Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Álgebras de Rees

Ricardo Burity Croccia Macedo

João Pessoa – PB
março de 2013

Ricardo Burity Croccia Macedo

Álgebras de Rees

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPB, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

João Pessoa – PB
março de 2013

M141a Macedo, Ricardo Burity Croccia.
Álgebras de Rees / Ricardo Burity Croccia Macedo.- João Pessoa, 2013.
51f.
Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Normalidade. 3. Redução.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Álgebras de Rees

Ricardo Burity Croccia Macedo

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovado em: 15 / 03 / 2013

COMISSÃO EXAMINADORA:

Cleto Brasileiro Miranda Neto

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis – UFPE
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta – UFPB
(Suplente)

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais.

À Renata.

A Rodrigo.

Ao professor Cleto Brasileiro, por ser o meu orientador e pelos valiosos conselhos. Aos professores Aron Simis e Roberto Bedregal, por participarem da banca, e a todos os outros professores do departamento, pela contribuição na minha formação. Em especial aos professores, Alexandre Simas, Carlos Bocker, Fernando Xavier e Napoleón Caro.

Aos meus amigos, pelos momentos compartilhados.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos a noção de álgebra de Rees de um ideal e propriedades básicas. Tal conceito será relacionado com normalidade de anéis e ideais, e redução de ideais. Por fim, exibiremos a álgebra de Rees de um módulo, mostrando algumas generalizações de resultados do caso de ideais.

Palavras-chave: álgebra de Rees, normalidade, redução.

Abstract

In this work, we present the notion of Rees algebra of an ideal and some of its basic properties. Such concept is related to the normality of rings and ideals, and to reductions of ideals as well. Finally, we shall exhibit the Rees algebra of a module, proving some generalizations of results in the case of ideals.

Keywords: Rees algebra, normality, reduction.

Sumário

Introdução

Sejam A um anel (neste trabalho, os anéis sempre serão comutativos com identidade e quase sempre Noetherianos) e $I = (f_1, \ldots, f_m)$ um ideal finitamente gerado de A. A álgebra de Rees de I definida por $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n \simeq A[f_1 t, \ldots, f_m t] \subseteq A[t]$ é também conhecida por álgebra de explosão de I. Pelo lado geométrico, considere $\mathbb{K}$ um corpo e a aplicação $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{P}^1$ que a cada ponto $(x, y) \neq (0,0)$ associa uma direção $(x : y)$ da reta passando por $(0,0)$ e (x, y). O gráfico deste mapa se escreve como:

$$\Gamma = \{((x,y),(xt : yt)) \in (\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{P}^1 \mid (x,y) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\},\ t \in \backslash K\{0\}\}$$

$$= \{((x,y),(z : w)) \in (\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{P}^1 \mid (z : w) = (x : y)\}$$

Assim, associados a estes conjuntos temos as duas $\mathbb{K}$-álgebras: $\mathbb{K}[x, y, xt, yt] = \mathbb{K}[x, y][xt, yt] \subseteq \mathbb{K}[x, y][t]$ e $\mathbb{K}[x, y, z, w]/(xw - yz)$ que são isomorfas como $\mathbb{K}$-álgebras, assim como $\mathbb{K}[x, y]$-álgebras.

No primeiro capítulo apresentaremos as noções de álgebra tensorial e simétrica, trataremos de propriedades que serão úteis para introduzir o conceito de álgebra de Rees. Exibiremos a classe dos ideais de tipo linear, isto é, quando a álgebra simétrica de tal ideal é isomorfa a sua álgebra de Rees (neste caso, mostraremos que ideais gerados por sequências regulares são de tipo linear). Ainda, calcularemos a dimensão da álgebra de Rees de um ideal e apresentaremos o anel graduado associado, assim como a fibra especial e sua dimensão (o analytic spread).

No segundo capítulo, provaremos resultados sobre normalidade e relacionaremos com o nosso objeto de estudo. No terceiro capítulo, exploraremos a noção de redução de ideais, provando a existência de reduções minimais geradas por exatamente a dimensão da fibra especial. O quarto capítulo será para a apresentação da álgebra de Rees de um módulo, cálculo de sua dimensão e generalização da idéia de redução de ideais.

Capítulo 1

Álgebra de Rees de um ideal

1.1 Álgebras tensorial e simétrica

Seja A um anel comutativo com identidade. Dizemos que A é um *anel $\mathbb{Z}$-graduado* se existir uma decomposição de $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$, como um $\mathbb{Z}$-módulo, tal que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, $\forall\ i, j \in \mathbb{Z}$. Um elemento $a \in A$ é dito *homogêneo* se $a \in A_i$ para algum i, e neste caso, i é chamado de *grau* de a. Um *ideal homogêneo* é um ideal gerado por elementos homogêneos.

Observação 1.1. Note que dado $a \in A$ sempre podemos escrevê-lo da forma $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_m}$ tal que $a_{i_j} \in A_{i_j},\ j = 1 \ldots, m$. Além disso, temos a equivalência $I \subseteq A$ é um ideal homogêneo $\Longleftrightarrow$ dado $a \in I,\ a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_m}$, com $a_{i_j} \in A_{i_j},\ j = 1 \ldots, m$, então $a_{i_j} \in I,\ j = 1, \ldots, m$.

Seja A um anel $\mathbb{Z}$-graduado. Um *A-módulo graduado* é um A-módulo M com uma decomposição $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$, como um $\mathbb{Z}$-módulo, tal que $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$, $\forall\ i, j \in \mathbb{Z}$. Cada M_i é chamada de *i-ésima componente homogênea (ou graduada)* de M. Um elemento $m \in M$ é dito *homogêneo de grau i* se $m \in M_i$, e os elementos de A_i são chamados de *formas de grau i*. Note que A_0 é um anel tal que $1_A \in A_0$ e que os M_i são A_0-módulos. Um homomorfismo de A-módulos graduados $\varphi : M \longrightarrow N$ é dito *graduado* se $\varphi(M_i) \subseteq N_i$, $\forall\ i$. Um A-submódulo de M, N, é dito *A-submódulo graduado* se N é um A-módulo graduado e o homomorfismo de inclusão, $N \hookrightarrow M$, é um homomorfismo graduado, equivalentemente, $N_i = N \cap M_i, \forall\ i$. Em particular, se φ é um homomorfismo graduado então $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ são graduados.

Além disso, se $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ é um A-módulo graduado e $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ é um A-submódulo graduado tal que $N_i \subseteq M_i$, $\forall\ i$, então M/N é um A-módulo graduado com $(M/N)_i = M_i/N_i$.

Seja B um anel. Uma *B-álgebra graduada* é uma B-álgebra A que é também um anel graduado, de tal modo que a imagem do homomorfismo estrutural $B \longrightarrow A$ está contido em A_0, a parte homogênea de grau zero. Quando A for uma B-álgebra graduada gerada apenas por elementos de grau positivo então diremos que A é uma *B-álgebra $\mathbb{N}$-graduada*. Um homomorfismo de B-álgebras graduadas é um homomorfismo de B-álgebras que preserva grau.

Seja M um A-módulo. Dado n inteiro positivo definimos $T^n(M) = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{n}$ e $T^0(M) = A$. A *álgebra tensorial de* M é a álgebra graduada não-comutativa

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M),$$

onde o produto é induzido pela justaposição, isto é, o produto de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ por $y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$ é definido por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$. A sequência $(1_A, 0, \ldots,)$ é a unidade de $T(M)$, o mapa $A \longrightarrow T(M)$ definido por $a \longmapsto (a, 0, \ldots)$ é um homomorfismo de anéis que é um isomorfismo sobre a sua imagem $T^0(M)$. O mapa $M \longrightarrow T(M)$ definido por $m \longmapsto (0, m, 0, \ldots)$ é um homomorfismo de A-módulos que é um isomorfismo sobre a sua imagem $T^1(M)$. Além disso, $T(M)$ é gerado como A-álgebra por $T^1(M)$.

Proposição 1.1. Algumas propriedades da álgebra tensorial. Sejam M, N A-módulos.

i. Dado um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M \longrightarrow N$ existe um único homomorfismo de A-álgebras $T(\varphi) : T(M) \longrightarrow T(N)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r] & T(N) \\ M \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] & N \arrow[u] \end{tikzcd}$$

   Assim, temos definido um funtor covariante, T, da categoria dos A-módulos na categoria das A-álgebras. Além disso, $T(\varphi)$ é um homomorfismo de A-álgebras graduadas, assim a construção também define um funtor T da categoria dos A-módulos na categoria das A-álgebras graduadas.

ii. **(Propriedade universal)** Seja $\varphi : M \longrightarrow S$ um homomorfismo de A-módulos, onde S é uma A-álgebra. Então existe um único homomorfismo de A-álgebras $\Phi : T(M) \longrightarrow S$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S \\ T(M) \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

   Além disso, se existem uma A-álgebra B e um homomorfismo de A-módulos $\nu : M \to B$ satisfazendo a propriedade universal da álgebra tensorial então existe um único isomorfismo $\Psi : T(M) \to B$ tal que $\Psi(m) = \nu(m)$, $\forall\, m \in M$.

Por fim, se S é uma A-álgebra graduada e $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq S_1$, então Φ é um homomorfismo de A-álgebras graduadas.

Demonstração. i. Definamos o homomorfismo de A-módulos $T(\varphi) = 1_A \oplus \varphi \oplus \varphi \otimes \varphi \oplus \cdots = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \varphi^{\otimes i}$, onde $\varphi^{\otimes i} = \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi}_{i}$ (proveniente da propriedade universal do produto tensorial aplicada ao homomorfismo A-multilinear $\varphi_n : M \times \cdots \times M \to S$ que associa $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_n)$). Por construção, segue que o diagrama é comutativo e também que $T(\varphi)$ é um homomorfismo de A-álgebras que preserva grau. Além disso, $T(\varphi)$ é único homomorfismo que faz o diagrama comutar pois se $\psi : T(M) \longrightarrow T(N)$ é outro homomorfismo de A-álgebra que faz o diagrama comutar, então dado $m \in M$, identificado m com sua imagem em $T(M)$, temos que $\psi(m) = T(\varphi)(m) = \varphi(m) \Longrightarrow m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \longmapsto \psi(m_1) \otimes \cdots \otimes \psi(m_n) = \varphi(m_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(m_n) = \varphi^{\otimes n}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n)$.

ii. Analogamente ao item anterior. Defina Φ da seguinte maneira: para $n \geq 2$, $T^n(M) \longrightarrow S$ dado por $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \longmapsto \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_n)$. Para $n = 1$, considere a própria $\varphi : T^1(M) = M \longrightarrow S$ e para $n = 0$ o homomorfismo estrutural $A \longrightarrow S$. Assim, induzimos um homomorfismo de A-módulos $\Phi : T(M) \longrightarrow S$ que faz o diagrama comutar. Pela definição de produto em $T(M)$ temos que Φ é homomorfismo de anéis e é único, com a propriedade de comutar o diagrama, por construção.

Provemos agora a unicidade, a menos de isomorfismo, de $T(M)$ em satisfazer a propriedade universal. De fato, como $M \xrightarrow{i} T(M)$ e $M \xrightarrow{\nu} B$ satisfazem a propriedade universal segue que existem $\Upsilon : B \to T(M)$ e $\Psi : T(M) \to B$ tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\nu"'] & T(M) \\ B \arrow[ur, "\Upsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "i"'] & B \\ T(M) \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Isto é, $i = \Upsilon \circ \nu = (\Upsilon \circ \Psi) \circ i$ e $\nu = \Psi \circ i = (\Psi \circ \Upsilon) \circ \nu$. Além disso, podemos construir os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & T(M) \\ T(M) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_{T(M)}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\nu"'] & B \\ B \arrow[ur, "\mathrm{Id}_B"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, pela unicidade da propriedade universal, temos que $\Upsilon \circ \Psi = \mathrm{Id}_{T(M)}$ e $\Psi \circ \Upsilon = \mathrm{Id}_B$ ou seja, Ψ é um isomorfismo.

$\square$

A *álgebra simétrica de* M, denotada por $\mathrm{Sym}_A(M)$ ou simplesmente $\mathrm{Sym}(M)$, é a álgebra quociente definida por

$$\mathrm{Sym}(M) = T(M)/\mathcal{I},$$

onde $\mathcal{I} = (x \otimes y - y \otimes x,\ x, y \in M) \subseteq T(M)$ ideal bilateral. Agora, note que estamos tratando de uma álgebra comutativa. Como $\mathcal{I}$ é um ideal graduado gerado por elementos homogêneos de grau 2, $x \otimes y, y \otimes x \in T^2(M)$, temos que a álgebra simétrica é graduada por

$$\mathrm{Sym}_n(M) = T^n(M)/\mathcal{I} \cap T^n(M), \quad \mathrm{Sym}_0(M) = A.$$

Além disso, a projeção $T(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}(M)$ é um homomorfismo de A-álgebras graduadas. A composição $A \longrightarrow T(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}(M)$ é um homomorfismo de anéis que sobre $\mathrm{Sym}_0(M)$ é um isomorfismo. Assim como $M \longrightarrow T(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}(M)$ é um homomorfismo de A-módulo que sobre $\mathrm{Sym}_1(M)$ é um isomorfismo.

Proposição 1.2. Algumas propriedades da álgebra simétrica. Sejam M, N A-módulos.

i. Dado um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M \longrightarrow N$ existe um único homomorfismo de A-álgebras comutativas $\mathrm{Sym}(\varphi) : \mathrm{Sym}(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}(N)$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}(M) \arrow[r] & \mathrm{Sym}(N) \\ M \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Assim, temos definido um funtor covariante, Sym, da categoria dos A-módulos na categoria das A-álgebras comutativas. Além disso, $\mathrm{Sym}(\varphi)$ é um homomorfismo de A-álgebras graduadas, assim a construção também define um funtor Sym da categoria dos A-módulos na categoria das A-álgebras comutativas graduadas.

ii. **(Propriedade universal)** Seja $\varphi : M \longrightarrow B$ um homomorfismo de A-módulos, onde B é uma A-álgebra comutativa. Então existe um único homomorfismo de A-álgebras $\Phi : \mathrm{Sym}(M) \longrightarrow B$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \\ \mathrm{Sym}(M) \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Além disso, se existem uma A-álgebra C e um homomorfismo de A-módulos $\nu : M \to C$ satisfazendo a propriedade universal da álgebra simétrica então existe um único isomorfismo $\Psi : \mathrm{Sym}(M) \to C$ tal que $\Psi(m) = \nu(m),\ \forall\, m \in M$.

Por fim, se B é uma A-álgebra graduada e $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq B_1$, então Φ é um homomorfismo de A-álgebras graduadas.

Demonstração. i. O homomorfismo de A-álgebras graduadas $T(\varphi) : T(M) \longrightarrow T(N)$ mapeia $x \otimes y - y \otimes x$ em $\varphi(x) \otimes \varphi(y) - \varphi(y) \otimes \varphi(x)$, sendo assim podemos induzir o homomorfismo Φ a partir de $T(\varphi)$ simplesmente passando ao quociente. Note que Φ é homomorfismo de A-álgebras comutativas graduadas que faz o diagrama comutar. A unicidade decorre do fato de $T(\varphi)$ ser única com a propriedade semelhante.

ii. Segue dos resultados feitos para $T(M)$. E a unicidade da propriedade universal da álgebra simétrica é provada de forma análoga ao caso da álgebra tensorial.

□

Observação 1.2. Note que se M é um A-módulo livre de posto finito e igual a n então a álgebra simétrica de M é o anel de polinômios em n indeterminadas com coeficientes em A.

De fato, seja $\{m_1, \ldots, m_n\}$ uma base do A-módulo M. Considere o homomorfismo de A-módulos $\vartheta : M \to A[t_1, \ldots, t_n]$ definido por $m_i \mapsto t_i$. Agora, seja B uma A-álgebra comutativa e $\lambda : M \to B$ um homomorfismo de A-módulos. Defina $\Omega : A[t_1, \ldots, t_n] \to B$ por $f(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(\lambda(m_1), \ldots, \lambda(m_n))$, note que Ω é um homomorfismo de A-álgebras. Além disso, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\vartheta"'] & B \\ A[t_1, \ldots, t_n] \arrow[ur, "\Omega"'] & \end{tikzcd}$$

Pela propriedade universal da álgebra simétrica, segue que $\mathrm{Sym}(M) = A[t_1, \ldots, t_n]$.

Observação 1.3. Sejam A um anel, M, N A-módulos e $\varphi : M \to N$ um homomorfismo de A-módulos. Se φ é sobrejetor então $T(\varphi) : T(M) \to T(N)$ (definido na **Proposição 1.1**) é sobrejetor e seu núcleo é o ideal bilateral de $T(M)$ gerado por $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

De fato, $T(\varphi) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \varphi^{\otimes i}$, onde $\varphi^{\otimes i} = \underbrace{\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi}_{i}$, logo, $T(\varphi)$ é sobrejetor. Além disso, $\mathrm{Ker}(\varphi^{\otimes i})$ é o submódulo de $T^i(M)$ gerado por $m_1 \otimes \cdots \otimes m_i$ tal que pelos menos algum $m_j \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Portanto, $\mathrm{Ker}(T(\varphi))$ é o ideal gerado por $\mathrm{Ker}(\varphi)$ em $T(M)$. O mesmo resultado é válido para a álgebra simétrica.

Sejam A um anel Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Considere $\{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de geradores de M, defina a aplicação A-linear $\varphi : A^n \longrightarrow M$ por $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n$. Esta construção é equivalente a sequência exata curta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to A^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0.$$

Neste caso, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é denominado *módulo de relações dos geradores* $m_1, \ldots, m_n$ e denotado por $\mathrm{Syz}(M)$, mais precisamente, $\mathrm{Syz}(M) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in A^n \mid b_1 m_1 + \ldots + b_n m_n = 0\}$, cada $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{Syz}(M)$ é chamado *sizigia de* M (a rigor, de $\{m_1, \ldots, m_n\}$). Sendo A Noetheriano, temos que $\mathrm{Syz}(M)$ é finitamente gerado, assim podemos proceder da seguinte forma: suponha que $\mathrm{Syz}(M)$ é gerado por m elementos, assim podemos considerar a sequência exata curta,

$$0 \to \mathrm{Syz}(\mathrm{Syz}(M)) = \mathrm{Syz}_2(M) \to A^m \to \mathrm{Syz}(M) \to 0,$$

que por composição obtemos a sequência exata

$$A^m \to A^n \to M \to 0,$$

chamada de *apresentação livre de M*. Denote por L_M a matriz $n \times m$ que representa a aplicação $A^m \to A^n$. A seguinte proposição está no contexto desse parágrafo

Proposição 1.3. Sejam A um anel Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Se $\{m_1, \ldots, m_n\}$ é um conjunto de geradores de M então

$$\mathrm{Sym}(M) \simeq \frac{A[t_1, \ldots, t_n]}{(\sum_{i=1}^n c_i t_i \mid \sum_{i=1}^n c_i m_i = 0)} = \frac{A[t_1, \ldots, t_n]}{(\sum_{i=1}^n a_{ij} t_i)},$$

onde $L_M = (a_{ij})_{n \times m}$.

Demonstração. Considere uma apresentação livre de M. Pelas propriedades da álgebra simétrica temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A^m \arrow[r, "\psi"] & A^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& A[t_1, \ldots, t_n] \arrow[r] & \mathrm{Sym}(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Assim, $\mathrm{Sym}(M) \simeq A[t_1, \ldots, t_n]/J$, onde J é o ideal de $A[t_1, \ldots, t_n]$ gerado por $\sum_{i=1}^n c_i t_i$ tais que $\sum_{i=1}^n c_i m_i = 0$. Logo, $(c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\psi)$. Assim, $(c_1, \ldots, c_n)^T = L_M(d_1, \ldots, d_m)^T$. Logo, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos que $c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} d_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i t_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{ij} d_j) t_i = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{ij} t_i) d_j$. Portanto, $J \subseteq (\sum_{i=1}^n a_{ij} t_i)$. A outra inclusão segue do fato de que os vetores-coluna da matriz L_M são geradores de $\mathrm{Syz}(M) = \mathrm{Im}(\psi)$.

□

Duas propriedades sobre a álgebra simétrica serão apresentadas na próxima proposição.

Proposição 1.4. Sejam A um anel e M um A-módulo. Sejam I um ideal de A e S um conjunto multiplicativo de A. Então,

i. $\mathrm{Sym}_A(M) \otimes A/I \simeq \mathrm{Sym}_{A/I}(M/IM)$.

ii. $\mathrm{Sym}_A(M) \otimes A_S \simeq \mathrm{Sym}_{A_S}(M_S)$

Demonstração. O item i. segue da seguinte propriedade do produto tensorial: seja M é um A-módulo qualquer então $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \frac{M}{IM}$. Analogamente, o item ii. segue do seguinte isomorfismo: $M \otimes_A A_S \simeq M_S$.

□

1.2 Álgebra de Rees de um ideal finitamente gerado

Sejam A um anel e $I \subseteq A$ um ideal. A *álgebra de Rees de I*, denotada por $\mathcal{R}(I)$ ou $A[It]$, é o subanel de $A[t]$

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n = A + It + \cdots + I^n t^n + \cdots \subseteq A[t],$$

onde t é uma indeterminada. Note que se I é finitamente gerado, digamos por $f_1, \ldots, f_k$, então

$$\mathcal{R}(I) = A[f_1 t, \ldots, f_k t] \subseteq A[t].$$

De fato, basta notar que o homomorfismo de A-álgebras

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & A[t_1, \cdots, t_k] & \longrightarrow & \mathcal{R}(I) \\ & t_i & \longmapsto & f_i t, \quad i = 1, \ldots, k \end{array}$$

é sobrejetor. Seja $ft^n \in I^n t^n$, assim $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} g_{1_i} \cdots g_{n_i}$ tal que $g_{1_i}, \ldots, g_{n_i} \in I,\ i = 0, \ldots, s$. Sendo $I = (f_1, \ldots, f_k)$ temos que

$$f = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} a_{n_1 \cdots n_k} f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}, \text{ com } a_{n_1 \cdots n_k} \in A.$$

Assim, considere

$$h = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} a_{n_1 \cdots n_k} t_1^{n_1} \cdots t_k^{n_k} \in A[t_1, \ldots, t_k].$$

Logo,

$$\varphi(h) = h(f_1 t, \ldots, f_k t) = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} a_{n_1 \cdots n_k} f_1^{n_1} t^{n_1} \cdots f_k^{n_k} t^{n_k} = ft^n.$$

Como todo elemento de $\mathcal{R}(I)$ é soma finita de componentes homogêneas segue que φ sobrejetiva.

Portanto, a seguinte sequência é exata

$$A[t_1, \ldots, t_k] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}(I) \longrightarrow 0,$$

O núcleo de φ, denotado por $\mathcal{J}$, é chamado de *ideal de apresentação de $\mathcal{R}(I)$ com relação a $f_1, \ldots, f_k$*. Note que $\mathcal{J}$ é um ideal homogêneo em $A[t_1, \ldots, t_k]$, com a graduação padrão $grau(t_j) =$

1, $j = 1, \ldots, k$. De fato,

$$\mathcal{J} = \mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ F(t_1, \ldots, t_k) \in A[t_1, \ldots, t_k] \;\middle|\; F(f_1 t, \ldots, f_k t) = 0 \right\}.$$

Assim, reorganizando $F(f_1 t, \ldots, f_k t)$ como um polinômio em t, temos que

$$F(f_1 t, \ldots, f_k t) = G_0(f_1, \ldots, f_k) + G_1(f_1, \ldots, f_k)t + \cdots + G_m(f_1, \ldots, f_k)t^m$$

O que implica

$$G_0(f_1, \ldots, f_k) = G_1(f_1, \ldots, f_k) = \cdots = G_m(f_1, \ldots, f_k) = 0$$

Assim, as partes homogêneas do polinômio $F(t_1, \ldots, t_k)$ satisfazem a condição para pertencerem a $\mathcal{J}$. Portanto, $\mathcal{J}$ é um ideal homogêneo.

Como na **Proposição 1.3**, considere o homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{cccc} \psi : & A^k & \longrightarrow & I \\ & (a_1, \ldots, a_k) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i f_i \end{array}$$

Note que ψ induz um homomorfismo de A-álgebras sobrejetivo

$$\beta : A[t_1, \ldots, t_k] \longrightarrow \mathrm{Sym}(I)$$

visto que $I = \mathrm{Sym}_1(I)$ gera $\mathrm{Sym}(I)$ como A-álgebra. Assim, a álgebra simétrica de I é

$$\mathrm{Sym}(I) \simeq A[t_1, \ldots, t_k]/\mathrm{Ker}(\beta),$$

onde $\mathrm{Ker}(\beta)$ é o ideal de $A[t_1, \ldots, t_k]$ gerado pelas formas lineares

$$\mathrm{Ker}(\beta) = \left(\left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i t_i \in A[t_1, \ldots, t_k] \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} a_i f_i = 0 \ e \ a_i \in A \right\} \right).$$

Por outro lado, como $\mathcal{J} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ é homogêneo, segue que $\mathcal{J}$ é gerado por elementos homogêneos $F(t_1, \ldots, t_k)$ que satisfazem $F(f_1, \ldots, f_k) = 0$. Assim, podemos fatorar φ através do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A[t_1, \ldots, t_k] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{R}(I) \\ \mathrm{Sym}(I) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Neste caso, α é definido da seguinte maneira $\overline{F(t_1, \ldots, t_k)} \longmapsto F(f_1 t, \ldots, f_k t)$. Note que α está bem definida, pois se $\overline{F(t_1,\ldots,t_k)} = \overline{G(t_1,\ldots,t_k)}$ então

$$F - G = \sum^{m} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i t_i \right) g_i, \; g_i \in A[t_1,\ldots,t_k] \Longrightarrow F(f_1t,\ldots,f_kt) - G(f_1t,\ldots,f_kt) = 0$$

Visto de outra maneira, faz sentido definir α porque $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{J}$, já que

$$\mathrm{Sym}(I) \simeq \frac{A[t_1,\ldots,t_k]}{\mathrm{Ker}(\beta)} \longrightarrow \frac{A[t_1,\ldots,t_k]}{\mathcal{J}} \simeq \mathcal{R}(I).$$

Definição 1.1. Dizemos que I é um ideal *de tipo linear* se α é um isomorfismo.

Observação 1.4. *Note que pela* **Proposição 1.3** *geradores de* $\mathrm{Ker}(\beta)$ *são obtidos através de apresentações livres de* I.

Mostraremos que ideais gerados por *sequências regulares* são de tipo linear. Mais geralmente, mostraremos que *d-sequências* geram ideais de tipo linear.

Definição 1.2. Sejam A um anel e M um A-módulo. Um elemento $a \in A$ é dito *elemento regular em M* (ou não-divisor de zero em M) se $am = 0$, com $m \in M$, implicar $m = 0$. Uma sequência $x_1,\ldots,x_n$ em A é chamada *sequência regular de M* ou *M-sequência regular* se $(x_1,\ldots,x_n)M \neq M$ e x_i é um não-divisor de zero em $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$ para todo $i = 1,\ldots,m$.

Definição 1.3. Sejam A um anel e $x_0 = 0$. Uma sequência de elementos $x_1,\ldots,x_n$ é dita uma *d-sequência* se

$$((x_0,\ldots,x_i) : x_{i+1}x_j) = ((x_0,\ldots,x_i) : x_j), \; \forall \; 0 \leq i \leq n-1 \text{ e } j \geq i+1.$$

A proposição seguinte nos fornecerá uma equivalência dessa definição.

Proposição 1.5. Sejam A um anel e $x_0 = 0$. Uma sequência de elementos $x_1,\ldots,x_n$ é uma d-sequência se, e somente se,

$$((x_0,\ldots,x_i) : x_{i+1}) \cap (x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_i), \; \forall \; 0 \leq i \leq n-1.$$

Demonstração. Seja $\underline{x} = x_1,\ldots,x_n$. Suponhamos que $\underline{x}$ é uma d-sequência. Considere $a \in ((x_0,\ldots,x_i) : x_{i+1}) \cap (x_1,\ldots,x_n)$. Logo, $a = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ tal que $ax_{i+1} \in (x_0,\ldots,x_i)$. Provaremos que $a \in (x_1,\ldots,x_i)$. De fato, $a_1x_1 \in (x_1,\ldots,x_i)$. Então, suponha por indução que $\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k \in (x_1,\ldots,x_i)$. Assim, $a_nx_nx_{i+1} \in (x_1,\ldots,x_i)$, como $\underline{x}$ é uma d-sequência segue que $a_nx_n \in (x_1,\ldots,x_i)$. Portanto, $a \in (x_1,\ldots,x_i)$.

Reciprocamente, supondo que $\underline{x}$ satisfaz

$$((x_0,\ldots,x_i) : x_{i+1}) \cap (x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_i), \; \forall \; 0 \leq i \leq n-1.$$

Seja $a \in ((x_0, \ldots, x_i) : x_{i+1}x_j)$. Assim, $ax_{i+1}x_j \in (x_0, \ldots, x_i)$, deste modo temos que $ax_j \in ((x_0, \ldots, x_i) : x_{i+1}) \cap (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i)$. Portanto, $a \in ((x_0, \ldots, x_i) : x_j)$. $\square$

Exemplo 1.1. Seja A um anel. Se $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n \in A$ é sequência regular de A então $\underline{x}$ é uma d-sequência. Usaremos a **Definição 1.3** para provar que $\underline{x}$ é uma d-sequência. De fato, seja $a \in ((x_0, \ldots, x_i) : x_{i+1}x_j)$. Logo, $x_{i+1}\overline{ax_j} = \overline{ax_{i+1}x_j} = \overline{0} \in A/(x_0, \ldots, x_i)$, sendo x_{i+1} um não-divisor de zero de $A/(x_0, \ldots, x_i)$ segue que $\overline{ax_j} = \overline{0}$ em $A/(x_0, \ldots, x_i)$ implicando que $a \in ((x_0, \ldots, x_i) : x_j)$. Portanto, $x_1, \ldots, x_n$ é uma d-sequência. Porém a recíproca não é verdadeira, considere $A = K[x, y, u, v]/(xu - yv)$ sendo K um corpo infinito. Note que os elementos x, y formam uma d-sequência mas não formam uma sequência regular.

Definição 1.4. Sejam $B = A[t_1, \ldots, t_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $t_1, \ldots, t_n$ sobre um anel A e $f \in B$. Dizemos que o *peso de f é i* se $f \in (t_1, \ldots, t_i)$ mas $f \notin (t_1, \ldots, t_{i-1})$. O peso de f é zero se $f = 0$.

O Teorema a seguir foi obtido por Raghavan em [6].

Teorema 1.6. *Sejam A um anel, $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma d-sequência em A e $I = (x_1, \ldots, x_n)$. Seja $\mathcal{J} \subseteq A[t_1, \ldots, t_n]$ o ideal de apresentação da álgebra de Rees de I e $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}$ o ideal gerado por todos os polinômios homogêneos de grau 1 de $\mathcal{J}$, isto é, $\mathcal{J}_1 = \mathrm{Ker}(\beta)$. Se $f(t_1, \ldots, t_n) \in A[t_1, \ldots, t_n]$ é uma forma de grau d tal que $f(x_1, \ldots, x_n) \in (x_1, \ldots, x_j)$, então existe uma forma $g(t_1, \ldots, t_n) \in A[t_1, \ldots, t_n]$ de grau d e peso, no máximo, j tal que $f - g \in \mathcal{J}_1$.*

Demonstração. Procederemos por indução em d, o grau de f. Suponha que $d = 1$. Como $f(x_1, \ldots, x_n) \in (x_1, \ldots, x_j)$, segue que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{j} a_i x_i$, com $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, j$. Seja $g = \sum_{i=1}^{j} a_i t_i \in A[t_1, \ldots, t_n]$ forma de grau 1 e peso, no máximo, j. Deste modo, $(f - g)(x_1, \ldots, x_n) = 0$, logo $f - g \in \mathcal{J}_1$, já que f, g possuem grau 1.

Suponha que $d > 1$ e que o resultado é válido para polinômios com grau menor de que d. Agora usaremos indução sobre o peso de f. Se o peso de f é no máximo j, basta tomar $g = f$. Do contrário, escreva $f = t_k f_1 + f_2$, onde f_1, f_2 são polinômios homogêneos, k é o peso de f e o peso de f_2 é no máximo $k - 1$. Note que o grau de f_1 é igual a $d - 1$. Além disso, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_k f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_2(x_1, \ldots, x_n) \in (x_1, \ldots, x_j)$ e $f_2(x_1, \ldots, x_n) \in (x_1, \ldots, x_{k-1})$. Assim, pela **Proposição 1.5**, temos que

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \in ((x_1, \ldots, x_{k-1}) : x_k) \cap I = (x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Pela hipótese de indução no grau, aplicada a f_1, temos que existe um polinômio homogêneo $g_1 \in A[t_1, \ldots, t_n]$ de grau $d - 1$ e o peso, no máximo, $k - 1$ tal que $f_1 - g_1 \in \mathcal{J}_1$.

Seja $g' = t_k g_1 + f_2$. Primeiro observe que $f - g' = t_k(f_1 - g_1) \in \mathcal{J}_1$, já que $(f_1 - g_1) \in \mathcal{J}_1$, implicando que $(f - g')(x_1, \ldots, x_n) = (t_k(f_1 - g_1))(x_1, \ldots, x_n) = 0$, daí, $g'(x_1, \ldots, x_n) =$

$f(x_1, \ldots, x_n) \in (x_1, \ldots, x_j)$. Além disso, como os pesos de g_1 e f_2 são, no máximo, $k-1$ temos que o peso de g' é no máximo $k-1$. Portanto, g' é um polinômio de grau d, com peso, no máximo, $k-1$ tal que $g'(x_1, \ldots, x_n) \in (x_1, \ldots, x_j)$. Assim, pela hipótese de indução no peso, aplicada a g', temos que existe um polinômio homogêneo $g \in A[t_1, \ldots, t_n]$ de grau d e peso, no máximo, j tal que $g - g' \in \mathcal{J}_1$. Portanto,

$$f - g = (f - g') + (g' - g) \in \mathcal{J}_1.$$

□

Uma consequência notável é o seguinte resultado, primeiramente provado por Huneke em [3].

Corolário 1.7. Seja A um anel. Se $x_1, \ldots, x_n$ é uma d-sequência em A, então o ideal $I = (x_1, \ldots, x_n)$ é de tipo linear.

Demonstração. Sejam $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}_1$ como no teorema anterior. Seja $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{J}$ homogêneo de grau d, assim, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, aplicando o **Teorema 1.6** com $j = 0$, temos que $f \in \mathcal{J}_1$. □

Observação 1.5. Ideais gerados por d-sequências podem ser caracterizados através do *complexo de aproximação*. Vide [13].

Vejamos algumas propriedades básicas de ideais de tipo linear. Seja A um anel e I um ideal de A. Uma consequência imediata da definição é que $\dim(\mathrm{Sym}(I)) = \dim(\mathcal{R}(I))$. Além disso, observemos que se I é de tipo linear então $\mathrm{Sym}(I)$ é *livre de torção.*

Definição 1.5. Sejam A um anel, Q o anel total de frações de A, isto é, $Q = S^{-1}A$, onde S é o conjunto multiplicativo formado pelo elementos regulares (não-divisores de zero) de A, e M um A-módulo. A *torção de M com respeito a A* é definida como o núcleo da aplicação $M \to M \otimes_A Q$ ($\simeq S^{-1}M$), denotada por $\mathcal{T}_A(M)$. Explicitamente,

$$\mathcal{T}_A(M) = \{m \in M \mid \exists\ s \in S \text{ tal que } sm = 0\}.$$

Um A-módulo M é dito *livre de torção* se $\mathcal{T}_A(M) = 0$. Quando $\mathcal{T}_A(M) = M$, dizemos que M é *de torção*. No caso em que B é uma A-álgebra, a A-torção de B é a A-torção de B como A-módulo.

Note que se B é uma A-álgebra graduada, então $\mathcal{T}_A(B)$ é um ideal homogêneo. Além disso, observe que módulos livre são livres de torção, assim como submódulos de módulos livres de torção são ainda livres de torção.

Deste modo, como $A[t]$ é um A-módulo livre (com base infinita) temos que $\mathcal{R}(I) \subseteq A[t]$ é livre de torção. Portanto, se I é de tipo linear então $\mathrm{Sym}(I) \simeq \mathcal{R}(I)$ é livre de torção.

Outra propriedade é dada quando A é um domínio.

Proposição 1.8. Sejam A um domínio Noetheriano e $I \neq 0$ um ideal de A. São equivalentes:

i. $\mathrm{Sym}(I)$ é um domínio.

ii. $\mathrm{Sym}(I)$ é livre de torção.

iii. I é de tipo linear.

Demonstração. i. $\Rightarrow$ ii. Segue diretamente da definição de ser livre de torção.

ii. $\Rightarrow$ iii. Mostraremos que o núcleo de α é o submódulo de torção de $\mathrm{Sym}(I)$, daí, como $\mathrm{Sym}(I)$ é livre de torção teremos que α é um isomorfismo e portanto, I é de tipo linear.

Seja $I = (f_1, \ldots, f_n)$, como $I \neq 0$ podemos supor que $f_n \neq 0$. Pelas construções anteriores temos que

$$\mathrm{Sym}(I) = A[t_1, \ldots, t_n]/\mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R}(I) = A[t_1, \ldots, t_n]/\mathcal{J} \ (= \mathrm{Ker}(\varphi))$$

explicitando os núcleos,

$$\mathrm{Ker}(\beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i t_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0 \ e \ a_i \in A \right) \ \text{e} \ \mathcal{J} = \{F(t_1, \ldots, t_n) \mid F(f_1, \ldots, f_n) = 0\}.$$

Como $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathcal{J}$ temos que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathcal{J}/\mathrm{Ker}(\beta)$. Provaremos que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathcal{T}_A(\mathrm{Sym}(I))$, para isto, mostraremos que para todo $g \in \mathcal{J}$ existe $c \in A \setminus \{0\}$ tal que $cg \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Note que como $\mathcal{J}$ é um ideal homogêneo basta mostrarmos para $g \in \mathcal{J}$ homogêneo. Procederemos por indução no grau de g. De fato, seja m o grau de g. Se $m = 1$ então g é uma forma linear que pertence a $\mathcal{J}$, logo $g \in \mathrm{Ker}(\beta)$, assim basta tomar $c = 1$. Suponha agora que $m > 1$. Deste modo, escreva $g(t_1, \ldots, t_n) = t_1 g_1(t_1, \ldots, t_n) + t_2 g_2(t_2, \ldots, t_n) + \cdots + t_n g_n(t_n)$, sendo g_i polinômios homogêneos de grau $m-1$, $i = 1, \ldots, n$. Agora considere o polinômio homogêneo de grau 1 dado por $h(t_1, \ldots, t_n) = t_1 g_1(f_1, \ldots, f_n) + t_2 g_2(f_2, \ldots, f_n) + \cdots t_n g_n(f_n)$. Note que $h(f_1, \ldots, f_n) = g(f_1, \ldots, f_n) = 0$, logo $h \in \mathcal{J}$ e sendo h de grau 1 temos que $h \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Além disso,

$$f_n^{m-1} g - t_n^{m-1} h = t_1 [f_n^{m-1} g_1(t_1, \ldots, t_n) - t_n^{m-1} g_1(f_1, \ldots, f_n)] + \cdots + t_n [f_n^{m-1} g_n(t_n) - t_n^{m-1} g_n(f_n)].$$

Por $g_n(t_n) = u t_n^{m-1}$ temos $t_n [f_n^{m-1} g_n(t_n) - t_n^{m-1} g_n(f_n)] = f_n^{m-1} t_n u t_n^{m-1} - t_n^m u f_n^{m-1} = 0$. Portanto,

$$f_n^{m-1} g - t_n^{m-1} h = t_1 h_1(t_1, \ldots, t_n) + \cdots + t_{n-1} h_{n-1}(t_{n-1}, t_n),$$

onde h_i é um polinômio homogêneo de grau $m-1$ que anula $f_1, \ldots, f_n$, para cada $i = 1, \ldots, n-1$ (note que $h_i \in \mathcal{J}$). Logo, pela hipótese de indução, para cada i, existe $c_i \in A \setminus \{0\}$ tal que

$c_i h_i \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Assim, $c_1 \cdots c_{n-1}(f_n^{m-1}g - t_n^{m-1}h) \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Daí concluímos que

$$(c_1 \cdots c_{n-1} f_n^{m-1})g = c_1 \cdots c_{n-1}(f_n^{m-1}g - t_n^{m-1}h) + c_1 \cdots c_{n-1} t_n^{m-1} h \in \mathrm{Ker}(\beta).$$

iii. $\Rightarrow$ i. Sejam $x, y \in \mathrm{Sym}(I)$ tais que $xy = 0$. Logo, $\alpha(x)\alpha(y) = 0$ em $\mathcal{R}(I) \subseteq A[t]$, que é um domínio (já que A é domínio por hipótese), assim $\alpha(x) = 0$ e como α é um isomorfismo (pois I é de tipo linear) temos que $x = 0$.

$\square$

A próxima proposição nos permitirá concluir que um anel A é Noetheriano se, e somente se, a álgebra de Rees de um ideal I de A é Noetheriano.

Proposição 1.9. Sejam B uma B_0-álgebra $\mathbb{N}$-graduada e $x_1, \ldots, x_n$ elementos homogêneos de grau positivo. Então são equivalentes:

i. $x_1, \ldots, x_n$ geram o ideal $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$.

ii. $x_1, \ldots, x_n$ geram B como B_0-álgebra.

Demonstração. Suponhamos que $x_1, \ldots, x_n$ geram o ideal $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$. Queremos mostrar que $x_1, \ldots, x_n$ geram B como B_0-álgebra, e para isso é suficiente escrever qualquer elemento homogêneo $y \in B$ como um polinômio em $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em B_0. Faremos por indução em d, o grau de y. Se $d = 0$, então $y \in B_0$. Assim, tome $f \in B_0[x_1, \ldots, x_n]$ como sendo o polinômio constante e igual a y, isto é, $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. Logo, podemos supor que para qualquer $z \in B$ de grau menor de d existe $f \in B_0[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Como $d \geq 1$ temos que $y \in \mathfrak{M}$ que por hipótese é gerado por $x_1, \ldots, x_n$. Assim, existem $p_1, \ldots, p_n \in B$ tais que $y = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$, sendo x_i homogêneos de grau positivo, segue que os graus dos p_i são menores que d. Logo, por hipótese de indução, existem $f_1, \ldots, f_n \in B_0[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $p_i = f_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n$. O que implica $y = f_1x_1 + \cdots + f_nx_n \in B_0[x_1, \ldots, x_n]$.

Reciprocamente, se $x_1, \ldots, x_n$ geram B como B_0-álgebra. Então, dado $y \in B$ existe $f \in B_0[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $y = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, com $a_{i_1,\ldots,i_n} \in B_0$. Assim, se $y \in \mathfrak{M}$ então o grau de y é maior ou igual a 1. Logo, $f(x_1, \ldots, x_n)$ não pode ter monômio constante (elemento de grau zero), ou seja, podemos escrever $f(x_1, \ldots, x_n) = g_1x_1 + \ldots + g_nx_n$ com $g_i \in B_0[x_1, \ldots, x_n],\ i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\mathfrak{M} \subseteq (x_1, \ldots, x_n)$. A outra inclusão decorre do fato dos x_i serem elementos homogêneos grau positivo.

$\square$

Corolário 1.10. Sejam B uma B_0-álgebra $\mathbb{N}$-graduada. Então, B é Noetheriano se, e somente se, B_0 é Noetheriano e B é uma B_0-álgebra finitamente gerada.

Demonstração. Suponha que B seja Noetheriano. Do isomorfismo

$$B_0 \simeq \frac{B}{\bigoplus_{i\geq 1} B_i} = B/\mathfrak{M},$$

segue que B_0 é Noetheriano. Além disso, sendo B Noetheriano temos que $\mathfrak{M}$ é finitamente gerado, logo pela proposição anterior B é finitamente gerado como B_0-álgebra. Reciprocamente, sendo B uma B_0-álgebra finitamente gerada temos que $B = B_0[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Sejam $t_1, \ldots, t_n$ indeterminadas e considere $B_0[t_1, \ldots, t_n]$ o anel de polinômios sobre B_0. O homomorfismo $\psi : B_0[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow B_0[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ dado por $t_i \longmapsto \alpha_i$, nos permite ver B como o quociente

$$B \simeq \frac{B_0[t_1, \ldots, t_n]}{\mathrm{Ker}(\psi)}.$$

Sendo B_0 Noetheriano, pelo Teorema da Base de Hilbert, segue que $B_0[t_1, \ldots, t_n]$ e portanto, B é Noetheriano.

□

Observação 1.6. Já mostramos que se $I \subseteq A$ um ideal é finitamente gerado então $\mathcal{R}(I)$ é uma A-álgebra finitamente gerada. Portanto, concluímos desse corolário que $\mathcal{R}(I)$ é Noetheriano se, e somente se, A é Noetheriano.

1.3 Dimensão e anel graduado associado

Como na seção anterior, se A é um anel e $I \subseteq A$ é um ideal então a *álgebra de Rees* de I é o subanel de $A[t]$

$$\mathcal{R}(I) = A[It] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n \subseteq A[t],$$

onde t é uma indeterminada. Estendemos esta definição no seguinte sentido

Definição 1.6. Sejam A um anel, I um ideal e t uma indeterminada sobre A. A *álgebra de Rees estendida de* I é o subanel de $A[t, t^{-1}]$ definido por

$$A[It, t^{-1}] = \{\sum_{i=-n}^{n} a_i t^i \mid a_i \in I^i, n \in \mathbb{N}\} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n t^n,$$

onde, convencionamos que para cada inteiro não-positivo i, tem-se $I^i = A$.

Observação 1.7. Nesta seção, por conveniência, adotaremos a notação $A[It]$ para a álgebra de Rees de I no lugar de $\mathcal{R}(I)$.

Note que dado $J \subseteq A$ um ideal, como A pode ser identificado em $A[It]$ com $A[It]_0$, podemos considerar a extensão de J em $A[It]$, assim como na álgebra de Rees estendida de I, logo

$$J \subseteq JA[It] \cap A \subseteq JA[It, t^{-1}] \cap A \subseteq JA[t, t^{-1}] \cap A = J,$$

portanto, todas as inclusões acima são igualdades. Assim, todo ideal de A é uma contração de um ideal de $A[It]$ e $A[It, t^{-1}]$. Além disso,

$$\frac{A}{J} \subseteq \frac{A[It]}{JA[t,t^{-1}] \cap A[It]} \subseteq \frac{A[It,t^{-1}]}{JA[t,t^{-1}] \cap A[It,t^{-1}]} \subseteq \frac{A[t,t^{-1}]}{JA[t,t^{-1}]}.$$

Considere a projeção natural $\pi : A \longrightarrow A/J$ e denote A/J por $\overline{A}$ e $\frac{I+J}{J}$ por $\overline{I}$. Logo,

$$\frac{A[It]}{JA[t,t^{-1}] \cap A[It]} \simeq \overline{A}[\overline{I}t] \quad e \quad \frac{A[It,t^{-1}]}{JA[t,t^{-1}] \cap A[It,t^{-1}]} \simeq \overline{A}[\overline{I}t, t^{-1}].$$

De fato, seja $g = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in A[It]$ e defina o homomorfismo $\varphi : A[It] \longrightarrow \overline{A}[\overline{I}t]$ por $\varphi(g) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} t^i$, temos que φ é sobrejetora e que

$$Ker(\varphi) = \{g \in A[It] \mid \varphi(g) = \overline{0}\} = \{g \in A[It] \mid \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} t^i = \overline{0}\} = \{g \in A[It] \mid a_i \in J\}.$$

Do teorema do isomorfismo segue o primeiro isomorfismo, e de forma análoga o segundo.

Em particular, temos que se P é um primo minimal de A então $PA[t,t^{-1}] \cap A[It]$ é primo minimal de $A[It]$, assim como no caso estendido. De fato, denote $PA[t,t^{-1}] \cap A[It] = \widetilde{P}$. Sendo P primo de A, pelo isomorfismo anterior segue que $\widetilde{P}$ é primo de $A[It]$. Para mostrar que $\widetilde{P}$ é minimal, basta mostrarmos que $\widetilde{P}A[It]_{\widetilde{P}} = \widetilde{P}_{\widetilde{P}}$ é nilpotente, pois se $\widetilde{P}_{\widetilde{P}}$ é nilpotente então $\widetilde{P}_{\widetilde{P}} \subseteq \mathfrak{N}_{A[It]_{\widetilde{P}}} = \bigcap_{Q \in Spec(A[It]_{\widetilde{P}})} Q \subseteq Q$ e pela maximalidade de $\widetilde{P}_{\widetilde{P}}$, temos que $\widetilde{P}_{\widetilde{P}} = Q$, o que implica que $\mathrm{Spec}(A[It]_{\widetilde{P}}) = \mathrm{Max}(A[It]_{\widetilde{P}}) = \{\widetilde{P}_{\widetilde{P}}\} \Longrightarrow \widetilde{P}$ é minimal. Para isto, note que por $P \subseteq A$ ser minimal temos que $\mathrm{Spec}(A_P) = \mathrm{Max}(A_P) = \{P_P\}$, além disso, como A é Noetheriano (A_P é Noetheriano) segue que A_P é Artiniano. Logo, P_P é nilpotente $\Longrightarrow \widetilde{P}A[It]_{\widetilde{P}} = \widetilde{P}_{\widetilde{P}}$ é nilpotente. Portanto, se P é um primo minimal de A então $PA[t,t^{-1}] \cap A[It]$ é primo minimal de $A[It]$.

Além disso, todo elemento nilpotente em $A[It]$, ou $A[It,t^{-1}]$, é também nilpotente em $A[t,t^{-1}]$, ou seja, pertence a $\mathfrak{N}_{A[t,t^{-1}]} = \bigcap_P PA[t,t^{-1}]$, onde P varia no conjunto dos primos minimais de A. De fato, analogamente ao caso anterior se P é um primo minimal de A então $PA[t,t^{-1}]$ é primo minimal de $A[t,t^{-1}]$. Agora, se $\mathfrak{Q} \subseteq A[t,t^{-1}]$ é um primo minimal então $\mathfrak{Q} \cap A$ é um primo de A. Se $\mathfrak{Q} \cap A = P$ for primo minimal então $\mathfrak{Q} = PA[t,t^{-1}]$. Caso P não seja minimal, existe $Q \subseteq A$ primo minimal tal que $Q \subsetneq \mathfrak{Q} \cap A$, o que implica, $QA[t,t^{-1}] \subseteq \mathfrak{Q}$, como $\mathfrak{Q}$ é minimal temos que $QA[t,t^{-1}] = \mathfrak{Q}$.

Portanto, todos os primos minimais da álgebra de Rees são contração de primos minimais de $A[t,t^{-1}]$ da forma $PA[t,t^{-1}]$, com P primo minimal de A, assim como na álgebra de Rees estendida. Logo,

$$\begin{aligned}\dim(A[It]) &= \max\left\{\dim\left(\frac{A[It]}{Q}\right) \,\middle|\, Q \in \operatorname{Min}(A[It])\right\}\\ &= \max\left\{\dim\left(\frac{A[It]}{PA[t,t^{-1}]\cap A[It]}\right) \,\middle|\, P \in \operatorname{Min}(A)\right\}\\ &= \max\left\{\dim(\overline{A}[\overline{I}t]) \,\middle|\, P \in \operatorname{Min}(A)\right\}\\ &= \max\left\{\dim\left(\frac{A}{P}\left[\frac{I+P}{P}t\right]\right) \,\middle|\, P \in \operatorname{Min}(A)\right\}. \qquad (\bigstar_1)\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\dim(A[It,t^{-1}]) = \max\left\{\dim\left(\frac{A}{P}\left[\frac{I+P}{P}t,t^{-1}\right]\right) \,\middle|\, P \in \operatorname{Min}(A)\right\}. \qquad (\bigstar_2)$$

Teorema 1.11. *Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal de A. Então, a dimensão de A é finita se, e somente se, a dimensão da álgebra de Rees de I é finita (ou a dimensão da álgebra de Rees estendida de I é finita). Além disso, se $\dim(A) < \infty$, então*

i. $\dim(A[It]) = \dim(A) + 1$, *se $I \nsubseteq P$, para algum primo P com $\dim(A/P) = \dim(A)$. Caso contrário,* $\dim(A[It]) = \dim(A)$.

ii. $\dim(A[It,t^{-1}]) = \dim(A) + 1$.

iii. Se $(A,\mathfrak{M})$ é local e $I \subsetneq A$, então $\mathfrak{M}A[It,t^{-1}]+ItA[It,t^{-1}]+t^{-1}A[It,t^{-1}]$ é um ideal maximal em $A[It,t^{-1}]$ de altura $\dim(A)+1$.

Demonstração. i. Pela igualdade em $(\bigstar_1)$ só precisamos calcular dimensão de domínios. Então, suponha que A seja um domínio e vamos mostrar que se I é o ideal nulo então $\dim(A[It]) = \dim(A)$, do contrário, $I \neq 0$, vale $\dim(A[It]) = \dim(A) + 1$. Pelo **Teorema A.1 (Desigualdade da dimensão)**, segue que para todo ideal primo Q de $A[It]$, temos $\operatorname{ht}(Q) \leq \operatorname{ht}(Q\cap A)+1 \leq \dim(A)+1$, pois o grau de transcendência de $A[It]$ sobre A, $\operatorname{gr.tr}_A(A[It])$, é igual a 1 (uma vez que $A[It] \subseteq A[t]$). Logo, $\dim(A[It]) \leq \dim(A) + 1$.

Se $I = 0$ então $A[It] = A$ e portanto, $\dim(A[It]) = \dim(A)$. Assim, suponha $I \neq 0$. Seja $P_0 = ItA[It]$, note que $P_0 \cap A = (0)$, $It \subseteq P_0$, $\operatorname{ht}(P_0) > 0$ e que $A[It]/P_0 \simeq A$, ou seja, P_0 é primo, já que estamos supondo A domínio. Como sabemos, $\operatorname{ht}(J) + \dim(B/J) \leq \dim(B)$ para quaisquer $B \neq 0$ anel e $J \subseteq B$ ideal primo, neste caso, $\operatorname{ht}(P_0) + \dim(A[It]/P_0) \leq \dim(A[It])$. Sendo, $\operatorname{ht}(P_0) > 0$ e $A[It]/P_0 \simeq A$ temos que

$$1 + \dim(A) \leq \operatorname{ht}(P_0) + \dim(A[It]/P_0) \leq \dim(A[It]).$$

Portanto, $\dim(A[It]) = \dim(A) + 1$.

ii. Analogamente, pela igualdade em ($\bigstar_2$), podemos supor que A é um domínio. Mais uma vez, pelo **Teorema A.1 (Desigualdade da dimensão)**, temos que $\dim(A[It, t^{-1}]) \leq \dim(A) + 1$.

Observação 1.8. Note que $A[It, t^{-1}]_{t^{-1}} = A[t, t^{-1}]$. De fato, seja

$$x = \frac{a_{-n}t^{-n} + \cdots + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n}{t^{-k}} \in A[It, t^{-1}]_{t^{-1}},$$

com $a_i \in I^i,\ i > 0$. Logo, por igualdade de classes no anel de frações, temos que

$$x = \frac{a_{-n}t^{-n+k} + \cdots + a_{-1}t^{-1+k} + a_0 t^k + a_1 t^{1+k} + \cdots + a_n t^{n+k}}{1},$$

que pode ser identificado em $A[t, t^{-1}]$. Reciprocamente, seja

$$x = a_{-n}t^{-n} + \cdots + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in A[t, t^{-1}].$$

Se $a_i \in I^i$, para todo $i = 1, \ldots, n$ então $x \in A[It, t^{-1}]_{t^{-1}}$, identificado como anteriormente. Do contrário, seja i o maior natural de 1 a n tal que $a_i \notin I^i$, ou seja, $\forall\ j \geq i+1$ tem-se $a_j \in I^j$. Neste caso, proceda da seguinte maneira: identifique x com

$$x = \frac{a_{-n}t^{-n-i} + \cdots + a_{-1}t^{-1-i} + a_0 t^{-i} + a_1 t^{1-i} + \cdots + a_i t^{i-i} + a_{i+1}t^{i+1-i} + \cdots + a_n t^{n-i}}{t^{-i}}$$

Note que $x \in A[It, t^{-1}]_{t^{-1}}$ pois para $j \geq i+1$ temos que $a_j \in I^j \subseteq I^{j-i}$.

Assim, a outra desigualdade segue do fato

$$\dim(A[It, t^{-1}]) \geq \dim(A[It, t^{-1}]_{t^{-1}}) = \dim(A[t, t^{-1}]) = \dim(A) + 1.$$

iii. Seja $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m = \mathfrak{M}$ uma cadeia saturada de ideais primos em A, tal que $m = \operatorname{ht}(\mathfrak{M}) = \dim(A)$, já que $(A, \mathfrak{M})$ é local. Seja $Q_i = P_i A[t, t^{-1}] \cap A[It, t^{-1}]$, ideal primo de $A[It, t^{-1}]$ para cada $i = 0, \ldots, m$. Como $Q_i \cap A = P_i$ para cada $i = 0, \ldots, m$, segue que $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_m$ é uma cadeia de primos distintos em $A[It, t^{-1}]$. Logo, $\dim(A) = m \leq \operatorname{ht}(Q_m)$. Além disso, $Q_m = \mathfrak{M}A[t, t^{-1}] \cap A[It, t^{-1}] = \mathfrak{M}A[It, t^{-1}] + ItA[It, t^{-1}]$.

Como Q_m está contido propriamente no ideal maximal $Q_m + t^{-1}A[It, t^{-1}]$. Portanto,

$$\dim(A) = m \leq \operatorname{ht}(Q_m) < \operatorname{ht}(Q_m + t^{-1}A[It, t^{-1}]) \leq \dim(A[It, t^{-1}]) \overset{\text{ii.}}{=} \dim(A) + 1$$

Assim, a altura de $Q_m + t^{-1}A[It, t^{-1}] = \mathfrak{M}A[It, t^{-1}] + ItA[It, t^{-1}] + t^{-1}A[It, t^{-1}]$ é $\dim(A) + 1$.

$\square$

Definição 1.7. Sejam A um anel e I um ideal de A. O *anel graduado associado de I* é definido por

$$\mathrm{gr}_I(A) = \frac{A}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \frac{I^2}{I^3} \oplus \cdots = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1},$$

em que a multiplicação é dada por $(a + I^i)(b + I^j) = ab + I^{i+j-1}$, $a \in I^{i-1}$ e $b \in I^{j-1}$.

Note que

$$\frac{A[It]}{IA[It]} \simeq \mathrm{gr}_I(A) \simeq \frac{A[It, t^{-1}]}{t^{-1}A[It, t^{-1}]}.$$

O primeiro isomorfismo é através de $\psi : A[It] \longrightarrow \mathrm{gr}_I(A)$ dado por $a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n \longmapsto (a_0 + I, a_1 + I^2, \ldots, a_n + I^n)$, já que $\mathrm{Ker}(\psi) = IA[It]$. E o segundo é análogo.

Além disso, se $I = (f_1, \ldots, f_k)$ então os elementos de grau 1, $\overline{f_1} = f_1 + I^2, \ldots, \overline{f_k} = f_k + I^2$, geram $\mathrm{gr}_I(A)$ como A/I-álgebra graduada. Assim,

$$\mathrm{gr}_I(A) = (A/I)[\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_k}].$$

Definição 1.8. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e I um ideal de A. Definimos a *fibra especial de I* por

$$F_I = F_I(A) = \frac{A[It]}{\mathfrak{M}A[It]} \simeq \frac{A}{\mathfrak{M}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{M}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{M}I^2} \oplus \cdots.$$

A dimensão de Krull de F_I é chamada *analytic spread de I* e denotada por $\ell(I)$.

Observe que $\beta : \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1} \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{M}I^n$ induz o isomorfismo

$$F_I = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{M}I^n \simeq \frac{\bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}}{\mathfrak{M}\left(\bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}\right)} = \frac{\mathrm{gr}_I(A)}{\mathfrak{M}\mathrm{gr}_I(A)}.$$

Proposição 1.12. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e I um ideal de A. Então,

$$\ell(I) = \dim(F_I) \leq \dim(\mathrm{gr}_I(A)) = \dim(A).$$

Além disso, se M é o ideal maximal de $\mathrm{gr}_I(A)$ que consiste de todos os elementos de grau positivo e de $\mathfrak{M}/I$, então $\dim(\mathrm{gr}_I(A)) = \mathrm{ht}(M)$.

Demonstração. Como F_I pode ser visto como o quociente $\mathrm{gr}_I(A)/\mathfrak{M}\mathrm{gr}_I(A)$, segue que $\ell(I) = \dim(F_I) \leq \dim(\mathrm{gr}_I(A))$. Sendo t^{-1} é um não-divisor de zero em $A[It, t^{-1}]$, segue que $\mathrm{ht}(t^{-1}A[It, t^{-1}]) > 0$, de fato, se $\mathrm{ht}(t^{-1}A[It, t^{-1}]) = 0$, por definição de altura, existiria $\mathfrak{P}$ ideal primo de $A[It, t^{-1}]$, tal que $t^{-1}A[It, t^{-1}] \subseteq \mathfrak{P}$ e $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = 0$, ou seja, $\mathfrak{P}$ é minimal, sendo assim, $t^{-1} \in \mathfrak{P}$ o que implicaria que t^{-1} é um divisor de zero em $A[It, t^{-1}]$. Além disso, como $\mathrm{gr}_I(A) \simeq A[It, t^{-1}]/(t^{-1}A[It, t^{-1}])$ temos que

$$\mathrm{ht}(t^{-1}A[It, t^{-1}]) + \dim(\mathrm{gr}_I(A)) \leq \dim(A[It, t^{-1}]) \overset{\text{ii.}}{=} \dim(A) + 1.$$

Daí, $\dim(\mathrm{gr}_I(A)) \leq \dim(A)$. Para a outra desigualdade, considere o ideal maximal $Q = \mathfrak{M}A[It, t^{-1}] + ItA[It, t^{-1}] + t^{-1}A[It, t^{-1}]$. Assim,

$$\dim(\mathrm{gr}_I(A)) \geq \dim(\mathrm{gr}_I(A)_{\overline{Q}}) = \mathrm{ht}(\overline{Q}) = \mathrm{ht}(Q) - 1 = \dim(A),$$

onde

$$\overline{Q} = \frac{\mathfrak{M}A[It, t^{-1}] + ItA[It, t^{-1}] + t^{-1}A[It, t^{-1}]}{t^{-1}A[It, t^{-1}]}.$$

□

Proposição 1.13. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e I um ideal de A. Então,

$$\ell(I) = \max\{\ell(I(A/P)) \mid P \in \mathrm{Min}(A)\}.$$

Demonstração. Mais uma vez, pela correspondência entre os ideais primos minimais de A e os ideais primos minimais de $A[It]$. Tem-se

$$\dim(F_I) = \dim\left(\frac{A[It]}{\mathfrak{M}A[It]}\right) = \max\left\{\dim\left(\frac{(\frac{A}{P})[(\frac{I+P}{P})t]}{\mathfrak{M}(\frac{A}{P})[(\frac{I+P}{P})t]}\right) \;\middle|\; P \in \mathrm{Min}(A)\right\}$$

$$= \max\{\dim(F_{I(A/P)}) \mid P \in \mathrm{Min}(A)\}.$$

□

Capítulo 2

Um pouco sobre normalidade

2.1 O fecho integral de um ideal

Definição 2.1. Sejam A um anel e I um ideal de A. Um elemento $b \in A$ é dito *integral sobre* I se existem um inteiro n e elementos $a_i \in I^i, i = 1, \ldots, n$ tais que

$$b^n + a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0.$$

O conjunto de todos os elementos de A que são integrais sobre I é chamado de *fecho integral de* I, denotado por $\overline{I}$. Se $I = \overline{I}$, então I é chamado de *integralmente fechado* ou *completo*. Se I^k é completo para todo k inteiro positivo, então I é dito *normal*.

A próxima proposição nos permitirá reduzir as questões sobre dependência integral de ideais ao caso em que o anel ambiente é um domínio.

Proposição 2.1. Sejam A um anel e I um ideal de A. Um elemento $b \in A$ é integral sobre I se, e somente se, para todo primo minimal P de A, a imagem de b em A/P é integral sobre $(I + P)/P$.

Demonstração. Note que a imagem de $\overline{I}$ em A/P está contida no fecho integral de $(I + P)/P$, para todo $P \in \mathrm{Min}(A)$, mostrando que todo elemento integral sobre I tem sua imagem em A/P integral sobre $(I+P)/P$. Reciprocamente, considere $W = \{b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n \mid n > 0 \text{ e } a_i \in I^i\}$, observe que W é fechado para a operação de multiplicação. Caso $0 \in W$ então b é integral sobre I. Suponhamos por absurdo que $0 \notin W$, pelo **Lema de Krull**, existe Q um ideal primo de A tal que $Q \cap W = \emptyset$, seja $P \subseteq Q$ um primo minimal. Logo, $P \cap W \subseteq Q \cap W = \emptyset$, que é um absurdo já que por hipótese para todo primo minimal P de A temos $P \cap W \neq \emptyset$. Portanto, $0 \in W$ e b é integral sobre I. □

Proposição 2.2. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e $b \in A$. Então,

$$b \in \overline{I} \iff \exists\, n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } (I + (b))^n = I(I + (b))^{n-1}.$$

Demonstração. Suponha que $b \in \overline{I}$. Da relação de dependência de b sobre I temos que $b^n \in I(I+(b))^{n-1}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $(I+(b))^n = I(I+(b))^{n-1}$. Reciprocamente, se $(I+(b))^n = I(I+(b))^{n-1}$, como $b^n \in (I+(b))^n$, então $b^n = a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \cdots + a_{n-1}b + a_n$ com $a_i \in I^i$ que nos fornece uma equação de dependência sobre I, logo $b \in \overline{I}$.

□

Proposição 2.3. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e $b \in A$. São equivalentes:

i. b é integral sobre I.

ii. Existe um A-módulo finitamente gerado M tal que $bM \subseteq IM$, possuindo a seguinte propriedade: se $a \in A$ é tal que $aM = 0$ então $ab \in \sqrt{0}$.

Além disso, se I é finitamente gerado e contém um não-divisor de zero, então b é integral sobre I se, e somente se, existe um A-módulo fiel finitamente gerado tal que $IM = (I+(b))M$.

Demonstração. Suponha b integral sobre I, logo $b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \cdots + a_{n-1}b + a_n = 0$ com $a_i \in I^i$. Sendo assim, para cada i, temos que a_i é soma finita de elementos da forma $x_1 \cdots x_i$ com $x_j \in I$. Seja J o ideal gerado por tais x_{ji}, note que $J \subseteq I$ é um ideal finitamente gerado tal que $a_i \in J^i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Assim, b é integral sobre J, pela proposição anterior, existe um inteiro n tal que $J(J+(b))^{n-1} = (J+(b))^n$. Então, defina $M = (J+(b))^{n-1}$. Note que M A-módulo finitamente gerado tal que $bM = b(J+(b))^{n-1} \subseteq (J+(b))^n = J(J+(b))^{n-1} = JM \subseteq IM$. Se $a \in A$ é tal que $aM = 0$, então em particular $ab^{n-1} = 0$ o que implica $ab \in \sqrt{0}$.

No caso em que I é finitamente gerado e contém um não-divisor de zero, basta tomar $J = I$. Deste modo, $M = (I+(b))^{n-1}$ é finitamente gerado e satisfaz $IM = (I+(b))M$. Se $a \in A$ é tal que $ax = 0$, $\forall\, x \in M$, então em particular $ay^{n-1} = 0$, onde $y \in I$ é não-divisor de zero, logo $a = 0$, e portanto M é fiel.

Reciprocamente, seja M um A-módulo gerado por $\{x_1, \ldots, x_m\}$ tal que $bM \subseteq IM$. Para cada $i = 1, \ldots, m$, temos que $bx_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$ tal que $a_{ij} \in I$. Considere a matriz $A = (\delta_{ij}b - a_{ij})$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Seja v o vetor $(x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$. Pela construção, $Av = 0$, logo $\det(A)v = \operatorname{adj}(A)Av = 0$. Assim, para cada i, temos que $\det(A)x_i = 0$ o que implica $\det(A)M = 0$. Pela propriedade $\det(A)b \in \sqrt{0}$, segue que $(\det(A)b)^k = 0$, para algum k inteiro, esta relação nos fornece uma relação de dependência de b sobre I.

Além disso, note que se M é um A-módulo fiel finitamente gerado tal que $IM = (I+(b))M$ então M satisfaz as condições de ii., o que mostra a recíproca no caso particular.

□

Observação 2.1. O fecho integral de um ideal é um ideal. Este fato será provado no próximo capítulo com a noção de *redução*.

Proposição 2.4. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e S um conjunto multiplicativo de A. Então,

$$\overline{S^{-1}(I)} = S^{-1}(\overline{I}).$$

Demonstração. Seja $f \in \overline{S^{-1}(I)}$. Sendo o fecho integral de um ideal ainda um ideal, podemos assumir que $f = x/1$ com $x \in A$. Considere a relação de dependência de f sobre $\overline{S^{-1}(I)}$,

$$f^n + \frac{a_1}{s_1} f^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}} f^{n-1} + \frac{a_n}{f_n} = \frac{0}{1},$$

onde $a_i/s_i \in S^{-1}(I)^i$. Como $S^{-1}(I)^i = S^{-1}(I^i)$, suponha que $a_i \in I^i$ e $s_i \in S$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Simplificando a equação, temos por definição, a seguinte relação em A

$$sx^n + t_1 a_1 x^{n-1} + \cdots + t_{n-1} a_{n-1} x + t_n a_n = 0,$$

com $s, t_i \in S,\ i = 1, \ldots, n$. Assim, multiplicando por s^{n-1} obtemos que $sx \in \overline{I}$. Portanto, $f = (xs)/s \in S^{-1}(\overline{I})$. A recíproca, segue do fato de $S^{-1}(I)^i = S^{-1}(I^i)$. □

Sejam $A \subseteq B$ uma extensão de anéis. Dizemos que $b \in B$ é *inteiro ou integral sobre* A se existem $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0$. Uma extensão $A \subseteq B$ é dita *integral* quando todo elemento de B é integral sobre A. O conjunto formado por todos os elementos de B que são inteiros sobre A é um subanel de B, chamado de *fecho inteiro ou integral de A sobre B*, denotado por $\overline{A}$. Se $A = \overline{A}$ então A é dito *integralmente fechado em B*.

Definição 2.2. Seja A um domínio. Dizemos que A é *normal* se A é integralmente fechado no seu corpo de frações.

Exemplo 2.1. Todo domínio de fatoração única (**DFU**) é domínio normal.

Mostremos agora que a dependência integral entre álgebras $\mathbb{N}$-graduadas está relacionada com a dependência integral de ideais:

Proposição 2.5. Sejam A, B anéis $\mathbb{N}$-graduados tais que $A \subseteq B$ (inclusão graduada). Suponha que $A = A_0[A_1]$ e $B = B_0[B_1]$. Então, $A \subseteq B$ é uma extensão integral se, e somente se, a extensão $A_0 \subseteq B_0$ é integral e para cada $n \in \mathbb{N}$, o ideal $B_n B$ é integral sobre o ideal $A_n B$. Além disso, se $A_0 = B_0$, então B é integral sobre A se, e somente se, $B_1 B$ é integral sobre $A_1 B$.

Demonstração. Suponha que B é integral sobre A. Seja $b \in B_n$, logo, existe uma relação homogênea de dependência integral de b sobre A, assim, b é integral sobre $A_n B$. Reciprocamente, seja $b \in B_n$. Logo, b satisfaz uma relação de dependência integral sobre o ideal $A_n B$, com os coeficientes em $A_n[B_0]$. Desta forma, B é integral sobre $A[B_0]$, como B_0 é integral sobre A_0, segue que B é integral sobre A. □

Uma das consequências de A ser um domínio normal é que o anel de polinômios a uma indeterminada sobre A também será.

Lema 2.6. Se A é um domínio normal então $A[t_1, \ldots, t_r]$ é um domínio normal.

Demonstração. Por indução, podemos supor que $r = 1$. Sejam $t_1 = t$ e K o corpo de frações de A e $f \in A(t)$ um elemento integral sobre $A[t]$. Consequentemente, f é integral sobre $K[t]$. Sendo K um corpo, segue que $K[t]$ é um **DFU**, assim $K[t]$ é normal e por isso, $f \in K[t]$. Logo, $f = a_n t^n + \cdots + a_0$, tal que $a_i \in K,\ i = 0, \ldots, n$. Mostremos que $f \in A[t]$. Note que é suficiente mostrar que $a_n \in A$, pois neste caso, teríamos que $f - a_n t^n$ é um elemento integral sobre $A[t]$ desta maneira mostraríamos que todo $a_i \in A$, implicando que $f \in A[t]$.

Pela normalidade de A, basta mostrarmos que a_n é integral sobre A. Procederemos da seguinte maneira, construiremos um subanel Noetheriano $A_0 \subseteq A$ e um A_0-módulo finitamente gerado $M_0 \subseteq K$ tal que $A_0[a_n] \subseteq M_0$. Sendo A_0 Noetheriano, temos que $A_0[a_n]$ será uma A_0-álgebra finitamente gerada contendo a_n, assim a_n será integral sobre A_0 e consequentemente sobre A.

Seja $F(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \in (A[t])[x]$ tal que $F(f) = 0$. Seja A_0 a $\mathbb{Z}$-álgebra de A gerada por todos os coeficientes dos elementos $b_{m-1}, \ldots, b_0 \in A[t]$, note que A_0 é Noetheriano. Agora sejam $w_1, \ldots, w_r$ todos os coeficientes dos polinômios $1, f, f^2, \ldots, f^{m-1} \in A[t]$. Defina $M_0 = A_0 w_1 + \cdots + A_0 w_r$, isto é, M_0 é o A_0-módulo gerado por $w_1, \ldots, w_r$. Como $F(x) \in (A_0[t])[x]$ segue que todas as potências f^i de f podem ser escritas como combinações $A_0[t]$-lineares das primeiras m potências $1, f, f^2, \ldots, f^{m-1}$. Logo, todos os coeficientes de f^i pertencem a M_0, em particular todas as potências a_n^i de a_n pertencem a M_0 (pois a_n^i é o coeficiente líder de f^i). Portanto, $A_0[a_n] \subseteq M_0$.

□

Lema 2.7. Sejam A um domínio e $x \in A \setminus \{0\}$, tal que A_x é normal. Então, A é normal se, e somente se, (x) é um ideal completo.

Demonstração. Suponha que A seja normal. Seja $b \in \overline{(x)}$, logo existem $a_i \in A$ tais que

$$b^n + (a_1 x)b^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1})b + a_n x^n = 0.$$

Em $A_{(0)}$, dividindo por x^n, podemos ver a expressão como

$$\left(\frac{b}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{b}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{b}{x}\right) + a_n = 0.$$

Assim, $b/x \in \overline{A} = A$ e portanto, $b \in (x)$. Reciprocamente, sejam (x) completo e $b \in \overline{A}$. Como o corpo de frações de A é igual ao de $A_x \supseteq A$, segue que $\overline{A} \subseteq \overline{A_x} = A_x$. Assim, podemos supor que $b = a/x^r$, com $a \in A$. Note que se $a \in (x)$ então $b \in A$. Como $b \in \overline{A}$ temos que existem

$c_1, \ldots, c_n \in A$ tais que $b^n + c_1 b^{n-1} + \cdots + c_{n-1} b + c_n = 0$. Logo, multiplicando por x^{rn} temos que $a^n + (c_1 x^r) a^{n-1} + \cdots + (c_{n-1}(x^r)^{n-1}) a + c_n x^{rn} = 0$. Portanto, $a \in \overline{(x)} = (x)$. □

Proposição 2.8. Sejam A um domínio Noetheriano e $x \in A \setminus \{0\}$, então

$$A = A_x \bigcap \left(\bigcap_{P \in \mathrm{Ass}(A/(x))} A_P \right).$$

Demonstração. Seja $b \in A_x$ e $b \in A_P, \forall\ P \in \mathrm{Ass}(A/(x))$. Assim, existem $a \in A$ e $n \geq 1$ tais que $b = a/x^n$. Mais uma vez, é suficiente provar que $a \in (x)$. Suponha por absurdo que $a \notin (x)$, logo o ideal condutor de a em (x) está contido nos divisores de zero de $A/(x)$, isto é, $((x) : a) \subseteq \mathcal{Z}(A/(x))$. Sendo, A Noetheriano, temos que $\mathrm{Ass}(A/(x))$ é um conjunto finito, sendo assim, $\mathcal{Z}(A/(x))$ é uma união finita de primos associados. Logo, pelo Lema da Esquiva, $((x) : a) \subseteq P$, para algum $P \in \mathrm{Ass}(A/(x))$. Como $b \in A_P$ temos que $b = a/x^n = c/s$, com $c \in A$ e $s \notin P$. Logo, $sa = cx^n \in (x)$, implicando que $s \in ((x) : a) \subseteq P$ que é um absurdo. □

Observação 2.2. Sejam A um domínio e S um conjunto multiplicativo de A. Como $\overline{S^{-1}(A)} = S^1(\overline{A})$, segue que se A é normal então $S^{-1}(A)$ é normal.

Corolário 2.9. Sejam A um domínio Noetheriano e $x \in A \setminus \{0\}$. Então, A é normal se, e somente se, A_x e A_P são normais para cada $P \in \mathrm{Ass}(A/(x))$.

Demonstração. Suponha que A seja normal, pela observação anterior, segue que A_x e A_P são normais para qualquer $x \in A \setminus \{0\}$ e $P \in \mathrm{Spec}(A)$. A recíproca segue da **Proposição2.8**. □

2.2 Normalidade da álgebra de Rees de um ideal

Referências importantes nesse tema são [1] e [2].

Proposição 2.10. Sejam A um domínio Noetheriano e I um ideal de A. Considere a álgebra de Rees estendida de I, $A[It, t^{-1}]$ e suponha que A é normal. Então,
$A[It, t^{-1}]$ é normal se, e somente se, $A[It, t^{-1}]_P$ é normal para cada $P \in \mathrm{Ass}\left(\frac{A[It,t^{-1}]}{t^{-1}A[It,t^{-1}]}\right)$.

Demonstração. Pela **Observação1.8** temos que $A[It, t^{-1}]_{t^{-1}} = A[t, t^{-1}]$. Logo, $A[It, t^{-1}]_{t^{-1}}$ é normal. Assim, a proposição segue do corolário anterior. □

Para os próximos resultados necessitamos de algumas definições, sejam elas:

Seja $(A, \mathfrak{M})$ um anel Noetheriano local de dimensão n. Um *sistema de parâmetros de A* é uma sequência $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de $\mathfrak{M}$ tal que $\sqrt{(a_1, \ldots, a_n)} = \mathfrak{M}$. Um anel local $(A, \mathfrak{M})$ é dito *regular* se $\dim(A) = \dim_{A/\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)\ (= \mu(\mathfrak{M}))$, onde $\mu(\mathfrak{M})$ denota o número mínimo de geradores de $\mathfrak{M}$.

Lema 2.11. Sejam A um anel Noetheriano e x um elemento regular de A. Se $A/(x)$ é reduzido, isto é, $\mathfrak{N}_{A/(x)} = 0$, então A_P é normal para cada $P \in \mathrm{Ass}_A(A/(x))$.

Demonstração. Sendo A Noetheriano, todo ideal de A admite uma decomposição primária minimal. Seja $(x) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_k$ uma decomposição primária minimal de (x), isto é, cada Q_i é um ideal primário, $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ para $i \neq j$ e $(x) \subsetneq \bigcap_{i \neq j} Q_i$. Além disso, temos que $\mathrm{Ass}_A(A/(x)) = \{P_1, \ldots, P_k\}$, onde $P_i = \sqrt{Q_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Como $A/(x)$ é reduzido, tem-se

$$(x) = \sqrt{(x)} = \sqrt{Q_1 \cap \cdots \cap Q_k} = P_1 \cap \cdots \cap P_k.$$

Afirmamos que $(x)A_{P_i} = P_i A_{P_i}$ para cada $i = 1, \ldots, k$. De fato, mostremos que $P_j A_{P_i} = A_{P_i}$ para $j \neq i$. Suponha por absurdo que $P_j A_{P_i} \subsetneq A_{P_i}$, neste caso teríamos $P_j \subseteq P_i$. Logo,

$$Q_1 \cap \cdots \cap Q_k = (x) = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_{i-1}} \cap \sqrt{Q_{i+1}} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_k} \supseteq Q_1 \cap \cdots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \cdots \cap Q_k.$$

Por isso, $Q_1 \cap \cdots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \cdots \cap Q_k \subseteq Q_i$. Portanto, $(x) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \cdots \cap Q_k$, que é um absurdo, pois tomamos uma decomposição primária de (x) minimal.

Pelo **Teorema A.2 (Teorema do ideal principal de Krull)**, para cada $i = 1, \ldots, k$ temos que $\mathrm{ht}(P_i) \leq 1$. Afirmamos que é igual a 1. Do contrário, se $\mathrm{ht}(P_i) = 0$ então teríamos que P_i é primo minimal de A, logo é um primo associado de A, assim, $P_i = (0 : a)$, $a \neq 0$. Por outro lado, como $P_i \in \mathrm{Ass}_A(A/(x))$ temos que $P_i = (\overline{0} : \overline{b})$, $b \notin (x)$. Note que $x \in (\overline{0} : \overline{b})$, o que implica, $x \in (0 : a)$, como x é um elemento regular de A, teríamos $a = 0$ que é um absurdo. Portanto, $\mathrm{ht}(P_i) = 1$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Como $\mathrm{ht}(P_i) = \mathrm{ht}(P_i A_{P_i}) = \dim(A_{P_i})$ temos que $P_i A_{P_i}$ é gerado por um sistema de parâmetros, logo A_{P_i} é um anel local regular, pelo **Teorema A.3 (Auslander-Buchsbaum)**, segue que A_{P_i} é um domínio normal. □

Proposição 2.12. Sejam A um anel Noetheriano e x um elemento regular de A. Se A_x é um domínio normal e $A/(x)$ é reduzido, então A é um domínio normal.

Demonstração. Sendo A_x um domínio e x um elemento regular de A temos que A é um domínio, de fato, sejam $a, b \in A$ tais que $ab = 0$, logo $ab/1 = 0/1$ em A_x, como A_x é domínio segue que $a/1 = 0/1$, por igualdade de classes, existe r inteiro tal que $ax^r = 0$, visto que x é regular de A, tem-se $a = 0$, e portanto A é domínio. Além disso, pelo lema anterior, A_P é normal para todo $P \in \mathrm{Ass}_A(A/(x))$. Assim, pelo **Corolário2.9** temos que A é normal. □

Teorema 2.13. *Sejam A um anel e I um ideal de A. Se I é gerado por uma sequência regular $f_1, \ldots, f_q$, então o homomorfismo sobrejetor de álgebras graduadas:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (A/I)[t_1, \ldots, t_q] & \longrightarrow & \mathrm{gr}_I(A) = (A/I)[\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_q] \\ & t_i & \longmapsto & \overline{f}_i = f_i + I^2 \end{array}$$

é um isomorfismo, onde $t_1, \ldots, t_q$ são indeterminadas sobre A/I.

Demonstração. Procederemos por indução em q. Se $q = 1$ então $I = (x)$, onde x é um elemento regular e o homomorfismo é definido por

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (A/(x))[t] & \longrightarrow & \mathrm{gr}_{(x)}(A) = (A/(x))[\overline{x}] \\ & t & \longmapsto & \overline{x} = x + (x)^2 \end{array}$$

Chamemos atenção para a multiplicação em $\mathrm{gr}_{(x)}(A) = (A/(x))[\overline{x}]$ definida em 1.7. Assim, mostremos que o núcleo de φ é nulo.

De fato, seja $p(t) = (a_0 + (x)) + (a_1 + (x))t + \cdots + (a_n + (x))t^n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Então,

$$0 = \varphi(p(t)) = (a_0 + (x)) + (a_1 + (x))(x + (x)^2) + \cdots + (a_n + (x))(x + (x)^2)^n$$

$$= (a_0 + (x)) + (a_1 x + (x)^2) + \cdots + (a_n x^n + (x)^{n+1}).$$

Portanto, $a_i x^i \in (x)^{i+1}, \ i = 0, \ldots, n$. Sendo x regular temos que $a_i \in (x)$. Logo, $p(t) = 0$, e para o caso $q = 1$, φ é isomorfismo.

Considere o ideal $J = (f_1, \ldots, f_{q-1})$, por hipótese de indução, o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi': & (A/J)[t_1, \ldots, t_{q-1}] & \longrightarrow & \mathrm{gr}_J(A) = (A/J)[\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_{q-1}] \\ & t_i & \longmapsto & \overline{f}_i = f_i + J^2 \end{array}$$

é um isomorfismo. Note que $(J : f_q) = J$, já que f_q é um elemento regular de A/J. Além disso, $(J^m : f_q) = J^m$, $m \geq 1$. De fato, faremos por indução em m, o caso $m = 1$ foi citado anteriormente, logo suponha que $(J^{m-1} : f_q) = J^{m-1}$. Seja $a \in (J^m : f_q)$, por definição, $af_p \in J^m \subseteq J^{m-1}$, assim $a \in (J^{m-1} : f_q) = J^{m-1}$. Observe que $a = 0$ em $(A/J)[t_1, \ldots, t_{q-1}]$, pelo isomorfismo φ', temos que a classe de a é a nula em $\mathrm{gr}_J(A)$, isto é, $a + J^m = J^m$, e portanto $a \in J^m$.

Seja $F \in A[t_1, \ldots, t_q]$ um polinômio homogêneo de grau d tal que sua imagem em $(A/I)[t_1, \ldots, t_q]$ está contida no $\mathrm{Ker}(\varphi)$, isto é, $F(f_1, \ldots, f_q) \in I^{d+1}$. Como φ é graduado é suficiente provar que $F \in IA[t]$, e para mostrar isso procederemos por indução em d. Se $d = 0$ então F é uma constante, e pela condição exigida, $F \in I$. Existe $W \in A[t_1, \ldots, t_q]$ de grau $d + 1$ tal que $F(f_1, \ldots, f_q) = W(f_1, \ldots, f_q)$, W é da forma $W = \sum_{i=1}^{q} t_i W_i$, onde $W_i = 0$ ou W_i é um polinômio homogêneo em $A[t_1, \ldots, t_q]$ de grau d. Além disso, note que podemos escrever

$$F' = F - \sum_{i=1}^{q} f_i W_i = G + t_q H,$$

com $G \in A[t_1, \ldots, t_{q-1}]$ de grau d e $H \in A[t_1, \ldots, t_q]$ de grau $d-1$. Logo, $F'(f_1, \ldots, f_q) = 0$, assim $H(f_1, \ldots, f_q) \in (J^d : f_q) = J^d \subseteq I^d$ e por hipótese de indução em d temos que os coeficientes de H estão em I. Então, resta provar que os coeficientes de G estão em I. Considere $H' \in A[t_1, \ldots, t_{q-1}]$

de grau d tal que $H(f_1, \ldots, f_q) = H'(f_1, \ldots, f_q)$. Seja

$$F'' = G + f_q H' \in A[t_1, \ldots, t_{q-1}],$$

note que $F''(f_1, \ldots, f_q) = F'(f_1, \ldots, f_q) = 0$, assim por φ' ser um isomorfismo, temos que F'' é o polinômio nulo em $(A/J)[t_1, \ldots, t_{q-1}]$. Portanto, os coeficientes de F'' estão em J e consequentemente os coeficientes de G estão em I, o que prova o teorema.

□

Teorema 2.14. *Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal de A. Se A é um domínio normal e $\mathrm{gr}_I(A)$ é reduzido, então $A[It, t^{-1}]$ é normal.*

Demonstração. Como $A[It, t^{-1}]/t^{-1}A[It, t^{-1}] \simeq \mathrm{gr}_I(A)$ é reduzido e $A[It, t^{-1}]_{t^{-1}} = A[t, t^{-1}]$ é um domínio normal, pela **Proposição 2.12** segue que $A[It, t^{-1}]$ é normal. □

Definição 2.3. Sejam A um domínio e K o seu corpo de frações. Um elemento $x \in K$ é *quase integral sobre* A se existe $0 \neq a \in A$ tal que $ax^n \in A$ para todo $n \geq 0$.

Proposição 2.15. Sejam A um domínio Noetheriano e K o seu corpo de frações. Então, um elemento $x \in K$ é integral sobre A se, e somente se, x é quase integral sobre A.

Demonstração. Seja $x = c/d \in K$ tal que $d \neq 0$. Se x é integral sobre A, então existem $b_1, \ldots, b_m \in A$ tais que $x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m = 0$. Tomando $a = d^m$ temos que $ax^n \in A$ para todo $n > 0$. Reciprocamente, suponha que existe $0 \neq a \in A$ tal que $ax^n \in A$, $\forall\ n \geq 0$. Assim, $A[x] \subseteq a^{-1}A$, sendo $a^{-1}A$ um A-módulo Noetheriano, temos que $A[x]$ é um A-módulo finitamente gerado, seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ um conjunto de geradores. Mostremos que todo elemento de $A[x]$ é inteiro sobre A, em particular x pertencente $A[x]$. De fato, seja $f \in A[x]$. Assim, $f\alpha_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}\alpha_j$, onde $m_{ij} \in A$, $i = 1, \ldots, n$. Sejam as matrizes $M = (m_{ij})$ e $N = M - fI$ (I denota a matriz identidade), e o vetor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Por construção, $N\alpha^T = 0$, logo $\det(N)\alpha^T = \mathrm{adj}(N)N\alpha^T = 0$, o que implica, $\alpha_i \det(N) = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$. Então, $\det(N) = 0$. Além disso, $g(t) = (-1)^n \det(M - tI)$ é um polinômio mônico em $A[t]$, t um indeterminada sobre A tal que $g(f) = 0$. Portanto, f é integral sobre A. □

O próximo Teorema encontra-se em [2].

Teorema 2.16. *Sejam A um domínio normal Noetheriano e I um ideal de A. São equivalentes:*

i. I é um ideal normal de A.

ii. A álgebra de Rees $A[It]$ é normal.

iii. O ideal $IA[It] \subseteq A[It]$ é completo.

iv. O ideal $(t^{-1}) \subseteq A[It, t^{-1}]$ é completo

v. A álgebra de Rees estendida $A[It, t^{-1}]$ é normal.

Demonstração. i. $\Rightarrow$ ii. Sendo A normal, pelo **Lema 2.6**, temos que $A[t]$ é normal, como $A[It] \subseteq A[t]$, segue que $\overline{A[It]} \subseteq \overline{A[t]} = A[t]$. Seja $z \in \overline{A[It]}$, podemos escrever $z = \sum_{i=0}^{s} b_i t^i$. Note que é suficiente provar que $b_s t^s \in A[It]$, de fato, se $b_s t^s \in A[It]$ então $(z - b_s t^s) = \sum_{i=0}^{s-1} b_i t^i \in \overline{A[It]}$, o que implica $b_{s-1} t^{s-1} \in A[It]$, dessa maneira, mostramos que $z \in A[It]$. Primeiro mostremos que $b_s t^s \in \overline{A[It]}$. Como z é quase integral sobre $A[It]$ temos que existe $0 \neq f \in A[It]$ tal que $f z^n \in A[It]$, $\forall\ n > 0$. Logo, existe $0 \neq f_m \in I^m$ tal que $(f_m t^m)(b_s t^s)^n \in A[It]$, $\forall\ n > 0$, isto é , $b_s t^s$ é quase integral sobre $A[It]$. Sendo A domínio Noetheriano, segue da proposição anterior que $b_s t^s$ é integral sobre $A[It]$. Assim, existem $a_1, \ldots, a_m \in A[It]$ tais que

$$(b_s t^s)^m + a_1 (b_s t^s)^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(b_s t^s) + a_m = 0.$$

Note que $a_i = \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} t^j$ com $a_{ij} \in I^j$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Agrupando todos os termos em t de grau sm, temos que o coeficiente do mesmo é zero, logo $b_s^m + \sum_{i=1}^{m} a_{i,si} b_s^{m-i} = 0$. Portanto, b_s é integral sobre I^s, sendo I normal ($I^k = \overline{I^k}$, $\forall\ k > 0$), segue que $b_s \in I^s$, assim, $b_s t^s \in A[It]$ e $A[It] = \overline{A[It]}$.

ii. $\Rightarrow$ iii. Seja $z =\in A[It]$, tal que z é integral sobre $IA[It]$. Logo, z satisfaz

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

para certos $a_i \in I^i A[It]$, $i = 1, \ldots, m$. Multiplicando por t^m temos que

$$(tz)^m + a_1 t (tz)^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t^{m-1} (tz) + a_m t^m = 0,$$

note que $a_i t^i \in A[It]$. Logo, tz é integral sobre $A[It]$, como estamos supondo $A[It]$ normal, temos que $tz \in A[It]$. Portanto, $z \in IA[It.]$

iii. $\Rightarrow$ iv. Seja $z \in A[It, t^{-1}]$ um elemento integral sobre $t^{-1}A[It, t^{-1}]$, como a parte negativa da expansão de Laurent de z já está em $t^{-1}A[It, t^{-1}]$ podemos escrever $z = \sum_{i=0}^{s} b_i t^i$, com $s \geq 0$ e $b_i \in I^i$, $\forall\, i \geq 0$. Para mostramos que $z \in t^{-1}A[It, t^{-1}]$ devemos verificar que $b_i \in I^{i+1}$, $i = 0, \ldots, s$. Note que é suficiente mostrar que $b_s \in I^{s+1}$. Como z é integral sobre $t^{-1}A[It, t^{-1}]$, temos que z satisfaz

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

com $a_i \in (t^{-1})^i A[It, t^{-1}]$. Multiplicando por t^m, temos que zt é integral sobre $A[It, t^{-1}]$, consequentemente, zt é quase integral sobre $A[It, t^{-1}]$. Usando o mesmo argumento de i. $\Rightarrow$ ii. segue que $b_s t^{s+1}$ é quase integral sobre $A[It, t^{-1}]$, assim $b_s t^{s+1}$ é integral sobre $A[It, t^{-1}]$. Multiplicando a equação integral por $b_s t^{s+1}$ tantas vezes quanto for o número do maior grau de t^{-1} nos coeficientes da equação, temos que $b_s t^{s+1}$ é integral sobre $IA[It]$ que é completo, logo $b_s t^{s+1} \in IA[It]$, e portanto $b_s \in I^{s+1}$.

iv. $\Rightarrow$ v. Pela **Observação1.8** temos que $A[It, t^{-1}]_{t^{-1}} = A[t, t^{-1}]$ que é um domínio normal. Como por hipótese $t^{-1}A[It, t^{-1}]$ é completo, segue pelo **Lema 2.7** que $A[It, t^{-1}]$ é normal.

v. $\Rightarrow$ i. Para mostrar que I é um ideal normal de A devemos verificar que $I^r = \overline{I^r}, \ \forall \ r > 0$. Seja $z \in \overline{I^r}$, então z satisfaz

$$z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

para alguns $a_i \in I^{ri}, \ i = 1, \ldots, m$. Multiplicando por t^{rm} temos

$$(zt^r)^m + a_1 t^r (zt^r)^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(t^r)^{m-1}(zt^r) + a_m t^{rm} = 0,$$

logo, zt^r é integral sobre $A[It, t^{-1}]$ que por hipótese é normal, assim $zt^r \in A[It, t^{-1}]$ e portanto, $z \in I^r$. $\square$

Corolário 2.17. Sejam A um domínio normal Noetheriano e I um ideal de A. Se $\mathrm{gr}_I(A)$ é reduzido então $A[It]$ é normal.

Demonstração. Pelo **Teorema 2.14** temos que $A[It, t^{-1}]$ é normal e pelo teorema anterior segue que $A[It]$ é normal. $\square$

Corolário 2.18. Sejam A um domínio normal Noetheriano e I um ideal radical de A. Se I é gerado por uma sequência regular, então $\mathrm{gr}_I(A)$ é reduzido e $A[It]$ é um domínio normal.

Demonstração. Sendo I radical temos que A/I é um anel reduzido. Assim, $(A/I)[t_1, \ldots, t_q]$, onde $t_1, \ldots, t_q$ são indeterminadas sobre A/I, também é um anel reduzido. Logo, pelo **Teorema 2.13** temos que $\mathrm{gr}_I(A)$ é reduzido. E pelo corolário anterior segue que $A[It]$ é um domínio normal. $\square$

Exemplo 2.2. Seja $A = \mathbb{Q}[x, y]$ e $I = (x^2, y^2)$. Note que $xy \in \overline{I}$, de fato, basta verificar que xy satisfaz $(xy)^2 + a_1(xy) + a_2 = 0$, com $a_1 = 0 \in I$ e $a_2 = -x^2y^2 \in I^2$. Porém, $xy \notin I$. Logo, I não é completo e portanto $A[It]$ não é normal.

Definição 2.4. Sejam A um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal e $P_1, \ldots, P_r$ os primos minimais de I. Dado um inteiro $n > 0$, definimos a *n-ésima potência simbólica de I* como o ideal

$$I^{(n)} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r,$$

onde Q_i é a componente primária de I^n correspondendo a P_i.

A próxima proposição nos mostrará uma equivalência dessa definição.

Proposição 2.19. Sejam A um anel Noetheriano, $I \subsetneq A$ um ideal e $P_1, \ldots, P_r$ os primos minimais de I. Se $S = A \setminus \cup_{i=1}^{r} P_i$ então

$$I^{(n)} = S^{-1}I^n \cap A, \; n > 0.$$

Demonstração. Seja $I^n = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r \cap Q_{r+1} \cap \cdots \cap Q_s$ uma decomposição primária minimal de I^n, assim

$$P_1 \cap \cdots \cap P_r = \sqrt{I} = \sqrt{I^n} = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_r} \cap \sqrt{Q_{r+1}} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_s},$$

reordenando se necessário, temos que $\sqrt{Q_i} = P_i, \; i = 1, \ldots, r$. Além disso, para $j > r$ segue que $\sqrt{Q_j} \cap S \neq \emptyset$, de fato, do contrário $\sqrt{Q_j} \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_r$, pelo Lema da Esquiva, $\sqrt{Q_j} \subseteq P_l$ para algum $l = 1, \ldots, r$, pela minimalidade de P_l teríamos $\sqrt{Q_l} = P_l = \sqrt{Q_j}$ o que é um absurdo pela minimalidade da decomposição primária. Assim, $S^{-1}Q_j = S^{-1}A$. Portanto,

$$S^{-1}I^n = S^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{s} Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^{r} S^{-1}Q_i.$$

Como Q_i é primário tem-se $S^{-1}Q_i \cap A = Q_i$, portanto $I^{(n)} = S^{-1}I^n \cap A$. □

Observação 2.3. Em particular, se $P \subset A$ é um ideal primo então $P^{(n)} = P^n A_P \cap A$.

Proposição 2.20. Sejam A um anel Noetheriano, I um ideal radical de A e $P_1, \ldots, P_r$ os primos minimais de I. Então,

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap \cdots \cap P_r^{(n)}, \; n > 0.$$

Demonstração. Seja

$$I^n = Q_1 \cap \cdots Q_r \cap Q_{r+1} \cap \cdots \cap Q_s$$

uma decomposição primária minimal de I^n. Mais uma vez, reordenando se necessário, temos que $\sqrt{Q_i} = P_i, \; i = 1, \ldots, r$. Localizando em P_i temos que $I^n A_{P_i} = Q_i A_{P_i}$ e como $I = \sqrt{I} = P_1 \cap \cdots \cap P_r$ tem-se

$$I^n A_{P_i} = (IA_{P_i})^n = (P_i A_{P_i})^n = P_i^n A_{P_i}.$$

Assim, $P_i^n A_{P_i} = Q_i A_{P_i}$, contraindo a A temos $P_i^{(n)} = Q_i$. Portanto, $I^{(n)} = \bigcap_{j=1}^{r} P_j^{(n)}$. □

Um aspecto interessante é saber quando as potências simbólica e ordinária de um ideal coincidem. Nos próximos resultados apresentaremos alguns casos em que essa igualdade pode ser descrita em termos de propriedades do anel graduado associado.

Definição 2.5. Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal próprio de A. Dizemos que I é *normalmente livre de torção* se $\mathrm{Ass}(A/I^i) \subseteq \mathrm{Ass}(A/I), \; \forall \, i > 0$.

Proposição 2.21. Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal de A tal que I não contém primos imersos, isto é, todos os primos associados de I são minimais. Então, I é normalmente livre de torção se, e somente se, $I^n = I^{(n)}, \forall\, n > 0$.

Demonstração. Suponha que I é nomalmente livre de torção. Note que $\operatorname{Ass}(A/I) \subseteq \operatorname{Ass}(A/I^n)$, de fato, sejam $P_1, \ldots, P_r$ os primos minimais de I e sejam $P'_1, \ldots, P'_s$ os primos minimais de I^n. Assim,

$$P_1 \cap \cdots \cap P_r = \sqrt{I} = \sqrt{I^n} = P'_1 \cap \cdots \cap P'_s.$$

Logo, para cada $i = 1, \ldots, r$ temos $P_i \subseteq P'_j$ para algum $j = 1, \ldots, s$. Como P_i é um primo que contém $I \supseteq I^n$, segue que $P_i = P'_j$, já que P'_j é primo minimal de I^n. Portanto, $\operatorname{Ass}(A/I) \subseteq \operatorname{Ass}(A/I^n),\ n > 0$, sendo I normalmente livre de torção, tem-se $\operatorname{Ass}(A/I) = \operatorname{Ass}(A/I^n),\ n > 0$. Por isso, todos os primos associados de I^n são minimais, logo I^n tem uma única decomposição primária minimal, e portanto $I^n = I^{(n)}, n > 0$.

Reciprocamente, sejam $P_1, \ldots, P_r$ os primos associados de I. Como P_i é um primo minimal de I para todo $i = 1, \ldots, r$ temos que

$$\operatorname{Ass}(A/I^n) = \operatorname{Ass}(A/I^{(n)}) \subseteq \{P_1, \ldots, P_r\}.$$

$\square$

Definição 2.6. Sejam A um anel e I um ideal de A. Dizemos que I é uma *interseção completa* se I é gerado por uma sequência regular. Um ideal $I \subseteq A$ é *genericamente uma interseção completa* se IA_P é uma interseção completa para todo $P \in \operatorname{Ass}_A(A/I)$.

Proposição 2.22. Sejam A um anel Noetheriano e P um ideal primo de A tal que PA_P é uma interseção completa. Então, $P^{(n)} = P^n,\ \forall\, n > 0$ se, e somente se, $\operatorname{gr}_P(A)$ é um domínio.

Demonstração. Suponha que $P^{(n)} = P^n,\ \forall\, n > 0$. Como $\operatorname{gr}_P(A) = A[Pt]/PA[Pt]$, basta mostrarmos que $PA[Pt]$ é um ideal primo de $A[Pt]$. Seja $x = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r \in A[Pt]$ e considere $x' = (a_0/1) + (a_1/1)t + \cdots + (a_r/1)t^r$ a imagem de x em $A_P[PA_Pt]$. Observe que $a_i \in P^{i+1}$ se, e somente se, $(a_i/1) \in P^{i+1}A_P$, de fato, se $(a_i/1) \in P^{i+1}A_P$ então $a_i \in P^{(i+1)} = P^{i+1}$. Portanto, $x \in PA[Pt]$ se, e somente se, $x' \in PA_P[PA_Pt]$. Consequentemente, $PA[Pt]$ é primo se, e somente se, $PA_P[PA_Pt]$ é primo. Sendo PA_P uma interseção completa, ou seja, PA_P é gerado por uma sequência regular, pelo **Teorema 2.13**, tem-se

$$(A_P/PA_P)[t_1, \ldots, t_k] \simeq \operatorname{gr}_{PA_P}(A_P),$$

onde k é o número de elementos da sequência regular geradora de PA_P. Assim, $\operatorname{gr}_{PA_P}(A_P)$ é um domínio, implicando que $PA_P[PA_Pt]$ é primo e pelo comentário anterior $\operatorname{gr}_P(A)$ é domínio.

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{gr}_P(A)$ é um domínio. Provemos que $\mathrm{Ass}_A(P^i/P^{i+1}) = \{P\}$ para $i > 0$. Seja P_1 um primo associado de P^i/P^{i+1}, logo, $P_1 = (\overline{0} : \overline{x})$ para algum $x \in P^i \setminus P^{i+1}$. Por definição, $a \in P_1$ se, e somente se, $ax \in P^{i+1}$. Como $\mathrm{gr}_P(A) = \bigoplus_{n\geq 0} P^n/P^{n+1}$ é um domínio, segue que $(a+P)(x+P^{i+1}) = ax + P^{i+1} = P^{i+1}$ implica que $a \in P$ ou $x \in P^{i+1}$. Assim, $a \in P_1$ se, e somente se, $a \in P$. Portanto, $P_1 = P$ e $\mathrm{Ass}_A(P^i/P^{i+1}) = \{P\}$. Note que a sequência

$$0 \longrightarrow P^i/P^{i+1} \longrightarrow A/P^{i+1} \longrightarrow A/P^i \longrightarrow 0,$$

é exata. Logo, $\mathrm{Ass}(A/P^{i+1}) \subseteq \mathrm{Ass}(P^i/P^{i+1}) \cup \mathrm{Ass}(A/P^i)$. Por indução em $i > 0$, segue que $\mathrm{Ass}(A/P^i) \subseteq \mathrm{Ass}(A/P) = \{P\}$. Portanto, P é normalmente livre de torção e pela **Proposição 2.21** temos que $P^n = P^{(n)}$, $\forall\ n > 0$. □

O próximo Teorema foi obtido por Simis, Vasconcelos e Villarreal em [10].

Teorema 2.23. *Sejam A um domínio normal Noetheriano e I um ideal radical que é genericamente uma interseção completa. Se I é normalmente livre de torção então sua álgebra de Rees $\mathcal{R}(I) = A[It]$ é um domínio normal.*

Demonstração. Note que pelo **Corolário 2.17** basta mostramos que $\mathrm{gr}_I(A) = A[It]/IA[It]$ é reduzido. Seja $\overline{f} = a_0 + a_1t + \cdots + a_st^s + IA[It]$ um elemento nilpotente de $\mathrm{gr}_I(A)$. Assim, existe $m > 0$ tal que $(a_st^s)^m \in IA[It]$. Por indução em s, note que é suficiente mostrar que $a_st^s \in IA[It]$, de fato, se $s = 0$ então $a_0^m \in I$ o que implica $a_0 \in \sqrt{I} = I$ o que mostra o caso $s = 0$. Supondo que $a_st^s \in IA[It]$ note que $\overline{f} = a_0 + a_1t + \cdots + a_{s-1}t^{s-1} + IA[It]$, pela hipótese de indução, $a_0 + a_1t + \cdots + a_{s-1}t^{s-1} \in IA[It]$ e portanto, $a_0 + a_1t + \cdots + a_st^s \in IA[It]$.

Por isso, basta provar que $a_st^s \in IA[It]$. Sejam $P_1, \ldots, P_r$ os primos minimais de I, logo $P_1 \cap \cdots \cap P_r = \sqrt{I} = I$ o que implica $IA_{P_i} = P_iA_{P_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Como I é genericamente uma interseção completa segue que $IA_{P_i} = P_iA_{P_i}$ é uma interseção completa para cada $i = 1, \ldots, r$. Assim, pelo **Corolário 2.18** que $\mathrm{gr}_{P_iA_{P_i}}(A_{P_i})$ é reduzido.

Por um momento usaremos a notação $P_{i_{P_i}}$ ao invés de $P_iA_{P_i}$ para tentar facilitar a notação do anel graduado associado. Portanto, a imagem de a_st^s em

$$\mathrm{gr}_{P_{i_{P_i}}}(A_{P_i}) = \frac{A_{P_i}[P_{i_{P_i}}t]}{P_{i_{P_i}}A_{P_i}[P_{i_{P_i}}t]}$$

é zero para todo $i = 1, \ldots, r$. Ou seja, $a_st^s/1 \in P_{i_{P_i}}A_{P_i}[P_{i_{P_i}}t]$ o que implica $a_s/1 \in (P_{i_{P_i}})^{s+1}$. Consequentemente,

$$a_s \in (A \cap P_1^{s+1}A_{P_1}) \cap \cdots \cap (A \cap P_r^{s+1}A_{P_r}) = P_1^{(s+1)} \cap \cdots \cap P_r^{(s+1)}.$$

Como I é radical (logo, não possui primos imersos) e normalmente livre de torção, pela **Pro-**

posição 2.21 que

$$I^{s+1} = I^{(s+1)} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r,$$

onde $\sqrt{Q_i} = P_i,\ i = 1, \ldots, r$. Assim, $I^{s+1}A_{P_i} = Q_iA_{P_i},\ \forall\ i = 1, \ldots, r$. Além disso, note que $I^{s+1}A_{P_i} = P_i^{s+1}A_{P_i}$, de fato, $I = \sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_r$, logo $I \subseteq P_i$ implicando que $I^{s+1} \subseteq P_i^{s+1}$ o que já mostra uma inclusão. Para a outra, note que se $x \in P_i^{s+1}A_{P_i}$ então x é uma soma finita de elementos da forma $a_1 \cdots a_{s+1}/p_i$ com $a_j \in P_i,\ j = 1, \ldots, s+1$ e $p_i \notin P_i$. Sendo P_i primo minimal de I, existem $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_r$ tais que $b_k \in P_k$ e $b_k \notin P_i,\ k \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$. Assim,

$$\frac{a_1 \cdots a_{s+1}}{p_i} = \frac{(a_1b_1 \cdots b_{i-1}b_{i+1} \cdots b_r) \cdots (a_{s+1}b_1 \cdots b_{i-1}b_{i+1}, \ldots b_r)}{p_i(b_1 \cdots b_{i-1}b_{i+1} \cdots, b_r)^{s+1}} \in I^{s+1}A_{P_i}.$$

Dessa forma, $Q_iA_{P_i} = I^{s+1}A_{P_i} = P_i^{s+1}A_{P_i}$ e consequentemente $Q_i = P_i^{(s+1)}$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Portanto, $a_s \in I^{s+1}$ concluindo que $a_st^s \in IA[It]$.

$\square$

Observação 2.4. Uma questão importante diz respeito à descrição de $\overline{A[It]}$. Em particular, investigar quando $\overline{A[It]} = A[\overline{I}t]$. Vide [13].

Capítulo 3

Reduções

Os estudos sobre reduções começaram com Northcott e Rees em [5].

Definição 3.1. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A. Dizemos que J é uma *redução de* I se existe um inteiro não-negativo n tal que $I^{n+1} = JI^n$.

Observação 3.1. Pela **Proposição 2.2**, um elemento $b \in A$ é integral sobre I se, e somente se, I é uma redução de $I + (b)$.

Além disso, note que se $JI^n = I^{n+1}$, então

$$I^{m+n} = I^{n+1}I^{m-1} = JI^nI^{m-1} = JI^{m+n-1} = \cdots = J^mI^n, \forall\ m \in \mathbb{Z}^+.$$

Em particular, se $J \subseteq I$ é uma redução, existe um inteiro n tal que $I^{m+n} \subseteq J^m, \forall\ m \geq 1$.

A próxima proposição mostrará que a propriedade de redução é transitiva.

Proposição 3.1. Sejam A um anel e $K \subseteq J \subseteq I$ ideais de A.

i. Se K é uma redução de J e J é uma redução de I, então K é uma redução de I.

ii. Se K é uma redução de I, então J é uma redução de I.

iii. Se I é finitamente gerado, $J = K + (a_1, \ldots, a_k)$ e K é uma redução de I, então K é uma redução de J.

Demonstração. i. Sendo $K \subseteq J$ e $J \subseteq I$ reduções, existem inteiros não-negativos n e m tais que $KJ^n = J^{n+1}$ e $JI^m = I^{m+1}$. Pela observação anterior, temos que

$$I^{m+n+1} = J^{n+1}I^m = KJ^nI^m \subseteq KI^{m+n} \subseteq I^{m+n+1}.$$

Portanto, $I^{m+n+1} = KI^{m+n}$ e K é uma redução de I.

ii. Se $K \subseteq I$ é uma redução, então existe n um inteiro não-negativo tal que $I^{n+1} = KI^n \subseteq JI^n \subseteq I^{n+1}$. Logo, J é uma redução de I.

iii. Sendo K uma redução de I, existe um inteiro n tal que $KI^n = I^{n+1}$. Por ii., para cada $i = 0, \ldots, k$ temos que $K + (a_1, \ldots, a_{i-1})$ é uma redução de I, para $i = 0$ seja $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ o ideal nulo. Como $J = K + (a_1, \ldots, a_k) \subseteq I$ segue que $a_i I^n \subseteq KI^n \subseteq (K + (a_1, \ldots, a_{i-1}))I^n$. Além disso, se $a \in A$ é tal que $aI^n = 0$, em particular $aa_i^n = 0$, o que implica $aa_i \in \sqrt{0}$. Por hipótese I é finitamente gerado, logo I^n é finitamente gerado. Portanto, pela **Proposição2.3**, tem-se a_i integral sobre $K + (a_1, \ldots, a_{i-1})$. E pela **Observação3.1** segue que $K + (a_1, \ldots, a_{i-1})$ é uma redução de $K + (a_1, \ldots, a_i)$. Assim, visto que $K \subseteq K + (a_1, \ldots, a_k) = J$, este item segue pela propriedade transitiva da redução, item i., por indução sobre k.

□

No caso em que o ideal em questão é finitamente gerado temos uma caracterização de uma redução através do fecho integral.

Corolário 3.2. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A. Suponha que I é finitamente gerado. Então, J é uma redução de I se, e somente se, $I \subseteq \overline{J}$.

Demonstração. Se J é uma redução de I, então pela proposição anterior (item iii.) para qualquer $a \in I$, temos que J é uma redução de $J + (a)$, pela **Observação3.1**, tem-se $a \in \overline{J}$. Logo, $I \subseteq \overline{J}$. Reciprocamente, suponha que $I = (a_1, \ldots, a_k) \subseteq \overline{J}$. Assim, para cada $j = 1, \ldots, k$, a_j é integral sobre J e consequentemente é integral sobre $J + (a_1, \ldots, a_{j-1})$. Considere a cadeia de inclusões $J \subseteq J + (a_1) \subseteq J + (a_1, a_2) \subseteq \cdots \subseteq J + (a_1, \ldots, a_k) = I$. Novamente pela **Observação3.1** segue que cada inclusão é uma redução. Por transitividade, $J \subseteq I$ é uma redução. □

Proposição 3.3. Sejam A um anel Noetheriano $\mathbb{N}$-graduado gerado sobre A_0 por A_1. Suponha que A_0 é reduzido e sejam $a_1, \ldots, a_m \in A$ elementos homogêneos de grau 1. Se $\sqrt{(a_1, \ldots, a_m)} = A_1 A$ então $\overline{(a_1, \ldots, a_m)} = A_1 A$.

Demonstração. Por hipótese existe $n > 0$ tal que $A_1^n \subseteq (a_1, \ldots, a_m)$, assim $A_1^n A \subseteq A_1^{n-1}(a_1, \ldots, a_m)$. Logo, $(a_1, \ldots, a_m)$ é uma redução de $A_1 A$, pelo corolário anterior, temos que $A_1 A \subseteq \overline{(a_1, \ldots, a_m)}$. Sendo $A_1 A$ radical (já que A_0 é reduzido) segue que $A_1 A \subseteq \overline{(a_1, \ldots, a_m)} \subseteq \sqrt{(a_1, \ldots, a_m)} \subseteq A_1 A$. □

O próximo corolário provará a **Observação2.1**.

Corolário 3.4. Sejam A um anel e I um ideal de A. Então, $\overline{I}$ é um ideal de A. Além disso, $\overline{I}$ é integralmente fechado em A.

Demonstração. Seja $b \in \overline{I}$. Então, existem $a_i \in I^i$ tais que $b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n = 0$. Assim, se $x \in A$ então $(xb)^n + a_1 x (xb)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}(xb) + a_n x^n = 0$, logo, $xb \in \overline{I}$. Suponha $a, b \in \overline{I}$. Logo, existem $c_i \in I^i$ tais que $a^n + c_1 a^{n-1} + \cdots + c_{n-1} a + c_n = 0$. Assim como foi feito na demonstração da **Proposição 2.3** existe $K \subseteq I$ um ideal finitamente gerado tal que $c_i \in K^i$. Consequentemente, $a \in \overline{K}$, analogamente, $b \in \overline{K}$, note que possivelmente devemos estender K.

Sejam $J = K + (a)$ e $L = K + (a, b) = J + (b)$. Então, pela **Observação3.1** K é uma redução de J e J é uma redução de L. Pela transitividade, K é uma redução de L. Como K, J e L são finitamente gerados, pela proposição anterior, item iii., $K \subseteq K + (a + b) \subseteq L$ são reduções. Mais uma vez pela **Observação3.1**, $a + b$ é integral sobre K e consequentemente, é integral sobre I. Portanto, $\overline{I}$ é um ideal.

Provemos agora que $\overline{I}$ é integralmente fechado. Seja $a \in \overline{\overline{I}}$, então existe um ideal $J = (j_1, \ldots, j_k) \subseteq \overline{I}$ tal que $a \in \overline{J}$. Analogamente, existe $K \subseteq I$ um ideal finitamente gerado tal que j_i é integral sobre K. Pelo argumento anterior, K é uma redução de $K + J$ que é uma redução de $K + J + (a)$. Portanto, K é uma redução de $K + (a)$, logo a é integral sobre K e consequentemente, é integral sobre I.

□

Vejamos mais algumas propriedades das reduções

Proposição 3.5. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A. Considere as condições:

i. J é uma redução de I.

ii. $S^{-1}J$ é uma redução de $S^{-1}I$ para cada $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo.

iii. J_P é uma redução de I_P para cada $P \subseteq A$ ideal primo.

iv. $J_{\mathfrak{M}}$ é uma redução de $I_{\mathfrak{M}}$ para cada $\mathfrak{M} \subseteq A$ ideal maximal.

Então, i. $\Rightarrow$ ii. $\Rightarrow$ iii. $\Rightarrow$ iv.. Além disso, se A é Noetheriano então iv. $\Rightarrow$ i..

Demonstração. A prova da primeira parte é simples. Assim, assuma iv. e que A é Noetheriano. Considere a seguinte cadeia

$$(J : I) \subseteq (JI : I^2) \subseteq (JI^2 : I^3) \subseteq (JI^3 : I^4) \subseteq \cdots,$$

como A é Noetheriano, temos que existe k inteiro tal que $(JI^n : I^{n+1}) = (JI^k : I^{k+1})$, $\forall\ n \geq k$. Por iv., para cada ideal maximal de A, existe m inteiro tal que $J_{\mathfrak{M}} I_{\mathfrak{M}}^m = I_{\mathfrak{M}}^{m+1}$, com isso, para n suficientemente grande tem-se $(JI^n : I^{n+1}) \nsubseteq \mathfrak{M}$, logo $(JI^k : I^{k+1}) \nsubseteq \mathfrak{M}$, assim $(JI^k : I^{k+1}) = A$ e consequentemente, $JI^k = I^{k+1}$, portanto J é uma redução de I. □

Proposição 3.6. Sejam A um anel e $J = (a_1, \ldots, a_k) \subseteq I$ ideais de A.

i. Se J é uma redução de I, então para qualquer m inteiro positivo, $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ e J^m são reduções de I^m.

ii. Se $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ ou J^m é uma redução de I^m, para algum inteiro positivo m, então J é uma redução de I.

Demonstração. i. Sendo J uma redução de I existe n inteiro tal que $JI^n = I^{n+1}$. Primeiro mostremos que J^m é uma redução de I^m para qualquer m inteiro positivo. De fato, pela **Observação 3.1** temos que $J^m I^n = I^{n+m}$, $\forall\ m \geq 1$. Assim, multiplicando por I^{mn-n} temos que $J^m(I^m)^n = (I^m)^{n+1}$, e portanto J^m é uma redução de I^m.

Provemos agora que $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ é uma redução de I^m, $\forall\ m \geq 1$. Dado m inteiro positivo, note que

$$(a_1^m, \ldots, a_k^m)(a_1, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)} = (a_1, \ldots, a_k)^{(m-1)k+1}.$$

De fato, basta mostrarmos que $(a_1, \ldots, a_k)^{(m-1)k+1} \subseteq (a_1^m, \ldots, a_k^m)(a_1, \ldots, a_k)^{(k-1)(m-1)}$. Se $x \in (a_1, \ldots, a_k)^{(m-1)k+1}$ então x é soma finita de elementos da forma $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$ tal que $\sum_{i=1}^k n_i = (m-1)k+1$. Se $n_i < m$, $\forall\ i = 1, \ldots, k$ então $(m-1)k+1 = \sum_{i=1}^k n_i \leq (m-1)k$, o que é um absurdo. Logo, necessariamente existe pelo menos um j tal que $n_j \geq m$ o que mostra a inclusão. Assim, multiplicando a igualdade obtida por J^{k-1} vemos que $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ é uma redução de J^m, e por transitividade, segue que $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ é uma redução de I^m.

ii. Primeiro suponha que J^m é uma redução de I^m, para algum m inteiro positivo. Logo, existe um inteiro n tal que $J^m(I^m)^n = (I^m)^{n+1}$. Assim, $I^{mn+m} \subseteq JI^{mn+m-1} \subseteq I^{mn+m}$. Portanto, J é uma redução de I. Agora se existe $m > 0$ tal que $(a_1^m, \ldots, a_k^m)$ é uma redução de I^m então pelo item ii. da **Proposição 3.1** segue que J^m é uma redução de I^m, logo, pelo argumento anterior, J é redução de I.

□

A próxima proposição mostra que exemplos de reduções são obtidos por somas e produtos de ideais.

Proposição 3.7. Sejam A um anel e J_1, J_2, I_1, I_2 ideais de A tais que J_1 é uma redução de I_1 e J_2 é uma redução de I_2. Então

i. $J_1 + J_2$ é uma redução de $I_1 + I_2$.

ii. $J_1 J_2$ é uma redução de $I_1 I_2$.

Demonstração. i. Seja n inteiro não-negativo tal que $J_1 I_1^n = I_1^{n+1}$ e $J_2 I_2^n = I_2^{n+1}$. Logo,

$$(I_1 + I_2)^{2n+1} \subseteq I_1^{n+1}(I_1 + I_2)^n + I_2^{n+1}(I_1 + I_2)^n = J_1 I_1^n (I_1 + I_2)^n + J_2 I_2^n (I^1 + I_2)^n$$

$$\subseteq (J_1 + J_2)(I_1 + I_2)^{2n} \subseteq (I_1 + I_2)^{2n+1}.$$

Portanto, $J_1 + J_2$ é uma redução de $I_1 + I_2$.

ii. Analogamente ao item anterior, seja n inteiro não-negativo tal que $J_1 I_1^n = I_1^{n+1}$ e $J_2 I_2^n = I_2^{n+1}$. Logo, $(I_1 I_2)^{n+1} = J_1 J_2 I_1^n I_2^n$ implica que $J_1 J_2$ é uma redução de $I_1 I_2$.

□

Lema 3.8. Sejam A um anel Noetheriano, $\mathfrak{R}_A$ o radical de Jacobson de A, $J, J' \subseteq I$ ideais e L um ideal contido em $\mathfrak{R}_A I$. Se $J + L = J' + L$, então J é uma redução de I se, e somente se, J' é uma redução de I.

Demonstração. Se J é uma redução de I então existe n inteiro tal que $JI^n = I^{n+1}$. Assim, $I^{n+1} = JI^n \subseteq (J + L)I^n \subseteq (J' + \mathfrak{R}_A I)I^n$, logo $I^{n+1} = \mathfrak{R}_A I^{n+1} + J'I^n$, o que implica

$$\mathfrak{R}_A \left(\frac{I^{n+1}}{J'I^n} \right) = \frac{\mathfrak{R}_A I^{n+1} + J'I^n}{J'I^n} = \frac{I^{n+1}}{J'I^n}.$$

Pelo **Lema de Nakayama**, $I^{n+1} = J'I^n$. Portanto J' é uma redução de I. □

Lema 3.9. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A. Se J é uma redução de I então $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, $\mathrm{Min}(A/J) = \mathrm{Min}(A/I)$ e $\mathrm{ht}(J) = \mathrm{ht}(I)$.

Demonstração. Sendo J uma redução de I, existe n inteiro tal que $JI^n = I^{n+1}$. Como $J \subseteq I$ segue que $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. Seja $x \in \sqrt{I}$, logo existe $m > 0$ tal que $x^m \in I$, assim $(x^m)^{n+1} \in I^{n+1} = JI^n \subseteq J$, implicando que $x \in \sqrt{J}$. Portanto, $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, o que prova também as outras duas igualdades. □

Neste caso, note que $\mathrm{Ass}(A/I)$ não é necessariamente igual a $\mathrm{Ass}(A/J)$ como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1. Sejam K um corpo e $A = K[x, y, z]$ o anel de polinômios nas indeterminadas x, y, z. Sejam $J = (x^3, y^3, xy^2z) \subseteq I = (x^3, y^3, xy^2, x^2y(z-1))$ ideais de A. Note que

$$JI^2 = (x^9, x^8y(z-1), x^7y^2, x^6y^3, x^5y^4, x^4y^5, x^3y^6, x^2y^7, xy^8, y^9) = I^3.$$

Portanto, J é uma redução de I. Entretanto, $\mathrm{Ass}(A/J) = \{(x, y), (x, y, z)\}$ e $\mathrm{Ass}(A/I) = \{(x, y), (x, y, z-1)\}$.

3.1 Reduções minimais

O próximo teorema relacionará a álgebra de Rees com a noção de redução.

Teorema 3.10. *Sejam A um anel Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A. Então, J é uma redução de I se, e somente se, $A[It]$ é um módulo finitamente gerado sobre $A[Jt]$.*

Demonstração. Suponhamos que J é uma redução de I. Logo, existe um inteiro n tal que $JI^n = I^{n+1}$, e pela **Observação 3.1**, segue que $J^kI^n = I^{n+k}$, $\forall\, k \geq 1$. Assim, temos a seguinte igualdade de componentes homogêneas, $(A[It])_{k+n} = I^n t^n (A[Jt])_k$. Além disso, sendo A Noetheriano, para cada $i = 0, \ldots, n$, tem-se I^i um A-módulo Noetheriano. Sejam $s_{i1}, \ldots, s_{ik_i}$ os geradores de I^i como A-módulo, $i = 0, \ldots, n$. Portanto, $A[It] = \sum s_{ij} t^i A[Jt]$ e consequentemente, $A[It]$ é um $A[Jt]$-módulo finitamente gerado.

Reciprocamente, suponha que $A[It]$ é um $A[Jt]$-módulo finitamente gerado. Como ambos são anéis $\mathbb{N}$-graduados, segue que existe uma quantidade finita de elementos homogêneos que geram $A[It]$ como $A[Jt]$-módulo. Seja n o maior dos graus desses geradores. Assim,

$$I^{n+1}t^{n+1} = (A[It])_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(J^i t^i)(I^{n+1-i}t^{n+1-i}) = JI^n t^{n+1} + \cdots + J^{n+1}t^{n+1} = JI^n t^{n+1}.$$

Portanto, $I^{n+1} = JI^n$ e J é uma redução de I. $\square$

Além disso, da prova do teorema acima segue que

Corolário 3.11. O menor inteiro n tal que $JI^n = I^{n+1}$ é o maior grau de um elemento em um conjunto minimal de geradores homogêneos de $A[It]$ sobre $A[Jt]$.

Definição 3.2. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A tais que J é uma redução de I. O *número de redução de I com relação a J* é o menor inteiro n tal que $JI^n = I^{n+1}$, denotado por $r_J(I)$. O *número de redução (absoluto) de I* é definido por

$$\min\{r_J(I) \mid \exists\ J \subseteq A \text{ ideal e } n \geq 0 \text{ tal que } JI^n = I^{n+1}\}.$$

A próxima proposição mostrará que sobre um anel Noetheriano local $(A, \mathfrak{M})$, o número de redução de I pode ser determinado através da fibra especial de I

$$F_I(A) = \frac{A[It]}{\mathfrak{M}A[It]} \simeq \frac{A}{\mathfrak{M}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{M}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{M}I^2} \oplus \cdots.$$

Proposição 3.12. Sejam n um inteiro positivo, $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano, J, I ideais de A tais que $J \subseteq I^n$ e B a subálgebra de $F_{I^n}(A)$ gerada por $(J + \mathfrak{M}I^n)/\mathfrak{M}I^n$ sobre o corpo $A/\mathfrak{M}$. Então, $J \subseteq I^n$ é uma redução se, e somente se, $F_I(A) \supseteq B$ é um B-módulo finitamente gerado.

Além disso, o número de redução de I^n com relação a J é o maior grau de um elemento em um conjunto minimal de geradores homogêneos de $F_{I^n}(A)$ sobre B.

Demonstração. Provemos o caso $n = 1$. Suponha que J é uma redução de I, logo pelo **Teorema 3.10** temos que $A[It]$ é um $A[Jt]$-módulo finitamente gerado, além disso, $A[Jt] \subseteq A[It]$ é uma extensão de anéis. Assim, $A[Jt]/(\mathfrak{M}A[It] \cap A[Jt]) \subseteq F_I(A)$ e $F_I(A)$ é um $A[Jt]/(\mathfrak{M}A[It] \cap A[Jt])$-módulo finitamente gerado, mas $A[Jt]/(\mathfrak{M}A[It] \cap A[Jt])$ é canonicamente isomorfo a B. Portanto, $F_I(A)$ é um B-módulo finitamente gerado.

Reciprocamente, se $F_I(A)$ é um B-módulo finitamente gerado então suponha que o maior grau de um elemento homogêneo gerador de $F_I(A)$ como B-módulo é d. Assim,

$$\frac{I^{d+1}}{\mathfrak{M}I^{d+1}} \subseteq \left(\frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}\right)\left(\frac{I^d}{\mathfrak{M}I^d}\right) \Longrightarrow I^{d+1} = JI^d + \mathfrak{M}I^{d+1}.$$

Novamente pelo **Lema de Nakayama** segue que J é uma redução de I. O prova a proposição para o caso $n = 1$.

O caso geral decorre do fato de $F_I(A)$ ser um $F_{I^n}(A)$-módulo finitamente gerado, já que com argumento análogo ao do caso $n = 1$ obtemos que $F_{I^n}(A)$ é um B-módulo. Para a recíproca, note que $J \subseteq I^n \subseteq I$ e J é redução de I, logo pelo item iii. da **Proposição 3.1** temos que J é redução de I^n. A última parte segue do corolário anterior e do **Lema da Nakayama.**

□

Corolário 3.13. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A. Se J é uma redução de I, então o número mínimo de geradores de J é pelo menos igual ao analytic spread de I (a dimensão de Krull de $F_I(A)$), isto é, $\mu(J) \geq \ell(I)$.

Demonstração. Como J é uma redução de I segue da proposição anterior que $F_I(A) = A[It]/\mathfrak{M}A[It]$ é um $A[Jt]/\mathfrak{M}A[It] \cap A[Jt]$-módulo finitamente gerado. Sendo A Noetheriano, pelo **Corolário 3.2** temos que I é integral sobre J, assim $F_I(A) = A[It]/\mathfrak{M}A[It]$ é integral sobre $A[Jt]/\mathfrak{M}A[It] \cap A[Jt]$. Portanto, como a dimensão de $A[Jt]/\mathfrak{M}A[It] \cap A[Jt]$ é no máximo o número de geradores de J (já que $A[Jt] = A[f_1t, \ldots, f_kt]$, sendo $J = (f_1, \ldots, f_k)$), segue que $\mu(J) \geq \ell(I)$.

□

Em anéis Noetherianos, a condição de toda cadeia descendente de ideais estacionar não é sempre satisfeita, assim, dado qualquer ideal, não necessariamente existirá uma redução que é minimal com relação a inclusão, o que é mostrado no próximo exemplo.

Exemplo 3.2. Sejam K um corpo, $A = K[x, y, z]$ o anel de polinômio nas indeterminadas x, y, z e $I = (x^5z, y^5(z-1), x^3y^2z, x^2y^3(z-1))$. Para cada k inteiro não-negativo, considere $J_k = (x^5z - y^5(z-1), x^3y^2z^k, x^2y^3(z-1)^k$. Note que para cada k, J_k é uma redução de I, porém, $\cap_{k\geq 0} J_k$ não é uma redução de I.

No entanto, em anéis locais Noetherianos, mostraremos que reduções minimais sempre existem.

Definição 3.3. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A tais que J é uma redução de I. Dizemos que a redução J de I é *minimal* se nenhum ideal contido estritamente em J é redução de I.

Proposição 3.14. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais tais que J é uma redução minimal de I. Então,

i. $J \cap \mathfrak{M}I = \mathfrak{M}J$.

ii. Para qualquer ideal K de A tal que $J \subseteq K \subseteq I$, todo conjunto minimal de geradores de J pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de K.

Demonstração. i. Como A é Noetheriano temos que I é finitamente gerado. Logo, $\mu(I) = \dim_{A/\mathfrak{M}}(I/\mathfrak{M}I) < \infty$. Assim, $I/\mathfrak{M}I \simeq (A/\mathfrak{M})^n$, para algum $n > 0$. Além disso,

$$\frac{J}{J \cap \mathfrak{M}I} \simeq \frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I} \leqslant \frac{I}{\mathfrak{M}I}.$$

Portanto, $J/J \cap \mathfrak{M}I \simeq (A/\mathfrak{M})^k$, para algum $k > 0$. Então, $J = (x_1, \ldots, x_k) + J \cap \mathfrak{M}I$, com $x_i \in J,\ i = 1, \ldots, k$. Pelo **Lema 3.8**, $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução de I, sendo J minimal tem-se $J = (x_1, \ldots, x_k)$. Consequentemente, k é o número mínimo de geradores de J, isto é, $k = \mu(J) = \dim_{A/\mathfrak{M}}(J/\mathfrak{M}J)$. Assim,

$$\frac{J}{\mathfrak{M}J} \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{M}}\right)^k \simeq \frac{J}{J \cap \mathfrak{M}I}.$$

Portanto, $J \cap \mathfrak{M}I = \mathfrak{M}J$.

ii. Segue de i. que $J \cap \mathfrak{M}K = \mathfrak{M}J$. Logo,

$$\frac{J}{\mathfrak{M}J} = \frac{J}{J \cap \mathfrak{M}K} \simeq \frac{J + \mathfrak{M}K}{\mathfrak{M}K} \leqslant \frac{K}{\mathfrak{M}K}.$$

Assim, $\{x_1, \ldots, x_k\}$ forma parte de um conjunto minimal de geradores de K. □

Teorema 3.15. *Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A. Se J é uma redução de I então existe pelo menos um ideal K contido em J tal que K é uma redução minimal de I.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{F}$ a família de todos os ideais K tais que $K \subseteq J$ e K é uma redução de I. Como J é uma redução de I temos que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Sendo A um anel Noetheriano, temos que $I/\mathfrak{M}I$ é um $A/\mathfrak{M}$-espaço vetorial de dimensão finita. Considere uma outra família $\mathcal{F} = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists\, K \in \mathfrak{F}$ tal que $\dim_{A/\mathfrak{M}}(K + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I) = m\}$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ já que $\dim_{A/\mathfrak{M}}(J + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I) \leq \dim_{A/\mathfrak{M}}(I/\mathfrak{M}I) < \infty$. Assim, pelo **Princípio da boa ordenação (PBO)** segue que $\mathcal{F}$ possui menor elemento. Logo, existe $K \in \mathfrak{M}$ tal que $K + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I$ é o menor subespaço (com relação a inclusão). Suponha que a dimensão de $K + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I$ como $A/\mathfrak{M}$-espaço vetorial é n, então, considere $k_1, \ldots, k_n \in K$ as pré-imagens de uma base de $K + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I$. Seja $K_0 = (k_1, \ldots, k_n)$, assim $K + \mathfrak{M}I = K_0 + \mathfrak{M}I$ e pelo **Lema 3.8** segue que K_0 é uma redução de I. Sem perda de generalidade, assumiremos que $K = K_0$. Portanto, $K/\mathfrak{M}K$ e $K + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I$ são $A/\mathfrak{M}$-espaços vetoriais de dimensão n, logo a projeção canônica $K/\mathfrak{M}K \longrightarrow K/K \cap \mathfrak{M}I \simeq K + \mathfrak{M}I/\mathfrak{M}I$ é um isomorfismo, implicando que $K \cap \mathfrak{M}I = \mathfrak{M}K$.

Provemos agora que $K \subseteq J$ é uma redução minimal de I. Se $L \subseteq K$ é uma redução de I então pela minimalidade de K, no sentido do parágrafo anterior, temos que $K + \mathfrak{M}I = L + \mathfrak{M}I$. Assim, $K \subseteq (L + \mathfrak{M}I) \cap K = L + (\mathfrak{M}I \cap K)$, pela última implicação do parágrafo anterior, $K \subseteq L + \mathfrak{M}K$. Portanto, pelo **Lema de Nakayama**, $K = L$, mostrando que K é uma redução minimal de I. □

Pelo **Corolário 3.13** toda redução de um ideal I, em particular as reduções minimais de I, tem pelo menos $\ell(I)$ geradores. O corolário seguinte mostrará que reduções com exatamente $\ell(I)$ geradores são minimais.

Corolário 3.16. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A tais que J é uma redução de I e $\mu(J) = \ell(I)$. Então,

i. J é uma redução minimal de I.

ii. $F_J(A)$ é isomorfo a subálgebra de $F_I(A)$ gerada por $(J + \mathfrak{M}I)/\mathfrak{M}I$ sobre $A/\mathfrak{M}$, além disso, também é isomorfo ao anel de polinômios em $\ell(I)$ indeterminadas sobre o corpo $A/\mathfrak{M}$.

iii. Para todo inteiro positivo k, temos $J^k \cap \mathfrak{M}I^k = \mathfrak{M}J^k$.

Demonstração. i. Pelo Teorema anterior, existe $K \subseteq J$ ideal tal que K é uma redução minimal de I. Assim, pela **Proposição 3.14**, qualquer conjunto minimal de geradores de K pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de J. Mas pelo **Corolário 3.13** temos que $\mu(K) \geq \ell(I) = \mu(J)$, logo, $K = J$, e portanto J é uma redução minimal de I.

ii. Seja B a subálgebra de $F_I(A)$ gerada por $(J + \mathfrak{M}I)/\mathfrak{M}I$ sobre $A/\mathfrak{M}$. Pela **Proposição 3.12**, temos que $F_I(A) \supseteq B$ é um B-módulo finitamente gerado, logo, $B \subseteq F_I(A)$ é uma extensão integral, assim, $\dim(B) = \dim(F_I(A)) = \ell(I)$. Como J é gerado por $\ell(I)$ elementos segue que B é isomorfo a um anel de polinômios com $\ell(I)$ indeterminadas sobre $A/\mathfrak{M}$. Considere a aplicação graduada canônica sobrejetora $F_J(A) \longrightarrow B$. Sendo $F_J(A) = A[Jt]/\mathfrak{M}A[Jt]$ gerado sobre $A/\mathfrak{M}$ por $\mu(J) = \ell(I)$ elementos, tem-se que a aplicação canônica é um isomorfismo.

iii. Pelo item ii., para cada $k > 0$, $J^k/\mathfrak{M}J^k \simeq (J^k + \mathfrak{M}I^k)/\mathfrak{M}I^k$, assim, $J^k \cap \mathfrak{M}I^k = \mathfrak{M}J^k$. $\square$

Proposição 3.17. (Northcott-Rees): Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano tal que $A/\mathfrak{M}$, o corpo residual, é infinito, I um ideal de A e $l = \ell(I)$ o analytic spread de I. Então, qualquer redução minimal de I é gerada minimamente por exatamente l elementos. Em particular, toda redução de I contém alguma redução gerada por l elementos.

Demonstração. Seja J uma redução de I (note que possivelmente $J = I$). Seja B a $A/\mathfrak{M}$-subálgebra de $F_I(A)$ gerada por $(J + \mathfrak{M}I)/\mathfrak{M}I$, pela **Proposição 3.12** temos que $F_I(A) \supseteq B$ é um B-módulo finitamente gerado. Em particular, $B \subseteq F_I(A)$ é uma extensão integral, o que implica $\dim(B) = \dim(F_I(A)) = l$. Pelo **Teorema A.4 (Teorema da Normalização de Noether graduado)** aplicado a álgebra B sobre $A/\mathfrak{M}$, existem $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_l} \in B_1 = (J + \mathfrak{M}I)/\mathfrak{M}I$, a componente homogênea de grau 1 (isso porque $A/\mathfrak{M}$ é um corpo infinito), algebricamente independentes sobre $A/\mathfrak{M}$, tal que $R = A/\mathfrak{M}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_l}] \subseteq B$ é uma extensão integral. Assim, B é um R-módulo finitamente gerado. Portanto, $F_I(A)$ é um R-módulo finitamente gerado. Considere o ideal $K = (a_1, \ldots, a_l) \subseteq A$, onde $a_i \in J$ é tal que sua imagem em $(J + \mathfrak{M}I)/\mathfrak{M}I$ é $\overline{a_i}, i = 1, \ldots, l$. Pela **Proposição 3.12**, temos que K é uma redução de I tal que $\mu(K) = l = \ell(I)$, por isso, pelo

Corolário 3.16, segue que K é uma redução minimal de I. Portanto, toda redução minimal é gerada exatamente por l elementos.

□

A proposição mostra que a fibra especial de I e a sua dimensão são úteis para encontrar reduções minimais de I. O próximo resultado mostrará que mesmo sem a hipótese do corpo residual infinito, a dimensão da fibra especial de I nos trará informações sobre reduções minimais.

Proposição 3.18. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e I um ideal de A. Então, existe um inteiro positivo n tal que I^n possui uma redução minimal gerada por $\ell(I)$ elementos.

Demonstração. Seja $l = \ell(I)$. Sendo $F_I(A)$ uma $A/\mathfrak{M}$-álgebra finitamente gerada, segue pelo **Teorema A.4 (Teorema da Normalização de Noether graduado)** que existem elementos $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_l} \in (F_I(A))_n = I^n/\mathfrak{M}I^n$, isto é, elementos homogêneos de grau n, tal que $R = A/\mathfrak{M}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_l}] \subseteq F_I(A)$ é integral, assim, $F_I(A)$ é um R-módulo finitamente gerado. Considere o ideal $J = (a_1, \ldots, a_l) \subseteq A$, onde $a_i \in I^n$ é tal que sua imagem em $I^n/\mathfrak{M}I^n$ é $\overline{a_i}, i = 1, \ldots, l$. Pela **Proposição 3.12**, temos que J é uma redução de I^n tal que $\mu(J) = l$, por isso, pelo **Corolário 3.16**, segue que J é uma redução minimal de I^n. □

Exemplo 3.3. Sejam $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[[x, y]]/(xy(x + y))$, onde x, y são indeterminadas sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $I = (x, y)A$. Mostremos que I não possui reduções propriamente contidas em I. Suponha por absurdo que existe uma redução $J \subsetneq I$. Existe um ideal J' gerado por formas lineares tal que $J + I^2 = J' + I^2$, pelo **Lema 3.8**, J' é uma redução de I, como J está contido propriamente em I temos que J' é gerado por uma forma linear. Por uma mudança de variáveis podemos assumir que $J' = (x)A$. Porém, $(x)A$ não é uma redução de I, já que $y^{n+1} \notin xI^n$, $\forall\ n$.

Note que neste caso, a fibra especial de I é $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x, y]/(xy(x+y))$ que tem dimensão de Krull igual a 1. Pelo parágrafo anterior, temos que a única redução de I é o próprio I que possui dois geradores. Assim, pela proposição anterior, alguma potência de I deverá possuir uma redução minimal gerada por um único elemento. De fato, verifica-se que $(x^2 + xy + y^2)$ é uma redução minimal de I^2.

Corolário 3.19. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e I um ideal de A. Então, $\mathrm{ht}(I) \leq \ell(I) \leq \dim(A)$.

Demonstração. A desigualdade $\ell(I) \leq \dim(A)$ foi mostrada na **Proposição 1.12**. Resta-nos mostrar a outra. Pela proposição anterior existe um inteiro positivo n tal que I^n possui uma redução minimal gerada por $\ell(I)$ elementos, seja J a redução minimal referida. Assim, pelo **Teorema A.2 (Teorema do ideal principal de Krull)**, temos que $\mathrm{ht}(J) \leq \mu(J) \leq \ell(I)$. Além disso, como J é uma redução de I^n, pelo **Lema 3.9**, segue que $\mathrm{ht}(J) = \mathrm{ht}(I^n) = \mathrm{ht}(I)$. Portanto, $\mathrm{ht}(I) \leq \ell(I)$. □

Capítulo 4

Álgebra de Rees de um módulo

A noção de álgebra de Rees de um módulo não é estável, isto é, existem várias possíveis definições. Entretanto, todas coincidem quando o módulo é livre de torção (1.5) e possui um *posto*. Neste capítulo mostraremos alguns fatos básicos sobre este objeto. A principal referência sobre o tema é [8].

Definição 4.1. Seja A um anel, M um A-módulo e Q o anel total de frações de A, isto é, $Q = S^{-1}A$, onde S é o conjunto de todos os não-divisores de zero de A. Dizemos que M tem *posto*, igual a r, se $M \otimes_A Q$ é um Q-módulo livre de posto finito e igual a r.

Equivalentemente, M tem posto r se M_P é um A_P-módulo livre de posto finito e igual a r, para todo $P \in \mathrm{Ass}(A)$.

Seja A um anel Noetheriano e M um A-módulo. Definimos (de forma mais abstrata) a *álgebra de Rees de M* pelo quociente da álgebra simétrica de M por sua A-torção, e denotamos por $\mathcal{R}_A(M)$. Isto é,

$$\mathcal{R}_A(M) = \frac{\mathrm{Sym}_A(M)}{\mathcal{T}_A(\mathrm{Sym}_A(M))}.$$

Agora definimos a álgebra de Rees no contexto em que o módulo em questão é um submódulo de um módulo livre e tem posto. Sejam A um anel Noetheriano e $M \subseteq A^r$ um A-módulo de posto r (note que M é livre de torção por ser submódulo de um módulo livre). Deste modo, podemos induzir uma aplicação $\mathrm{Sym}_A(M) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Sym}_A(A^r) \simeq A[t_1, \ldots, t_r]$.

Definição 4.2. Definimos a *álgebra de Rees de M* como a imagem da álgebra simétrica de M na álgebra de simétrica de A^r, isto é,

$$\mathcal{R}_A(M) = \mathrm{Im}(\rho) \subseteq \mathrm{Sym}_A(A^r) \simeq A[t_1, \ldots, t_r].$$

Note que o anel $\mathcal{R}_A(M)$ é $\mathbb{N}$-graduado com $\mathcal{R}_A(M)_0 = A$ e $\mathcal{R}_A(M)_1 = M$. Além disso, $\mathcal{R}_A(M)$ é livre de torção, já que é um subanel do anel de polinômios que é livre (com base infinita) sobre A. Explicitamente, se $v_1, \ldots, v_m$ são os geradores de $M \subseteq A^r$ (note que $v_i = (a_{1_i}, \ldots, a_{r_i})$, para $a_{i_j} \in$

A) então a imagem de um gerador de M em $\mathrm{Sym}_A(A^r)$ é uma A-forma linear nas indeterminadas $t_1, \ldots, t_r$, isto é, $\mathcal{R}_A(M)$ é a A-subálgebra gerado pelas formas $(t_1 \ \cdots \ t_r)v_i^T = a_{1_i}t_1 + \ldots + a_{r_i}t_r$. E neste caso, a equivalência das duas definições se deve ao fato do núcleo da ρ ser igual a torção da álgebra simétrica de M, assim,

$$\frac{\mathrm{Sym}_A(M)}{\mathcal{T}_A(\mathrm{Sym}_A(M))} \simeq \mathrm{Im}(\rho) = \mathcal{R}_A(M).$$

Proposição 4.1. Sejam A um anel Noetheriano e $M \subseteq A^r$ um A-módulo de posto r. Então, existe uma correspondência biunívoca entre os primos associados de $\mathcal{R}_A(M)$ e os primos associados de A, em particular, os primos minimais também estão em bijeção.

Demonstração. Nessas condições, $\mathcal{R}_A(M)$ é uma A-subálgebra do anel de polinômios $A[t_1, \ldots, t_r]$. Logo, todo primo associado de A é contração de um primo associado de $\mathcal{R}_A(M)$, assim como todo primo associado de $\mathcal{R}_A(M)$ é contração de um primo associado de $A[t_1, \ldots, t_r]$, os quais são extensões de primos associados de A, o que mostra a bijeção. $\square$

Proposição 4.2. Sejam A um anel Noetheriano com dimensão de Krull finita e M um A-módulo finitamente gerado de posto r. Então, $\dim(\mathcal{R}_A(M)) = \dim(A) + r$.

Demonstração. Mostremos que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) \geq \dim(A)+r$. De fato, considere o ideal $\mathcal{R}_A(M)_+ = \bigoplus_{j\geq 1} \mathcal{R}_A(M)_j$. Como $\mathcal{R}_A(M)/\mathcal{R}_A(M)_+ \simeq A$ temos que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) \geq \dim(A) + \mathrm{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+)$. Assim, basta provarmos que $\mathrm{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+) = r$. Seja $P \supseteq \mathcal{R}_A(M)_+$ um ideal primo de $\mathcal{R}_A(M)$ tal que $\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+)$. Logo, $P = (\mathfrak{P}, \mathcal{R}_A(M)_+)$ onde $\mathfrak{P} = P \cap A$ é um primo minimal de A. Assim,

$$\mathcal{R}_A(M)_P = (\mathcal{R}_{A_\mathfrak{P}}(M_\mathfrak{P}))_P \simeq A_\mathfrak{P}[t_1, \ldots, t_r]_{(\mathfrak{P}_\mathfrak{P},(t_1,\ldots,t_r))},$$

já que M_Q é A_Q-módulo livre de posto finito igual a r, para todo $Q \in \mathrm{Ass}(A)$. Portanto,

$$\mathrm{ht}(\mathcal{R}_A(M)_+) = \mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(P_P) = \dim(\mathcal{R}_A(M)_P) = \dim(A_\mathfrak{P}) + r = r.$$

Agora, provemos que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) \leq \dim(A) + r$. Seja $P \subseteq \mathcal{R}_A(M)$ um primo minimal tal que $\dim(\mathcal{R}_A(M)) = \dim(\mathcal{R}_A(M)/P)$ e considere a contração $\mathfrak{P} = P \cap A$. Aplique o **Teorema A.1 (Desigualdade da dimensão)** à extensão de domínios $A/\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{R}_A(M)/P$, para algum primo $\overline{Q} \subseteq \mathcal{R}_A(M)/P$ tal que $\mathrm{ht}(\overline{Q}) = \dim(\mathcal{R}_A(M)/P)$, assim

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{R}_A(M)) = \dim(\mathcal{R}_A(M)/P) = \mathrm{ht}(\overline{Q}) &\leq \dim(A/\mathfrak{P}) + \mathrm{gr.tr}_{A/\mathfrak{P}}\mathcal{R}_A(M)/P \\ &= \dim(A/\mathfrak{P}) + \mathrm{gr.tr}_{\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{P})}\mathrm{Frac}(\mathcal{R}_A(M)/P) \\ &\leq \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim((\mathcal{R}_A(M)/P) \otimes_A \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{P}) \\ &\leq \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim(\mathcal{R}_A(M) \otimes_A A_\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_\mathfrak{P})\end{aligned}$$

$$\leq \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim(\mathcal{R}_A(M) \otimes_A A_{\mathfrak{P}}) = \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim(\mathcal{R}_{A_{\mathfrak{P}}}(M_{\mathfrak{P}}))$$
$$= \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim(\mathrm{Sym}_{A_{\mathfrak{P}}}(M_{\mathfrak{P}})) = \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim(A_{\mathfrak{P}}[t_1, \ldots, t_r])$$
$$= \dim(A/\mathfrak{P}) + \dim(A_{\mathfrak{P}}) + r = \dim(A/\mathfrak{P}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{P}) + r \leq \dim(A) + r.$$

□

A noção de dependência integral sobre anéis e ideais pode ser estendida para módulos.

Definição 4.3. Seja K um corpo. Um *anel de valoração (ou uma K-valoração)* é um domínio V cujo corpo de frações é K e satisfaz a seguinte propriedade: para cada $x \in K \setminus \{0\}$ temos que $x \in V$ ou $x^{-1} \in V$.

Primeiro exemplo de um anel de valoração é um corpo. Além disso, note que se V é uma K-valoração então V é local e qualquer anel W tal que $V \subseteq W \subseteq K$ é também uma K-valoração.

Observação 4.1. Se V é uma K-valoração então V é integralmente fechado em K. De fato, seja $x \in K \setminus \{0\}$ um elemento integral sobre V. Logo, existem $n > 0$ e $a_1, \ldots, a_n \in V$ tais que $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Suponha que $x \notin V$ (assim, $x^{-1} \in V$), multiplicamos a relação integral por x^{1-n}, segue que $x = -(a_1 + a_2x^{-1} + \cdots + a_nx^{1-n}) \in V$, que é absurdo. Portanto, V é normal.

Observação 4.2. Seja K um corpo. Dado uma K-valoração, uma forma de obtermos novos anéis de valoração é fazer interseções da K-valoração com subcorpos de K. Isto é, sejam V um anel de valoração e F um subcorpo de K então $V \cap F$ é uma F-valoração. De fato, se $x \in F \setminus \{0\}$ então $x \in K \setminus \{0\}$, logo $x \in V$ ou $x^{-1} \in V$. Portanto, $x \in V \cap F$ ou $x^{-1} \in V \cap F$, o que mostra que $V \cap F$ é uma F-valoração.

Definição 4.4. Sejam A um anel Noetheriano e $N \subseteq M$ módulos finitamente gerados sobre A. Um elemento $x \in M$ é dito *integral sobre* N se para todo $P \in \mathrm{Min}(A)$ e todo anel de valoração V entre A/P e $\kappa(P) = A_P/P_P$, a imagem de x em M_P/PM_P é escrita como $\sum_{i=1}^{m} v_in_i$, onde para cada i, $v_i \in V$ e n_i pertence a imagem de N em M_P/PM_P.

Note que quando A é um domínio, então para qualquer anel V entre A e o seu corpo de frações, a extensão de escalares MV está bem definida, neste caso, MV é o V-submódulo de $M_{(0)}$ gerado pelos elementos da forma vm, onde $v \in V$ e $m \in M$. Assim, $x \in M$ é integral sobre N se, e somente se, para todo $P \in \mathrm{Min}(A)$ e para cada V uma $\kappa(P)$-valoração contendo A/P, a imagem de x em M_P/PM_P pertence a $\frac{N+PM}{PM}V$. O conjunto de todos os elementos de M que são integrais sobre N forma um A-submódulo de M que contém N, denominado *o fecho integral de N em M*.

Analogamente ao caso de ideais, note que podemos reduzir as questões de dependência integral de módulos ao caso em que o anel ambiente é um domínio. De fato, para verificar que $x \in M$ é integral sobre um submódulo N, devemos notar se para cada $P \in \mathrm{Min}(A)$, a imagem de x no A/P-módulo M_P/PM_P é integral sobre a imagem de N. Desta forma, sem perda de generalidade, podemos supor que A é um domínio e consequentemente, podemos supor também que M é livre de torção, já que M e N estarão identificados com as suas imagens em $M_{(0)}$.

Portanto, se A é um domínio e M é um A-módulo livre de torção então

$$\text{o fecho integral de } N \text{ em } M = \bigcap_V (NV) \cap M,$$

onde V varia sobre os anéis de valoração entre A e o seu corpo de frações.

Definição 4.5. Sejam A um anel Noetheriano e $N \subseteq M \subseteq L$ inclusões de A-módulos finitamente gerados. Dizemos que N é *uma redução de* M *em* L se para todo $P \in \operatorname{Min}(A)$ e toda $\kappa(P)$-valuação V contendo A/P, a imagem de M em $L \otimes \kappa(P)$ está contida na V-extensão da imagem de N. Dizemos que N é *uma redução de* M se N é uma redução de M em M.

Note que quando o anel de base é um domínio, a álgebra de Rees de um A-módulo M se comporta bem sob extensões de escalares, isto é, sejam A um domínio, M um A-módulo de posto finito r tal que $M \subseteq A^r$ e V um anel de valoração qualquer entre A e o seu corpo de frações, neste caso temos que $\mathcal{R}_V(MV) = (\mathcal{R}_A(M))V$.

Lema 4.3. Sejam A um anel Noetheriano e $N \subseteq M \subseteq A^r$ A-módulos de posto r. São equivalentes:

i. $\mathcal{R}_A(N) \subseteq \mathcal{R}_A(M)$ é uma extensão integral de anéis.

ii. $N\mathcal{R}_A(M) \subseteq M\mathcal{R}_A(M)$ é uma extensão integral de ideais.

iii. $M\mathcal{R}_A(M) \subseteq \sqrt{N\mathcal{R}_A(M)}$.

Demonstração. A equivalência i. $\Leftrightarrow$ ii. segue diretamente da **Proposição 2.5**. Mostremos agora a segunda equivalência, suponha ii., logo, $M\mathcal{R}_A(M) \subseteq \overline{N\mathcal{R}_A(M)} \subseteq \sqrt{N\mathcal{R}_A(M)}$. Reciprocamente, supondo iii., basta verificarmos a dependência integral passando ao quociente pelos primos minimais, neste caso, o resultado segue da **Proposição 3.3**. $\square$

Teorema 4.4. *Sejam A um anel Noetheriano e $N \subseteq M \subseteq A^r$ A-módulos de posto r. Se $N \subseteq M$ é uma redução de módulos em A^r, então um (consequentemente todos) item do* **Lema 4.3** *é satisfeito.*

Demonstração. Mostremos que é suficente provar para o caso em que A é um domínio. De fato, suponha que o resultado seja válido para quando o anel ambiente é um domínio. Seja $P \in \operatorname{Min}(A)$, assim, por ii. temos que

$$\frac{N + PA^r}{PA^r}\mathcal{R}_{A/P}\left(\frac{M + PA^r}{PA^r}\right) \subseteq \frac{M + PA^r}{PA^r}\mathcal{R}_{A/P}\left(\frac{M + PA^r}{PA^r}\right)$$

é uma extensão integral de ideais. Através da sobrejeção natural $\operatorname{Sym}_A(A^r) \to \operatorname{Sym}_{A/P}(A^r/PA^r)$ temos que $\frac{\mathcal{R}_A(M)}{P\operatorname{Sym}_A(A^r)\cap\mathcal{R}_A(M)} \simeq \mathcal{R}_{A/P}(\frac{M+PA^r}{PA^r})$, onde $P\operatorname{Sym}_A(A^r)\cap\mathcal{R}_A(M) = \wp$ é um primo minimal de $\mathcal{R}_A(M)$. Logo, $N(\mathcal{R}_A(M)/\wp) \subseteq M(\mathcal{R}_A(M)/\wp)$ é uma extensão integral de ideais, assim pela **Proposição 2.1** segue que $N\mathcal{R}_A(M) \subseteq M\mathcal{R}_A(M)$ é uma extensão integral de ideais. Por isso, podemos assumir que A é um domínio, denote por K o corpo de frações de A. Seja W um anel de valoração entre $\mathcal{R}_A(M)$ e o seu corpo de frações. Pela **Observação 4.2** temos que $V = W \cap K$ é uma K-valoração que contém A. Assim,

$$\mathcal{R}_A(N)W = \mathcal{R}_A(N)VW = \mathcal{R}_V(NV)W = \mathcal{R}_V(MV)W = \mathcal{R}_A(M)VW = \mathcal{R}_A(M)W.$$

Portanto, pelo **Teorema A.5** segue que $\mathcal{R}_A(N) \subseteq \mathcal{R}_A(M)$ é uma extensão integral de anéis. □

Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano e $M \subseteq A^r$ um A-módulo de posto r. Analogamente ao caso de ideais, definimos o *analytic spread de* M por $\ell(M) = \dim(\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{M}\mathcal{R}_A(M))$, e podemos obter:

Corolário 4.5. Neste contexto, toda redução de M possui pelo menos $\ell(M)$ geradores. Além disso, se $N \subseteq M$ é uma redução minimal (no mesmo sentido do caso de ideais) então $\mu(N) = \ell(M)$.

Corolário 4.6. Sejam $(A, \mathfrak{M})$ um anel local Noetheriano de dimensão positiva e M um A-módulo finitamente gerado de posto r. Então,

$$r \leq \ell(M) \leq \dim(A) + r - 1.$$

Demonstração. Se M é um A-módulo livre então $\mathcal{R}_A(M)$ é um anel de polinômios sobre A com r indeterminadas, e neste caso, a altura da extensão do ideal maximal de A é pelo menos 1. Logo,

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{M}\mathcal{R}_A(M)) + \dim(\mathcal{R}_A(M)/\mathfrak{M}\mathcal{R}_A(M)) \leq \dim(\mathcal{R}_A(M)) \Longrightarrow \ell(M) \leq \dim(A) + r - 1.$$

Suponha que M não é livre. Afirmamos que $\mathfrak{M}\mathcal{R}_A(M)$ tem altura maior ou igual a 1. De fato, note que todo primo minimal de $\mathcal{R}_A(M)$ contendo $\mathfrak{M}$ é contraído a $\mathfrak{M}$. Logo, o resultado segue da fórmula da dimensão. Assumindo que o corpo residual de A é infinito. Seja N uma redução minimal de M. Logo, $r = \mathrm{posto}(M) = \mathrm{posto}(N) \leq \mu(N) = \ell(M)$.

□

Observação 4.3. Uma questão interessante é saber quando o analytic spread de M é máximo. No caso em que $(A, \mathfrak{M})$ é um anel local Noetheriano de dimensão positiva tal que seu corpo residual é infinito e M é um A-módulo finitamente gerado de posto r, temos que se $M \subseteq A^r$ e o *comprimento* de A^r/M é finito e não-nulo (o que generaliza a noção de ideal $\mathfrak{M}$-primário) então o analytic spread de M é máximo, isto é, $\ell(M) = \dim(A) + r - 1$. Vide [13].

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Teorema A.1. (Desigualdade da dimensão)

Sejam A um anel Noetheriano e B uma extensão de A. Assuma que A e B são domínios. Sejam Q um ideal primo de B e $P = Q \cap A$. Então,

$$\mathrm{ht}(Q) + \mathrm{gr.tr}_{\mathrm{Frac}(A/P)}\mathrm{Frac}(B/Q) \leq \mathrm{ht}(P) + \mathrm{gr.tr}_A B.$$

Onde $\mathrm{gr.tr}_A B = \mathrm{gr.tr}_{\mathrm{Frac}(A)}\mathrm{Frac}(B)$.

Teorema A.2. (Teorema do ideal principal de Krull)

Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal de A gerado por $a_1, \ldots, a_r \in A$. Se P é um primo minimal de I, então $\mathrm{ht}(P) \leq r$.

Além disso, se $a_1, \ldots, a_r$ é uma sequência regular, então $\mathrm{ht}(P) = r$ para todo P primo minimal de I.

Teorema A.3. (Auslander-Buchsbaum)

Se $(A, \mathfrak{M})$ é um anel local regular então A é um domínio de fatoração única.

Teorema A.4. (Teorema da Normalização de Noether graduado)

Sejam K um corpo e A uma K-álgebra $\mathbb{N}$-graduada finitamente gerada tal que $A_0 = K$. Então, existem elementos $x_1, \ldots, x_m \in A$ algebricamente independentes sobre K, homogêneos de mesmo grau tal que a extensão $K[x_1, \ldots, x_m] \subseteq A$ é integral. Se K é um corpo infinito e A é gerado sobre K por elementos de grau 1*, então $x_1, \ldots, x_m$ podem ser tomados de grau 1.*

Teorema A.5. *Sejam A um domínio e K seu corpo de frações. Então, o fecho integral de A em K é a interseção de todos os anéis de valoração de K que contém A.*

Referências Bibliográficas

[1] Brumatti, P., Simis, A., e Vasconcelos, W. V., *Normal Rees algebras*, J. Algebra 112 (1988), 26-48.

[2] Herzog, J., Simis, A., e Vasconcelos, W. V., *Arithmetic of normal Rees algebras*, J. Algebra 143 (1991), 269-294.

[3] Huneke, C., *On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by a d-sequence*, J. Algebra 62 (1980), 268-275.

[4] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1986).

[5] Northcott, D. G., e Rees, D., *Reductions of ideals in local rings*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 50 (1954), 145-158.

[6] Raghavan, K.N., *A simple proof that ideals generated by d-sequences are of linear type*, Comm. Alg. 19 (1991), 2827-2831.

[7] Rees, D., *Reduction of modules*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 101 (1987), 431-449.

[8] Simis, A., Ulrich, B. e Vasconcelos, W. V., *Rees algebras of modules*, Proc. London Math. Soc. 87 (2003), 610-646.

[9] Simis, A., *Remarkable graded algebras in algebraic geometry*, XII ELAM, IMCA. Lima, Peru, 1999.

[10] Simis, A., Vasconcelos, W. V., e Villarreal, R., *On the ideal theory of graphs*, J. Algebra, 167 (1994), 389-416.

[11] Swanson, I. e Huneke, C., *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, Cambridge University Press, (2006).

[12] Villarreal, R., *Monomial Algebras*, New York, Marcel Dekker, (2001).

[13] Vasconcelos, W., *Integral Closure , Rees Algebras, Multiplicities, Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, (2005).