

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Grupos Discretos no Plano Hiperbólico

por

Carlos Antonio Guimarães Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Agosto/2013

João Pessoa - Pb

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Grupos Discretos no Plano Hiperbólico

por

Carlos Antonio Guimarães Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013

João Pessoa - Pb

S586g Silva, Carlos Antonio Guimarães Silva.

Grupos Discretos no Plano Hiperbólico/ Carlos Antonio
Guimarães Silva. – João Pessoa: [s.n.], 2013.

72f.

Orientador : Antônio de Andrade e Silva.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Transformações de Möbius. 3. Espaços
Hiperbólicos. 4. Grupos Fuchsianos

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Grupos Discretos no Plano Hiperbólico

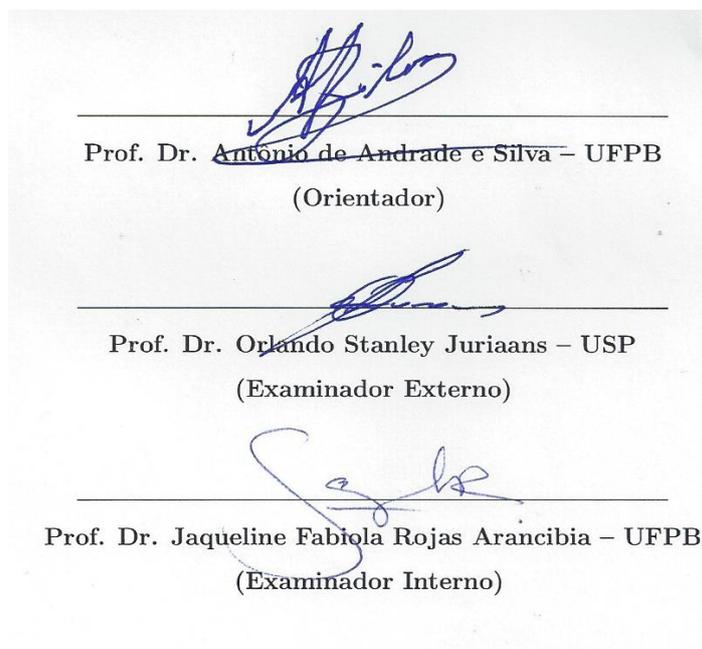
por

Carlos Antonio Guimarães Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática
- CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:



Agosto/2013

Agradecimentos

- A Deus, por tudo que ele representa pra mim.
- Ao meu Orientador, Professor Dr. Antônio de Andrade e Silva, pela sua compreensão, paciência e dedicação em todos os momentos.
- Aos Professores Dr. Orlando Stanley e Prof^a. Dr^a. Jacqueline Fabíola, pela compreensão e confiança.
- A todos os demais Professores do Departamento de Matemática-UFPB.
- Aos meus amigos e amigas da UFPB que tanto me ajudaram direta e indiretamente.
- A minha Mãe Marluce Guimarães(in memória) e a minha Tia Irmã Suzana(in memória), que tanto batalharam e me incentivaram para os estudos.
- A todos os meus familiares que acreditaram em mim, e sempre me incentivaram para nunca desistir e lutar até o final.
- Em especial aos meus filhos Renan Carlos e Rafaella Kamilly. Que sirva como exemplos para eles. A minha perseverança e dedicação em meus objetivos.

Dedicatória

*A Deus. Sem sua força,
nada teria conquistado.*

*A você Karen,
pela força que sempre me deu.*

Resumo

Definir uma generalização do conceito de transformação de Möbius e construir uma teoria indutiva do que venha a ser um espaço hiperbólico de dimensão n . Essa teoria indutiva nos permite que se iniciando com $n = 1$, juntamente com a noção de extensão de Poincaré, construir uma cadeia de grupos $GM(n)$ de transformação de Möbius e os espaços hiperbólicos \mathbb{H}^2 associados.

Veremos fórmulas explícitas para os bissetores de Poincaré em dimensão 2. E que nos modelos de bola do espaço hiperbólico, esses bissetores coincidem com as esferas isométricas das isometrias.

Iremos usar fórmulas explícitas dos bissetores, para obter-se um algoritmo, o DAFC, para obtenção de geradores para grupos Fuchsianos, que será nosso grupo em estudo.

Abstract

Set a generalization of Möbius transformation and build a theory of inductive that may be an n -dimensional hyperbolic space. This theory allows for the inductive starting with $n = 1$, together with the extension notion of the Poincaré build a chain groups $GM(n)$ transformation Möbius and spaces hyperbolic \mathbb{H}^2 members.

We will see explicit formulas for the Poincaré bisectors in size 2. And may on models of hiperbolic space ball these bisectors coincide with the isometric spheres of isometries.

We will be using explicit formulas of bisectors, to ge yourself an algorithm, the DAFC, to obtain generators for Fuchsianos groups, which will be our study group.

Sumário

Introdução	ix
1 Geometria Hiperbólica	1
1.1 Números Complexos	1
1.2 O Plano Complexo Estendido	8
1.3 Transformações de Möbius	15
1.4 Ação de Grupos	27
2 O Plano Hiperbólico	38
2.1 A Métrica Hiperbólica	38
2.2 O Disco de Poincaré	48
3 Grupos Fuchsianos	54
3.1 Os Bissetores de Poincaré	54
3.2 Domínios Dirichlet e Ford	63
3.3 O DAFC Algoritmo	67
Referências Bibliográficas	68

Introdução

Histórico

No século dezenove, Lobachevsky (1792-1856) em 1820, Gauss (1777-1855) e Bolyai (1802-1860) em 1823, descobriram que poderiam obter uma teoria matemática “consistente” partindo de um postulado que afirma a existência de infinidade de retas paralelas contendo P .

Postulado de Lobachevsky-Gauss-Bolyai - *Dada uma reta r e um ponto P fora de r , existem pelo menos duas retas s e t que contém P e são paralelas à reta r .*

Um modelo para esta geometria é dado pelo o semiplano

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

em que as retas são semi-retas e semicírculos perpendiculares à reta que determina o semiplano. Outro modelo é dado pelo disco de Poincaré

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

O desenvolvimento da Geometria Hiperbólica iniciou-se com o trabalho de Poincaré e seguido pelo trabalho de Gromov, entre outros, os quais proporcionaram ramificações em diversas áreas.

Em *Poincaré Bisectors in Hyperbolic Spaces* [9] está provado que no espaço hiperbólico de dimensão 2, os círculos isométricos nos semiplanos, são os bissetores de Poincaré. Estes foram usados para obter fórmulas explícitas para os bissetores de Poincaré, no espaço hiperbólico de dimensão 2. Usando estas fórmulas, foram encontrados geradores para grupos distintos de divisão de álgebra.

Dois problemas interessantes são os de decidir quando um domínio fundamental de

Ford, coincide com um domínio fundamental de Poincaré(chamando de *domínio de Dirichlet-Ford* ou *domínios DF*) e quando um domínio fundamental de Poincaré tem mais que um centro(chamado de domínio Dirichlet Duplo ou domínios DC). Estes problemas foram citados em *Dirichlet-Ford Domains and Arithmetic Reflection Groups* [7] e resolvidos, no mesmo artigo, para os grupos Fuchsianos. Em particular, está provado que não existem exemplos de cocompactos neste caso. Em *Poincaré Bisectors in Hyperbolic Spaces* [9], uma prova foi mostrada e um critério algébrico foi estabelecido, que o conjunto de side-pairing transformations ou transformações de emparelhamento, deve satisfazer. Na verdade, verifica-se que no caso Fuchsiano, esses dois problemas têm soluções semelhantes (*Dirichlet-Ford Domains and Arithmetic Reflection Groups* [7]), e restava ver o que acontece no caso Kleiniano, que não vai ser nosso objetivo.

Nosso principal resultado neste trabalho, é resolver os problemas acima mencionados para os grupos Fuchsianos e mostrar que eles são idênticos. No nosso caso, a diferença está no número de possibilidades de aplicação ortogonais lineares de A e em como escrever uma isometria hiperbólica $\gamma = A\sigma$, onde σ é a reflexão no círculo isométrico. Ainda no caso Fuchsiano, somente uma reflexão aparece, ou seja, a reflexão no eixo imaginário. Primeiramente,daremos uma descrição de A , e usaremos isto para mostrar que, em um domínio de Ford, todas as aplicações lineares, resultantes das transformações de emparelhamentos, tem um autovetor comum. Se o grupo é livre de torção, então a direção deste autovetor determina um vértice ideal. Juntamente com os resultados de *Poincaré Bisectors in Hyperbolic Spaces* [9], obtém-se uma caracterização algébrica, em termos de um conjunto de transformações de emparelhamento dos grupos Fuchsianos, tendo um domínio de Ford. Uma parte para resolver os problemas acima citados, é estudarmos a simetria do seu domínio fundamental e derivar algumas consequência do fato de que os círculos isométricos nos semiplanos de espaço hiperbólico, são bissetores de Poincaré em qualquer dimensão.

Seguindo o caminho e as ideias de matemáticos como Poincaré e Gromov, estudaremos uma área de pesquisa com várias ramificações em diversas áreas.

Inicialmente, veremos uma rápida abordagem sobre a construção do conjunto dos números complexos, projeção estereográfica, transformação de Möbius, as ações de grupos e conjuntos de geradores para um grupo Γ . Em seguida, apresentaremos o plano hiperbólico e suas principais propriedades. Além das definições sobre os Domínios Fun-

damentais.

Finalizando com o Capítulo 3, veremos fórmulas explícitas para os bissetores de Poincaré, sem as quais, existiam dificuldades teóricas ao se aplicar a teoria. Assim, vamos ter que no modelo de bola do espaço hiperbólico, os bissetores de Poincaré coincidem com as esferas isométricas das isometrias

Teremos uma consequência do estudo do bissetor de uma isometria γ , chamada aqui de Σ_γ , que é a localização geométrica de Σ_γ e $\Sigma_{\gamma^{-1}}$, que irão determinar se γ é elíptico, parabólico ou hiperbólico.

Mostraremos que usando as fórmulas explícitas dos bissetores, obtemos um algoritmo, o DAFC, para obtermos geradores para os grupos Fuchsianos.

Alguns problemas foram abordados em *Dirichlet-Ford Domains and Arithmetic Reflection Groups* [7], e resolvidos no caso Fuchsiano. Daremos uma visão baseado nos artigos [4] e [9]. Tal visão, nos mostra a utilidade do conhecimento das fórmulas explícitas dos bissetores de Poincaré.

Capítulo 1

Geometria Hiperbólica

Inicialmente, iremos apresentar alguns conceitos e resultados de Geometria Hiperbólica, que serão utilizados em todo este texto. Vamos apenas, nos situar com algumas ferramentas, assim como não é nosso objetivo, efetuar todas as demonstrações de todos os resultados.

A princípio, trataremos sobre as construções dos números complexos e também estudaremos a projeção estereográfica. Em seguida, veremos as transformações de Möbius e encerraremos essa primeira seção com as ações de grupos. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [1, 3]

1.1 Números Complexos

Definimos \mathbb{C} , os números complexos, como o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a, b \in \mathbb{R}$, e em que são definidas operações:

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
2. Multiplicação: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

Com estas operações, \mathbb{C} satisfaz todos os axiomas para um domínio, ou seja, \mathbb{C} satisfaz as leis

- (a) Associativa.
- (b) Comutativa.
- (c) Distributiva.

Além disso, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são identidades para a adição e multiplicação, respectivamente, e existem inversos aditivos e multiplicativos para cada elemento diferente de zero em \mathbb{C} . Se o número complexo for $(a, 0)$, escrevemos a . Esta aplicação $a \rightarrow (a, 0)$, define uma imersão de \mathbb{R} em \mathbb{C} , para que consideramos \mathbb{R} um subconjunto de \mathbb{C} . Se usarmos $i = (0, 1)$, teremos:

$$(a, b) = a + bi$$

Observe que $i^2 = -1$, de modo que $z^2 + 1 = 0$ possui uma raiz em \mathbb{C} . Para cada z em \mathbb{C} , teremos:

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i),$$

ou seja, se z e w são números complexos, teremos:

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

Fazendo z e w , números reais a e b , obtemos:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Esta é a fórmula, para o inverso de um número complexo.

Escrevendo $z = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, chamamos a e b , as *partes, real e imaginárias* de z , e denotamos por:

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ e } b = \operatorname{Im}(z).$$

Vamos introduzir duas operações em \mathbb{C} . Se $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, então definimos para z

1. Valor Absoluto:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Conjugado:

$$\bar{z} = x - iy$$

Assim, se $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, com $z \neq 0$, então:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Observando a definição de números complexos, temos que cada z em \mathbb{C} , pode ser identificado com único ponto $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ em \mathbb{R}^2 . Ainda, a adição de números complexos é exatamente a lei da adição do espaço vetorial \mathbb{R}^2 . Se z e w estão em \mathbb{C} estes formam os dois lados de um paralelogramo, com $0, z$ e w como vértices, e o quarto vértice, pode ser $z + w$. Também temos que $|z - w|$ é a distância entre z e w .

Uma propriedade fundamental de uma função de distância, é que ela satisfaz a desigualdade triangular. Logo, essa desigualdade torna-se:

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|,$$

para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Usando que:

$$z_1 - z_2 = (z_1 - z_3) + (z_3 - z_2),$$

iremos mostrar apenas,

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \tag{1.1}$$

onde $z, w \in \mathbb{C}$. Note que se $z \in \mathbb{C}$, então

$$\operatorname{Re}(z) = x = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Assim,

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{e} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|.$$

Logo,

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z||w|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

A partir do qual, segue (1.1).

Essa é a chamada desigualdade triangular, porque se representarmos z e w no plano, em (1.1) nos diz que o comprimento de um dos lados do triângulo $[0, z, z + w]$ é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados (a menor distância entre dois pontos é uma linha reta).

Sendo $z = x + iy$ um ponto no plano complexo \mathbb{C} , este ponto z , possui coordenadas polares (r, θ) :

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Vemos que $r = |z|$ e θ é o ângulo entre o eixo real positivo e o segmento de reta entre 0 e z . O ângulo θ é chamado, argumento de z ($\theta = \arg(z)$).

Vamos introduzir a seguinte notação:

$$\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

sendo $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, teremos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)]. \end{aligned}$$

Pelas fórmulas para o seno e cosseno de dois ângulos, obtemos,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

Como alternativa,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

módulo 2π , e por indução, temos para:

$$z_k = r_k \operatorname{cis} \theta_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

que

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \cdots + \theta_n).$$

Em particular,

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta), \tag{1.2}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Além disso, se $z \neq 0$, então

$$z[r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)] = 1,$$

de modo que (1.2), é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$, se $z \neq 0$. Ainda de (1.2), um caso especial, nos dá a Fórmula de De Moivre:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Agora, considerando que um número complexo $a \neq 0$ e $n \geq 2$, podemos encontrar um número z , que satisfaz $z^n = a$. Seja $|a| = \operatorname{cis} \alpha$, por (1.2), teremos:

$$z = |a|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha}{n} \right).$$

Mas, ainda podemos obter outra solução, porque:

$$w = |a|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha + 2\pi}{n} \right),$$

também satisfaz $w^n = a$. Com efeito, cada um dos números

$$|a|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \tag{1.3}$$

com $k = 0, \dots, n-1$, é uma n -ésima raiz de a . Por (1.2), concluimos que, para cada número diferente de zero a em \mathbb{C} , existem n raízes n -ésimas distintas de a . Essas raízes são dadas por (1.3).

Vejamos agora, uma rápida explanação sobre retas e semiplanos no plano complexo.

Seja L uma reta em \mathbb{C} . Sabendo que L é determinada através de um ponto em L e um vetor direção não nulo. Logo, se a é um ponto qualquer em L e seu vetor direção é b , então

$$L = \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}.$$

Desde que $b \neq 0$, isto nos dá, para um z em L , que:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - a}{b} \right) = 0.$$

De fato, se z é tal que:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) = 0,$$

então:

$$t = \left(\frac{z-a}{b} \right) \Rightarrow z = a + tb, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$L = \left\{ z : \operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) = 0 \right\}. \quad (1.4)$$

Para acharmos o lugar geométrico de um dos conjuntos:

$$\left\{ z : \operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) > 0 \right\}$$

ou

$$\left\{ z : \operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) < 0 \right\},$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que $|b| = 1$, pois

$$b \text{ e } \frac{1}{|b|}b$$

possuem a mesma direção. Se $a = 0$, pondo

$$\mathbb{H}_0 = \left\{ z : \operatorname{Im} \left(\frac{z}{b} \right) > 0 \right\}$$

e $b = cis\beta$, então

$$\frac{z}{b} = r cis(\theta - \beta).$$

Assim, $z \in \mathbb{H}_0$ se, e somente se, $\operatorname{sen}(\theta - \beta) > 0$, ou seja, quando $\beta < \theta < \pi + \beta$. Portanto, \mathbb{H}_0 é o semiplano inclinado para à esquerda da reta L , se estamos “caminhando ao longo de L na direção de b ”. Se fizermos

$$\mathbb{H}_a = \left\{ z : \operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) > 0 \right\},$$

então

$$\mathbb{H}_a = a + \mathbb{H}_0 := \{a + w : w \in \mathbb{H}_0\},$$

isto é, \mathbb{H}_a é a translação de \mathbb{H}_0 por a . Portanto, \mathbb{H}_a é o semiplano inclinado para à esquerda de L , confira Figura 1.1.

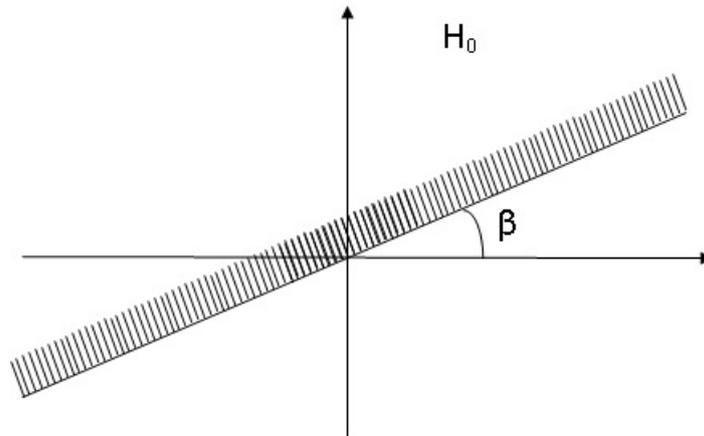


Figura 1.1: Semiplano Superior

Da mesma forma,

$$K_a = \left\{ z : \operatorname{Im} \left(\frac{z - a}{b} \right) < 0 \right\},$$

é o semiplano do lado direito de L .

Vamos finalizar esta seção com mais algumas informações sobre a reta L . O gráfico de L é dado pela equação

$$ax + by + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 \neq 0$. Assim, em coordenadas conjugadas, esta equação é equivalente a equação

$$\left(\frac{a - bi}{2} \right) z + \left(\frac{a + bi}{2} \right) \bar{z} + c = 0.$$

Pondo

$$\alpha = \frac{a + bi}{2} \text{ e } \gamma = c,$$

obtemos

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \gamma = 0.$$

Assim, se $\alpha = \bar{\alpha}$, então $b = 0$ e a reta será vertical. Se $\alpha \neq \bar{\alpha}$, então

$$m = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \alpha}i = -\frac{a}{b} \text{ e } d = \frac{\gamma}{\bar{\alpha} - \alpha}i = -\frac{c}{b}.$$

é a inclinação e o coeficiente linear de L . Mais geralmente, a equação

$$\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = -\frac{\gamma}{2},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, representa uma reta L se $\alpha \neq 0$, $\alpha = \bar{\beta}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Note que se $\gamma = 0$, então a reta passa pela origem.

1.2 O Plano Complexo Estendido

Muitas vezes, na análise complexa, temos que nos preocupar com funções que tornam-se infinitas como a variável que se aproxima de um determinado ponto. Para vermos essa situação, apresentaremos o *plano complexo estendido*

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty.$$

As regras de cálculo para o ponto no infinito ∞ são as seguintes:

1. $\frac{z}{\infty} = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $\frac{z}{0} = \infty$ e $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.
3. $\frac{\infty}{z} = \infty$ e $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observe que não definimos

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Além disso, o significado de ∞ em \mathbb{C} é diferente em \mathbb{R} , pois $i \cdot \infty$ ou $z \cdot \infty$, $z \neq 0$, devem possuir o mesmo significado.

Queremos também, introduzir uma função de distância \mathbb{C}_∞ , a fim de discutirmos as propriedades de continuidade de funções, assumindo o valor infinito. Para realizar esse objetivo e dar uma visão mais concreta de \mathbb{C}_∞ , que representa \mathbb{C}_∞ como sendo a esfera unitária em \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Seja $N = (0, 0, 1)$, ou seja, N é o polo norte em S^2 e a identificação de \mathbb{C} com

$$\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

de modo que \mathbb{C} corte S^2 ao longo do equador e para cada ponto z em \mathbb{C} , considerar o segmento de reta em \mathbb{R}^3 através de z e N . Isto intercepta, a esfera, exatamente no ponto $P \neq N$. Vemos que quando $|z| \rightarrow \infty$ o ponto P se aproxima de N . Logo, identificamos N e o ponto ∞ em \mathbb{C}_∞ . Portanto, \mathbb{C}_∞ é representada como a esfera S^2 , confira Figura 1.2

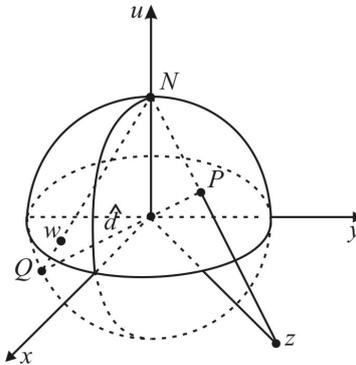


Figura 1.2: Projeção Estereográfica

Vamos mostrar explicitamente essa representação. Sejam $z = x + iy$ e $P = (x_1, x_2, x_3)$ o ponto correspondente a S^2 , encontraremos equações que expressam x_1 , x_2 e x_3 em termos de x e y . Note que a reta em \mathbb{R}^3 através de z e N , será dada por

$$\{tN + (1 - t)z : t \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$\{((1 - t)x, (1 - t)y, t) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.5)$$

Agora, podemos encontrar as coordenadas de P , se encontramos o valor de t em que a reta intercepta S^2 . Se t é esse valor, então:

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - t)^2 x^2 + (1 - t)^2 y^2 + t^2 \\ &= (1 - t)^2 |z|^2 + t^2, \end{aligned}$$

Logo,

$$1 - t^2 = (1 - t)^2 |z|^2.$$

Desde que $t \neq 1$ ($z \neq \infty$), obtemos

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

Neste caso,

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (1.6)$$

Para encontramos z , sendo dado o ponto P com $P \neq N$, definimos $t = x_3$ e utilizando (1.5), encontramos:

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Em vista da bijeção de \mathbb{C}_∞ sobre S^2 vamos melhorar a unificação dos conceitos em \mathbb{C}_∞ . Para isto, consideremos a função $J : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida como

$$J(z) = \begin{cases} z^{-1}, & \text{se } z \in \mathbb{C}^* \\ \infty, & \text{se } z = 0 \\ 0, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Então claramente J é bijetora e $J^2 = I$. Sejam $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ e

$$w = J(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Então

$$P = \pi(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

e

$$Q = \pi(w) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, -\frac{2y}{|z|^2 + 1}, -\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Assim, J induz uma função $\pi \circ J \circ \pi^{-1} : S^2 \rightarrow S^2$ definida como

$$(\pi \circ J \circ \pi^{-1})(P) = Q,$$

se $P \neq N$ e $P \neq S = (0, 0, -1)$. Se $P = N$, então

$$(\pi \circ J \circ \pi^{-1})(P) = (\pi J)(\infty) = \pi(0) = S.$$

Se $P = S$, então

$$(\pi \circ J \circ \pi^{-1})(P) = (\pi J)(0) = \pi(\infty) = N.$$

Portanto, $\pi \circ J \circ \pi^{-1}$ é uma bijeção de S^2 sobre S^2 . Neste caso, não vamos fazer distinção entre as funções J e $\pi \circ J \circ \pi^{-1}$, ou seja, identificamos \mathbb{C}_∞ com S^2 via π e vemos J como uma função de cada um destes dois espaços, confira o diagrama 1.3.

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\pi \circ J \circ \pi^{-1}} & S^2 \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{J} & \mathbb{C}_\infty \end{array}$$

Figura 1.3: Identificação de \mathbb{C}_∞ com S

Sejam X uma vizinhança de ∞ em \mathbb{C}_∞ e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ uma função. Diremos que φ é *contínua* em ∞ se

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \varphi(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z^{-1}) = \lim_{z \rightarrow 0} (\varphi \circ J)(z).$$

Por exemplo,

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $ad - bc \neq 0$ e $c \neq 0$, é contínua em ∞ , pois

$$\lim_{z \rightarrow 0} (\varphi \circ J)(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a + bz}{c + dz} = \frac{a}{c}.$$

Portanto, o comportamento de uma função $\varphi(z)$ na vizinhança de ∞ é equivalente ao comportamento da função $(\varphi \circ J)(z)$ na vizinhança de $z = 0$.

Definimos agora uma função de distância entre os pontos estendidos, teremos que, para $z, w \in \mathbb{C}$, o que define a distância entre eles é $d(z, w)$, que é a distância entre os pontos correspondentes P e Q em \mathbb{R}^3 . Se $P = (x_1, x_2, x_3)$ e $Q = (x'_1, x'_2, x'_3)$, então:

$$\widehat{d}(z, w) = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2}. \quad (1.7)$$

Como P e Q estão em S^2 temos que

$$\widehat{d}(z, w)^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3).$$

Ao utilizarmos (1.6), obtemos:

$$\widehat{d}(z, w) = \frac{2|z - w|}{[(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Analogamente,

$$\widehat{d}(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Uma *reflexão* sobre a reta

$$L = \{z \in \mathbb{C} : \langle z, \alpha \rangle = \operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = t\},$$

onde $t \in \mathbb{R}$, ao longo do vetor α é uma transformação linear $\varphi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\varphi_0(z) = z - 2 \frac{\langle z, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \alpha.$$

Além disso, $\varphi_0^2 = I$. Note que φ_0 pode ser estendida para \mathbb{C}_∞ do seguinte modo:

$$\varphi_0(z) = \begin{cases} z - 2 \frac{\langle z, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} \alpha & \text{se } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Assim, os pontos de $L \cup \{\infty\}$ são os pontos fixos de φ_0 . Em particular, se $L = i\mathbb{R}$, então, com $\alpha = \frac{a}{2}$,

$$\varphi_0(z) = -\bar{z}.$$

Seja C um círculo em \mathbb{C} , com centro α e raio $r > 0$. Uma *reflexão* ou uma *inversão* sobre C é uma função $w = \tau : \mathbb{C} - \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\begin{aligned} w &= \alpha + \frac{r^2}{\bar{z} - \alpha} \\ &= \alpha + r^2 \frac{z - \alpha}{|z - \alpha|^2}. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$|w - \alpha| = \frac{r^2}{|z - \alpha|} \Leftrightarrow |w - \alpha| |z - \alpha| = r^2,$$

ou seja, o produto das distâncias de z e w ao centro α é igual a r^2 . Além disso, como

$$\frac{w - \alpha}{z - \alpha} = \frac{r^2}{|z - \alpha|^2} \in \mathbb{R}_+^*$$

temos que z e w estão situados na mesma semi-reta de origem α . Os pontos z e w chama-se *pontos inversos* em relação a C , confira Figura 1.4.

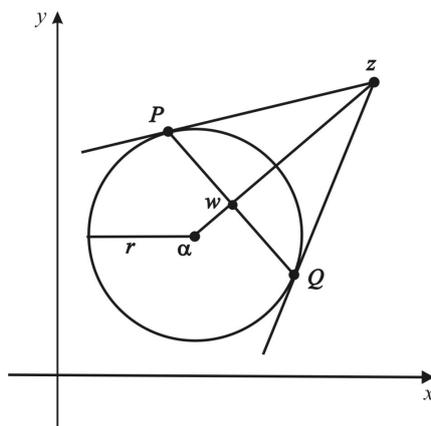


Figura 1.4: Inversão

Note que τ pode ser estendida para \mathbb{C}_∞ do seguinte modo:

$$\tau(z) = \begin{cases} \alpha + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} & \text{se } z \in \mathbb{C} - \{\alpha\} \\ \infty & \text{se } z = \alpha \\ \alpha & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Em particular, se $\alpha = 0$ e $r = 1$, então

$$\tau_C(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

é a função J do diagrama 1.3.

Seja $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Diremos que σ é uma *isometria* se

$$|\sigma(w) - \sigma(z)| = |w - z|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Diremos que σ é uma *transformação ortogonal* se σ é linear sobre \mathbb{R} e

$$\langle \sigma(w), \sigma(z) \rangle = \langle w, z \rangle, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Note que qualquer transformação ortogonal σ é uma isometria, pois

$$|\sigma(z)|^2 = \langle \sigma(z), \sigma(z) \rangle = \langle z, z \rangle = |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Teorema 1.1 *Seja $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. σ é uma isometria;
2. Existe $c \in \mathbb{C}$, com $|c| = 1$, tal que $\sigma(z) = cz + \sigma(0)$ ou $\sigma(z) = c\bar{z} + \sigma(0)$.

Demonstração. (1 \Rightarrow 2) Suponhamos que σ seja uma isometria. Então

$$|\sigma(1) - \sigma(0)| = |1 - 0| = 1.$$

Assim, $|c| = 1$, em que $c = \sigma(1) - \sigma(0)$. Consideremos a função $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\varphi(z) = c^{-1}(\sigma(z) - \sigma(0)).$$

Logo,

$$|\varphi(w) - \varphi(z)| = |\sigma(w) - \sigma(z)| = |w - z|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Como $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$ temos que

$$|\varphi(z)| = |z| \text{ e } |\varphi(z) - 1| = |z - 1|, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

de modo que $\operatorname{Re}(\varphi(z)) = \operatorname{Re}(z)$. Em particular, $\varphi(i) = \pm i$. Se $\varphi(i) = i$, então a função $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\psi(z) = -i\varphi(iz)$$

é uma isometria. Sendo $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, teremos

$$\operatorname{Re}(-i\varphi(iz)) = \operatorname{Re}(z),$$

ou seja, $\text{Im}(\varphi(z)) = \text{Im}(z)$. Portanto, $\varphi(z) = z$ e $\sigma(z) = cz + \sigma(0)$. O caso $\varphi(i) = -i$ é similar, com $\psi(z) = i\varphi(iz)$.

(2 \Rightarrow 1) É claro da definição. ■

Vamos denotar o conjunto de todas as isometrias de \mathbb{C} por $\text{Isom}(\mathbb{C})$. Note que $\text{Isom}(\mathbb{C})$ é um subgrupo de $\text{Sym}(\mathbb{C})$, o grupo de permutações de \mathbb{C} .

Corolário 1.1 *Seja $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Então σ é uma transformação ortogonal se, e somente se, existe $c \in \mathbb{C}$, com $|c| = 1$, tal que $\sigma(z) = cz$ ou $\sigma(z) = c\bar{z}$.* ■

Vamos denotar o conjunto de todas as transformações ortogonais de \mathbb{C} por $O(\mathbb{C})$. Note que $O(\mathbb{C})$ é um subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{C})$.

1.3 Transformações de Möbius

Uma transformação linear fracionária é uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Se

$$ad - bc \neq 0,$$

diremos que f é uma *transformação de Möbius*. Note que a condição $ad - bc \neq 0$ é necessária para que a transformação seja interessante, pois se $ad - bc = 0$, então

$$f(z) = \frac{a}{c}$$

seria a função constante. Neste caso, $D = ad - bc \neq 0$ chama-se *discriminante* de f . Note que f pode ser estendida para \mathbb{C}_∞ do seguinte modo

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{se } z \in \mathbb{C} \text{ e } z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & \text{se } c \neq 0 \text{ e } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{se } c \neq 0 \text{ e } z = \infty \\ \infty & \text{se } c = 0 \text{ e } z = \infty \end{cases}$$

Seja

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Então a transformação inversa

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

é claramente uma transformação de Möbius. Portanto, f é homeomorfismo de \mathbb{C}_∞ sobre \mathbb{C}_∞ . Além disso, a composição de transformação de Möbius é uma transformação de Möbius, pois

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ e } g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

então, com alguns cálculos,

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)},$$

com

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0.$$

Portanto, o conjunto das transformações de Möbius forma um grupo com a composição usual de funções e será denotado por

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

Observe que composição de transformação de Möbius corresponde a multiplicação de matrizes, pois se definirmos as matrizes de f e g como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

então

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

corresponde a transformação inversa f^{-1} , pois se $\lambda \in \mathbb{C}^*$, então

$$f(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d},$$

ou seja, os coeficientes a , b , c e d não são únicos. Em particular, para

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{D}},$$

obtemos

$$f(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d},$$

com

$$\lambda^2(ad - bc) = 1.$$

Portanto, não há perda de generalidade, em supor que as transformações de Möbius sejam normalizadas, isto é,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $ad - bc = 1$. Neste caso, temos duas transformações associadas uma a \mathbf{A} e outra a $-\mathbf{A}$.

As transformações de Möbius mais simples são:

1. $f(z) = az$, com $d = 1$ e $b = c = 0$.

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $f(z) = z + b$, com $a = d = 1$ e $c = 0$ (translação por b).

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $f(z) = \frac{1}{z}$, com $b = c = 1$ e $a = d = 0$. (inversão).

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note, em (1), que se $a = re^{i\theta}$, com $r = |a| > 0$, então f é uma homotetia seguida de uma rotação. Consequentemente, uma transformação afim

$$f(z) = az + b \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a composição de uma rotação, uma homotetia e uma translação, ou seja,

$$z \longrightarrow e^{i\theta}z \longrightarrow re^{i\theta}z \longrightarrow re^{i\theta}z + b = f(z).$$

Teorema 1.2 *Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Então f é a composição de inversões, reflexões, homotetias e rotações.*

Demonstração. Dado

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

Se $c = 0$, então $d \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

é uma transformação afim. Logo, f é a composição de uma rotação, uma homotetia e uma translação. Se $c \neq 0$, então

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{bc - ad}{c^2} \right) z_1 + \frac{a}{c} \\ z_1 &= z_2^{-1} \\ z_2 &= z + \frac{d}{c}, \end{aligned}$$

isto é, f é a composição de uma transformação afim, uma inversão e uma translação. Portanto, f é a composição de inversões, reflexões, homotetias e rotações. ■

Lema 1.1 *Sejam \mathcal{C} o conjunto de retas e círculos Euclidianos de \mathbb{C} e $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Então f induz uma permutação de \mathcal{C} , ou seja, $f(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$.*

Demonstração. É fácil verificar que a equação

$$\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = k,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq \beta$, representa um círculo se $k > 0$ e $k \neq 1$ e representa uma reta se $k = 1$. Seja $w = f(z) = az + b$ uma transformação afim. Então

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{a^{-1}w - a^{-1}b - \alpha}{a^{-1}w - a^{-1}b - \beta} \right| \\ &= \left| \frac{w - (b + a\alpha)}{w - (b + a\beta)} \right| \end{aligned}$$

representa um elemento de \mathcal{C} , ou seja, $f(E) \in \mathcal{C}$. Assim, $f(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$.

Agora, seja $w = f(z) = \frac{1}{z}$ uma inversão. Então

$$k = \left| \frac{\frac{1}{w} - \alpha}{\frac{1}{w} - \beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \left| \frac{w - \frac{1}{\alpha}}{w - \frac{1}{\beta}} \right|$$

representa um elemento de \mathcal{C} , ou seja, $f(E) \in \mathcal{C}$. Logo, $f(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. Portanto, pelo Teorema 1.2, $f(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$, para qualquer $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. ■

Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Então os pontos fixos de f são dados pela equação

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{com } z \neq -\frac{d}{c}$$

Assim, se f possui três pontos fixos, então $c = b = 0$ e $a = d$, pois essa equação possui no máximo duas raízes. Portanto,

$$f(z) = z,$$

ou seja, f é a função identidade.

Proposição 1.1 *Sejam (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) dois ternos ordenados de elementos distintos em \mathbb{C}_∞ . Então existe uma única $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Primeiro vamos determinar uma transformação Möbius

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tal que

$$S(z_1) = 0, \quad S(z_2) = 1 \quad \text{e} \quad S(z_3) = \infty.$$

Logo,

$$az_1 + b = 0, \quad \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = 1 \quad \text{e} \quad z_3 = -\frac{d}{c},$$

ou seja,

$$z_1 = -\frac{b}{a}, \quad z_2 = \frac{d-b}{a-c} \quad \text{e} \quad z_3 = -\frac{d}{c}.$$

Assim,

$$z_1 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{a}{c} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{e} \quad z_3 = -\frac{d}{c}.$$

Portanto,

$$S(z) = \frac{a}{c} \left(\frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

De modo análogo, existe uma transformação Möbius T tal que

$$T(w_1) = 0, \quad T(w_2) = 1 \quad \text{e} \quad T(w_3) = \infty.$$

Então existe $f = T^{-1} \circ S$ tal que

$$f(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para provar a unicidade, seja $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que $g(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$. Então

$$(g^{-1} \circ f)(z_i) = z_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Portanto, $g^{-1} \circ f = I$, ou seja, $f = g$. ■

Observação 1.1 *A função S da Proposição 1.1 pode ser estendida para \mathbb{C}_∞ do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad \text{se } z_1 = \infty, \\ S(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad \text{se } z_2 = \infty, \\ S(z) &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \text{se } z_3 = \infty. \end{aligned}$$

Seja

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

O traço de f é definido como

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(\mathbf{A}).$$

Pelo visto acima o traço não é invariante sob a multiplicação por escalar. Neste caso, usa-se

$$\text{tr}^2(f) = \frac{\text{tr}^2(\mathbf{A})}{\det \mathbf{A}}.$$

Mas, quando f é normalizada não há necessidade desta nova definição.

Lema 1.2 *Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) - \{I\}$ normalizada, isto é,*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $\det \mathbf{A} = 1$. Então:

1. O número de pontos fixos de f é igual ao número de autovalores distintos de A .
2. Se f tem um ponto fixo, então, a menos de conjugação, $f(z) = z + 1$.
3. Se f tem dois pontos fixos, então, a menos de conjugação, $f(z) = kz$.
4. Se f tem dois pontos fixos e $\text{tr}(f) \in \mathbb{R}$, então os autovalores de A têm módulo 1 se, e somente se, $\text{tr}(f) \in] - 2, 2[$.
5. Se $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) - \{I\}$, então f e g são conjugadas se, e somente se, $\text{tr}(f)^2 = \text{tr}(g)^2$.

Demonstração. (1) Já vimos que o número de pontos fixos de f é determinado pela equação

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{com } z \neq -\frac{d}{c}.$$

Logo, o discriminante desta equação é

$$\Delta = \text{tr}(f)^2 - 4.$$

Por outro lado, o polinômio característico da matriz associada \mathbf{A} é

$$\chi_A(z) = z^2 - \text{tr}(f)z + 1,$$

cujo discriminante também é

$$\Delta = \text{tr}(f)^2 - 4.$$

Portanto, o número de pontos fixos de f é igual ao número de autovalores distintos de A .

(2) Suponhamos que f tenha um único ponto fixo $\alpha \in \mathbb{C}$ e tome $\beta \in \mathbb{C}$, com $\beta \neq \alpha$.

Então

$$f(\beta) \neq \beta.$$

Pela Proposição 1.1, existe uma única $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que

$$h(\alpha) = \infty, \quad h(\beta) = 0 \quad \text{e} \quad h(f(\beta)) = 1.$$

Assim,

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \quad \text{com} \quad g(\infty) = \infty \quad \text{e} \quad g(0) = 1$$

Logo, $c = 0$, $b = d$ e pelo item (1) g é associada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

ou seja, $a = d = b = 1$, pois $\det \mathbf{A} = 1$. Portanto, $g(z) = z + 1$.

(3) Suponhamos que f tenha dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq \beta$. Então existe uma única $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que

$$h(\alpha) = \infty \quad \text{e} \quad h(\beta) = 0.$$

Assim,

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \quad \text{com} \quad g(\infty) = \infty \quad \text{e} \quad g(0) = 0.$$

Logo, pelo item (1), g é associada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$b = g(0) = 0$ e $ad = 1$, pois $\det \mathbf{A} = 1$. Portanto, $f(z) = kz$, com $k = a^2$.

(4) Suponhamos que f tenha dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq \beta$. Então, pelo item (3), a matriz \mathbf{A} associada a f possui dois autovalores, digamos,

$$\lambda_1 = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$$

tal que $\lambda_1\lambda_2 = 1$, pois $\det \mathbf{A} = 1$. Assim, se

$$\operatorname{tr}(f) = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} = x \in \mathbb{R},$$

então

$$\lambda = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

Portanto, $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $|x| > 2$. Se $|x| < 2$, então $\lambda \notin \mathbb{R}$ e $|\lambda| = 1$. O caso $|x| = 2$ não pode ocorrer.

(5) Sejam $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) - \{I\}$, com matrizes associadas \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente. Suponhamos que $\operatorname{tr}(f)^2 = \operatorname{tr}(g)^2$. Sendo a matriz $-\mathbf{A}$ também associada a f , podemos supor que $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(g)$. Assim,

$$\chi_{\mathbf{A}}(z) = \chi_{\mathbf{B}}(z)$$

é o polinômio minimal de \mathbf{A} e \mathbf{B} . Logo, \mathbf{A} e \mathbf{B} são conjugadas e, portanto, f e g são conjugadas. ■

O Lema 1.2 sugere a seguinte classificação de Transformações de Möbius. Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ associada a matriz \mathbf{A} , com $\det \mathbf{A} = 1$. Diremos que:

1. f é parabólica se f tem um único autovalor.
2. f é elíptica se os autovalores de f têm módulo 1.
3. f é hiperbólica se os autovalores de f são reais e não têm módulo 1.
4. f é loxodrômica (estrita) se os autovalores de f são complexos e não têm módulo 1.

Teorema 1.3 *Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Então:*

1. f é parabólica se, e somente se, $\operatorname{tr}(f)^2 = 4$.
2. f é elíptica se, e somente se, $\operatorname{tr}(f) \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{tr}(f)^2 \in [0, 4[$.
3. f é hiperbólica se, e somente se, $\operatorname{tr}(f) \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{tr}(f)^2 \in]4, \infty[$.
4. f é loxodrômica se, e somente se, $\operatorname{tr}(f) \notin \mathbb{R}$.

Demonstração. Consequência do Lema 1.2. ■

Proposição 1.2 (Transformação de Cayley) *Sejam*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \text{ e } \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Então existe $\eta_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que $\eta_0(\mathbb{H}) = \mathbb{B}$.

Demonstração. Seja

$$\eta_0(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

Como $0, i, \infty \in \mathbb{H} \cup \partial_\infty \mathbb{H}$ e $-1, 0, 1 \in \mathbb{B} \cup \partial_\infty \mathbb{B}$, com

$$\partial_\infty \mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ e } \partial_\infty \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

temos que

$$b = -d, \quad b = -ia \text{ e } a = c.$$

Logo,

$$\eta_0(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Note que esta representação não é única. Vamos verificar que η_0 tem as propriedades desejadas. Se $z \in \mathbb{R}$, então

$$|z - i| = \sqrt{1 + z^2} = |z + i| \Rightarrow |\eta_0(z)| = \left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1.$$

Por outro lado, como

$$\eta_0^{-1}(w) = -i \frac{w + 1}{w - 1}.$$

temos que se $|w| = 1$, então

$$\begin{aligned} \eta_0^{-1}(w) &= \frac{-i(w + 1)(\bar{w} - 1)}{|w - 1|^2} \\ &= \frac{i(w - \bar{w}) + (w\bar{w} - 1)}{|w - 1|^2} \\ &= \frac{2\text{Im}(w)}{|w - 1|^2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente, se $z \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$, então

$$|\eta_0(z)| = \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1,$$

pois $|z-i| < |z+i|$. Portanto, $f(\mathbb{H}) = \mathbb{B}$. ■

Observação 1.2 *Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ hiperbólica. Então os autovalores de f são reais. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(z) = \lambda^2 z$, em que $\lambda > 0$ é um autovalor de f . Como*

$$f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \text{ e } f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$$

temos, pela Proposição 1.1, que $f(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$.

A Observação 1.2 sugere a seguinte caracterização: Seja $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{tr}(f) \in \mathbb{R} - [0, 4]$. Diremos que f é hiperbólica se $f(D) = D$, para algum disco D .

Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Diremos que f derivável em $\alpha \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

existir e será denotado por $f'(\alpha)$. Neste caso, a função $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$T(z) = f'(\alpha)z, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

é linear. Diremos que f é derivável em Ω se for derivável em todos pontos de Ω . Geralmente, usa-se a expressão *holomorfa* ou *analítica*, ao invés de derivável. Por exemplo, se $c \neq 0$, então

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

é holomorfa em $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$, pois

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Uma *direção orientada* de α em relação à origem 0 é definida como o número complexo

$$A(1, \alpha)_0 = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Note que

$$A(1, \alpha^{-1})_0 = A(1, \alpha)_0^{-1} \text{ e } A(1, \alpha\beta)_0 = A(1, \alpha)_0 A(1, \beta)_0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$

Mais geralmente, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, com $\beta \neq \gamma$, uma direção orientada de β a γ em relação à origem 0 é definida como o número complexo

$$A(\beta, \gamma)_0 = A(1, \beta^{-1}\gamma)_0 = A(1, \beta)_0^{-1} A(1, \gamma)_0.$$

Finalmente se $\beta \neq \alpha$, uma direção orientada de β em relação a α é definida como o número complexo

$$A(1, \beta)_\alpha = \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}.$$

Observe que

$$A(1, \beta)_\alpha = A(1, \beta - \alpha)_0 \text{ e } A(\beta, \gamma)_\alpha = A\left(1, \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)_0,$$

confira Figura 1.5.

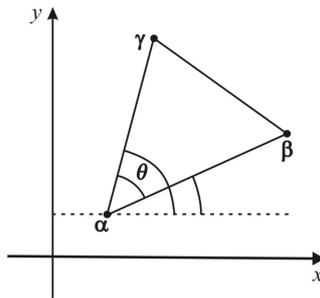


Figura 1.5: Direção Orientada

Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Diremos que f *conforme* em $\alpha \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{A(1, f(z))_{f(\alpha)}}{A(1, z)_\alpha}$$

existir.

Teorema 1.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $f'(\alpha) \neq 0$, para todo $\alpha \in \Omega$, então f é conforme em Ω .*

Demonstração. Como

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = f'(\alpha) \neq 0$$

temos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{A(1, f(z))_{f(\alpha)}}{A(1, z)_\alpha} &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\frac{f(z) - f(\alpha)}{|f(z) - f(\alpha)|}}{\frac{z - \alpha}{|z - \alpha|}} \\ &= \frac{f'(\alpha)}{|f'(\alpha)|}, \end{aligned}$$

existe. Portanto, f é conforme em Ω . ■

Pelo Teorema 1.4, qualquer transformação de Möbius é conforme.

1.4 Ação de Grupos

Sejam X um não vazio e $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ o subconjunto das potências de X . Então \mathcal{T} é uma topologia sobre X , chamada de *topologia discreta* sobre X . Neste caso, \mathcal{T} induz uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y, \end{cases}$$

chamada de *métrica discreta*, pois se $U \in \mathcal{T}$ e $x \in U$, então existe $\epsilon = 1$ tal que

$$V_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\} = \{x\} \subseteq U.$$

Logo, U é um subconjunto aberto de X . A recíproca é clara.

Seja X um conjunto não vazio, (Y, \mathcal{T}_1) um espaço topológico e $\varphi : X \rightarrow Y$ uma função. Então é fácil verificar que

$$\mathcal{T} = \{\varphi^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_1\}$$

é uma topologia sobre X , chamada de *topologia induzida* por φ . Nesta topologia φ é uma função contínua.

Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. Então cada subconjunto Y de X pode ser munido com a topologia

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\},$$

chamada de *topologia relativa* sobre Y . Assim, a função inclusão $\lambda : Y \rightarrow X$ é contínua em relação à topologia \mathcal{T}_Y , pois dado um aberto em X , obtemos

$$\lambda^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

Sejam \sim uma relação de equivalência sobre X e

$$\pi : X \rightarrow \frac{X}{\sim}$$

a projeção canônica. O conjunto

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subseteq \frac{X}{\sim} : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1 \right\}$$

é uma topologia sobre $\frac{X}{\sim}$, chamada de *topologia quociente* ou *topologia coinduzida* por π . O espaço topológico $\frac{X}{\sim}$ chama-se *espaço quociente* ou *espaço de identificação*. Note que π é uma função contínua, pois $U \in \mathcal{T}$ se, e somente se, $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$.

Seja $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , denotaremos por $M_2(K)$ o conjunto de todas as 2×2 matrizes com entradas em K . Então é fácil verificar que o conjunto

$$\text{GL}_2(K) = \{\mathbf{A} \in M_2(K) : \det(\mathbf{A}) \neq 0\}$$

é um grupo não abeliano, chamado de *grupo linear geral de grau 2*.

Proposição 1.3 *Seja $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Então $M_2(K)$ é um espaço topológico. Em particular, $\text{GL}_2(K)$ é um espaço topológico.*

Demonstração. É fácil verificar que a função $\varphi : M_2(K) \rightarrow K^4$ definida como

$$\varphi(\mathbf{A}) = (a, b, c, d), \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K),$$

é bijetora. Logo,

$$\mathcal{T} = \{\varphi^{-1}(U) : U \text{ é um aberto em } K^4\}$$

é uma topologia sobre $M_2(K)$. Portanto, $M_2(K)$ é um espaço topológico. ■

Um *grupo topológico* é um espaço topológico (G, \mathcal{T}) munido com uma estrutura de grupo tal que a função $\varphi : G \times G \rightarrow G$ definida como

$$\varphi(x, y) = x^{-1}y$$

é contínua. Por exemplo, já vimos que \mathbb{C} munido com a distância

$$d(z, w) = |w - z|$$

é um espaço métrico. Portanto, \mathbb{C} é um espaço topológico com a topologia induzida por d . Conseqüentemente, $(\mathbb{C}, +)$ e (\mathbb{C}^*, \cdot) são grupos topológicos. Também $GL_2(\mathbb{C})$ é um grupo topológico.

Sejam G um grupo topológico e X um conjunto não vazio. Uma *ação à esquerda* de G sobre X é uma função $*$: $G \times X \rightarrow X$, com $*(a, x) = ax$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a(bx) = (ab)x$, para todos $a, b \in G$ e $x \in X$.
2. $1x = x$, para todo $x \in X$.

Neste caso, diremos que G age sobre X e que X é um G -conjunto.

Exemplo 1.1 *Sejam $\sigma : H \rightarrow G$ um homeomorfismo de grupos topológicos e $X = G$. Então a função $*$: $H \times X \rightarrow X$ definida como $a * x = \sigma(a)x$, para todo $a \in H$ e $x \in X$, é uma ação de H sobre X . Em particular, se H é um subgrupo de G , então a ação é chamada de translação à esquerda.* ■

Seja X um G -conjunto não vazio. Então, para um $a \in G$ fixado, a função $\varphi_a : X \rightarrow X$ definida como $\varphi_a(x) = ax$ é um elemento de $\text{Sym}(X)$. Note que o elemento identidade 1 de G corresponde a função identidade I_X de $\text{Sym}(X)$.

Teorema 1.5 *Sejam G um grupo topológico e X um conjunto não vazio.*

1. *Qualquer ação de G sobre X induz um homeomorfismo de grupos*

$$\varphi : G \longrightarrow \text{Sym}(X).$$

2. *Qualquer homeomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow \text{Sym}(X)$ induz uma ação de G sobre X . Neste caso, diremos que φ é uma representação por permutação de G em $\text{Sym}(X)$. ■*

Seja X um G -conjunto não vazio. Dados $x, y \in X$, definimos

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe } a \in G \text{ tal que } y = ax.$$

Então é fácil verificar que \sim é uma relação de equivalência sobre X . A classe de equivalência

$$\bar{x} = \{y \in X : x \sim y\} = \{ax : a \in G\}$$

chama-se de *órbita* de x e será denotada por \mathcal{O}_x . Portanto, obtemos a partição de X :

$$X = \bigcup_{x \in \mathbf{F}} \mathcal{O}_x,$$

em que $\mathbf{F} \subseteq X$ é uma transversal de órbitas. Neste caso, diremos que \mathbf{F} é um *conjunto fundamental* para G ou para a ação $*$ sobre G , ou seja,

1. Para qualquer $y \in X$, existe $a \in G$ e $x \in \mathbf{F}$ tais que $y = ax$, ou seja,

$$X = \bigcup_{a \in G} a\mathbf{F}.$$

2. Se existe $x \in X$ e $a \in G$ tais que $x, ax \in \mathbf{F}$, então $a = 1$, ou seja,

$$a\mathbf{F} \cap \mathbf{F} = \emptyset,$$

para todo $a \in G$, com $a \neq 1$.

É fácil verificar que a função $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$n * x = n + x, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathbb{R},$$

é uma ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R} . Então é fácil verificar que

$$\mathcal{O}_x = x + \mathbb{Z} = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

é a classe de equivalência determinada por x . Logo, $\mathbf{F} = [0, 1)$ é um conjunto fundamental de \mathbb{Z} em \mathbb{R} . De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow r = x - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{F},$$

ou seja, dado $x \in \mathbb{R}$, existe um único $r \in \mathbf{F}$ tal que $x = r + n$, para algum $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \mathbf{F} + \mathbb{Z} = \{r + n : r \in \mathbf{F} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbf{F}} (r + \mathbb{Z}) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbf{F} + n) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n + 1). \end{aligned}$$

Neste caso, a função

$$\pi : [0, 1) \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

definida como $\pi(r) = r + \mathbb{Z}$ é bijetora e, para cada $x \in G$ fixado, $\mathbf{F}_x = [x, x + 1)$ é um conjunto fundamental de \mathbb{Z} em G . Portanto, conjunto fundamental de \mathbb{Z} em G não é único.

Sejam X um G -conjunto não vazio e $x \in X$. O conjunto

$$G_x = \{a \in G : ax = x\}$$

é um subgrupo de G , chamado o *subgrupo estabilizador* ou o *subgrupo de isotopia* de x .

Neste caso, a função

$$\varphi : \mathcal{O}_x \rightarrow \frac{G}{G_x}, \quad \forall x \in X,$$

definida como $\varphi(y) = yG_x$ é bijetora. Em particular, se G e X são finitos, então $|\mathcal{O}_x|$ divide $|G|$, para todo $x \in X$.

Seja X um G -conjunto não vazio. Diremos que G *age transitivamente* sobre X se dados $x, y \in X$, existir $a \in G$ tal que $y = ax$ ou, equivalentemente, $X = \mathcal{O}_x$, para algum (todo) $x \in X$. Neste caso, $X = \mathcal{O}_x$, para todo $x \in X$. Diremos que G é *fiel* sobre X se $\ker \varphi = \{1\}$. Finalmente, diremos que G *age livremente* sobre X se $G_x = \{1\}$.

Exemplo 1.2 *O conjunto*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : \det(\mathbf{A}) = 1\}$$

é um subgrupo normal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, chamado de grupo linear especial. Se

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\},$$

então a função $*$: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definida como

$$\mathbf{A} * z = \frac{az + b}{cz + d} = w, \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

é uma ação de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H} .

Solução. Vamos mostrar apenas que a função está bem definida. Se $z = x + yi \in \mathbb{C}$, então

$$cz + d = (cx + d) + (cy)i.$$

Assim, $c = 0$ implica que $cz + d = d \neq 0$ e $c \neq 0$ implica que $cz + d \neq 0$, pois $y > 0$. Agora,

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 w &= (az + b)(c\bar{z} + d) \\ &= ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd \\ &= [ac|z|^2 + bd + (ad + bc)x] + yi. \end{aligned}$$

Portanto, $w \in \mathbb{H}$, ou seja, a função está bem definida. ■

Sejam X um espaço topológico e G um grupo topológico. Então o conjunto de órbitas

$$\frac{X}{G} = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$$

é espaço topológico com a topologia induzida pela projecção canônica

$$\pi : X \rightarrow \frac{X}{G}$$

definida como $\pi(x) = \mathcal{O}_x$.

Sejam X um conjunto não vazio, (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e G um grupo topológico. Diremos que G age *descontinuamente* sobre X se o conjunto

$$\{a \in G : aK \cap K \neq \emptyset\}$$

é finito, para todo subconjunto compacto K de X . Em particular, se G é o grupo de todos os homeomorfismos de X , diremos que G é um *grupo descontínuo*.

Sejam X um conjunto não vazio, (X, \mathcal{T}) um espaço topológico com uma medida de volume μ e G um grupo agindo sobre X . Diremos que um subconjunto $\Omega \subset X$ é um *domínio fundamental* de G se

1. Ω é aberto em X .
2. Existe um conjunto fundamental \mathbf{F} de G tal que $\Omega \subset \mathbf{F} \subset \bar{\Omega}$
3. $\mu(\partial\Omega) = 0$.

Note que um domínio fundamental é um aberto que juntamente com parte da sua fronteira forma um conjunto fundamental.

Dos exemplo acima vemos o funcionamento básico das ideias de ação de grupo. O conhecimento de um domínio fundamental, implica em obter um conjunto de geradores para o grupo e, com mais um pouco de dificuldade, também num conjunto de relações.

Seja G um grupo topológico. Diremos que G é um *grupo discreto* se G é um espaço topológico discreto. No caso em que o espaço quociente for compacto, diremos que G é um *grupo cocompacto*. Os exemplos acima são cocompactos.

Pela Proposição 1.3 o grupo $SL_2(\mathbb{C})$ é um grupo topológico (espaço métrico) com a métrica induzida pela norma

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2.$$

Para cada $\mathbf{A} \in GL_2(\mathbb{C})$ fixado, a função $\varphi_{\mathbf{A}} : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow M(\mathbb{C})$ definida como

$$\varphi_{\mathbf{A}}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

é um homeomorfismo (local). Logo, $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ é um grupo topológico.

Proposição 1.4 *Seja G um subgrupo discreto aditivo do grupo topológico \mathbb{C} . Então uma das condições ocorre:*

1. $G = \{0\}$.
2. $G = \mathbb{Z}\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Neste caso, G é isomorfo a \mathbb{Z} .
3. $G = \mathbb{Z}\alpha \times \mathbb{Z}\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ e $\alpha\beta^{-1} \notin \mathbb{R}$. Neste caso, G é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e G chama-se um reticulado de \mathbb{C} .

Demonstração. Suponhamos que $G \neq \{0\}$. Então é claro que $\mathbb{Z}\alpha \subseteq G$, para todo $\alpha \in G$. Além disso, sendo G um conjunto discreto temos, para cada $r \in \mathbb{R}_+^*$, que $D_r(0) \cap G$ é finito e

$$D_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}.$$

Assim, existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$D_{r_0}(0) \cap G^* \neq \emptyset$$

e finito. Portanto, podemos escolher um $\alpha_1 \in G^*$ tal que

$$|\alpha_1| = \inf\{|\alpha| : \forall \alpha \in D_{r_0}(0) \cap G^*\} > 0.$$

Neste caso, $\mathbb{Z}\alpha_1 \subseteq G$. Se $\mathbb{Z}\alpha_1 = G$, provamos o caso (2). Caso contrário,

$$G - \mathbb{Z}\alpha_1 \neq \emptyset.$$

Primeiro note que $G - \mathbb{Z}\alpha_1$ não contém a reta

$$L = \mathbb{R}\alpha_1 = \{t\alpha_1 : t \in \mathbb{R}\}.$$

De fato, se $G - \mathbb{Z}\alpha_1$ contivesse a reta L , então existiria $t_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ tal que $t_0\alpha_1 \in G$. Como $t_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ temos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $t_0 \in (n, n+1)$. Logo, $(t_0 - n)\alpha_1 \in G$, o que contradiz a minimalidade de $|\alpha_1|$. Logo, $G - \mathbb{Z}\alpha_1$ é discreto. Assim, de modo similar acima, podemos escolher um $\alpha_2 \in G - \mathbb{Z}\alpha_1$ tal que $|\alpha_2| > 0$ seja mínimo. Neste caso, $\mathbb{Z}\alpha_2 \subseteq G$ e $\mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 \subseteq G$, onde $\alpha_2\alpha_1^{-1} \in \mathbb{R}$, pois $\alpha_2 \notin L$. Portanto, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ é uma base de \mathbb{C} sobre \mathbb{R} .

Afirmção. Se $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$, então $\Gamma = G$.

De fato, se $\Gamma \neq G$, então existe $\beta \in G$ tal que $\beta \notin \Gamma$. Assim, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\beta = x\alpha_1 + y\alpha_2.$$

Já vimos que podemos escolher $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$|x - m| \leq \frac{1}{2} \text{ e } |y - n| \leq \frac{1}{2}.$$

Como $\alpha = m\alpha_1 + n\alpha_2 \in \Gamma$ temos que $\beta - \alpha \in G$. Se $y = n$, então

$$|\beta - \alpha| = |x - m| |\alpha_1| \leq \frac{1}{2} |\alpha_1| < |\alpha_1|$$

e pela minimalidade de $|\alpha_1|$, teremos $\beta - \alpha = 0$ e $\beta = \alpha \in \Gamma$, o que é impossível. De modo similar trabalhamos com $x = m$. Assim, $(x - m)\alpha_1$ e $(y - n)\alpha_2$ são linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &< |\beta - \alpha| \\ &< |x - m| |\alpha_1| + |y - n| |\alpha_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |\alpha_1| + \frac{1}{2} |\alpha_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |\alpha_2| + \frac{1}{2} |\alpha_2| \\ &= |\alpha_2|, \end{aligned}$$

o que contradiz a minimalidade de $|\alpha_2|$. Consequentemente, $\Gamma = G$. ■

Corolário 1.2 *Qualquer reticulado de \mathbb{C} é um grupo aditivo discreto.*

Demonstração. Suponhamos que Γ seja um reticulado discreto de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Então Γ possui uma base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Logo, a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\varphi(\alpha_1) = e_1$ e $\varphi(\alpha_2) = e_2$ é um isomorfismo e $\varphi(\Gamma) = \mathbb{Z}^2$. Seja $U = \varphi^{-1}(V_1(0))$, em que

$$V_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Então U é um subconjunto aberto \mathbb{R}^2 , pois φ é contínua, de modo que existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$0 \in V_\epsilon(0) \subseteq U.$$

Se $\alpha \in \Gamma \cap V_\epsilon(0)$, então

$$\varphi(\alpha) \in \mathbb{Z}^2 \cap V_1(0) = \{0\}.$$

Neste caso, $\varphi(\alpha) = 0$ e $\Gamma \cap V_\epsilon(0) = \{0\}$.

Agora, dados $\alpha, \beta \in \Gamma$, temos que $\beta - \alpha \in \Gamma$. Se $\beta \in V_\epsilon(\alpha)$, então

$$|\beta - \alpha| < \epsilon,$$

de modo que

$$\beta - \alpha \in \Gamma \cap V_\epsilon(0) = \{0\}.$$

Portanto, $\Gamma \cap V_\epsilon(\alpha) = \{\alpha\}$ e Γ é um conjunto discreto. ■

Seja (X, d) um espaço métrico, Γ um grupo não trivial de $\text{Isom}(X)$ e $p \in X$. Sejam $\gamma \in \Gamma - \{1\}$ e o conjunto

$$D_\gamma(p) = \{x \in X : d(p, x) \leq d(\gamma(p), x)\}$$

ou

$$D_\gamma(p) = \{x \in X : d(p, x) \leq d(p, \gamma(x))\},$$

pois $\gamma \in \text{Isom}(X)$. Se $\Gamma_p = \{1\}$, o *Domínio de Dirichlet* de Γ , com centro p , é definido

como

$$D_\Gamma(p) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma(p).$$

Se $\Gamma_p \neq \{1\}$, o *Domínio de Dirichlet* de Γ , com centro p , é definido como

$$D_\Gamma(p) = \mathbb{F}_p \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_p} D_\gamma(p),$$

em que \mathbb{F}_p é um domínio fundamental de Γ_p .

Teorema 1.6 *Seja (X, d) um espaço métrico com as seguintes propriedades:*

1. *X é geodesicamente conexo.*
2. *X é geodesicamente completo.*
3. *X é localmente compacto.*

Se $\Gamma_p \neq \{1\}$ é um subgrupo descontínuo de $\text{Isom}(X)$, então $D_\Gamma(p)$ é um domínio fundamental de Γ e é localmente finito. Além disso,

$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma(D_\gamma(p)) \cap D_\Gamma(p) \neq \emptyset\}$$

é um conjunto de geradores de Γ .

Demonstração. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [2]. ■

Os geradores mencionados no Teorema 1.6, serão chamados side-pairing transformations ou transformações de emparelhamento.

Capítulo 2

O Plano Hiperbólico

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e resultados do plano hiperbólico e do disco de Poincaré. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [6].

2.1 A Métrica Hiperbólica

Nesta seção vamos apresentar as principais propriedades do plano hiperbólico

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

e o disco de Poincaré

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Embora existam outros modelos vamos nos restringir a estes dois modelos.

No caso do semiplano superior \mathbb{H} a métrica hiperbólica é obtida a partir de

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y},$$

onde $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Em toda esta dissertação a palavra curva, salvo menção explícita em contrário, significa curva diferenciável por partes.

Seja $\gamma : [p, q] \rightarrow \mathbb{H}$ uma curva, $\gamma(s) = x(s) + iy(s)$, para todo $s \in [p, q]$, definimos o *comprimento hiperbólico* de γ como:

$$\begin{aligned}\|\gamma\| &= \int_p^q \frac{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}{y(s)} ds \\ &= \int_p^q \frac{\|\gamma'(s)\|}{y(s)} ds.\end{aligned}$$

Seja a função $\varphi : [0, 1] \rightarrow [p, q]$ definida como

$$s = \varphi(t) = (1 - t)p + tq, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Então é claro φ é diferenciável, de modo que a composta

$$\widehat{\gamma}(t) = (\gamma \circ \varphi)(t) = \gamma(s)$$

é uma curva diferenciável por partes, com

$$\widehat{\gamma}(t) = \widehat{x}(t) + i\widehat{y}(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Assim,

$$\|\widehat{\gamma}\| = \int_0^1 \frac{|\widehat{\gamma}'(t)|}{\widehat{y}(t)} dt$$

e

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(t) &= (\gamma \circ \varphi)(t) \\ &= \gamma(\varphi(t)) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \widehat{x}(t) = x(s) \\ \widehat{y}(t) = y(s) \end{cases}.\end{aligned}$$

Pela Regra da Cadeia

$$\frac{d\widehat{x}}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}(q - p) \quad \text{e} \quad \frac{d\widehat{y}}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}(q - p)$$

e

$$ds = \frac{ds}{dt} dt = (q - p) dt$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{\gamma}\| &= \int_0^1 \frac{|\widehat{\gamma}'(t)|}{\widehat{y}(t)} dt \\
 &= \int_p^q \frac{(q-p) |\widehat{\gamma}'(s)|}{y(s)} \frac{ds}{(q-p)} \\
 &= \int_p^q \frac{|\widehat{\gamma}'(s)|}{y(s)} ds \\
 &= \|\gamma\|.
 \end{aligned}$$

Portanto, não há perda de generalidade em considerar as curvas sobre o intervalo $[0, 1]$.

Logo,

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{|\gamma'(s)|}{y(s)} ds.$$

Dados $z, w \in \mathbb{H}$, a *distância hiperbólica* entre z e w é definida como

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \|\gamma\|,$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as curvas diferenciáveis por partes conectando z e w em \mathbb{H} , isto é, todas as curvas diferenciáveis por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$, com $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$.

Afirmção. ρ é uma métrica.

De fato, como

$$y > 0 \text{ e } |\gamma'(s)| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \geq 0$$

temos que

$$\frac{|\gamma'(s)|}{y(s)} \geq 0, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Portanto,

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \|\gamma\| = \inf \left(\int_0^1 \frac{|\gamma'(s)|}{y(s)} ds \right) \geq 0.$$

Por outro lado, para todo $s \in [0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \rho(z, w) &= \inf_{\gamma} \|\gamma\| = 0 \\
 &\Leftrightarrow \|\gamma\| = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{|\gamma'(s)|}{y(s)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x'(s)^2 + y'(s)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x'(s) = y'(s) = 0 \\
 &\Leftrightarrow z = w.
 \end{aligned}$$

Agora, seja $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ definida como $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(1 - s)$, para todo $s \in [p, q]$. Então, $\tilde{\gamma}(0) = w$ e $\tilde{\gamma}(1) = z$. Assim, fazendo a substituição $t = 1 - s$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\gamma\| &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)} dt \\
 &= - \int_1^0 \frac{|\tilde{\gamma}'(s)|}{\hat{y}(s)} ds \\
 &= \int_0^1 \frac{|\tilde{\gamma}'(s)|}{\hat{y}(s)} ds \\
 &= \|\tilde{\gamma}\|.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\inf \|\gamma\| = \inf \|\tilde{\gamma}\|$ e $\rho(z, w) = \rho(w, z)$.

Finalmente, dados $z, w, u \in \mathbb{H}$. Sejam

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \text{ e } \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$$

tais que $\gamma_1(0) = z$, $\gamma_1(1) = w$, $\gamma_2(0) = w$ e $\gamma_2(1) = u$. Vamos definir $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

É claro que γ é uma curva diferenciável por partes, com $\gamma(0) = z$, $\gamma(\frac{1}{2}) = w$ e $\gamma(1) = u$.

Logo

$$\|\gamma\| = \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|.$$

Portanto, aplicando o ínfimo na equação, obtemos

$$\inf \|\gamma\| = \inf(\|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|) \leq \inf \|\gamma_1\| + \inf \|\gamma_2\|,$$

ou seja,

$$\rho(z, u) \leq \rho(z, w) + \rho(w, u).$$

Consequentemente, (\mathbb{H}, ρ) é um espaço métrico.

Considere a função $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C})$ definida como

$$\varphi(\mathbf{A}) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Então φ é um epimorfismo, com

$$\ker \varphi = \{\mathbf{I}_2, -\mathbf{I}_2\}.$$

Em particular,

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \frac{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}{\ker \varphi} \simeq \mathcal{M}(\mathbb{C}).$$

Neste caso, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ chama-se *grupo projetivo linear*, Portanto, não há perda de generalidade, em identificarmos $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ com $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi(\mathbf{A}) = \frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow \cdot \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \varphi^{-1}(\mathbf{A}) = \frac{az - b}{-cz + d} \leftrightarrow \cdot \pm \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

Lema 2.1 *As isometrias de \mathbb{H} são as transformações de Möbius associadas as $\mathbf{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ou seja, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$.*

Demonstração. Dado

$$f_{\mathbf{A}}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Já vimos, no Exemplo 1.2, que $SL_2(\mathbb{R})$ age sobre \mathbb{H} e

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 f_{\mathbf{A}}(z) &= (az + b)(c\bar{z} + d) \\ &= ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd \\ &= [ac|z|^2 + bd + (ad + bc)x] + yi. \end{aligned}$$

implica que

$$\text{Im}(f_{\mathbf{A}}(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} \in \mathbb{H}.$$

Como

$$f'_{\mathbf{A}}(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

temos que

$$\frac{|f'_{\mathbf{A}}(z)|}{\text{Im}(f_{\mathbf{A}}(z))} = \frac{1}{\text{Im}(z)}.$$

Seja $\delta(t) = f_{\mathbf{A}}(\gamma(t))$, para qualquer curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$. Então, pela Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \|\delta\| &= \int_0^1 \frac{|\delta'(t)|}{\text{Im}(\delta(t))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|f'_{\mathbf{A}}(\gamma(t))\gamma'(t)|}{\text{Im}(f_{\mathbf{A}}(\gamma(t)))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt \\ &= \|\gamma\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho(f'_{\mathbf{A}}(z), f'_{\mathbf{A}}(w)) &= \inf_{\delta} \|\delta\| \\ &= \inf_{\gamma} \|\gamma\| \\ &= \rho(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $f_{\mathbf{A}}$ é uma isometria de \mathbb{H} . A recíproca, será mostrada na demonstração do teorema 2.2. ■

Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, com $z \neq w$. Uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$ é uma geodésica em \mathbb{H} se

$$\rho(z, w) = \|\gamma\| = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt.$$

Proposição 2.1 *Seja \mathcal{C} um semicírculo ou uma semi-reta ortogonal ao eixo real em $\alpha \in \partial_\infty \mathbb{H}$. Então a isometria*

$$T(z) = -\frac{1}{z - \alpha} + \beta$$

aplica \mathcal{C} no eixo imaginário positivo, para um valor adequado de β . ■

Teorema 2.1 *As geodésicas em \mathbb{H} são semicírculos ou semi-retas ortogonais ao eixo $\partial_\infty \mathbb{H}$.*

Demonstração. Sejam $z, w \in \mathbb{H}$. Suponhamos que

$$z = ip \text{ e } w = iq \text{ com } q > p.$$

Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$, com

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

então

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \\ &= \int_p^q \frac{dy}{y} \\ &= \ln \left(\frac{q}{p} \right), \end{aligned}$$

pois $y(t) = p + (q - p)t$, para todo $t \in [0, 1]$. Assim, este é exatamente o comprimento hiperbólico do segmento do eixo imaginário que une ip e iq . Consequentemente, a

geodésica que une ip e iq é o segmento do eixo imaginário que os une.

Consideremos agora z e w arbitrários. Seja \mathcal{C} o semicírculo Euclidiano único ou semi-reta que une z a w . Assim, existe, pela Proposição 2.1, uma isometria em \mathbb{H} que aplica \mathcal{C} no eixo imaginário positivo, o que reduz o teorema ao caso particular acima. Portanto, pelo Lema 2.1, concluímos que a geodésica entre z e w é o segmento de \mathcal{C} que une z a w . ■

Corolário 2.1 *Sejam $z, w \in \mathbb{H}$ e $p, q \in \mathbb{R}_+^*$. Então:*

1.

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

2.

$$\rho(ip, iq) = \left| \ln \left(\frac{q}{p} \right) \right|.$$

3. Se

$$\gamma_0(t) = p \left(\frac{q}{p} \right)^t i, \quad \forall t \in [0, 1],$$

então

$$\|\gamma_0\| = \rho(ip, iq).$$

Demonstração. (1) Pelo Teorema 2.1, a menor distância é

$$\rho(z, w) = \ln \left(\frac{q}{p} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cosh \rho(ip, iq) &= \cosh \left(\ln \left(\frac{q}{p} \right) \right) \\ &= \frac{\frac{q}{p} + \frac{p}{q}}{2} \\ &= 1 + \frac{|p - q|^2}{2pq}. \end{aligned}$$

(3) Como

$$\rho(z, w) = \|\gamma_0\| = \int_0^1 \frac{|\gamma_0'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma_0(t))} dt$$

temos que

$$\|\gamma_0\| = \rho(ip, iq),$$

que é o resultado desejado. ■

Teorema 2.2 *O grupo de isometrias*

$$\text{Isom}(\mathbb{H}) = \langle f_{\mathbf{A}}, \sigma_0 \rangle,$$

em que

$$f_{\mathbf{A}}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

e σ_0 a reflexão em $i\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{H})$ e $L = i\mathbb{R}$. Então, Pelo Teorema 2.1, existe $f_{\mathbf{A}} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que

$$(f \circ \varphi)(L) = L.$$

Em particular,

$$(f \circ \varphi)(i) = ki$$

para algum $k \in \mathbb{R}$. Assim,

$$(f_k \circ f \circ \varphi)(i) = i,$$

em que

$$f_k(z) = \frac{z}{k}.$$

Como as isometrias de \mathbb{H} são contínuas podemos supor, se necessário compondo com

$$g(z) = -\frac{1}{z},$$

que os segmentos $[0, i]$ e $[i, \infty)$ são invariantes por

$$h = f_k \circ f \circ \varphi.$$

Se $iy \in L$, então:

$$\begin{aligned} |\ln y| &= \rho(iy, i) \\ &= \rho(h(iy), h(i)) \\ &= \rho(h(iy), i) \\ &= |\ln(|h(iy)|)|. \end{aligned}$$

Logo, $h(iy) = iy$, isto é, $h(L) = L$.

Finalmente, dado $z \in \mathbb{H}$, com $h(z) \neq z$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho(h(z), it) &= \rho(h(z), h(it)) \\ &= \rho(h(z), it), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \end{aligned}$$

ou seja, L é o bissetor de $h(z)$ e z . Em particular, L é perpendicular à geodésica C ligando $h(z)$ a z . Assim, C é um círculo com centro na origem. Portanto,

$$h(z) = -\bar{z}.$$

Consequentemente, $h(z) = -\bar{z}$, para todo $z \in \mathbb{H}$. ■

Seja

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \quad \forall \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

uma isometria de \mathbb{H} . Como

$$f'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

temos que

$$\mathrm{Re}(\overline{f'(z)u}(f'(z)v)) = \frac{1}{(cz + d)^2} \mathrm{Re}(\bar{u}v), \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

em que

$$\frac{1}{(cz + d)^2}$$

é o *fator de escala* de f . Portanto, f' preserva a equação (2.1) exatamente nos pontos do círculo

$$\{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = 1\}$$

Note que se $c \neq 0$, então

$$\left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|}.$$

O círculo

$$\mathcal{C}_f = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \right\}$$

chama-se o *círculo isométrico* de f , cujo centro e raio são dados, respectivamente, por

$$P_f = -\frac{d}{c} \text{ e } R_f = \frac{1}{|c|}.$$

Para cada subgrupo discreto Γ do grupo das isometrias que *preserva orientação* $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$, os círculos \mathcal{C}_f , serão usados na construção de um domínio fundamental para Γ , conhecido como *domínio fundamental de Ford* ou simplesmente *domínio de Ford* - DF .

2.2 O Disco de Poincaré

Nesta seção apresentaremos o disco de Poincaré como um modelo para a geometria hiperbólica.

Já vimos, pela Proposição 1.2, que

$$\eta_0(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

transforma \mathbb{H} em \mathbb{B} . Assim,

$$\rho^*(z, w) = \rho(\eta_0^{-1}(z), \eta_0^{-1}(w))$$

induz uma métrica em \mathbb{B} , que denotaremos ainda por ρ .

Se $z, w \in \mathbb{B}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{B}$ é uma curva ligando z a w , então

$$\|\gamma_0\| = \int_a^b \frac{|(\eta_0(\gamma(t)))'|}{\text{Im}[\eta_0(\gamma(t))]} dt = \int_a^b \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} dz$$

Teorema 2.3 *Seja \mathbb{B} munido com a métrica ρ . Então:*

1.

$$\rho(z, w) = \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right).$$

2. Se $r > 0$, então

$$\rho(0, r) = \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right).$$

3. Se $z \neq 0$, então

$$\rho(0, z) = \ln \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right).$$

4. Se $r > 0$, então $\gamma_0(t) = \tanh(t \ln r)$, satisfaz $\|\gamma_0\| = \rho(0, r)$.

Em particular, existe uma curva que minimiza a distância e a sua imagem está contida numa circunferência que é ortogonal a $\partial_\infty \mathbb{B}$.

Demonstração. (1) É uma consequência do Corolário 2.1 via η_0 .

(2) Basta observar que

$$\begin{aligned} \rho(0, r) &= \rho(\eta_0^{-1}(0), \eta_0^{-1}(r)) \\ &= \rho \left(i, \frac{1+r}{1-r} i \right) \\ &= \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right). \end{aligned}$$

(3) Se $z \neq 0$, então existe uma rotação g tal que $g(z) = |z|$. Como g linear temos que $g(0) = 0$ e, pelo (2),

$$\begin{aligned} \rho(0, z) &= \rho(g(0), g(z)) \\ &= \rho(0, |z|) \\ &= \ln \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right). \end{aligned}$$

(4) A curva γ_0 se obtém compondo a curva do Corolário 2.1 com η_0 . ■

Lema 2.2 Consideremos $f_0 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{B}$ definida como

$$f_0(z) = i\eta_0(z).$$

1. $f_0(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

2. $f_0(i) = 0$, $f_0(0) = -i$ e $f_0(\infty) = i$.

3. $f_0(S^1 \cap \mathbb{H}) = [-1, 1]$.

4. f_0 induz um isomorfismo de álgebras

$$\psi : \text{Isom}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{B})$$

definido como $\psi(\gamma) = f_0 \circ \gamma \circ f_0^{-1}$.

5. ψ é f_0 -equivariante, isto é,

$$\psi(\gamma)(f_0(z)) = f_0(\gamma(z)), \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

6. Se

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então

$$\psi(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & \bar{A} \end{pmatrix},$$

em que

$$A = (b + c) + (a - d)i \quad \text{e} \quad C = (a + d) - (b - c)i.$$

7. Tem-se $|A|^2 - |C|^2 = 1$.

Demonstração. Consequência direta da definição de f_0 . ■

Seja $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{B})$. O bissetor definido por γ , denotado por Σ_γ , é o conjunto de pontos equidistantes de 0 e de $\gamma^{-1}(0)$, ou seja,

$$\Sigma_\gamma = \{z \in \mathbb{H} : \rho(0, z) = \rho(z, \phi^{-1}(0))\},$$

chamado o *bissetor de Poincaré* de γ .

Se $\gamma \in \text{Isom}^+(\mathbb{B})$ é induzida pela matriz

$$\begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & \bar{A} \end{pmatrix},$$

então o fator de escala de γ é igual a 1 se, e somente se,

$$|Cz + \bar{A}|^2 = 1.$$

Note que se $C \neq 0$, então isto representa um círculo de centro

$$P_\gamma = -\frac{\bar{A}}{C}$$

e raio

$$R_\gamma = \frac{1}{|C|}.$$

Sobre este círculo γ age como uma isometria Euclidiana, ou seja, sobre este círculo γ preserva distâncias Euclidianas. Isto é exatamente o círculo isométrico \mathcal{C}_γ de γ .

Teorema 2.4 *O grupo de isometrias*

$$\text{Isom}(\mathbb{B}) = \langle f_{\mathbf{A}}, \sigma_0 \rangle,$$

em que

$$f_{\mathbf{A}}(z) = \frac{Az + \bar{C}}{Cz + \bar{A}} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), \text{ com } |A|^2 - |C|^2 = 1.$$

e σ_0 a reflexão em $i\mathbb{R}$.

Demonstração. Consequência do Teorema 2.2. ■

Teorema 2.5 *Seja $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{B})$ induzida pela matriz*

$$\begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & \bar{A} \end{pmatrix}$$

com $C \neq 0$. Então \mathcal{C}_γ possui as seguintes propriedades:

1. \mathcal{C}_γ possui centro $P_\gamma = -\frac{\bar{A}}{C}$ e raio $R_\gamma = \frac{1}{|C|}$.
2. \mathcal{C}_γ é ortogonal a $S^1 = \partial_\infty \mathbb{B}$.
3. Os pontos 0 , $\gamma^{-1}(0)$ e P_γ são colineares e $\gamma^{-1}(0) \cdot P_\gamma = 1$.
4. $\mathcal{C}_\gamma = \Sigma_\gamma$.
5. O segmento de reta L_γ ligando 0 a P_γ é ortogonal a Σ_γ .

Demonstração. (2) Note que

$$\begin{aligned} 1 + R_\gamma^2 &= \frac{1 + |C|^2}{|C|^2} \\ &= \frac{|A|^2}{|C|^2} \\ &= |P_\gamma|^2. \end{aligned}$$

(3) Como

$$\gamma^{-1}(z) = \frac{\bar{A}z - \bar{C}}{-Cz + A}$$

temos que

$$\gamma^{-1}(0) = -\frac{\bar{C}}{A}.$$

Assim,

$$\gamma^{-1}(0) \cdot P_\gamma = 1 \text{ onde } \gamma^{-1}(0) = \lambda P_\gamma \text{ onde } \lambda = \frac{|C|^2}{|A|^2} \in \mathbb{R},$$

ou seja, 0 , $\gamma^{-1}(0)$ e P_γ são colineares

(4) Seja

$$M = L_\gamma \cap \mathcal{C}_\gamma.$$

Então L_γ é ortogonal a \mathcal{C}_γ . Além disso,

$$\begin{aligned} |M| &= |P_\gamma| - R_\gamma \\ &= \frac{|A| - 1}{|C|} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2\rho(0, M) &= 2 \ln \left(\frac{1 + |M|}{1 - |M|} \right) \\ &= 2 \ln \left(\frac{|A| + |C| - 1}{|A| - |C| + 1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{|A| + |C| - 1}{|A| - |C| + 1} \right)^2 \\ &= \ln \left(\frac{|A|^2 + |C||A| - |C| - |A| - 1}{|A|^2 - |C||A| + |C| - |A|} \right) \\ &= \ln \left(\frac{|A| + |C| - 1}{|A| - |C|} \right) \\ &= \rho(0, \gamma^{-1}(0)). \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{C}_γ é o bissetor de L_γ e $\mathcal{C}_\gamma = \Sigma_\gamma$.

(5) Segue por definição de Σ_γ . ■

Corolário 2.2 *Seja $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{B})$ induzida pela matriz*

$$\begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & \bar{A} \end{pmatrix},$$

com $C \neq 0$. Então $\gamma(\Sigma_\gamma) = \Sigma_{\gamma^{-1}}$.

Demonstração. Sejam L_γ o segmento ligando 0 e $\gamma^{-1}(0)$. Então $\gamma(L_\gamma) = L_{\gamma^{-1}}$. Como γ age como isometria Euclidiana sobre Σ_γ temos que

$$\Sigma := \gamma(\Sigma_\gamma)$$

é o círculo ortogonal a $L_{\gamma^{-1}}$ e a S^1 , com o mesmo raio de Σ_γ . Logo, seu centro é da forma

$$\lambda\gamma(0),$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ e satisfaz a equação

$$1 + R_\gamma^2 = \lambda^2 \cdot \frac{|C|^2}{|A|^2},$$

ou seja,

$$\lambda = \frac{|C|^2}{|A|^2} \in \mathbb{R}.$$

Logo, o centro de Σ é

$$\lambda\gamma(0) = \frac{A}{C}.$$

Assim, o centro e raio de Σ coincidem com os de $\Sigma_{\gamma^{-1}}$. Portanto, temos a igualdade das duas circunferências. ■

Lema 2.3 *Sejam $x, y \in \mathbb{B}$ e Σ uma geodésica de \mathbb{B} que é um círculo. Então x e y são pontos opostos em relação a Σ se, e somente se, Σ é o bissetor da geodésica ligando x a y .*

Capítulo 3

Grupos Fuchsianos

Neste capítulo apresentaremos a teoria básica desses grupos dos grupos Fuchsianos e obter as fórmulas dos bissetores de Poincaré. Além disso, os domínios de Dirichlet e Ford e o algoritmo DAFC.

3.1 Os Bissetores de Poincaré

Seja Γ é um subgrupo discreto do grupo topológico $SL_2(\mathbb{C})$. Diremos que Γ é *grupo Fuchsiano* se existir um disco D em \mathbb{C} tal que

$$\gamma(D) = D, \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

Já vimos, pela Proposição 1.2, que para qualquer disco D em \mathbb{C} , existe $f \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que

$$f(\mathbb{H}) = D.$$

Logo, não há perda de generalidade, em supor que $D = \mathbb{H}$. Assim, um subgrupo Γ é grupo Fuchsiano se for um subgrupo discreto do grupo $Isom(\mathbb{H})$. Portanto, pelo item (3) do Teorema 1.3, um subgrupo Γ é grupo Fuchsiano se $\text{tr}(\gamma) \in \mathbb{R}$ e $\text{tr}(\gamma)^2 \in]4, \infty[$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Seja $\phi \in Isom(\mathbb{B})$. Então o círculo isométrico Σ_ϕ de ϕ é definido como

$$\{z \in \mathbb{C} : |\phi'(z)| = 1\}$$

e obtemos as fórmulas explícitas para Σ_ϕ como sendo o bissetor do segmento

$$[0, \phi^{-1}(0)].$$

Agora, vamos obter fórmulas explícitas para o bissetor do segmento geodésico

$$[i, \phi^{-1}(i)],$$

considerando ϕ como um elemento de $\text{Isom}(\mathbb{H})$ via o isomorfismo ψ induzido por

$$\eta_0(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

ou seja, $\psi = \eta_0 \circ \phi \circ \eta_0^{-1}$.

Seja $\gamma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Então $\psi(\gamma) \in \text{Isom}^+(\mathbb{B})$. Em geral, o círculo isométrico

$$\mathcal{C}_\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \right\}$$

não é o bissetor de γ . Assim, definimos

$$\Sigma_\gamma = \eta_0^{-1}(\Sigma_{\psi(\gamma)}).$$

Como η_0 é uma isometria entre os modelos temos que Σ_γ é o bissetor de γ . Portanto,

$$\gamma(\Sigma_\gamma) = \Sigma_{\gamma^{-1}}.$$

Teorema 3.1 *Seja*

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d} \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

1. Σ_γ é um círculo Euclidiano se, e somente se, $a^2 + c^2 \neq 1$. Neste caso, seu centro e raio são, respectivamente, dados por:

$$P_\gamma = -\frac{ab + cd}{a^2 + c^2 - 1} \quad e \quad R_\gamma^2 = \frac{1 + |P_\gamma|^2}{a^2 + c^2}.$$

2. Σ_γ é uma reta vertical se, e somente se, $a^2 + c^2 = 1$. Neste caso, uma equação

cartesiana desta reta é dada por

$$x + \frac{k}{2} = 0,$$

onde $x \in \mathbb{R}$, com $k = ab + cd$.

3. $(ab + cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - 1$.

4. Se $c \neq 0$, então $\mathcal{C}_\gamma = \Sigma_\gamma$ se, e somente se, $a = d$. Se $c = 0$ e Σ_γ é uma reta vertical, então tem-se a mesma conclusão.

Demonstração. (1) Seja

$$P_{\psi(\gamma)}^* = \psi(\gamma)^{-1}(0).$$

Então

$$i = \eta_0^{-1}(0) \text{ e } \gamma^{-1}(i) = \eta_0^{-1}(P_{\psi(\gamma)}^*)$$

são pontos opostos em relação a Σ_γ , cujo centro está em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Portanto, se Σ_γ não for uma reta vertical, então i , $\gamma^{-1}(i)$ e P_γ são colineares. Assim,

$$P_\gamma = L \cap \partial_\infty \mathbb{H},$$

em que L a reta determinada por i e $\gamma^{-1}(i)$. Logo,

$$\gamma^{-1}(i) = -\frac{(ab + cd)}{a^2 + c^2} + \frac{1}{(a^2 + c^2)}i$$

e portanto, um cálculo simples nos dá a fórmula de P_γ . Para obter a fórmula para o raio, lembramos que

$$R_\gamma^2 = \|i - P_\gamma\| \|\gamma^{-1}(i) - P_\gamma\|.$$

(2) Pela expressão de P_γ temos que Σ_γ é uma reta vertical se, e somente se, $a^2 + c^2 = 1$.

Neste caso,

$$\gamma^{-1}(i) = -(ab + cd) + i.$$

Logo,

$$u = i - \gamma^{-1}(i) = ab + cd$$

é perpendicular a Σ_γ . Portanto, obtemos a equação cartesiana de Σ_γ .

(3) É claro das definições.

(4) Como $\det(\gamma) = 1$ temos que

$$|\tilde{P}_\gamma - P_\gamma| = \left| \frac{d}{c} - \frac{ab + cd}{a^2 + c^2 - 1} \right| = \frac{|a - d|}{|c|(a^2 + c^2 - 1)}.$$

Assim, se $\mathcal{C}_\gamma = \Sigma_\gamma$, então $a = d$. Logo,

$$R_\gamma = \frac{1}{|c|}.$$

Se $c = 0$ e Σ_γ uma reta vertical, então $ad = 1$, com $1 = a^2 + c^2 = a^2$. Assim, $d = a$. Quando $\det(\gamma) = -1$ procedemos de modo análogo, obtemos $d = -a$. ■

Exemplo 3.1 *Determine um conjunto Fundamental para o grupo Fuchsiano $SL_2(\mathbb{Z})$ de $Isom(\mathbb{H})$.*

Solução. Sejam $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ o grupo unimodular e

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

com

$$\|\gamma\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ e } \psi_{(\gamma)} = \begin{pmatrix} A & \bar{C} \\ C & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$-\frac{\bar{A}}{C} = P\psi_{(\gamma)} = \frac{1}{\|\gamma\|^2 - 2} [-2(ab + cd) + (b^2 + d^2) - (a^2 + c^2)]i]$$

implica que

$$|P\psi_{(\gamma)}|^2 = \frac{\|\gamma\|^2 + 2}{\|\gamma\|^2 - 2} \text{ e } R^2\psi_{(\gamma)} = \frac{4}{\|\gamma\|^2 - 2}.$$

Agora, vamos resolver o exemplo em \mathbb{H} . Primeiro note que

$$\eta_0^{-1}(0) = i \text{ e } \|\gamma\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Segundo, vamos ordenar pela norma $\|\gamma\|$.

1º **Passo.** Se $\|\gamma\| = 1$, então

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Assim, pelo menos três dos elementos entre a , b , c e d devem ser iguais a zero, o que é impossível, pois $ad - bc = 1$. Portanto, γ não existe.

2º Passo. Se $\|\gamma\| = 2$, então

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$$

Assim, pelo menos dois elementos entre a , b , c e d devem ser iguais a zero. Logo, teremos as possibilidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3º Passo. Se $\|\gamma\| = 3$, então

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3$$

Assim, pelo menos um dos elementos entre a , b , c e d deve ser igual a zero. Logo, teremos as possibilidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \pm 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos verificar agora que esses três passos são suficientes para determinar o conjunto Fundamental de Γ . Consideremos

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \gamma_1(z) = -\frac{1}{z}.$$

Então

$$\gamma_1(i) = -\frac{1}{i} = i,$$

ou seja, $\gamma_1 \in \Gamma_i$. Assim,

$$\Gamma_i = \langle \gamma_1 \rangle = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(i) = i\}$$

Como $c = 1 \neq 0$ e $a = d = 0$ temos, pelo item (4) do Teorema 3.1, que

$$\mathcal{C}_{\gamma_1} = \Sigma_{\gamma_1}.$$

Note que

$$\gamma_1^2(z) = \gamma_1(\gamma_1(z)) = \gamma_1\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{\frac{-1}{z}} = z$$

implica

$$\gamma_1^2 = I \text{ e } \Gamma_i = \{I, \gamma_1\}.$$

Neste caso,

$$\gamma_1(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{1\bar{z}}{z\bar{z}} = -\left(\frac{1}{|z|^2}\bar{z}\right)$$

Sejam

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1\} \text{ e } \Omega_2 = \{z \in \mathbb{H} : |z| \leq 1\}.$$

Se $|z| = 1$, então $|\gamma_1(z)| = 1$. É fácil verificar que

$$\gamma_1(\Omega_1) = \Omega_2 \text{ e } \gamma_1(\Omega_2) = \Omega_1.$$

Portanto, o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma_i} D_\gamma(i) \\ &= \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1\} \end{aligned}$$

é um conjunto Fundamental de Γ_i .

Finalmente, consideremos

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \gamma_2(z) = z + 1.$$

Então

$$\gamma_2(i) \neq i,$$

$\gamma_2 \in \Gamma - \Gamma_i$ e

$$\Gamma_2 = \langle \gamma_2 \rangle = \{\gamma_2^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

é um subgrupo cíclico de ordem infinita de Γ . Como $c = 0$ e $a = d = 1$ temos, pelo item (4) do Teorema 3.1, que

$$\mathcal{C}_{\gamma_2} = \Sigma_{\gamma_2}$$

é uma reta vertical. Explicitamente,

$$\begin{aligned} x + \frac{ab + cd}{2} &= x + \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{2} \\ &= x + \frac{1}{2} = 0 \\ \Rightarrow x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como

$$\gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} x + \frac{ab + cd}{2} &= x + \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1}{2} \\ &= x - \frac{1}{2} = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_i} D_\gamma(p) \\ &= \left\{ z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

é um conjunto Fundamental de Γ_2 . Consequentemente,

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$$

é um conjunto Fundamental de Γ , confira Figura 3.1.

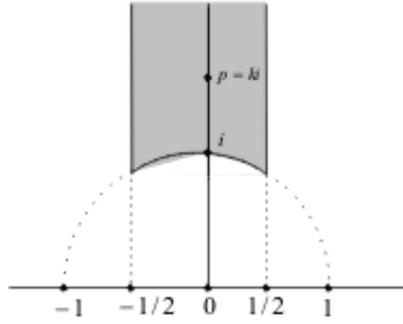


Figura 3.1: Conjunto Fundamental

Proposição 3.1 *Sejam*

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \text{ e } \psi(\gamma) = \begin{pmatrix} A & C' \\ C & A' \end{pmatrix}.$$

Então:

1. $\mathcal{C}_{\psi(\gamma)} = \Sigma_{\psi(\gamma_1)}$.

2.

$$|A|^2 = \frac{2 + \|\gamma\|^2}{4}, |C|^2 = \frac{\|\gamma\|^2 - 2}{4} \text{ e } |A|^2 - |C|^2 = 1.$$

3.

$$P_{\psi(\gamma)} = \frac{1}{-2 + \|\gamma\|^2} [-2(ab + cd) + [(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2)]i].$$

4.

$$\psi(\gamma^{-1})(0) = P_{\psi(\gamma)}^* = \frac{1}{2 + \|\gamma\|^2} [-2(ab + cd) + [(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2)]i].$$

5.

$$\|P_{\psi(\gamma)}\|^2 = \frac{2 + \|\gamma\|^2}{-2 + \|\gamma\|^2}.$$

6.

$$R_{\psi(\gamma)}^2 = \frac{4}{-2 + \|\gamma\|^2}.$$

7. $\Sigma_\gamma = \Sigma_{\gamma_1}$ se, e somente se, $\gamma_1 = \gamma_0\gamma$, onde $\gamma_0 \in \mathrm{SU}(\mathbb{C})$.

Demonstração. Para provar os seis primeiros itens, basta usar as fórmulas explícitas

para $\psi(\gamma)$, A, C , sabendo que $P_{\psi(\gamma)} = C^{-1}A'$. Para o item (7), recordamos que

$$\psi(\gamma_0)(0) = 0$$

se, e somente se, $\psi(\gamma_0)$ é uma aplicação ortogonal e que $\psi(\gamma) \circ \sigma_\gamma$ é também uma aplicação ortogonal. ■

Se $\Gamma \subset \mathcal{C}^+(\mathbb{B}^2)$ é um subgrupo distinto de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}_+$ fixado, então o conjunto

$$\{\gamma \in \Gamma : \|\gamma\| = \lambda\}$$

é finito. Portanto, pela Proposição 1.3, qualquer sequência (γ_n) de Γ de elementos distintos, temos que $R_{\gamma_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, se γ_1 possui a mesma norma, então pelo item (5) da Proposição 3.1, a intersecção de seu círculo isométrico de S^1 possui o mesmo volume Euclidiano. No entanto, não é evidente que este volume é estritamente uma função decrescente da norma. Assim, vamos resolver esse problema.

Sejam

$$\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \text{ com } \gamma \notin \text{SU}(\mathbb{C}),$$

e r a semi-reta passando pela origem e o centro $\Sigma_{\psi(\gamma)}$. Sejam também M e N , respectivamente, a intersecção de r com $\Sigma_{\psi(\gamma)}$ e S^1 . Definimos

$$\rho_\gamma = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|,$$

obtemos

$$\rho_\gamma = 1 + R_{\psi(\gamma)} - \|P_{\psi(\gamma)}\|.$$

Veremos a seguir que ρ_γ , considerado como função de $\|\gamma\|$, é estritamente decrescente. O volume Euclidiano da intersecção de $\Sigma_{\psi(\gamma)}$ com S^1 , mencionada acima, é uma função de ρ_γ .

Lema 3.1 *Seja Γ um subgrupo discreto de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agindo sobre \mathbb{B} . Então ρ_γ é uma função estritamente decrescente de $\|\gamma\|$, onde $\gamma \in \Gamma - \Gamma_0$.*

Demonstração. Consideremos

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Então, pela Proposição 1.3, obtemos $\rho_\gamma = f(\|\gamma\|)$. Assim,

$$f'(x) = -2x(x^2 - 2)^{-\frac{3}{2}}(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}[-2 + \sqrt{x^2 + 2}].$$

Portanto, se $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, então

$$2|\det(\gamma)| \leq \|\gamma\|^2,$$

que é o resultado desejado. ■

Teorema 3.2 *Seja γ uma orientação preservando isometria de \mathbb{B}^n e seja Σ_γ sua esfera isométrica. Então, Σ_γ representa a bissetriz da geodésica ligando a origem 0 e $\gamma^{-1}(0)$.*

Demonstração. Escreva $\gamma = A\sigma$, em que A é uma transformações ortogonal e σ é a reflexão em Σ_γ . Então

$$\gamma^{-1}(0) = \sigma A^{-1}(0) = \sigma(0)$$

e, portanto, 0 e $\sigma(0)$ são pontos de inversão em relação a Σ_γ . Portanto, que Σ_γ é a bissetriz da geodésica ligando 0 e $\sigma(0)$. ■

3.2 Domínios Dirichlet e Ford

Nesta subseção, vamos nos concentrar em um domínio de Ford, que tem dois pontos distintos como centro. Vamos dar um critério algébrico que é fácil de ser verificado. A primeira sequência é a base do que vem a seguir.

Lema 3.2 *Seja $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ um grupo discreto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $a(\gamma) = d(\gamma)$.
2. $\gamma = \sigma_0 \circ \sigma_\gamma$, em que $\sigma_0(z) = -\bar{z}$.
3. Σ_γ é o bissetor do segmento geodésica ligando ti e $\gamma^{-1}(ti)$, para todo $t > 0$.
4. Existe um $t_0 \neq 1$ tal que Σ_γ é o bissetor do segmento geodésica ligando t_0i e $\gamma^{-1}(t_0i)$.

Demonstração. Já vimos que σ_0 é a reflexão no eixo imaginário.

(1 \Leftrightarrow 2) Suponhamos que

$$a = a(\gamma) = d(\gamma) = d.$$

Então, pelo Teorema 3.1, temos que $\Sigma_\gamma = \mathcal{C}_\gamma$. Portanto, a reflexão σ_γ em Σ_γ é definida como

$$\sigma_\gamma(z) = P_\gamma - (|c|^2 \sigma_0(z - P_\gamma))^{-1} = \sigma_0(\gamma(z)),$$

se $c = c(\gamma) \neq 0$. No caso em que $c(\gamma) = 0$, então podemos supor que $a(\gamma) = d(\gamma) = 1$ e, portanto,

$$\sigma_\gamma(z) = \sigma_0(z - b(\gamma)) = \sigma_0(\gamma(z)).$$

Em qualquer caso tem-se que $\gamma = \sigma_0 \circ \sigma_\gamma$.

Reciprocamente, suponhamos que $\gamma = \sigma_0 \circ \sigma_\gamma$. Primeiramente, vamos supor que P_γ exista, ou seja, Σ_γ é um círculo Euclidiano. Neste caso, tem-se que:

$$\gamma(z) = (\sigma_0 \circ \sigma_\gamma)(z) = \frac{-P_\gamma z + P_\gamma^2 - R_\gamma^2}{z - P_\gamma},$$

donde se obtém que $a(\gamma) = d(\gamma)$. Se Σ_γ é uma reta vertical, $x = x_0$, então $\sigma_\gamma(z) = -\bar{z} + 2x_0$. Portanto, $\gamma(z) = \sigma_0 \circ \sigma_\gamma(z) = z - 2x_0$. Logo, $a(\gamma) = d(\gamma)$.

(1 \Leftrightarrow 3) Seja $u \in \Sigma_\gamma$. Então,

$$\begin{aligned} \rho(u, \gamma^{-1}(ti)) &= \rho(\gamma^{-1}(ti), u) \\ &= \rho(\sigma_\gamma \circ \sigma_0(ti), u) \\ &= \rho(\sigma_\gamma(ti), u) \\ &= \rho(ti, \sigma_\gamma(u)) \\ &= \rho(ti, u), \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, Σ_γ é o bissetor da geodésica ligando ti e $\gamma^{-1}(ti)$. Assim, provamos que a primeira afirmação implica a terceira. O terceiro item implica no quarto.

(1 \Leftrightarrow 4) Seja $u \in \Sigma_\gamma$. Então

$$\rho(ti, u) = \rho(u, \gamma^{-1}(ti)) \Rightarrow \rho(ti, u) = \rho(ti, \gamma(u)).$$

Sendo γ uma transformação de Möbius, tem-se que

$$\text{Im}(\gamma(z)) = |\gamma'(z)|\text{Im}(z).$$

Logo, $|\gamma|^2 = |ti - \gamma(u)|^2$. Logo,

$$\text{Re}(u)^2 - \text{Re}(\gamma(u))^2 |\gamma'(u)| = (|\gamma|^2 + (1 - |\gamma'(u)|)) |\gamma|^2.$$

Tudo isto, pode ser escrito como uma equação da forma $at^2 = c$ que tem $t = 1$ e $t = t_0$ como soluções e portanto, $a(t_0^2 - 1) = 0$. Assim, $a = 0$ e $|\gamma'(u)| = 1$, para todo $u \in \Sigma_\gamma$, isto é, $\Sigma_\gamma = \mathcal{C}_\gamma$. Portanto, o Teorema 3.1 agora assegura que:

$$a(\gamma) = d(\gamma).$$

Teorema 3.3 *Seja $\Gamma < \text{SL}(\mathbb{R})$ um subgrupo discreto finitamente gerado de $\mathcal{C}(\mathbb{H})$. Então Γ tem um domínio DF \mathfrak{S} com centro $P_0 = i$ se, e somente se, para cada side-pairing transformation γ ou \mathfrak{S} (transformações lado-a-lado), vale que*

$$d(\gamma) = a(\gamma).$$

Além disso, o grupo $\tilde{\Gamma} = \langle \sigma_0, \Gamma \rangle$ é um grupo de reflexões contendo Γ como um subgrupo de índice dois.

Demonstração. Sendo Γ Fuchsiano, teremos que o conjunto de elementos de Φ sem um círculo isométrico é $\Phi_0 \cap \Gamma_\infty$, e consiste em apenas dois elementos, digamos γ_0 e γ_0^{-1} . Fazendo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \gamma = f(\gamma_0),$$

temos que Σ_γ é uma linha Euclidiana, $|a|^2 + |c|^2 = 1$ e $x = -\frac{ab + cd}{2}$ é uma equação que define Σ_γ . Como Γ tem uma coárea finita, γ_0 é parabólica, e portanto

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & -b_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente

$$f(\gamma_0^{-1}) = f(\gamma_0)^{-1},$$

daí,

$$|d|^2 + |c|^2 = 1,$$

e portanto

$$|a|^2 = |d|^2.$$

Suponha que $c \neq 0$; temos que $\infty \in \Sigma_\gamma$ e $\gamma(\infty) = \frac{a}{c}$. Desde que

$$\gamma(\Sigma_\gamma) = \Sigma_{\gamma^{-1}},$$

resulta que

$$\frac{a}{c} = \frac{db + ac}{2}.$$

Se $a = 0$, então $\gamma_0 \in \Gamma_i$. Se $a \neq 0$, então $d = -a$. Obtemos que $a^2 + bc = -1$, e portanto $\gamma^2 = -1$. Assim, $o(\gamma) = 2$, e portanto, $\Sigma_\gamma = \Sigma_{\gamma^{-1}}$, que é uma contradição. Logo, devemos ter $c = 0$, daí $a^2 = d^2 = 1$, $a = d = 1$ e $b = b_0$. Isto prova que para qualquer $\gamma \in \Phi$, temos que

$$d(\gamma) = a(\gamma).$$

Corolário 3.1 *Seja Γ um grupo Fuchsiano. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. Γ é o subgrupo de isometrias que preservam a orientação de um grupo Fuchsiano de reflexões
2. Γ tem um domínio DF
3. Γ tem um domínio fundamental de Poincaré \mathfrak{S} e $a(\gamma) = d(\gamma)$ para cada side-pairing transformation
4. Γ tem um domínio fundamental de Poincaré \mathfrak{S} que tem dois centros distintos
5. Γ tem um domínio fundamental de Poincaré \mathfrak{S} contendo uma semi-reta geodésica e cada ponto desta semi-reta é um centro de \mathfrak{S}

Demonstração. Vamos provar apenas, que o primeiro item implica o segundo. Fixando um poliedro P para o grupo de reflexão de tal forma que um dos lados do eixo imaginário é por exemplo, Σ . Então, $\sigma^2 \circ \tau$ é o reflexo de Σ . Seja Σ_i um lado de P , denotamos por σ_{γ_i} a reflexão em Σ_i e seja $\gamma_i = \sigma^2 \circ \tau \circ \sigma_{\gamma_i}$. Então, vemos claramente que $\Sigma_i = \Sigma_{\gamma_i}$ e o resto segue utilizando o Lema ??.

3.3 O DAFC Algoritmo

Existe um algoritmo, o DAFC, que é usado para se obter geradores par grupos Fuchsianos e Kleinianos. Este algoritmo se baseia em alguns resultados vistos aqui anteriormente. Para ilustrar o funcionamento deste algoritmo, iremos usar um exemplo clássico da Katok.

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e $\Gamma_{ab} < PSL(2, \mathbb{R})$ o grupo

$$\Gamma_{ab} = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} \frac{l + m\sqrt{a}}{2} & \sqrt{b} \left(\frac{w - u\sqrt{a}}{2} \right) \\ \sqrt{b} \left(\frac{w + u\sqrt{a}}{2} \right) & \frac{l - m\sqrt{a}}{2} \end{pmatrix}, (l, m, u, w) \in \mathbb{Z}^4, \right. \\ \left. l \equiv w \pmod{2}, m \equiv u \pmod{2}, \det(\gamma) = 1 \right\}$$

Podemos escrever tudo isso como um sistema, descrito abaixo:

$$l^2 + abu^2 = nam^2 + bw^2 = n - 4l \equiv w \pmod{2}, m \equiv u \pmod{2},$$

e $\|\gamma\|^2 = n - 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 4$.

Considere o caso em que $a = 3$ e $b = 5$. Para $n = 4$, obtemos apenas a identidade. Assim, teremos $\Gamma_i = 1$. Tomando $n = 16$, obtém-se a unidade

$$\gamma_u = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

tal que $|a|^2 + |c|^2 = 7 - 4\sqrt{3} \leq 1$. Em \mathbb{B}^2 isto nos mostra que i está no interior de Σ_{γ_u} . Usando soluções do sistema para $n = 9$ e $n = 31$, obtemos geradores para um grupo de índice finito. Neste caso, é fácil ver que se trata de um domínio fundamental de todo o grupo. Aqui, a simetria reduz a apenas um, ou seja, σ^2 .

É fácil mostrar que de fato temos geradores para Γ . Note que $\sigma_0(z) = -\bar{z}$ é uma simetria do domínio fundamental. Este é um exemplo de um grupo cocompacto.

Teorema 3.4 *O grupo Γ_{15} é gerado pelo conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Neste último caso, $r(\Gamma) = \frac{3\sqrt{5}}{5} - \sqrt{\frac{4}{5}}$, e a partir daí, podemos obter uma estimativa da coárea de Γ .

Finalmente, considere $H(a, b, \mathbb{Z}) \subset H(a, b, \mathbb{Q})$, com $a > 0, b > 0$ inteiros. Para $u = x + 0 + x_1i + x_2j + x_3k \in H(a, b, \mathbb{Z})$, temos:

$$\gamma_u = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2\sqrt{b} + x_3\sqrt{ab} \\ x_2\sqrt{b} - x_3\sqrt{ab} & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Fazendo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $q_1(x) = q_2(x_0, 0, 0, x_3) - q_2(0, x_1, x_2, 0)$, onde $q_2(x) = x_0^2 + ax_1^2 + bx_2^2 + abx_3^2$, obtemos o seguinte sistema:

$$q_1(x) = 12q_2(x) = \|\gamma\|^2$$

Fazendo $q_2(x_0, 0, 0, x_3) = n$, obtemos:

$$x_0^2 + abx_3^2 = nax_1^2 + bx_2^2 = n - 1 \|\gamma\|^2 = 4n - 2, n \in \mathbb{N}.$$

Tomando agora $a = 2$ e $b = 5$, temos que $n = 1$ ou que $n \geq 9$. Claramente para $\Gamma_i = 1$ e $n = 9$ encontramos um elemento cuja bissetriz Σ separa i e ∞ . Utilizando soluções do sistema para $n \geq 46$, obtém-se um conjunto de geradores para um subgrupo de índice finito. A figura abaixo, mostra o domínio fundamental.

Referências Bibliográficas

- [1] Beardon, A. F. *The Geometry of Discrete Groups*, Springer Verlag NY, 1983.
- [2] Baker, M. D. and Reid, A.W. “Arithmetic knots in closed 3-manifolds”, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, Vol. 11, N.º. 6 (2002) 903-920.
- [3] Conway, J. B. *Functions on one Complex Variable*, Springer-Verlag, 1973.
- [4] Juriaans, S. O.; Lima Neto, S. C. e Silva, A. de A. e “A Note on Discrete Groups,” Submitted, 2012.
- [5] Juriaans, S. O.; Lima Neto, S. C. e Silva, A. de A. e *Noções Básicas de Geometria Hiperbólica*, 2.º Colóquio de Matemática da Região Nordeste, Teresina-PI, 2012.
- [6] Katok, S., *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1992.
- [7] Lakeland, S. “Dirichelet-Ford Domains and Arithmetic Reflection Groups,” *Pacific J. Math*, 2011.
- [8] Lehner, J. *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, Inc.,1966.
- [9] E. Jespers, S. O. Juriaans, A. Kiefer, A. C. Souza Filho, A. de A. e Silva, *Poincaré Bisectors in Hyperbolic Spaces*.
- [10] J.G. Ratcliffe, *Foundation of Hyperbolic Manifolds*, Springer Verlag, 1994.