Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito

Renato Augusto Nascimento Santos

João Pessoa – PB
Agosto de 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito

por

Renato Augusto Nascimento Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB
Agosto de 2014

S237e Santos, Renato Augusto Nascimento.

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito / Renato Augusto Nascimento Santos. - João Pessoa, 2014.

66f.

Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Condição de Cerami. 4. Teorema de Deformação.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não quadráticos no infinito

por

Renato Augusto Nascimento Santos [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 08 de Agosto de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Orientador)

Janete Soares de Gamboa

Profa. Dra. Janete Soares de Gamboa – UnB
(Examinadora Externa)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais Rosa e Jaime.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais uma etapa vencida.

Aos meus pais, Rosa Nascimento e Jaime Santos por estarem ao meu lado, me apoiando, me incentivando.

Ao Professor Bruno pela excelente orientação e pela paciência.

Aos professores do DM-UFPB, em particular aos que tive a honra de ser aluno, Bruno Ribeiro, Antônio de Andrade, Alexandre Simas, Pedro Hinojosa, Aurélio Menegon e Napoleon Tosta.

Aos professores da UEPB do campus de Patos-PB Wilker Lima e Francisco Sibério.

Aos professores Napoleon Tosta e Vilmar Vaz por me recomendarem ao Mestrado em Matemática da UFPB onde fui aceito.

A Lourdes Freire e seu esposo Arnaldo pelo acolhimento na cidade de João Pessoa-PB, duas pessoas abençoadas.

A Maria de Fátima nos momentos em que sempre precisei estava me ajudando.

Aos professores do curso de Matemática da UESC-BA Eduardo Palmeira, Cícero Alfredo, José Reis e Rosane Furtado, e aos colegas Marcos Ferreira e Danilo Souza.

Aos colegas do Mestrado em Matemática da UFPB pelos momentos de estudo e descontração Cleiton Ricardo, Clemerson Menezes, Hudson Cavalcante, Luan Sousa e Jarbas Dantas.

Enfim, a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Teorema de Deformação usando a condição introduzida por Cerami [8]. Além disso, estudamos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory com crescimento subcrítico.

No problema acima, utilizamos novamente a condição de Cerami [8], para garantir a existência de solução não-trivial, para este propósito, usaremos Teorema Geral de Minimax provado pelo Bartolo em [12].

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Condição de Cerami, Teorema de Deformação.

Abstract

We study the deformation theorem using the condition introduced by Cerami [8]. Furthermore, we study the following Dirichlet problem:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a smooth and bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Caratheodory function with subcritical growth.

In the above problem, we use the condition of Cerami [8] again, to ensure the existence of non-trivial solution. For this purpose, we use General Minimax Theorem proved by Bartolo in [12].

Keywords: Partial differential equations, Cerami condition, Deformation Theorem.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, temos como objetivo estudar problemas elípticos em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$. Mais precisamente, considere o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= \quad 0, \quad\quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory com crescimento subcrítico, isto é,

$$|f(x,s)| \leq a_0|s|^{p-1} + b_0, \;\; \forall \;\; s \in \mathbb{R}, \;\; x \in \Omega \;\; \text{q.t.p.}$$

com $a_0, b_0 > 0$ constantes, $1 \leq p < \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 \leq p < \infty$ se $N = 1, 2$.

Mostra-se que as soluções fracas $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1) são exatamente os pontos críticos em $H_0^1(\Omega)$ do funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$.

Neste caso, temos duas situações para o problema (1):

1. A situação *subquadrático*, onde o “potencial” F satisfaz

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} \leq c < +\infty;$$

2. A situação *superquadrático*, onde F satisfaz

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = +\infty.$$

Vamos apresentar uma abordagem unificada para ambas as situações por meio de uma condição de *não-quadraticidade* no infinito em F, ou seja, nossas hipóteses serão as seguintes:

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < +\infty, \quad \text{uniformemente para } \ x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \liminf\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \geq a > 0, \quad \text{uniformemente para } \ x \in \Omega \text{ q.t.p.} \\ \text{ou} \\ \limsup\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \leq -a < 0, \quad \text{uniformemente para } \ x \in \Omega \text{ q.t.p.} \end{cases} \tag{3}$$

Observemos que (2) é satisfeita com $q = p$. De fato,

$$\frac{F(x,s)}{|s|^q} = \frac{\displaystyle\int_0^s f(x,t)dt}{|s|^q} \leq \frac{\displaystyle\int_0^s (a_0|t|^{p-1} + b_0)dt}{|s|^q} = \frac{(a_0/p)|s|^p + b_0|s|}{|s|^p} = \frac{a_0}{p} + b_0|s|^{1-p},$$

como $1 \leq p$, obtemos

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < +\infty, \text{ onde } b = \frac{a_0}{p}.$$

A condição de não-quadraticidade no infinito foi introduzida em [3, 4] com $\mu = 1$ para o tratamento de sistemas elípticos subquadráticos, em particular, para uma grande classe de problemas de ressonância.

A fim de ilustrar o seu significado, considere uma função $f(x,s) = \lambda s + g(s)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assumimos que g satisfaça a condição Landesman-Lazer [7],

$$\lim_{|s|\to+\infty} g(s) = g_\pm, \text{ com } g_\pm > 0.$$

Assim,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{G(s)}{|s|} = |g_\pm|.$$

Logo, F satistaz (3) para todo $\mu \leq 1$, confira o apêndice A. Por outro lado, consideremos a condição

$$0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)s, \quad \forall\ |s| \geq R, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega$$

para algum $\theta > 2$ e $R > 0$, introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [1] para obter a solução não-trivial no caso superquadrático. Mostra-se que,

$$F(x,s) \geq a_1|s|^\theta, \ \forall \ |s| \geq M, \text{ para algum } a_1 > 0.$$

Logo,

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2)\frac{F(x,s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2)a_1|s|^{\theta - \mu}.$$

Assim, F satisfaz (3) para todo $\mu \leq \theta$, confira o apêndice A.

A condição de Landesman-Lazer ou a condição de Ambrosetti-Rabinowitz produz a condição de compacidade de Palais-Smale necessária para aplicar os métodos variacionais clássicos.

No *Capítulo* 1, vamos provar um Teorema de Deformação, que se encontra no artigo do Bartolo et al [12]. Para isso, utilizaremos a condição do tipo Palais-Smale introduzida por Cerami em [8]. Também demonstraremos o Teorema Geral Minimax devido a Bartolo et al [12], que garante que o funcional J possui um valor crítico, dessa forma, iremos garantir que o problema (1) tem solução não-trivial.

No *Capítulo* 2, demonstraremos que (2) e (3) (com uma restrição aos valores de μ) implicam numa condição de compacidade introduzida por Cerami [8] e usada por Bartolo et al [12] para provar o Teorema Geral de Minimax (também demonstrado no primeiro capítulo deste trabalho), a partir do qual o problema (1) tem solução não-trivial. Neste capítulo, vamos usar o artigo do Costa & Magalhães [5]. Mais precisamente, vamos supor o cruzamento do primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$:

$$\limsup_{s \to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \alpha < \lambda_1 < \beta \leq \liminf_{|s| \to +\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, \tag{4}$$

uniformemente para $x \in \Omega$ q.t.p.

Dessa forma, no Teorema 2.1 iremos provar que se F satisfaz (2), (3) e (4) com $\mu > (N/2)(q-2)$, então o problema (1) tem solução não-trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.

Denotemos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_j \leq ...$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Chamamos o problema (1) de ressonante ou duplamente ressonante, respectivamente, quando

$$\left[\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \lambda_j\right] \text{ ou } \left[\lambda_j \leq \liminf_{|s| \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \limsup_{|s| \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \lambda_{j+1}\right]$$

para $j \geq 1$, uniformemente para $x \in \Omega$ q.t.p.

Mais geralmente, o problema (1) é chamado ressonante ou duplamente ressonante respectivamente quando

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = \lambda_j, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{5}$$

ou

$$\lambda_j \leq L(x) = \liminf_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \limsup_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = K(x) \leq \lambda_{j+1}, \tag{6}$$

uniformemente para $x \in \Omega$ q.t.p.

Vamos assumir que

$$\lim_{|s|\to+\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{7}$$

ou

$$\lim_{|s|\to+\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = -\infty, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{8}$$

uma condição mais fraca que (3) com $\mu > 0$. Assim, no Terorema 2.2 vamos demonstrar que se F satisfaz (6) então o problema (1) tem solução não-trivial $u \in H_0^1(\Omega)$ desde que:

(i) F satisfaça (7) com $\lambda_j < L(x)$ em um conjunto de medida positiva; ou

(ii) F satisfaça (8) com $K(x) < \lambda_{j+1}$ em um conjunto de medida positiva.

Na demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2, utilizaremos o Princípio Geral Minimax, que será enunciado e provado no capítulo 1.

No *Apêndice A*, enunciamos alguns resultados utilizados neste trabalho.

No *Apêndice B*, enunciamos algumas propriedades da Teoria do Grau, as quais utilizamos na prova dos Teoremas 2.1 e 2.2

Capítulo 1

Teorema de Deformação e princípio geral minimax

Neste capítulo vamos provar o Teorema de Deformação usando a condição de Cerami, definida a seguir, que desempenha um papel fundamental na aplicação de argumentos tipo Ljusternik-Schnirelmann para a busca de pontos críticos de funcionais em espaços de Banach. Terminamos o capítulo demonstrando um teorema geral de ponto crítico devido a Bartolo et al [12], dessa forma, usaremos esse teorema no Capítulo 2, para garantir a existência de solução não-trivial para o problema (1).

Vamos introduzir algumas notações. Denotemos por X um espaço de Banach real e X' o dual.

Se f é uma aplicação contínua Fréchet diferenciável de X em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$f \in C^1(X, \mathbb{R}),$$

$f'(u)$ denota a derivada de Fréchet de f no ponto $u \in X$.

Na literatura, os teoremas de deformação foram provados nos casos em que $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazia a condição de Palais-Smale. Essa condição pode ser expressa como segue:

f satisfaz a condição de Palais-Smale no intervalo (c_1, c_2), onde $-\infty \leq c_1 < c_2 \leq +\infty$, se

(i) toda sequência limitada $\{u_n\} \subset f^{-1}(c_1, c_2)$, com $\{f(u_n)\}$ limitada e $f'(u_n) \to 0$, possui uma subsequência convergente, e

(ii) $\{u_n\} \subset f^{-1}(c_1, c_2)$, $\{f(u_n)\}$ limitada e $||u_n|| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ então $||f'(u_n)|| \geq \alpha > 0$ para n suficientemente grande.

Agora, vamos definir a condição de Cerami, que será utilizada na demonstração do Teorema de Deformação.

Definição 1.1. Diremos que $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami (C) em (c_1, c_2) com $-\infty \leq c_1 < c_2 \leq +\infty$ se

$(i)'$ dada uma sequência limitada $\{u_n\} \subset f^{-1}(c_1, c_2)$, com $\{f(u_n)\}$ limitada e $f'(u_n) \to 0$, então $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente, e

$(ii)'$ dado $c \in (c_1, c_2)$ existem $\sigma, R, \alpha > 0$ tais que $[c - \sigma, c + \sigma] \subset (c_1, c_2)$ e para todo $u \in f^{-1}([c - \sigma, c + \sigma])$, $||u|| \geq R$ temos que $||f'(u)|| \cdot ||u|| \geq \alpha$.

Observemos que uma condição similar a (C) foi introduzida por Cerami em [8] e aplicada à busca de pontos críticos de um funcional em uma Variedade Rimanniana (confira [9]).

Vamos provar que a condição (C) é suficiente para obter um Teorema da Deformação. Para isso, definiremos alguns conjuntos:

Sejam

$$\tilde{X} = \{u \in X : f'(u) \neq 0\}$$

e para $c \in \mathbb{R}$,

$$A_c = \{u \in X : f(u) \leq c\}, \quad K_c = \{u \in X : f'(u) = 0,\ f(u) = c\}.$$

Utilizaremos o seguinte lema,

Lema 1.1. Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, então existe uma aplicação localmente Lipschitz contínua $\phi : \tilde{X} \to X$ satisfazendo as seguintes condições:

$$||\phi(u)|| \leq \frac{2}{||f'(u)||} \quad \text{e} \quad \langle f'(u), \phi(u) \rangle \geq 1, \quad \forall\, u \in \tilde{X}. \tag{1.1}$$

Prova: Seja $u \in \tilde{X}$, logo $u \in X$ tal que $f'(u) \neq 0$. Como $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ obtemos

$$||f'(u)|| = \sup_{||w||=1} \langle f'(u), w \rangle.$$

Dessa forma, dados $\epsilon > 0$ e $x \in \tilde{X}$ existe $y_{x\epsilon} \in X$ tal que $||y_{x\epsilon}|| = 1$ e $||f'(u)|| - \epsilon < \langle f'(u), y_{x\epsilon} \rangle$. Tomemos $\epsilon = \dfrac{||f'(u)||}{3} > 0$ pois, $f'(u) \neq 0$. Assim

$$||f'(u)|| - \frac{||f'(u)||}{3} < \langle f'(u), y_{x\epsilon} \rangle \text{ o que implica } \frac{2}{3}||f'(u)|| < \langle f'(u), y_{x\epsilon} \rangle.$$

Definimos a função $l : \tilde{X} \to X$ tal que $l(u) = \dfrac{f'(u)}{||f'(u)||^2}$. Agora, tomemos $u_v = \dfrac{3}{2}||l(u)|| \cdot y_{x\epsilon}$. Afirmamos que u_v é um vetor pseudo-gradiente para f em $u \in \tilde{X}$. De fato,

$$||u_v|| = \left|\left|\frac{3}{2}||l(u)|| \cdot y_{x\epsilon}\right|\right| = \frac{3}{2}||l(u)|| < 2||l(u)||.$$

Assim, $||u_v|| < 2\left|\left|\dfrac{f'(u)}{||f'(u)||^2}\right|\right| = \dfrac{2}{||f'(u)||}$, logo $||u_v|| < \dfrac{2}{||f'(u)||}$.
Além disso

$$\begin{aligned}\langle f'(u), u_v\rangle &= \left\langle f'(u), \frac{3}{2}||l(u)|| \cdot y_{x\epsilon}\right\rangle = \frac{3}{2}||l(u)||\langle f'(u), y_{x\epsilon}\rangle \\ &> \frac{3}{2}||l(u)||\frac{2}{3}||f'(u)|| = ||l(u)|| \cdot ||f'(u)|| = \left|\left|\frac{f'(u)}{||f'(u)||^2}\right|\right| \cdot ||f'(u)|| = 1.\end{aligned}$$

logo, $\langle f'(u), u_v\rangle > 1$. Como $\tilde{X}$ é um conjunto aberto, existe uma vizinhança aberta V_v de v com $V_v \subset \tilde{X}$ tal que

$$||h_v|| < \frac{2}{||f'(w)||} \text{ e } \langle f'(w), h_v\rangle > 1 \text{ para todo } w \in V_v.$$

Agora tomemos $V = \{V_v : v \in \tilde{X}\}$ uma cobertura aberta de $\tilde{X}$. Observe que $\tilde{X}$ é um espaço métrico completo, logo $\tilde{X}$ é paracompacto. Dessa forma, para cada $\tau \in \Gamma$ existe $v \in \tilde{X}$ tal que $V_{v_\tau} \subset V_v$. Assim

$$||u_v|| < \frac{2}{||f'(w)||} \text{ e } \langle f'(w), u_v\rangle > 1 \text{ para todo } w \in V_{v_\tau}.$$

Para cada $\tau \in \Gamma$ defina $\alpha_\tau : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ por $\alpha_\tau(w) = d(w, X \setminus V_{v_\tau})$. Definimos também a função $\phi : \tilde{X} \to X$ por

$$\phi(w) = \sum_{\tau\in\Gamma}\left(\frac{\alpha_\tau(w)}{\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma(w)} \cdot u_\tau\right)$$

com $u_\tau = \dfrac{3}{2}||l(u_\tau)|| \cdot y_{x\tau}$. Observemos que

$$\alpha_\tau(w) = 0 \text{ se } w \in \tilde{X} \setminus V_{v_\tau} \text{ e } \alpha_\tau(w) = d(w, \tilde{X} \setminus V_{v_\tau}) \text{ se } w \in V_{v_\tau}.$$

Pela definição de paracompacidade, a cobertura aberta $V = \{V_v : v \in \tilde{X}\}$ de $\tilde{X}$ é localmente finita, assim dado $w \in \tilde{X}$ existe um número finito de índices q_w tais que $\tau \in \Gamma$ e $\alpha_\tau(w) \neq 0$. Logo

$$\phi(w) = \sum_{\tau\in\Gamma}\left(\frac{\alpha_\tau(w)}{\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma(w)} \cdot u_\tau\right) = \sum_{k=1}^{q_w}\left(\frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\displaystyle\sum_{p=1}^{q_w}\alpha_{\gamma_p}(w)} \cdot u_\tau\right).$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} ||\phi(w)|| &= \left\| \sum_{k=1}^{q_w} \left(\frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\displaystyle\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \cdot u_\tau \right) \right\| \leq \sum_{k=1}^{q_w} \left(\frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\displaystyle\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \right) \cdot ||u_\tau|| \\ &= 1 \cdot ||u_\tau|| = ||u_\tau|| < \frac{2}{||f'(w)||} \end{aligned}$$

além disso

$$\begin{aligned} \langle f'(w), \phi(w) \rangle &= \langle f'(w), \sum_{k=1}^{q_w} \left(\frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\displaystyle\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \cdot u_\tau \right) \rangle = \sum_{k=1}^{q_w} \left(\frac{\alpha_{\tau_k}(w)}{\displaystyle\sum_{p=1}^{q_w} \alpha_{\gamma_p}(w)} \right) \langle f'(w), u_\tau \rangle \\ &= 1 \cdot \langle f'(w), u_\tau \rangle = \langle f'(w), u_\tau \rangle > 1. \end{aligned}$$

Logo, $\phi(w)$ é um vetor pseudo-gradiente para f em w. Além disso, ϕ é uma soma finita de funções que são localmente Lipschitziana, para uma determinada vizinhança. Assim, existe uma vizinhança onde ϕ é localmente Lipschitziana. Dessa forma, ϕ é um campo pseudo-gradiente para f em $\tilde{X}$.

1.1 Teorema de Deformação

O Teorema de Deformação garante a existência de um homeomorfismo limitado $\eta : X \to X$ tal que podemos deformar o conjunto $A_{c+\epsilon}$ no conjunto $A_{c-\epsilon}$, sob certas condições em $c \in \mathbb{R}$. Vamos apresentar o Teorema de Deformação que encontra-se em [12].

Teorema 1.1. (**Teorema de Deformação**) Seja X um espaço de Banach real e seja $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (C) em (c_1, c_2). Se $c \in (c_1, c_2)$ e N é uma vizinhança qualquer de K_c, então existem um homeomorfismo limitado η de X em X e constantes $\bar{\epsilon} > \epsilon > 0$ tal que $[c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}] \subset (c_1, c_2)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\eta(A_{c+\epsilon} \backslash N) \subset A_{c-\epsilon}, \tag{1.2}$$

$$\eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon} \text{ se } K_c = \emptyset \tag{1.3}$$

$$\eta(x) = x \text{ se } x \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]). \tag{1.4}$$

Prova: Seja $c \in (c_1, c_2)$. Suponhamos que $K_c \neq \emptyset$. Primeiro observemos que, pela condição (C), K_c é compacto. De fato, seja $u \in K_c$ então,

$$u \in X \text{ tal que } f'(u) = 0 \text{ e } f(u) = c.$$

Notemos que, $u \in f^{-1}(c)$ e $c \in (c_1, c_2)$. Se $||u|| \geq R$, onde $R > 0$, teríamos pela condição $(ii)'$ que $||f'(u)|| \cdot ||u|| \geq \alpha$ com $\alpha > 0$. Sendo $f'(u) = 0$, obteríamos $0 \geq \alpha$, absurdo. Logo, o conjunto K_c é limitado.

Assim, dada uma sequência $(u_k) \subset K_c$, temos que $f'(u_k) = 0$ e $f(u_k) = c$, além disso, a sequência (u_k) é limitada, pois o conjunto K_c é limitado. Pela condição (i), a sequência (u_k) possui uma subsequência convergente, digamos $u_{k_n} \to u$. Afirmamos que $u \in K_c$. De fato, como $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, obtemos

$$0 = \lim_{n \to +\infty} f'(u_{k_n}) = f'(u) \;\text{ e }\; c = \lim_{n \to +\infty} f(u_{k_n}) = f(u),$$

assim, $u \in K_c$. Logo, K_c é compacto.

Seja M_λ o aberto λ-vizinhança de K_c, ou seja,

$$M_\lambda = \{u \in X : d(u, K_c) < \lambda\}$$

onde $\lambda > 0$ e $d(u, K_c)$ denota a distância de u ao conjunto K_c. Vamos provar (1.2). Sendo K_c compacto, tomemos $\delta > 0$ tal que $N = M_\delta$.

A hipótese (i) implica que existem $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, b, b_1 > 0$ tais que

$$||f'(u)|| > b, \quad \forall\, u \in (A_{c+\bar{\epsilon}_1} \backslash A_{c-\bar{\epsilon}_1}) \cap (M_\delta \backslash M_{\delta/8}) \tag{1.5}$$

$$||f'(u)|| > b_1, \quad \forall\, u \in (A_{c+\bar{\epsilon}_2} \backslash A_{c-\bar{\epsilon}_2}) \cap (B_R \backslash M_{\delta/8}) \tag{1.6}$$

Suponhamos que (1.6) não ocorre, então existem sequências

$$b_k \to 0,\; \epsilon_k \to 0 \text{ e } u_k \in (A_{c+\epsilon_k} \backslash A_{c-\epsilon_k}) \cap (B_R \backslash M_{\delta/8}) \text{ com } ||f'(u_k)|| \leq b_k.$$

Assim, $c - \epsilon_k < f(u_k) \leq c + \epsilon_k$ e como $||f'(u_k)|| \leq b_k$ fazendo $k \to +\infty$ obtemos

$$f(u_k) \to c \;\text{ e }\; f'(u_k) \to 0.$$

Sendo $||u_k|| \leq R$, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, por (i) existe uma subsequência convergente, $u_{k_n} \to u$. Daí,

$$0 = \lim_{n \to +\infty} f'(u_{k_n}) = f'(u) \;\text{ e }\; c = \lim_{n \to +\infty} f(u_{k_n}) = f(u),$$

assim, $u \in K_c$. Por outro lado, como $(u_k) \not\subset M_{\delta/8}$ temos que

$$\frac{\delta}{8} \leq d(u_{k_n}, K_c) \leq d(u_{k_n}, a), \text{ onde } a \in K_c.$$

Sendo $u_{k_n} \to u$, obtemos $\dfrac{\delta}{8} \leq d(u,a)$ o que implica $u \notin M_{\delta/8}$. Mas, $K_c \subset M_{\delta/8}$.

De fato, pois caso contrário existiria $v \in K_c$ com $v \notin M_{\delta/8}$. Assim,

$$\frac{\delta}{8} \leq d(v, K_c) \leq d(v, y) \text{ com } y \in K_c.$$

Tomando $y = v$, obtemos $\dfrac{\delta}{8} \leq 0$, absurdo!

Da mesma forma, se não tivermos (1.5), então existiriam sequências

$$b_k \to 0,\ \epsilon_k \to 0 \text{ e } u_k \in (A_{c+\epsilon_k} \backslash A_{c-\epsilon_k}) \cap (M_\delta \backslash M_{\delta/8}) \text{ com } ||f'(u_k)|| \leq b_k.$$

Assim, $c - \epsilon_k < f(u_k) \leq c + \epsilon_k$ e como $||f'(u_k)|| \leq b_k$ fazendo $k \to +\infty$ obtemos

$$f(u_k) \to c \ \text{ e } \ f'(u_k) \to 0.$$

Como $u_k \in M_\delta$ temos que $d(u_k, u) := ||u_k - u|| < \lambda$, para todo $u \in K_c$. Sendo K_c limitado, em particular é compacto, segue que $||u|| \leq c$, onde c é uma constante. Daí, $||u_k|| \leq ||u_k - u|| + ||u|| < \lambda + c$, logo $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Por (i), $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos $u_{k_n} \to z$. Sendo $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, obtemos

$$0 = \lim_{n\to+\infty} f'(u_{k_n}) = f(z) \ \text{ e } \ c = \lim_{n\to+\infty} f(u_{k_n}) = f(z),$$

logo, $z \in K_c$. Assim, chegaríamos no mesmo absurdo da demonstração do item (1.6), uma vez que $K_c \subset M_{\delta/8}$.

Por $(ii)'$ existe $\bar{\epsilon}_3 < \min\left\{\dfrac{b\delta}{8}, \sigma\right\}$ tal que

$$||f'(u)|| > 0, \quad \forall\, u \in (A_{c+\bar{\epsilon}_3} \backslash A_{c-\bar{\epsilon}_3}) \backslash M_{\delta/8}. \tag{1.7}$$

De fato, se não ocorresse (1.7), existiria $u_0 \in (A_{c+\bar{\epsilon}_3} \backslash A_{c-\bar{\epsilon}_3}) \backslash M_{\delta/8}$ com $||f'(u_0)|| = 0$. Assim, $c - \bar{\epsilon}_3 < f(u_0) \leq c + \bar{\epsilon}_3$, isto é, $u_0 \in f^{-1}((c - \bar{\epsilon}_3, c + \bar{\epsilon}_3])$. Se $||u_0|| \geq R$, onde $R > 0$, então por $(ii)'$, teríamos $||f'(u_0)|| \cdot ||u_0|| \geq \alpha$, com $\alpha > 0$. Mas, $f'(u_0) = 0$ e portanto $0 \geq \alpha$ o que é um absurdo. Tomando $\bar{\epsilon} < \min\{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3\}$, temos que valem as expressões (1.5), (1.6) e (1.7) com $\bar{\epsilon}$.

Seja $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ e consideremos os conjuntos

$$A = \{u \in X : f(u) \geq c + \bar{\epsilon} \text{ ou } f(u) \leq c - \bar{\epsilon}\} \text{ e}$$

$$B = \{u \in X : c - \epsilon \leq f(u) \leq c + \epsilon\}$$

Definimos a função,

$$\chi_1(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Notemos que

$$\chi_1(x) = 0, \ \forall \ x \in A, \quad \chi_1(x) = 1, \ \forall \ x \in B \ \text{ e } \ 0 \leq \chi_1(x) \leq 1, \ \forall \ x \in X.$$

A função $\chi_1(x)$ é localmente Lipschitz contínua. De fato, dados $x, y \in X$, notemos que,

$$|\chi_1(x) - \chi_1(y)| = \left| \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} - \frac{d(y,A)}{d(y,A) + d(y,B)} \right|$$

$$= \left| \frac{d(x,A)[d(y,A) + d(y,B)] - d(y,A)[d(x,A) + d(x,B)]}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \right|$$

$$= \left| \frac{d(x,A) \cdot d(y,B) - d(y,A) \cdot d(x,B)}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \right|$$

$$= \left| \frac{d(x,A) \cdot d(y,B) - d(y,A) \cdot d(y,B) + d(y,A) \cdot d(y,B) - d(y,A) \cdot d(x,B)}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \right|$$

$$= \left| \frac{d(y,B)[d(x,A) - d(y,A))] + d(y,A)[d(y,B) - d(x,B)]}{[d(x,A) + d(x,B)][d(y,A) + d(y,B)]} \right|$$

$$\leq \frac{d(x,y)|d(y,A) + d(y,B)|}{|d(x,A) + d(x,B)||d(y,A) + d(y,B)|}$$

$$= \frac{d(x,y)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Daí, dado $z \in X$, temos que

$$d(z,A) + d(z,B) > 0.$$

Logo, existe $k > 0$ e uma vizinhança V de z tal que

$$d(x, A) + d(x, B) \geq \frac{1}{k} > 0, \ \forall \ x \in V.$$

Portanto,

$$|\chi_1(x) - \chi_1(y)| \leq kd(x, y),$$

o que mostra que χ_1 é localmente Lipschitz. Da mesma forma, existe uma função localmente Lipschitz contínua χ_2 com

$$\chi_2(x) = 1, \ \forall \ x \in X \backslash M_{\delta/4}, \quad \chi_2(x) = 0, \ \forall \ x \in M_{\delta/8} \ \text{ e } \ 0 \leq \chi_2(x) \leq 1, \ \forall \ x \in X.$$

Então, a função

$$\chi(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x), \quad \forall \ x \in X$$

definida por

$$\chi : X \to [0, 1] \ \text{ tal que } \chi(u) = \begin{cases} 0, \ \text{se } u \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \ \text{ ou } u \in M_{\delta/8} \\ 1, \ \text{se } u \in f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \ \text{ e } u \notin M_{\delta/8} \end{cases} \tag{1.8}$$

é localmente Lipschitz contínua.

Consideremos a aplicação $V : X \to X$ definida por

$$V(u) = \begin{cases} -\chi(u) \cdot \phi(u), & u \in \tilde{X} \\ 0, & u \notin \tilde{X}, \end{cases} \tag{1.9}$$

onde ϕ é a função definida no Lema 1.1. Notemos que V é uma aplicação localmente Lipschitz contínua em X. Assim, pelo Lema 1.1,

$$||V(u)|| \leq \frac{2}{||f'(u)||}, \quad \forall \ u \in \tilde{X}. \tag{1.10}$$

Vamos mostrar que

$$||V(u)|| \leq k_1 + k_2||u||, \tag{1.11}$$

onde $k_1, k_2 > 0$ são independentes de $u \in X$. Se $u \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \backslash M_{\delta/8}$, temos que $\chi(u) = 0$, assim $V(u) = 0$. Logo,

$$0 = ||V(u)|| \leq k_1 + k_2||u|| \ \text{ onde } \ k_1, k_2 > 0.$$

Se $u \in f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \backslash M_{\delta/8}$, observemos dois casos:

(1^a) $||u|| \geq R$: sendo $\bar{\epsilon} < \sigma$, a condição $(ii)'$ de (C) implica que,

$$||f'(u)|| \cdot ||u|| \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad ||f'(u)|| \geq \frac{\alpha}{||u||}.$$

Por (1.10) obtemos

$$||V(u)|| \leq \frac{2}{\alpha}||u|| \leq k_1 + k_2||u||;$$

onde $k_1 > 0$ e $k_2 = \dfrac{2}{\alpha} > 0$.

(2^a) $||u|| < R$: então, por (1.6) existe $b_1 > 0$ tal que

$$||f'(u)|| > b_1$$

usando novamente (1.10) e a desigualdade acima, temos que

$$||V(u)|| \leq \frac{2}{||f'(u)||} < \frac{2}{b_1}$$

daí, $||V(u)||$ é limitada.

Por (1^a) e (2^a) concluimos que

$$||V(u)|| \leq k_1 + k_2||u|| \text{ onde } k_1, k_2 > 0 \text{ são independentes de } u \in X.$$

Agora, consideremos o problema de valor inicial

$$\frac{d\eta}{dt} = V(\eta) \text{ e } \eta(0) = x \text{ onde } x \in X.$$

Como V é localmente Lipschitz contínua, para cada valor inicial $x \in X$, o problema de valor inicial possui uma única solução $\eta(\cdot, x)$. Por (1.11), a solução é definida em $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

Fixemos $t \in \mathbb{R}^+$, pelo Teorema de Picard (conforme [16]) e usando (1.11), a aplicação

$$\eta(t, \cdot) : X \to X$$

é um homeomorfismo limitado de X em X.

Consideremos $\eta(t, x) = x, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+$.

Assim,

$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

e para

$$x \notin f^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \text{ ou } x \in M_{\delta/8},$$

obtemos

$$V(\eta(t, x)) = V(x) = 0.$$

Dessa forma, η satisfaz o problema de valor inicial. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $\eta(t, \cdot)$ satisfaz (1.4). Resta provarmos que existe $\bar{t}$ tal que $\eta(\bar{t}, \cdot)$ satisfaz (1.2). Primeiro vamos provar que

(*) para cada $x \in X$ a aplicação definida por

$$s_x(t) = f(\eta(t, x)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

é não-crescente em $\mathbb{R}^+$. De fato, para $t > 0$:

$$\frac{d}{dt} s_x(t) = \left\langle f'(\eta(t,x)), \frac{d}{dt}\eta(t,x) \right\rangle = \langle f'(\eta(t,x), V(\eta(t,x)) \rangle .$$

Então, se $\eta(t,x) \notin \tilde{X}$ temos que $V(\eta(t,x)) = 0$, assim $\dfrac{d}{dt} s_x(t) = 0$. Se $\eta(t,x) \in \tilde{X}$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_x(t) &= \left\langle f'(\eta(t,x)), \frac{d}{dt}\eta(t,x) \right\rangle = \langle f'(\eta(t,x), V(\eta(t,x)) \rangle \\ &= \langle f'(\eta(t,x), -\chi(\eta(t,x)) \cdot \phi(\eta(t,x)) \rangle = -\chi(\eta(t,x)) \langle f'(\eta(t,x), \phi(\eta(t,x)) \rangle . \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1, temos que

$$\frac{d}{dt} s_x(t) = -\chi(\eta(t,x)) \langle f'(\eta(t,x), \phi(\eta(t,x)) \rangle \leq -\chi(\eta(t,x)) \leq 0.$$

Portanto,

$$s_x(t) = f(\eta(t, x)), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

é não-crescente em $\mathbb{R}^+$. Para provarmos (1.2) consideremos o conjunto

$$Y = (A_{c+\epsilon} \backslash A_{c-\epsilon}) \backslash M_\delta$$

e vamos mostrar que

$$\exists \;\; \bar{t} > 0 \;\; \text{tal que} \;\; \forall \; x \in Y, \quad \eta(\bar{t}, x) \in A_{c-\epsilon}.$$

Para isso, definimos o conjunto

$$Z = (A_{c+\epsilon} \backslash A_{c-\epsilon}) \backslash M_{\delta/2}.$$

Mostraremos primeiro que

(**) para cada $x \in Y$, existe $t_x \leq 2\epsilon$ tal que $\eta(t_x, x) \in Z$.

De fato, seja $x \in Y$ e $t > 0$ tal que $\eta(w,x) \in Z, \ \forall\ w \in [0,t]$. Vamos provar que $t < 2\epsilon$. Por (1.7) $Z \subset \tilde{X}$. Pois, tomando $z \in Z$ temos que $z \in A_{c+\epsilon} \backslash A_{c-\epsilon}$ e $z \notin M_{\delta/2}$. Notemos que,

$$\frac{\delta}{2} \leq d(z, K_c) \ \text{ mas, } \ \frac{\delta}{8} \leq \frac{\delta}{2} \leq d(z, K_c) \text{ de onde segue que } z \notin M_{\delta/8}.$$

Assim,

$$z \in (A_{c+\epsilon} \backslash A_{c-\epsilon}) \backslash M_{\delta/8}.$$

Usando (1.7), $||f'(z)|| > 0$, isto é, $f'(z) \neq 0$. Logo, $z \in \tilde{X}$. Assim, $Z \subset \tilde{X}$. Dessa forma, $\eta(w,x) \in Z \subset \tilde{X}, \ \forall\ w \in [0,t]$, além disso, como $\eta(w,x) \in Z$, então

$$\eta(w,x) \in (A_{c+\epsilon} \backslash A_{c-\epsilon}) \ \text{ e } \ \eta(w,x) \notin M_{\delta/2}.$$

Observemos que,

$$\frac{\delta}{4} \leq \frac{\delta}{2} \leq d(\eta(w,x), K_c) \quad \Rightarrow \ \eta(w,x) \notin M_{\delta/4}.$$

Assim, $\eta(w,x) \in (A_{c+\epsilon} \backslash A_{c-\epsilon}) \backslash M_{\delta/4}$. Por (1.8), $\chi(\eta(w,x)) = 1$ e usando o Lema (1.1) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_x(w) &= -\chi(\eta(t,w)) \left\langle f'(\eta(t,w), \phi(\eta(t,w)) \right\rangle \\ &= -\left\langle f'(\eta(t,w), \phi(\eta(t,w)) \right\rangle \leq -1 \\ &\Rightarrow \ \frac{d}{dt} s_x(w) \leq -1 \ \forall\ w \in [0,t]. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$s_x(0) - s_x(t) = -\int_0^t \frac{d}{dw} s_x(w) dw \geq \int_0^t dw = t. \tag{1.12}$$

Observemos que, como $s_x(t) = f(\eta(t,x))$, $s_x(0) = f(\eta(0,x))$ e sendo $\eta(t,x) \in Z$, segue que

$$c - \epsilon < s_x(t) \leq c + \epsilon \ \text{ e } \ c - \epsilon < s_x(0) \leq c + \epsilon$$

o que implica

$$s_x(0) - s_x(t) < c + \epsilon - (c - \epsilon) = 2\epsilon.$$

Pela desigualdade acima e usando (1.12), obtemos

$$t < 2\epsilon,$$

o que prova (**). Consideremos o caso em que a órbita $\eta(\cdot,x)$ $x\in Y$, entra em $M_{\delta/2}$. Seja t_2 o primeiro instante em que $\eta(\cdot,x)\in\partial M_{\delta/2}$. Vamos mostrar que,
(***) existe um instante $t_0\leq t_2$ tal que $\eta(t_0,x)\in A_{c-\epsilon}$.
Para provarmos (***) argumentamos por contradição. De fato, suponhamos que (***) não seja verdade, ou seja,

$$\text{para todo } t\in[0,t_2] \text{ temos que } \eta(t,x)\notin A_{c-\epsilon}.$$

Observemos que, $t\leq t_2$, temos $\eta(t,x)\notin M_{\delta/2}$. Além disso, $x\in Y$, temos que $f(x)\leq c+\epsilon$, e sendo $t\geq 0$, a função $f(\eta(t,x))$ é não-decrescente então,

$$f(\eta(t,x))\leq f(\eta(0,x))=f(x)\leq c+\epsilon$$

e como $\eta(t,x)\notin A_{c-\epsilon}$, temos que

$$\eta(t,x)\in(A_{c+\epsilon}\backslash A_{c-\epsilon})\backslash M_{\delta/2}=Z.$$

Logo, por (**), obtemos

$$t_2<2\epsilon. \tag{1.13}$$

Por outro lado, seja t_1 o último instante antes de t_2 em que $\eta(\cdot,x)\in\partial M_\delta$. Notemos que

$$\eta(t,x)\in(A_{c+\epsilon}\backslash A_{c-\epsilon})\cap(M_\delta\backslash M_{\delta/2}),\quad \forall\, t\in(t_1,t_2].$$

e por (1.5) temos que

$$||f'(\eta(t,x))||>b,\qquad \forall\, t\in[t_1,t_2].$$

Além disso, $\chi(\eta(t,x))=1$.
Então, usando o Lema (1.1), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2} &\leq ||\eta(t_2,x)-\eta(t_1,x)||=\left|\left|\int_{t_1}^{t_2}V(\eta(t,x))dt\right|\right|\\
&= \left|\left|\int_{t_1}^{t_2}[-\chi(\eta(t,x))\cdot\phi(\eta(t,x))]dt\right|\right|\leq\int_{t_1}^{t_2}||\phi(\eta(t,x))||dt\leq\int_{t_1}^{t_2}\frac{2}{||f'(\eta(t,x))}dt\\
&< \int_{t_1}^{t_2}\frac{2}{b}dt=\frac{2}{b}(t_2-t_1)<\frac{2}{b}t_2\\
&\Rightarrow\ t_2>\frac{b\delta}{4}.
\end{aligned}$$

Usando $\bar{\epsilon} < \min\left\{\frac{b\delta}{8}, \sigma\right\}$ na última desigualdade, segue que

$$t_2 > 2\bar{\epsilon} > 2\epsilon,$$

mas isto contradiz (1.13). Portanto, vale (***). Por (**) e (***) concluímos que para cada $x \in Y$ existe t_x tal que $\eta(t_x, x) \in A_{c-\epsilon}$. Em qualquer caso, podemos escolher $t_x \leq 2\epsilon$. Finalmente em seguida tomando $\bar{t} = 2\epsilon$, temos que existe $\bar{t} > 0$ tal que para todo $x \in Y \quad \eta(\bar{t}, x) \in A_{c-\epsilon}$ e o teorema esta provado. ■

O próximo resultado garante que o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x, u)dx$ possui um valor crítico, este fato será crucial para mostrarmos que o problema (1) tem solução não-trivial. Para mostrarmos o teorema abaixo utilizaremos o teorema anterior.

1.2 Teorema Geral Minimax

Teorema 1.2. (Bartolo et al [12]) Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, onde X é um espaço de Hilbert satisfazendo a condição $(C)_c$ para todo $c > 0$ e suponha que existam um subconjunto fechado $S \subset X$ e $Q \subset X$, com a fronteira de Q, limitada satisfazendo as seguintes condições:

1. $\sup\limits_{u \in \partial Q} J(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf\limits_{u \in S} J(u)$ para $0 \leq \alpha < \beta$;

2. S e ∂Q estão linkados;

3. $\sup\limits_{u \in Q} J(u) < +\infty$.

Então, J possui um valor crítico $c \geq \beta$.

Prova: Suponhamos por absurdo que c não é um valor crítico, isto é, $K_c = \emptyset$. Pelo Teorema de Deformação dado $\epsilon > 0$ com $\epsilon < c - \beta$, existe um homeomorfismo limitado $\eta : X \to X$ tal que

$$\eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon} \text{ se } K_c = \emptyset \text{ e}$$
$$\eta(x) = x \text{ se } x \notin J^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]).$$

Observemos que $c = \inf\limits_{h \in \Gamma} \sup\limits_{u \in Q} J(h(u))$ onde $\Gamma = \{h \in C(X, X) : h(x) = x, x \in \partial Q\}$. Assim, existe $g \in \Gamma$ tal que $\sup\limits_{u \in Q} J(g(u)) \leq c + \epsilon$. Agora consideremos $\Phi(u) = \eta(g(u))$. Pela hipótese, $\sup\limits_{u \in \partial Q} J(u) < \beta$, assim $\sup\limits_{u \in \partial Q} J(u) < \beta < c - \epsilon$. Dessa forma,

$$J(u) \notin [c - \epsilon, c + \epsilon], \text{ ou seja, } u \notin J^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]).$$

Logo, $\Phi(u) = \eta(g(u)) = \eta(u) = u$, com $u \in \partial Q$. Assim, $\Phi \in \Gamma$. Notemos que, $J(g(u)) \leq \sup\limits_{u \in Q} J(g(u)) \leq c + \epsilon$, o que implica $J(g(u)) \leq c + \epsilon$, daí $g(u) \in A_{c+\epsilon}$. Usando novamente o Teorema de Deformação, $\Phi(u) = \eta(g(u)) \in A_{c-\epsilon}$, logo $J(\Phi(u)) \leq c - \epsilon$, obtemos $\sup\limits_{u \in Q} J(\Phi(u)) \leq c - \epsilon$. Como $c = \inf\limits_{h \in \Gamma} \sup\limits_{u \in Q} J(h(u))$, temos que $c \leq \sup\limits_{u \in Q} J(\Phi(u)) \leq c - \epsilon$, assim $c \leq c - \epsilon$, o que é um absurdo.

Capítulo 2

Problemas elípticos não quadráticos no infinito

Neste capítulo, nosso objetivo é garantir a existência de solução não-trivial para o problema (1). Para isso, vamos provar alguns lemas que serão utilizados na demostração dos teoremas 2.1 e 2.2.

Algumas notações que iremos utilizar durante o capítulo:

Denotemos por $|E|$ a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^N$, por $||\cdot||_p$ a norma em $L^p(\Omega)$ e por $||\cdot||$ a norma em $H_0^1(\Omega)$ induzida pelo produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

A condição que vamos utilizar é do tipo Palais-Smale introduzida por Cerami em [8], a saber; dizemos que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, com X um espaço de Banach real, satisfaz a (condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$) $(C)_c$ se:

$(C)_c(i)$ toda sequência limitada $(u_n) \subset X$, tal que $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$, possui uma subsequência convergente;

$(C)_c(ii)$ existem constantes $\delta, R, \alpha > 0$ tais que $||J'(u)|| \cdot ||u|| \geq \alpha$ para qualquer

$$u \in J^{-1}([c-\delta, c+\delta]) \text{ com } ||u|| \geq R.$$

Observações:

1. As condições (i) e (ii) acima estão implícitas na conhecida condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_c$, a saber

toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$ possui uma subsequência convergente.

2. No problema (1), a condição de crescimento subcrítico de f dá automaticamente $(C)_c(i)$ para todo $c \in \mathbb{R}$, pois usando a Proposição A.2, obtemos uma subsequência

convergente, sempre que uma sequência limitada satisfaz $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$. Além disso, a condição de Cerami acima com $c \in (0, +\infty)$ implica na Definição 1.1 com $(c_1, c_2) = (0, +\infty)$. De fato, considere uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada com $(u_n) \subset J^{-1}(c_1, c_2)$ e $J'(u_n) \to 0$. Como $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, tomemos (u_{n_k}) tal que $(J(u_{n_k}))$ seja convergente. Sendo $(J(u_{n_k}))$ convergente, então $J(u_{n_k}) \to c$ onde $c \in [c_1, c_2]$, então (u_{n_k}) possui uma subsequência convergente.

Agora, vamos demonstrar dois lemas que serão utilizados na prova do teorema principal do capítulo, que será visto mais adiante. Recordemos a desigualdade de interpolação que será usada na demonstração do Lema 2.1:

$$||u||_q \leq ||u||_\mu^t ||u||_r^{1-t}, \quad u \in L^\mu(\Omega) \cap L^r(\Omega),$$

onde $0 < \mu \leq q \leq r$ com $q^{-1} = t\mu^{-1} + (1-t)r^{-1},\ t \in [0, 1]$.

Lema 2.1. Se F satisfaz (2) e (3) com $\mu > \dfrac{N}{2}(q-2)$ (ou $\mu > q-2$ se $N = 1, 2$) então J satisfaz $(C)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Prova: Suponhamos que,

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \geq a > 0 \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Então dado $\epsilon > 0$ com $a > \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \geq a - \epsilon, \forall\ |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Logo, $f(x,s)s - 2F(x,s) \geq (a-\epsilon)|s|^\mu$, $\forall\ |s| \geq \delta$ e $x \in \Omega$ q.t.p. Tomemos $a_1 = a - \epsilon > 0$. Assim,

$$f(x,s)s - 2F(x,s) \geq a_1|s|^\mu,\ \forall\ |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Por outro lado, para $|s| \leq \delta$ e $x \in \Omega$ q.t.p. temos que

$$|f(x,s)s - 2F(x,s) - a_1|s|^\mu| \leq |f(x,s)||s| + 2|F(x,s)| + a_1|s^\mu|,$$

usando a condição de crescimento subcrítico,

$$\begin{aligned}
|f(x,s)||s| + 2|F(x,s)| + a_1|s|^\mu &\leq (a_0|s|^{p-1} + b_0)|s| + 2\left(\frac{a_0}{p}|s|^p + b_0|s|\right) + a_1|s|^\mu \\
&\leq a_0\delta^p + b_0\delta + 2\frac{a_0}{p}\delta^p + 2b_0\delta + a_1\delta^\mu = d_1 \\
&\Rightarrow |f(x,s)s - 2F(x,s) - a_1|s|^\mu| \leq d_1,
\end{aligned}$$

onde d_1 é uma constante maior que zero. Logo

$$a_1|s|^\mu - d_1 \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \ \ \forall \ |s| \leq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Como $f(x,s)s - 2F(x,s) \geq a_1|s|^\mu, \ \forall \ |s| \geq \delta$ e $x \in \Omega$ q.t.p. temos que

$$f(x,s)s - 2F(x,s) \geq a_1|s|^\mu - d_1, \ \ |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Portanto, existem constantes $a_1 > 0$ e $d_1 > 0$ tais que

$$a_1|s|^\mu - d_1 \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \ \ s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2.1}$$

Usaremos (2.1) para provar que J satisfaz as condições $(C)_c(i)$ e $(C)_c(ii)$. Pela observação que fizemos no início do capítulo, a condição $(C)_c(i)$ é satisfeita usando a Proposição A.2.

Agora, a fim de verificar $(C)_c(ii)$, suponhamos por contradição que existe $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tais que

$$J(u_n) \to c, \ ||J'(u_n)|| \cdot ||u_n|| \to 0 \text{ e } ||u_n|| \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Usando (2.1), obtemos

$$a_1||u_n||^\mu - d_1 \leq f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n),$$

o que implica

$$\int_\Omega (a_1||u_n||^\mu - d_1)dx \leq \int_\Omega \left[f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)\right]dx,$$

Assim,

$$a_1\int_\Omega ||u_n||^\mu dx - \int_\Omega d_1 dx \leq \int_\Omega \left[f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)\right]dx,$$

logo,

$$\begin{aligned}
a_1||u_n||_\mu^\mu - d_1|\Omega| &\leq \int_\Omega \left[f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)\right]dx \\
&= \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - 2F(x,u_n)dx \\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right) - \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n\right]dx \\
&= 2J(u_n) - J'(u_n)u_n,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$a_1||u_n||_\mu^\mu - d_1|\Omega| \leq 2J(u_n) - J'(u_n)u_n.$$

Como $J(u_n) \to c$ e $||J'(u_n)|| \cdot ||u_n|| \to 0$ quando $n \to +\infty$, vemos que, as sequências $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(J'(u_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas, daí existe $k > 0$ tal que

$$a_1||u_n||_\mu^\mu - d_1|\Omega| \leq k,$$

logo, $||u_n||_\mu^\mu \leq k_1$, com $k_1 > 0$. Assim, $||u_n||_\mu \leq A$, onde $A > 0$. Portanto

$$u_n \in L^\mu(\Omega) \text{ e } (||u_n||_\mu)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é uma sequência limitada.}$$

Por outro lado, usando (2),

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < \infty \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b + \epsilon, \;\; \forall\ |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Daí, $F(x,s) \leq (b+\epsilon)|s|^q$, $\forall\ |s| \geq \delta$ e $x \in \Omega$ q.t.p. Tomando $b_2 = b + \epsilon > 0$, tem-se

$$F(x,s) \leq b_2|s|^q, \;\; \forall\ |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Para $|s| \leq \delta$ e $x \in \Omega$ q.t.p. temos que

$$|F(x,s) - b_2|s|^q \leq |F(x,s)| + b_2|s|^q.$$

Usando a condição de crescimento subcrítico

$$|F(x,s)| + b_2|s|^q \;\leq\; \frac{a_0}{p}|s|^p + b_0|s| + b_2|s|^q \;\leq\; \frac{a_0}{p}\delta^p + 2b_0\delta + b_2\delta^q = d_2$$

$$\Rightarrow \;\; |F(x,s) - b_2|s|^q| \leq d_2.$$

Daí,

$$F(x,s) \leq b_2|s|^q + d_2 \;\; \forall\ |s| \leq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Como $F(x,s) \leq b_2|s|^q$, $\forall\ |s| \geq \delta$ e $x \in \Omega$ q.t.p. temos que

$$F(x,s) \leq b_2|s|^q + d_2, \;\; |s| \geq \delta \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Portanto, existem constantes $b_2 > 0$ e $d_2 > 0$ tais que

$$F(x,s) \leq b_2|s|^q + d_2, \;\; \forall\ s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega F(x,u_n)dx \\
&= \int_\Omega F(x,u_n)dx \le \int_\Omega (b_2||u_n||^q + d_2)dx = b_2||u_n||_q^q + d_2|\Omega| \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) \le b_2||u_n||_q^q + d_2|\Omega|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) \le b_2||u_n||_q^q + d_2|\Omega|. \tag{2.2}$$

Como estamos assumindo que $\mu \le q$, tomando

$$r = 2N/(N-2) \text{ com } N \ge 3 \text{ (ou } q \le r < \infty \text{ se } N = 1,2)$$

e usando a desigualdade de interpolação, vamos estimar (2.2). De (2.2) temos que

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 - J(u_n) \le b_2||u_n||_q^q + d_2|\Omega| \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}||u_n||^2 \le b_2||u_n||_\mu^{tq}||u_n||_r^{(1-t)q} + d_2|\Omega| + J(u_n).$$

Como $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, logo é limitada e usando a desigualdade de Sobolev e o fato que $(||u_n||_\mu)$ é limitada, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||u_n||^2 &\le b_2||u_n||_\mu^{tq}||u_n||_r^{(1-t)q} + d_2|\Omega| + ||J(u_n)|| \\
&\le b_2A^{tq}k^{(1-t)q}||u_n||^{(1-t)q} + d_2|\Omega| + k_1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 \le B||u_n||^{(1-t)q} + C,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 \le \frac{1}{2}||u_n||^2 \le B||u_n||^{(1-t)q} + C, \tag{2.3}$$

onde $B = b_2A^{tq}k^{(1-t)q}$ e $C = d_2|\Omega| + k_1$ são constantes. Finalmente, uma vez que estamos tomando $\mu > N(q-2)/2$ no caso $N \ge 3$, segue que

$$q(1-t) < 2.$$

De fato, suponhamos que $q(1-t) \ge 2$, então $q - 2 \ge qt$. Sendo $\mu > N(q-2)/2$, obtemos $\mu > (Nqt)/2$, como $\mu \le q$, segue que

$$\mu > (Nqt)/2 \ge (N\mu t)/2 \Rightarrow 1 > (Nt)/2 \Rightarrow 2 > Nt.$$

Sendo $t \in [0,1]$, tomemos $t = 1$, assim $2 > N$, absurdo. Logo, $q(1-t) < 2$.
Daí,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 \leq B||u_n||^{(1-t)q} + C < B||u_n||^2 + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}||u_n||^2 < B||u_n||^2 + C.$$

Portanto, $(||u_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, o que é um absurdo, pois $||u_n|| \to +\infty$.
Nos casos $N = 1, 2$ a condição $q(1-t) < 2$ é equivalente a $\mu > r(q-2)/(r-2)$, onde $q \leq r < +\infty$. De fato, suponhamos que $q(1-t) < 2$, como $q^{-1} = t\mu^{-1} + (1-t)r^{-1}$, $\forall\, t \in [0,1]$, segue que, multiplicando q a ambos os membros da última igualdade

$$1 = qt\mu^{-1} + qr^{-1} - qtr^{-1} \text{ o que implica } 1 = qt(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1},$$

notemos que, $q(1-t) < 2$ dessa última desigualdade obtemos $q - 2 < qt$, daí

$$\begin{aligned}
(q-2)(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1} &< qt(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1} = 1 \\
&\Rightarrow (q-2)(\mu^{-1} - r^{-1}) + qr^{-1} < 1 \\
&\Rightarrow q\mu^{-1} - qr^{-1} - 2\mu^{-1} + 2r^{-1} + qr^{-1} < 1 \\
&\Rightarrow \mu^{-1}(q-2) + 2r^{-1} < 1.
\end{aligned}$$

Como $\mu > 0$, segue que

$$q - 2 + 2\mu r^{-1} < \mu$$

$$\Rightarrow \quad q - 2 < \left(1 - \frac{2}{r}\right)\mu \Rightarrow \frac{q-2}{(r-2)/r} < \mu$$

$$\Rightarrow \mu > r(q-2)/(r-2).$$

Se, $\mu > r(q-2)/(r-2)$. Sendo

$$q^{-1} = t\mu^{-1} - (1-t)r^{-1}, \ \forall\, t \in [0,1]$$

então, $t = [q^{-1} + (1-t)r^{-1}]\mu$, sendo $\mu > r(q-2)/(r-2)$, segue que

$$\begin{aligned} t &= [q^{-1} + (1-t)r^{-1}]\mu > [q^{-1} + (1-t)r^{-1}][r(q-2)/(r-2)] \\ &\Rightarrow \ tq > \frac{r(q-2)}{r-2} - q(1-t)\frac{q-2}{r-2} = (q-2)\left(\frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2}\right) \\ &\Rightarrow \ tq > (q-2)\left(\frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2}\right). \end{aligned}$$

Observemos que, $\dfrac{r}{r-2} - \dfrac{q(1-t)}{r-2} > 0$, com $r > 2$, caso contrário, $\dfrac{r}{r-2} < \dfrac{q(1-t)}{r-2}$, sendo $q \leq r$, segue que

$$\frac{r}{r-2} < \frac{r(1-t)}{r-2} \ \Rightarrow \ r < r(1-t) \ \Rightarrow \ t < 0, \text{ o que é um absurdo.}$$

Logo,

$$tq > (q-2)\left(\frac{r}{r-2} - \frac{q(1-t)}{r-2}\right) \geq q-2 \ \Rightarrow \ tq > q-2.$$

Como $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{r}{r-2} = 1$ e sendo $\mu > q-2$, temos que $q(1-t) < 2$. Com efeito, suponhamos que

$$q(1-t) \geq 2,$$

usando o fato de $\mu > q-2$, obtemos

$$\mu > q-2 \geq qt \ \Rightarrow \ \mu > qt,$$

tomando $t = 1$, temos $\mu > q$, absurdo, pois $\mu \leq q$. Assim, $q(1-t) < 2$.
Usando novamente a expressão (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||u_n||^2 &\leq B||u_n||^{(1-t)q} + C < B||u_n||^2 + C \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{2}||u_n||^2 < B||u_n||^2 + C. \end{aligned}$$

Concluímos que, $(||u_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, o que é um absurdo, pois $||u_n|| \to +\infty$.

■

Nosso próximo resultado, que será utilizado também na demostração do Teorema 2.2, mostra que a situação subquadrático mesmo enfraquecida por (7) ou (8) garante que vale $(C)_c$ $\forall\ c \in \mathbb{R}$. Além disso, a condição (7) ou (8) nos permite obter problemas de ressonância e duplamente ressonantes, sem a necessidade de ter uma limitação no quociente $f(x,s)/s$.

Lema 2.2. Se F satisfaz (6) e ((7) ou (8)) então J satisfaz $(C)_c$, $\forall\ c \in \mathbb{R}$.

Prova: Suponhamos que F satisfaz (6) e (7) e por negação que J não satisfaz $(C)_c(ii)$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Então, existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u_n) \to c, ||J'(u_n)|| \cdot ||u_n|| \to 0 \text{ e } ||u_n|| \to +\infty \text{ quando } n \to +\infty.$$

Observemos que

$$\int_\Omega [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)]dx = 2J(u_n) - J'(u_n)u_n.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)]dx = \lim_{n\to\infty} [2J(u_n) - J'(u_n)u_n] = 2c. \tag{2.4}$$

Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)]dx = +\infty$ chegando num absurdo. Afim de verificar este fato, faremos a seguinte afirmação.

Afirmação 2.1. Existe $\Omega_0 \subset \Omega$ com $|\Omega_0| > 0$ tal que $|u_n(x)| \to +\infty, x \in \Omega_0$ q.t.p.

Usando a afirmação anterior e a condição (7), temos que

$$\lim_{n\to\infty} [f(x,u_n(x))u_n(x) - 2F(x,u_n(x))] = +\infty \text{ com } x \in \Omega_0 \text{ q.t.p.}$$

Além disso, como $\lim_{|s|\to+\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x,s)s - 2F(x,s) > \epsilon,\ \forall\ |s| \geq \delta.$$

Por outro lado, para $|s| \leq \delta$, temos que

$$\begin{aligned} |f(x,s)s - 2F(x,s)| &\leq |f(x,s)||s| + 2|F(x,s)| \leq (a_0|s|^{p-1} + b_0)|s| + 2\left(\frac{a_0}{p}|s|^p + b_0|s|\right) \\ &\leq M,\ \text{onde } M > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x,s)s - 2F(x,s) \geq -M,\ \forall\ |s| \leq \delta.$$

Sendo, $f(x,s)s - 2F(x,s) > \epsilon,\ \forall\ |s| \geq \delta$, obtemos

$$f(x,s)s - 2F(x,s) > \epsilon > -M,\ \forall\ |s| \geq \delta.$$

Dessa forma,

$$f(x,s)s - 2F(x,s) \geq -M,\ \forall\ s \in \mathbb{R}, x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Daí,

$$f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n) \geq -M, \ x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Tomemos $Q_n = f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)$. Uma vez que $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Q_n > 0, \ \forall\ n \geq n_0$. Observemos que

$$\int_\Omega Q_n dx = \int_\Omega [f(x,u_n)u_n - 2F(x,u_n)]dx = 2J(u_n) - J'(u_n)u_n,$$

como $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(J'(u_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências limitadas, então

$$\int_\Omega Q_n dx < \infty.$$

Logo, (Q_n) é uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Além disso, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega Q_n < \infty$. Portanto, vamos utilizar o Lema de Fatou's na sequência $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega Q_n dx &= \liminf_{n\to+\infty} \left(\int_{\Omega_0} Q_n dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_0} Q_n dx \right) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega_0} Q_n dx + \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega\backslash\Omega_0} Q_n dx
\end{aligned}$$

e sendo

$$\lim_{n\to+\infty} [f(x,u_n(x))u_n(x) - 2F(x,u_n(x))] = +\infty \text{ com } x \in \Omega_0 \text{ q.t.p.}$$

e

$$f(x,u_n(x))u_n(x) - 2F(x,u_n(x)) \geq -M \text{ com } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega Q_n dx &\geq \int_{\Omega_0} \left(\liminf_{n\to+\infty} Q_n \right) dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_0} \left(\liminf_{n\to+\infty} Q_n \right) dx \\
&\geq \int_{\Omega_0} \left(\liminf_{n\to+\infty} Q_n \right) dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_0} (-M) dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\liminf_{n\to+\infty} Q_n \right) dx - M|\Omega\backslash\Omega_0| = +\infty,
\end{aligned}$$

o que contradiz a expressão (2.4). Resta provar a Afirmação 2.1.

Usando (6), $\limsup\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda_{j+1}$, uniformemente para $x \in \Omega$ q.t.p., existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que
$$\frac{2F(x,u_n)}{u_n^2} \leq \lambda_{j+1}, \ \forall \ n \geq n_0.$$
Logo,
$$F(x,u_n) \leq \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2 \ \Rightarrow \ F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2 \leq 0.$$
Integrando ambos os membros da última desigualdade, obtemos

$$\int_\Omega \left[F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2\right] dx \leq 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \left[F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2\right] dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \ \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \left[F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2\right] dx \leq 0. \tag{2.5}$$

Tomemos uma sequência $\hat{u}_n = \dfrac{u_n}{||u_n||}$, sendo $(\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada. Então, para algum $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u} \text{ em } H_0^1(\Omega), \text{ assim, } \hat{u}_n \to \hat{u} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ com } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||u_n||^2}J(u_n) &= \frac{1}{||u_n||^2}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right) \\
&= \frac{1}{2||u_n||^2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega F(x,u_n)dx \\
&= \frac{1}{2||u_n||^2}||u_n||^2 - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega F(x,u_n)dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{||u_n||^2}J(u_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega F(x,u_n)dx. \tag{2.6}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lambda_{j+1}||\hat{u}_n||_2^2 &= \frac{1}{2}\lambda_{j+1}\left|\left|\frac{u_n}{||u_n||}\right|\right|_2^2 = \frac{1}{2}\lambda_{j+1}\int_\Omega \left|\frac{u_n}{||u_n||}\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{||u_n||^2}\frac{\lambda_{j+1}}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx = \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2 dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma,
$$\frac{1}{2}\lambda_{j+1}||\hat{u}_n||_2^2 = \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2 dx.$$

Vamos utilizar a igualdade acima na expressão (2.6).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||u_n||^2}J(u_n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega F(x,u_n)dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_{j+1}||\hat{u_n}||_2^2 - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega F(x,u_n)dx + \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2 dx \\
&= \frac{1}{2}(1-\lambda_{j+1}||\hat{u}_n||_2^2) - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \left[F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2\right]dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{||u_n||^2}J(u_n) = \frac{1}{2}(1-\lambda_{j+1}||\hat{u}_n||_2^2) - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \left[F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2\right]dx.$$

Fazendo $n \to +\infty$ na igualdade acima, desde que $J(u_n) \to c$ então $(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, e como $||u_n|| \to +\infty$, obtemos

$$\frac{1}{||u_n||^2}J(u_n) \to 0.$$

Assim, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(1-\lambda_{j+1}||\hat{u}_n||_2^2) - \frac{1}{||u_n||^2}\int_\Omega \left[F(x,u_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}u_n^2\right]dx\right) = 0.$

Como $\hat{u}_n \to \hat{u}$ em $L^2(\Omega)$ e usando a expressão (2.5), temos que

$$\frac{1}{2}(1-\lambda_{j+1}||\hat{u}||_2^2) \leq 0.$$

Daí, $1 - \lambda_{j+1}||\hat{u}||_2^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leq \lambda_{j+1}||\hat{u}||_2^2 \;\Rightarrow\; ||\hat{u}||_2^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \hat{u} \neq 0.$
Como $\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}$ com $\hat{u} \neq 0$, tomemos $\Omega_0 = \{x \in \Omega; \hat{u}(x) \neq 0\}$.

$$\hat{u}_n \to \hat{u} \text{ em } \Omega \text{ q.t.p. e } \hat{u}_n \to \hat{u} \text{ em } \Omega_0 \text{ q.t.p.}$$

Daí, $\hat{u}_n \to \hat{u}$ em todo ponto de $\Omega_0\backslash A$ e $\hat{u} \neq 0$ em $\Omega_0\backslash B$.

Seja $x_0 \in \Omega_0\backslash(A\cup B)$, temos que

$$\hat{u}(x_0) \neq 0 \text{ e } \hat{u}_n(x_0) \to \hat{u}(x_0),$$

assim, $\hat{u}_n(x_0) = \dfrac{u_n(x_0)}{||u_n||} \to \hat{u}(x_0)$, sendo $||u_n|| \to +\infty$, obtemos $u_n(x_0) \to \pm\infty$, ou seja, $|u_n(x_0)| \to +\infty$.

■

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.1, vamos mostrar que a condição (4) implica na geometria do Teorema do Passo da Montanha [1] para o funcional J e usar este fato na prova do Teorema 2.1

Lema 2.3. Se F satisfaz (4) então existem $\rho, \beta > 0$ tais que $J(u) \geq \beta$ se $||u|| = \rho$. Além disso, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.

Prova: Primeiramente vamos mostrar que,

$$\frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 - B \le F(x,s) \le \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + A|s|^p, \ \forall\ s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Usaremos o crescimento subcrítico de f na prova. Observemos que esta condição com a hipótese $0 < \beta \le \liminf_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}$ só é possível quando $p > 2$. De fato, suponhamos que $p \le 2$. Sendo $|F(x,s)| \le a_1|s|^p + b_1$, temos que,

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \le a_2\frac{|s|^p}{|s|^2} + \frac{b_2}{|s|^2},$$

fazendo $|s| \to +\infty$ na ultima desigualdade, obtemos

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \le 0.$$

Absurdo, pois por hipótese $0 < \liminf_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}$. Assim, vamos assumir que $p > 2$.

Por (4),

$$0 < \beta \le \liminf_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Temos que, dado $\epsilon > 0$ com $\epsilon < \beta$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\beta - \epsilon \le \frac{2F(x,s)}{s^2},\ \forall\ |s| \ge \delta.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 \le F(x,s),\ \forall\ |s| \ge \delta.$$

Por outro lado, para $|s| \le \delta$ e $x \in \Omega$ temos que,

$$\left|F(x,s) - \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2\right| \ \le\ |F(x,s)| + \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)|s|^2 \le a_1|s|^p + b_1|s| + \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)|s|^2 \le B,$$

onde $B > 0$. Logo

$$\left|F(x,s) - \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2\right| \le B,\ \forall\ |s| \le \delta.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 - B \le F(x,s),\ \forall\ |s| \le \delta. \tag{2.7}$$

Sendo, $F(x,s) \ge \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2,\ \forall\ |s| \ge \delta$, obtemos que

$$F(x,s) \ge \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 \ge \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 - B,\ \forall\ |s| \ge \delta.$$

Logo,

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 - B, \ \forall\ |s| \geq \delta. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) temos que

$$\frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 - B \leq F(x,s), \ \forall\ s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Agora vamos mostrar que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + A|s|^p, \ \forall\ s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Para isso utilizaremos a desigualdade,

$$\limsup_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \alpha \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Temos que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{2F(x,s)}{s^2}\right| \leq \alpha + \epsilon, \ \forall\ |s| \leq \delta.$$

Logo,

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2, \ \forall\ |s| \leq \delta. \tag{2.9}$$

Para $|s| \geq \delta$ e $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} F(x,s) &\leq a_1|s|^p + b_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + a_1|s|^p + b_1 \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + \frac{b_1}{\delta^p}\delta^p + a_1|s|^p \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + A|s|^p. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + A|s|^p, \ \forall\ |s| \geq \delta \tag{2.10}$$

Por (2.9) e (2.10), obtemos

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + A|s|^p, \ \forall\ s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}(\beta-\epsilon)s^2 - B \leq F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 + A|s|^p, \ \forall\ s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2.11}$$

Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + \epsilon < \lambda_1$. Sabemos que

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Usando a segunda desigualdade da expressão (2.11), temos que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)u^2 + A|u|^p\right] \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)\int_\Omega u^2 dx - A\int_\Omega |u|^p dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)||u||_2^2 - A||u||_p^p. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré com $\lambda_1||u||_2^2 \leq ||u||^2$ e a desigualdade de Sobolev com $||u||_p^p \leq K||u||^p$, obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)\frac{||u||^2}{\lambda_1} - AK||u||^p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)||u||^2 - AK||u||^p.$$

Assim,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)||u||^2 - AK||u||^p. \tag{2.12}$$

Para toda $||u|| = \rho$ com $\rho = \left(\dfrac{1 - \dfrac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}}{4AK}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, obtemos a seguinte estimativa para a expressão (1.12),

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)||u||^2 - AK||u||^p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)\rho^2 - AK\rho^p \\ &= \rho^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right) - AK\rho^{p-2}\right] = \rho^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right) - AK\left(\frac{1 - \dfrac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}}{4AK}\right)\right] \\ &= \rho^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)\rho^2. \end{aligned}$$

Sendo $\alpha + \epsilon < \lambda_1$, obtemos $1 - \dfrac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1} > 0$ e $\rho > 0$, temos que

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)\rho^2 \equiv \beta > 0, \ \forall\ ||u|| = \rho.$$

Por outro lado, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\beta - \epsilon > \lambda_1$. Usando a primeira desigualdade da expressão (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\beta-\epsilon)u^2 - B\right] dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(\beta-\epsilon)\int_\Omega u^2 dx + B\int_\Omega dx = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\beta-\epsilon}{2}||u||_2^2 + B|\Omega| \\ &\Rightarrow \;\; J(u) \leq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\beta-\epsilon}{2}||u||_2^2 + B|\Omega|. \end{aligned}$$

Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção associada ao autovalor λ_1 tal que

$$||u_0||^2 = \lambda_1 ||u_0||_2^2 = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(tu_0) &\leq \frac{1}{2}||tu_0||^2 - \frac{\beta-\epsilon}{2}||tu_0||_2^2 + B|\Omega| = \frac{1}{2}||u_0||^2 t^2 - \frac{\beta-\epsilon}{2}||u_0||_2^2 t^2 + B|\Omega| \\ &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{\beta-\epsilon}{2}\frac{||u_0||^2}{\lambda_1}t^2 + B|\Omega| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta-\epsilon}{\lambda_1}\right)t^2 + B|\Omega| \\ &\Rightarrow \;\; J(tu_0) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta-\epsilon}{\lambda_1}\right)t^2 + B|\Omega|. \end{aligned}$$

Como $\beta - \epsilon > \lambda_1$, obtemos $1 - \dfrac{\beta-\epsilon}{\lambda_1} < 0$, assim

$$J(tu_0) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta-\epsilon}{\lambda_1}\right)t^2 + B|\Omega| \to -\infty \text{ quando } t \to +\infty.$$

■

Provaremos nosso resultado principal. Notemos que a condição (4) implica na Geometria do Teorema do Passo da Montanha, além disso, o Teorema 1.2 é usado na demonstração abaixo juntamente com a condição de Cerami, condição que é garantida pelo Lema 2.1

Teorema 2.1. Se F satisfaz (2), (3) e (4) com $\mu > \dfrac{N}{2}(q-2)$, então o problema (1) tem solução não-trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.

Prova: Observemos que o funcional $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, pelo lema 2.1, J satisfaz a condição $(C)_c$ $\forall\ c > 0$.

Tomemos $S = \{u \in H_0^1(\Omega) : ||u|| = \rho\}$, notemos que S é um subconjunto fechado de $H_0^1(\Omega)$, pois tomando uma sequência $(u_n) \subset S$ tal que $u_n \to u$, $||u_n|| = \rho$, fazendo $n \to +\infty$, obtemos

$$||u|| = \rho \quad \Rightarrow \quad u \in S.$$

Consideremos $Q = \{tu_0 : 0 \leq t \leq t_0\} \subset H_0^1(\Omega)$ onde $\partial Q = \{0, t_0 u_0\}$ é limitada com $t_0 > 0$. Verificaremos as seguintes condições:

1. $\sup\limits_{u \in \partial Q} J(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf\limits_{u \in S} J(u)$ para $0 \leq \alpha < \beta$;

2. S e ∂Q estão linkados;

3. $\sup\limits_{u \in Q} J(u) < +\infty$.

De fato, verificaremos a primeira condição, pelo lema 3.3, $J(u) \geq \beta$, $\forall\, u \in S$, assim $\beta \leq \inf\limits_{u \in S} J(u)$, além disso, $J(u) \leq \alpha$, $\forall\, u \in \partial Q$. Logo,

$$\sup_{u \in \partial Q} J(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in S} J(u) \text{ para } 0 \leq \alpha < \beta.$$

Para obtermos a segunda condição vamos mostrar que S e ∂Q estão linkados, ou seja, vamos provar que:
(i) $\partial Q \cap S = \emptyset$;
(ii) Se $\phi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é uma aplicação contínua com $\phi(u) = u$ para todo $u \in \partial Q$ então $\phi(Q) \cap S \neq \emptyset$.
Observemos que $\partial Q \cap S = \emptyset$, pois tomando $u \in \partial Q \cap S \Rightarrow u = 0$ ou $u = t_0 u_0$, se $u = 0$ e sabemos que $||u|| = \rho$, obtemos $\rho = 0$, absurdo, pois $\rho > 0$.

Sejam $\phi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ uma aplicação contínua tal que $\phi(u) = u$, $\forall\, u \in \partial Q$, ou seja, $\phi(0) = 0$ e $\phi(t_0 u_0) = t_0 u_0$ e definamos

$$\gamma : [0, t_0] \to H_0^1(\Omega), \ \gamma(t) = tu_0.$$

Assim, definindo a função $F = ||\phi \circ \gamma|| : [0, t_0] \to \mathbb{R}$, notemos que F é contínua em $[0, t_0]$, pois ϕ, γ e $||\cdot||$ são contínuas.

Além disso,

$$F(0) = ||\phi \circ \gamma(0)|| = ||\phi(\gamma(0))|| = ||\phi(0)|| = ||0|| = 0 \ \text{ e}$$

$$F(t_0) = ||\phi \circ \gamma(t_0)|| = ||\phi(\gamma(t_0))|| = ||\phi(t_0 u_0)|| = ||t_0 u_0|| > \rho, \text{ isto é,}$$

$$F(0) = 0 \text{ e } F(t_0) > \rho.$$

Logo, $F(0) < \rho < F(t_0)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\tilde{t} \in (0, t_0)$ tal que

$$F(\tilde{t}) = \rho.$$

Assim,

$$F(\tilde{t}) = ||\phi \circ \gamma(\tilde{t})|| = \rho \ \Rightarrow \ \phi \circ \gamma(\tilde{t}) \in S \text{ com } \gamma(\tilde{t}) \in Q.$$

Portanto, $\phi(Q) \cap S \neq \emptyset$. Finalmente, vamos verificar a terceira condição, como $J(u) \leq \alpha$, $\forall\ u \in Q$, então $\sup\limits_{u \in Q} J(u) < +\infty$.
Pelo Teorema 1.2 o funcional J possui valor crítico $c \geq \beta$. ■

Vamos observar o comportamento da função F que satisfaz (6) e ((7) ou (8)).

Lema 2.4. Se F satisfaz (6), então:

1. $F(x,s) - \dfrac{1}{2}K(x)s^2 \to -\infty$ quando $|s| \to +\infty$ se F satisfaz (7);

2. $F(x,s) - \dfrac{1}{2}L(x)s^2 \to +\infty$ quando $|s| \to +\infty$ se F satisfaz (8).

Prova: 1. Sejam $g(x,s) = f(x,s) - K(x)s$ e $G(x,s) = F(x,s) - \dfrac{1}{2}K(x)s^2$.
Por (7),

$$\lim_{|s| \to +\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = +\infty.$$

Dado $M > 0$ existe $s_M > 0$ tal que

$$f(x,s)s - 2F(x,s) \geq M, \ \forall\ |s| \geq s_M, x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} f(x,s)s - 2F(x,s) &= f(x,s)s - K(x)s^2 - 2F(x,s) + K(x)s^2 \\ &= [f(x,s) - K(x)s]s - 2\left[F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2\right] \\ &= g(x,s)s - 2G(x,s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x,s)s - 2F(x,s) = g(x,s)s - 2G(x,s).$$

Logo,

$$g(x,s)s - 2G(x,s) \geq M, \ \forall\ |s| \geq s_M, x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2.13}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left[\frac{G(x,s)}{s^2}\right] &= \frac{s^2\frac{d}{ds}G(x,s)-(s^2)'G(x,s)}{s^4}\\
&= \frac{s^2\frac{d}{ds}\left[F(x,s)-(1/2)K(x)s^2\right]-2sG(x,s)}{s^4}\\
&= \frac{s^2[f(x,s)-K(x)s]-2sG(x,s)}{s^4}=\frac{g(x,s)s-2G(x,s)}{s^3}\\
&\Rightarrow \frac{d}{ds}\left[\frac{G(x,s)}{s^2}\right]=\frac{g(x,s)s-2G(x,s)}{s^3}.
\end{aligned}$$

Integrando a expressão acima ao longo do intervalo $[t,T]\subset[s_M,+\infty]$ e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{G(x,T)}{T^2}-\frac{G(x,t)}{t^2}=\int_t^T\frac{g(x,s)s-2G(x,s)}{s^3}ds,$$

utilizando a expressão (2.13), temos que

$$\frac{G(x,T)}{T^2}-\frac{G(x,t)}{t^2}=\int_t^T\frac{g(x,s)s-2G(x,s)}{s^3}ds\geq\int_t^T\frac{M}{s^3}ds=-\frac{M}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{G(x,T)}{T^2}-\frac{G(x,t)}{t^2}\geq-\frac{M}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{t^2}\right).$$

Pela hipótese,

$$\limsup_{|s|\to+\infty}\frac{2F(x,s)}{s^2}=K(x),\ \text{obtemos que}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to+\infty}\frac{G(x,T)}{T^2} &= \limsup_{T\to+\infty}\frac{F(x,T)-(1/2)K(x)T^2}{T^2}=\limsup_{T\to+\infty}\left(\frac{F(x,T)}{T^2}-\frac{1}{2}K(x)\right)\\
&\leq \limsup_{T\to+\infty}\frac{F(x,T)}{T^2}-\frac{1}{2}\limsup_{T\to+\infty}\frac{2F(x,T)}{T^2}=0\\
&\Rightarrow \limsup_{T\to+\infty}\frac{G(x,T)}{T^2}\leq 0.
\end{aligned}$$

Como $-\frac{M}{2}\left(\frac{1}{T^2}-\frac{1}{t^2}\right)\leq\frac{G(x,T)}{T^2}-\frac{G(x,t)}{t^2}$ e usando $\limsup_{T\to+\infty}\frac{G(x,T)}{T^2}\leq 0$, temos que

$$-\frac{M}{2}\left(-\frac{1}{t^2}\right) \leq -\frac{G(x,t)}{t^2} \Rightarrow G(x,t) \leq -\frac{M}{2}, \quad \forall\, t \geq s_M, \; x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

De maneira análoga, mostramos que $G(x,t) \leq -\dfrac{M}{2}$, $\forall\, t \leq -s_M$, $x \in \Omega$ q.t.p. Como $M > 0$ é arbitrário, concluímos que, se F satisfaz (6) e (7), então

$$F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2 \to -\infty \text{ quando } |s| \to +\infty.$$

De maneira análoga, prova-se que

$$F(x,s) - \frac{1}{2}L(x)s^2 \to +\infty \text{ quando } |s| \to +\infty \text{ se } F \text{ satisfaz (8).}$$

■

Vamos utilizar o lema anterior para mostrar que as hipóteses do Teorema 2.2 (visto adiante) implicam na geometria do Teorema do Ponto de Sela [14] para o funcional J.

Considere a decomposição,

$$H_0^1(\Omega) = V \oplus W,$$

onde V é o subespaço gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_j$ e $W = V^{\perp}$. Para simplificar, vamos escrever $\lambda_j \lneq L(x)$ para indicar que $\lambda_j \leq L(x)$ é escrita com a desigualdade estrita em um conjunto de medida positiva. Com esta notação, a proposição 2 em [6] (ver também [11]) afirma que:

1. se $\lambda_j \lneq L(x)$ então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2 dx \leq -\delta_1 ||v||^2, \; \forall\, v \in V; \tag{2.14}$$

2. se $K(x) \lneq \lambda_{j+1}$ então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$||w||^2 - \int_\Omega K(x)w^2 dx \geq \delta_2 ||w||^2, \; \forall\, w \in W. \tag{2.15}$$

A prova encontra-se no Apêndice A.

Lema 2.5. Se F satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2, então $J(v) \to -\infty$ quando $||v|| \to +\infty$, $v \in V$, e $J(w) \to +\infty$ quando $||w|| \to +\infty$, $w \in W$.

Prova: Consideremos o caso em que F satisfaz (6) e (7) com $\lambda_j \lneq L(x)$. Vamos mostrar primeiro que $J(v) \to -\infty$ quando $||v|| \to +\infty$, $v \in V$.

Sejam $\delta_1 > 0$ dado em (2.14) e $\epsilon > 0$ tais que $\epsilon < \lambda_1\delta_1$. Por (6),

$$L(x) = \liminf_{|s|\to+\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2},$$

dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \geq L(x) - \epsilon \;\Rightarrow\; 2F(x,s) \geq (L(x)-\epsilon)s^2,\; \forall\, |s| \geq \delta.$$

Para $|s| \leq \delta$ temos,

$$|2F(x,s) - (L(x)-\epsilon)s^2| \leq 2|F(x,s)| + (L(x)-\epsilon)|s|^2 \leq M$$

$$\Rightarrow\; |2F(x,s) - (L(x)-\epsilon)s^2| \leq M,\; \forall\, |s| \leq \delta.$$

Logo, $2F(x,s) \geq (L(x)-\epsilon)s^2 - M,\; \forall\, |s| \leq \delta$.
Sendo $2F(x,s) \geq (L(x)-\epsilon)s^2,\; \forall\, |s| \geq \delta$ obtemos

$$2F(x,s) \geq (L(x)-\epsilon)s^2 - M,\; \forall\, |s| \geq \delta.$$

Portanto,

$$2F(x,s) \geq (L(x)-\epsilon)s^2 - M,\; \forall\, s \in \mathbb{R},\; x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
2J(v) &= 2\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega F(x,v)dx\right) = ||v||^2 - 2\int_\Omega F(x,v)dx \\
&\leq ||v||^2 - \int_\Omega [(L(x)-\epsilon)v^2 - M]dx \\
&= ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2 dx + \epsilon\int_\Omega v^2 dx + M\int_\Omega dx \\
&= ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2 dx + \epsilon||v||_2^2 + M|\Omega| \\
&\Rightarrow\; 2J(v) \leq ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2 dx + \epsilon||v||_2^2 + M|\Omega|.
\end{aligned}$$

Na desigualdade acima vamos utilizar (2.14) e a desigualdade de Poincaré,

$$2J(v) \leq -\delta_1||v||^2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}||v|| + M|\Omega| = \left(-\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)||v||^2 + M|\Omega|$$

$$\Rightarrow \quad 2J(v) \leq \left(-\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)||v||^2 + M|\Omega|, \ \forall \ v \in V.$$

Sendo $\epsilon < \lambda_1\delta_1 \ \Rightarrow \ -\delta_1 + \dfrac{\epsilon}{\lambda_1} < 0$. Portanto, $J(v) \to -\infty$, quando $||v|| \to +\infty$, $\forall \ v \in V$.

Agora vamos provar que, $J(w) \to +\infty$ quando $||w|| \to +\infty$, $w \in W$. Utilizaremos o Lema 2.4. Denotemos por W_0 o λ_{j+1}-autoespaço e $W_1 = W_0^{\perp} \subset W$.
Para $w = w_0 + w_1 \in W_0 + W_1$, temos que

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega F(x,w)dx \\ &= \frac{1}{2}||w||^2 - \frac{1}{2}\lambda_{j+1}||w||_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{j+1}||w||_2^2 - \int_\Omega F(x,w)dx \\ &= \frac{1}{2}(||w||^2 - \lambda_{j+1}||w||_2^2) - \int_\Omega \left[F(x,w) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w^2\right]dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ J(w) = \frac{1}{2}\left(||w||^2 - \lambda_{j+1}||w||_2^2\right) - \int_\Omega \left[F(x,w) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w^2\right]dx. \tag{2.16}$$

Além disso, usando o Lema 2.4 item 1 e a desigualdade $\limsup\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{2F(x,s)}{s^2} = K(x) \leq \lambda_{j+1}$, obtemos

$$\lim_{|s|\to+\infty}\left[F(x,s) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}s^2\right] \leq \lim_{|s|\to+\infty}\left[F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2\right] = -\infty$$

$$\Rightarrow \ \lim_{|s|\to+\infty}\left[F(x,s) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}s^2\right] = -\infty \ \text{ uniformemente para x} \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2.17}$$

Assim, existe $M > 0$ tal que $F(x,s) - \dfrac{\lambda_{j+1}}{2}s^2 \leq M, \ \forall \ s \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega$ q.t.p.

Usando (2.16) e a última desigualdade, temos que,

$$\begin{aligned}
J(w) &= J(w_0+w_1) = \frac{1}{2}\left(||w||^2 - \lambda_{j+1}||w||_2^2\right) - \int_\Omega \left[F(x,w) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w^2\right]dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(||w||^2 - \lambda_{j+1}||w||_2^2\right) - \int_\Omega M dx = \frac{1}{2}\left(||w||^2 - \lambda_{j+1}||w||_2^2\right) - M|\Omega| \\
&= \frac{1}{2}(||w_0||^2 + ||w_1||^2 - \lambda_{j+1}||w_0||_2^2 - \lambda_{j+1}||w_1||_2^2) - M|\Omega| \\
&= \frac{1}{2}(||w_1||^2 - \lambda_{j+1}||w_1||_2^2) - M|\Omega|.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ J(w) \geq \frac{1}{2}(||w_1||^2 - \lambda_{j+1}||w_1||_2^2) - M|\Omega|.$$

Tomemos $l = \min\{k \in \mathbb{N} : \lambda_{j+1} < \lambda_{j+k}\}$, daí,

$$\begin{aligned}
J(w) &\geq \frac{1}{2}(||w_1||^2 - \lambda_{j+1}||w_1||_2^2) - M|\Omega| \geq \frac{1}{2}\left(||w_1||^2 - \lambda_{j+1}\frac{||w_1||^2}{\lambda_{j+k}}\right) - M|\Omega| \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+k}}\right)||w_1||^2 - M|\Omega|.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ J(w_0+w_1) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+k}}\right)||w_1||^2 - M|\Omega|.$$

Fazendo $||w_1|| \to +\infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$J(w_0+w_1) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+k}}\right)||w_1||^2 - M|\Omega| \to +\infty$$

$$\Rightarrow \quad J(w_0+w_1) \to +\infty, \text{ quando } ||w_1|| \to +\infty.$$

Para completarmos a prova é sufuciente mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação 2.2. Se $w_n = w_{0n} + w_{1n} \in W_0 \oplus W_1$ é uma sequência tal que $||w_{0n}|| \to +\infty$ e $||w_{1n}||$ é limitada, então $J(w_n) \to +\infty$ quando $n \to +\infty$.

Tomemos $\hat{w}_{0n} = \dfrac{w_{0n}}{||w_n||}, \hat{w}_{1n} = \dfrac{w_{1n}}{||w_n||}$ e $\hat{w}_n = \hat{w}_{0n} + \hat{w}_{1n}$.
Daí,

$$||\hat{w}_{0n}|| = \left|\left|\frac{w_{0n}}{w_n}\right|\right| = \frac{||w_{0n}||}{||w_n||} \to 1 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Por outro lado, sendo $||w_{0n}|| \to +\infty$ e $||w_{1n}||$ é limitada com $w_n = w_{0n} + w_{1n}$, temos que

$$||w_n|| \to +\infty,$$

logo

$$||\hat{w}_{1n}|| = \left|\left|\frac{w_{1n}}{w_n}\right|\right| = \frac{||w_{1n}||}{||w_n||} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Como as sequências $(||\hat{w}_{0n}||)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(||\hat{w}_{1n}||)_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas e

$$||\hat{w}_n|| = ||\hat{w}_{0n} + \hat{w}_{1n}|| \leq ||\hat{w}_{0n}|| + ||\hat{w}_{1n}||,$$

obtemos que

$$(||\hat{w}_n||)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada.}$$

Assim, para algum $\hat{w} \in W$, temos

$$\hat{w}_n \rightharpoonup \hat{w} \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } \hat{w}_n \to \hat{w} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ com } x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Dessa forma,

$$||\hat{w}_n|| \to ||\hat{w}||.$$

Observemos que,

$$||\hat{w}|| = \lim_{n\to+\infty} ||\hat{w}_n|| = \lim_{n\to+\infty} ||\hat{w}_{0n} + \hat{w}_{1n}|| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{||\hat{w}_{0n}||^2 + ||\hat{w}_{1n}||^2} = 1$$

isto é,

$$||\hat{w}|| = 1.$$

Além disso, $\hat{w}_{0n} \in W_0$ e $\hat{w}_{1n} \in W_1$ com $\hat{w}_n \in W$, temos que, $\hat{w}_n \to \hat{w} \in W_0$, tal que $\hat{w}$ é normalizada λ_{j+1}-autofunção. Em particular, $\hat{w}(x) \neq 0$ para $x \in \Omega$ q.t.p. com

$$\hat{w}_n(x) = \hat{w}_{0n}(x) + \hat{w}_{1n}(x) = \frac{w_{0n}(x)}{||w_n||} + \frac{w_{1n}(x)}{||w_n||} = \frac{w_n(x)}{||w_n||}$$

o que implica,

$$|w_n(x)| = ||w_n|| \cdot |\hat{w}_n(x)|.$$

Sendo $\hat{w}(x) \neq 0$ e $||w_n|| \to +\infty$, obtemos,

$$|w_n(x)| = ||w_n|| \cdot |\hat{w}_n(x)| \to +\infty \text{ quando } n \to +\infty,\ x \in \Omega \text{ q.t.p.} \tag{2.18}$$

Notemos que, $\limsup_{|s|\to+\infty} \dfrac{2F(x,w_n)}{w_n^2} \leq \lambda_{j+1}$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2F(x,w_n)}{w_n^2} \leq \lambda_{j+1},\ \forall\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ F(x,w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w_n^2 \leq 0,\ \forall\ n \geq n_0.$$

Além disso, $F(x,w_n) - \dfrac{\lambda_{j+1}}{2}w_n^2$ é uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, com

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \left[F(x,w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w_n^2\right] dx < +\infty,\ \text{logo,}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega \left[F(x,w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w_n^2\right] dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} \left[F(x,w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w_n^2\right] dx.$$

Usando a desigualdade acima, (2.17) e (2.18), obtemos,

$$\int_\Omega \left[F(x,w_n) - \frac{\lambda_{j+1}}{2}w_n^2\right] dx \to -\infty \text{ quando } n \to +\infty,$$

juntamente com (2.16), provamos a afirmação.

Portanto, $J(w) \to +\infty$, quando $||w|| \to +\infty,\ w \in W$. ■

Vamos demonstrar o Teorema 2.2 abaixo, faremos um enfraquecimento da condição de não-quadraticidade do infinito em F e mesmo assim vamos garantir a existência de solução não-trivial para o problema (1). Para esse propósito iremos utilizar a geometria do Teorema do Ponto de Sela e consequentemente o Teorema Geral Minimax provado no Capítulo 1, com isso, iremos garantir que o problema (1) tem solução não-trivial.

Teorema 2.2. Suponha que F satisfaz (6). Então o problema (1) tem solução $u \in H_0^1(\Omega)$ desde que:

1. F satisfaça (7) com $\lambda_j < L(x)$ em um conjunto de medida positiva; ou

2. F satisfaça (8) com $K(x) < \lambda_{j+1}$ em um conjunto de medida positiva.

Prova: Tomemos $S = W$ e $Q = \{v \in V : ||v|| \leq R\}$ com $R > 0$. Observemos que $\partial Q = \{v \in V : ||v|| = R\}$. Pelo Lema 2.2 temos a condição $(C)_c\ \forall\ c > 0$. Além disso,

$$|J(w)| \leq k,\ \forall\ w \in W \cap B_c(0), \text{ onde } B_c(0) = \{w \in W : ||w|| \leq c\}.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
|J(w)| &= \left|\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx - \int_\Omega F(x,w)dx\right| \leq \frac{1}{2}||w||^2 + \int_\Omega |F(x,w)|dx \\
&\leq c + \int_\Omega (a_1|w|^p + a_2)dx = c + a_1||w||_p^p + a_2|\Omega| \leq k \\
&\Rightarrow |J(w)| \leq k,
\end{aligned}
$$

onde k é uma constante. Logo, $J(w) \geq -k, \ \forall\ w \in W$. Dessa forma, tomemos

$$\beta \equiv \inf_{w \in W} J(w) < +\infty.$$

Pelo Lema 2.5, $J(v) \to -\infty$ quando $||v|| \to +\infty, v \in V$. Logo, $J(v) \leq -k_1, \ \forall\ v \in V$ onde $k_1 > 0$. Observemos que, $V \cap S_R(0) = \partial Q \subset V$, onde $S_R(0) = \{v \in V : ||v|| = R\}$. Assim,

$$J(v) \leq -k_1, \quad \forall\ v \in \partial Q.$$

Daí, tomemos $\sup_{v \in \partial Q} J(v) \equiv \alpha < \beta$.
Logo,

$$\sup_{u \in \partial Q} J(u) \equiv \alpha < \beta \equiv \inf_{u \in W} J(u).$$

Agora, vamos mostrar que S e ∂Q fazem um link. Primeiramente $S \cap \partial Q = \emptyset$. De fato, se existisse $u \in S \cap \partial Q$, teríamos

$$u \in S \text{ e } u \in \partial Q.$$

Consequentemente, $||u|| = R > 0$ com $u \in V$, mas $u \in S = W = V^\perp$. Daí, $||u|| = 0$ o que é um absurdo. Logo, $S \cap \partial Q = \emptyset$.

Agora vamos mostrar que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$, seja

$$\pi : H_0^1(\Omega) \to V \text{ a projeção de } H_0^1(\Omega) \text{ em } V$$

onde $h : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é uma aplicação contínua tal que $h(u) = u, \ \forall\ u \in \partial Q$.

Vamos provar que $0 \in \pi(h(Q))$. Para todo $t \in [0,1]$ e $u \in V$ defina $h_t(u) = t\pi(h(u)) + (1-t)u$ por $h_t : V \to V$, observemos que h_t é contínua e define uma homotopia de $h_0(u) = u$ com $h_1(u) = \pi \circ h(u)$. Além disso, $\forall\ u \in \partial Q$ temos,

$$
\begin{aligned}
h_t(u) &= t\pi(h(u)) + (1-t)u = t\pi(u) + (1-t)u = tu + u - tu = u \\
&\Rightarrow h_t(u) = u, \ \forall\ u \in \partial Q, \text{ ou seja, } h_t|_{\partial Q} = id, \ \forall\ t \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Com isto, o grau topológico $d(h_t, Q, 0)$ (vide Apêndice B) está bem definido, pois se $0 \in h_t(\partial Q)$ existe $u \in \partial Q$ tal que

$$h_t(u) = 0 \;\Rightarrow\; u = 0,$$

como $u \in \partial Q$, temos que $||u|| = R > 0$ o que é um absurdo. Assim, $0 \notin h_t(\partial Q)$.

Isso mostra que $d(h_t, Q, 0)$ está bem definido para todo $t \in [0,1]$. Pela propriedade de normalização, confira [2] ou Apêndice B deste trabalho, temos que $d(h_t, Q, 0) = 1$, pois $0 \in Q$. Agora definamos

$$H : [0,1] \times Q \to V \text{ por } H(t,u) = h_t(u) = t\pi(h(u)) + (1-t)u,$$

notemos que H é contínua. Além disso, $0 \notin H([0,1] \times \partial Q)$, pois se $0 \in H([0,1] \times \partial Q)$, então existe $(t,u) \in [0,1] \times \partial Q$ tal que

$$\begin{aligned} H(t,u) &= 0 \;\Rightarrow\; t\pi(h(u)) + (1-t)u = 0 \;\Rightarrow\; t\pi(u) + (1-t)u = 0 \\ &\Rightarrow\; tu + u - tu = 0 \;\Rightarrow\; u = 0, \end{aligned}$$

como $u \in \partial Q$ temos que $||u|| = R > 0$ com $u \in V$, mas $u \in S = W = V^{\perp}$. Daí, $||u|| = 0$. Absurdo!

Pela propriedade da invariância homotópica $d(H(t,\cdot), Q, 0) =$ constante, $\forall\ t \in [0,1]$. Uma vez que $h_t|_{\partial Q} = id$, $\forall\ t \in [0,1]$, em particular, $h_0(u) = h_1(u) = id$, $\forall\ u \in \partial Q$, obtemos que

$$d(\pi \circ h, Q, 0) = d(id, Q, 0) = 1.$$

Asim, $0 \in \pi \circ h(Q)$.

Novamente pelo Lema 2.5, $J(v) \to -\infty$ quando $||v|| \to +\infty, v \in V$.
Logo,

$$J(v) \leq -k_2,\ \forall\ v \in V \text{ onde } k_2 > 0.$$

Observemos que, $V \cap B_R(0) = Q \subset V$, onde $B_R(0) = \{v \in V : ||v|| \leq R\}$. Assim, $J(v) \leq -k_2, \quad \forall\ v \in Q$. Daí, tomemos $\sup\limits_{v \in Q} J(v) \equiv \xi < +\infty$.
Dessa forma,

$$\sup_{u \in Q} J(u) \equiv \xi < +\infty.$$

Assim, pelo Teorema Geral Minimax, o funcional J possui um valor crítico. Portanto, o problema (1) tem solução não-trivial.

■

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste apêndice, apresentamos alguns resultados usados neste trabalho. Alguns apresentamos a prova e em outros indicamos a referência onde a mesma se encontra.

Lema A.1. Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory com crescimento subcrítico, isto é,

$$|f(x,s)| \leq a_0|s|^{p-1} + b_0, \quad \forall \ \ s \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \ \ \text{q.t.p.}$$

com $a_0, b_0 > 0$ constantes, então

$$|F(x,s)| \leq a_1|s|^p + b_1|s|, \text{ com } a_1, b_1 > 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

Prova: De fato, suponhamos primeiro que $s \geq 0$.

$$\begin{aligned}
|F(x,s)| &= \left|\int_0^s f(x,t)dt\right| \leq \int_0^s |f(x,t)|dt \leq \int_0^s (a_0|t|^{p-1} + b_0)dt \\
&= \int_0^s (a_0 t^{p-1} + b_0)dt = \frac{a_0}{p}s^p + b_0 s = \frac{a_0}{p}|s|^p + b_0|s| \\
&= a_1|s|^p + b_1|s| \\
&\Rightarrow |F(x,s)| \leq a_1|s|^p + b_1|s|, \ \forall \ s \geq 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $s < 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
|F(x,s)| &= \left|\int_0^s f(x,t)dt\right| = \left|-\int_s^0 f(x,t)dt\right| \leq \int_s^0 |f(x,t)|dt \\
&\leq \int_s^0 (a_0|t|^{p-1}+b_0)dt = \int_s^0 [a_0(-t)^{p-1}+b_0]dt \\
&= -\int_{-s}^0 (a_0t^{p-1}+b_0)dt = \int_0^{-s} (a_0t^{p-1}+b_0)dt \\
&= -\left[\frac{a_0}{p}(-s)^p+b_0s\right] = \frac{a_0}{p}(-s)^p+b_0(-s) \\
&= a_1|s|^p+b_1|s| \\
&\Rightarrow |F(x,s)| \leq a_1|s|^p+b_1|s|,\ \forall\ s\in\mathbb{R} \text{ e } x\in\Omega \text{ q.t.p.}
\end{aligned}
$$

■

Proposição A.1. As condições de Landesman-Lazer [7] e de Ambrosetti-Rabinowitz [1] implicam que F satisfaz a condição (3) introduzida no Capítulo 1 desde que, $\mu \leq 1$ e $\mu \leq \theta$ respectivamente.

Prova: Considere uma função $f(x,s) = \lambda s + g(s)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assumimos que g satisfaça a condição Landesman-Lazer [7], isto é,

$$\lim_{|s|\to+\infty} g(s) = g_{\pm},\ \text{com } g_{\pm} > 0.$$

Assim,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{G(s)}{|s|} = |g_{\pm}|.$$

De fato,

$$\lim_{|s|\to+\infty} g(s) = g_{\pm},\ \text{com } g_{\pm} > 0.$$

Logo,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{G(s)}{|s|} = \lim_{s\to+\infty} \frac{G(s)}{s} = \lim_{s\to+\infty} g(s) = g_+$$

e

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{G(s)}{|s|} = -\lim_{s\to-\infty} \frac{G(s)}{s} = -\lim_{s\to-\infty} g(s) = -g_-$$

Assim,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{G(s)}{|s|} = |g_{\pm}|.$$

Dessa forma, F satistaz (3) para todo $\mu \leq 1$. Com efeito,

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} = \frac{[\lambda s + g(s)]s - 2[(\lambda s^2)/2 + G(s)]}{|s|^\mu} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu}$$

se $\mu = 1$, temos que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{s} = g_+ - 2g_+ = -g_+ < 0$$

e

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{-s} = -g_- - 2g_- = -3g_- < 0$$

Assim, para $\mu \leq 1$ temos que

$$\frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu |s|^{-1}|s|} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s| \cdot |s|^{\mu-1}} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|}|s|^{1-\mu}$$

daí,

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|}|s|^{1-\mu} = -\infty.$$

Logo, F satistaz (3) para todo $\mu \leq 1$.

Por outro lado, consideremos

$$0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)s, \quad \forall\ |s| \geq R, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega$$

para algum $\theta > 2$ e $R > 0$, introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [1] para obter a solução não-trivial no caso superquadrático. Notemos que,

$$F(x,s) \geq a_1|s|^\theta, \ \forall\ |s| \geq M, \text{ para algum } a_1 > 0.$$

De fato,

(i) $s > 0$:

$$\begin{aligned}
0 \quad < \quad & \theta F(x,s) \leq f(x,s)s \ \Rightarrow\ \frac{\theta}{s} \leq \frac{f(x,s)}{F(x,s)}, \ \forall\ s \geq M \text{ e } x \in \Omega \\
\Rightarrow \quad & \int_M^s \frac{\theta}{t}dt \leq \int_M^s \frac{f(x,t)}{F(x,t)}dt \ \Rightarrow\ \theta \ln|t|\big|_M^s \leq \ln|F(x,t)|\big|_M^s \\
\Rightarrow \quad & \theta \ln s - \theta \ln M \leq \ln F(x,s) - \ln F(x,M) \\
\Rightarrow \quad & \theta \ln \frac{s}{M} \leq \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,M)}\right) \ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{s}{M}\right)^\theta \leq \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,M)}\right)
\end{aligned}$$

Sendo ln uma função crescente, obtemos

$$\left(\frac{s}{M}\right)^{\theta} \leq \frac{F(x,s)}{F(x,M)} \Rightarrow \frac{s^{\theta}}{M^{\theta}} \leq \frac{F(x,s)}{F(x,M)}.$$

Assim,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,M)}{M^{\theta}} s^{\theta}, \ \forall \ s \geq M \text{ e } x \in \Omega$$

Seja $K_1 = \inf\limits_{x\in\Omega} F(x,s)$ onde $s \geq M$ e $x \in \Omega$.
Assim,

$$F(x,s) \geq \frac{K_1}{M^{\theta}} s^{\theta}, \ \forall \ s \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

Tomando $C_1 = \dfrac{K_1}{M^{\theta}} > 0$, obtemos

$$F(x,s) \geq C_1 s^{\theta}, \ \forall \ s \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

(ii) $s < 0$:

$$\begin{aligned}
0 \ &< \ \theta F(x,s) \leq f(x,s)s \ \Rightarrow \ \frac{f(x,s)}{F(x,s)} \leq \frac{\theta}{s}, \ \forall \ s \leq -M \text{ e } x \in \Omega \\
&\Rightarrow \ \int_s^{-M} \frac{f(x,t)}{F(x,t)} dt \leq \int_s^{-M} \frac{\theta}{t} dt \ \Rightarrow \ \ln|F(x,t)|\big|_s^{-M} \leq \theta \ln|t|\big|_s^{-M} \\
&\Rightarrow \ \ln F(x,-M) - \ln F(x,s) \leq \theta \ln|-M| - \theta \ln|s| \\
&\Rightarrow \ \ln\left(\frac{F(x,-M)}{F(x,s)}\right) \leq \theta \ln\frac{|-M|}{|s|} \ \Rightarrow \ \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,M)}\right) \leq \ln\left|\frac{-M}{s}\right|^{\theta}
\end{aligned}$$

Sendo ln uma função crescente, obtemos

$$\frac{F(x,-M)}{F(x,s)} \leq \left|\frac{-M}{s}\right|^{\theta} \Rightarrow \frac{F(x,s)}{F(x,M)} \leq \frac{|-M|^{\theta}}{|s|^{\theta}}.$$

Assim,

$$\frac{F(x,-M)}{M^{\theta}} |s|^{\theta} \leq F(x,s), \ \forall \ s \leq -M \text{ e } x \in \Omega$$

Seja $K_2 = \inf\limits_{x\in\Omega} F(x,-M)$, onde $s \leq -M$ e $x \in \Omega$.
Assim,

$$\frac{K_2}{M^{\theta}} |s|^{\theta} \leq F(x,s), \ \forall \ s \leq -M \text{ e } x \in \Omega.$$

Tomando $C_2 = \dfrac{K_2}{M^\theta} > 0$, obtemos

$$C_2|s|^\theta \leq F(x,s), \ \forall \ s \leq -M \text{ e } x \in \Omega.$$

Tomando $a_1 = \min\{C_1, C_2\}$, obtemos

$$a_1|s|^\theta \leq F(x,s), \ \forall \ |s| \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

Logo,

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \geq (\theta - 2)\frac{F(x,s)}{|s|^\mu} \geq (\theta-2)a_1|s|^{\theta-\mu}.$$

Assim, F satisfaz (3) para todo $\mu \leq \theta$. ■

Lema A.2. 1. se $\lambda_j \lneqq L(x)$ para todo $x \in \Omega$ então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx \leq -\delta_1||v||^2, \ \forall \ v \in V;$$

2. se $K(x) \lneqq \lambda_{j+1}$ para todo $x \in \Omega$ então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$||w||^2 - \int_\Omega K(x)w^2dx \geq \delta_2||w||^2, \ \forall \ w \in W.$$

Prova: Vamos denotar $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \lambda_j < L(x)\}$ um conjunto de medida positiva e $\Omega_2 = \{x \in \Omega : K(x) < \lambda_{j+1}\}$ um conjunto de medida positiva. Iremos provar a primeira afirmação.
Defina $\psi : V \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(v) = ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx, \ v \in V.$$

Sendo $||v||^2 \leq \lambda_j||v||_2^2, \ v \in V$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(v) &= ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx \leq \lambda_j||v||_2^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx = \lambda_j\int_\Omega v^2dx - \int_\Omega L(x)v^2dx \\
&= \int_\Omega[\lambda_j - L(x)]v^2dx \leq \int_{\Omega_1}[\lambda_j - L(x)]v^2dx \leq 0, \\
&\Rightarrow \ \psi(v) \leq 0, \quad \forall \ v \in V.
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que se $\psi(v) = 0$ então $v \equiv 0$. De fato, se $\psi(v) = 0$, então

$$0 = \psi(v) = ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx = \int_\Omega [\lambda_j - L(x)]v^2dx \leq \int_{\Omega_1} [\lambda_j - L(x)]v^2dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_1} [\lambda_j - L(x)]v^2dx = 0.$$

Logo, $v(x) = 0$. Além disso, como $\lambda_j < L(x)$ e $||v||^2 \leq \lambda_j||v||_2^2$, obtemos,

$$0 = \psi(v) = ||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx \leq ||v||^2 - \int_\Omega \lambda_j v^2dx = ||v||^2 - \lambda_j||v||_2^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \ ||v||^2 - \lambda_j||v||_2^2 = 0 \ \Rightarrow \ ||v||^2 = \lambda_j||v||_2^2.$$

Assim, v é λ_j-autofunção. Sendo $v(x) = 0$ num conjunto de medida positiva, segue pelo Princípio da Continuação Única que $v \equiv 0$. Devemos mostrar que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$||v||^2 - \int_\Omega L(x)v^2dx \leq -\delta_1||v||^2, \ \forall \ v \in V,$$

suponhamos que a afirmação seja falsa, então existe uma sequência $v_n \in V$ tal que

$$||v_n|| = 1 \text{ e } \psi(v_n) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta = \dfrac{1}{n}$ e uma sequência $z_n \in V$ com

$$||z_n||^2 - \int_\Omega L(x)z_n^2dx > -\frac{1}{n}||z_n||^2 \Rightarrow \left|\left|\left(\frac{z_n}{||z_n||}\right)\right|\right|^2 - \int_\Omega L(x)\left(\frac{z_n}{||z_n||}\right)^2dx > -\frac{1}{n}.$$

Tomemos $v_n = \dfrac{z_n}{||z_n||}$, daí, a última desigualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\psi(v_n) = ||v_n||^2 - \int_\Omega L(x)v_n^2dx > -\frac{1}{n}.$$

Como $\psi(v_n) \leq 0$, obtemos, $-\dfrac{1}{n} < ||v_n||^2 - \displaystyle\int_\Omega L(x)v_n^2dx \leq 0$, e daí

$$\lim_{n\to+\infty} \psi(v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(||v_n||^2 - \int_\Omega L(x)v_n^2dx\right) = 0.$$

Assim, existe uma sequência $v_n \in V$ tal que $||v_n|| = 1$ e $\psi(v_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Sendo $\dim V < +\infty$, suponhamos que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$ onde $v \in V$. Assim,

$$\limsup_{n\to+\infty} \psi(v_n) \leq \psi(v) \leq 0 \ \Rightarrow \ \psi(v) = 0 \ \Rightarrow \ v = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = v = 0.$$

Daí, $\lim\limits_{n\to+\infty}\psi(v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(||v||^2-\int_\Omega L(x)v_n^2dx\right)=0$. Por outro lado,

$$\lim_{n\to+\infty}\psi(v_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(||v||^2-\int_\Omega L(x)v_n^2dx\right)=1,$$

o que é um absurso. Agora, vamos provar a segunda afirmação.
Defina $\nu: W\to\mathbb{R}$ por

$$\nu(w)=||w||^2-\int_\Omega K(x)w^2dx,\ \ w\in W.$$

Sendo $||w||^2\geq\lambda_{j+1}||w||_2^2,\ \forall\ w\in W$, temos

$$\begin{aligned}
\nu(w) &= ||w||^2-\int_\Omega K(x)w^2dx\geq\lambda_{j+1}||w||_2^2-\int_\Omega K(x)w^2dx\\
&= \lambda_{j+1}\int_\Omega w^2dx-\int_\Omega K(x)w^2dx=\int_\Omega[\lambda_{j+1}-K(x)]w^2dx\\
&\geq \int_{\Omega_2}[\lambda_{j+1}-K(x)]w^2dx\geq 0\\
&\Rightarrow \nu(w)\geq 0,\quad\forall\ w\in W.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que se $\nu(w)=0$ então $w\equiv 0$. De fato, se $\nu(w)=0$ então

$$\begin{aligned}
0 &= \nu(w)=||w||^2-\int_\Omega K(x)w^2dx\geq\int_\Omega[\lambda_{j+1}-K(x)]w^2dx\\
&\geq \int_{\Omega_2}[\lambda_{j+1}-K(x)]w^2dx\geq 0\\
&\Rightarrow \int_{\Omega_1}[\lambda_{j+1}-K(x)]w^2dx=0.
\end{aligned}$$

Logo, $w(x)=0$. Além disso, como $\lambda_{j+1}>K(x)$ e $||w||^2\geq\lambda_{j+1}||w||_2^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \nu(w)=||w||^2-\int_\Omega K(x)w^2dx\geq||w||^2-\int_\Omega\lambda_{j+1}w^2dx\\
&= ||w||^2-\lambda_{j+1}||w||_2^2\geq 0\\
&\Rightarrow ||w||^2-\lambda_{j+1}||w||_2^2=0,\ \text{o que implica}\ ||w||^2=\lambda_{j+1}||w||_2^2.
\end{aligned}$$

Assim, w é λ_{j+1}-autofunção. Sendo $w(x) = 0$ num conjunto de medida positiva, segue pelo Princípio da Continuação Única que $w \equiv 0$. Devemos mostrar que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$||w||^2 - \int_\Omega K(x)w^2 dx \geq \delta_2 ||w||^2, \ \forall \ w \in W.$$

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então existe uma sequência $v_n \in V$ tal que

$$||w_n|| = 1 \text{ e } \nu(w_n) \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta = \dfrac{1}{n}$ e uma sequência $s_n \in W$ com

$$||s_n||^2 - \int_\Omega K(x)s_n^2 dx < \frac{1}{n}||s_n||^2 \Rightarrow \left|\left|\left(\frac{s_n}{||s_n||}\right)\right|\right|^2 - \int_\Omega K(x)\left(\frac{s_n}{||s_n||}\right)^2 dx < \frac{1}{n}.$$

Tomemos $w_n = \dfrac{s_n}{||s_n||}$. Daí, a última desigualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nu(w_n) = ||w_n||^2 - \int_\Omega K(x)w_n^2 dx < \frac{1}{n}.$$

Desde que $\nu(w_n) \geq 0$, obtemos, $0 \leq ||v_n||^2 - \displaystyle\int_\Omega K(x)w_n^2 dx < \frac{1}{n}$, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(w_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(||w_n||^2 - \int_\Omega K(x)w_n^2 dx\right) = 0.$$

Assim, existe uma sequência $w_n \in W$ tal que $||w_n|| = 1$ e $\nu(w_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Passando uma subsequência se necessário, seja $w_n \rightharpoonup w$ onde $w \in W$ e $w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$ tal que

$$0 \leq \nu(w) \leq \liminf_{n\to+\infty} \nu(w_n) = 0 \ \Rightarrow \ \nu(w) = 0 \ \Rightarrow \ w = 0.$$

Assim, $w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$ com $w = 0$. Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(w_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(||w||^2 - \int_\Omega K(x)w_n^2 dx\right) = 0.$$

Por outro lado, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(w_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(||w||^2 - \int_\Omega K(x)w_n^2 dx\right) = 1$$

o que é um absurdo, e isto finaliza a prova.

$\blacksquare$

Lema A.3. (**Lema de Fatou's**) (Ver [10]) Se (f_n) é uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz:

1. para todo n, $f_n \geq 0$ q.t.p.
2. $\sup_n \displaystyle\int f_n < +\infty$.

para quase todo $x \in \Omega, f(x) = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \leq +\infty$, então, $f \in L^1$ e

$$\int f \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n.$$

Proposição A.2. Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com $|f(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^p$ onde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $0 \leq p < (N+2)(N-2)^{-1}, N \geq 3$. Além disso, considere

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt \text{ e } J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Se (u_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $J'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$ então (u_n) possui uma subsequência convergente.

Prova: A prova encontra-se na Proposição B.35 de [14].

Apêndice B

Grau Topológico

Neste Apêndice, vamos lembrar a definição de Grau de Brouwer e suas propriedades. Estes fatos são utilizados nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.2. Além disso, uma das aplicações da Teoria do Grau é usada no Teorema do Ponto de Sela, conforme Rabinowitz [14]. A referência da definição do Grau de Brouwer é o livro do Costa [2].

Seja $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$, onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e limitado. Dado $b \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial X)$, o problema consiste em resolver a equação

$$f(x) = b \text{ para } x \in X. \tag{B.1}$$

Isto pode ser feito usando o chamado grau de Brouwer da função f, em relação ao conjunto X no ponto b. Denotemos o grau por $d(f, X, b)$, o qual é um número inteiro que representa a grosso modo, o número de soluções para a equação (B.1).

Primeiro, consideremos o caso regular, isto é, com $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial X)$ um valor regular, ou seja, $f'(y)$ é inversível para todo $y \in f^{-1}(b)$.

Dessa forma, definimos

$$d(f, X, b) = \sum_{y \in f^{-1}(b)} sgn \det[f'(y)],$$

onde

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0, \\ -1, & se \quad t < 0. \end{cases}$$

A soma acima é finita, conforme [2].

Valem as seguintes propriedades para o grau:

1. (**Normalização**) Se $Id : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade, então

$$d(Id, X, b) = \begin{cases} 1, & se \quad b \in X \\ 0, & se \quad b \notin X \end{cases}$$

2. (**Existência**) Se $d(f, X, b) \neq 0$, então existe uma solução $x_0 \in X$ de (B.1).

3. (**Aditividade**) Se $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, então

$$d(f, X, b) = d(f, X_1, b) + d(f, X_2, b).$$

4. (**Continuidade**) Seja $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial X)$ um valor regular, então existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda função contínua $\sigma : X \to \mathbb{R}^n$ com

$$\sup_{x \in \overline{X}} ||\sigma(x) - f(x)|| < \epsilon,$$

vale a seguinte igualdade $d(f, X, b) = d(\sigma, X, b)$.

5. (**Invariância Homotópica**) Se $H \in C([0,1] \times \overline{X}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H([0,1] \times \partial X)$, então

$$d(H(t, \cdot), X, b) = constante \quad \forall\ t \in [0,1].$$

6. (**Dependência na Fronteira**) Se $\sigma = f$ em ∂X, então

$$d(f, X, b) = d(\sigma, X, b).$$

Dessa forma, podemos estender a definição $d(f, X, b)$ com a função $f \in C(\overline{X}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial X)$ (veja [2]).

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti & P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. funct. Analysis, 1973.

[2] D. G. Costa, *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, 2007.

[3] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems*, J. diff. Eqns. 1994.

[4] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Un problème elliptique non-quadratique à L'infini*, C. r. Acad. Sci. Paris, 1992.

[5] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Variational Elliptic Problems Which Are Nonquadratic at Infinity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1994.

[6] D. G. Costa & A. S. Oliveira, *Existence of Solution for a Class of Semilinear Elliptic Problems at Double Resonance*, Bol. Soc. Bras. Mat., 1988.

[7] E. M. Landesman & A. C. Lazer *Nonlinear pertubations of linear elliptic boundary value problems at ressonance*, J. Math. Mech, 1970.

[8] G. Cerami, *Un criterio de esistenza per i punti critici su varietà ilimitate*, Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett. 1978.

[9] G. Cerami, *Sull'esistenza di autovalori per un problema al contorno non lineare*, Annali. Mat. pura appl., to appear.

[10] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[11] J. Mawhin, J. R. Ward & M. Willem *Variational Methods and Semilinear Elliptic Equations*, Archsration, Mech, Analysis, 1986.

[12] P. Bartolo, V. Benci & D. Fortunato, *Abstract Critical Point Theorems and Applications to Some Nonlinear Problems With Strong Resonance at Infinity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1983.

[13] P. H. Rabinowitz, *Variantional Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems*, Edited by G. Prodi, pp. 141- 195, Edizioni Cremonese, Roma, 1974.

[14] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory With Apllications to Differential Equations*, American Mathematical Society, 1988.

[15] R. S. Palais, *Ljusternik-Schnirelman Theory on Banach Manifolds*, Topology, 1966.

[16] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, 1964.