{PQ})\overline{R}$.
Definamos um mapa

$$\mu' : gr^B(A_n) \times gr^B(A_n) \longrightarrow gr^B(A_n)$$

pela bilinearidade:

$$\mu'(\sum_k \overline{P_k}, \sum_l \overline{Q_l}) = \sum_{k,l} \overline{P_k Q_l}$$

onde $P_k \in B_k$ e $Q_l \in B_l$ para todo k,l. Escreveremos simplesmente $(\sum_k \overline{P_k})(\sum_l \overline{Q_l})$ no lugar de $\mu'(\sum_k \overline{P_k}, \sum_l \overline{Q_l})$. O mapa μ' está bem definido e define um produto em $gr^B(A_n)$. Finalmente, μ' é associativa e comutativa, pois as propriedades correspondentes valem para os mapas μ_{kl}. Como μ' é definida por bilinearidade, ela é distributiva com respeito à soma.

Denotando por $\overline{1}$ a classe residual de 1 módulo $B_{-1} = \{0\}$, temos que $\overline{1}(\sum_k P_k) = \sum_k P_k$. Assim, $\overline{1}$ é o elemento unitário de $gr^B(A_n)$. ■

Proposição 3.13 *O anel graduado $gr^{\mathcal{B}}(A_n)$ é isomorfo ao anel de polinômios $\mathbb{K}[x, \xi]$ com a graduação definida pelo grau dos polinômios.*

Demonstração: Para cada $k \geq 0$ consideremos o isomorfismo de espaços vetoriais $\eta_k : \frac{B_k}{B_{k-1}} \longrightarrow \mathbb{K}[x, \xi]_k$, definido por $\eta_k((\sum_{|\alpha+\beta|\leq k} p_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta) + B_{k-1}) = \sum_{|\alpha+\beta|=k} p_{\alpha\beta}x^\alpha\xi^\beta$. Aqui, $\mathbb{K}[x, \xi]_k$ denota o $\mathbb{K}$-espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k. A família η_k pode ser extendida por linearidade para um isomorfismo natural $\eta : gr^{\mathcal{B}}(A_n) \longrightarrow \mathbb{K}[x, \xi]$ de aneis graduados. ■

Proposição 3.14 *O anel graduado $gr^F(A_n)$ é isomorfo ao anel de polinômios $\mathbb{K}[x, \xi]$ com a ξ-graduação.*

Demonstração: A prova é análoga à da proposição anterior. ■

3.2 $\mathcal{B}$-filtrações em A_n-módulos

Para definir o conceito de módulo filtrado devemos começar com um anel filtrado. Por simplicidade daremos definições apenas para a Álgebra de Weyl com a filtração de Bernstein.

Definição 3.15 *Seja M um A_n-módulo. Uma $\mathcal{B}$-filtração em M é uma família $\Gamma = \{M_k\}_{k\geq 0}$ de $\mathbb{K}$-subespaços vetoriais de M de dimensão finita, tais que:*

(*a*) $M_k \subset M_{k+1}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(*b*) $\displaystyle\bigcup_{k\geq 0} M_k = M$.

(*c*) $B_k M_l \subset M_{k+l}$ *para todo* (k, l).

Exemplo 3.16 A filtração ordem total $\{B_k(A_n)\}_{k\geq 0}$ é uma $\mathcal{B}$-filtração de A_n como A_n-módulo.

Exemplo 3.17 Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos por $B_k(\mathbb{K}[x]) = \{f \in \mathbb{K}[x]| \ gr(f) \leq k\}$. A família $\{B_k(\mathbb{K}[x])\}_{k\geq 0}$ é uma $\mathcal{B}$-filtração do A_n-módulo $\mathbb{K}[x]$.

Exemplo 3.18 Seja $I \subset A_n$ um ideal e denotemos por $B_k(I) = B_k(A_n) \cap I$ para $k \in \mathbb{N}$. A família $\{B_k(I)\}_{k\geq 0}$ é uma $\mathcal{B}$-filtração em I, considerado como um A_n-módulo à esquerda.

Exemplo 3.19 Seja $I \subset A_n$ um ideal e defina $B_k(\frac{A_n}{I}) = \frac{B_k(A_n)+I}{I}$, para $k \in \mathbb{N}$. A família $\left\{B_k(\frac{A_n}{I}\right\}_{k\geq 0}$ é uma $\mathcal{B}$-filtração do A_n-módulo $\frac{A_n}{I}$.

De maneira análoga, podemos definir $\mathcal{F}$**-filtrações** de A_n-módulos, onde $\mathcal{F}$ é a filtração do ordem de A_n.

Para nós uma filtração em um A_n-módulo será uma $\mathcal{B}$-filtração ou uma $\mathcal{F}$-filtração.

Definição 3.20 *Seja $\Gamma = (M_k)_k$ uma filtração em um A_n-módulo M. Para cada elemento não nulo $m \in M$, chamaremos de Γ-ordem de m e denotaremos por $ord^{\Gamma}(m)$ o inteiro k tal que $m \in M_k \setminus M_{k-1}$. Denotemos por*

$$\sigma_k^{\Gamma} : M_k \longrightarrow \frac{M_k}{M_{k-1}}$$

*a projeção canônica. Assim, temos $\sigma_k^{\Gamma}(m) = m + M_{k-1}$ para $m \in M_k$. A aplicação σ_k^{Γ} é chamada k**-ésima aplicação** Γ**-símbolo associada** com a filtração Γ.*

Se Γ é uma $\mathcal{F}$-filtração, então σ_k^{Γ} é também um morfismo de $\mathbb{K}[x]$-módulos. Se $M = A_n$ e $\Gamma = \{B_k\}_k$ é a filtração ordem total em A_n (também chamada $\mathcal{B}$-filtração em A_n), o correspondente k-ésimo mapa símbolo será denotado por $\sigma_k^{\mathcal{B}}$. De modo análogo, para $\mathcal{F}$-filtração, temos o k-ésimo mapa símbolo $\sigma_k^{\mathcal{F}}$.

Observação 3.21 *Se $P \in B_k \setminus B_{k-1}$, então $(\eta_k \circ \sigma_k^B)(P) = \sigma^T(P)$. Analogamente, se $P \in F_k \setminus F_{k-1}$, então $(\eta'_k \circ \sigma_k^F)(P) = \sigma(P)$.*

Definição 3.22 *Seja M um A_n-módulo e $\Gamma = \{M_k\}_k$ uma $\mathcal{B}$-filtração ($\mathcal{F}$-filtração) em M. Definimos $gr^{\Gamma}(M) := \bigoplus_k \frac{M_k}{M_{k-1}}$.*

Observação 3.23 *Como cada $\frac{M_k}{M_{k-1}}$ é um grupo abeliano e um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, temos que $gr^{\Gamma}(M)$ é um grupo abeliano e também um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.*
Um elemento em $gr^{\Gamma}(M)$ é uma soma finita $\displaystyle\sum_k \overline{m_k}$, onde $\overline{m_k} = m + M_{k-1}$, com $m \in M_k$.

Proposição 3.24 *Seja M um A_n-módulo e $\Gamma = \{M_k\}_{k\geq 0}$ uma $\mathcal{B}$-filtração em M. Então, $gr^{\Gamma}(M)$ tem uma estrutura de $gr^{\mathcal{B}}(A_n)$-módulo.*

Demonstração: Consideremos a aplicação $\nu : gr^{\mathcal{B}}(A_n) \times gr^{\Gamma}(M) \longrightarrow gr^{\Gamma}(M)$, definida pela bilinearidade das aplicações $\nu : \frac{B_k}{B_{k-1}} \times \frac{M_l}{M_{l-1}} \longrightarrow \frac{M_{k+l}}{M_{k+l-1}}$, definida por $\nu_k(\overline{P_k}, \overline{m_l}) = \overline{P_k m_l}$. Não é difícil ver agora que a aplicação ν define sobre $gr^{\Gamma}(M)$ uma estrutura de $gr^{\mathcal{B}}(A_n)$-módulo. ∎

Definição 3.25 *O módulo graduado $gr^{\Gamma}(M)$ será chamado* ***módulo graduado associado*** *à filtração $\Gamma = \{M_k\}_{k \geq 0}$ em M.*

A seguinte proposição não é difícil de provar.

Proposição 3.26 *Seja M um A_n-módulo, $N \subset M$ um submódulo de M e $\Gamma = \{M_k\}_k$ uma filtração em M. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos por $N_k := M_k \cap N$ e $(M/N)_k := (M_k + N)/N$. Então,*

(a) *A família $\Gamma' = \{N_k\}_k$ é uma filtração em N.*

(b) *A família $\Gamma'' = \{(M/N)_k\}_k$ é uma filtração em M/N.*
Essas filtrações serão chamadas ***filtrações induzidas*** *por Γ em N e M/N, respectivamente.*

Proposição 3.27 *Seja M um A_n-módulo, $N \subset M$ um submódulo de M e $\Gamma = \{M_k\}_k$ uma filtração em M. Então existe uma sequência exata canônica de módulos graduados*

$$0 \longrightarrow gr^{\Gamma'}(N) \longrightarrow gr^{\Gamma}(M) \longrightarrow gr^{\Gamma''}(M/N) \longrightarrow 0.$$

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos uma sequência exata de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow N_k \longrightarrow M_k \longrightarrow (M/N)_k \longrightarrow 0.$$

Como $(M/N)_k = \frac{M_k+N}{N} \cong \frac{M_k}{M_k \cap N} = \frac{M_k}{N_k}$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência exata canônica de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow \frac{N_k}{N_{k-1}} \longrightarrow \frac{M_k}{M_{k-1}} \longrightarrow \frac{M_k + N}{M_{k-1} + N} \longrightarrow 0.$$

∎

Corolário 3.28 *Seja I um ideal em A_n. Então*

$$gr^{\mathcal{B}}(\frac{A_n}{I}) \cong \frac{gr^{\mathcal{B}}(A_n)}{gr^{\mathcal{B}}(I)} \;\; e \;\; gr^{\mathcal{F}}(\frac{A_n}{I}) \cong \frac{gr^{\mathcal{F}}(A_n)}{gr^{\mathcal{F}}(I)}.$$

3.3 Filtrações Boas

Definição 3.29 *Seja M um A_n-módulo e $\Gamma = \{M_k\}_{k\geq 0}$ uma $\mathcal{B}$-filtração. Dizemos que Γ é uma **filtração boa** se $gr^{\Gamma}(M)$ é um $gr^{\mathcal{B}}(A_n)$-módulo finitamente gerado.*

Proposição 3.30 *Seja M um A_n-módulo e $\Gamma = \{M_k\}_{k\geq 0}$ uma $\mathcal{B}$-filtração em M. Se $gr^{\Gamma}(M)$ é um $\mathbb{K}[x,\xi]$-módulo finitamente gerado, então M é noetheriano.*

Demonstração: Como A_n é um anel noetheriano, basta provar que M é finitamente ge rado. Assuma que $\overline{m_1}, ..., \overline{m_r}$ é um sistema de geradores homogêneos de $gr^{\Gamma}(M)$. Suponha que $m_i \in M_{k_i}$ para algum $k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., r$. Provemos que o conjunto $\{m_1, ..., m_r\}$ gera M.

Denotemos por M' o submódulo de M gerado por $\{m_1, ..., m_r\}$. Suponha que $m \in M$. Usando indução em $ord^{\Gamma}(m)$, provemos que $m \in M'$.
Se $ord^{\Gamma} \leq 0$, não há nada para provar. Agora, suponha que todo elemento $m' \in M$ tal que $ord^{\Gamma}(m') \leq k$ pertence a M' para algum inteiro $k > 0$. Seja $m \in M$ tal que $ord^{T}(m) = k+1$. Escrevamos

$$\overline{m} = \sum_i f_i \overline{m_i}$$

para alguns polinômios homogêneos $f_i \in \mathbb{K}[x,\xi]$ onde $gr(f_i) = k+1-k_i$.
Escrevendo $m' = m - \sum_i P_i(x,\partial)m_i$, onde $P_i = P_i(x,\partial)$ é um operador diferencial satisfazendo $\sigma^{T}(P_i) = f_i$. A classe residual de m' módulo M_{k+1} é zero e então, por indução, $m' \in M'$. Assim, M é finitamente gerado. ∎

Observação 3.31 *Seja I um ideal de A_n. Então:*

(a) *A $\mathcal{B}$-filtração induzida em I é uma filtração boa.*

(b) *A $\mathcal{B}$-filtração induzida em $\frac{A_n}{I}$ é uma filtração boa.*

Proposição 3.32 *Todo A_n-módulo finitamente gerado M admite uma filtração boa.*

Demonstração: Seja $\{m_1, ..., m_r\}$ é um sistema de geradores para M. Defina $M_k := \sum_j B_k m_j$ para $k \in \mathbb{N}$. A família $(M_k)_k$ é uma filtração boa em M.

∎

Proposição 3.33 *Seja M um A_n-módulo e $\Gamma = \{M_k\}_{k\geq 0}$ uma $\mathcal{B}$-filtração em M. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) Γ é uma $\mathcal{B}$-filtração boa em M.

(ii) Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{k+l} = B_l M_k$ para todo $l \geq 0$ e para todo $k \geq k_0$.

Demonstração: Suponhamos ii). Provaremos que $gr^{\Gamma}(M)$ é gerado por $M_0 \oplus M_1/M_0 \oplus \cdots \oplus M_{k_0}/M_{k_0-1}$.

Afirmação: M_l é um espaço vetorial de dimensão finita.

De fato, se $m \in M_k$ e $k > k_0$, escreva $k = k_0 + i$, com $i > 0$. Como $M_k = B_i M_{k_0}$, temos $m = \sum_{j=1}^{r} P_j m_j$, onde $P_j \in B_i$ e $m_1, ..., m_r$ é uma base do $\mathbb{K}$-espaço vetorial M_{k_0}. Assim, podemos escrever $m + M_{k-1} = \overline{m} = \sum_j P_j m_j + M_{k-1} = \sum_j (P_j + B_{i-1})(m_j + M_{k_0-1}) = \sum_j \overline{P_j}\,\overline{m_j}$.

Reciprocamente, suponhamos i). Sejam $\overline{m_1}, ..., \overline{m_r}$ um sistema de geradores homogêneos de $gr^{\Gamma}(M)$. Suponha que $m_j \in M_{k_j} \setminus M_{k_j-1}$ para $j = 1, ..., r$. Escreva $k_0 := max\{k_j\}$. Provemos por indução em l que $M_{k+l} = B_l M_k$ para todo $l \geq 0$ e todo $k \geq k_0$.

Se $l = 0$, nada temos a provar.

Suponha que para algum $l > 0$ o resultado é verdadeiro para $l - 1$. Seja $m \in M_{k+l}$ para $k \geq k_0$. Assim, podemos escrever

$$\overline{m} = m + M_{k+l-1} = \sum_j f_j \overline{m_j}$$

para alguns polinômios homogêneos $f_j \in \mathbb{K}[x, \xi]$ de grau $k + l - k_j$. Vamos escrever $m' = m + M_{k+l-1} - \sum_j P_j(x, \partial) m_j$ para algum $P_j \in B_{k+l-1}$, tal que $\sigma^T(P_j) = f_j$. Logo, $m' \in M_{k+l-1}$ e, por indução, $m' \in B_{l-1} M_k$. Como $k - k_j \geq 0$, temos também que $B_{k+l-k_j} = B_l B_{k-k_j}$. Então,

$m = m' + \sum_j P_j(x, \partial) m_j$. Como $P_j(x, \partial) \in B_{k+l-k_j} = B_l B_{k-k_j}$, temos $P_j(x, \partial) m_j \in B_l B_{k-k_j} M_{k_j} \subset B_l M_k$. ■

Proposição 3.34 *Sejam M um A_n-módulo, $\Gamma = \{M_k\}_k$ e $\Gamma' = \{M'_k\}_k$ duas $\mathcal{B}$-filtrações em M. Então:*

(i) Se Γ é uma filtração boa, então existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M_k \subset M'_{k+k_1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii) *Se Γ e Γ' são filtrações boas, então existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $M'_{k-k_2} \subset M_k \subset M'_{k+k_2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração:

(i) Pela proposição anterior, existe $k_0 \geq 0$ tal que $M_{k+l} = B_l M_k$ para todo $l \geq 0$ e para todo $k \geq k_0$. Como M_{k_0} é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{k_0} \subset M'_{k_1}$. Se $k \geq k_0$, temos $M_k = M_{k-k_0+k_0} = B_{k-k_0} M_{k_0} \subset B_{k-k_0} M'_{k_1} \subset M'_{k-k_0+k_1} \subset M'_{k+k_1}$.
Se $0 \leq k \leq k_0$, então $M_k \subset M_{k_0} \subset M'_{k_1} \subset M'_{k+k_1}$.

(ii) Pelo item (i), existem j_1 e $j_2 \in \mathbb{N}$, tais que $M_k \subset M'_{k+j_1}$ e $M'_k \subset M_{k+j_2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Definindo $k_2 = max\{j_1, j_2\}$, temos o resultado desejado.

■

De maneira análoga, temos a seguinte definição:

Definição 3.35 *Sejam M um A_n-módulo e $\Gamma = \{M_k\}_k$ uma $\mathcal{F}$-filtração. Dizemos que Γ é uma **filtração boa** se $gr^{\mathcal{F}}(M)$ é um $gr^{\mathcal{F}}(A_n)$-módulo finitamente gerado.*

Capítulo 4

A_n-módulos holonômicos

Utilizando o que foi estudado no capítulo anterior sobre filtrações e graduações , definiremos uma dimensão para A_n-módulos. Esta é uma invariante muito útil e vem associada com outra invariante: a multiplicidade. A primeira seção contém um resultado que é a chave para a definição de dimensão.

4.1 O Polinômio de Hilbert

Definição 4.1 *Um **polinômio numérico** é um polinômio $p(t)$ de $\mathbb{Q}(t)$ tal que $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo inteiro $n \gg 0$.*
*A **função diferença** de uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$.*

Para r um inteiro positivo, o polinômio $t(t-1)...(t-r+1)/r! \in \mathbb{Q}[t]$ será denotado por $\binom{t}{r}$. Isto é,

$$\binom{t}{r} = t(t-1)...(t-r+1)/r!$$

Se $r = 0$, definamos $\binom{t}{r} = 1$.

Lema 4.2 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(1)$\Delta\binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$
(2) *Seja $p(t) \in \mathbb{Q}(t)$ um polinômio numérico. Então existem inteiros $c_0, ..., c_k$ tais que*

$$p(t) = \sum_{0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i}$$

Em particular, $p(n) \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$
(3) *Seja $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma função. Suponha que existe um polinômio numérico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$*

tal que $\Delta f(n) = q(n)$, para todo $n \gg 0$. Então, existe um polinômio numérico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ talque $f(n) = p(n)$, para todo $n \gg 0$.

Demonstração: Veja *[3](Coutinho, S.C., A Primer of Algebraic D-modules, pag. 75)* ■

Teorema 4.3 *Seja $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$ um módulo graduado finitamente gerado sobre o anel de polinômios $K[x_1, ..., x_n]$. Então, existe um polinômio $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ e um inteiro positivo n tais que*

$$\sum_0^s dim_K(M_i) = \chi(s)$$

para todo $s \geq n$.

Demonstração: A prova será feita por indução no número n de varáveis. Se $n = 0$, o problema se reduzirá ao corpo base K. Neste caso, o módulo finitamente gerado M é um espaço vetorial de dimensão finita. Portanto, ele possui apenas um número finito de componentes homogêneas. Assim,

$$\sum_0^s dim_K M_i = dim_K M,$$

para $s \gg 0$, e podemos escolher $\chi(t) = dim_K M$, uma constante.

Suponhamos, por indução, que o teorema vale para todo módulo graduado finitamente gerado sobre $K[x_1, ..., x_{n-1}]$. Seja $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$ um módulo graduado finitamente gerado sobre $K[x_1, ..., x_n]$. Defina uma função$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ por

$$f(s) = \sum_{-\infty}^s dim_K M_i$$

onde $M_i = 0$ se $i \leq 0$. Seja $\varphi_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ a função linear de espaços vetoriais definida pela multiplicação por x_n. Sejam $Q_i = Ker(\varphi_i)$ e $L_i = coker(\varphi_i)$. Consideremos a seguinte sequência exata de espaços vetoriais:

$$0 \longrightarrow Q_{i-1} \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \longrightarrow L_i \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Agora, $Q = \bigoplus_{i\geq 0} Q_i$ e $L = \bigoplus_{i\geq 0} L_i$ são módulos graduados finitamente gerados sobre $K[x_1, ..., x_n]$. Eles são respectivamente o kernel e o cokernel do endomorfismo de M definido pela multiplicação por x_n. Mais ainda, os elementos de Q e L são anulados por

x_n, portanto eles são de fato graduados finitamente e gerados sobre $K[x_1, ..., x_{n-1}]$. Assim, por indução, existem polinômios $\chi_1(t), \chi_2(t) \in \mathbb{Q}(t)$ tais que

$$\chi_1(s) = \sum_0^s dim_K Q_i, \chi_2(s) = \sum_0^s dim_K L_i,$$

para $s \gg 0$.

Poe outro lado, as dimensões dos espaços vetoriais em $(*)$, são relacionadas pela fórmula

$$dim_K Q_{i-1} - dim_K M_{i-1} + dim_K M_i - dim_K L_i = 0.$$

Adicionando-os para $0 \leq i \leq s$ e $s \gg 0$, obtemos

$$\chi_1(s-1) + \Delta f(s) - \chi_2(s) = 0.$$

Portanto $\Delta f(s)$ é um polinômio numérico para $s \gg 0$. Podemos agora concluir do lema (4.2) que $f(s)$ é um polinômio numérico para todo $s \gg 0$, como queríamos provar. ■

Definição 4.4 *O polinômio $\chi(t)$ é conhecido como o **Polinômio de Hilbert** do módulo M.*

4.2 Dimensão e Multiplicidade de A_n-módulos

Seja M um A_n-módulo finitamente gerado. Suponhamos que $\Gamma = \{M_k\}_k$ é uma filtração boa de M com respeito à Filtração de Bernstein $\mathcal{B}$. Denotemos por $\chi(t, \Gamma, M)$ o polinômio de Hilbert do módulo graduado $gr^\Gamma M$ sobre o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, \xi]$ (Lembremos que pela proposição 3.13, $gr^\mathcal{B}(A_n) \cong \mathbb{K}[x, \xi]$). Pelo teorema (4.3), temos para $t \gg 0$,

$$\chi(t, \Gamma, M) = \sum_0^t dim_K(M_i/M_{i-1}) = dim_K(M_t).$$

A última igualdade acima segue do fato de dim_K ser aditiva sobre sequências extas de espaços vetoriais.

Definição 4.5 *A **dimensão** $d(M)$ de M é o grau do polinômio $\chi(t, \Gamma, M)$.*
*Seja $a_{d(M)}$ o coeficiente líder de $\chi(t, \Gamma, M)$. A **multiplicidade** de M é $m(M) = d!a_{d(M)}$.*

Observação 4.6 *As definições de dimensão e multiplicidade aparentemente dependem da boa filtração Γ da qual o polinômio de Hilbert é calculado. Vamos mostrar que estas* *definições não dependem da filtração escolhida. Suponhamos que Γ e Γ' são duas boas filtrações de M. Pela proposição 3.34(ii), existe k, tal que $M'_{j-k} \subseteq M_j \subseteq M'_{j+k}$. Em particular, $dim_K M'_{j-k} \leq dim_K M_j \leq dim_K M'_{j+k}$. Concluímos do teorema 4.3 que para $j \gg 0$*

$$\chi(j-k,\Gamma,M') \leq \chi(j,\Gamma,M) \leq \chi(k+j,\Gamma',M').$$

Como o comportamento de um polinômio no ∞ é determinado pelo seu termo líder, segue que $\chi(t,\Gamma',M)$ e $\chi(t,\Gamma,M)$ têm os mesmo grau e o mesmo coeficiente líder. Portanto, $d(M)$ e $m(M)$ são independentes da escolha da boa filtração de M.

Exemplo 4.7 Seja M o A_n-módulo A_n. A Filtração de Bernstein $\mathcal{B}$ é uma boa filtração de M. Mais ainda, pela proposição 3.7(g), a dimensão de B_k como $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $\binom{k+2n}{2n}$. Portanto, $\chi(t,B,M) = \binom{t+2n}{2n}$. Como um polinômio em t tem grau $2n$ e coeficiente líder $1/(2n)!$. Assim, $d(A_n) = 2n$ e $m(A_n) = 1$.

Exemplo 4.8 Um outro A_n-módulo conhecido é $K[x] = K[x_1,...,x_n]$. No exemplo 3.17 definimos uma filtração Γ de $K[x]$ tal que M_k é o espaço de todos os polinômios de grau $\leq k$. Como B_i contém os polinômios em $x_1,...,x_n$ de grau i temos que $B_i M_k = M_{k+i}$. Portanto, Γ é uma boa filtração. Por outro lado, $dim_K M_k = \binom{n+k}{n}$. Assim,
$\chi(t,\Gamma,M) = \binom{n+t}{n}$ é um polinômio de grau n e coeficiente líder $1/n!$. Portanto
$d(K[x]) = n$ e $m(K[x]) = 1$.

Seja M um A_n-módulo finitamente gerado e Γ uma boa filtração de M com respeito à $\mathcal{B}$. Seja N um submódulo de M. Denote por Γ' e Γ'' as filtrações induzidas por Γ em N e M/N, respectivamente. Segue da proposição 3.27 que temos uma sequência exata de $\mathbb{K}[x,\xi]$-módulos

$$0 \longrightarrow gr^{\Gamma'}N \longrightarrow gr^{\Gamma}M \longrightarrow gr^{\Gamma''}M/N \longrightarrow 0.$$

Como Γ é boa, $gr^{\Gamma}M$ é finitamente gerado. Mas $\mathbb{K}[x,\xi]$ é um anel noetheriano. Portanto, $gr^{\Gamma'}N$ e $gr^{\Gamma''}(M/N)$ também são finitamente gerados. Portanto, Γ' e Γ'' são boas filtrações.

Por outro lado, como a sequência de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow M'_k/M'_{k-1} \longrightarrow M_k/M_{k-1} \longrightarrow M''_k/M''_{k-1} \longrightarrow 0$$

é exata , temos que

$$dim_K(M'_k/M'_{k-1}) + dim_K(M''_k/M''_{k-1}) = dim_K(M_k/M_{k-1})$$

Somando estes termos para $k = 0, 1, ..., s$, para $s \gg 0$, obtemos

$$\chi(s, \Gamma', N) + \chi(s, \Gamma'', M/N) = \chi(s, \Gamma, M).(I)$$

Teorema 4.9 *Seja M um A_n-módulo finitamente gerado e N um submódulo de M.*
(1)$dim(M) = max\{d(N), d(M/N)\}$
(2) Se $d(N) = d(M/N)$, então $m(M) = m(N) + m(M/N)$.

Demonstração: Como M é finitamente gerado, ele admite uma boa filtração Γ. Seja Γ' e Γ'' as boas filtrações de N e M/N induzidas por Γ. Assim, (I) para um infinito número de valores de s. Portanto, temos uma igualdade de polinômios:

$$\chi(t, \Gamma', N) + \chi(t, \Gamma'', M/N) = \chi(t, \Gamma, M).$$

Como $d(M)$ corresponde ao grau de $\chi(t, \Gamma, M)$, temos que

$$dim(M) \leq max\{d(N), d(M/N)\}.$$

Mas os coeficientes líderes desses polinômios são positivos. Assim, devemos ter igualdade na fórmula acima, o que prova (1).

Agora, se $d(M/N) = d(N)$, então todos os polinômios têm o mesmo grau. Assim, o termo líder de $\chi(t, \Gamma, M)$ é a soma dos termos líderes de $\chi(t, \Gamma', N)$ e $\chi(t, \Gamma'', M/N)$ e assim o item (2) está provado. ∎

Este teorema é muito útil para calcular a dimensão de alguns módulos. Já sabemos que $d(A_n) = 2n$. Podemos usar o teorema para calcular a dimensão e a multiplicidade de módulos livres de posto finito r: ele tem dimensão $2n$ e multiplicidade r. Isto segue do corolário abaixo.

Corolário 4.10 *Sejam $M_1, ..., M_k A_n$-módulos finitamente gerados, e $M = M_1 \oplus ... \oplus M_k$.*
(1)$d(M) = max\{d(M_1), ..., d(M_k)\}$.
(2) Se $d(M) = d(M_i)$ para $1 \leq i \leq k$, então $m(M) = \sum_1^k m(M_i)$.

Demonstração: A prova segue por indução se aplicarmos o teorema anterior à sequência exata

$$0 \longrightarrow M_k \longrightarrow M \longrightarrow M_1 \oplus ... \oplus M_{k-1} \longrightarrow 0.$$

∎

Corolário 4.11 *Seja M um A_n-módulo finitamente gerado. Então $d(M) \leq 2n$.*

Demonstração: Suponha que M é gerado por r elementos. Então existe um homorfismo sobrejetivo $\varphi : A_n^r \longrightarrow M$. Segue do teorema que $d(A_n^r) = max\{d(M), d(ker\varphi)\}$. Como $d(A_n^r) = 2n$, pelo corolário anterior, concluímos que $d(M) \leq 2n$. ■

Este limite superior pode diminuir se o módulo é um quociente de A_n por um ideal à esquerda.

Corolário 4.12 *Seja I um ideal à esquerda não nulo de A_n. Então $d(A_n/I) \leq 2n - 1$.*

Demonstração: Primeiro considere o caso de um ideal cíclico à esquerda. Seja $d \in A_n$, e ponha $I = A_n d$. Então, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\theta} A_n \longrightarrow A_n/A_n d \longrightarrow 0$$

onde o mapa θ é definido por $\theta(a) = ad$, para todo $a \in A_n$. Suponha, por contradição, que $d(A_n/A_n d) = 2n$. Então, pelo torema 4.9.(2), temos que

$$m(A_n) = m(A_n) + m(A_n/A_n d).$$

Como $m(A_n) = 1$ e a multiplicidade é um número positivo, esta equação é impossível. Portanto$d(A_n/A_n d) \leq 2n - 1$.

Agora, vamos para o caso geral. Seja I um ideal à esquerda não-nulo de A_n e escolha $0 \neq d \in I$. Como $A_n d \subseteq I$, temos que A_n/I é um quociente de $A_n/A_n d$. Como a dimensão do último é $\leq 2n - 1$. Pelo teorema 4.9.(1), temos o resultado desejado. ■

O corolário 4.11 fornece uma cota superior para a dimensão de um A_n-módulo finitamente gerado. Agora estabeleceremos uma cota inferior. Para isto precisaremos do seguinte resultado:

Lema 4.13 *Seja M um A_n-módulo à esquerda finitamente gerado com uma filtração Γ com respeito a $\mathcal{B}$. Suponhamos que $\Gamma_0 \neq 0$. A transformação $\mathbb{K}$-linear $\varphi : B_i \longrightarrow Hom_K(M_i, M_{2i})$, que associa a cada $a \in B_i$ a transformação $\varphi_a(u) = au$ é injetiva.*

Demonstração: Devemos provar que se $a\Gamma_i \neq 0$, então $0 \neq a \in B_i$. provaremos isto por indução em i. Se $i = 0$, então $B_0 = K$ e temos o resultado para $\Gamma_0 \neq 0$. Isto é verdade por hipótese. Suponha que se $0 \neq b \in B_{i-1}$, então $b\Gamma_{i-1} \neq 0$. Seja a um elemento não-nulo de B_i. Se $a\Gamma_i = 0$, então $a \notin K$. Portanto, a forma canônica de a tem um termo $cx^\alpha \partial^\beta$ com $c \in K - \{0\}$ e $|\alpha| + |\beta| > 0$. Suponha que $\alpha_i \neq 0$ para este monômio. Então $\alpha_i c x^{\alpha - e_i} \partial^\beta$ é um somando na forma canônica de $[a, \partial_i]$. Assim, $[a, \partial_i]$ é um elemento não-nulo de B_{i-1}. Como $a\Gamma_i = 0$, concluímos que

$$[a, \partial_i]\Gamma_{i-1} \subseteq a\partial_i\Gamma_{i-1}.$$

Mas $\partial_i\Gamma_{i-1} \subseteq \Gamma_i$. Portanto $[a, \partial_i]\Gamma_{i-1} = 0$, o que contradiz a hipótese de indução. De modo análogo, podemos encontrar uma contradição assumindo que $\beta_i \neq 0$. Dessa forma, o lema está provado. ∎

Teorema 4.14 *Se M é um A_n-módulo à esquerda finitamente gerado, então $d(M) \geq n$.*

Demonstração: Escolhamos um conjunto de geradores para M e seja Γ uma boa filtração obtida pelos geradores de grau zero. Então, $\Gamma \neq 0$. Seja $\chi(t) = \chi(t, \Gamma, M)$ o correspondente polinômio de Hilbert.

Pelo lema anterior, B_i pode ser mergulhado em $Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$. Em particular,

$$dim_K B_i \leq dim_K(Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i})).$$

Mas $Hom_K(\Gamma_i, \Gamma_{2i})$ tem dimensão $dim_K\Gamma_i.dim_K\Gamma_{2i}$. Assim, assumindo que $i \gg 0$, temos que $dim_K B_i \leq \chi(i)\chi(2i)$.

Por outro lado, $dim_K B_i = \binom{i+2n}{2n}$ é um polinômio em i de grau $2n$. Portanto, como um polinômio em $i, \chi(i)\chi(2i)$ deve ter grau $\geq 2n$. Mas o grau de $\chi(i)\chi(2i)$ é $2d(M)$. Assim, $d(M) \geq n$, com queríamos mostrar.

∎

Observação 4.15 *Esta desigualdade foi provada pela primeira vez por I.N.Bernstein e é frequentemente chamada de* ***Desigualdade de Bernstein.***

4.3 Módulos Holonômicos

Um A_n-módulo à esquerda finitamente gerado é **holonômico** se é zero ou se tem dimensão n. Recordemos que pela desigualdade de Bernstein, que este é o menor valor que pode assumir a dimensão de um A_n-módulo não-nulo. Já sabemos que $K[x_1, ..., x_n]$ é um exemplo de A_n-módulo holonômico. Também sabemos que A_n não é um A_n-módulo holonômico, pois tem dimensão $2n$.

Não é dificil construir módulos holonômicos se $n = 1$. De fato, seja $I \neq 0$ um ideal à esquerda de A_1. Pelo corolário 4.12, $d(A_1/I) \leq 1$. Se $I \neq A_1$, então pela desigualdade de Bernstein, $d(A_1/I) = 1$. Portanto A_1/I é um A_1-módulo holonômico. Esta é uma rica fonte de exemplos que utilizaremos com a ajuda da próxima proposição.

Proposição 4.16 *Seja n um inteiro positivo.*

(i) Submódulos e módulos quocientes de A_n-módulos holonômicos são holonômicos.

(ii) Somas finitas de A_n-módulos holonômicos são holonômicos.

Demonstração: Estas afirmativas seguem da desigualdade de Bernstein.(1) Sejam M um A_n-módulo à esquerda e N um submódulo de M. Pelo teorema 4.8(2), $d(N) \leq d(M)$ e $d(M/N) \leq d(M)$. Como $d(M) = n$, utilizando a desigualdade de Bernstein, deduzimos que $d(N) = d(M/N)$ são também iguais a n. Assim, N e M/N são também holonômicos. Agora, para provar (2) aplicamos o corolário 4.10 e o item (1). O resultado segue. ■

Corolário 4.17 *A_1-modulos de torção finitamente gerados são holonômicos.*

Demonstração: Sejam M um A_1-módulo de torção finitamente gerado. Suponha que ele é gerado por $u_1, ..., u_r$. Como M é de torção, para cada $i = 1, 2, ..., r$ existe $0 \neq b_i \in A_1$ tal que $b_i u_i = 0$. portanto $A_1 u_i$ é um quociente de $A_1/A_1 b_i$ que é um módulo holonômico. Assim cada $A_1 u_i$ é holonômico. Como M é a soma dos $A_1 u_i$, para $i = 1, 2, ..., r$, então pela proposição acima, M é holonômico. ■

É fácil construir A_1-módulos de torção. Por exemplo, se $0 \neq I \subseteq J$ são ideais à esquerda de A_1. Então o quociente I/J é um A_1-módulo de torção. Temos ainda a seguinte proposição:

Proposição 4.18 *A_n-módulos holonômicos são módulos de torção.*

Demonstração: Seja M um A_n-módulo à esquerda holonômico. Suponha que $0 \neq u$ é um elemento de M. Considere o mapa $\varphi : A_n \longrightarrow M$, definido por $\varphi(a) = au$. Como $im\varphi \subseteq M$, segue-se que $d(Im\varphi) = n$. Assim, pelo teorema 4.9, temos

$$2n = d(A_n) = d(ker\varphi).$$

Em particular, $ker\varphi \neq 0$, e u é um elemento de torçao de M. ■

Muitas propriedades interessantes dos módulos holonômicos seguem do fato de que eles são artinianos.

Teorema 4.19 *Módulos holonômicos são artinianos. Consequentemente tem comprimento finito.*

Demonstração: Seja M um A_n-módulo à esquerda holonômico. Suponhamos que

$$M = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_r$$

é uma cadeia decrescente de submódulos de M. Pelo teorema 4.9 e pela proposição 4.16(i), segue que $m(N_i) = m(N_{i+1}) + m(N_i/N_{i+1})$. Pondo isto tudo junto, temos

$$m(M) = \sum_{0}^{r-1} m(N_i/N_{i+1}) + m(N_r) \geq r.$$

Portanto, M não pode ter uma cadeia decrescente com mais de r submódulos. Em particular, M não pode ter uma cadeia infinita decrescente. ■

Por outro lado, nem todos os A_n-módulos são artinianos. Por exemplo, A_n visto como um módulo sobre si próprio não é artiniano. Por exemplo

$$A_n x_n \supseteq A_n x_n^2 \supseteq \ldots$$

é uma cadeia infinita decrescente de submódulos de A_n.

Corolário 4.20 *Um A_n-módulo holonômico de multiplicidade 1 é simples.*

Demonstração: Seja M um módulo à esquerda holonômico de multiplicidade 1 e suponhamos que N é um submódulo não nulo de M. Então N e M/N também são holonômicos. Portanto, pelo teorema 4.16, temos que $m(M) = m(N) + m(M/N)$. Como $m(M) = 1$ e $N \neq 0$, temos que $M/N = 0$. Assim, $M = N$ e por tanto, M é simples. ■

Os módulos holonômicos são cíclicos. Para demostrar isto, precisaremos do seguinte resultado, cuja prova podemos encontrar em *[3](Coutinho, S.C., A Primer of Algebraic D-modules pag. 90)*.

Teorema 4.21 *Seja R um anel noetheriano à esquerda e simples e seja M um R-módulo à esquerda finitamente gerado. Se M é artiniano mas R não é artiniano (como R-módulo à esquerda), então M é um módulo cíclico.*

Corolário 4.22 *Módulos holonômicos são cíclicos.*

Demonstração: Sabemos, pelo teorema 4.19 que um A_n-módulo holonômico deve ser artiniano. Vimos também que A_n não é artiniano. Pelo teorema anterior, o resultado segue. ■

4.4 Mais exemplos

Agora construiremos uma família de A_n-módulos holonômicos que é muito importante em aplicações. Necessitaremos de um lema técnico cuja prova pode ser encontrada em Coutinho.

Lema 4.23 *Seja M um A_n-módulo à esquerda com uma filtração Γ com respeito à filtração de Bernstein de A_n. Suponhamos que existe constantes c_1, c_2 tais que para $j \gg 0$*

$$d(M_j) \leq c_1 j^n/n! + c_2(j+1)^{n-1}.$$

Então M é um A_n-módulo holonômico cuja multiplicidade não pode exceder c_1. Em particular M é finitamente gerado.

Teorema 4.24 ***(Berstein)*** *Seja $f \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio não-nulo. O A_n-módulo $\mathbb{K}[x]_f$ é holonômico.*

Demonstração: Ponhamos $N = \mathbb{K}[x]_f$ e $gr(f) = d \geq 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos

$$N_k = \left\{ g/f^k \in N | \ \ gr(g) \leq (d+1)k \right\}.$$

Provemos que a família $\Gamma = \left\{ N_k \right\}_k$ é uma $\mathcal{B}$-filtração em N.
Claramente $N_k \subset N_l$ para $k \leq l$. Agora, suponhamos que $g/f^k \in N_k$. Assim, temos $gr(x_i g) = gr(g) + 1 \leq (d+1)k + 1 \leq (d+1)(k+1)$. Isto mostra que $x_i N_k \subset N_{k+1}$. Temos também que $\partial_i(\frac{g}{f^k}) = \frac{\partial_i(g)f - kg\partial_i(f)}{f^{k+1}}$ e $gr(\partial_i(g)f - kg\partial_i(f)) \leq d + gr(g) - 1 \leq d - 1 + (d+1)k \leq (d+1)(k+1)$. Isto prova que $\partial_i N_k \subset N_{k+1}$. Então, $B_1 N_k \subset N_{k+1}$. Como $B_l = (B_1)^l$, temos $B_l N_k \subset N_{k+l}$.
provemos agora que $N = \cup_k N_k$. Para finalizar, tome $g/f^k \in N$ e suponhamos que $gr(g) = m$. então, $\frac{g}{f^k} = \frac{gf^m}{f^{k+m}}$ e $gr(gf^m) = m + dm \leq (d+1)(k+m)$. Isto prova que $g/f^k \in N_{m+k}$. Portanto, $\left\{ N_k \right\}_k$ é uma $\mathcal{B}$-filtração em $N = \mathbb{K}[x]_f$.

Notemos que a dimensão do $\mathbb{K}$-espaço vetorial N_k é limitada pelo número de monômios x^α em $\mathbb{K}[x]$ com grau $|\alpha| \leq (d+1)k$. Este número é

$$\binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k)$$

onde $p(t)$ é o polinômio em t com coeficientes racionais e grau menor ou igual a $n-1$. Então existe um número inteiro $c_2 > 0$, tal que

$$dim_{\mathbb{K}}(N_k) \leq \binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k) \leq \frac{(d+1)^n k^n}{n!} + c_2(k+1)^{n-1}$$

para $k \gg 0$. Pelo lema anterior, $\mathbb{K}[x]_f$ é holonômico. ∎

Proposição 4.25 *Seja $f = x_1$. Então:*

(*i*) $\mathbb{K}[x]_f = A_n \frac{1}{f}$.

(*ii*) $Ann_{A_n}(\frac{1}{f}) = A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, ..., \partial_n)$.

(*iii*) $e(\mathbb{K}[x]_f) = 2$.

Demonstração:

(*i*) Por definição, temos que $A_n \frac{1}{f} \subset \mathbb{K}[x]_f$. A igualdade $g\partial_1(\frac{1}{x_1^m}) = \frac{(-m)g}{x_1^{m+1}}$ vale para todo $g \in \mathbb{K}[x]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Esta igualdade prova que toda função racional do tipo $\frac{g}{x_1^{m+1}}$ pertence a $A_n \frac{1}{x_1}$, o que prova a igualdade desejada.

(*ii*) A inclusão $A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, ..., \partial_n) \subset Ann_{A_n}(1/f)$ é clara. Reciprocamente, seja um $P = P(x, \partial) \in A_n$ um operador que anula $\frac{1}{x_1}$. Podemos escrever $P = Q_2\partial_2 + ... + Q_n\partial_n + P_1$ para alguns $Q_2, ..., Q_n, P_1 \in A_n$ e $P_1 = \sum_l a_l(x)\partial_1^l$ para algum $a_l(x) \in \mathbb{K}[x]$. Note que o operador P_1 anula $\frac{1}{x_1}$, pois P anula $\frac{1}{x_1}$. Podemos escrever

$$P_1 = Q(x_1\partial_1 + 1) + S(x', \partial_1) + r(x)$$

para alguns $Q, S(x', \partial_1) \in A_n, r(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $S := S(x', \partial_1) = \sum_{k>0} b_k(x')\partial_1^k$ para algum $b_k(x') \in \mathbb{K}[x'] := \mathbb{K}[x_2, ..., x_n]$.

Nós temos $0 = P_1(\frac{1}{x_1}) = S(\frac{1}{x_1}) + \frac{r(x)}{x_1}$. Suponha que S é não-nulo e seja $d > 0$ o grau de S com respeito a ∂_1. A ordem do pólo de $S(\frac{1}{x_1})$ em $x_1 = 0$ é $d + 1$, enquanto $\frac{r(x)}{x_1}$ tem um pólo de ordem no máximo 1. Isto implica que $d = 0$, o que é uma contradição. Então, temos $S = 0$ e $r(x) = 0$, pois $\frac{r(x)}{x_1} = 0$. Isto prova que $P = Q_2\partial_2 + ... + Q_n\partial_n + Q(x_1\partial_1 + 1) \in A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, ..., \partial_n)$.

(*iii*) Denotemos $I = A_n(x_1\partial_1 + 1, \partial_2, ..., \partial_n)$ e escrevamos $J \subset \mathbb{K}[x, \xi]$ o ideal gerado por $(x_1\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Calculemos a multiplicidade de $(\mathbb{K}[x]_f)$. Provemos que $gr^{\mathcal{B}}(I) = J$. Temos que cada elemento $P \in I$ pode ser escrito como

$$P = Q_2\partial_2 + ... + Q_n\partial_n + Q(x_1\partial_1 + 1)$$

com $ord^T(Q) = ord^T(P) - 2$ e $ord^T(Q_i) = ord^T(P) - 1$ para $i = 2, ..., n$. Pela observação 3.6, temos

$$\sigma^T(P) = \sum_{i=2}^{n} \sigma^T(Q_i)\xi_i + \sigma^T(Q)x_1\xi_1$$

e então $\sigma^T(P) \in J$. isto prova a igualdade $gr^B(I) = J$. O coeficiente líder do polinômio de Hilbert $\xi(t, \gamma, gr^\Gamma(\mathbb{K}[x]_f))$ do módulo graduado quociente $\frac{\mathbb{K}[x,\xi]}{J} \cong gr^\Gamma(\mathbb{K}[x]_f)$ é igual a $\frac{2}{(n-1)!}t^{n-1}$. (Aqui, Γ denota a $\mathcal{B}$-filtração induzida em $A_n/I \cong \mathbb{K}[x]_f$). Isto prova que $e(\mathbb{K}[x]_f) = 2$.

∎

Seja f um polinômio não-nulo em $\mathbb{K}[x]$. Seja s uma nova variável e $\mathbb{K}(s)$ o corpo das funções racionais em s. Denotamos por $A_n(s)$ a Álgebra de Weyl sobre o corpo $\mathbb{K}(s)$ e $A_n[s] := A_n \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[s]$.

Denotemos por $\mathbb{K}(s)[x]_f f^s$ o $\mathbb{K}(s)[x]_f$-módulo livre de posto 1 com base o símbolo formal f^s. Este módulo livre admite uma estrutura natural de $A_n(s)$-módulo á esquerda definindo

$$\partial_i f^s = s f^{-1} \partial_i(f) f^s$$

para $i = 1, ..., n$

Teorema 4.26 ***(Berstein)*** *O $A_n(s)$-módulo $\mathbb{K}(s)[x]_f f^s$ é holonômico.*

Demonstração: Ponhamos $N = \mathbb{K}(s)[x]_f f^s$ e $gr(f) = d \geq 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$N_k = \left\{ \frac{g(s,x)}{f^k} \in N| \;\; gr(g) \leq (d+1)k \right\}.$$

A família $\Gamma = \{N_k\}$ é uma $\mathcal{B}$-filtração em N.

Note que a dimensão do $\mathbb{K}(s)$-espaço vetorial N_k é limitada pelo número de monômios x^α em $\mathbb{K}(s)[x]$ com grau $|\alpha| \leq (d+1)k$. Este número é

$$\binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k)$$

onde $p(t)$ é o polinômio em t com coeficientes racionais e grau menor ou igual a $n-1$. Então existe um número inteiro $c_2 > 0$, tal que

$$dim_{\mathbb{K}(s)}(N_k) \leq \binom{(d+1)k+n}{n} = \frac{1}{n!}(d+1)^n k^n + p(k) \leq \frac{(d+1)^n k^n}{n!} + c_2(k+1)^{n-1}$$

para $z \in \mathbb{N}$, suficientemente grande. Aplicando o lema 4.23, concluimos que o $A_n(s)$-módulo $N = \mathbb{K}(s)[x]_f f^s$ é holonômico. ∎

Finalizamos nosso trabalho com a definição do polinômio de Berstein, mas antes, apresentamos o seguinte:

Teorema 4.27 *Seja f um polinômio não-nulo em $\mathbb{K}[x]$. Então, existe um polinômio não-nulo $b(s) \in \mathbb{K}[s]$ e um operador diferencial $P(s) \in A_n[s]$ tal que a igualdade $P(s)ff^s = b(s)f^s$ vale em $\mathbb{K}(s)[x]_f f^s$.*

Demonstração: O módulo $A_n(s)f^s$ é um $A_n(s)$-submódulo de $\mathbb{K}(s)[x]_f f^s$ e então, pelo teorema 4.24, é holonômico. Além disso, é de comprimento finito. Assim, a sequência decrescente

$$A_n(s)f^s \supseteq A_n(s)ff^s \supseteq ... \supseteq A_n(s)f^l f^s \supseteq ...$$

é estacionária. Assim, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l f^s = Q(s)f^{l+1}f^s$. Então, $f^s = Q(s-l)ff^s$. Seja $b(s) \in \mathbb{K}[s]$ um polinômio não-nulo tal que $P(s) := b(s)Q(s-l) \in A_n[s]$. Assim, temos $b(s)f^s = P(s)ff^s$. ∎

Observação 4.28 *Seja f é um polinômio não-nulo em $\mathbb{K}[x]$. O conjunto dos polinômios $c(s) \in \mathbb{K}[s]$ tal que existe um operador $P(s) \in A_n[s]$ que satisfaz $P(s)ff^s = c(s)f^s$ é um ideal em $\mathbb{K}[s]$ que é denotado por $\mathcal{B}_f$.*

Definição 4.29 *Seja f um polinômio não-nulo em $\mathbb{K}[x]$. O gerador mônico do ideal $\mathcal{B}_f$ é denotado por $b_f(s)$ e é chamado **polinômio de Bernstein** ou **polinômio de Berstein-Sato** de f.*

O cálculo do polinômio $b_f(s)$ é complicado, embora exista um algoritmo que calcula o polinômio de Berstein $b_f(s)$ de um polinômio dado $f \in \mathbb{K}[x]$. (Veja [2] Castro Jiménez, F.J., Modules over the Weyl Algebra, School of Algebraic Approach to Differential Equations, edited by Lê Dung Tráng, pag. 237.)

Referências Bibliográficas

[1] Bjork, J.E., *Rings Of Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam **32** (1979).

[2] Castro Jiménez, F.J., *Modules over the Weyl Algebra*, School of Algebraic Approach to Differential Equations, edited by Lê Dung Tráng, ICTP (2007).

[3] Coutinho, S.C., *A Primer of Algebraic D-modules*, Student Texts 33, London Mathematical Society. Cambridge University Press (1995).

[4] Goodearl, K.R. Warfield, Jr.R.B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society, Second Edition, Student texts 61 (2004).

[5] Lang, S., *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Revised Third Edition, Springer (2002).

[6] McConnel, J.C., Robson, J.C., *Noncommutative Noetherian Rings* , Graduate Studies in Mathematics, Volume 30. American Mathematical Society (2001).