

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Desigualdade de Carleman global para uma  
Equação da Onda de Transmissão e Aplicação  
a um Problema Inverso

por

Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto

2012

# Desigualdade de Carleman global para uma Equação da Onda de Transmissão e Aplicação a um Problema Inverso

por

Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto

sob orientação de

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do  
Programa de Pós-Graduação em Matemática-  
CCEN-UFPB, como requisito parcial para a  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maio/2012

João Pessoa - PB

S725d Sousa Neto, Gilcenio Rodrigues de.  
Desigualdade de Carleman global para uma equação da  
onda de transmissão e aplicação a um problema inverso /  
Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto.- João Pessoa, 2012.  
57f. : il.  
Orientador: Fágner Dias Araruna  
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Desigualdade de Carleman. 3. Problema  
inverso.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Desigualdade de Carleman global para uma Equação da Onda de Transmissão e Aplicação a um Problema Inverso

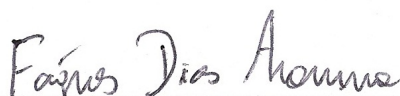
por

Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:



Prof. Dr. Fagner Dias Araruna (Orientador)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)



Prof. Dr. Alberto Carlos Mercado Saucedo

(Universidad Técnica Federico Santa Maria - UTFSM - Chile)



Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

(Universidade Federal de Campina Grande - UFCG)

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

À minha mãe, Delane, pelo orgulho mútuo.  
Ao meu irmão, Guilherme, pela admiração e companherismo.  
À minha namorada, Desterro, pelo carinho e contribuição.

# Agradecimentos

Agradeço a todos que se fizeram presentes no meu caminho durante estes dois anos de mestrado. Em especial:

À minha querida mãe, Delane, pelo aconchego, cuidado e preocupação que teve, e ,que tenho certeza, permanecerem anos a frente.

Ao meu dileto irmão, Guilherme, pelo companheirismo e paciência de me ligar tantas vezes quantas eu não atendia o telefone.

Às pessoas que me acolheram em João Pessoa no início de 2010: Anderson, Disson Soares, José Eduardo e Elielson Pires, que me apoiaram durante o Curso de Verão, e Elano Diniz, grande amigo, que me acolheu prontamente em sua casa, enquanto eu era um estranho para a cidade, e ela para mim.

À menina sorridente que se deixou conhecer e ser acompanhada até a parada de ônibus e surpreendida no topo do fundo do mar; que desde então tem carinhosamente me permitido tomar um  $\epsilon$  suficientemente grande da sua dedicação, amor e atenção: Maria do Desterro.

Agradeço a alguém cuja gratidão só posso demonstrar perseverando no aperfeiçoamento de minhas habilidades matemáticas: Dayvid Geversson, por ter me mostrado a matemática por ângulos mais obtusos.

Ao professor Uberlândio Severo, pelas dicas e disposição para sanar minhas dúvidas. Por toda ajuda.

Ao professor Fágner Araruna, pela orientação e preocupação. Pela consideração em não mostrar o caminho mais fácil, mas o melhor. Por ter gasto uma de suas fichas.

A Diego Araújo, que foi o primeiro a me apresentar o fabuloso mundo da controlabilidade e afins, que possibilitou então a escolha da minha área de pesquisa não ser predeterminadamente aleatória.

Aos amigos da UECE que ainda resistem fortemente nesta função mesmo após 2 anos.

Aos caríssimos professores da UECE: João Montenegro e Thelmo de Araújo, que me

indicaram ao mestrado.

A todos os meus nobres colegas do mestrado.

A Maurício Cardoso, por ter auxiliado fortemente e prontamente nas minhas dúvidas. Por ter sobrevivido aos motoristas dos Bancários para que isto se tornasse possível.

A Alberto Mercado, Flank Morais e Marco Aurélio, por terem aceitado estar presente na banca avaliadora desta dissertação.

À Elizabeth Lacerda, estimada companheira de estudos e de Carleman, por dividir seu tempo comigo durante a construção de nossas dissertações. Pela paciência em discutir matemática por mensagens. Pelo bom humor em sorrir das minhas piadas engraçadas.

A Sheldon Miriel, Tuanny Maciel e Hagá Galvão, pelos momentos felizes em Recife.

À Rainelly Medeiros, pela amizade e pelo sempre aguardado e alegremente compartilhado doce de mamão.

À Ana Karine, pela força, pelos deveres assumidos em meu lugar no início deste ano e por ter, com um breve êxito, me feito acordar às 4:30 da manhã para ir à academia.

A Ivaldo Tributino, por estar sempre disposto a interromper seus estudos para ajudar.

A Edjane Oliveira, pela atenção, simpatia e por ter dado a mim e Desterro o título de casal mais bonito do mestrado.

Agradeço ainda, com bons olhos, àqueles que “por linhas tortas” contribuíram para o meu desenvolvimento matemático, apesar de não crer que tal olhar possa ser retribuído com a mesma expressão.

A esta área de pesquisa por me dar o prazer de sua companhia e ser tão encantadora, ao ponto de despertar em mim, o voraz desejo de aprender e conhecê-la cada vez mais.

A você que está prestigiando este trabalho.

# Resumo

Considerando uma equação da onda de transmissão em dois domínios imersos em  $\mathbb{R}^2$ , onde a velocidade é  $a_1 > 0$  no domínio interior e  $a_2 > 0$  no domínio exterior, provamos uma desigualdade de Carleman global para este problema sobre a hipótese de o domínio interior ser fortemente convexo e  $a_1 > a_2$ . Como consequência dessa desigualdade, são obtidas a unicidade e a estabilidade lipschitziana para o problema inverso de retomar um potencial estacionário para a equação da onda com dados de Dirichlet e coeficiente principal descontínuo. Estes dois resultados são obtidos a partir de um único dado (dependente do tempo) de Neumann na fronteira.

# Abstract

We consider a transmission wave equation in two embedded domains in  $\mathbb{R}^2$ , where the speed is  $a_1 > 0$  in the inner domain and  $a_2 > 0$  in the outer domain. We prove a global Carleman inequality for this problem under the hypothesis that the inner domain is strongly convex and  $a_1 > a_2$ . As a consequence of this inequality, uniqueness and Lipschitz stability are obtained for the inverse problem of retrieving a stationary potential for the wave equation with Dirichlet data and discontinuous principal coefficient from a single time dependent Neumann boundary measurement.

# Sumário

Introdução	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Espaços Funcionais . . . . .	7
1.2 Principais Resultados Utilizados . . . . .	12
<b>2 Desigualdade de Carleman</b>	<b>16</b>
2.1 Função Peso . . . . .	18
2.2 Listando os termos . . . . .	23
2.3 Prova da desigualdade de Carleman . . . . .	31
2.3.1 O Interior . . . . .	33
2.3.2 A Interface . . . . .	37
2.3.3 A Fronteira . . . . .	40
2.3.4 Juntando os termos . . . . .	41
2.3.5 Eliminando o termo em $B_\epsilon(x_0)$ . . . . .	42
<b>3 Problema Inverso</b>	<b>46</b>
3.1 Estimativa . . . . .	47
3.2 Estabilidade e Unicidade do Problema Inverso . . . . .	53

# Notações e Simbologias

- $|\cdot|$  designa a norma em  $L^2$ .
- $\|\cdot\|$  designa a norma em  $H_0^1$ .
- $\nabla$  designa o gradiente da função.
- $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  designa o operador laplaciano.
- $D^2(f) = (f_{ij})$  designa a matriz hessiana de entrada  $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .
- $D^2(f)(v, v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j$  designa o produto da hessiana pelo vetor  $v^2$ .
- $\hookrightarrow$  designa a imersão contínua.
- $\xrightarrow{c}$  designa a imersão compacta.
- $C$ , quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária.
- $' = \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  designam a derivada em relação ao tempo.

# Introdução

A partir de certo estágio do desenvolvimento da sociedade humana, o conhecimento tornou-se cada vez mais compartimentado. Primeiramente, a ciência é separada em grandes áreas: culturais, biomédicas e exatas. Estas, por sua vez, subdividem-se em dois grandes grupos: ciências básicas e aplicadas; para se subdividirem mais ainda. Por exemplo, nas áreas de ciências exatas tem-se a matemática, a física e a química (como exemplos de ciências básicas) e as engenharias, geociências e astronomia podem ser encaradas como áreas de aplicação destas ciências. Todavia, cada uma destas ciências, sejam básicas e/ou aplicadas, também podem ser subdivididas em pura e tecnológica, teórica e experimental. O conhecimento humano é hoje um grande mosaico de especialidades. Há, porém, áreas de estudo que requerem conhecimento de várias especialidades: são as áreas (ciências) multidisciplinares. Problemas inversos (PIs) são exemplos de área multidisciplinar.

É creditado ao astrofísico georgiano Viktor Amazaspovich Ambartsumian como aquele que cunhou a expressão problema inverso (PI). Uma definição bastante abrangente, porém, é apresentada no livro de Engl et al. (ver [9]): “Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados”. Ainda, é atribuído a Oleg Mikailivitch Alifanov, proeminente pesquisador russo na área de problemas inversos, a afirmação “a solução de um problema inverso consiste em determinar causas baseado na observação dos seus efeitos”. Mais à frente, veremos que este trabalho, que tem como objetivo a resolução de um problema inverso, não deixa de se encaixar nesses aspectos.

Matematicamente, problemas inversos pertencem à classe de problemas mal-postos. No início deste século o matemático francês Jacques Hadamard definiu um problema bem posto

como sendo aquele cumpre as três condições abaixo:

- Existe solução;
- A solução é única;
- A solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada.

Assim, o problema é dito mal posto se alguma das condições acima não é satisfeita.

Em geral, nenhuma das condições de Hadamard é satisfeita num problema inverso! Exemplos simples podem ser usados para ilustrar os conceitos acima. Considere a solução da equação do 1º grau:

$$2x - 4 = 0$$

o problema (direto) algébrico acima tem solução única:  $x = 2$ . O problema algébrico inverso

$$ax + b = 0$$

com  $x = 2$ , não apresenta solução única. O problema de estabilidade é exemplificado por uma equação algébrica do 2º grau:

$$ax^2 - 2x + 1 = 0$$

que para  $a = 1$ , possui as seguintes soluções:  $x_1 = x_2 = 1$ . Introduzindo um erro de 1% no coeficiente  $a$ , isto é,  $a = 1,01$ , as soluções da equação tornam-se:  $x_{1,2} = 1 \pm (0,1)i$ , sendo  $i$  a unidade dos números imaginários. Ou seja, 1% de ruído e a equação não tem mais solução em  $\mathbb{R}$ . Neste trabalho veremos que conseguimos deslocar o potencial  $p$  em um aberto  $\mathcal{U} \subset L^\infty(\Omega)$  ainda mantendo a estabilidade do problema com o qual  $p$  está envolvido.

Os PIs emergiram como uma nova área da ciência devido a sua importância científica, econômica, social e mesmo política. Um exemplo disso é o telescópio espacial Hubble que levou cerca de 10 anos para ser construído e custou cerca de US\$ 10 bilhões. Depois de seu lançamento notou-se que as imagens produzidas não tinham a nitidez desejada(projetada). O problema apresentado na fabricação das lentes do telescópio tem sido solucionado por

software (métodos matemáticos de PIs - ver Hanisch e White, 1993). Lembramos a revolução na medicina - e na sociedade, desde a introdução da tomografia computadorizada, um clássico problema inverso. Centenas de exemplos podem ser citados. O conteúdo deste trabalho é um bom exemplo da importância científica e econômica dos problemas inversos, com sua aplicação em um problema geofísico.

A prospecção sísmica baseia-se no fato das ondas sísmicas se moverem com velocidades diferentes em rochas diferentes. A partir da libertação de energia sísmica num ponto e da observação dos tempos de chegada destas ondas a um número de outros pontos à superfície da terra, é possível determinar a distribuição da velocidade e localizar interfaces subterrâneas onde as ondas são refletidas ou refratadas. Trata-se de um método utilizado extensivamente na prospecção de hidrocarbonetos (petróleo, gás natural) e de outros recursos minerais como carvão, minérios metálicos e energia geotérmica. É ainda utilizado em estudos básicos sobre a natureza e origem das rochas que compõem a crosta terrestre, em estudos de águas subterrâneas e estudos ambientais.

Equações da onda com coeficientes variáveis surgem naturalmente em modelagem matemática de meios não-homogêneos em mecânica sólida, eletromagnetismo, fluxo de fluidos através de meios porosos (por exemplo, modelar o movimento de ondas em um gás não-homogêneo, ver [22] e [8] ), e em outras áreas de física e engenharia. Considere a seguinte equação da onda

$$u'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + pu = f.$$

Dizemos que esta possui um coeficiente descontínuo, quando o coeficiente  $a(x)$  apresenta descontinuidade enquanto função.

O problema inverso de recuperar coeficientes de uma equação da onda que possui coeficientes descontínuos utilizando valores obtidos na fronteira nasce naturalmente na geofísica, mais precisamente, na prospecção sísmica das camadas interiores da Terra (ver [11]). Ao analisar ondas oriundas do interior da Terra, sejam de ocorrência natural ou obtidas artificialmente, é fato que a análise de uma grande quantidade de ondas pode trazer uma considerável quantidade de informação. Aqui, desenvolveremos um resultado que pode

ser visto como a situação em que uma única onda que se propaga pela Terra é considerada: o caso onde um único valor particular é disponível na fronteira.

Considere dois domínios abertos diferentes de modo que um esteja imerso compactamente no outro, onde os coeficientes de velocidade são  $a_1 > 0$  no domínio interior e  $a_2 > 0$  no exterior. A estabilidade do problema inverso que estudaremos aqui será obtida por uma desigualdade de Carleman para a equação da onda com coeficientes descontínuos. Provaremos a desigualdade de Carleman no caso em que o domínio interior é fortemente convexo e a velocidade é monotonicamente decrescente das camadas exteriores para as interiores, isto é,  $a_1 > a_2$ . Esta última situação é, na verdade, o caso geral na Terra.

A escolha da monotonia estabelecida sobre as velocidades e da convexidade do domínio interior são necessárias para garantir que qualquer raio vindo deste seja capaz de atravessar a fronteira em direção ao domínio exterior. Com a ajuda da Lei de Snell, também conhecida como Lei de Snell–Descartes ou, simplesmente, Lei de Refração, que nos dá uma relação entre os ângulos de incidência e refração do raio e suas velocidades em cada meio, mais especificamente, a razão entre os senos do ângulo de incidência e do ângulo de refração é equivalente à razão das velocidades nos dois meios, verificamos tal necessidade.

Observemos as figuras abaixo.

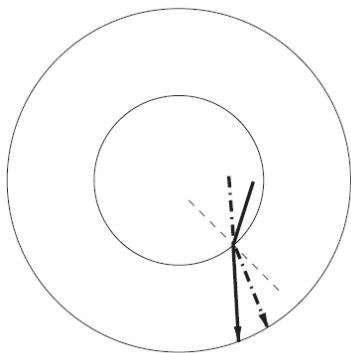


Figura 1: Caso 1

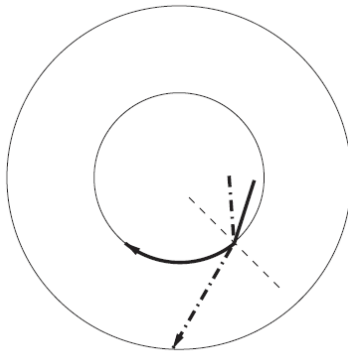


Figura 2: Caso 2

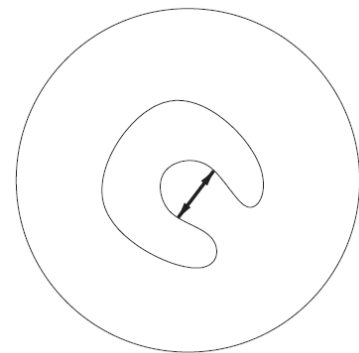


Figura 3: Caso 3

No caso 1,  $a_1 > a_2$  implica  $\text{sen}(\theta_1) > \text{sen}(\theta_2)$ , onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos de incidência e refração, respectivamente, dos raios incidentes vindos do domínio interior. Isto faz com

que estes raios, após atravessar a interface, se aproximem da normal desta última. Da mesma forma, no caso 2, se  $a_1 < a_2$ , pela Lei de Snell, o resultado contrário ocorre, isto é, o raio tende a se afastar da normal, o que pode ocasionar a reflexão do raio. Tal situação não seria interessante, pois nos privaria de informação sobre o comportamento do raio no domínio exterior e na fronteira. Finalmente, a convexidade evita raios aprisionados, conforme podemos ver no terceiro caso.

É possível observar uma certa relação entre este trabalho e controlabilidade exata ou decaimento da energia para a equação da onda com coeficientes descontínuos. A Desigualdade de Carleman global que obtemos, imediatamente implica um caso particular de um conhecido resultado de controlabilidade exata para a equação da onda de transmissão. Grosseiramente falando, o resultado de [14] afirma que é possível controlar ondas vindas do interior de um sistema composto de camadas - este trabalho é um exemplo de tal sistema - , se a velocidade é monotonicamente crescente na direção das camadas interiores e o domínio é estrelado, uma hipótese mais fraca que convexidade estrita. Ainda, se a monotonia é invertida, há soluções não controláveis com energia concentrada perto da interface (*ver* [5, 17]).

Neste trabalho iremos considerar o caso de um coeficiente descontínuo que é constante em cada subdomínio (i.e.  $a_1$  e  $a_2$  constantes). Iremos, de fato, concentrar nossa discussão na principal dificuldade: a descontinuidade na interface. Contudo, poderíamos também considerar coeficientes variáveis  $a_1(x)$  e  $a_2(x)$  tais que seus traços na interface são constantes, sobre suposições adicionais a respeito da limitação do termo  $\nabla a_j$ , como a que aparece em [12].

O conteúdo a ser apresentado nos capítulos a seguir é baseado no artigo “*A global Carleman estimate in a transmission wave equation and application to a one-measurement inverse problem*”, publicado em 2007 como fruto da pesquisa de Alberto Mercado, Axel Osses e Lucie Baudouin (*ver* [2]).

A princípio, com o intuito de tornar a leitura deste trabalho mais independente, apresentaremos um primeiro capítulo de noções básicas sobre os espaços utilizados no

decorrer do texto, a saber, espaços  $L^p$  e espaços de Sobolev. Ainda neste capítulo, introduziremos alguns resultados preliminares que serão necessários durante os dois capítulos seguintes. O capítulo 2 será reservado ao extenso processo de obtenção da desigualdade de Carleman, desde a construção do *peso*, obtenção de estimativas e encerrando-se na prova da desigualdade em si. Já o terceiro, e último, momento, culminará na resolução do problema inverso. Com isto, teremos finalizado nosso trabalho.

Agora que nos familiarizamos com a motivação e a intenção deste trabalho, prossigamos na agradável exposição dos capítulos seguintes.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo relembremos alguns resultados essenciais à continuidade do trabalho. Em primeiro momento, apresentaremos um breve compêndio sobre a teoria de espaços  $L_p$  e espaços de Sobolev. Em seguida, será feita uma enumeração de resultados a serem utilizados no decorrer do texto.

### 1.1 Espaços Funcionais

Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e uma função contínua  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se suporte de  $f$ , e denota-se por  $\text{supp}(f)$ , o fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ . Assim,  $\text{supp}(f)$  é um subconjunto fechado de  $\Omega$ .

Uma  $n$ -upla de inteiros não negativos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Representa-se por  $D^\alpha$  o operador de derivação de ordem  $|\alpha|$ , isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , define-se  $D^0 u = u$ , para toda função  $u$ .

Por  $C_0^\infty(\Omega)$  denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas, e com suporte compacto, em  $\Omega$ .

Um exemplo clássico de uma função de  $C_0^\infty(\Omega)$  é dado por

**Exemplo 1.1.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto tal que  $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$  compactamente contido em  $\Omega$ . Consideremos  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$  é a norma euclidiana de  $x$ . Temos que  $f \in C^\infty(\Omega)$  e  $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$  é compacto, isto é  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Definição 1.1.** Diz-se que uma sequência  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$ , quando forem satisfeitas as seguintes condições:

- (i) Existe um compacto  $K$  de  $\Omega$  tal que  $\text{supp}(\varphi) \subset K$  e  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente em  $K$ , para todo multi-índice  $\alpha$ .

**Observação 1.1.** É possível (ver [21]) dotar  $C_0^\infty(\Omega)$  com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.

O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , munido da convergência acima definida, será denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e denominado de Espaço das Funções Testes sobre  $\Omega$ .

Uma distribuição (escalar) sobre  $\Omega$  é todo funcional linear contínuo sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Mais precisamente, uma distribuição sobre  $\Omega$  é um funcional  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,
- (ii)  $T$  é contínua, isto é, se  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $\varphi$ , em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então  $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T(\varphi)$ , em  $\mathbb{R}$ .

É comum denotar o valor da distribuição  $T$  em  $\varphi$  por  $\langle T, \varphi \rangle$ .

O conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$  com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

**Exemplo 1.2.** Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . O funcional  $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição sobre  $\Omega$  univocamente determinada por  $u$  (ver [18]). Por esta razão, identifica-se  $u$  à distribuição  $T_u$  por ela definida e, desta forma,  $L^1_{loc}(\Omega)$  será identificado a uma parte (própria) de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Exemplo 1.3.** Consideremos  $0 \in \Omega$  e o funcional  $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [18], vê-se que  $\delta_0$  é uma distribuição sobre  $\Omega$ . Além disso, mostra-se que  $\delta_0$  não é definido por uma função de  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Definição 1.2.** Diz-se que uma sequência  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  converge para  $T$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , quando a sequência numérica  $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  convergir para  $\langle T, \varphi \rangle$  em  $\mathbb{R}$ , para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definição 1.3.** Sejam  $T$  uma distribuição sobre  $\Omega$  e  $\alpha$  um multi-índice. A derivada  $D^\alpha T$  (no sentido das distribuições) de ordem  $|\alpha|$  de  $T$  é o funcional definido em  $\mathcal{D}(\Omega)$  por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Observação 1.2.** Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição  $T$  sobre  $\Omega$  possui derivadas de todas as ordens.

**Observação 1.3.**  $D^\alpha T$  é uma distribuição sobre  $\Omega$ , onde  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . De fato, vê-se facilmente que  $D^\alpha T$  é linear. Agora, para a continuidade, consideremos  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergindo para  $\varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Assim,  $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Observação 1.4.** Vê-se em [19] que a aplicação  $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  tal que  $T \mapsto D^\alpha T$  é linear e contínua no sentido da convergência definida em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Dado um número inteiro  $m > 0$ , por  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , representa-se o espaço de Sobolev de ordem  $m$ , sobre  $\Omega$ , das (classes de) funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para todo multi-índice  $\alpha$ , com  $|\alpha| \leq m$ .  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço vetorial, qualquer que seja  $1 \leq p < \infty$ .

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  são espaços de Banach (vide [19]).

**Observação 1.5.** Quando  $p = 2$ , o espaço  $W^{m,2}(\Omega)$  é denotado por  $H^m(\Omega)$ , o qual munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

é um espaço de Hilbert.

Consideremos no nosso trabalho o subespaço de  $H^1(0, L)$  definido por

$$V = \{u \in H^1(0, L); \quad u(0) = 0\}.$$

Em [18] demonstra-se que a norma do gradiente e a norma do  $H^1(0, L)$  são equivalentes em  $V$ . Assim, consideraremos  $V$  munido do produto interno e norma dados respectivamente por

$$((u, v)) = (u_x, v_x), \quad \|u\|^2 = |u_x|^2,$$

onde  $(\cdot, \cdot)$  e  $|\cdot|$  denotam, respectivamente, o produto interno e a norma em  $L^2(0, L)$ .

Dado um espaço de Banach  $X$ , denotaremos por  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço de Banach das (classes de) funções  $u$ , definidas em  $]0, T[$  com valores em  $X$ , que são fortemente mensuráveis e  $\|u(t)\|_X^p$  é integrável a Lebesgue em  $]0, T[$ , com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por  $L^\infty(0, T; X)$  representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções  $u$ , definidas em  $]0, T[$  com valores em  $X$ , que são fortemente mensuráveis e  $\|u(t)\|_X$  possui supremo essencial finito em  $]0, T[$ , com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in ]0, T[} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

**Observação 1.6.** Quando  $p = 2$  e  $X$  é um espaço de Hilbert, o espaço  $L^2(0, T; X)$  é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Consideremos o espaço  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 < p < \infty$ , com  $X$  sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde  $(1/p) + (1/q) = 1$ . Quando  $p = 1$ , faremos a identificação

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em [16].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de  $\mathcal{D}(0, T)$  em  $X$  é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre  $]0, T[$  com valores em  $X$  e denotado por  $\mathcal{D}'(0, T; X)$ .

**Definição 1.4.** Dada  $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ , define-se a derivada de ordem  $n$  como sendo a distribuição vetorial sobre  $]0, T[$  com valores em  $X$  dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

**Exemplo 1.4.** Dadas  $u \in L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , e  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$  a aplicação  $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ , definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

integral de Bochner em  $X$ , é linear e contínua no sentido da convergência de  $\mathcal{D}(0, T)$ , logo uma distribuição vetorial. A aplicação  $u \mapsto T_u$  é injetiva, de modo que podemos identificar  $u$  com  $T_u$  e, neste sentido, temos  $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$ .

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde  $u^{(j)}$  representa a  $j$ -ésima derivada de  $u$  no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left( \sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0, T; X)$  é um espaço de Banach (vide[1]).

**Observação 1.7.** Quando  $p = 2$  e  $X$  é um espaço de Hilbert, o espaço  $W^{m,p}(0, T; X)$  será denotado por  $H^m(0, T; X)$ , o qual, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por  $H_0^m(0, T; X)$  o fecho, em  $H^m(0, T; X)$ , de  $\mathcal{D}(0, T; X)$  e por  $H^{-m}(0, T; X)$  o dual topológico de  $H_0^m(0, T; X)$ .

## 1.2 Principais Resultados Utilizados

**Definição 1.5.** Dizemos que um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é fortemente convexo se for convexo, isto é,  $(1-t)x + ty \in \Omega \quad \forall x, y \in \Omega$ , e sua fronteira tiver curvatura não-nula em cada ponto.

**Lema 1.1** (Desigualdade de Young). Sejam  $a, b$  constantes positivas,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $1 \leq q \leq \infty$ , tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Prova:** Ver [3].

**Lema 1.2** (Desigualdade de Hölder). Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Prova:** Ver [3].

**Lema 1.3** (Imersão de Sobolev). *Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\Gamma$  regular.*

(i) Se  $n > 2m$ , então  $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , onde  $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$ .

(ii) Se  $n = 2m$ , então  $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , onde  $p \in [1, +\infty[$ .

(iii) Se  $n = 1$  e  $m \geq 1$ , então  $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

**Prova:** Ver [3].

**Lema 1.4** (Rellich-Kondrachov). *Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\Gamma$  regular.*

(i) Se  $n > 2m$ , então  $H^m(\Omega) \xrightarrow{c} L^p(\Omega)$ , onde  $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$ .

(ii) Se  $n = 2m$ , então  $H^m(\Omega) \xrightarrow{c} L^p(\Omega)$ , onde  $p \in [1, +\infty[$ .

(iii) Se  $2m > n$  então  $H^m(\Omega) \xrightarrow{c} C^k(\overline{\Omega})$ , onde  $k$  é um inteiro não negativo tal que  $k < m - (n/2) \leq k + 1$ .

**Prova:** Ver [3].

**Lema 1.5** (Gronwall). *Sejam  $m \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ ,  $m \geq 0$  q.s em  $(0, T)$ ,  $C \geq 0$  real constante e  $g \in L^\infty(0, T)$ ,  $g \geq 0$  em  $(0, T)$ , tais que:*

$$g(t) \leq C + \int_0^t m(s)g(s)ds \quad \forall t \in (0, T).$$

Então

$$g(t) \leq C.e^{\int_0^t m(s)ds} \quad \forall t \in (0, T).$$

**Prova.** Ver [18]. ■

**Lema 1.6** (Du Bois - Raymond). *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\xi(x)dx = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

então  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .

**Prova.** Ver [18] ou [6]. ■

**Teorema 1.1** (Gauss-Green). *Se  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , então  $\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u \nu^i d\Gamma$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Prova.** Prova: Ver [3]. ■

**Teorema 1.2** (Fórmulas de Green). *Se  $\gamma \in H^2(\Omega)$ , então*

$$\int_{\Omega} \nabla \gamma \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta \gamma dx + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} ds \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

*Se  $u, \gamma \in H^2(\Omega)$ , então*

$$\int_{\Omega} u \Delta \gamma dx - \int_{\Omega} \gamma \Delta u dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

**Prova.** Ver [3]. ■

**Teorema 1.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\Omega$ . Se  $\nabla f(a) \neq 0$ , então*

- (i) *O gradiente aponta para uma direção segundo a qual a função  $f$  é crescente;*
- (ii) *Dentre todas as direções ao longo das quais a função  $f$  cresce, a direção do gradiente é a de crescimento mais rápido;*
- (iii) *O gradiente de  $f$  no ponto  $a$  é perpendicular à superfície de nível de  $f$  que passa por esse ponto.*

**Prova.** Ver [13]. ■

**Teorema 1.4.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva plana  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  de classe  $C^2$ , então*

- (i) *sua curvatura em  $t \in I$  é dada por*

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}},$$

- (ii) *se  $\gamma$  é a fronteira de um conjunto convexo, então  $\gamma$  tem curvatura não-negativa.*

**Prova.** Ver [4]. ■

**Teorema 1.5.** (*Teorema de Sylvester*) Seja  $M = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$  uma matriz hermitiana.  $M$  é definida positiva se, e somente se, todas suas submatrizes da forma  $N_r = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,r}$ ,  $r \leq n$ , tem determinante positivo.

**Prova.** Ver [10]. ■

# Capítulo 2

## Desigualdade de Carleman

Neste capítulo, temos como objetivo a prova da desigualdade de Carleman para o problema (2.2), definido a seguir, estendido ao intervalo  $(-T, T)$ . Este resultado, como veremos no Capítulo 3, é a base para a resolução do problema inverso, que é o objetivo deste trabalho. Antes, enunciemos algumas notações e construções necessárias para tal.

Sejam  $\Omega$  e  $\Omega_1$  dois subconjuntos abertos e limitados de  $\mathbb{R}^2$  com fronteiras suaves  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ , respectivamente. Admitamos que  $\Omega_1$  é fortemente convexo e  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ . Definamos  $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ . Ainda, temos que a fronteira de  $\Omega_2$  é  $\Gamma \cup \Gamma_1$ .

Definimos também  $a : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & \text{se } x \in \Omega_1 \\ a_2, & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $a_j > 0$  para  $j = 1, 2$ .

Consideremos o seguinte sistema associado à equação da onda:

$$\begin{cases} u'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + p(x)u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Sabemos que (ver [7, 15]) para cada  $p \in L^\infty(\Omega)$ ,  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  e  $u_1 \in L^2(\Omega)$ , o problema acima possui uma única solução na classe  $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ .

A partir de agora, utilizaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times (-T, T), & Q_j &= \Omega_j \times (-T, T) \quad j = 1, 2, \\ \Omega_0 &= \Omega_1 \cup \Omega_2, & \Sigma &= \Gamma \times (-T, T), \\ Q_0 &= \Omega_0 \times (-T, T), & \Sigma_1 &= \Gamma_1 \times (-T, T), \end{aligned}$$

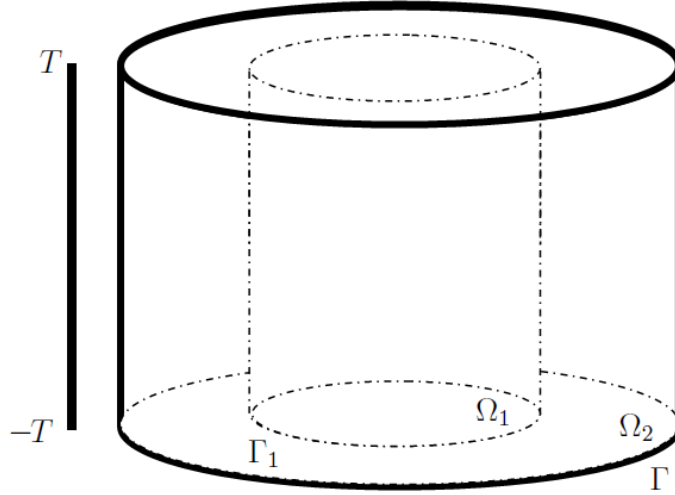


Figura 2.1: Esquema ilustrativo

e denotaremos  $u_j = u\mathbb{1}_{Q_j}$  e  $\nu_j$  o vetor normal exterior a  $\Omega_j$ , com  $j = 1, 2$ .

Iremos trabalhar com uma formulação equivalente a (2.2).

**Proposição 2.1.** *Para cada  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u$  é solução de*

$$u'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + p(x)u = f \quad \text{em } Q \quad (2.3)$$

*se, e somente se, para cada  $j \in \{1, 2\}$ ,  $u_j$  é solução de*

$$u_j'' - a_j \Delta u_j + p(x)u_j = f\mathbb{1}_{Q_j} \quad \text{em } Q_j, \quad (2.4)$$

*satisfazendo as condições de transmissão*

$$\begin{cases} u_1 = u_2 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ a_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1. \end{cases} \quad (2.5)$$

**Prova.** Dado  $f \in L^2(\Omega)$ , seja  $u$  é solução de (2.3). Notemos que, ao observarmos (2.3) restrito ao domínio  $Q_j$ , fica claro que  $u_j$  é solução de (2.4). Percebamos também que  $u_1$  e  $u_2$  se comportam em  $\Sigma_1$  da mesma forma que  $u$ , já que são restrições desta última, que por sua vez está definida em  $\Sigma_1$ . Isto nos conduz a  $(2.5)_1$ . Observemos ainda que, dada  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , utilizando as Fórmulas de Green (Teorema 1.2), encontramos que

$$\int_Q \operatorname{div}(a\nabla u)\xi = - \int_Q a\nabla u\nabla\xi + \int_\Sigma \xi a_2\nabla u_2 \cdot \nu_2. \quad (2.6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_Q \operatorname{div}(a\nabla u)\xi &= \int_{Q_1} a_1\Delta u_1\xi + \int_{Q_2} a_2\Delta u_2\xi \\ &= - \int_{Q_1} a_1\nabla u_1\nabla\xi + \int_{\Sigma_1} \xi a_1\nabla u_1 \cdot \nu_1 - \int_{Q_2} a_2\nabla u_2\nabla\xi + \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma} \xi a_2\nabla u_2 \cdot \nu_2 \\ &= - \int_Q a\nabla u\nabla\xi + \int_{\Sigma_1} \xi (a_1\nabla u_1 \cdot \nu_1 + a_2\nabla u_2 \cdot \nu_2) + \int_\Sigma \xi a_2\nabla u_2 \cdot \nu_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comparando (2.6) e (2.7), obtemos, pelo Lema de Du Bois - Raymond (ver Teorema 1.6), a condição  $(2.5)_2$ . Suponhamos agora que  $u_j$  é solução de (2.4) satisfazendo (2.5). É claro que  $u$  é solução de (2.3) pois, para toda  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , fazendo uso de (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \int_Q (u'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + p(x)u - f)\xi &= \int_{Q_1} (u_1'' - \operatorname{div}(a_1\nabla u_1) + p(x)u_1 - f)\xi + \\ &\int_{Q_2} (u_2'' - \operatorname{div}(a_2\nabla u_2) + p(x)u_2 - f)\xi = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

e, novamente pelo Lema de Du Bois - Raymond, chegamos a (2.3). ■

## 2.1 Função Peso

Para construir a função peso, tomemos  $x_0 \in \Omega_1$  e definamos para cada  $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$  o conjunto

$$\ell(x_0, x) = \{x_0 + \lambda(x - x_0); \lambda \geq 0\}, \quad (2.9)$$

isto é, a semi-reta com origem em  $x_0$  na direção do vetor  $x - x_0$ .

Observemos que o fato de  $\Omega_1$  ser convexo garante que, para cada  $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ , a reta  $\ell(x_0, x)$  intercepta  $\Omega_1$  em um único ponto  $y(x)$ , ou seja,

$$y(x) = \Gamma_1 \cap \ell(x_0, x). \quad (2.10)$$

Definamos a função

$$\begin{aligned} \rho : \Omega \setminus \{x_0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \rho(x) = |x_0 - y(x)|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset \Omega_1$  e sejam  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ . Consideremos a função corte  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})^1$  satisfazendo

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta = 0 \text{ em } B_{\varepsilon_1}(x_0), \quad \eta = 1 \text{ em } \Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon_2}(x_0)}, \quad (2.12)$$

e definamos, para cada  $j \in \{1, 2\}$ , a função

$$\phi_j(x, t) = \eta(x) \frac{a_k}{\rho(x)^2} |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_j, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

onde  $\{j, k\} = \{1, 2\}$  e  $\beta$ ,  $M_1$  e  $M_2$  são números positivos que serão escolhidos posteriormente.

A função peso utilizada será

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \phi_1(x, t), & \text{se } (x, t) \in \Omega_1 \times \mathbb{R}, \\ \phi_2(x, t), & \text{se } (x, t) \in \Omega_2 \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Mostremos que  $\phi$  satisfaz propriedades suficientes para ser uma função peso em uma desigualdade de Carleman. Para isso, vamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} M &= M_1 \mathbf{1}_{Q_1} + M_2 \mathbf{1}_{Q_2}, \quad \bar{a} = a_2 \mathbf{1}_{Q_1} + a_1 \mathbf{1}_{Q_2}, \quad c(x) = \frac{\bar{a}}{\rho(x)^2}, \\ \Omega_{x_0} &= \Omega_0 \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}, \quad Q_{x_0} = \Omega_{x_0} \times (-T, T). \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Proposição 2.2.** *Se  $\Omega_1$  é uma aberto, limitado e fortemente convexo de classe  $C^4$ , então existem  $\varepsilon, \delta > 0$  tais que*

$$(a) \quad |\nabla \phi| \geq \delta > 0 \text{ em } Q_{x_0} = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus B_\varepsilon(x_0) \times (-T, T),$$

---

<sup>1</sup>Uma função desse tipo já foi apresentada no Exemplo 1.1.

$$(b) \nabla\phi_1(x, t) \cdot \nu_1(x) \geq \delta > 0, \forall(x, t) \in \Sigma_1.$$

$$(c) \phi_1(x, t) = \phi_2(x, t) = a_2 - \beta t^2 + M_1, \forall(x, t) \in \Sigma_1,$$

$$(d) a_1 \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \phi_1(x, t) = a_2 \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \phi_2(x, t), \forall(x, t) \in \Sigma_1 \text{ e } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ com } \alpha_1 + \alpha_2 \leq 4,$$

$$(e) \Delta\phi(x, t) \geq 2c(x), \forall(x, t) \in Q_{x_0},$$

$$(f) D^2(\phi)(X, X) \geq \delta_1 |X|^2 \text{ em } Q_{x_0}, \forall X \in \mathbb{R}^2 \text{ e para algum } \delta_1 > 0.$$

**Prova.** Pela notação adotada em (2.12) e (2.15), temos que  $\phi = c(x) |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M$  e, então,  $\nabla\phi = 2c(x)(x - x_0) + |x - x_0|^2 \nabla c(x)$ . Por definição,  $\rho(x)$  (e consequentemente  $c(x)$ ) é constante na direção de  $x - x_0$ . Logo,  $(x - x_0) \cdot \nabla c(x) = \frac{\partial c(x)}{\partial(x-x_0)} = 0$  e

$$\begin{aligned} |\nabla\phi|^2 &= 4c(x)^2 |x - x_0|^2 + 4c(x) |x - x_0| (x - x_0) \cdot \nabla c(x) + |x - x_0|^4 |\nabla c(x)|^2 \\ &\geq 4c(x)^2 |x - x_0|^2 \\ &\geq 4 \left( \frac{\bar{a}}{\text{diam}\Omega^2} \right)^2 \varepsilon^2 = \delta > 0 \quad \text{em } \Omega_{x_0}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde concluímos (a).

Agora, é claro que  $\phi = a_2 - \beta t^2 + M_1$  em  $\Sigma_1$ . Dessa forma,  $\Gamma_1 \times \{t\}$  é uma curva de nível de  $\phi_1(\cdot, t)$  para cada  $t \in [-T, T]$ . Como  $\phi_1(x, t) < a_2 - \beta t^2 + M_1 < \phi_1(z, t)$  para todo  $x \in \Omega_1$  e  $z \in \Omega_2$ , pois  $|x - x_0| < |x_0 - y(x)| \forall x \in \Omega_1$  e  $|x - x_0| > |x_0 - y(x)| \forall x \in \Omega_2$ , então, pelo Teorema 1.3,  $\phi_1$  cresce na direção de  $\Omega_2$  e  $\nabla\phi_1$  tem a mesma direção e sentido de  $\nu_1$ , isto é,

$$\nabla\phi_1 = |\nabla\phi_1| \cdot \nu_1 \quad \text{em } \Sigma_1. \tag{2.17}$$

Assim, (a) implica (b).

Como temos liberdade para escolher  $M_1$  e  $M_2$ , façamos de tal forma que

$$a_1 - a_2 = M_1 - M_2. \tag{2.18}$$

Logo, como  $\eta = 1$  e  $\rho(x) = |x - x_0|$  em  $\Sigma_1$ , então

$$\phi_1(x, t) = a_2 - \beta t^2 + M_1 = a_1 - \beta t^2 + M_2 = \phi_2(x, t) \quad \text{em } \Sigma_1 \tag{2.19}$$

---

<sup>2</sup>Podemos generalizar como  $\nabla\phi_j = (-1)^{(j+1)} |\nabla\phi_j| \cdot \nu_j$  para  $j = 1, 2$

e (c) está provado.

Sem perda de generalidade, podemos supor  $x_0 = 0$ . Parametrizando  $\Gamma_1$  em coordenadas polares por

$$\gamma(\theta) = (\bar{\rho}(\theta)\cos(\theta), \bar{\rho}(\theta)\sen(\theta)), \quad (2.20)$$

onde  $\bar{\rho}(\theta) = \rho(x(\theta))$ , que ainda será denotada por  $\rho$ . Tendo em vista as hipóteses sobre  $\Omega$ , temos que  $\rho$  é uma função  $C^4$ . Logo, faz sentido definir  $D = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$  com  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 3$ , e assim,

$$a_1 D \phi_1(x, t) = a_1 D \left( \frac{a_2 |x - x_0|^2}{\rho(x)^2} \right) = a_2 D \left( \frac{a_1 |x - x_0|^2}{\rho(x)^2} \right) = a_2 D \phi_2(x, t) \quad (2.21)$$

para todo  $(x, t)$  em  $\Sigma_1$  e provamos (d).

Ainda em coordenadas polares, dado  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , ao fazermos  $x_1 = r\cos(\theta)$  e  $x_2 = r\sen(\theta)$ , encontramos

$$D_2(\phi) = Q_\theta H(\phi) Q_\theta^T, \quad (2.22)$$

onde

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$D^2(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

e

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Agora, temos

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{\bar{a}}{\bar{\rho}(\theta)^2} r^2 - \beta t^2 + M \quad \text{em } Q_{x_0} \quad (2.26)$$

e, então,

$$H(\phi) = \frac{2\bar{a}}{\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\rho\theta}{\rho} \\ -\frac{\rho\theta}{\rho} & \frac{1}{\rho^2}(3\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta} + \rho^2) \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

onde denotamos  $\rho_\theta = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}$ .

Por [4] obtemos que

$$\kappa_{\Gamma_1}(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta}}{(\rho^2 + \rho_\theta^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (2.28)$$

e, em particular,

$$\rho^2 + 2\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta} > 0. \quad (2.29)$$

Em consequência disso, segue (e), já que

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \text{tr}(D^2(\phi)) \\ &= \text{tr}(H(\phi)) \\ &= 2c \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} (3\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta} - \rho^2) \right) \\ &\geq 2c \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} (2\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta} - \rho^2) \right) > 2c. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para mostrar (f), vejamos que (2.29) e o fato de que

$$\det(H(\phi)) = \frac{2\bar{a}}{\rho^4} (2\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta} - \rho^2) > 0, \quad (2.31)$$

leva-nos a concluir, a partir de [10], que  $H(\phi)$  e, portanto,  $D^2(\phi)$  são definidas positivas. Daí e da continuidade de  $D^2(\phi)$  temos que

$$D^2(\phi)(Y, Y) \geq \min_{S^1} D^2(\phi)(Y, Y) = \delta_1 > 0, \quad \forall Y \in S^1, \quad (2.32)$$

onde  $S^1$  é a esfera unitária compacta em  $\mathbb{R}^2$ . Assim, para todo  $X \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\delta_1 \leq D^2(\phi) \left( \frac{X}{|X|}, \frac{X}{|X|} \right) = \frac{1}{|X|^2} D^2(\phi)(X, X) \quad (2.33)$$

e a prova da proposição está concluída. ■

## 2.2 Listando os termos

Denotaremos, ainda, ao decorrer do texto

$$L(z) = z'' - a\Delta z, \quad L_p(z) = z'' - a\Delta z + p(x)z \quad \text{e} \quad E(z) = |z'|^2 - a|\nabla z|^2. \quad (2.34)$$

Como usualmente, fazemos as mudanças de variável

$$\varphi = e^{\lambda\phi}, \quad \lambda > 0, \quad w = e^{s\varphi}u, \quad s > 0, \quad P(w) = e^{s\varphi}L(e^{-s\varphi}w). \quad (2.35)$$

onde  $u = u(p)$  é solução de (2.3). Como

$$\begin{aligned} \partial^2(e^{-s\varphi}w) &= e^{s\varphi}(-s\lambda\varphi w\partial^2\phi - s\lambda^2\varphi w(\partial\phi)^2 \\ &\quad + s^2\lambda^2\varphi^2w(\partial\phi)^2 - 2s\lambda\varphi\partial\phi \cdot \partial w + \partial^2w), \end{aligned} \quad (2.36)$$

então

$$\begin{aligned} P(w) &= e^{s\varphi} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-s\varphi}w) - a\Delta (e^{-s\varphi}w) \right) \\ &= -s\lambda\varphi w\phi'' - s\lambda^2\varphi w|\phi'|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2w|\phi'|^2 - 2s\lambda\varphi\phi'w' + w'' \\ &\quad - a(-s\lambda\varphi w\Delta\phi - s\lambda^2\varphi w|\nabla\phi|^2 + s^2\lambda^2\varphi^2w|\nabla\phi|^2 - 2s\lambda\varphi\nabla\phi \cdot \nabla w + \Delta w) \\ &= -s\lambda\varphi L(\phi)w - s\lambda^2\varphi E(\phi)w + s^2\lambda^2\varphi^2 E(\phi)w \\ &\quad - 2s\lambda\varphi(\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) + w'' - a\Delta w \\ &= P_1(w) + P_2(w) + R(w), \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde, para algum  $\gamma \in (0, 1)$  a ser escolhido posteriormente,

$$\begin{aligned} P_1(w) &= w'' - a\Delta w + s^2\lambda^2\varphi^2 E(\phi)w, \\ P_2(w) &= (\gamma - 1)s\lambda\varphi L(\phi)w - s\lambda^2\varphi E(\phi)w - 2s\lambda\varphi(\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w), \\ R(w) &= -\gamma s\lambda\varphi L(\phi)w. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Finalmente, definimos o espaço

$$\begin{aligned} X &= \{u \in L^2(-T, T; L^2(\Omega)) \mid Lu_j \in L^2(-T, T; L^2(\Omega_j)), \quad j = 1, 2; \quad u|_{\Sigma} = 0, \\ &\quad u(\pm T) = u'(\pm T) = 0, \quad u_1|_{\Sigma_1} = u_2|_{\Sigma_1} \quad \text{e} \quad a_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_1\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Com a finalidade de realizar os cálculos a seguir, suponhamos as funções envolvidas suficientemente regulares. Vamos obter uma estimativa para o produto interno em  $L^2$  de  $P_1(w)$  e  $P_2(w)$ .

**Proposição 2.3.** *Consideremos a notação utilizada em (2.34). Se  $u \in X$  satisfaz (2.38), onde  $w$  é construído como em (2.35), então*

$$\begin{aligned}
\langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q)} &= 2s\lambda \int_Q |w'|^2 \varphi \phi'' - \gamma s\lambda \int_Q |w'|^2 \varphi L(\phi) \\
&\quad + 2s\lambda^2 \int_Q \varphi (|w'|^2 |\phi'|^2 - 2w'\phi' a \nabla w \cdot \nabla \phi + a^2 |\nabla \phi \cdot \nabla w|^2) \\
&\quad + 2s\lambda \int_Q a^2 \varphi D^2(\phi)(\nabla w, \nabla w) \\
&\quad + \gamma s\lambda \int_Q a |\nabla w|^2 \varphi L(\phi) + 2s^3 \lambda^4 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi)^2 \\
&\quad + 2s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 \left( |\phi'|^2 \phi'' + a^2 D^2(\phi)(\nabla \phi, \nabla \phi) \right) \\
&\quad + \gamma s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 L(\phi) E(\phi) + \mathcal{X} + \mathcal{J},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= s\lambda \int_{\Sigma} \left( a^2 \varphi |\nabla w|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - 2a^2 \varphi (\nabla \phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \\
&\quad + s\lambda \frac{\gamma - 1}{2} \int_{\Sigma} |w|^2 \varphi a \nabla L(\phi) \cdot \nu + s\lambda^2 \frac{\gamma - 1}{2} \int_{\Sigma} |w|^2 \varphi a L(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \\
&\quad - s\lambda(\gamma - 1) \int_{\Sigma} w a \frac{\partial w}{\partial \nu} \varphi L(\phi) + s\lambda^2 \int_{\Sigma} a \varphi E(\phi) w \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&\quad - s\lambda^3 \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |w|^2 \varphi E(\phi) a \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - s\lambda^2 \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |w|^2 a \varphi \nabla E(\phi) \cdot \nu \\
&\quad + 2s\lambda \int_{\Sigma} a \varphi \phi' w' \frac{\partial w}{\partial \nu} - s\lambda \int_{\Sigma} |w'|^2 \varphi a \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma} |w|^2 \varphi^3 E(\phi) a \frac{\partial \phi}{\partial \nu}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

e  $\mathcal{X}$  é tal que

$$|\mathcal{X}| \leq \mathcal{C}s\lambda^3 \int_Q \varphi^3 |w|^2. \quad (2.42)$$

**Prova.** Para efeito de notação,  $\langle P_1(w), P_2(w) \rangle = \sum_{i,j=1}^3 I_{i,j}$ , onde  $I_{i,j}$  é a integral do produto do  $i$ -ésimo termo em  $P_1(w)$  pelo  $j$ -ésimo termo de  $P_2(w)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_{1,1} &= s\lambda(\gamma-1) \int_Q w'' w \varphi L(\phi) \\ &= s\lambda(\gamma-1) \int_Q \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|w|^2) - |w'|^2 \right) \varphi L(\phi) \\ &= -s\lambda(\gamma-1) \int_Q |w'|^2 \varphi L(\phi) + \frac{s\lambda(\gamma-1)}{2} \int_Q |w|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi L(\phi)) \\ &= -s\lambda(\gamma-1) \int_Q |w'|^2 \varphi L(\phi) + \frac{s\lambda^2(\gamma-1)}{2} \int_Q |w|^2 \varphi \left( \phi'' + \lambda |\phi'|^2 \right) L(\phi). \\ \\ \bullet \quad I_{1,2} &= -s\lambda^2 \int_Q w'' w \varphi E(\phi) \\ &= -s\lambda^2 \int_Q \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|w|^2) - |w'|^2 \right) \varphi E(\phi) \\ &= s\lambda^2 \int_Q |w'|^2 \varphi E(\phi) - \frac{s\lambda^2}{2} \int_Q |w|^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi E(\phi)) \\ &= s\lambda^2 \int_Q |w'|^2 \varphi E(\phi) - \frac{s\lambda^2}{2} \int_Q |w|^2 \left( \lambda^2 \varphi |\phi'|^2 E(\phi) + \lambda \varphi \phi'' |\phi'|^2 \right. \\ &\quad \left. - \lambda \varphi \phi'' a |\nabla \phi|^2 + 4\lambda \varphi |\phi'|^2 \phi'' + 2\varphi |\phi''|^2 \right) \\ &= s\lambda^2 \int_Q |w'|^2 \varphi E(\phi) - s\lambda^2 \int_Q |w|^2 \varphi |\phi''|^2 - \frac{5s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 \phi'' |\phi'|^2 \\ &\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 a \varphi \phi'' |\nabla \phi|^2 - \frac{s\lambda^4}{2} \int_Q |w|^2 \varphi |\phi'|^2 E(\phi). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
I_{1,3} &= -2s\lambda \int_Q w'' \varphi (\phi' w' - a \nabla \phi \cdot \nabla w) \\
&= -s\lambda \int_Q \varphi \phi' \frac{\partial}{\partial t} (|w'|^2) + 2s\lambda \int_Q w'' a \varphi \nabla w \cdot \nabla \phi \\
&= s\lambda \int_Q |w'|^2 \varphi (\phi'' + \lambda |\phi'|^2) - 2s\lambda \int_Q w' a \lambda \varphi \phi' \nabla w \cdot \nabla \phi - 2s\lambda \int_Q w' a \varphi \nabla w' \cdot \nabla \phi \\
&= s\lambda \int_Q |w'|^2 \varphi (\phi'' + \lambda |\phi'|^2) - 2s\lambda^2 \int_Q w' \phi' \varphi a \nabla w \cdot \nabla \phi - s\lambda \int_Q a \varphi \nabla \phi \cdot \nabla (|w'|^2) \\
&= s\lambda \int_Q |w'|^2 \varphi (\phi'' + \lambda |\phi'|^2) - 2s\lambda^2 \int_Q w' \phi' \varphi a \nabla w \cdot \nabla \phi \\
&\quad + s\lambda \int_Q |w'|^2 a \varphi (\lambda |\nabla \phi|^2 + \Delta \phi) - s\lambda \int_\Sigma |w'|^2 a \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \nu}.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
I_{2,1} &= -s\lambda(\gamma - 1) \int_Q a \varphi L(\phi) w \Delta w \\
&= -s\lambda(\gamma - 1) \int_\Sigma a \varphi L(\phi) w \frac{\partial w}{\partial \nu} + s\lambda(\gamma - 1) \int_Q \nabla (a \varphi L(\phi) w) \cdot \nabla w \\
&= -s\lambda(\gamma - 1) \int_\Sigma a \varphi L(\phi) w \frac{\partial w}{\partial \nu} + s\lambda(\gamma - 1) \int_Q a \varphi L(\phi) \nabla w \cdot \nabla w \\
&\quad + \frac{s\lambda(\gamma - 1)}{2} \int_Q \nabla (a \varphi L(\phi)) \cdot \nabla (|w|^2) \\
&= -s\lambda(\gamma - 1) \int_\Sigma a \varphi L(\phi) w \frac{\partial w}{\partial \nu} + s\lambda(\gamma - 1) \int_Q a |\nabla w|^2 \varphi L(\phi) \\
&\quad - \frac{s\lambda(\gamma - 1)}{2} \int_Q |w|^2 a \Delta (\varphi L(\phi)) + \frac{s\lambda(\gamma - 1)}{2} \int_\Sigma |w|^2 a \frac{\partial}{\partial \nu} (\varphi L(\phi)) \\
&= -s\lambda(\gamma - 1) \int_\Sigma a \varphi L(\phi) w \frac{\partial w}{\partial \nu} + s\lambda(\gamma - 1) \int_Q a |\nabla w|^2 \varphi L(\phi) \\
&\quad - \frac{s\lambda^2(\gamma - 1)}{2} \int_Q |w|^2 a L(\phi) (\lambda |\nabla \phi|^2 - \Delta \phi) - s\lambda^2(\gamma - 1) \int_Q |w|^2 a \varphi \nabla \phi \cdot \nabla (L(\phi)) \\
&\quad - \frac{s\lambda(\gamma - 1)}{2} \int_Q |w|^2 a \phi \Delta (L(\phi)) + \frac{s\lambda(\gamma - 1)}{2} \int_\Sigma |w|^2 a \varphi \nabla (L(\phi)) \cdot \nu \\
&\quad + \frac{s\lambda^2(\gamma - 1)}{2} \int_\Sigma |w|^2 a \varphi L(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_{2,2} &= s\lambda^2 \int_Q a\varphi E(\phi)w\Delta w \\
&= s\lambda^2 \int_\Sigma a\varphi E(\phi)w \frac{\partial w}{\partial \nu} - s\lambda^2 \int_Q \nabla(a\varphi E(\phi)w) \cdot \nabla w \\
&= s\lambda^2 \int_\Sigma a\varphi E(\phi)w \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{s\lambda^2}{2} \int_Q \nabla(a\varphi E(\phi)) \cdot \nabla(|w|^2) - s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a\varphi E(\phi) \\
&= s\lambda^2 \int_\Sigma a\varphi E(\phi)w \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{s\lambda^2}{2} \int_\Sigma |w| a \frac{\partial}{\partial \nu}(\varphi E(\phi)) + \frac{s\lambda^2}{2} \int_\Sigma |w| a \Delta(\varphi E(\phi)) \\
&\quad - s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a\varphi E(\phi) \\
&= s\lambda^2 \int_\Sigma a\varphi E(\phi)w \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{s\lambda^2}{2} \int_\Sigma |w|^2 a (\lambda\varphi E(\phi)\nabla\phi + \varphi\nabla(E(\phi))) \cdot \nu \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi E(\phi) (\lambda|\nabla\phi|^2 + \Delta\phi) + s\lambda^2 \int_Q |w|^2 a\nabla\phi \cdot \nabla(E(\phi)) \\
&\quad + \frac{s\lambda^2}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi\Delta(E(\phi)) - s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a\varphi E(\phi) \\
&= s\lambda^2 \int_\Sigma a\varphi E(\phi)w \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{s\lambda^2}{2} \int_\Sigma |w|^2 a (\lambda\varphi E(\phi)\nabla\phi + \varphi\nabla(E(\phi))) \cdot \nu \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi E(\phi) (\lambda|\nabla\phi|^2 + \Delta\phi) - 2s\lambda^2 \int_Q |w|^2 a^2 D^2(\phi)(\nabla\phi, \nabla\phi) \\
&\quad + \frac{s\lambda^2}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi\Delta(E(\phi)) - s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a\varphi E(\phi) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_{2,3} &= 2s\lambda \int_Q a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \Delta w \\
&= -2s\lambda \int_Q \nabla (a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w)) \nabla w + 2s\lambda \int_\Sigma a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&= -2s\lambda \int_Q a\varphi \nabla (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \nabla w + 2s\lambda^2 \int_Q a^2\varphi |\nabla\phi \cdot \nabla w|^2 \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_Q a\varphi\phi'w'\nabla\phi \cdot \nabla w + 2s\lambda \int_\Sigma a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&= -2s\lambda \int_Q a\varphi \left( \phi' \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\nabla w|^2) - a\nabla (\nabla\phi \cdot \nabla w) \cdot \nabla w \right) \\
&\quad + 2s\lambda^2 \int_Q a^2\varphi |\nabla\phi \cdot \nabla w|^2 - 2s\lambda^2 \int_Q a\varphi\phi'w'\nabla\phi \cdot \nabla w \\
&\quad + 2s\lambda \int_\Sigma a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&= s\lambda \int_Q a |\nabla w|^2 (\lambda\varphi |\phi'|^2 + \varphi\phi'') + s\lambda \int_Q a^2\varphi \nabla\phi \cdot \nabla (|\nabla w|^2) \\
&\quad + 2s\lambda \int_Q a^2\varphi D^2(\phi)(\nabla w, \nabla w) + 2s\lambda^2 \int_Q a^2\varphi |\nabla\phi \cdot \nabla w|^2 \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_Q a\varphi\phi'w'\nabla\phi \cdot \nabla w + 2s\lambda \int_\Sigma a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&= s\lambda \int_Q a |\nabla w|^2 (\lambda\varphi |\phi'|^2 + \varphi\phi'') - s\lambda \int_Q a^2 |\nabla w|^2 (\lambda\varphi |\nabla\phi|^2 + \varphi\Delta\phi) \\
&\quad + s\lambda \int_\Sigma |\nabla w|^2 a^2\varphi \frac{\partial\phi}{\partial \nu} + 2s\lambda \int_Q a^2\varphi D^2(\phi)(\nabla w, \nabla w) \\
&\quad + 2s\lambda^2 \int_Q a^2\varphi |\nabla\phi \cdot \nabla w|^2 - 2s\lambda^2 \int_Q a\varphi\phi'w'\nabla\phi \cdot \nabla w \\
&\quad + 2s\lambda \int_\Sigma a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&= s\lambda \int_Q |\nabla w|^2 a\varphi L(\phi) + s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a\varphi E(\phi) + 2s\lambda^2 \int_Q a^2\varphi |\nabla\phi \cdot \nabla w|^2 \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_Q a\varphi\phi'w'\nabla\phi \cdot \nabla w + 2s\lambda \int_Q a^2\varphi D^2(\phi)(\nabla w, \nabla w) \\
&\quad + s\lambda \int_\Sigma |\nabla w|^2 a^2\varphi \frac{\partial\phi}{\partial \nu} + 2s\lambda \int_\Sigma a\varphi (\phi'w' - a\nabla\phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu}.
\end{aligned}$$

- $I_{3,1} = s^3 \lambda^3 (\gamma - 1) \int_Q |w|^2 \varphi^3 L(\phi) E(\phi) .$
- $I_{3,2} = -s^3 \lambda^4 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi)^2 .$
- $I_{3,3} = -2s^3 \lambda^3 \int_Q \varphi^3 E(\phi) w (\phi' w' - a \nabla \phi \cdot \nabla w)$ 

$$= -2s^3 \lambda^3 \int_Q \varphi^3 E(\phi) \phi' \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|w|^2) + 2s^3 \lambda^3 \int_Q \varphi^3 E(\phi) a \nabla \phi \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} |w|^2 \right)$$

$$= s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \left( \varphi^3 E(\phi) \phi'' + 2\varphi^3 |\phi'|^2 \phi'' + 3\varphi^3 \lambda E(\phi) |\phi'|^2 \right)$$

$$- s^3 \lambda^3 \int_Q \varphi^3 E(\phi) a |w|^2 \Delta \phi + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma} a |w|^2 \varphi^3 E(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$$

$$- s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \nabla (\varphi^3 E(\phi) a) \cdot \nabla \phi$$

$$= s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi) \phi'' + 2s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 |\phi'|^2 \phi'' + 3s^3 \lambda^4 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi) |\phi'|^2$$

$$- s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi) a \Delta \phi + 2s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 a^2 D^2(\phi) (\nabla \phi, \nabla \phi)$$

$$- 3s^3 \lambda^4 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi) a |\nabla \phi|^2 + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma} a |w|^2 \varphi^3 E(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$$

$$= s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi) L(\phi) + 2s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 \left( |\phi'|^2 \phi'' + a^2 D^2(\phi) (\nabla \phi, \nabla \phi) \right)$$

$$+ 3s^3 \lambda^4 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi)^2 + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma} a |w|^2 \varphi^3 E(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \nu} .$$

Ao juntar os termos  $I_{i,j}$ , encontramos (2.40). Denotando por  $A_j$  as oito primeiras integrais em  $\langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q)}$ , temos

$$\langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q)} = \sum_{i=1}^8 A_i + \mathcal{X} + \mathcal{J}. \quad (2.43)$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \sum_{i,j=1}^3 I_{i,j} - \sum_{i=1}^8 A_i - \mathcal{J} \\
&= -s\lambda \int_Q \varphi a \Delta \phi |w'|^2 + \frac{s\lambda^2(\gamma-1)}{2} \int_Q |w|^2 \varphi (\phi'' + \lambda |\phi|^2) L(\phi) \\
&\quad - s\lambda^2 \int_Q |w'|^2 \varphi a |\nabla \phi|^2 - s\lambda^2 \int_Q |w|^2 \varphi |\phi''|^2 - \frac{5s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 \varphi \phi'' |\phi'|^2 \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 a \varphi \phi'' |\nabla \phi|^2 - \frac{s\lambda^4}{2} \int_Q |w|^2 \varphi |\phi'|^2 E(\phi) + s\lambda \int_Q |w'|^2 \varphi a (\Delta \phi + \lambda |\nabla \phi|^2) \\
&\quad - s\lambda \int_Q a |\nabla w|^2 \varphi L(\phi) - \frac{s\lambda^2(\gamma-1)}{2} \int_Q |w|^2 \varphi a L(\phi) (\lambda |\nabla \phi|^2 + \Delta \phi) \\
&\quad - \frac{s\lambda(\gamma-1)}{2} \int_Q |w|^2 a \varphi \Delta (L(\phi)) - s\lambda^2(\gamma-1) \int_Q |w|^2 a \varphi \nabla \phi \cdot \nabla L(\phi) \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 a \varphi E(\phi) (\Delta \phi + \lambda |\nabla \phi|^2) - 2s\lambda^3 \int_Q |w|^2 a^2 \varphi D^2(\phi) (\nabla \phi, \nabla \phi) \\
&\quad + \frac{s\lambda^2}{2} \int_Q |w|^2 a \varphi \Delta (E(\phi)) - s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a \varphi E(\phi) + s\lambda \int_Q |\nabla w|^2 a \varphi L(\phi) \\
&\quad + s\lambda^2 \int_Q |\nabla w|^2 a \varphi E(\phi) - s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 L(\phi) E(\phi) + s^3 \lambda^3 \int_Q |w|^2 \varphi^3 E(\phi) L(\phi).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Denotando por  $\mathcal{X}_i$  a  $i$ -ésima integral, observemos que

- $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_8 = 0$ .
- $\mathcal{X}_9 + \mathcal{X}_{17} = 0$ .
- $\mathcal{X}_{16} + \mathcal{X}_{18} = 0$ .
- $\mathcal{X}_{19} + \mathcal{X}_{20} = 0$ .

Agora, faremos nossa segunda, e última, imposição sobre  $M_j$ . Tomemos  $M_1$  e  $M_2$  grandes o suficiente para que  $\phi \geq 1$  e, conseqüentemente,  $\varphi \geq 1$ . É claro que a escolha de tais  $M_j$  pode ser feita sem interferir na imposição feita anteriormente sobre estes.

Pelo modo como foi definido  $\phi$  em (2.13) e (2.14), e pela Proposição 2.2, que, em sua demonstração, garante que a função  $\rho(x)$  é de classe  $C^4$ , são limitadas as funções

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \phi_1(x, t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad \text{com } \alpha_1 + \alpha_2 \leq 4. \quad (2.45)$$

Logo, como  $\phi'$  e  $\phi''$  são claramente limitadas e  $\gamma \in (0, 1)$ , temos para  $\lambda > \lambda_0 = 1$  e  $s > s_0 = 1$  que

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathcal{X}_7 + \mathcal{X}_{13} &= -\frac{s\lambda^4}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi E(\phi) \left( |\phi'|^2 - a |\nabla\phi|^2 \right) + \frac{s\lambda^3}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi E(\phi) \Delta\phi \\ &\leq -\frac{s\lambda^4}{2} \int_Q |w|^2 a\varphi E(\phi)^2 + Cs\lambda^3 \int_Q \varphi^3 |w|^2 \\ &\leq Cs\lambda^3 \int_Q \varphi^3 |w|^2; \\ \bullet \quad \mathcal{X}_k &\leq Cs\lambda^3 \int_Q \varphi^3 |w|^2, \quad k \in \{2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 14, 15\}. \end{aligned}$$

Somando os termos, concluímos (2.42). ■

**Observação 2.1.** *Se  $u \in X$ , então  $u_j \in X$ . Assim, a Proposição acima não perde sua veracidade se trocarmos  $Q$  por  $Q_j$ ,  $j = 1, 2$ . Notemos ainda que, caso o limite de integração  $Q$  seja trocado por  $Q_1$ , em  $\mathcal{J}$  teremos integrais sobre  $\Sigma_1$ , visto que esta é a fronteira de  $Q_1$ . De forma semelhante, se trocarmos  $Q$  por  $Q_2$ , em  $\mathcal{J}$  teremos cada integral sobre  $\Sigma_1$  somada com a mesma sobre  $\Sigma$ , pois a fronteira de  $Q_2$  é  $\Sigma_1 \cup \Sigma$ .*

## 2.3 Prova da desigualdade de Carleman

A definição dos termos  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , como podemos ver em (2.37) e (2.38), possui dependência direta da função peso  $\phi$ . Com a intenção de evidenciar essa dependência, iremos, algumas vezes, escrever  $P^\phi$ ,  $P_1^\phi$  e  $P_2^\phi$ .

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$ , definamos

$$\|z\|_{U, \varphi}^2 = s\lambda \int_{-T}^T \int_U (|z'|^2 + |\nabla z|^2) \varphi + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_U |z|^2 \varphi^3 \quad (2.46)$$

e

$$\Sigma_+^\phi = \{(x, t) \in \Sigma; \nabla\phi(x, t) \cdot \nu(x) > 0\}. \quad (2.47)$$

No início da Seção 2.1 definimos a função peso  $\phi$  a partir de um elemento  $x_0 \in \Omega_1$ . Agora, dado outro elemento arbitrário  $x_k \in \Omega_1$ , podemos proceder da mesma forma como em (2.1) – (2.14), com a única diferença de utilizar  $x_k$  em vez de  $x_0$ . Dessa forma, construímos o peso  $\phi_k$  respectivo ao elemento  $x_k$ . Ainda, definamos  $\varphi_k = e^{\lambda\phi_k}$ ,  $\lambda > 0$  e  $w_k = e^{s\varphi_k}u$ ,  $s > 0$ , onde  $u = u(p)$  é solução de (2.3). Assim sendo, dado  $x_k \in \Omega_1$ , chamaremos  $\phi_k$ ,  $\varphi_k$  e  $w_k$  de *funções associadas a  $x_k$* .

**Teorema 2.1.** *Sejam  $\Omega_1$  um conjunto aberto, limitado e fortemente convexo de classe  $C^4$ ,  $a_1 > a_2 > 0$  e  $\nu$  o vetor normal unitário exterior a  $\Omega$ . Se  $x_k \in \Omega_1$  e  $\phi^k, \varphi^k, w^k$  são suas funções associadas, então existem  $C > 0$ ,  $s_0 > 0$  e  $\lambda_0 > 0$  tais que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left( \left\| P_1^{\phi^k}(w^k) \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| P_2^{\phi^k}(w^k) \right\|_{L^2(Q)}^2 + \left\| w^k \right\|_{Q, \varphi^k}^2 \right) \\ \leq C \sum_{k=1}^2 \left( \left\| P^{\phi^k}(w^k) \right\|_{L^2(Q)}^2 + s\lambda \int_{\Sigma_+^{\phi^k}} \left| a_2 \frac{\partial w^k}{\partial \nu} \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

para todo  $u \in X$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$  e  $s \geq s_0$ .

**Prova.** Aplicando a Proposição 2.3 (ver Observação 2.1) com as integrais em  $Q_1$  e  $Q_2$  temos, nos respectivos casos, que

$$\begin{aligned} \langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q_1)} &= \sum_{i=1}^8 A_{j, Q_1}(w) + \mathcal{X}_{Q_1}(w) + \mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_1), \\ \langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q_2)} &= \sum_{i=1}^8 A_{j, Q_2}(w) + \mathcal{X}_{Q_2}(w) + \mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_2) + \mathcal{J}_{\Sigma}(w_2), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde,  $A_{j, Q_i}(w)$  é a  $j$ -ésima integral de (2.40), porém, com limite de integração  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\mathcal{X}_{Q_i}(w)$  satisfaz (2.42) com integral em  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ ; e  $\mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_1)$ ,  $\mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_2)$  e  $\mathcal{J}_{\Sigma}(w_2)$  são como em (2.41) com limites de integração  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma$ , respectivamente. Somando os dois termos em (2.49), obtemos que

$$\langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q_0)} = \sum_{i=1}^8 A_{j, Q_0}(w) + \mathcal{X}_{Q_0}(w) + \mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_1) + \mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_2) + \mathcal{J}_{\Sigma}(w_2). \quad (2.50)$$

Para provar este teorema, mostraremos que:

- A soma das integrais  $A_{j,Q_i}$ ,  $i = 1, 2$ , pode ser minorada por um termo adequado.
- A soma dos termos da interface  $\mathcal{J}_{\Sigma_1}$  é não-negativa.
- Uma segunda função peso, centrada em um ponto diferente de  $x_0$ , pode ser introduzida para lidar com as integrais em  $B_\varepsilon(x_0)$ .

Iremos dividir tal prova em subseções envolvendo estimativas no interior, na interface e na fronteira e eliminação de um termo local.

### 2.3.1 O Interior

**Proposição 2.4.** *Existem  $\delta_A > 0$ ,  $C > 0$  e  $\lambda_0$  tais que*

$$\sum_{j=1}^8 A_{j,Q_0} \geq \delta_A \|w\|_{\Omega_0, \varphi} - C \|w\|_{B_\varepsilon(x_0), \varphi} \quad (2.51)$$

para todo  $\lambda > \lambda_0$  e para todo  $u \in X$ .

**Prova.** Organizemos a prova em quatro etapas.

Etapa 1: Estimativa para  $A_1$  e  $A_2$ .

Temos que

$$A_{1,Q_{x_0}} + A_{2,Q_{x_0}} = s\lambda \int_{Q_{x_0}} |w'|^2 \varphi (2\phi'' - \gamma L(\phi)). \quad (2.52)$$

Pela Proposição 2.2 e pela definição de  $c(x)$ , ver (2.15), obtemos que

$$\begin{aligned} 2\phi'' - \gamma L(\phi) &= -4\beta - \gamma(-2\beta - a\Delta\phi) \\ &\geq -4\beta + \gamma(2\beta + 2ac(x)) \\ &\geq -4\beta + \gamma\left(2\beta + 2a\frac{\bar{a}}{\text{diam}(\Omega)^2}\right) \\ &= \delta_{12}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

A fim de tornar  $\delta_{12}$  positivo, basta fazermos com que

$$\gamma > \frac{2\beta}{\beta + \frac{a_1 a_2}{\text{diam}\Omega^2}}. \quad (2.54)$$

Observemos que, para  $\beta$  pequeno o suficiente, ainda podemos ter  $\gamma \leq 1$ , mais especificamente, basta que  $\beta \leq \frac{a_1 a_2}{\text{diam}\Omega^2}$ .

Ainda, como  $\phi''$  e  $\Delta\phi$  são limitadas, temos que

$$\begin{aligned} -A_{1,B_\varepsilon(x_0)} - A_{2,B_\varepsilon(x_0)} &= -s\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} |w'|^2 \varphi (2\phi'' - \gamma L(\phi)) \\ &\leq Cs\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} |w'|^2 \varphi. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dessa forma,

$$A_{1,Q_0} + A_{2,Q_0} \geq \delta_{12}s\lambda \int_{Q_{x_0}} |w'|^2 \varphi - Cs\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} |w'|^2 \varphi. \quad (2.56)$$

Etapa 2: Estimativa para  $A_3$ .

É imediato que

$$A_{3,Q_0} = 2s\lambda^2 \int_{Q_0} \phi (\phi' w' - a \nabla \phi \cdot \nabla w)^2 \geq 0. \quad (2.57)$$

Etapa 3: Estimativa para  $A_4$  e  $A_5$ .

Estimemos agora os termos  $A_{4,Q_0}$  e  $A_{5,Q_0}$ . Sabemos que

$$A_{4,Q_{x_0}} + A_{5,Q_{x_0}} = s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi (2a^2 D^2(\phi)(\nabla w, \nabla w) + \gamma a L(\phi) |\nabla w|^2). \quad (2.58)$$

Usando a Proposição 2.2, encontramos que

$$\begin{aligned} A_{4,Q_{x_0}} + A_{5,Q_{x_0}} &\geq s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi (2a^2 \delta_1 |\nabla w|^2 + \gamma a L(\phi) |\nabla w|^2) \\ &\geq s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi a (2a\delta_1 + \gamma L(\phi)) |\nabla w|^2 \\ &\geq s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi a (2a\delta_1 - \gamma (2\beta + a\Delta\phi)) |\nabla w|^2 \\ &\geq s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi a \left( 2a\delta_1 - \gamma \left( 2\beta + a \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)} \right) \right) |\nabla w|^2 \\ &= \delta_{45}s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi |\nabla w|^2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde  $\delta_{45} > 0$  ao tomarmos

$$\gamma < \frac{2 \min\{a_1, a_2\} \delta_1}{2\beta + \max\{a_1, a_2\} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)}}. \quad (2.60)$$

Notemos, de (2.54) e (2.60), que estamos escolhendo

$$\gamma \in \left[ \frac{2\beta}{\beta + \frac{a_1 a_2}{\text{diam}\Omega^2}}, \frac{2 \min\{a_1, a_2\} \delta_1}{2\beta + \max\{a_1, a_2\} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)}} \right]. \quad (2.61)$$

Este intervalo existe, pois, caso contrário, teríamos que

$$\frac{2\beta}{\beta + \frac{a_1 a_2}{\text{diam}\Omega^2}} \geq \frac{2 \min\{a_1, a_2\} \delta_1}{2\beta + \max\{a_1, a_2\} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)}}, \quad (2.62)$$

e, conseqüentemente,

$$2\beta^2 + \beta \max\{a_1, a_2\} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)} \geq \frac{\min\{a_1, a_2\} \delta_1 a_1 a_2}{\text{diam}\Omega^2} \quad (2.63)$$

o que implicaria,

$$0 \geq -\frac{\max\{a_1, a_2\} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)}}{8} \geq \frac{\min\{a_1, a_2\} \delta_1 a_1 a_2}{\text{diam}\Omega^2}. \quad (2.64)$$

De fato, dada uma parábola  $ax^2 + bx + c = 0$ , cujo vértice do gráfico é  $V = (V_x, V_y) = (-b/2a, (-b^2 + 4ac)/4a)$ , a fim de que a função definida por  $g(x) = ax^2 + bx + c$  satisfaça  $g(x) > d$ , é suficiente que aconteça  $V_y > d$ . Assim, considerando a parábola  $2\beta^2 + \beta \max\{a_1, a_2\} \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega_0)} = 0$ , concluiríamos (2.64). Dessa forma, (2.64) seria a uma contradição à não existência do intervalo em (2.61).

Como  $L(\phi)$  é limitado, temos, usando novamente a Proposição 2.2, que

$$\begin{aligned} -A_{4, B_\varepsilon(x_0)} - A_{5, B_\varepsilon(x_0)} &= -s\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi (2a^2 D^2(\phi)(\nabla w, \nabla w) + \gamma a L(\phi) |\nabla w|^2) \\ &\leq s\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi (2Ca^2 |\nabla w|^2 + \gamma a \|L(\phi)\|_{L^\infty(\Omega_0)} |\nabla w|^2) \\ &\leq Cs\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi |\nabla w|^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Assim,

$$A_{4, Q_0} + A_{5, Q_0} \geq \delta_{45} s\lambda \int_{Q_{x_0}} \varphi |\nabla w|^2 - Cs\lambda \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi |\nabla w|^2. \quad (2.66)$$

Etapa 4: Estimativa para  $A_6$ ,  $A_7$  e  $A_8$ .

Por último, vamos estimar os termos restantes. É fato que

$$A_{6, Q_{x_0}} + A_{7, Q_{x_0}} + A_{8, Q_{x_0}} = s^3 \lambda^3 \int_{Q_{x_0}} |w|^2 \varphi^3 F_\lambda(\phi), \quad (2.67)$$

onde

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\phi) &= 2\lambda E(\phi)^2 + 2|\phi'|^2 \phi'' + 2a^2 D^2(\phi)(\nabla\phi, \nabla\phi) + \gamma L(\phi)E(\phi) \\
&= 2\lambda E(\phi)^2 - 4\beta |\phi'|^2 + 2a^2 D^2(\phi)(\nabla\phi, \nabla\phi) + \gamma L(\phi)E(\phi) \\
&= 2\lambda E(\phi)^2 + (-4\beta + \gamma L(\phi)) E(\phi) - 4\beta a |\nabla\phi|^2 + 2a^2 D^2(\phi)(\nabla\phi, \nabla\phi).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Como, pela Proposição 2.2,

$$b(x) = -4\beta + \gamma L(\phi) = -4\beta - 2\gamma\beta - \gamma a \Delta\phi < 0 \quad \text{em } Q_{x_0}, \tag{2.69}$$

então

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\phi) &\geq 2\lambda E(\phi)^2 - \|b(x)\|_{L^\infty(Q_{x_0})} E(\phi) - 4\beta a |\nabla\phi|^2 + 2a^2 \delta_1 |\nabla\phi|^2 \\
&= 2\lambda E(\phi)^2 - \|b(x)\|_{L^\infty(Q_{x_0})} E(\phi) + a(-4\beta + 2a\delta_1) |\nabla\phi|^2.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Fazendo

$$\beta < \frac{\min\{a_1, a_2\}\delta_1}{2}, \tag{2.71}$$

temos que  $d_1 = -4\beta + 2a\delta_1 > 0$  e, assim, pela Proposição 2.2,

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\phi) &\geq 2\lambda E(\phi)^2 - \|b(x)\|_{L^\infty(Q_{x_0})} E(\phi) + ad_1 \delta^2 \\
&= 2\lambda E(\phi)^2 - \|b(x)\|_{L^\infty(Q_{x_0})} E(\phi) + d_0.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Notemos que (2.72) implica que  $F_\lambda(\phi) > \frac{d_0}{2} = \delta_{456} > 0$  para  $\lambda > \lambda_0$ . De fato, pelo mesmo resultado sobre parábolas utilizado na etapa anterior, inferimos que  $F_\lambda(\phi) > \frac{d_0}{2}$  quando

$$\frac{-\|b(x)\|_{L^\infty(Q_{x_0})}^2 + 8\lambda d_0}{8\lambda} \geq \frac{d_0}{2}, \tag{2.73}$$

o que acontece quando tomamos

$$\lambda > \frac{\|b(x)\|_{L^\infty(Q_{x_0})}^2}{4d_0} = \lambda_0 > 0, \tag{2.74}$$

Assim, como a limitação das funções vistas em (2.45) garante que  $F_\lambda(\phi) \leq C$  em  $B_\varepsilon(x_0)$ , concluímos que

$$A_{6,Q_0} + A_{7,Q_0} + A_{8,Q_0} \geq \delta_{678} s^3 \lambda^3 \int_{Q_{x_0}} |w|^2 \varphi^3 - C \int_{B_\varepsilon(x_0)} |w|^2 \varphi^3. \tag{2.75}$$

Tomando  $\delta_A = \min\{\delta_{12}, \delta_{45}, \delta_{678}\}$  e juntando os termos, finalizamos a demonstração da proposição. ■

### 2.3.2 A Interface

**Proposição 2.5.** *Se  $0 < a_2 < a_1$ , então existe  $s_0 > 0$  tal que*

$$\mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_1) + \mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_2) \geq 0, \quad \forall s \geq s_0, \quad (2.76)$$

para todo  $u \in X$ .

**Prova.** Sabemos que, para  $j = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_j) &= s\lambda \int_{\Sigma_1} \left( a_j^2 \varphi_j |\nabla w_j|^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} - 2a_j^2 \varphi_j (\nabla \phi_j \cdot \nabla w_j) \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} \right) \\ &\quad + s\lambda \frac{\gamma - 1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_j|^2 \varphi_j a_j \nabla L(\phi_j) \cdot \nu_j + s\lambda^2 \frac{\gamma - 1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_j|^2 \varphi_j a_j L(\phi_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} \\ &\quad - s\lambda(\gamma - 1) \int_{\Sigma_1} w_j a_j \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} \varphi_j L(\phi_j) + s\lambda^2 \int_{\Sigma_1} a_j \varphi_j E(\phi_j) w_j \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} \\ &\quad - s\lambda^3 \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_j|^2 \varphi_j E(\phi_j) a_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} - s\lambda^2 \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_j|^2 a_j \varphi_j \nabla E(\phi_j) \cdot \nu_j \\ &\quad + 2s\lambda \int_{\Sigma_1} a_j \varphi_j \phi_j' w_j' \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} - s\lambda \int_{\Sigma_1} |w_j'|^2 \varphi_j a_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} \\ &\quad + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_1} |w_j|^2 \varphi_j^3 E(\phi_j) a_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j}. \end{aligned}$$

Seja  $J_{i_j}$  a  $i$ -ésima integral de  $\mathcal{J}_{\Sigma_1}(w_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Denotemos  $J_i = J_{i_1} + J_{i_2}$ . Pela Proposição 2.2, temos que, em  $\Sigma_1$ , valem:

$$\begin{aligned} L(\phi_1) &= \phi_1'' - a_1 \Delta \phi_1 = \phi_2'' - a_2 \Delta \phi_2 = L(\phi_2) \\ a_1 \nabla (E(\phi_1)) &= a_1 \nabla (-a_1 |\nabla \phi_1|^2) = \sum_{k,l=1}^2 -2a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k} a_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_k \partial x_l} = a_2 \nabla (E(\phi_2)) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Daí, e do fato que as condições de transmissão em (2.5) ainda valem para  $w$  e  $w_j$ ,  $j = 1, 2$ , temos que

- $J_3 = s\lambda^2 \frac{\gamma - 1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 L(\phi_1) \left( a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} + a_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu_2} \right) = 0.$
- $J_4 = -s\lambda(\gamma - 1) \int_{\Sigma_1} w_1 \left( a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} + a_2 \frac{\partial w_2}{\partial \nu_2} \right) \varphi_1 L(\phi_1) = 0.$

- $J_7 = -s\lambda^2 \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 a_1 \nabla E(\phi_1) \cdot (\nu_1 + \nu_2) = 0.$
- $J_8 = 2s\lambda \int_{\Sigma_1} \varphi_1 \phi_1' w_1' \left( a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} + a_2 \frac{\partial w_2}{\partial \nu_2} \right) = 0.$
- $J_9 = -s\lambda \int_{\Sigma_1} |w_1'|^2 \varphi_1 \left( a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} + a_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu_2} \right) = 0.$

Agora, denotemos por  $g$  a função real definida em  $\Sigma_1$  como  $g(x, t) = E(\phi_1) - E(\phi_2).$

Notemos que

$$g(x, t) = |\phi_1|^2 - a_1 |\nabla \phi_1|^2 - |\phi_2|^2 + a_2 |\nabla \phi_2|^2 = \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) \left| a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} \right|^2. \quad (2.78)$$

Desde que  $a_2 < a_1$ , temos  $g > 0$  em  $\Sigma_1$ . Logo, podemos provar que

$$(i) \quad J_2 + J_6 + \frac{1}{2} J_{10} \geq 0, \quad \forall s \geq s_0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} -J_2 - J_6 &= -s\lambda \frac{\gamma - 1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 (a_1 \nabla L(\phi_1) \cdot \nu_1 + a_2 \nabla L(\phi_2) \cdot \nu_2) \\ &\quad + s\lambda^3 \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 \left( E(\phi_1) a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} + E(\phi_2) a_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu_2} \right) \\ &\leq \frac{Cs\lambda}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 + s\lambda^3 \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} (E(\phi_1) - E(\phi_2)). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Fazendo  $s \geq s_0 = \frac{C}{K}$ , onde, pela Proposição 2.2 vale em  $\Sigma_1$  que

$$a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} g(x, t) = \left( a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} \right)^3 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) \geq \delta^3 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) = K, \quad (2.80)$$

donde temos que

$$\begin{aligned} -J_2 - J_6 &\leq s^2 \lambda \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} g(x, t) + s\lambda^3 \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1 a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} g(x, t) \\ &\leq \frac{1}{2} s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1^3 a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} g(x, t) \\ &= \frac{1}{2} J_{10}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Além disso, podemos perceber que

(ii)  $J_1 + J_5 + \frac{1}{2}J_{10} \geq 0, \quad \forall s \geq s_0.$

Com efeito, notemos que (2.17) nos permite ver que, em  $\Sigma_1$ , para  $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} &= (\nabla \phi_j \cdot \nu) (\nabla w_j \cdot \nu) = (-1)^{(j+1)} |\nabla \phi_j| (\nabla w_j \cdot \nu) \\ &= (-1)^{(j+1)} \nabla w_j \cdot |\nabla \phi_j| \nu = (-1)^{2(j+1)} \nabla w_j \cdot \nabla \phi_j \\ &= \nabla w_j \cdot \nabla \phi_j. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Tomando o módulo em cada extremo da igualdade em (2.82) conseguimos que

$$|\nabla w_j| = \left| \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} \right| \quad \text{em } \Sigma_1 \quad (2.83)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{k=1}^2 \left( s\lambda \int_{\Sigma_1} \left( a_j^2 \varphi_j |\nabla w_j|^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} - 2a_j^2 \varphi_j (\nabla \phi_j \cdot \nabla w_j) \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left( -s\lambda \int_{\Sigma_1} \left| a_j \frac{\partial w_j}{\partial \nu_j} \right|^2 \varphi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu_j} \right) \\ &= -s\lambda \int_{\Sigma_1} \left| a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \right|^2 \varphi_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu_2} \right) \\ &= s\lambda \int_{\Sigma_1} \left| a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \right|^2 \varphi_1 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -J_5 &= -s\lambda^2 \int_{\Sigma_1} \varphi_1 g(x, t) w_1 a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \\ &= - \int_{\Sigma_1} \varphi_1 g(x, t) \left( s\lambda^{\frac{3}{2}} w_1 \right) \left( \lambda^{\frac{1}{2}} a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} s^2 \lambda^3 \int_{\Sigma_1} \varphi_1 g(x, t) |w_1|^2 + \frac{1}{2} \lambda \int_{\Sigma_1} \varphi_1 g(x, t) \left| a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \right|^2 \\ &\leq \frac{s^2 \lambda^3}{2\delta} \int_{\Sigma_1} \varphi_1 g(x, t) |w_1|^2 \left( a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} \right) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Sigma_1} \varphi_1 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) \left| a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} \right|^2 \left| a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \right|^2 \\ &\leq \frac{s^2 \lambda^3}{2\delta} \int_{\Sigma_1} |w_1|^2 \varphi_1^3 g(x, t) \left( a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} \right) + \frac{C\lambda}{2} \int_{\Sigma_1} \varphi_1 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) \left| a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1} \right|^2 a_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_1} \\ &\leq J_1 + \frac{1}{2} J_{10}, \quad \forall s \geq s_0 = \min \left\{ \frac{1}{2\delta}, \frac{C}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Combinando as estimativas obtidas para  $J_1$  a  $J_{10}$ , concluímos a prova da proposição. ■

### 2.3.3 A Fronteira

Como  $w = w_2$ ,  $\phi = \phi_2$  e  $\nu = \nu_2$  em  $\Sigma$ , temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\Sigma(w_2) &= s\lambda \int_\Sigma \left( a_2^2 \varphi |\nabla w|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - 2a_2^2 \varphi (\nabla \phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \\
&\quad + s\lambda \frac{\gamma-1}{2} \int_\Sigma |w|^2 \varphi a_2 \nabla L(\phi) \cdot \nu + s\lambda^2 \frac{\gamma-1}{2} \int_\Sigma |w|^2 \varphi a_2 L(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \\
&\quad - s\lambda(\gamma-1) \int_\Sigma w a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \varphi L(\phi) + s\lambda^2 \int_\Sigma a_2 \varphi E(\phi) w \frac{\partial w}{\partial \nu} \\
&\quad - s\lambda^3 \frac{1}{2} \int_\Sigma |w|^2 \varphi E(\phi) a_2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - s\lambda^2 \frac{1}{2} \int_\Sigma |w|^2 a_\varphi^2 \nabla E(\phi) \cdot \nu \\
&\quad + 2s\lambda \int_\Sigma a_2 \varphi \phi' w' \frac{\partial w}{\partial \nu} - s\lambda \int_\Sigma |w'|^2 \varphi a_2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \\
&\quad + s^3 \lambda^3 \int_\Sigma |w|^2 \varphi^3 E(\phi) a_2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Contudo, estamos trabalhando com  $u$  dentro do conjunto  $X$ , ver (2.39), fato que faz com que  $w_2 = 0$  em  $\Sigma$ . Notemos que  $w$  ser constante em  $\Sigma$  nos permite, por justificativas análogas às feitas para conseguir (2.82) e (2.83), que estes últimos resultados sejam válidos para  $j = 2$  em  $\Sigma$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\Sigma(w_2) &= s\lambda \int_\Sigma \left( a_2^2 \varphi |\nabla w|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - 2a_2^2 \varphi (\nabla \phi \cdot \nabla w) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \\
&= -s\lambda \int_\Sigma \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \\
&\geq -s\lambda \int_{\Sigma_+^\phi} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \\
&\geq -s\lambda \int_{\Sigma_+^\phi} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\|_{L^\infty(\Sigma)} \\
&\geq -s\lambda C \int_{\Sigma_+^\phi} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2,
\end{aligned} \tag{2.87}$$

lembrando que, como tínhamos definido,  $\Sigma_+^\phi = \{(x, t) \in \Sigma; \nabla \phi(x, t) \cdot \nu(x) > 0\}$ .

### 2.3.4 Juntando os termos

Agora vamos utilizar os resultados obtidos nas Seções 2.3.2 - 2.3.4 para obter uma nova estimativa para o termo  $\langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q_0)}$ . Combinando (2.50), (2.87) e as Proposições 2.4 e 2.5, concluímos que, existem  $s_0, \lambda_0$  e  $C$  positivos em  $\mathbb{R}$  tais que, para todo  $s \geq s_0$  e  $\lambda \geq \lambda_0$ , temos

$$\delta_A \|w\|_{\Omega_0, \varphi} - C \|w\|_{B_\varepsilon(x_0), \varphi} + \mathcal{X}_{Q_0}(w) - s\lambda C \int_{\Sigma_+^\phi} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \leq \langle P_1(w), P_2(w) \rangle_{L^2(Q_0)}. \quad (2.88)$$

Adicionando  $\|P_1(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|P_2(w)\|_{L^2(Q_0)}^2$  em ambos os lados, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|P_1(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|P_2(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \delta_A \|w\|_{\Omega_0, \varphi} - C \|w\|_{B_\varepsilon(x_0), \varphi} + \mathcal{X}_{Q_0}(w) - s\lambda C \int_{\Sigma_+^\phi} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|P_1(w) + P_2(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 \\ & = \frac{1}{2} \|P(w) - R(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 \\ & \leq \|P(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|R(w)\|_{L^2(Q_0)}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \|P_1(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|P_2(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \frac{3}{2} \|w\|_{\Omega_0, \varphi} \leq C \|P(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 \\ & + C \|R(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + C |\mathcal{X}_{Q_0}(w)| + C \|w\|_{B_\varepsilon(x_0), \varphi} + Cs\lambda \int_{\Sigma_+^\phi} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2, \end{aligned} \quad (2.89)$$

Por (2.38) e (2.42) temos que

$$\begin{aligned} C |\mathcal{X}_{Q_0}(w)| + C \|R(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 & \leq CCs\lambda^3 \int_{Q_0} \varphi^2 |w|^2 + C\gamma^2 s^2 \lambda^2 \int_{Q_0} \varphi^2 L(\phi)^2 |w|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} s^3 \lambda^3 \int_{Q_0} \varphi^3 |w|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|w\|_{\Omega_0, \varphi} \end{aligned} \quad (2.90)$$

para todo  $s \geq s_0 = 2 \min\{CC, K\}$ , onde  $CL(\phi) \leq K$ .

Concluimos, então, de (2.89) e (2.90), que

$$\begin{aligned}
& \|P_1(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|P_2(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|w\|_{\Omega_0, \varphi} \\
& \leq C \|P(w)\|_{L^2(Q_0)}^2 + C \|w\|_{B_\varepsilon(x_0), \varphi} + Cs\lambda \int_{\Sigma_+^{\phi}} \varphi \left| a_2 \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

### 2.3.5 Eliminando o termo em $B_\varepsilon(x_0)$

Neste último passo, iremos remover a integral em  $B_\varepsilon(x_0)$  do lado direito de (2.91). Antes de fazer isso, relembremos que  $x_0$  pode ser escolhido arbitrariamente em  $\Omega_1$ . Dessa forma, podemos tomar dois pontos diferentes em  $\Omega_1$  e ter duas respectivas desigualdades como em (2.91).

Sejam  $x_1, x_2$  dois pontos de  $\Omega_1$  e  $\phi^k, \varphi^k, w^k$  as funções associadas a cada  $x_k, k = 1, 2$ . Somando as duas desigualdades obtidas como em (2.91), temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \left( \|P_1^{\phi^k}(w^k)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|P_2^{\phi^k}(w^k)\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|w^k\|_{\Omega_0, \varphi^k} \right) \\
& \leq \sum_{k=1}^2 \left( C \|P^{\phi^k}(w^k)\|_{L^2(Q_0)}^2 + C \|w^k\|_{B_\varepsilon(x_k), \varphi^k} + Cs\lambda \int_{\Sigma_+^{\phi^k}} \varphi^k \left| a_2 \frac{\partial w^k}{\partial \nu} \right|^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Suponhamos que exista  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda_0 > 0$  tal que, para todo  $\lambda > \lambda_0$  seja verdade que

$$C\varphi^1 < \frac{1}{2}\varphi^2 \text{ em } B_\varepsilon(x_1) \text{ e } C\varphi^2 < \frac{1}{2}\varphi^1 \text{ em } B_\varepsilon(x_2). \tag{2.93}$$

Podemos supor  $C \geq 1$  em (2.91) e, conseqüentemente, em (2.92) e (2.93). Assim, (2.93) nos dá que

$$\varphi^1 < \frac{1}{2C}\varphi^2 < \varphi^2 \text{ em } B_\varepsilon(x_1) \text{ e } \varphi^2 < \frac{1}{2C}\varphi^1 < \varphi^1 \text{ em } B_\varepsilon(x_2), \tag{2.94}$$

o que implica que  $w_1 < w_2$  em  $B_\varepsilon(x_1)$  e  $w_2 < w_1$  em  $B_\varepsilon(x_2)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
C \|w^1\|_{B_\varepsilon(x_1), \varphi^1} &= Cs\lambda \int_{-T}^T \int_{B_\varepsilon(x_1)} (|\partial_t w^1|^2 + |\nabla w^1|^2) \varphi^1 + Cs^3\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{B_\varepsilon(x_1)} |w^1|^2 (\varphi^1)^3 \\
&\leq s\lambda \int_{-T}^T \int_{B_\varepsilon(x_1)} (|\partial_t w^1|^2 + |\nabla w^1|^2) C\varphi^1 + s^3\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{B_\varepsilon(x_1)} |w^1|^2 C^3 (\varphi^1)^3 \\
&\leq \frac{1}{2}s\lambda \int_{-T}^T \int_{B_\varepsilon(x_1)} (|\partial_t w^2|^2 + |\nabla w^2|^2) \varphi^2 + \frac{1}{8}s^3\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{B_\varepsilon(x_1)} |w^2|^2 (\varphi^2)^3 \\
&\leq \frac{1}{2} \|w^2\|_{\Omega_0, \varphi^2}.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Procedendo da mesma forma, vemos que

$$C \|w^2\|_{B_\varepsilon(x_2), \varphi^2} \leq \frac{1}{2} \|w^1\|_{\Omega_0, \varphi^1}. \quad (2.96)$$

Combinando (2.92), (2.95) e (2.96), e absorvendo os termos em  $B_\varepsilon(x_j)$ ,  $j = 1, 2$  encontramos (2.48).

Para a conclusão da prova da Desigualdade de Carleman, nos resta mostrar a existência de  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda_0 > 0$  que tornem possível (2.94) acontecer para  $\lambda > \lambda_0$ .

Observemos que

$$\begin{aligned} C\varphi^1 < \frac{1}{2}\varphi^2 &\iff 2C < e^{\lambda(\phi_2 - \phi_1)} \quad \text{em } B_\varepsilon(x_1) \quad \text{e} \\ C\varphi^2 < \frac{1}{2}\varphi^1 &\iff 2C < e^{\lambda(\phi_1 - \phi_2)} \quad \text{em } B_\varepsilon(x_2). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Logo, se mostramos que  $(\phi_2 - \phi_1) > \eta_1$  em  $B_\varepsilon(x_1)$  e  $(\phi_1 - \phi_2) > \eta_2$  em  $B_\varepsilon(x_2)$ , para algum  $\eta_1, \eta_2 > 0$  a demonstração estará concluída, pois, como a exponencial é uma função crescente, teríamos que

$$\begin{aligned} e^{\lambda(\phi_1 - \phi_2)} &> \lambda(\phi_1 - \phi_2) > \lambda\eta_1 > 2C \quad \text{em } B_\varepsilon(x_1) \quad \text{e} \\ e^{\lambda(\phi_2 - \phi_1)} &> \lambda(\phi_2 - \phi_1) > \lambda\eta_2 > 2C \quad \text{em } B_\varepsilon(x_2) \end{aligned} \quad (2.98)$$

para todo  $\lambda > \lambda_0 = 2C \frac{1}{\min\{\eta_1, \eta_2\}}$ .

De fato, denotando  $d = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ ,  $\alpha_j = d(x_j, \Gamma_1)$  e  $D_j = \max_{z \in \Gamma_1} |x_j - z|$  obtemos que

$$\begin{aligned} \phi^j(x, t) &= \eta(x) \frac{\bar{a}}{\rho(x_j)^2} |x - x_j|^2 - \beta t^2 + M \\ &\leq \frac{\bar{a}}{\rho(x_j)^2} \varepsilon^2 - \beta t^2 + M \\ &\leq \frac{\bar{a}}{\alpha_j^2} \varepsilon^2 - \beta t^2 + M \end{aligned} \quad (2.99)$$

e, também, que

$$\begin{aligned}
\phi^l(x, t) &= \eta(x) \frac{\bar{a}}{\rho(x_l)^2} |x - x_l|^2 - \beta t^2 + M \\
&\geq \frac{\bar{a}}{\rho(x_l)^2} d^2 - \beta t^2 + M \\
&\geq \frac{\bar{a}}{D_l^2} d^2 - \beta t^2 + M
\end{aligned} \tag{2.100}$$

para todo  $x \in B_\varepsilon(x_j)$  e  $\{j, l\} = \{1, 2\}$ , com  $\varepsilon < d$ .

Consequentemente, encontramos que

$$\begin{aligned}
\phi_2 - \phi_1 &\geq a \left( \frac{d^2}{D_2^2} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1^2} \right) = \eta_1 \quad \text{em } B_\varepsilon(x_1) \\
\phi_1 - \phi_2 &\geq a \left( \frac{d^2}{D_1^2} - \frac{\varepsilon^2}{\alpha_2^2} \right) = \eta_2 \quad \text{em } B_\varepsilon(x_2).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Para que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  sejam positivos, basta tomar  $\varepsilon < \min \left\{ \frac{d\alpha_1}{D_2}, \frac{d\alpha_2}{D_1} \right\}$ . ■

**Corolário 2.1.** *Sobre as mesmas hipóteses do Teorema 2.1, dado  $m \in \mathbb{R}$ , existe  $C = C(m) > 0$ ,  $s_0 > 0$  e  $\lambda_0 > 0$  tal que, para todo  $p \in L^\infty(\Omega)$ , com  $\|p\| \leq m$ , vale*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^2 \left( \|P_1^{\phi^k}(w^k)\|_{L^2(Q)}^2 + \|P_2^{\phi^k}(w^k)\|_{L^2(Q)}^2 + \|w^k\|_{Q, \varphi^k}^2 \right) \\
&\leq C \sum_{k=1}^2 \left( \int_Q e^{2s\phi^k} |L_p u|^2 + s\lambda \int_{\Sigma_+^{\phi^k}} \left| a_2 \frac{\partial w^k}{\partial \nu} \right|^2 \right),
\end{aligned} \tag{2.102}$$

para todo  $u \in X$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$  e  $s \geq s_0$ .

**Prova.** Lembrando que definimos  $L_p(u) = u'' - a\Delta u + pu$  em (2.34), temos que

$$\begin{aligned}
C \left\| P^{\phi^k}(w^k) \right\|_{L^2(Q)}^2 &= C \sum_{j=1}^2 \left( \int_{Q_j} e^{2s\varphi_j^k} |L(u_j)|^2 \right) \\
&= C \sum_{j=1}^2 \left( \int_{Q_j} e^{2s\varphi_j^k} |L_p(u_j) - pu_j|^2 \right) \\
&\leq C \sum_{j=1}^2 \left( \int_{Q_j} e^{2s\varphi_j^k} |L_p(u_j)|^2 + |pu_j|^2 \right) \\
&\leq C \int_{Q_0} e^{2s\varphi^k} |L_p(u)|^2 + Cm^2 \int_{Q_0} |w^k|^2 \\
&\leq C \int_{Q_0} e^{2s\varphi^k} |L_p(u)|^2 + \frac{1}{2} s^3 \lambda^3 \int_{Q_0} (\varphi^k)^3 |w^k|^2 \\
&\leq C \int_Q e^{2s\varphi^k} |L_p(u)|^2 + \frac{1}{2} \|w^k\|_{Q, \varphi^k}^2
\end{aligned} \tag{2.103}$$

para todo  $s \geq s_0 = 2Cm^2$ .

Usando (2.103) no Teorema 2.1, obtemos, após absorvermos o segundo termo da direita da última desigualdade pelo lado esquerdo de (2.48), o resultado desejado. ■

# Capítulo 3

## Problema Inverso

Neste capítulo, aplicaremos a desigualdade de Carleman para obter uma estimativa que nos mostrará que o do problema inverso está bem posto. Com isto, finalizaremos a demonstração da estabilidade do problema inverso de retomar o potencial  $p$  envolvido na equação (2.2), caracterizado pela aplicação

$$p|_{\Omega} \longmapsto a_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \times (0, T)}. \quad (3.1)$$

É verdade (*ver*[7, 15]) que, dados  $a(x)$ , uma função definida por partes constantes e  $p \in L^{\infty}(\Omega)$ , a equação

$$\begin{cases} u'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + p(x)u = g(x, t) & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u = h & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

possui solução única na classe  $u = u(p) \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ , sempre que  $h(\cdot, 0) = u_0$  em  $\Gamma$  e

$$g \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad h \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)), \quad u_0 \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad u_1 \in L^2(\Omega). \quad (3.3)$$

Além disso, tal solução depende continuamente dos dados iniciais e é tal que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ .

Conhecedores da existência de solução para o problema acima, para verificar que o problema

$$\begin{cases} y'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla y) + p(x)y = f(x)R(x, t) & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

também possui solução única, basta tomar o produto  $f(x)R(x, t)$  em  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , o que acontece se  $f \in L^2(\Omega)$  e  $R \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ .

### 3.1 Estimativa

Observemos que a unicidade da solução em (3.4) nos permite definir a aplicação

$$f|_\Omega \longmapsto \left. \frac{\partial y}{\partial \nu}(f) \right|_\Sigma, \quad (3.5)$$

pois, se  $f = g$ , o problema em questão terá a mesma solução e, conseqüentemente,

$$\left. \frac{\partial y}{\partial \nu}(f) \right|_\Sigma = \left. \frac{\partial y}{\partial \nu}(g) \right|_\Sigma \quad (3.6)$$

Mostraremos a estabilidade desta aplicação a fim de obter uma estimativa que nos levará à estabilidade do problema inverso.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\Omega_1 \subset \Omega$  um conjunto aberto, limitado e fortemente convexo com fronteira  $\Gamma_1$  de classe  $C^4$  e  $a_1 > a_2 > 0$ . Dados  $x_1, x_2 \in \Omega_1$ , seja  $R_j = \sup\{|x - y_j(x)|; x \in \Omega_2\}$ ,  $j = 1, 2$ , onde  $y_j$  é definido como em (2.10) com  $x_0 = x_j$ . Sejam  $\alpha_j = d(x_j, \Gamma_1)$ ,  $D_0 = \max\{\frac{R_1 + \alpha_1}{\alpha_1}, \frac{R_2 + \alpha_2}{\alpha_2}\}$  e  $\gamma, \beta$  satisfazendo (2.18), (2.54), (2.60) e (2.71). Se*

$$\beta < \frac{M}{T^2}, \quad \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m, \quad T > D_0 \sqrt{\frac{a_1}{\beta}}, \quad (3.7)$$

$$R \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega)) \quad \text{e} \quad 0 < r < |R(x, 0)| \quad \text{q.s. } \Omega.$$

então existe  $C > 0$  tal que, para todo  $f \in L^2(\Omega)$ , a solução  $y$  de (3.4) satisfaz

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\| \left\| a_2 \frac{\partial y}{\partial \nu} \right\| \right\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma))}^2. \quad (3.8)$$

**Prova.** Para cada  $f \in L^2(\Omega)$  e  $R \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ , seja  $y$  a solução de (3.4). Tomemos a extensão par de  $R$  e  $y$  ao intervalo  $(-T, T)$ . Assim, chamando  $z = y'$  e derivando (3.4)<sub>1</sub> em  $t$ , vemos que  $z$  satisfaz a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{ll} z'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla z) + p(x)z = f(x)R'(x, t) & \text{em } Q \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ z(0) = 0 & \text{em } \Omega \\ z'(0) = f(x)R(x, 0) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Multiplicando (3.9)<sub>1</sub> por  $z'$  e integrando em  $\Omega$ , encontramos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} a(x) |\nabla z(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \sqrt{p(x)} z(t) \right|^2 = \int_{\Omega} f(x) R'(x, t) z'(t). \quad (3.10)$$

Integrando (3.10) de 0 a  $t$ , por (3.9)<sub>3</sub>, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} f(x) R'(x, s) z'(s) ds + \frac{1}{2} |z'(0)|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) |\nabla z(t)|^2 + \frac{1}{2} \left| \sqrt{p(x)} z(t) \right|^2 + \frac{1}{2} |z'(t)|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{C_1}{2} \|z(t)\|^2, \\ &\geq \frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{C}{2} |z(t)|^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

pois  $a(x) \geq C_1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{C}{2} |z(t)|^2 &\leq \int_{\Omega} \int_0^t f(x) R'(x, s) z'(s) ds + \frac{1}{2} |z'(0)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t |f(x)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t |R'(x, s) z'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} |z'(0)|^2 \\ &\leq \frac{T}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t |R'(x, s) z'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(x) R(x, 0)|^2 \\ &\leq \frac{T}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |R'(x, s)|^2 |z'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \|R(x, 0)\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |R'(x, s)|^2 |z'(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (ver Lema 1.5) em (3.12) obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} |z'(t)|^2 + \frac{C}{2} |z(t)|^2 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\int_0^t |R'(x,s)|^2 ds} \\
&\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\|R'(x,t)\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}} \\
&\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Integrando (3.13) de  $-T$  a  $T$ , concluimos que

$$\|z\|_{H^1(-T,T;L^2(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Para aplicar a desigualdade de Carleman, precisamos de uma solução da equação da onda que se anule em  $t = \pm T$ . Assim, para  $0 < \delta < T$  consideremos a função  $\theta \in C_0^\infty(-T, T)$  tal que<sup>1</sup>

$$0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{e} \quad \theta(t) = 1, \quad \forall t \in (-T + \delta, T - \delta), \tag{3.15}$$

e definamos  $v = \theta z$ . É fácil ver que  $v$  satisfaz a equação

$$\left\{ \begin{array}{ll} v'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla v) + p(x)v = \theta f(x)R'(x,t) + 2\theta' y'' + \theta'' y' & \text{em } Q \\ v = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ v(0) = 0 & \text{em } \Omega \\ v'(0) = f(x)R(x,0) & \text{em } \Omega \\ v(\pm T) = v'(\pm T) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Tomemos  $j = 1, 2$ , e denotemos  $\bar{y}$  a função como definida em (2.10) e  $\phi$  a função peso correspondente ao ponto  $x_j \in \Omega_j$ . Notemos que

$$\phi(x,t) = \eta(x)c(x) |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M \leq \eta(x)c(x) |x - x_0|^2 + M = \phi(x,0), \tag{3.17}$$

para todo  $(x,t)$  em  $(-T, T) \times \Omega$ . Como

$$|x - x_j| - |\bar{y}(x) - x| \leq |x - x_j + \bar{y}(x) - x| = \rho(x) \tag{3.18}$$

implica

$$\frac{|x - x_j|}{\rho(x)} \leq 1 + \frac{|x - \bar{y}(x)|}{\rho(x)} \leq 1 + \frac{R_j}{\alpha_j} \leq D_0, \tag{3.19}$$

---

<sup>1</sup>Uma função desse tipo já foi apresentada no Exemplo 1.1.

então, pela escolha de  $T > D_0 \sqrt{\frac{a_1}{\beta}}$ ,

$$\begin{aligned}\phi(x, \pm T) &= \eta(x) \frac{\bar{a}}{\rho(x)^2} |x - x_0|^2 - \beta T^2 + M \\ &\leq a_1 D_0^2 - \beta T^2 + M < M \leq \phi(x, 0) \quad \forall x \in \Omega.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Logo, para  $\delta > 0$  pequeno o suficiente, é também verdade que

$$\phi(x, t) < M \leq \phi(x, 0) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [-T, -T + \delta] \cup [T - \delta, T].\tag{3.21}$$

De agora em diante, denotaremos a constante genérica  $C$  dependendo apenas de  $\Omega, T, \beta, \theta, x_1, x_2, \delta, s_0$  e  $\lambda_0$ , mas independente de  $s > s_0$  e  $\lambda < \lambda_0$ .

Por (3.7), (3.14) e, como  $f \in L^2(\Omega)$ , temos que o lado direito da igualdade (3.16)<sub>1</sub> pertence a  $L^2(Q)$ . Definindo  $\varphi = e^\phi$ ,  $w_j = e^{s\varphi} v_j$  como na prova do Teorema 2.1 e observando (3.16), verificamos que  $v \in X$ . Assim, temos permissão para utilizar o Corolário 2.1 para o problema (3.16).

Ainda como na prova do Teorema 2.1, temos  $P_1(w) = w'' - a\Delta w + s^2 \lambda^2 \varphi^2 E(\phi)w$ . Por (3.16)<sub>5</sub>, obtemos

$$\begin{aligned}\langle P_1 w_j, w'_j \rangle_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} &= \int_{-T}^0 \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w'_j|^2 + a_j \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_j\|^2 + s^2 \lambda^2 \int_{Q_j} \varphi^2 E(\phi_j) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_j|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} |w'_j(0)|^2 - a_j \frac{1}{2} \|w_j(-T)\|^2 + s^2 \lambda^2 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} E(\phi_j) \varphi^2 \lambda \phi' |w_j|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |w'_j(0)|^2 - C s^2 \lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} \varphi^3 |w|^2,\end{aligned}\tag{3.22}$$

Como  $w'(0) = e^{s\varphi(0)} v'(0) = e^{s\varphi(0)} f(x)R(x, 0)$  e  $|R(x, 0)| \geq r$ , temos, por (3.22), que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^2 \left( \langle P_1(w_j), w'_j \rangle_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} + C s^2 \lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} \varphi^3 |w_j|^2 \right) &\geq \int_{\Omega} |e^{s\varphi(0)} f(x)R(x, 0)|^2 \\ &\geq r^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |f(x)|^2.\end{aligned}\tag{3.23}$$

---

<sup>2</sup>Tal escolha ainda é possível considerando (2.54) e (2.71)

Para aplicar a Desigualdade de Carleman (Corolário 2.1), consideramos as funções peso  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , associadas a  $x_1$  e  $x_2 \in \Omega_1$ , respectivamente. Aplicando (3.23) para  $w_j^k = e^{s\varphi^k} v_j$ ,  $j = 1, 2$ , conseguimos que

$$\sum_{j=1}^2 \left( \langle P_1(w_j^1), (w_j^1)' \rangle_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} + Cs^2\lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} (\varphi^1)^3 |w_j^1|^2 \right) \geq r^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi^1(0)} |f(x)|^2. \quad (3.24)$$

e

$$\sum_{j=1}^2 \left( \langle P_1(w_j^2), (w_j^2)' \rangle_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} + Cs^2\lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} (\varphi^2)^3 |w_j^2|^2 \right) \geq r^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi^2(0)} |f(x)|^2. \quad (3.25)$$

Somamos (3.24) e (3.25) obtemos que

$$\begin{aligned} & r^2 \int_{\Omega} \left( e^{2s\varphi^1(0)} + e^{2s\varphi^2(0)} \right) |f(x)|^2 \\ & \leq C \sum_{j,k=1}^2 \left( \langle P_1(w_j^k), \partial_t w_j^k \rangle_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} + s^2\lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} (\varphi^k)^3 |w_j^k|^2 \right) \\ & \leq C \sum_{j,k=1}^2 \left( \|P_1(w_j^k)\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} \|\partial_t w_j^k\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)} + s^2\lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} (\varphi^k)^3 |w_j^k|^2 \right) \\ & \leq C \sum_{j,k=1}^2 \left( \frac{1}{2\sqrt{s}} \|P_1^{\varphi^k} w_j^k\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)}^2 + \frac{\sqrt{s}}{2} \|\partial_t w_j^k\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)}^2 + s^2\lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} (\varphi^k)^3 |w_j^k|^2 \right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \sum_{j,k=1}^2 \left( \|P_1^{\varphi^k} w_j^k\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)}^2 + \|\partial_t w_j^k\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)}^2 + s^3\lambda^3 \int_{-T}^0 \int_{Q_j} (\varphi^k)^3 |w_j^k|^2 \right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \sum_{j,k=1}^2 \left( \|P_1^{\varphi^k} w_j^k\|_{L^2((-T,0) \times \Omega_j)}^2 + \|w_j^k\|_{Q_j, \varphi^k} \right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \sum_{k=1}^2 \left( \|P_1^{\varphi^k} w^k\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|P_2^{\varphi^k} w^k\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|w^k\|_{Q_0, \varphi^k} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora, aplicando o Corolário 2.1, encontramos que

$$r^2 \int_{\Omega} \left( e^{2s\varphi^1(0)} + e^{2s\varphi^2(0)} \right) |f(x)|^2 \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \sum_{k=1}^2 \left( \int_Q e^{2s\phi^k} |L_p v|^2 + s\lambda \int_{\Sigma_+^{\phi^k}} \varphi^k \left| a_2 \frac{\partial w^k}{\partial \nu} \right|^2 \right). \quad (3.27)$$

Por outro lado, como  $\theta \leq 1$  e, em  $[-T + \delta, T - \delta]$ ,  $\theta' = 0$  então, das estimativas (3.14), (3.17) e (3.21), obtemos, para  $k = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{2s\phi^k} |L_p v|^2 &= \int_Q e^{2s\phi^k} |\theta f R' + 2\theta' y'' + \theta'' y'|^2 \\
&\leq C \int_Q e^{2s\phi^k} |f|^2 |R'|^2 + C \int_Q e^{2s\phi^k} (|\theta' z'|^2 + |\theta'' z|^2) \\
&\leq C \int_Q e^{2s\phi^k(0)} |f|^2 |R'|^2 + C \left( \int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^T \right) \int_{\Omega_0} e^{2se^{\lambda M}} C (|z'|^2 + |z|^2) \\
&\leq C \|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega)_0)} \int_{\Omega} e^{2s\phi^k(0)} |f|^2 + C e^{2se^{\lambda M}} \|z\|_{H^1(-T,T;\Omega)}^2 \\
&\leq C \int_{\Omega} e^{2s\phi^k(0)} |f|^2 + C e^{2se^{\lambda M}} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C \int_{\Omega} e^{2s\phi^k(0)} |f|^2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.27) e (3.28), lembrando que  $\Sigma_+^{\phi^k} \subset \Sigma$  para  $k = 1, 2$  e  $\left| \frac{\partial w^k}{\partial \nu} \right| = e^{s\phi^k} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|$  em  $\Sigma$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
r^2 \int_{\Omega} \left( e^{2s\phi^1(0)} + e^{2s\phi^2(0)} \right) |f(x)|^2 \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{s}} \sum_{k=1}^2 \left( \int_{\Omega} e^{2s\phi^k(0)} |f(x)|^2 + s\lambda \int_{\Sigma_+^{\phi^k}} \varphi^k \left| a_2 \frac{\partial w^k}{\partial \nu} \right|^2 \right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{s}} \sum_{k=1}^2 \left( \int_{\Omega} e^{2s\phi^k(0)} |f(x)|^2 + s\lambda \int_{\Sigma} \varphi^k e^{2s\phi^k} \left| a_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 \right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{s}} \int_{\Omega} \left( e^{2s\phi^1(0)} + e^{2s\phi^2(0)} \right) |f(x)|^2 + C\sqrt{s}\lambda \int_{\Sigma} \left( \varphi^1 e^{2s\phi^1} + \varphi^2 e^{2s\phi^2} \right) \left| a_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tomando  $s > s_0 = \left( \frac{C}{r^2-1} \right)^2$ , o termo da esquerda pode absorver o primeiro termo da direita. Observando que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( e^{2s\phi^1(0)} + e^{2s\phi^2(0)} \right) |f(x)|^2 &\geq \int_{\Omega} (2s\phi^1(0) + 2s\phi^2(0)) |f(x)|^2 \\
&\geq \int_{\Omega} (2s\lambda\phi^1(0) + 2s\lambda\phi^2(0)) |f(x)|^2 \\
&\geq 2\sqrt{s}\lambda \int_{\Omega} |f(x)|^2,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

concluimos que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 \leq \frac{C}{2} \int_{\Sigma} \left( \varphi^1 e^{2s\varphi^1} + \varphi^2 e^{2s\varphi^2} \right) \left| a_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2. \quad (3.31)$$

Assim, fixando  $s_C > s_0$  e  $\lambda_C > \lambda_0$ , como  $\phi_k$  e  $\theta$  são limitadas em  $\Sigma$  e  $\frac{\partial z}{\partial \nu}$  é uma extensão par com respeito a  $t \in [-T, T]$ , de (3.31), concluimos que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 \leq \frac{C}{2} \int_{\Sigma} \left| a_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \partial_t \left( a_2 \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) \right|^2 \leq C \left\| a_2 \frac{\partial y}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))}^2. \quad (3.32)$$

O que prova o resultado. ■

## 3.2 Estabilidade e Unicidade do Problema Inverso

Finalmente, cumpriremos a meta deste trabalho: mostrar a unicidade e estabilidade do problema inverso. Em outras palavras:

**Teorema 3.2.** *Seja  $\Omega_1 \subset \Omega$  um conjunto aberto, limitado e fortemente convexo com fronteira  $\Gamma_1$  de classe  $C^4$  e  $a_1 > a_2 > 0$ . Existe  $T_0 > 0$  tal que, dado  $T > T_0$ , se  $p \in L^\infty(\Omega)$ ,  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $u_1 \in L^2(\Omega)$  e  $r > 0$  satisfazem*

- $|u_0(x)| \geq r > 0$  quase sempre em  $\Omega$ ,
- $u(p) \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ ,

então, dado um conjunto limitado  $\mathcal{U} \subset L^\infty(\Omega)$ , existe uma constante

$C = C(a_1, a_2, \Omega_1, \Omega_2, T, \|p\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u(p)\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}, \mathcal{U}, r) > 0$  tal que

$$\|p - q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| a_2 \frac{\partial u(p)}{\partial \nu} - a_2 \frac{\partial u(q)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))}. \quad (3.33)$$

para todo  $q \in \mathcal{U}$ , onde  $u(p)$  e  $u(q)$  são soluções de (2.2) com potencial  $p$  e  $q$ , respectivamente.

**Prova.** Seja  $\tilde{y} = u(q) - u(p)$ . Fazendo a diferença entre (2.2)<sub>1</sub> em relação a  $u(q)$  e  $u(p)$ , temos que  $\tilde{y}'' - \text{div}(a(x)\nabla\tilde{y}) + qu(q) - pu(p) = 0$ , tomando  $f = p - q$  e  $R = u(p)$ , encontramos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{y}'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla\tilde{y}) + q\tilde{y} = f(x)R(x,t) & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \tilde{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ \tilde{y}(0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \tilde{y}'(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Como, por hipótese,  $R(x, t) = u(p) \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$  e  $|R(x, 0)| = |u(x, 0)| > r > 0$ , dado qualquer  $\mathcal{U} \subset L^\infty(\Omega)$  limitado por uma constante  $m$  com  $p \in \mathcal{U}$ , tomando  $T_0 = D_0\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta}}$ , como feito no Teorema 3.1, concluimos a prova. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Space*, London, Academic Press, (1975).
- [2] BAUDOIN, L., MERCADO, A. and OSSES, A., *A global Carleman estimate in a transmission wave equation and application to a one-measurement inverse problem*, Institute of Physics - IOP, Inverse Problems, 23 257, (2007).
- [3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York, Springer, (2010).
- [4] do CARMO, Manfredo Perdigão, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Rio de Janeiro, SBM, (2010).
- [5] CASTRO, C. and ZUAZUA, E., *Concentration and lack of observability of waves in highly heterogeneous media*, Arch. Ration. Mech. Anal., 164 39-72, (2002).
- [6] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, McGraw-Hill, (1955).
- [7] DAUTRAY, R. and LIONS J-L., *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, Evolution: semi-groupe, variationnel vol 8, Paris, Masson, (1988).
- [8] EGOROV, Y. V. and SHUBIM. A., *Partial Differential Equations I*, Foundations of the Classical Theory, Springer-Verlag, Translated from Russian by R. Cooke, 30.

- [9] ENGL, H. W., Hanke, M. & NEUBAUER, A., *Regularization of Inverse Problems: Mathematics and its Applications*, Kluwer, (1956).
- [10] HOFFMAN, K. and KUNZE, R., *Linear Algebra*, New Jersey, Prentice-Hall (1971).
- [11] de HOOP, M., *Microlocal analysis of seismic in inverse scattering*, Inside Out: Inverse Problems and Applications. Math. Sci. Res. Inst. Publ. vol 47, Cambridge, Cambridge University Press, pp 219-96, (2003).
- [12] IMANUVILOV, O Yu and YAMAMOTO, M., *Determination of a coefficient in an acoustic equation with a single measurement*, Inverse Problems, 19 157-71, (2003).
- [13] LIMA, E.L., *Curso de Análise vol. 2*, Rio de Janeiro, IMPA, (2009).
- [14] LIONS, J-L., *Controlabilité exacte, perturbation et stabilisation de Systèmes Distribués*, vol 1, Paris, Masson, (1998).
- [15] LIONS, J-L. and MAGENES, E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Berlin, Springer, (1972).
- [16] LIONS, J-L. et MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, vol. 1, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, (1968).
- [17] MARCIA, F. and ZUAZUA, E., *On the lack of controllability of wave equations: a Gaussian beam approach*, Asymptotic Anal., 32 1-26, (2002).
- [18] MEDEIROS, Luiz Adauto da J. e MIRANDA, Manuel A. Milla, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, UFRJ/IM, (2011).
- [19] MEDEIROS, Luiz Adauto da J. e RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [20] UEL, J. P., *Global Carleman Inequalities for the Wave Equation and Applications to Controllability and Inverse Problems*, Lectures notes used in advances school Control

of Solids and Structures: Mathematical Modelling and Engineering Applications at the C.I.S.M. in Udine in June 2004 and to a part of D.E.A. course at the University Pierre et Marie Curie in 2003-2004.

- [21] SCHWARTZ, L., *Théorie des Distributions*, Hermann, (1966).
- [22] SUGGS, J. D., *Decay for nonlinear wave equations with variable coefficients*, University of Tennessee Honors, Thesis Projects, (2009).
- [23] VELHO, Haroldo F. de Campos, *Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações*, Minicurso do IV Encontro de Modelagem Computacional, Nova Friburgo, Rio de Janeiro.