Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre operadores entre espaços de sequências que atingem a norma

Juan Carlo da Cruz Silva

2009

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre operadores entre espaços de sequências que atingem a norma

por

Juan Carlo da Cruz Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

02 de Dezembro de 2009
João Pessoa-PB

Sobre operadores entre espaços de sequências que atingem a norma

por

Juan Carlo da Cruz Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos de Oliveira Teixeira - UFC

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro - UFU

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

"A Deus Pai, que em seu infinito amor escolhe seus eleitos, toda glória,
pois em mim Ele tudo realizou."
,

Agradecimentos

Ao Mestre dos mestres, *DEUS*, que merece todo amor do mundo e toda a gratidão do meu ser. Ele é o autor de tudo, a Ele honra, glória e louvor, pois em mim e por mim tudo realizou. Sem Ele este trabalho jamais teria existido, jamais teria sido possível, jamais teria sido concluído. Toda glória Àquele que em mim tudo realizou verdadeiramente.

Aos meus primeiros e constantes mestres, *Adélia da Cruz Silva* e *Leonides Fernandes da Silva*, meus amados pais. Em minha vida, através da dedicação e amor que me empreenderam, foram sempre eles os meus mestres. A eles minha eterna gratidão e amor, foi pela vida deles - doadas continuamente para que eu tivesse vida e estudos - que também tudo se realiza.

À minha irmã, *Leyla da Cruz Barbalho*, por ter sido sempre um referencial de educadora e amiga, e também por ter sempre me dado seu apoio e sua palavra de esperança que eu poderia conseguir.

À minha namorada *Paula Lorena*, grande ajuda de Deus para que, nos momentos difíceis, estivesse ao meu lado me dando uma palavra de esperança e de sabedoria que me levava a não desistir e nem deixar de acreditar que era possível, pois era Vontade de Deus.

Aos *professores* de todo decorrer de minha história estudantil. Como professor sei que não é nada fácil os desafios da profissão, mas foi pela vida deles que tudo aconteceu e que cada etapa foi vencida. Muitos repletos de qualidades que tento, até hoje, ainda colher e outros com defeitos que tento lançar fora de minha vida e personalidade, mas que sei que os possuo e tenho que lidar com eles.

Em especial agradeço ao meu orientador, *Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino*, que sempre foi solícito, acreditou na minha capacidade e esteve sempre a me conduzir, incentivar e, quando necessário, refrear com paciência e boa vontade. Não foi nada fácil me orientar, sei que dei muito trabalho, por isso, à ele minha gratidão.

Aos meus amigos, *Andreza Henriqueta, Edilson Filho,Elias Claudino* e *Stela Rocha* que nesse tempo de mestrado sempre se preocuparam, rezaram, incentivaram e ajudaram, bem como a todos os irmãos e irmãs da *Comunidade Católica Shalom de João Pessoa/PB (C. de Vida, C. de Aliança e Obra Shalom)* que me acolheram como membro de suas famílias e me amaram sempre.

Estendo minha gratidão a toda a *Comunidade Católica Shalom,* em especial aos meus irmãos de Natal/RN: *Flávio Júnior, Leandro Patrício, Rita de Cássia e Emmanoel.* A Comunidade sempre foi e será meu lar e minha vocação, e agradeço aos que ela pertencem e comprometem sua vida para que no coração da Igreja Católica sejamos sempre testemunhas de que Deus "não tira nada, e doa tudo. Quem se doa a Ele, recebe o cêntuplo."(Papa Bento XVI), pois pela vida deles tenho força e coragem para também dar a minha livremente.

Aos meus colegas de Pós-graduação, obrigado por estarem sempre comigo, me ajudando, nas horas de necessidade.

À *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* - CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um recente resultado, devido a D. Pellegrino e E. V. Teixeira, que caracteriza os operadores lineares contínuos entre espaços l_p que atingem a norma. Para tanto, vamos desenvolver alguns tópicos da teoria de bases em espaços de Banach e também mostrar alguns importantes resultados da teoria de espaços de Banach, tais como o Teorema de Banach sobre bases, o Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński e o Teorema de Pitt.

Palavras-Chave:
Bases de Schauder, Sistema Biortogonal, Bases Equivalentes, Critério de Grymblyum-Nikol'skii, Sequência Básica, Princípio de Seleção, Teorema de Pitt, operadores que atingem a norma.

Abstract

In this work we present a recent result, due to D. Pellegrino and E. V. Teixeira, that characterizes the continuous linear operators between l_p spaces which attain their norms. To this end, we firstly explore some topics from the Banach space theory, such as Banach's Theorem for basis, Bessaga-Pełczyński Selection Principle and Pitt's Theorem.

Key-Words:

Schauder basis, Biorthogonal system, Equivalent basis, Grymblyum-Nikol'skii criterium, Basic sequence, Bessaga-Pełczyński Selection Principle, Pitt's Theorem, norm attaining operators.

Sumário

Introdução

Em 1961, com a publicação do trabalho de Bishop e Phelps [2] tem-se início dentro da Análise Funcional - ramo da Análise Matemática surgido por volta de 1920 - o estudo de operadores lineares que atingem a sua norma, suas caracterizações e aplicações nos mais diferentes contextos da teoria dos espaços de Banach. Na realidade, o resultado do artigo refere-se a funcionais lineares mas, no mesmo trabalho, vemos especulações sobre uma possível extensão para os operadores. O resultado de Bishop e Phelps provocou, principalmente devido às suas aplicações, uma busca por soluções das mais diversas questões relacionadas aos operadores que atingem a norma.

Nesse contexto, esta dissertação acrescenta um resultado recentemente desenvolvido. Tal resultado é uma caracterização do conjunto dos operadores entre espaços l_p que atingem a norma. Para tanto, nossa proposta pretende apresentar alguns tópicos da teoria de espaços de Banach, demonstrando resultados clássicos (às vezes pouco conhecidos), e criar condições de, a partir de um curso introdutório de Análise Funcional, podermos entender os resultados dessa linha de pesquisa.

Em um contexto mais amplo podemos também estudar propriedades geométricas do conjunto dos operadores que atingem a norma dentro do conjunto de todos os operadores lineares contínuos entre espaços l_p, conforme aparece em [13], em relação a questões de lineabilidade. Historicamente essa via de estudo foi utilizada, por exemplo, no próprio Teorema de Bishop-Phelps (3.1.2) e no Teorema de Lindenstrauss (3.1.5), que estudam a densidade do conjunto dos operadores que atingem a norma. Entretanto, esse não é o objetivo de nosso trabalho, pois optamos por construir um elo de ligação entre resultados clássicos da teoria de espaços de Banach e o o resultado central de nosso trabalho.

Apresentaremos, a seguir, a estrutura dos tópicos apresentados em nosso trabalho, notações básicas e terminologia.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1, apresentamos os resultados introdutórios da teoria de bases em espaços de Banach, através de tópicos importantes para construção dos conceitos que nos são úteis no decorrer do trabalho. Nossas principais referências neste capítulo foram [1], [6], [11].

No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados essenciais sobre bases e operadores lineares compactos. Enunciamos e demonstramos resultados importantes, destacando o Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński e o Teorema de Pitt. Para este capítulo nossas principais referências foram [1], [11] e [15].

No Capítulo 3 chegamos ao resultado principal de nosso trabalho, mas também descrevemos um itinerário de desenvolvimento da teoria com atenção especial aos resultados relevantes da mesma, e apontamos algumas direções nas quais é possível ainda expandir mais os resultados do trabalho. Evidentemente nossas referências neste capítulo são acerca de teoria, sendo a principal delas, [13].

Notação e Terminologia

Neste trabalho, faremos o uso da seguinte simbologia:

- $\mathbb{K}$ denotará corpo, geralmente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Geralmente, $X, Y, E, F, G, ...$ denotarão espaços de Banach sobre $\not{\mathbb{K}}$. A norma será usualmente denotada por $\|.\|$; quando for necessário, usaremos $\|.\|_X$ para nos referirmos a norma no espaço X.
- $B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ e $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$.
- X^* indica o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos de X em $\mathbb{R}$.
- $\sigma(E, E^*)$ denota a topologia fraca no espaço E e $\sigma(E^*, E)$ denota a topologia fraca estrela em E^*.
- A notação $\xrightarrow{w}$ ou $\overset{w}{=}$ indica convergência fraca.
- $int(X)$ indica o interior do conjunto X.
- $Graf(f) = \{(x, y) \in D(f) \times \mathrm{Im}(f); y = f(x)\}$, onde $D(f)$ denota o domínio da função f, é o gráfico do funcional f.
- $\dim(X)$ é a dimensão do espaço X.
- $[X]$ indica o espaço vetorial gerado pelo conjunto X.
- $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, é chamada a função delta de Kronecker.
- $\overline{X}^w$ indica o fecho do conjunto X na topologia fraca.
- $\mathcal{C}([a, b])$ é o conjunto das funções de valores reais contínuas em $[a, b]$.
- $\mathcal{L}(X; Y)$ é o conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y.
- l_p $(1 \leq p < \infty)$ é o espaço das sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, com norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Capítulo 1

Bases em espaços de Banach

Ao trabalharmos com espaços vetoriais, mesmo sendo estes espaços de Banach, sem maiores dificuldades nos remetemos à Álgebra Linear, onde temos o conceito de base. Neste âmbito, uma base é um conjunto linearmente independente de vetores tais que qualquer vetor do espaço é escrito de modo único como combinação linear (finita) de elementos deste conjunto. As bases da Álgebra Linear são denominadas de **bases de Hamel**.

Nosso trabalho considera um conceito de base distinto, que será definido na primeira seção deste capítulo e que utiliza séries para substituir as combinações lineares finitas, pois estamos trabalhando com espaços de dimensão infinita (segundo o conceito de dimensão da Álgebra Linear) e que possuem, por serem normados, uma noção de convergência.

Além disso, neste capítulo vamos estudar as bases nos espaços de Banach a fim de que possamos compreender o comportamento de alguns espaços de Banach que iremos trabalhar ao estudar operadores que atingem a norma, a saber, os espaços l_p. Bem como, desenvolveremos o estudo das bases para entender os resultados que nos darão alicerce para desenvolvermos os teoremas acerca de operadores que atingem a norma.

1.1 Conceitos Introdutórios

Antes de partirmos para nossa definição de base, vejamos, pela proposição abaixo, como nos seria dispendioso trabalharmos com o conceito de bases de Hamel nos espaços de Banach com dimensão infinita.

Proposição 1.1.1 *Nenhum espaço normado de dimensão infinita com base de Hamel enumerável é completo.*

Demonstração. Suponha que X seja um espaço de Banach com dimensão infinita e seja Ψ uma base de Hamel enumerável de X. Assim, enumeramos os elementos de

Ψ como $v_1, v_2, ...$; é claro que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_n = [v_1, ..., v_n]$. Como cada F_n tem dimensão finita e é fechado, pelo Teorema 4.2.1 (de Baire), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(F_{n_0}) \neq \varnothing$, o que é uma absurdo, pois um subespaço próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio. ■

Portanto, segundo a Proposição 1.1.1, para trabalhar com espaços de Banach, ou seja, espaços completos, teríamos que considerar uma base não-enumerável para estes espaços, e isso seria muito inconveniente. Portanto, vejamos os conceitos de base que utilizaremos em nosso trabalho.

Definição 1.1.2 *Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de elementos de X. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma* ***base fraca*** *de X quando dado qualquer $x \in X$, existe uma representação única de x na forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, onde $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, e a série converge na topologia fraca.*

Definição 1.1.3 *A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é dita* ***base*** *de X quando para cada $x \in X$ tem-se uma representação única da forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, onde $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, e a série converge na topologia da norma.*

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base (ou base fraca) de X, os funcionais $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dados por

$$f_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n$$

são chamados de **funcionais coeficientes**.

Definição 1.1.4 *Uma* ***base de Schauder*** *(ou* ***base de Schauder fraca****) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de um espaço de Banach X é uma base em que os funcionais coeficientes são contínuos. Pela unicidade da representação, temos que os funcionais coeficientes devem ser lineares; logo, para uma base ser Schauder, temos que $f_n \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Vejamos agora que os conceitos de base (e base fraca) e base de Schauder (e base de Schauder fraca) são semelhantes nos espaços de Banach. O seguinte resultado elementar sobre topologia fraca será utilizado na Proposição 1.1.6 e no Teorema 2.2.7 (de Pitt). Para detalhes da demonstração veja a Proposição III.5 em [4].

Lema 1.1.5 *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de um espaço vetorial normado X. Então:*
(i) $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somante se $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$.
(ii) Se $x_n \longrightarrow x$, então $x_n \xrightarrow{w} x$.
(iii) Se $x_n \xrightarrow{w} x$, então $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
(iv) Se $x_n \xrightarrow{w} x$ e $f_n \longrightarrow f$ em X^*, então $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Proposição 1.1.6 *Toda base fraca de um espaço de Banach X é uma base de Schauder fraca.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base fraca de X e $\mathcal{L}$ o espaço vetorial das sequências de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ existe na topologia fraca. Então, dado $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}$,

$$\rho(a) := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

é real não-negativo. De fato, considere $B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i ; n \in \mathbb{N} \right\}$. Temos que

$$f(B) = \left\{ f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

é limitado para todo $f \in X^*$, pois

$$\sum_{n} a_n x_n \text{ converge na topologia fraca para um certo } x$$

$$\iff \lim_{n \longrightarrow \infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = f(x) \text{ para todo } f \in X^*.$$

Logo, pelo Corolário 4.2.4 (do Teorema de Banach-Steinhaus) segue que

$$\sup \{ \|x\| ; x \in B \} < \infty.$$

Além disso, note que ρ é norma em $\mathcal{L}$. De fato, se $\rho(a) = 0$, então

$$0 = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\} \geq \|a_1 x_1\| \implies a_1 = 0.$$

$$0 = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\} \geq \|a_1 x_1 + a_2 x_2\| \implies a_2 = 0.$$

Repetindo o procedimento, temos que $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Temos ainda que

$$\rho(\lambda a) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\} = \sup \left\{ \left\| \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= |\lambda| \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\} = |\lambda| \, \rho(a),$$

para todo escalar λ. Por fim,

$$\begin{aligned}\rho\,(a+b) &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x_i\right\|;n\in\mathbb{N}\right\} \leq \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right\|;n\in\mathbb{N}\right\}\\ &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|;n\in\mathbb{N}\right\}+\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right\|;n\in\mathbb{N}\right\} = \rho(a)+\rho(b).\end{aligned}$$

Agora, para $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{L}$, defina $T:\mathcal{L}\longrightarrow X$ por

$$T(a)\overset{w}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n.$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base fraca e a representação de $T(a)$ é única, temos que T é linear e bijetiva. Além disso, se $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{L}$, então,

$$\|T(a)\| \overset{\text{(Lema 1.1.5 } (iii))}{\leq} \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left\|\sum_{j=1}^{n}a_nx_n\right\| \leq \rho(a).$$

Logo T é contínua.

Agora vamos mostrar que $(\mathcal{L},\rho)$ é Banach. Com efeito, seja $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}$ e suponha que, para todo $k\in\mathbb{N}$, tenhamos $c_k=\left(a_n^k\right)_{n=1}^{\infty}$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|a_n^k-a_n^j\right|\|x_n\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^k-a_i^j)x_i-\sum_{i=1}^{n-1}(a_i^k-a_i^j)x_i\right\|\\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^k-a_i^j)x_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i^k-a_i^j)x_i\right\|\\ &\leq 2\rho(c_k-c_j).\end{aligned}$$

Logo, para cada $n\in\mathbb{N}$ fixado, $\left(a_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy de escalares, e portanto convergente. Agora, sejam, para cada n natural,

$$a_n^0=\lim_{k\longrightarrow\infty}a_n^k$$

e

$$c_0=\left(a_n^0\right)_{n=1}^{\infty}.$$

A seguir, veremos que $c_0\in\mathcal{L}$ e

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\rho\,(c_0-c_k)=0. \tag{1.1}$$

De fato, seja $\varepsilon>0$. Como $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, existe $r_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$k,l\geq r_\varepsilon \implies \rho(c_k-c_l)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Agora, pela definição de ρ, vemos que

$$k, l \geq r_\varepsilon \implies \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^k - a_i^l) x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo n natural. Daí, fazendo $k \longrightarrow \infty$, temos

$$l \geq r_\varepsilon \implies \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^0 - a_i^l) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.2}$$

para todo n natural. Como T é contínuo e operadores lineares contínuos preservam sequências de Cauchy, $(T(c_k))_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X; logo, existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0 - T(c_k)\| \longrightarrow 0$ e portanto, para algum $q_\varepsilon \geq r_\varepsilon$, temos

$$\|x_0 - T(c_{q_\varepsilon})\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Agora mostremos que $c_0 \in \mathcal{L}$ e que vale (1.1) e isso garantirá que $(\mathcal{L}, \rho)$ é Banach.

Considere $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| \leq 1$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base fraca, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (dependendo de x^* e de q_ε) tal que

$$n > n_\varepsilon \implies \left| x^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{q_\varepsilon} x_i - T(c_{q_\varepsilon}) \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.4}$$

Segue que, se $\|x^*\| \leq 1$ e $n > n_\varepsilon$, então

$$\begin{aligned}
&\left| x^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^0 x_i - x_0 \right) \right| \\
&\leq \left| x^* \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^0 - a_i^{q_\varepsilon}) x_i \right) \right| + \left| x^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{q_\varepsilon} x_i - T(c_{q_\varepsilon}) \right) \right| + |x^*(T(c_{q_\varepsilon})) - x^*(x_0)| \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^0 - a_i^{q_\varepsilon}) x_i \right\| + \left| x^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{q_\varepsilon} x_i - T(c_{q_\varepsilon}) \right) \right| + \|T(c_{q_\varepsilon}) - x_0\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

por (1.2), (1.3) e (1.4).

Segue que

$$x_0 \overset{w}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 x_n$$

e portanto $c_0 \in \mathcal{L}$. Por (1.2), temos ainda que $\lim\limits_{l \longrightarrow \infty} \rho(c_0 - c_l) = 0$ e concluímos que $(\mathcal{L}, \rho)$ é Banach.

Pelo Teorema 4.2.5 (da Aplicação Aberta) temos que T é um isomorfismo topológico. Assim, se $\alpha = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{L}$ e $x = T(\alpha)$ temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, e cada funcional coeficiente f_n,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)|\,\|x_n\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i\right\| \\
&\leq 2\rho(\alpha) \leq 2\left\|T^{-1}\right\|\|x\| \\
&\Longrightarrow\ |f_n(x)| \leq \frac{2\left\|T^{-1}\right\|\|x\|}{\|x_n\|}.
\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que cada funcional coeficiente f_n é contínuo; logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder fraca. ■

Proposição 1.1.7 *Toda base de um espaço de Banach X é base de Schauder.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ base de X e $\mathcal{L}$ o espaço formado pelas sequências $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ existe. Defina $\rho(a) := \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|; n \in \mathbb{N}\right\}$ e note que isso define uma norma em $\mathcal{L}$ (conforme na proposição anterior). Vamos mostrar que $(\mathcal{L}, \rho)$ é Banach.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, seja $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}$; assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $c_k = \left(a_n^k\right)_{n=1}^{\infty}$. Como antes, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|a_n^k - a_n^j\right|\|x_n\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^k - a_i^j)x_i - \sum_{i=1}^{n-1}(a_i^k - a_i^j)x_i\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^k - a_i^j)x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i^k - a_i^j)x_i\right\| \\
&\leq 2\rho(c_k - c_j).
\end{aligned}$$

Então $\left(a_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, e portanto convergente. Novamente, sejam

$$a_n^0 = \lim_{k \longrightarrow \infty} a_n^k$$

e $c_0 = (a_n^0)_{n=1}^{\infty}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que, $c_0 \in \mathcal{L}$ e $\rho\,(c_0 - c_k) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$.

De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então por $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ ser de Cauchy, existe $r_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq r_\varepsilon \implies \rho(c_k - c_l) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, l \geq r_\varepsilon \implies \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^k - a_i^l)x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como antes, fazendo $k \longrightarrow \infty$,

$$l \geq r_\varepsilon \implies \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^0 - a_i^l) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, como $c_{r_\varepsilon} = (a_n^{r_\varepsilon})_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_\varepsilon \implies \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^{r_\varepsilon} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.6}$$

Daí,

$$m > n > n_\varepsilon \implies \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^0 x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n}^{m} (a_i^0 - a_i^{r_\varepsilon}) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^{r_\varepsilon} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Assim, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^0 x_i \right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 x_n$ converge na norma (pois X é completo). Segue que $c_0 \in \mathcal{L}$; por (1.5), temos

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} \rho\,(c_0 - c_l) = 0.$$

Como na demonstração da Proposição 1.1.6, pelo Teorema 4.2.5 (Aplicação Aberta) temos que $T : X \longrightarrow \mathcal{L}$ é isomorfismo. Segue, analogamente à demonstração anterior, que os funcionais coeficientes são contínuos; logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder. ■

Proposição 1.1.8 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ base do espaço de Banach X e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ os funcionais coeficientes associados. Então $f_n \in X^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe $M \geq 1$ tal que*

$$1 \leq \|f_n\| \, \|x_n\| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, temos

(i) $\inf\{\|x_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} > 0$ *se, e somente se,* $\sup\{\|f_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty$

(ii) $\sup\{\|x_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty$ *se, e somente se,* $\inf\{\|f_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Demonstração. A continuidade dos f_n foi provada na Proposição 1.1.7. Considere a norma

$$\|x\|_1 := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

em X, onde $X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Note que há uma isometria natural entre $(\mathcal{L}, \rho)$ e $(X, \|.\|_1)$; como $T : (\mathcal{L}, \rho) \longrightarrow (X, \|.\|)$, definido na demonstração da Proposição 1.1.7, é um isomorfismo, segue que as normas $\|.\|_1$ e $\|.\|$ são equivalentes. Pelo Corolário 4.2.6 (do Teorema da Aplicação Aberta), existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|$. Agora, sejam $x \in X$ e n fixo; então

$$|f_n(x)| = \frac{\|f_n(x)x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)x_i - \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i\right\|}{\|x_n\|}.$$

Logo

$$|f_n(x)| = \frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)x_i - \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i\right\|}{\|x_n\|} \leq \frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right\| + \left\|\sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x)x_i\right\|}{\|x_n\|} \leq \frac{2\|x\|_1}{\|x_n\|} \leq \frac{2c\|x\|}{\|x_n\|}.$$

Daí,

$$\|f_n\| \leq \frac{2c}{\|x_n\|}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, se $M = 2c$, segue da unicidade da representação que $f_n(x_n) = 1$ e assim

$$1 = |f_n(x_n)| \leq \|f_n\| \|x_n\| \leq 2c = M.$$

As conclusões (i) e (ii) seguem facilmente. ■

1.2 Sistema Biortogonal e Bases de Schauder

Nesta seção consideraremos os conceitos de sistema biortogonal e de sequência básica, com o objetivo de mostrar que os conceitos de base que definimos na seção anterior, em espaços de Banach, são os mesmos. Esse resultado é devido a Banach e tem, em sua homenagem, o nome de *Teorema da Base Fraca de Banach*. Além disso, nesta seção vamos exibir algumas caracterizações relacionadas a bases de um espaço de Banach (Teorema 1.2.5 e Teorema 1.2.8).

Definição 1.2.1 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ sequências de elementos de X e X^*, respectivamente. Dizemos que $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um* ***sistema biortogonal*** *quando $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Neste caso, dizemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o operador linear $u_n : X \longrightarrow X$, dado por $u_n(x) := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^*(x)x_j$ é o* ***operador expansão do sistema biortogonal*** *$(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$.*

Observação 1.2.2 *Note que, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é a sequência dos funcionais coeficientes associados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, então $(x_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal (a Proposição 1.1.8 garante a continuidade). Além disso, estes funcionais coeficientes* *associados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ são únicos. De fato, se $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ formam um outro sistema biortogonal, então*

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm} = f_n(x_m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Logo segue facilmente que $x_n^* = f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.2.3 *Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder para X e $u_n(x_n) = x_n$, então $\|u_n\| \geq 1$, pois $\|u_n\| \geq \left\| u_n\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|x_n\|}\|u_n(x_n)\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = 1$.*

Definição 1.2.4 *Chamamos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de* ***sequência básica*** *em X quando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base (de Schauder) de $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$, onde $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ denota o espaço gerado por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Teorema 1.2.5 *Seja $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ um sistema biortogonal no espaço de Banach X. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X;

(ii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) = x \ \forall x \in X$;

(iii) $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]} = X$ e $\sup\{\|u_n(x)\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty \ \forall x \in X$;

(iv) $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]} = X$ e $\sup\{\|u_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Demonstração. $(i) \implies (ii)$:

Sabemos que se $x \in X$, então

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)x_j$$

e, da Observação 1.2.2 sabemos que $f_j(x) = x_j^*(x)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x)x_j = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(x)x_j = x.$$

$(ii) \implies (iii)$:

Seja $x \in X$. Note que

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i.$$

Logo, $x \in \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$, e assim $X = \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Como $(u_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, então é limitada; logo

$$\sup\{\|u_n(x)\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

para todo $x \in X$.

$(iii) \implies (iv)$:

Segue diretamente do Teorema 4.2.3 (Banach-Steinhaus), pois $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma família de operadores tal que, para todo $x \in X$, existe $C_x < \infty$ com

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(x)\| < C_x.$$

Assim, segue que $\sup\{\|u_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

$(iv) \implies (ii)$:

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, se $x = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$, note que $u_n(x) = x$, para todo $n \geq m$. Desse modo, como o conjunto

$$\left\{\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \in X; m \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{K},\ j = 1, ..., m\right\}$$

é denso em X, temos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) = x$, para todo x num subespaço denso em X. Agora, suponha $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dado. Escolha $x \in [(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ com $\|x - x_0\| < \varepsilon$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies u_n(x) = x.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} n > n_0 \implies & \|u_n(x_0) - x_0\| \leq \|u_n(x_0) - u_n(x)\| + \|u_n(x) - x\| + \|x - x_0\| \\ \leq & \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|\right) \|x - x_0\| + \|x - x_0\| \\ \leq & \left(1 + \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$x_0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x_0).$$

$(ii) \implies (i)$:

Por (ii) temos que para todo $x \in X$,

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*(x)\, x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x)\, x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j,$$

onde $a_j = x_j^*(x)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

De fato, os elementos a_j são únicos, pois se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x)\, x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j$, então, $\sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^*(x) - b_j\right) = 0$. Assim, para cda x_i^* temos que $x_i^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^*(x) - b_j\right) x_j\right) = 0$, logo, $\sum_{j=1}^{\infty}\left(x_j^*(x)-b_j\right)\left(x_i^*(x_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(x_j^*(x)-b_j\right)\delta_{ij} = 0$, ou seja, $x_j^*(x)-b_j = 0$, donde $x_j^*(x)=b_j$ para todo $j\in\mathbb{N}$.

Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X. ∎

Corolário 1.2.6 *Se $(x_n,x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal no espaço de Banach X e*

$$\sup\{\|u_n\|\,;n\in\mathbb{N}\}<\infty,$$

então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em X.

Demonstração. Tome $Y=\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$ em X. Do Teorema 1.2.5 *(iv)* aplicado a Y, temos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$, e o resultado segue. ∎

Corolário 1.2.7 *Seja $(x_n,x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ um sistema biortogonal em X com*

$$\sup\{|x^*(u_n(x))|\,;n\in\mathbb{N}\}<\infty, \tag{1.7}$$

para todo $x\in X$ e para todo $x^*\in X^*$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em X.

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.3 (Banach-Steinhaus) e por (1.7), temos

$$\sup\{\|x^*\circ u_n\|\,;n\in\mathbb{N}\}<\infty$$

para cada $x^*\in X^*$.

Defina $S_n: X^*\longrightarrow X^*$, dada por $S_n(x^*)=x^*\circ u_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. É claro que S_n é linear e contínua. Além disso,

$$\begin{aligned}\|S_n\| &= \sup\{S_n(x^*)\,;x^*\in B_{X^*}\}\\ &= \sup\{\sup\{|x^*(u_n(x))|\,;x\in B_X\}\,;x^*\in B_{X^*}\}\\ &= \sup\{\sup\{|x^*(u_n(x))|\,;x^*\in B_{X^*}\}\,;x\in B_X\}\\ &= \sup\{\|u_n(x)\|\,;x\in B_X\}\\ &= \|u_n\|.\end{aligned}$$

Agora, como $\sup\{\|S_n(x^*)\|\,,n\in\mathbb{N}\}=\sup\{\|x^*\circ u_n\|\,;n\in\mathbb{N}\}$, para todo $x^*\in X^*$, segue do Teorema 4.2.3 que

$$\sup\{\|S_n\|\,,n\in\mathbb{N}\}<\infty$$

e como $\|u_n\|=\|S_n\|$, para todo $n\in\mathbb{N}$, segue que

$$\sup\{\|u_n\|\,;n\in\mathbb{N}\}<\infty.$$

Pelo Corolário 1.2.6, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em X. ∎

Teorema 1.2.8 *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é base do espaço de Banach* X *se, e somente se, existe* $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *em* X^* *tal que* $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *é um sistema biortogonal em* X *com* $u_n(x) \xrightarrow{w} x$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X, sabemos que é base de Schauder de X. Tome $x_n^* = f_n \in X^*$. Nesse caso,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i \right) \overset{(1.2.5)}{=} x,$$

para todo $x \in X$.

Reciprocamente, seja $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ um sistema biortogonal em X tal que

$$u_n(x) \xrightarrow{w} x, \tag{1.8}$$

para todo $x \in X$. Então, se $x \in X$ e $x^* \in X^*$, segue da convergência fraca que

$$\sup\{|x^*(u_n(x))|\,; n \in \mathbb{N}\} \overset{(1.8)}{<} \infty.$$

Pelo Corolário 1.2.7, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Agora vejamos que de fato $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X.

Seja $z \in X$. Por hipótese, temos que

$$z \in \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}^{w}.$$

Do Teorema 4.2.9 (Teorema de Mazur) sabemos que

$$\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}^{w} = \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]},$$

pois, $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ é convexo. Logo

$$z \in \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$$

e segue que $X = \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$ e o resultado segue. ■

Teorema 1.2.9 (da Base Fraca de Banach) *Se* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma base fraca de um espaço de Banach* X, *então* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma base de Schauder de* X.

Demonstração. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base fraca de X então, pela Proposição 1.1.6, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder fraca de X. Desse modo, os funcionais coeficientes $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ correspondentes (da base de Schauder fraca) estão em X^*. Note que mesmo estando no contexto de bases fracas, os funcionais coeficientes satisfazem $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ e consequentemente $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal em X. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base fraca de X, temos que $u_n(x) \xrightarrow{w} x$ para todo $x \in X$. Assim, pelo Teorema 1.2.8, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de X, pela Proposição 1.1.7. ■

1.3 Bases Equivalentes

Iniciamos esta seção com um resultado que caracteriza sequências básicas de espaços de Banach. Esse resultado será bastante utilizado *a posteriori*. Ainda nesta seção vamos definir e caracterizar equivalência entre bases de espaços distintos. O conceito de equivalência é importante para entendermos o enunciado do Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński.

Um resultado importante desta seção mostrará que todo subespaço denso de um espaço de Banach possui uma base desse espaço; esse resultado, creditado a Krein, Rutman e Milman, é notável na teoria de espaços de Banach.

Teorema 1.3.1 (Critério de Grymblyum-Nikol'skii) *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores não-nulos de um espaço de Banach X é basica se, e somente se, existe $M \geq 1$ tal que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \tag{1.9}$$

para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq n$.

Demonstração. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$ e, denotando por x_n^* os funcionais coeficientes de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, então, para todo n natural, o operador expansão

$$u_n(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i,$$

converge em $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$, logo $(u_n(x))$ é limitada para todo $x \in \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Então, pelo Teorema de Banach-Steinhaus (veja Teorema 4.2.3), temos que

$$M := \sup\{\|u_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Assim, para quaisquer escalares a_j, com $j \in \mathbb{N}$, temos

$$n \geq m \Longrightarrow u_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} x_j^*(x_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i,$$

pois $i = m+1, ..., n$, temos que $\sum_{j=1}^{m} x_j^*(x_i) = 0$ e daí $\sum_{i=m+1}^{n} a_i u_m(x_i) = 0$.

Portanto,

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| = \left\|u_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\right\| \leq \|u_m\| \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$.

Reciprocamente, seja $F = [(x_n)_{n=1}^{\infty}] \subset \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Por (1.9), temos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é linearmente independente. De fato, se $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, então

$$\begin{aligned} \|a_1 x_1\| &\leq M \|a_1 x_1 + ... + a_n x_n\| \\ &\Longrightarrow \|a_1 x_1\| \leq 0 \\ &\Longrightarrow a_1 = 0, \text{ pois } x_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, temos que $a_2 = ... = a_n = 0$.

Agora defina

$$\begin{aligned} f_n : \ & F \longrightarrow \mathbb{K} \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \mapsto \lambda_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_n : F &\longrightarrow \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}. \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j &\mapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \end{aligned}$$

Novamente, por (1.9), se

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in F \tag{1.10}$$

e n é um natural, temos

$$\|T_n(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| \leq M \|x\|, \text{ se } n \leq k$$

e

$$\|T_n(x)\| = \|x\|, \text{ se } n > k.$$

Logo, qualquer que seja o caso, existe $C \geq 1$ tal que

$$\|T_n\| \leq C$$

para todo n natural.

Note ainda que, para x dado por (1.10), temos

$$f_n(x) = 0 \text{ se } n > k$$

e, se $n \leq k$, temos

$$|f_n(x)| = |\lambda_n|.$$

Assim, para o caso $n \leq k$, obtemos

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| \, \|x_n\| = |\lambda_n| \, \|x_n\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \\
&\leq 2M \, \|x\| \, .
\end{aligned}$$

Logo, segue que, em qualquer caso,

$$|f_n(x)| \leq \frac{2M \, \|x\|}{\|x_n\|}$$

para todo $x \in F$ e $n \in \mathbb{N}$. Como F é denso em $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$, cada f_n e cada T_n tem uma única extensão contínua a todo $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Denotemos tais extensões por $\widetilde{f_n}$ e $\widetilde{T_n}$.

Agora, dados $x \in \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$ e $\varepsilon > 0$, seja $y = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \in F$ tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Então, para todo $n > m$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| x - \widetilde{T_n}\,(x) \right\| &\leq \|x - y\| + \left\| y - \widetilde{T_n}\,(y) \right\| + \left\| \widetilde{T_n}\,(y) - \widetilde{T_n}\,(x) \right\| \\
&\leq \|x - y\| + \|y - y\| + \left\| \widetilde{T_n} \right\| \|x - y\| \\
&\leq (1 + C)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto

$$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} \widetilde{T_n}\,(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{f_j}\,(x)\, x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{f_j}\,(x)\, x_j.$$

Por fim, vamos mostrar que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j = 0 \Longrightarrow \lambda_n = 0 \tag{1.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que de 1.11 segue a unicidade da representação dos vetores de $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$ sob a forma $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo

$$n > n_0 \Longrightarrow \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| \leq \varepsilon. \tag{1.12}$$

Por (1.9) e (1.12), temos

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j\right\| \leq M\varepsilon$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|\lambda_n|\,\|x_n\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j x_j\right\| \leq 2M\varepsilon$$

para todo n natural. Como os x_n são não-nulos, temos que $\lambda_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de $\overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$, ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sequência básica de X. ■

Observação 1.3.2 *Note que se $M \in \mathbb{R}$ satisfaz (1.9) então, dado u_n um operador expansão e $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X$, temos que para todo $m \geq n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\|u_n(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\| &\leq M\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\right\| \\ &\leq M \lim_{m\longrightarrow\infty}\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\right\| = M\|x\|.\end{aligned}$$

Portanto, $\|u_n\| \leq M$, ou seja,

$$\sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\} \leq M.$$

Agora, a demonstração da primeira parte do Teorema 1.3.1 nos mostra que (1.9) é válida para $\sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\}$. Logo, $M = \sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\}$ é a melhor constante que satisfaz (1.9).

Definição 1.3.3 *O número $M = \sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\}$, onde $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é a sequência de operadores expansão associada ao sistema biortogonal $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, é chamado* ***constante da base*** *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Definição 1.3.4 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de um espaço de Banach X e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de um espaço de Banach Y. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$* ***é equivalente a*** *$(y_n)_{n=1}^{\infty}$, e denotamos por*

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty},$$

quando dada qualquer sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge quando, e apenas quando, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.

Teorema 1.3.5 *Sejam X e Y espaços de Banach com bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ respectivamente. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$ se, e somente se, existe um isomorfismo $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$. Da demonstração da Proposição 1.1.7, sabemos que X é isomorfo a

$$\mathcal{L}_X = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ em } \mathbb{K}; \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge} \right\}$$

munido com a norma

$$\rho_X\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

e Y é isomorfo, de modo análogo, a $(\mathcal{L}_Y; \rho_Y)$. Mais ainda, sejam $T_X : X \longrightarrow \mathcal{L}_X$ e $T_Y : Y \longrightarrow \mathcal{L}_Y$ os isomorfismos, dados pelos inversos dos isomorfismos da Proposição 1.1.7, entre tais espaços. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$, então os conjuntos $\mathcal{L}_X$ e $\mathcal{L}_Y$ coincidem. Seja $i : \mathcal{L}_X \longrightarrow \mathcal{L}_Y$ a aplicação identidade, queremos mostrar que $T = T_Y^{-1} \circ i \circ T_X : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo. Claramente, basta-nos mostrar que i é um isomorfismo.

Vamos mostrar que i é contínua. O Teorema 4.2.7 (do Gráfico Fechado) garante que é suficiente mostrar que o conjunto

$$graf(i) = \{(x, y) \in \mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_Y; y = i(x) = x\}$$

é fechado em $\mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_Y$. Considere uma sequência em $graf(i)$, então ela é da forma $(c_n, c_n)_{n=1}^{\infty}$, onde $c_n = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}_X$, e suponha que $(c_n, c_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $(a, b) \in \mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_Y$, onde $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$, isto é,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \rho_X(c_n - a) = 0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho_Y(c_n - b).$$

Queremos mostrar que $b = i(a) = a$, ou seja, $(a, b) \in graf(i)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_X(c_n - a) \leq \varepsilon \text{ e}$$
$$\rho_Y(c_n - b) \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. Como

$$\max\{\rho_X(c_n - a); \rho_Y(c_n - b)\} \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon,$$

segue da definição de ρ_X e ρ_Y, que

$$n \geq n_\varepsilon \implies \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} (c_i^n - a_i) x_i \right\| ; m \in \mathbb{N} \right\} \leq \varepsilon \text{ e}$$
$$n \geq n_\varepsilon \implies \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} (c_i^n - b_i) y_i \right\| ; m \in \mathbb{N} \right\} \leq \varepsilon$$

Mas, para todo m natural, temos

$$|c_m^{n_\varepsilon} - a_m| \, \|x_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} (c_i^{n_\varepsilon} - a_i) \, x_i - \sum_{i=1}^{m-1} (c_i^{n_\varepsilon} - a_i) \, x_i \right\| \leq 2\varepsilon,$$
$$|c_m^{n_\varepsilon} - b_m| \, \|y_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} (c_i^{n_\varepsilon} - b_i) \, y_i - \sum_{i=1}^{m-1} (c_i^{n_\varepsilon} - b_i) \, y_i \right\| \leq 2\varepsilon$$

e segue que

$$\begin{aligned} |a_m - b_m| &= |a_m - c_m^{n_\varepsilon} + c_m^{n_\varepsilon} - b_m| \leq |c_m^{n_\varepsilon} - a_m| + |c_m^{n_\varepsilon} - b_m| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\|x_m\|} + \frac{2\varepsilon}{\|y_m\|}. \end{aligned}$$

Assim, $a_m = b_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e segue que $a = b$. Logo o gráfico de i é fechado e o Teorema 4.2.7 (do Gráfico Fechado) garante que i é contínua. Pelo Teorema 4.2.5 (da Aplicação Aberta), i tem inversa contínua; logo é um isomorfismo.

Reciprocamente, seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares com $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ convergindo para algum $x \in X$. Como T é um isomorfismo e $T(x_n) = T_Y^{-1} \circ i \circ T_X(x_n) = T_Y^{-1} \circ i(0,0,...,1,0,0,...) = T_Y^{-1}(0,0,...,1,0,0,...) = 0y_1 + ... + 1y_n + 0y_{n+1} + ... = y_n$, temos que

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T(a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

Logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge. Analogamente, concluímos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge quando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ for convergente. Assim temos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$. ■

Os três próximos lemas serão úteis adiante.

Lema 1.3.6 *Seja X e Y espaços de Banach. Se existem C_1, $C_2 > 0$ tais que*

$$C_1 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

para todo n natural, $x_1, x_2, ... x_n \in X$, $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ e $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge, se e somente se,} \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

Demonstração. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_ε tal que

$$\begin{aligned} n > m > n_\varepsilon \implies & \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} a_i y_i \right\| \\ & \leq C_2 \left\| \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Logo $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge. Analogamente, vemos que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge. ■

Lema 1.3.7 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de X, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica de X e $T : X \longrightarrow X$ um isomorfismo tal que $T(x_n) = y_n$ para todo n. Então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X.*

Demonstração. Se $y \in X$, então existe $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X$ tal que

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = y.$$

Logo

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j T(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j$$

e assim, $\overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]} = X$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X. ■

Lema 1.3.8 *Se $T : X \longrightarrow X$ é um operador linear tal que $\|T\| < 1$, então $id - T : X \longrightarrow X$ é um isomorfismo.*

Demonstração. De fato, $id - T$ é injetiva, pois

$$\begin{aligned} (id - T)(x) = (id - T)(y) & \Longrightarrow x - T(x) = y - T(y) \\ & \Longrightarrow x - y = T(x) - T(y) \Longrightarrow T(x - y) = x - y. \end{aligned}$$

Suponha que $x \neq y$, então $x - y \neq 0$ e daí,

$$\|x - y\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\| < \|x - y\|,$$

pois $\|T\| < 1$, o que é um absurdo. Logo $x = y$.

Além disso, $id - T$ é sobrejetiva, pois dado $y \in X$, tome

$$z = y + T(y) + T^2(y) + ... = \sum_{i=0}^{\infty} T^i(y).$$

Note que $\sum_{i=0}^{\infty} T^i(y)$ converge, pois

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\| T^i(y) \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|T\|^i \|y\| < \infty,$$

pois $\|T\| < 1$. Então

$$\begin{aligned}(id - T)(z) &= (id - T)\left(\sum_{i=0}^{\infty} T^i(y)\right) = (id - T)\left(y + \sum_{i=1}^{\infty} T^i(y)\right) \\ &= \left(y + \sum_{i=1}^{\infty} T^i(y)\right) - T(y) - \sum_{i=1}^{\infty} T^{i+1}(y) = y.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, $id - T : X \longrightarrow X$ é um isomorfismo. ■

Teorema 1.3.9 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica em X, com $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ os funcionais coeficientes associados. Se $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em X com*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \|f_n\| \equiv \lambda < 1, \tag{1.13}$$

então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em X e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$. Mais ainda, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ for base de X então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ também será base de X.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, e observe que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x_i - y_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \|x_i - y_i\| \\ &\leq \|x\| \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \|x_i - y_i\| \\ &\leq \lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Note ainda que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \leq \left|\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \overset{(1.14)}{\leq} \lambda \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

e

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \left|\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \overset{(1.14)}{\leq} \lambda \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|.$$

Consequentemente,

$$(1-\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \leq (1+\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \tag{1.15}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, por (1.15) e pelo Lema 1.3.6, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge, se e somente se,} \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge.} \tag{1.16}$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sequência básica segundo o Teorema 1.3.1 que, existe $M \geq 1$ tal que

$$m \geq n \implies \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \overset{(1.15)}{\leq} (1+\lambda)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1+\lambda)M\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \overset{(1.15)}{\leq} \frac{(1+\lambda)M}{(1-\lambda)}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\|.$$

Logo, novamente pelo Teorema 1.3.1, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é sequência básica de X. A equivalência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$ é consequência de (1.16).

Agora, suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de X. Defina

$$T : X \longrightarrow X$$
$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)(x_j - y_j).$$

Então, de (1.13), segue que $\|T\| < 1$. Logo, pelo Lema 1.3.8 segue que

$$(id - T) : X \longrightarrow X$$

é um isomorfismo. Note ainda que $(id - T)(x_n) = y_n$ para todo n natural. Logo, pelo Lema 1.3.7 segue que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de X. ■

Corolário 1.3.10 (Krein-Milman-Rutman) *Sejam X um espaço de Banach com base de Schauder e $\mathcal{D}$ um subconjunto denso de X. Então existe uma base de X formada apenas por elementos de $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de X e sejam $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ os seus funcionais coeficientes. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha $y_k \in \mathcal{D}$ tal que

$$\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{2^{k+1}\|f_k\|}.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - y_k\| \|f_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < 1.$$

Pelo Teorema 1.3.9, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de X e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \approx (y_n)_{n=1}^{\infty}$. ■

Segue agora uma definição que será relevante para a compreensão do Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński.

Definição 1.3.11 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de um espaço de Banach X e $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos com $k_0 = 0$. Então, a sequência não-nula $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em X definida por*

$$y_n = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} a_i x_i, \text{ para todo } n = 1, 2, ...$$

*é dita uma **sequência de blocos básica** relativa a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

O próximo resultado justifica a terminologia "sequência de blocos básica":

Proposição 1.3.12 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base do espaço de Banach X e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de blocos básica com relação a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em X.*

Demonstração. Sejam $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência dos operadores de expansão de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $M = \sup\{\|u_n\|; n \in \mathbb{N}\}$, m e p inteiros positivos e $b_1, b_2, ..., b_{m+p}$ escalares dados. Então, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{k_1} b_1 a_i x_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} b_2 a_i x_i + ... + \sum_{i=k_{m-1}+1}^{k_m} b_m a_i x_i\right\| \\
&\overset{(1.3.1)}{\leq} M \left\|\sum_{i=1}^{k_1} b_1 a_i x_i + ... + \sum_{i=k_{m-1}+1}^{k_m} b_m a_i x_i + ... + \sum_{i=k_{m+p-1}+1}^{k_{m+p}} b_{m+p} a_i x_i\right\| \\
&= M \left\|\sum_{i=1}^{m+p} b_i y_i\right\|.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.3.1, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica. ■

Observação 1.3.13 *Note que, pelo resultado anterior, a constante da base M que satisfaz o Critério de Grymblyum-Nikol'skii para a base* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, também satisfaz o mesmo Critério para a sequência de blocos básica* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Capítulo 2

Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński e o Teorema de Pitt

O teorema de Pitt, cujo enunciado garante a compacidade de operadores entre espaços l_p e l_q, para certos parâmetros p e q, em nosso trabalho é demonstrado como consequência do Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński. Nosso trabalho, como dito anteriormente, atinge um resultado desenvolvido recentemente por D. Pellegrino e E. Teixeira que apresenta uma caracterização dos operadores que atingem a norma entre os espaços l_p; o teorema de Pitt é usado na demonstração do resultado de Pellegrino e Teixeira.

Os principais resultados contemplados neste capítulo são o Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński, o Teorema de Banach, o Teorema de Schur e o próprio Teorema de Pitt. Para tanto, também desenvolveremos resultados auxiliares que nos levam à demonstração destes.

2.1 Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński e suas consequências

Como foi dito anteriormente, o Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński é um resultado central da Teoria dos Espaços de Banach e fundamental para desenvolvermos o Teorema de Pitt e assim chegarmos ao resultado principal desta dissertação. Esse Princípio de Seleção determina condições sob as quais uma sequência de um espaço de Banach contém uma sequência básica deste espaço. Outra consequência do Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński, que será apresentada já nesta seção, é o famoso Teorema de Banach, que garante que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com uma base.

Definição 2.1.1 *Seja X um espaço de Banach. Um subconjunto $N \subset X^*$ é dito* ***normante*** *se a norma de cada $x \in X$ é tal que*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|\,; f \in N \text{ e } \|f\| \leq 1\}.$$

O próximo lema, embora bastante técnico, será útil adiante.

Lema 2.1.2 *Sejam N um subconjunto normante de X^* e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tais que*

$$0 < \inf\{\|x_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|x_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = 0 \tag{2.1}$$

para todo $f \in N$. Então, para cada $0 < \varepsilon < 1$, cada inteiro positivo k e cada subespaço de dimensão finita $Y \subset X$, existe um $n \geq k$ tal que

$$\|y + ax_n\| \geq (1 - \varepsilon)\|y\|$$

para todo $y \in Y$ e para todo escalar a.

Demonstração. Note que basta provar o resultado para vetores y de norma 1. De fato, se $z \in Y$, $z \neq 0$, e o resultado vale para y com $\|y\| = 1$, então

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} + bx_n \right\| \geq (1 - \varepsilon)$$

para todo escalar b. Portanto,

$$\|z + \|z\|\, bx_n\| \geq (1 - \varepsilon)\|z\|$$

para todo escalar b e daí segue que

$$\|z + ax_n\| \geq (1 - \varepsilon)$$

para todo escalar a.

Vamos, portanto, considerar o enunciado do lema com $\|y\| = 1$. Suponha que o lema fosse falso. Então existem $0 < \varepsilon < 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ e $Y \subset X$ com $\dim Y < \infty$ tais que para todo $n \geq k$ existem $y_n \in Y$ e um escalar a_n tais que $\|y_n\| = 1$ e

$$\|y_n + a_n x_n\| < (1 - \varepsilon). \tag{2.2}$$

Agora, pela compacidade de $S_Y = \{y \in Y; \|y\| = 1\}$, podemos supor (passando a uma subsequência, se necessário) que existe $y_0 \in S_Y$ tal que $y_n \longrightarrow y_0$. Note que

$$|a_n|\,\|x_n\| = \|a_n x_n\| \leq \|y_n\| + (1 - \varepsilon) = 2 - \varepsilon.$$

Então, para todo $n \geq k$, temos que

$$|a_n| \leq \frac{2-\varepsilon}{\|x_n\|} \leq \frac{2-\varepsilon}{\inf\{\|x_i\|\,;i \geq k\}}.$$

Logo, a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e segue facilmente de (2.1) que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(a_n x_n) = 0$$

para todo $f \in N$; portanto

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(y_n + a_n x_n) = f(y_0) \tag{2.3}$$

para todo $f \in N$. Como N é normante e existe $\|y_0\| = 1$, existe $f_0 \in N$ tal que $\|f_0\| = 1$ e

$$f_0(y_0) > 1 - \varepsilon. \tag{2.4}$$

Por outro lado,

$$1 - \varepsilon \overset{(2.2)}{>} \|y_n + a_n x_n\| \geq |f_0(y_n + a_n x_n)|$$

para todo $n \geq k$. Assim

$$1 - \varepsilon \geq \lim_{n \longrightarrow \infty} |f_0(y_n + a_n x_n)| \overset{(2.3)}{=} |f_0(y_0)|,$$

o que é um absurdo, devido a (2.4). ■

Teorema 2.1.3 *Sejam X um espaço de Banach, $N \subset X^*$ um subconjunto normante, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que*

$$0 < \inf\{\|x_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|x_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

para todo $f \in N$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma sequência básica $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ com $x_{n_1} = x_1$.

Demonstração. Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais com $0 < \varepsilon_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$\delta := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) > 0.$$

Sejam $n_1 = 1$, $Y = [x_{n_1}]$, $k = n_1$ e $\varepsilon = \varepsilon_1$. Pelo Lema 2.1.2, podemos escolher $n_2 > n_1$ tal que

$$\|a_1 x_{n_1} + a_2 x_{n_2}\| \geq (1 - \varepsilon_1) \|a_1 x_{n_1}\|$$

para quaisquer a_1, a_2 escalares. Agora, suponha que $n_1 < n_2 < ... < n_k$ são inteiros tais que

$$\|a_1 x_{n_1} + ... + a_k x_{n_k}\| \geq (1 - \varepsilon_{k-1}) \left\|a_1 x_{n_1} + ... + a_{k-1} x_{n_{k-1}}\right\|$$

para quaisquer escalares $a_1, ..., a_k$. Então, sendo $Y = [x_{n_1}, ..., x_{n_k}]$, $\varepsilon = \varepsilon_k$, $k = n_k$, pelo Lema 2.1.2, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que

$$\left\|a_1 x_{n_1} + ... + a_{k+1} x_{n_{k+1}}\right\| \geq (1 - \varepsilon_k) \left\|a_1 x_{n_1} + ... + a_k x_{n_k}\right\|.$$

Continuando deste modo construímos, por indução, $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo

$$\left\|a_1 x_{n_1} + ... + a_{k+m} x_{n_{k+m}}\right\| \geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) \left\|a_1 x_{n_1} + ... + a_{k-1} x_{n_{k+m-1}}\right\|.$$

Resta-nos mostrar que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é sequência básica. De fato, se para quaisquer $k, m \in \mathbb{N}$ são dados escalares $a_1, ..., a_{k+m}$ então,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{k+m} a_i x_{n_i}\right\| &\geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) \left\|\sum_{i=1}^{k+m-1} a_i x_{n_i}\right\| \\
&\geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) (1 - \varepsilon_{k+m-2}) \left\|\sum_{i=1}^{k+m-2} a_i x_{n_i}\right\| \\
&\geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) ... (1 - \varepsilon_k) \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\right\| \\
&\geq \delta \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\right\|.
\end{aligned}$$

Tomando $M = \dfrac{1}{\delta}$, pelo Teorema 1.3.1, temos que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é sequência básica. ■

Teorema 2.1.4 (Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski) *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base para um espaço de Banach X com funcionais coeficientes $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Se $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em X tal que*

$$\inf \{\|y_n\| ; n \in \mathbb{N}\} > 0$$

e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_i^* (y_n) = 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma sequência básica equivalente a uma sequência de blocos básica relativa a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração. Sejam $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência dos operadores de expansão de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e seja $M = \sup \{\|u_n\| ; n \in \mathbb{N}\}$. Pelo Teorema 1.2.5 e pela Observação 1.2.3, sabemos que $0 < M < \infty$. Note que

$$\|x_n^*\| = \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{\|x_n\|}$$

e isto nos dá

$$1 = x_n^* (x_n) \leq \|x_n^*\| \|x_n\| = \|u_n - u_{n-1}\| \leq \|u_n\| + \|u_{n-1}\| \leq 2M. \tag{2.5}$$

Agora sejam $\varepsilon = \inf \{\|y_n\| ; n \in \mathbb{N}\}$ e $n_1 = 1$. Escolha $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} x_i^* (y_{n_1}) x_i \right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Nós escolhemos agora um inteiro $n_2 > n_1$ tal que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=1}^{m_1} x_i^* (y_{n_2}) x_i \right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3. \tag{2.6}$$

Isso é possível, pois $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_i^* (y_n) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (em particular para todo $i = 1, ..., m_1$). Assim, podemos escolher $n_2 > n_1$ tal que

$$|x_i^*(y_{n_2})| < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\varepsilon}{4M} \frac{1}{m_1} \frac{1}{L},$$

onde $L = \max\{\|x_j\| ; j = 1, ..., m_1\}$. Daí segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{m_1} x_i^* (y_{n_2}) x_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^{m_1} |x_i^* (y_{n_2})| \|x_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\varepsilon}{4M} \frac{1}{m_1} \frac{1}{L} \|x_i\| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\varepsilon}{4M}, \end{aligned}$$

e percebemos que (2.6) é possível.

Então selecionamos um $m_2 > m_1$ tal que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} x_i^* (y_{n_2}) x_i \right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Continuando esse processo, obtemos sequências crescentes $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ de inteiros positivos tais que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=m_k+1}^{\infty} x_i^* (y_{n_k}) x_i \right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2},$$

e

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^* (y_{n_{k+1}}) x_i \right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$z_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i.$$

Então, temos

$$y_{n_{k+1}} = \sum_{i=1}^{m_k} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i + z_k + \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i. \tag{2.7}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|z_k\| &\geq \left\|y_{n_{k+1}}\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{m_k} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i\right\| - \left\|\sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i\right\| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4M2^{k+2}} - \frac{\varepsilon}{4M2^{k+3}} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}} - \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} \geq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde a penúltima desigualdade se deve a (2.5). Assim $z_k \neq 0$ e $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de blocos básica com relação a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Agora, sejam $(z_k^*)_{k=1}^{\infty}$ os funcionais coeficientes associados a $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, e seja

$$M' = \sup \left\{\|w_n\| ; n \in \mathbb{N}\right\},$$

onde $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ é a sequência dos operadores expansão de $(z_k)_{k=1}^{\infty}$. Então, pela Observação 1.3.13, $M' \leq M$ e, pelo mesmo argumento usado em (2.5), temos

$$1 \leq \|z_k^*\| \, \|z_k\| \leq 2M' \leq 2M$$

e

$$\|z_k^*\| \leq \frac{2M}{\|z_k\|} \overset{(2.8)}{\leq} \frac{4M}{\varepsilon}.$$

Agora temos,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^*\| \left\|z_k - y_{n_{k+1}}\right\| &\overset{(2.7)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\|\sum_{i=1}^{m_k} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i - \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^* \left(y_{n_{k+1}}\right) x_i\right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\varepsilon}{4M} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} + \frac{\varepsilon}{4M} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} < 1. \end{aligned}$$

Como aplicação do Teorema 1.3.9, temos $\left(y_{n_{k+1}}\right)_{k=1}^{\infty} \approx (z_k)_{k=1}^{\infty}$. ■

Corolário 2.1.5 *Sejam X um espaço de Banach e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X com $\inf\{\|y_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} > 0$ e $y_n \xrightarrow{w} 0$. Então existe uma subsequência de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que é sequência básica.*

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso real.

Seja $\overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]}$ em X. Vejamos que $\overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]}$ é separável. De fato, seja

$$\mathcal{D} = \left\{\sum_{j=1}^{n} q_j y_j; n \in \mathbb{N} \text{ e } q_j \in \mathbb{Q} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Temos que $\mathcal{D} \subset \overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Além disso, $\mathcal{D}$ é enumerável, pois $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$, com

$$\mathcal{D}_n = \left\{\sum_{j=1}^{n} q_j y_j; q_j \in \mathbb{Q}\right\},$$

que é claramente enumerável. Assim, se $x \in \overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]}$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in [(y_n)_{n=1}^{\infty}]$ tal que

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

com $y = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$, $a_j \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, ..., n$. Contudo, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe $d \in \mathcal{D}$, $d = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j$ tal que

$$\|y - d\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\|x - d\| \leq \|x - y\| + \|y - d\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto $\overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]}$ é separável.

Logo, pelo Teorema 4.2.8 (Banach-Mazur), $\overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]}$ é isometricamente isomorfo a um subespaço de $\mathcal{C}([0,1])$ (que possui uma base; [6],exemplo *(iv)*, pag 164). Digamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja a base de $\mathcal{C}([0,1])$ com funcionais associados $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Agora, identificando y_n com a imagem pelo isomorfismo, ou seja, como elemento de $\mathcal{C}([0,1])$, temos que $y_n \xrightarrow{w} 0$, enquanto

$$\inf\{\|y_n\|\,; n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Contudo, $y_n \xrightarrow{w} 0$ implica que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_k^*(y_n) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.1.4, existe uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que é básica. ■

Como consequência do Princípio de Seleção temos um resultado importante, devido a Banach, sobre espaços de dimensão infinita.

Corolário 2.1.6 (Teorema de Banach) *Todo espaço de Banach X de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com uma base.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que X é separável (caso contrário nos restringimos aos subespaços separáveis de X e aplicamos os argumentos que seguem). Então, pelo Teorema 4.2.8 (Banach-Mazur), X é isometricamente isomorfo a um subespaço de $\mathcal{C}([0,1])$. Como no Corolário anterior, denotamos por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de $\mathcal{C}([0,1])$ e por $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ os funcionais coeficientes associados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Agora, seja

$$N_1 := \{x \in X; x_1^*(x) = 0\}.$$

É fácil ver que N_1 é um subespaço fechado de dimensão infinita de X; seja $y_1 \in N_1$ com $\|y_1\| = 1$. Considere

$$N_2 := \{x \in X; x_1^*(x) = x_2^*(x) = 0\}.$$

Novamente, N_2 é um subespaço fechado de dimensão infinita de X; seja $y_2 \in N_2$ com $\|y_2\| = 1$ e $y_2 \neq y_1$. Desta maneira, obtemos uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos distintos de X tais que

$$y_k \in \{x \in X; x_i^*(x) = 0, i = 1, ..., k\}$$

e

$$\|y_k\| = 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x_n^*(y_k) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.1.4, existe uma subsequência (básica) $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Logo $\overline{[(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]}$ é o subespaço (com base) de dimensão infinita de X. ■

2.2 O Teorema de Pitt

O Teorema de Pitt versa sobre compacidade de operadores entre espaços l_p. Como mencionamos, ele será útil no desenvolvimento dos resultados sobre operadores (entre espaços l_p) que atingem a norma.

Proposição 2.2.1 *Se X for reflexivo, então toda sequência limitada em X possui subsequência fracamente convergente em X.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em X; seja $F = \overline{[(x_n)_{n=1}^{\infty}]}$. Então F é separável e, como todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo ([6, Proposição 3.33, p. 75]), F é reflexivo. Logo, F^* é reflexivo e separável ([4, Cor III.24]), pois F é reflexivo e separável. Portanto, $B_F = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ é metrizável na topologia fraca ([4, Teo III.25']). Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada, podemos considerar uma nova sequência $\left(\frac{x_n}{L}\right)_{n=1}^{\infty}$, onde L é cota superior para $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Além disso, B_F (na topologia fraca) é compacta, pois F é reflexivo ([4, Teo III.16]). Logo, B_F é sequencialmente compacta e assim $\left(\frac{x_n}{L}\right)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência fracamente convergente para um certo $x_0 \in B_F$. Isso claramente implica que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência fracamente convergente. ■

Corolário 2.2.2 *Se X for reflexivo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ for limitada em X e não convergir fracamente para zero, então existe uma subsequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n \xrightarrow{w} u \neq 0$.*

Demonstração. Podemos claramente nos restringir a uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ com todos vetores não nulos (entretanto, não alteraremos a notação da sequência). Usando a notação da proposição anterior, $(\frac{x_n}{\|x_n\|})_{n=1}^{\infty}$ está no conjunto $(B_F, \sigma(F, F^*))$, que é compacto e metrizável (portanto sequencialmente compacto). Como a sequência $(\frac{x_n}{\|x_n\|})_{n=1}^{\infty}$ não converge fracamente para zero, e como estamos num espaço métrico, é fácil ver que existe uma subsequência que não converge fracamente para zero. ■

Agora iremos falar sobre compacidade de operadores lineares. Para tanto, no capítulo 4, seção 4.1, desta dissertação definimos estes operadores e colocamos alguns resultados auxiliares acerca destes.

Proposição 2.2.3 *Sejam X reflexivo e $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Então T é compacto se, e somente se*

$$x_n \xrightarrow{w} 0 \implies T(x_n) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Se T é compacto e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$, então, pelo Teorema 4.1.5, segue que $T(x_n) \longrightarrow 0$.

Reciprocamente, suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja limitada. Como X é reflexivo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ fracamente convergente. Então, para $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ sequências crescentes de inteiros positivos, temos $\left(y_{n_j} - y_{m_j}\right) \xrightarrow{w} 0$. Usando nossa hipótese, segue que $T\left(y_{n_j} - y_{m_j}\right) \longrightarrow 0$. Logo $(T(y_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em Y, portanto convergente. Segue que T é compacto. ■

Definição 2.2.4 *Nos espaços l_p, sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, com $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ com 1 aparecendo na i-ésima coordenada, será chamada **base canônica** do espaço.*

Proposição 2.2.5 *Seja X um espaço l_p, com $1 \leq p < \infty$, e seja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de blocos básica com relação à base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X. Então:*

(i) $\overline{[(y_n)_{n=1}^{\infty}]} \equiv Y$ é isometricamente isomorfo a X;

(ii) Se $0 < \inf\{\|y_n\|; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|y_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$, então $(y_n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração. Sejam $y_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \lambda_i e_i$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j \frac{y_j}{\|y_j\|}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{\|y_j\|} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \lambda_i e_i\right\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \frac{|a_j|^p}{\|y_j\|^p} |\lambda_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.9}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|a_j|^p}{\|y_j\|^p} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |\lambda_i|^p\right)^{1/p}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{|a_j|^p}{\|y_j\|^p} \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\sum_{j=1}^{m} a_j e_j\right\|.$$

Então, pelo Lema 1.3.6 segue que

$$(e_n)_{n=1}^{\infty} \approx \left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)_{n=1}^{\infty}. \tag{2.10}$$

Note ainda que $T : Y \longrightarrow X$ dada por $T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \|y_j\| e_j$ é uma isometria de Y em X.

(ii) Suponhamos

$$0 < \alpha := \inf\{\|y_n\| ; n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|y_n\| ; n \in \mathbb{N}\} := \beta < \infty. \tag{2.11}$$

Se $\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j$ converge, então como

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \|y_j\| \frac{y_j}{\|y_j\|},$$

por (2.10) segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \|y_j\|^p < \infty. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) segue que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge.

Por outro lado, se $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge, então $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty$. Logo, por (2.11), temos $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \|y_j\|^p < \infty$. Portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \|y_j\| e_j$$

converge. Novamente, por (2.10), segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left\| y_j \right\| \frac{y_j}{\left\| y_j \right\|} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j$$

converge. Logo, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}$. ■

A Proposição 2.2.5 será utilizada na demonstração do Teorema de Pitt, resultado central desta seção. Além dela, também usaremos um resultado bastante importante da Análise Funcional, chamado Teorema de Schur, que iremos enunciar e demonstrar a seguir.

Visando evitar dúvidas acerca da notação, na demonstração a seguir, denotaremos os elementos de l_p com a seguinte notação: $x^n \in l_p$, onde $x^n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty} \in l_p$.

Teorema 2.2.6 (de Schur) *Seja $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em l_1. Se $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ for fracamente convergente, então $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente em l_1.*

Demonstração. Note que é suficiente mostrar-mos que

$$x^n \xrightarrow{w} 0 \implies x^n \longrightarrow 0. \tag{2.13}$$

De fato, sendo (2.13) válido, então

$$x^n \xrightarrow{w} x \implies (x^n - x) \xrightarrow{w} 0 \implies (x^n - x) \longrightarrow 0 \implies x^n \longrightarrow x.$$

Suponha que a sequência $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ convirja fracamente para zero e não convirja para zero em l_1. Assim $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(y^n)_{n=1}^{\infty}$ tal que, para algum $\varepsilon > 0$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| y_j^n \right| = \left\| y^n \right\|_1 \geq 5\varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como essa sequência converge fracamente para zero e o dual de l_1 é equivalente a l_∞, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j^n = 0 \text{ para todo } a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_\infty. \tag{2.14}$$

Tomando e_j no lugar de a, temos

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y_j^n = 0 \text{ para todo } j \text{ fixo.} \tag{2.15}$$

Defina $n_0 = 1$ e a sequência estritamente crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ da seguinte forma: $n_k = \lfloor n_{k-1} \rfloor$ (menor inteiro maior que n_{k-1}) de modo que

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left| y_j^{n_k} \right| < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Isso é possível, pois sendo n_1 o menor inteiro maior que 1 tal que

$$\sum_{j=1}^{1} \left|y_j^{n_1}\right| < \varepsilon, \text{ isto é, } \left|y_1^{n_1}\right| < \varepsilon$$

e, por (2.15), existe n_1. Agora definamos $m_0 = 1$ e a sequência crescente $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ da seguinte forma: $m_k = \lfloor m_{k-1} \rfloor$, satisfazendo

$$\sum_{j=m_k}^{\infty} \left|y_j^{n_k}\right| < \varepsilon. \tag{2.17}$$

De modo análogo, isso é possível, pois sendo m_1 é o menor inteiro maior que $m_0 = 1$ tal que

$$\sum_{j=m_1}^{\infty} \left|y_j^{n_1}\right| < \varepsilon.$$

Como $y_j^{n_1} \in l_1$, então m_1 existe.

Suponha que não exista n_2 tal que

$$\sum_{j=1}^{m_1} \left|y_j^{n_2}\right| < \varepsilon.$$

Então, para todo $n_2 > n_1$, temos

$$\left|y_1^{n_2}\right| + ... + \left|y_{m_1}^{n_2}\right| \geq \varepsilon.$$

Logo, para algum $j = 1, 2, ..., m_1$, temos

$$\left|y_j^{n_2}\right| \geq \frac{\varepsilon}{m_1}.$$

Deste modo, para algum $j \in \{1, ..., m_1\}$, fixo, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y_j^n \neq 0,$$

o que é uma contradição, por (2.15). Como $y_j^{n_2} \in l_1$, então existe $m_2 \in \mathbb{N}$, menor inteiro maior que m_1, tal que

$$\sum_{j=m_2}^{\infty} \left|y_j^{n_2}\right| < \varepsilon.$$

Garantimos a existência das sequências $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ pelos mesmos argumentos de modo sucessivo.

Seja $a=(a_j)_{j=1}^{\infty}\in l_\infty$ dado por: para $m_{k-1}<j<m_k$, tome $a_j=0$, se $y_j^{n_k}=0$, e $a_j=\frac{y_j^{n_k}}{|y_j^{n_k}|}$, se $y_j^{n_k}\neq 0$. Note que $|a_j|\leq 1$ para todo j. Logo

$$\begin{aligned}
5\varepsilon-\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_jy_j^{n_k}\right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j^{n_k}\right|-\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_jy_j^{n_k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j^{n_k}\right|\right|-\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_jy_j^{n_k}\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|y_j^{n_k}\right|-a_jy_j^{n_k}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}}\left(\left|y_j^{n_k}\right|-a_jy_j^{n_k}\right)+\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k}\left(\left|y_j^{n_k}\right|-a_jy_j^{n_k}\right)+\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\left(\left|y_j^{n_k}\right|-a_jy_j^{n_k}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}}\left(\left|y_j^{n_k}\right|-a_jy_j^{n_k}\right)+\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\left(\left|y_j^{n_k}\right|-a_jy_j^{n_k}\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_{k-1}}\left(\left|y_j^{n_k}\right|+\left|a_jy_j^{n_k}\right|\right)+\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\left(\left|y_j^{n_k}\right|+\left|a_jy_j^{n_k}\right|\right) \\
&\leq 2\varepsilon+2\varepsilon=4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $k\in\mathbb{N}$, temos

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_jy_j^{n_k}\right|\geq\varepsilon,$$

o que é uma contradição devido a (2.14). ■

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema de Pitt.

Teorema 2.2.7 (de Pitt) *Se $1\leq q<p<\infty$, então todo operador linear contínuo de l_p em l_q é compacto.*

Demonstração. Seja $T\in\mathcal{L}(l_p;l_q)$. O caso $T=0$ é trivial. Suponhamos que T seja não-nulo.

Seja $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em l_p com $x^n\xrightarrow{w}0$. Vamos mostrar que $T(x^n)\longrightarrow 0$. Como l_p é reflexivo, a Proposição 2.2.3 garantirá que T é compacto.

Note que, se $q=1$, então o resultado é claro. De fato, como T é contínuo, então $T(x^n)\xrightarrow{w}0$, pois todo operador linear contínuo é ainda contínuo com as topologias fracas. Mas, nesse caso, o Teorema 2.2.6 (Teorema de Schur) garante que essa convergência também ocorre em norma. Assim, podemos considerar o caso $q>1$.

Suponha que $(T(x^n))_{n=1}^{\infty}$ não convirja para 0. Então, utilizando, se necessário, uma subsequência apropriada, podemos assumir, sem perda de generalidade,

$$\inf\{\|T(x^n)\|; n\in\mathbb{N}\} > 0. \tag{2.18}$$

Logo

$$\inf\{\|x^n\|; n\in\mathbb{N}\} > 0. \tag{2.19}$$

Como $x^n \xrightarrow{w} 0$ e vale (2.19), pelo Teorema 2.1.4 (Princípio de Seleção de Bessaga-Pełczyński), $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ tem uma subsequência $(x^{n_k})_{k=1}^{\infty}$ (sequência básica) equivalente a uma sequência de blocos básica $(y^n)_{n=1}^{\infty}$ com relação à base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de l_p.

Note ainda que $T(x^{n_k}) \xrightarrow{w} 0$. Assim, de (2.18) e do Teorema 2.1.4, segue que $(T(x^{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ tem uma subsequência $(T(x^{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ equivalente a uma sequência de blocos básica $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ com relação a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de l_q.

Note que de (2.19) e do Teorema 1.3.5 segue que

$$0 < \inf\{\|y^n\|; n\in\mathbb{N}\}.$$

Além disso, como $x^n \xrightarrow{w} 0$, o Lema 1.1.5*(iii)* nos garante que (x^n) é limitada e

$$\sup\{\|x^n\|; n\in\mathbb{N}\} < \infty.$$

Pelo Teorema 1.3.5 segue que

$$\sup\{\|y^n\|; n\in\mathbb{N}\} < \infty.$$

Pela Proposição 2.2.5, segue que $(y^n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_p e assim

$$(x^{n_k})_{k=1}^{\infty} \approx (e_k)_{k=1}^{\infty}. \tag{2.20}$$

Analogamente, $(z^n)_{n=1}^{\infty} \approx (e_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_q e portanto

$$\left(Tx_{n_{k_j}}\right)_{j=1}^{\infty} \approx (e_j)_{j=1}^{\infty}. \tag{2.21}$$

Seja $\left(a_{n_{k_j}}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p - l_q$. Então, de (2.20), temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{k_j}} x_{n_{k_j}} \in l_p.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{k_j}} T\left(x_{n_{k_j}}\right) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{k_j}} x_{n_{k_j}}\right) \in l_q. \tag{2.22}$$

De (2.21) e (2.22) segue que $\left(a_{n_{k_j}}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_q$, o que é uma contradição. ■

Capítulo 3

Operadores que atingem a norma

Neste capítulo chegamos aos resultados centrais de nossa dissertação. Vamos definir o que são operadores que atingem a norma e descrever brevemente, na seção inicial, os resultados clássicos da teoria, como o *Teorema de Bishop-Phelps*. Daqui em diante, exceto quando for mencionado contrário, tomaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Na seção seguinte, vamos estudar os operadores entre espaços l_p que atingem a norma; demonstraremos um resultado que caracteriza estes operadores (Teorema 3.2.3) e algumas consequências obtidas a partir desta caracterização.

Por fim, vamos mostrar uma aplicação simples do resultado e apontamentos de problemas em abertos que podem dar direções para investigações futuras.

3.1 Funcionais que atingem a norma

Veremos, de modo breve e sistemático, nesta seção, como se deu o desenvolvimento do problema dos operadores que atingem a norma. Para isso, vamos definir o que são estes operadores e enunciar, sem demonstração, os principais resultados que dizem respeito a essa teoria.

Definição 3.1.1 *Um operador linear entre espaços de Banach $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ **atinge a norma** se existe $x \in X, \|x\| = 1,$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y = \|T\| := \sup\{\|T(x_0)\|; x_0 \in B_X\}.$$

Denotamos por $\mathcal{NA}(X;Y)$ o subconjunto de $\mathcal{L}(X;Y)$ formado por todos os operadores lineares limitados que atingem a norma.

Um resultado fundamental na linha de investigação sobre funcionais que atingem a norma é devido a E. Bishop e R.R. Phelps, que provaram que o conjunto $\mathcal{NA}(X;\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$. Em seus estudos E. Bishop e R.R. Phelps ainda conseguiram um resultado mais abrangente; eles provaram seu resultado em um caso mais geral que fora proposto por V. Klee. O resultado de Bishop-Phelps foi:

Teorema 3.1.2 (de Bishop-Phelps) *Seja C um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de Banach X. A coleção de todos os funcionais que atingem o supremo em C é denso em X^*. Em particular, $\mathcal{NA}(X;\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$.*

A demonstração do Teorema 3.1.2 é bastante delicada e necessita do Lema de Zorn. Essencialmente, são utilizados os seguintes resultados técnicos para sua demonstração:

Lema 3.1.3 *Seja C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach X. Se $x^* \in X^*$, x^* é limitado em C e $M > 0$, então, para cada $z \in C$, existe $x_0 \in C$ com $x_0 - z \in \{x \in X; \|x\| \leq Mx^*(x)\}$, tal que*

$$C \cap \{x_0 + \{x \in X; \|x\| \leq Mx^*(x)\}\} = \{x_0\}.$$

Lema 3.1.4 *Sejam $x^*, y^* \in S_{X^*}$. Se $0 < \varepsilon < 1$, $M > 1 + 2\varepsilon^{-1}$ e $y^*(x) \geq 0$ para todo $x \in \{z \in X; \|z\| \leq Mx^*(z)\}$, então*

$$\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon.$$

Posteriormente ao Teorema 3.1.2, a pesquisa sobre operadores que atingem a norma buscou respostas para o caso em que se considera outros espaços de Banach, distintos de $\mathbb{R}$. De modo mais preciso: *Se X e Y são espaços de Banach, quando $\mathcal{NA}(X;Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X;Y)$?*

Em 1963, J. Lindenstrauss [10] apresentou uma resposta negativa para o caso geral. Contudo, para alguns casos particulares, que ainda não haviam sido considerados, a resposta era positiva. Para mostrar isso, Lindenstrauss define propriedades que particularizam o problema proposto por Bishop e Phelps em seu artigo. Tais propriedades são:

- X tem a propriedade A se $\mathcal{NA}(X;Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X;Y)$, para todo espaço de Banach Y.

- X tem a propriedade B se $\mathcal{NA}(Y;X)$ é denso em $\mathcal{L}(Y;X)$, para todo espaço de Banach Y.

Lindenstrauss construiu um exemplo de um espaço de Banach Z que não tem a propriedade A, nem a propriedade B. Ele estabeleceu um critério para que um espaço de Banach tenha a propriedade B, e ainda provou que espaços reflexivos possuem a propriedade A. Precisamente, este seu último resultado foi:

Teorema 3.1.5 (de Lindenstauss) *Para quaisquer espaços de Banach X e Y, $\mathcal{L}_0(X;Y) := \{T \in \mathcal{L}(X;Y); T^{**} \in \mathcal{NA}(X^{**};Y^{**})\}$ é denso em $\mathcal{L}(X;Y)$. Em particular, todo espaço reflexivo X é tal que $\mathcal{NA}(X;Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X;Y)$, para todo espaço de Banach Y.*

Para mostrar seu resultado, Lindenstrauss utilizou-se do seguinte lema:

Lema 3.1.6 *Um operador linear contínuo* $T : X \longrightarrow Y$ *pertence a* $\mathcal{L}_0(X;Y) := \{T \in \mathcal{L}(X;Y); T^{**} \in \mathcal{NA}(X^{**};Y^{**})\}$ *se, e somente se, existem* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* X *e* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* Y^* *tais que:*

(1) $\|x_n\| = \|f_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$;

(2) $|f_j(T(x_n))| \geq \|T\| - \frac{1}{j}$, $j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

O resultado de Lindenstrauss foi estendido por J. Bourgain [3], em 1977, quando este mostra que se um espaço Y possui a Propriedade de Radon-Nikodyn então $\mathcal{NA}(X;Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X;Y)$.

Em 1990, W.T. Gowers [7] mostrou a existência de um espaço de Banach com o qual os espaços l_p $(1 < p < \infty)$ não satisfazem a propriedade B definida por Lindenstrauss.

Definição 3.1.7 *Seja* G *o conjunto das sequências de números reais* $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ *tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \phi_n(a) = 0,$$

onde

$$\phi_n(a) = \frac{S_n(a)}{H_n},$$

$$S_n(a) = \sup\left\{\sum_{j \in J} |a_j|\,; J \subset \mathbb{N}, \#J = n\right\},$$

onde $\#J$ *é a cardinalidade do conjunto* J, *e*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-1}.$$

Considere também a função $\|.\| : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\|a\| := \max_{n \in \mathbb{N}} \{\phi_n(a)\}.$$

Prova-se que $(G, \|.\|)$ *é um espaço de Banach [veja, para uma referência em português, [5]], chamado de* ***espaço de Gowers****.*

Desse modo, podemos enunciar o resultado de Gowers da seguinte forma:

Teorema 3.1.8 *O espaço* l_p $(1 < p < \infty)$ *é tal que* $\mathcal{NA}(G;l_p)$ *não é denso em* $\mathcal{L}(G;l_p)$. *Em outras palavras,* l_p *não tem a propriedade B.*

Para entendermos a demonstração de Gowers precisamos estudar os espaços de Gowers e, principalmente, uma propriedade que mostra como é inusitada sua geometria, a saber, que a bola unitária nestes espaços não tem pontos extremos, isto é,

Proposição 3.1.9 *Seja G o espaço de Gowers. Para todo $a \in S_G$, existem um número real m e um número real $\delta > 0$, tais que $\|a \pm \lambda e_k\| = 1$, para todo $k \geq m$ e para todo escalar λ tal que $0 \leq \lambda \leq \delta$.*

Além da Proposição 3.1.9, a demonstração do Teorema 3.1.8 utiliza como resultados auxiliares os seguintes lemas:

Lema 3.1.10 *A função inclusão $T : G \longrightarrow l_p$ $(1 < p < \infty)$ é um operador linear contínuo.*

Lema 3.1.11 *Seja X um espaço de Banach estritamente convexo. Se $T : G \longrightarrow X$ é um operador que atinge a norma, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(e_k) = 0$ para todo $k \geq n$.*

O Lema 3.1.11 mostra-nos um comportamento singular dos operadores de G em l_p que atingem a norma; deste comportamento podemos obter o resultado de Gowers enunciado no Teorema 3.1.8.

3.2 Operadores entre espaços l_p que atingem a norma

Nesta seção apresentaremos um resultado recente sobre operadores que atingem a norma, devido a D. Pellegrino e E. Teixeira, no artigo [13], que caracteriza operadores entre espaços l_p que possuem essa característica. Aqui retomaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Visando evitar dúvidas acerca da notação, novamente nesta seção denotaremos os elementos de l_p com a seguinte notação: $x^n \in l_p$, onde $x^n = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$, conforme foi feito na demonstração do Teorema de Schur.

Definição 3.2.1 *Uma* ***sequência maximizante não-fracamente nula de*** *T é uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X, com $\|x_n\|_X = 1$ para todo n,*

$$\|T(x_n)\|_Y \longrightarrow \|T\|$$

e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge fracamente para zero.

Proposição 3.2.2 *Se X é um espaço de Banach reflexivo e $T : X \longrightarrow Y$ é compacto, então T atinge a norma.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em S_X tal que $\|T(x_n)\| \longrightarrow \|T\|$. Pela Proposição 2.2.1, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência fracamente convergente $x_{n_j} \xrightarrow{w} x_0$. Logo, $x_{n_j} - x_0 \xrightarrow{w} 0$. Pela Proposição 2.2.3, $T\left(x_{n_j} - x_0\right) \longrightarrow 0$. Logo, $T\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow T(x_0)$. Portanto, $\left\|T\left(x_{n_j}\right)\right\| \longrightarrow \|T(x_0)\|$. Assim, $\|T(x_0)\| = \|T\|$. ■

O próximo teorema é o resultado central dessa seção; nele, se $x \in l_p$ e $f \in (l_p)^*$, então $f(x)$ é denotado por $\langle f, x\rangle$.

Teorema 3.2.3 *Sejam $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ e $T : l_p \longrightarrow l_q$ um operador linear limitado, não nulo. Então T atinge a norma se, e somente se, existe uma sequência maximizante não-fracamente nula de T.*

Demonstração. Se T atinge a norma, existe $x \in S_{l_p}$ tal que $\|T(x)\|_{l_q} = \|T\|$; então tomando a sequência constante $(x)_{n=1}^{\infty}$ temos a sequência maximizante não-fracamente nula de T.

Reciprocamente, se $p > q$, pelo Teorema 2.2.7 (Teorema de Pitt) e pela Proposição 3.2.2, temos que T atinge a norma, pois l_p é reflexivo. Vejamos o caso $1 < p \leq q$.

Considere $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de vetores unitários canônicos dos espaços em questão. Seja $(u^n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência maximizante não-fracamente nula de T. Passando, se necessário, para uma subsequência, podemos assumir que $u^n \xrightarrow{w} u$, com $u \neq 0$ em l_p (veja o Corolário 2.2.2). Note que $T(u^n) \in l_q \approx (l_{q^*})^*$, onde

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1 \implies \frac{1}{q^*} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q} \implies q^* = \frac{q}{q-1}.$$

Aqui estamos considerando $e_i \in l_{\frac{q}{q-1}}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe que existe (v^n) subsequência de (u^n) tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(|\langle T(v^n), e_i \rangle - \langle T(u), e_i \rangle|^{q-1} \right)_{i=1}^{\infty} = 0 \tag{3.1}$$

na topologia fraca de $l_{\frac{q}{q-1}}$. De fato, note que a sequência

$$\left(\left(|\langle T(u^n), e_i \rangle - \langle T(u), e_i \rangle|^{q-1} \right)_{i=1}^{\infty} \right)_{n=1}^{\infty}$$

é limitada em $l_{\frac{q}{q-1}}$ pois, para cada n natural, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\langle T(u^n), e_i \rangle - \langle T(u), e_i \rangle|^{q-1} \right)^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(u^n), e_i \rangle - \langle T(u), e_i \rangle|^{q} \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(u^n), e_i \rangle|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(u), e_i \rangle|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{q-1} \\
&= \left(\|T(u^n)\|_q + \|T(u)\|_q \right)^{q-1} \\
&\leq \left(\|T\| \|u^n\|_p + \|T\| \|u\|_p \right)^{q-1} \\
&\leq \left(\|T\| + \|T\| \|u\|_p \right)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.2.1, como $l_{\frac{q}{q-1}}$ é reflexivo, existe (v^n) subsequência de (u^n) tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\left|\langle T(v^n),e_i\rangle-\langle T(u),e_i\rangle\right|^{q-1}\right)_{i=1}^{\infty}=f\in l_{\frac{q}{q-1}}, \tag{3.2}$$

na topologia fraca de $l_{\frac{q}{q-1}}$. Como $v^n\overset{w}{\longrightarrow}u$, temos que $T(v^n)\overset{w}{\longrightarrow}T(u)$. Logo usando os funcionais coordenados $f_i:l_q\longrightarrow\mathbb{K}$ dados por $f_i(x)=x_i$, concluímos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle T(v^n),e_i\rangle=\langle T(u),e_i\rangle$$

para todo $i\in\mathbb{N}$. Assim, para todo $i=1,2,...,$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\langle T(v^n),e_i\rangle-\langle T(u),e_i\rangle\right|^{q-1}=0 \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3), temos $f\equiv 0$ e obtemos (3.1).

Seja $r\geq 1$ e considere $\varphi_r:\mathbb{R}\backslash\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por

$$\varphi_r(x)=\frac{\left||x|^r-|x-1|^r-1\right|}{|x-1|^{r-1}}.$$

Note que $\lim\limits_{|x|\longrightarrow\infty}\varphi_r(x)=r.$

Então, dado $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\left||x|^r-|x-1|^r-1\right|\leq C_\varepsilon|x-1|^{r-1}, \tag{3.4}$$

sempre que $|x-1|>\varepsilon$.

Por outro lado, se $|x-1|\leq\varepsilon$, temos que

$$\left||x|^r-|x-1|^r-1\right|\leq|x-1|^r+\left||x|^r-1\right|\leq\varepsilon^r+\widetilde{\delta}(\varepsilon), \tag{3.5}$$

onde

$$\widetilde{\delta}(\varepsilon)=\sup_{|t-1|\leq\varepsilon}\left||t|^r-1\right|.$$

Assim, de (3.4) e (3.5), segue que

$$\left||x|^r-|x-1|^r-1\right|\leq C_\varepsilon|x-1|^{r-1}+\delta(\varepsilon), \tag{3.6}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$ e

$$\delta(\varepsilon)=\varepsilon^r+\widetilde{\delta}(\varepsilon).$$

Agora, aplicamos (3.6) para $r=q$ e $x_i=\dfrac{\langle T(v^n),e_i\rangle}{\langle T(u),e_i\rangle}$, onde $\langle T(u),e_i\rangle\neq 0$, temos

$$\left|\left|\frac{\langle T(v^n),e_i\rangle}{\langle T(u),e_i\rangle}\right|^q-\left|\frac{\langle T(v^n),e_i\rangle}{\langle T(u),e_i\rangle}-1\right|^q-1\right|\leq C_\varepsilon\left|\frac{\langle T(v^n),e_i\rangle}{\langle T(u),e_i\rangle}-1\right|^{q-1}+\delta(\varepsilon).$$

Logo

$$\begin{aligned}&||\langle T(v^n), e_i\rangle|^q - |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^q - |\langle T(u), e_i\rangle|^q|\\&\leq C_\varepsilon |\langle T(u), e_i\rangle|^q \left|\frac{\langle T(v^n), e_i\rangle}{\langle T(u), e_i\rangle} - 1\right|^{q-1} + \delta(\varepsilon) |\langle T(u), e_i\rangle|^q\end{aligned}$$

e segue que

$$\begin{aligned}&||\langle T(v^n), e_i\rangle|^q - |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^q - |\langle T(u), e_i\rangle|^q|\\&\leq C_\varepsilon |\langle T(u), e_i\rangle| |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^{q-1} + \delta(\varepsilon) |\langle T(u), e_i\rangle|^q .\end{aligned}$$

Note que a desigualdade acima vale mesmo quando $\langle T(u), e_i\rangle = 0$. Fazendo a soma em i, segue que,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty} ||\langle T(v^n), e_i\rangle|^q - |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^q - |\langle T(u), e_i\rangle|^q|\\&\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(u), e_i\rangle| |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^{q-1} + \delta(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(u), e_i\rangle|^q .\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty} ||\langle T(v^n), e_i\rangle|^q - |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^q - |\langle T(u), e_i\rangle|^q|\\&\leq C_\varepsilon \Delta_n + \delta(\varepsilon) \|T(u)\|_{l_q}^q ,\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle T(u), e_i\rangle| |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^{q-1} .$$

Como $T(u) \in \left[l_{\frac{q}{q-1}}\right]^*$, temos que

$$\Delta_n = \left\langle T(u), \left(|\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^{q-1}\right)_{i=1}^{\infty} \right\rangle .$$

Portanto, por (3.1), temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Delta_n = \langle T(u), 0\rangle = 0.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (3.7), temos, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\longrightarrow\infty} \left|\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\langle T(v^n), e_i\rangle|^q - |\langle T(v^n), e_i\rangle - \langle T(u), e_i\rangle|^q - |\langle T(u), e_i\rangle|^q\right)\right|\\&\leq \delta(\varepsilon) \|T(u)\|_{l_q}^q .\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, temos

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\left\langle T\left(v^n\right),e_i\right\rangle\right|^q-\left|\left\langle T\left(v^n\right),e_i\right\rangle-\left\langle T\left(u\right),e_i\right\rangle\right|^q-\left|\left\langle T\left(u\right),e_i\right\rangle\right|^q\right)\right|=0. \quad (3.8)$$

Portanto o limite em (3.8) existe e podemos escrever

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\left\langle T\left(v^n\right),e_i\right\rangle\right|^q-\left|\left\langle T\left(v^n\right),e_i\right\rangle-\left\langle T\left(u\right),e_i\right\rangle\right|^q-\left|\left\langle T\left(u\right),e_i\right\rangle\right|^q\right)\right|=0.$$

Em particular,

$$\left\|T\left(v^n\right)\right\|_{l_q}^q=\left(\left\|T\left(u\right)\right\|_{l_q}^q+\left\|T\left(v^n-u\right)\right\|_{l_q}^q+o(1)\right), \quad (3.9)$$

onde $o(1) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Como $v_n \overset{w}{\longrightarrow} u$, com $u \neq 0$ em l_p, observe que existe (w^n) subsequência de (v^n) tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\left|\left\langle w^n,e_i\right\rangle-\left\langle u,e_i\right\rangle\right|^{p-1}\right)_{i=1}^{\infty}=0 \quad (3.10)$$

na topologia fraca de $l_{\frac{p}{p-1}}$. De fato, note que a sequência

$$\left(\left(\left|\left\langle v^n,e_i\right\rangle-\left\langle u,e_i\right\rangle\right|^{p-1}\right)_{i=1}^{\infty}\right)_{n=1}^{\infty}$$

é limitada em $l_{\frac{p}{p-1}}$ pois, para cada n natural, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\left\langle v^n,e_i\right\rangle-\left\langle u,e_i\right\rangle\right|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle v^n,e_i\right\rangle-\left\langle u,e_i\right\rangle\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leq\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle v^n,e_i\right\rangle\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle u,e_i\right\rangle\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1}\\
&=\left(\left\|v^n\right\|_{l_p}+\left\|u\right\|_{l_p}\right)^{p-1}\\
&\leq\left(1+\left\|u\right\|_{l_p}\right)^{p-1}
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.2.1, como $l_{\frac{p}{p-1}}$ é reflexivo, existe (w^n) subsequência de (v^n) tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\left|\left\langle w^n,e_i\right\rangle-\left\langle u,e_i\right\rangle\right|^{p-1}\right)_{i=1}^{\infty}=g\in l_{\frac{p}{p-1}}, \quad (3.11)$$

na topologia fraca de $l_{\frac{p}{p-1}}$. Como $w^n \xrightarrow{w} u$, temos que, para todo $i = 1, 2, ...,$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^{p-1} = 0 \tag{3.12}$$

De (3.11) e (3.12), temos $g = 0$.

Usando $r = p$ em (3.6) e aplicando nos pontos onde $y_i = \dfrac{\langle w^n, e_i \rangle}{\langle u, e_i \rangle}$, com $\langle u, e_i \rangle \neq 0$, temos

$$\left| \left| \frac{\langle w^n, e_i \rangle}{\langle u, e_i \rangle} \right|^p - \left| \frac{\langle w^n, e_i \rangle}{\langle u, e_i \rangle} - 1 \right|^p - 1 \right| \leq C_\varepsilon \left| \frac{\langle w^n, e_i \rangle}{\langle u, e_i \rangle} - 1 \right|^{p-1} + \delta(\varepsilon)$$

Logo

$$\begin{aligned} &\left| |\langle w^n, e_i \rangle|^p - |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^p - |\langle u, e_i \rangle|^p \right| \\ &\leq C_\varepsilon |\langle u, e_i \rangle|^p \left| \frac{\langle w^n, e_i \rangle}{\langle u, e_i \rangle} - 1 \right|^{p-1} + \delta(\varepsilon) |\langle u, e_i \rangle|^p \end{aligned}$$

e segue que

$$\begin{aligned} &\left| |\langle w^n, e_i \rangle|^p - |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^p - |\langle u, e_i \rangle|^p \right| \\ &\leq C_\varepsilon |\langle u, e_i \rangle| \, |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^{p-1} + \delta(\varepsilon) |\langle u, e_i \rangle|^p . \end{aligned}$$

Novamente, é fácil ver que a desigualdade acima vale mesmo quando $\langle u, e_i \rangle = 0$. Fazendo a soma em i, segue que,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \left| |\langle w^n, e_i \rangle|^p - |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^p - |\langle u, e_i \rangle|^p \right| \\ &\leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle| \, |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^{p-1} + \delta(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^p . \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| |\langle w^n, e_i \rangle|^p - |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^p - |\langle u, e_i \rangle|^p \right| \leq C_\varepsilon R_n + \delta(\varepsilon) \|u\|_{l_p}^p , \tag{3.13}$$

onde

$$R_n = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle| \, |\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^{p-1} .$$

Como $u \in \left[l_{\frac{p}{p-1}} \right]^*$, temos que

$$R_n = \left\langle u, \left(|\langle w^n, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle|^{p-1} \right)_{i=1}^{\infty} \right\rangle .$$

De (3.10) segue que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} R_n = \langle T(u), 0\rangle = 0.$$

Logo

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left| |\langle w^n, e_i\rangle|^p - |\langle w^n, e_i\rangle - \langle u, e_i\rangle|^p - |\langle u, e_i\rangle|^p \right| = 0$$

e, por maior razão,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} |\langle w^n, e_i\rangle|^p - |\langle w^n, e_i\rangle - \langle u, e_i\rangle|^p - |\langle u, e_i\rangle|^p \right| = 0.$$

Logo

$$\|w^n - u\|_{l_p}^p = 1 - \|u\|_{l_p}^p + o(1), \tag{3.14}$$

para alguma subsequência (w^n) de (v^n).

Como $1 < p \leq q$, por (3.9) e (3.14), temos que

$$\begin{aligned} \|T(w^n)\|_{l_q}^p &\leq \left(\|T(u)\|_{l_q}^q + \|T(w^n - u)\|_{l_q}^q + o(1) \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \|T(u)\|_{l_q}^p + \|T(w^n - u)\|_{l_q}^p + o(1) \\ &\leq \|T(u)\|_{l_q}^p + \|T\|^p \|w^n - u\|_{l_p}^p + o(1) \\ &\leq \|T(u)\|_{l_q}^p + \|T\|^p \left(1 - \|u\|_{l_p}^p + o(1) \right) + o(1). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nas desigualdades acima, usamos que

$$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^s \leq \theta_1^s + \theta_2^s + \theta_3^s$$

sempre que $0 < s \leq 1$ e $\theta_j > 0$, $j = 1, 2, 3$.

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\|T\|^p \leq \|T(u)\|_{l_q}^p + \|T\|^p \left(1 - \|u\|_{l_p}^p \right)$$

e daí segue que

$$\|T(u)\|_{l_q} \geq \|T\| \|u\|_{l_p}$$

Como $\|T(u)\|_{l_q} \leq \|T\| \|u\|_{l_p}$, segue que

$$\left\| T\left(\frac{u}{\|u\|} \right) \right\|_{l_q} = \|T\|.$$

■

Exemplo 3.2.4 *O teorema anterior não é válido para $p = 1$. De fato, se $1 = p \leq q < \infty$, então o operador $T \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_q)$ dado por*

$$T(x) = \left(\frac{nx_n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty} \tag{3.16}$$

não atinge a norma. A base canônica $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência maximizante para T, que não é fracamente nula quando $p = 1$. Esse exemplo, embora apareça em [13], é creditado a Richard Aron.

Teorema 3.2.5 *Sejam $T : l_p \longrightarrow l_q$ um operador não identicamente nulo que atinge a norma e $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $p \neq q$. Então toda sequência maximizante não fracamente nula de T tem uma subsequência convergente na norma.*

Demonstração. Sejam $T : l_p \longrightarrow l_q$ um operador não-nulo que atinge a norma e (x^n) uma sequência maximizante de S_{l_p} que não converge fracamente para zero. Pelo Corolário 2.2.2, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (x^n) converge fracamente para um ponto $x_0 \neq 0$. Note que o mesmo raciocínio que nos levou a (3.14), na demonstração do teorema anterior, agora nos fornece

$$\|x^n - x_0\|_{l_p}^p = 1 - \|x_0\|_{l_p}^p + o(1). \tag{3.17}$$

É válido mencionar que a referida passagem, no teorema anterior, que leva a (3.14), não necessita da hipótese $1 < p \leq q$.

Basta-nos mostrar que $x_0 \in S_{l_p}$. Com efeito, se $x_0 \in S_{l_p}$, então de (3.17) segue que

$$\|x^n - x_0\|_{l_p}^p = o(1),$$

isto é,

$$x_n \longrightarrow x_0$$

e daí segue que

$$\|Tx_0\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|Tx^n\| = \|T\|.$$

Vamos, portanto mostrar que $x_0 \in S_{l_p}$.

Se $p > q$, o resultado segue do Teorema 2.2.7 (Teorema de Pitt) e da Proposição 2.2.3 pois, como T é compacto, então

$$T(x^n) \longrightarrow T(x_0) \tag{3.18}$$

em l_q. Além disso, por propriedades de convergência fraca, sabemos que $\|x_0\| \leq 1$. Mas

$$\|T(x^n)\|_{l_q} \longrightarrow \|T\| \tag{3.19}$$

e, de (3.18) e (3.19), temos

$$\|T\| = \|T(x_0)\|_{l_q}$$

e consequentemente $\|x_0\|_{l_p} = 1$.

Se $p < q$, considere $x_0 \neq 0$. No nosso caso, passando a uma subsequência, se necessário, vale uma desigualdade similar a (3.15). Logo, elevando ambos os membros a $\dfrac{q}{p}$, obtemos

$$\|T(x^n)\|_{l_q}^q \leq \|T(x_0)\|_{l_q}^q + \|T\|^q \left(1 - \|x_0\|_{l_p}^p + o(1)\right)^{\frac{q}{p}} + o(1). \tag{3.20}$$

Como

$$\|T(x^n)\|_{l_q} = \|T\| + o(1)$$

e, pela demonstração do Teorema 3.2.3,

$$\|T(x_0)\|_{l_q} = \|T\| \, \|x_0\|_{l_p},$$

de (3.20) segue que

$$\|T\|^q + o(1) \leq \|T\|^q \, \|x_0\|_{l_p}^q + \|T\|^q \left(1 - \|x_0\|_{l_p}^p + o(1)\right)^{\frac{q}{p}} + o(1).$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\|T\|^q \leq \|T\|^q \, \|x_0\|_{l_p}^q + \|T\|^q \left(1 - \|x_0\|_{l_p}^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

e finalmente

$$1 \leq \|x_0\|_{l_p}^q + \left(1 - \|x_0\|_{l_p}^p\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{3.21}$$

Como $\frac{q}{p} > 1$, de (3.21) temos que

$$1 - \|x_0\|^p = 0.$$

De fato, se fosse $1 - \|x_0\|^p > 0$, teríamos

$$1 = \left[\|x_0\|_{l_p}^p + \left(1 - \|x_0\|_{l_p}^p\right)\right]^{\frac{q}{p}} > \|x_0\|_{l_p}^q + \left(1 - \|x_0\|_{l_p}^p\right)^{\frac{q}{p}},$$

e essa última desigualdade contradiz (3.21). ■

Exemplo 3.2.6 *O teorema anterior não é válido para $p = q$. Com efeito, a sequência*

$$u^n := \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2}}, 0, 0, \cdots, \frac{1}{\sqrt[p]{2}}, 0, \cdots\right) = \frac{1}{\sqrt[p]{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt[p]{2}} e_n$$

não é fracamente nula, é maximizante para a aplicação identidade $Id \colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$, mas não tem subsequência convergente. Assim, fica claro que a hipótese $p \neq q$, no teorema acima, é essencial.

3.3 Aplicação

Recentemente, em sua tese de doutorado [8], Janice Kover estudou a relação entre perturbações compactas de operadores e operadores que atingem a norma em espaços de Hilbert. O seguinte resultado foi demonstrado:

Teorema 3.3.1 (Kover) *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H,H)$. Se $K \in \mathcal{L}(H,H)$ é um operador compacto e*

$$\|T\| < \|T+K\|,$$

então $T+K$ atinge a norma.

Em comunicação privada, Richard Aron comentou com D. Pellegrino e E. Teixeira que o resultado de Kover poderia ser obtido no contexto de espaços l_p, usando o Teorema 3.2.3. A seguir veremos as consequências do Teorema 3.2.3 nesse contexto.

Proposição 3.3.2 *Seja $T \in \mathcal{L}(l_p; l_q)$ com $p > 1$ e seja $K : l_p \longrightarrow l_q$ um operador linear compacto. Se*

$$\|T+K\| > \|T\|,$$

então $T+K$ atinge a norma.

Demonstração. Suponha que $T+K$ não atinja sua norma. Logo, pelo Teorema 3.2.3, toda sequência maximizante $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para $T+K$ é fracamente nula. Logo, como K é compacto, temos $K(x_n) \longrightarrow 0$. Logo,

$$\|T(x_n) + K(x_n)\| \longrightarrow \|T+K\|,$$

pois $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é maximizante, mas

$$\|T+K\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|T(x_n) + K(x_n)\| \leq \sup_n \|T(x_n)\| \leq \|T\| < \|T+K\|,$$

o que é uma contradição. ■

Proposição 3.3.3 *Se $p > 1$ e $T \in \mathcal{L}(l_p; l_q)$ não atinge a norma, então*

$$\|T\| \leq \|T+K\|$$

para todo K compacto.

Demonstração. De fato, como T não atinge a norma, toda sequência maximizante $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de T é tal que $x_n \overset{w}{\longrightarrow} 0$. Assim

$$\|(T+K)(x_n)\| \leq \|T+K\|$$

e, como K é compacto, $K(x_n) \longrightarrow 0$ e daí segue que

$$\|T(x_n)\| = \|T(x_n) + K(x_n) - K(x_n)\| \leq \|T(x_n) + K(x_n)\| + \|K(x_n)\| \leq \|T(x_n)\| + 2\|K(x_n)\|.$$

Portanto,

$$\|T(x_n) + K(x_n)\| + \|K(x_n)\| \longrightarrow \|T\|.$$

Como $\|K(x_n)\| \longrightarrow 0$, então

$$\|(T+K)(x_n)\| = \|T(x_n) + K(x_n)\| \longrightarrow \|T\|.$$

Logo

$$\|T\| \leq \|T+K\|$$

■

Proposição 3.3.4 *Se $T \in \mathcal{L}(l_p; l_q)$ e $T + K \in \mathcal{L}(l_p; l_q)$ não atingem a norma, para algum K compacto, então*

$$\|T\| = \|T+K\|.$$

Demonstração. De fato, pelo resultado anterior, temos

$$\|T\| \leq \|T+K\|.$$

Mas, como $T + K$ não atinge a norma, temos ainda

$$\|T+K\| \leq \|(T+K) + (-K)\| = \|T\|,$$

pois $-K$ é compacto. Logo

$$\|T\| = \|T+K\|.$$

■

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Operadores Compactos em Espaços Normados

Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear contínuo $T : X \longrightarrow Y$ é dito operador compacto se para todo subconjunto limitado $M \subset X$, a imagem $T(M) \subset Y$ for relativamente compacta, isto é, $\overline{T(M)}$ for compacto em Y.

Lema 4.1.1 *Sejam X e Y espaços normados. Então, se $\dim X = \infty$, o operador identidade $Id : X \longrightarrow X$ não é compacto.*

Demonstração. Sabemos que a bola fechada $B = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ é limitada. Como X tem dimensão infinita, B não é compacta. Logo

$$\overline{Id(B)} = \overline{B} = B$$

não é compacto. ■

Teorema 4.1.2 (Critério de Compacidade) *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Então T é compacto se, e somente se, T leva sequências limitadas de X em sequências em Y com subsequências convergentes.*

Demonstração. Suponha T compacto e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em X. Então, $\overline{\{T(x_n); n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto em Y. Assim, $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente em Y.

Reciprocamente, considere $B \subset X$ limitado e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\overline{T(B)}$. Se existem infinitos n tais que $y_n \in T(B)$, nos restringimos a uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ em $T(B)$. Por hipótese, $(Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, e portanto $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente.

Caso só existam finitos índices n tais que $y_n \in T(B)$, não há perda de generalidade se supusermos que todos os elementos da sequência estão em $\overline{T(B)} \backslash T(B)$. Para cada y_j, considere $x_j \in B$ tal que

$$\|T(x_j) - y_j\| < \frac{1}{j}.$$

Como $(Tx_j)_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, segue que $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ também possui. Logo, $\overline{T(B)}$ é compacto. ■

Corolário 4.1.3 *Sejam $T_1, T_2 : X \longrightarrow Y$ dois operadores compactos. Então $T_1 + T_2 : X \longrightarrow Y$ é compacto. Além disso, $\alpha T_1 : X \longrightarrow Y$ é compacto*

Demonstração. Da hipótese, segue que dada uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $(T_1 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é convergente; como $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é limitada, segue que $(T_2 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente $(T_2 z_n)_{n=1}^{\infty}$. Portanto

$$((T_1 + T_2)z_n)_{n=1}^{\infty}$$

é subsequência convergente de $((T_1 + T_2)x_n)_{n=1}^{\infty}$. Logo, pelo Teorema 4.1.2, $T_1 + T_2$ é compacto.

O caso de αT_1 é similar. ■

O corolário anterior prova que o conjunto dos operadores compactos entre espaços normados é um espaço vetorial.

Teorema 4.1.4 (Sequência de operadores compactos) *Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores compactos, $T_n : X \longrightarrow Y$, onde X é um espaço normado e Y um espaço de Banach. Se $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é tal que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, então o operador limite T é compacto.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em X. Pelo Teorema 4.1.2 basta mostrar que $(T(x_m))_{m=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente em Y. Como T_1 é compacto, existe uma subsequência $(x_{1,m})_{m=1}^{\infty}$ tal que $(T_1(x_{1,m}))_{m=1}^{\infty}$ é convergente (portanto de Cauchy).

Analogamente, $(x_{1,m})_{m=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(x_{2,m})_{m=1}^{\infty}$ tal que $(T_2(x_{2,m}))_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Procedendo da mesma forma, a sequência diagonal

$$(y_m)_{m=1}^{\infty} = (x_{1,1}, x_{2,2}, ...)$$

é uma subsequência de $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que $(T_n(y_m))_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy, para cada n.

Como $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada, existe $c > 0$ tal que $\|y_m\| \leq c$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $T_n \longrightarrow T$, existe p tal que

$$\|T - T_p\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Como $(T_p(y_m))_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$j, k > n_0 \implies \|T_p(y_j) - T_p(y_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para $j, k > n_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|T(y_j) - T(y_k)\| &\leq \|T(y_j) - T_p(y_j)\| + \|T_p(y_j) - T_p(y_k)\| + \|T_p(y_k) - T(y_k)\| \\
&\leq \|T - T_p\| \, \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_p\| \, \|y_k\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3c}c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}c = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, $(T(y_m))_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy e converge, pois Y é de Banach. Como $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ é subsequência de uma sequência limitada qualquer, então T é compacto. ■

Teorema 4.1.5 (Convergência Fraca) *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador compacto. Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fracamente convergente para x em X. Então $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ converge (em norma) para Tx em Y.*

Demonstração. Sejam

$$y_n = T(x_n) \text{ e } y = Tx.$$

Considere $g \in Y^*$e defina $f_g \in X^*$ por

$$f_g(z) = g\left(T(z)\right).$$

Claramente f_g é linear. Além disso, f_g é limitado, pois T é contínuo e

$$|f_g(z)| = |g(T(z))| \leq \|g\| \, \|T\| \, \|z\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x_n \xrightarrow{w} x \implies & f_g(x_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f_g(x) \\
\iff & g(T(x_n))_{n=1}^{\infty} \longrightarrow g(T(x)) \\
\iff & g(y_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow g(y).
\end{aligned}$$

Como g é arbitrário, então

$$y_n \xrightarrow{w} y \tag{4.1}$$

Vamos mostrar que

$$y_n \longrightarrow y.$$

De fato, suponha o contrário; logo $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tem uma subsequência convergente $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon \tag{4.2}$$

para algum $\varepsilon > 0$ dado. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente convergente, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada, donde $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ também é limitada. Como T é compacto, então $(Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tem uma subsequência convergente (em norma), digamos

$$\widetilde{y}_j \longrightarrow \widetilde{y}. \tag{4.3}$$

Logo, por maior razão,

$$\widetilde{y}_j \xrightarrow{w} \widetilde{y} \tag{4.4}$$

De (4.1) e (4.4), segue que

$$y = \widetilde{y}. \tag{4.5}$$

Logo, de (4.2) segue que

$$\|\widetilde{y}_j - y\| \geq \epsilon$$

e de (4.3) e (4.5) temos $\widetilde{y}_j \longrightarrow y$ (contradição). Portanto $y_n \longrightarrow y$. ■

4.2 Teoremas Clássicos da Análise Funcional

Nesta seção vamos enunciar, sem demonstração, alguns resultados clássicos da Teoria da Análise Funcional que são utilizados no decorrer de nosso trabalho.

Teorema 4.2.1 (de Baire) *Seja M um espaço métrico completo, não-vazio. Então M não pode ser uma união enumerável de conjuntos cujo fecho tem interior vazio.*

Teorema 4.2.2 (de Hahn-Banach) *Seja G um subespaço de um espaço normado E e seja $g : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com g e $\|T\| = \|g\|$.*

Teorema 4.2.3 (de Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço vetorial normado. Seja $(T_i)_{i\in\Lambda}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E; F)$ tais que, para todo $x \in E$, existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup\{\|T_i(x)\|; i \in \Lambda\} < C_x.$$

Então

$$\sup\{\|T_i\|; i \in \Lambda\} < \infty.$$

Corolário 4.2.4 *Sejam G um espaço normado, $B \subset G$ e suponha que $f(B)$ seja limitado para cada $f \in G^*$. Então B é limitado.*

Teorema 4.2.5 (da Aplicação Aberta) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ linear, contínua e bijetiva. Então T^{-1} é contínua.*

Corolário 4.2.6 *Sejam $X_1 = (X, \|.\|_1)$ e $X_2 = (X, \|.\|_2)$ espaços de Banach tais que $\|x_n\|_1 \longrightarrow 0$ sempre que $\|x_n\|_2 \longrightarrow 0$, então a convergência em X_1 sempre implica em convergência em X_2 e vice-versa. Além disso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$,*

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 .$$

Teorema 4.2.7 (do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T : E \longrightarrow F$ é um operador linear fechado, ou seja*

$$Graf\,(T) := \{(x, y)\,; x \in E \ \ e \ y = T\,(x)\}$$

é fechado em $E \times F$, então T é contínuo.

Teorema 4.2.8 (de Banach-Mazur) *Todo espaço normado separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de $\mathcal{C}\,([0, 1])$.*

Teorema 4.2.9 (de Mazur) *Se S é um conjunto convexo num espaço normado X, então o fecho de S na topologia da norma coincide com o fecho de S na topologia fraca, ou seja, $S = \overline{S}^w$.*

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac e N. Kalton, Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics 233, Springer-Verlag INC, New York, 2005.

[2] E. Bishop e R. Phelps, A proof that every Banach space is subrreflexive, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97-98.

[3] J. Bourgain, On dentability and the Bishop-Phelps property, Isr. J. Math. **28** (1977), 265-271.

[4] H. Brézis, Analyse Fonctionelle, Masson, 1987.

[5] D. Diniz, Aplicações entre espaços de Banach que atingem a norma, Anais das Jornadas de Iniciação Científica do IMPA, 2004.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hajék, V. Santalucía, J. Pelant and V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CBS Books in Mathematics, Springer Verlag INC, New York, 2001.

[7] W. Gowers, Symmetric block bases of sequences with large avarage growth, Isr. J. Math. **69** (1990), 129-151.

[8] J. Kover, Perturbations on norm-attaining operators, Tese de Doutorado, Kent State University, 2001.

[9] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Willey Classics Library Edition INC, 1989.

[10] J. Lindenstrauss, On operators which attain their norm, Isr. J. Math. **1** (1963), 139-148.

[11] T. Morrison, Functional Analysis. An Introduction to Banach Space Theory. Pure and Apllied Mathematics, John Wiley e Sons INC, New York, 2001.

[12] D. Pellegrino, Notas de Aula de Introdução à Análise Funcional, 2008.

[13] D. Pellegrino e E. Teixeira, Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces, Bull. Braz. Math. Soc. **40** (2009), 417-431.

[14] H. Pitt, A note on bilinear forms, J. London Math. Soc. **11** (1936), 174-180.

[15] J. Santos, Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.