

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Existência de Conexões Versus Módulos Projetivos

Rafael Barbosa da Silva

JOÃO PESSOA – PB
MAIO DE 2013

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de Conexões Versus Módulos Projetivos

por

Rafael Barbosa da Silva

sob orientação da

Prof^a. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Maio de 2013

S586e Silva, Rafael Barbosa da.
Existência de conexões versus módulos projetivos / Rafael
Barbosa da Silva.- João Pessoa, 2013.
54f.
Orientadora: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Conexões. 3. Derivadas covariantes.
4. Módulos projetivos. 4. Seções do fibrado tangente.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Existência de Conexões Versus Módulos Projetivos

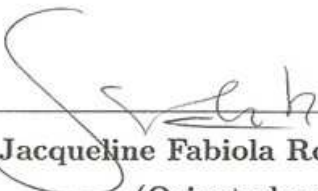
por


Rafael Barbosa da Silva

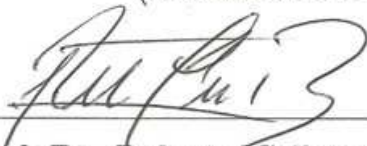
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.


Aprovado em 03 de Maio de 2013.

Banca Examinadora:


Prof.^a. Dr.^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientadora)


Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo – UFPE
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Examinador Interno)


Prof. Dr. Napoleon Caro Tuesta – UFPB
(Suplente)

Ao meu pai.

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado forças condições para prosseguir.

Aos meus pais e meu irmão por todo o apoio, sempre.

Aos meus demais parentes, em especial minha avó pelo apoio.

À Sally que estava comigo quando eu soube do meu ingresso no mestrado, e torceu por mim mais até que eu mesmo e aos amigos da UFRPE.

À Eberson, Felipe, Everton e Islanita que moraram comigo e com quem aprendi muito. Que compartilharam as alegrias e dificuldades, como quando fui operado.

Aos professores, Adriano, Isis, Arimatéa, Hebe, Maité, Rodrigo e Jorge que me ajudaram, inspiraram e influenciaram.

Aos professores, Everaldo e Daniel que foram os coordenadores do programa, enquanto eu era discente. E aos professores Cleto, Lizandro e Fagner.

À minha orientadora (super compreensiva) Jacqueline Rojas, que me ensinou mais que matemática. E aos professores André Meireles e Roberto Bedregal que compuseram a banca.

À Mariana e Rainelly pela companhia nos momentos de estudo e nas circunstâncias boas e adversas, em particular, quando fui operado.

À Wallace, Nacib e Ricardo que me ensinaram muito. À Gersica que acompanhou este trabalho de perto e me ajudou bastante.

Aos demais amigos da turma, companheiros de estudos e amigos especiais que torcem e oram por mim.

“...
O limite é só o começo
...”

Existência de Conexões Versus Módulos Projetivos,
Rafael Barbosa da Silva

Resumo

As noções de conexão e derivada covariante tem sua origem na área de geometria riemanniana, onde não existe distinção entre elas. De fato, nós verificamos neste trabalho, que estas noções são equivalentes se considerarmos módulos sobre \mathbb{K} -álgebras comutativas de tipo finito. Também mostramos que a existência de conexões implica na existência de derivada covariante. O objetivo central deste trabalho é determinar que módulos admitem conexão. Verificamos facilmente que os módulos projetivos admitem conexões. De fato, elas formam um espaço afim. Mas também exibimos um módulo não projetivo que possui conexão. Posteriormente, inspirados pelo teorema de Swan, exploramos de maneira direta os módulos formados pelas seções do fibrado tangente de algumas superfícies no espaço 3-dimensional real. Por fim, estudamos a noção de conexão introduzida por Alain Connes em módulos sobre \mathbb{K} -álgebras não necessariamente comutativas. E verificamos nesse contexto que os módulos que admitem conexão são exatamente os módulos projetivos.

Palavras-chave: conexões, derivadas covariantes, módulos projetivos, seções do fibrado tangente.

Abstract

The notions of connection and covariant derivative has its origin in the field of Riemannian geometry , where there is no distinction between them. In fact, in this study we found that these notions are equivalent if we consider modules over \mathbb{K} -algebras of finite type. We also show that the existence of connections implies the existence of covariant derivative. The main goal of this study is to determine which modules admit connections. We easily verified that the projective modules admit connections. In fact, they form an affine space. But we also display a module that is not projective and has connection. Later, inspired by Swan's theorem, we explore in a straightforward way modules formed by sections of the tangent bundle of some surfaces in 3-dimensional real space. Finally, we study the notion of connection introduced by Alain Connes in modules over \mathbb{K} -algebras not necessarily commutative. And we find in that context that the modules that have connection are exactly the projectives modules.

Keywords: connection, covariant derivative, projective module, sections of the tangent bundle.

Sumário

Introdução	xi
1 Conexões e Derivadas Covariantes em Módulos	1
1.1 Módulos Projetivos	1
1.2 Conexões	4
1.3 Derivada Covariante	7
1.3.1 Nem todo módulo admite conexão	8
2 Explorando o conceito de módulo projetivo em exemplos geométricos	20
2.1 As seções do fibrado tangente de uma variedade diferenciável	20
2.2 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ em exemplos geométricos	27
2.2.1 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, se \mathcal{U} é um plano em \mathbb{R}^3	28
2.2.2 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, se \mathcal{U} é um cilindro em \mathbb{R}^3	28
2.2.3 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, se \mathcal{U} é uma esfera em \mathbb{R}^3	30
3 Conexões em Módulos Sobre Anéis não Necessariamente Comutativos	32
A Propriedade Universal do produto tensorial - PUPT	38
B Propriedade Universal dos diferenciais de Kähler - PUDK	44
Referências Bibliográficas	54

Introdução

Nos cursos introdutórios de cálculo diferencial estudam-se funções reais com valores reais, onde é apresentado o conceito de limite que é importante no estudo de derivadas neste contexto, uma vez que a derivada é um limite. Por outro lado nos primeiros cursos de álgebra são apresentados algumas estruturas algébricas dentre elas os \mathbb{K} -espaços vetoriais.

No continuar dos estudos surgem generalizações destes conceitos. Os espaços vetoriais passam a ser um caso particular de R -módulos (quando R é um corpo), onde as transformações lineares são agora chamadas de homomorfismos R -lineares. Além disso, a derivada também tem sua generalização. Uma derivação ∂ de uma R -álgebra A em um A -módulo M é uma aplicação R -linear que satisfaz a regra de Leibniz (a conhecida regra do produto), a saber

$$\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a), \forall a, b \in A.$$

Outra generalização do conceito de derivada tem origem na geometria riemanniana, a saber, *derivada covariante*, assim como a noção de *conexão*. Que difere desta apenas no ponto de vista. A seguir apresentamos uma breve revisão histórica dessas noções.

Em 1869, o matemático e físico alemão Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) publicou *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, onde ele introduziu os famosos símbolos Γ_{ij}^k (a notação de Christoffel era $\{\overset{k}{ij}\}$ ([8]). O que Christoffel não percebeu foi que os símbolos que ele tinha descoberto determinavam uma conexão.

Foi notado depois pelos matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro (1853- 1925) e Tullio Levi-Civita (1873-1941) (em [23]) que os símbolos de Christoffel obtidos a partir de uma métrica Riemanniana podiam ser usados para criar um cálculo diferencial “livre de coordenadas”. Eles definiram, com estes símbolos, uma derivada covariante que generalizava a derivada parcial usual, como um endomorfismo de $\Gamma(T\mathcal{U})$ (as seções do fibrado tangente associada a variedade diferenciável \mathcal{U}).

Em 1920, o matemático francês Élie Joseph Cartan (1869-1951) desenvolveu uma nova noção de conexão, as conexões projetivas e conformes (ver [6] e [7]).

Em 1950, o matemático francês Jean-Louis Koszul usou um embasamento algébrico, de modo que uma conexão podia ser considerada como um operador diferencial. A conexão de Koszul era um pouco mais geral que a de Levi-Civita, e era mais fácil de trabalhar,

porque finalmente foi capaz de eliminar com (ou, pelo menos, esconder) os incômodos símbolos de Christoffel do formalismo de conexão ([11]).

Foi o aluno de Cartan, Charles Ehresmann (1905-1979), quem conseguiu finalmente esclarecer e classificar com sucesso todas as conexões, específicas e generalizadas, que tinham surgido na primeira metade do século 20 ([13]). Isso se deu pelo seu esforço em entender as conexões de Cartan de um ponto de vista global. Para este fim, Ehresmann introduziu o conceito de fibrado (independentemente de Whitney e Steenrod).

Durante o período de 1941-1944 Ehresmann publicou suas primeiras notas sobre o assunto, onde ele definiu fibrados principais localmente triviais e seus fibrados associados (também localmente trivial). Em seu artigo de 1943 *Sur les espaces fibrés associés une variété différentiable* uma variedade é definida por meio de um atlas de cartas locais pela primeira vez ([12]).

Por exemplo, sejam C_U^∞ o anel de todas as funções infinitamente diferenciáveis com valores reais na variedade diferenciável \mathcal{U} e $\Gamma(T_U)$ o C_U^∞ -módulo das seções contínuas do fibrado tangente T_U . Em [5] uma conexão (afim) em \mathcal{U} é definido como um mapa $\mathbb{D} : \Gamma(T_U) \times \Gamma(T_U) \rightarrow \Gamma(T_U)$, onde $\mathbb{D}(X, Y) = \mathbb{D}_X(Y)$ satisfaz as seguintes propriedades para cada $f \in C_U^\infty$ e $X, Y, Z \in \Gamma(T_U)$:

$$\mathbb{D}_{fX+Y}(Z) = f\mathbb{D}_X(Z) + \mathbb{D}_Y(Z), \quad \mathbb{D}_X(Y + Z) = \mathbb{D}_X(Y) + \mathbb{D}_X(Z) \quad e$$

$$\mathbb{D}_X(fY) = f\mathbb{D}_X(Y) + X(f)Y.$$

Uma vez que qualquer campo de vetores pode ser considerado como uma derivação em C_U^∞ , isto é, $\Gamma(T_U) = Der(C_U^\infty)$ (ver [19]). Então, \mathbb{D} dado acima pode ser considerado como um homomorfismo C_U^∞ -linear de $Der(C_U^\infty)$ em $Hom_{\mathbb{R}}(\Gamma(T_U), \Gamma(T_U))$ satisfazendo a terceira condição. Assim, é muito natural estudar essa noção em um contexto puramente algébrico, vamos fazer isso no capítulo 1, onde chamamos esse tipo de homomorfismo de *derivada covariante* (ver também [16] e [20]).

Em particular, podemos considerar derivadas covariantes para outros fibrados vetoriais E em \mathcal{U} . Relacionado a isso, temos:

Relação entre os módulos projetivos e fibrados vetoriais (o teorema de Swan [31])

Sejam X um espaço topológico compacto Hausdorff e C_X o anel das funções contínuas com valores reais em X . Dado um fibrado vetorial E em X , seja $\Gamma(E)$ o espaço das seções contínuas. Então $\Gamma(E)$ é um C_X -módulo projetivo finitamente gerado. Por outro lado, seja M um C_X -módulo projetivo finitamente gerado. Então, existe um fibrado vetorial E tal que $M \cong \Gamma(E)$. Assim, obtemos uma correspondência entre

$$\{\text{fibrados vetoriais sobre } X\} \longleftrightarrow \{C_X\text{-módulos projetivos finitamente gerados}\}$$

Uma vez definido o conceito de conexão para módulos (veja definição 1.2), resta-nos responder a seguinte questão: todo módulo admite uma conexão? O que é uma pergunta razoável uma vez que nem toda função tem derivada.

Vamos buscar a resposta para esta indagação ainda no capítulo 1, onde mostraremos que cada módulo projetivo (em particular o C_X -módulo $\Gamma(E)$) admite uma conexão (ver Prop. 1.4) e, conseqüentemente, uma derivada covariante (ver Prop. 1.5). Mas, a recíproca não é válida.

No capítulo 2 mostraremos que $\Gamma(T_U)$ (as seções do fibrado tangente) de uma variedade diferenciável U é um C_U^∞ -módulo. Além disso, verificaremos em alguns exemplos de maneira direta que as seções do fibrado tangente são um C_U^∞ -módulo projetivo.

Por outro lado, em 1954, o físico chinês Chen-Ning Franklin Yang e o físico americano Robert L. Mills (1927-1999) propuseram a teoria de Gauge, que nos permite entender a interação próton-nêutron. Nessa formulação matemática, aparece o agora chamado funcional de Yang-Mills, que é definido sobre o conjunto das conexões de um fibrado vetorial fixado. Por exemplo, se considerarmos o fibrado trivial complexo $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^4$ com um determinado produto hermitiano em suas seções, então podemos deduzir as equações de Maxwell da eletrodinâmica ([30]). No entanto, o conceito de conexão reaparece no contexto da geometria não comutativa ([9], [10]). Na verdade, Connes introduziu a noção de diferenciais não comutativos, que foi utilizado por Krämer (em [22]) para concluir que a existência de conexões (sendo que nesta definição de conexão são utilizados diferenciais não comutativos em lugar dos diferenciais de Kähler), é verificada exatamente para módulos projetivos sobre anéis não (necessariamente) comutativos (ver Cor. 3.4) diferentemente do caso comutativo.

Capítulo 1

Conexões e Derivadas Covariantes em Módulos

Neste capítulo quando nos referirmos a anel estaremos considerando que este é comutativo com unidade e \mathbb{K} denotará um corpo.

1.1 Módulos Projetivos

Definição 1.1. Sejam A um anel comutativo com unidade e M um A -módulo, M é dito projetivo se existir N A -módulo tal que $M \oplus N$ é livre.

Exemplo 1.1. Se M for um A -módulo livre então M é projetivo.

Exemplo 1.2. Seja $A = \mathbb{Z}_6$ e $M = \{\bar{0}, \bar{3}\} \subset A$. Note que:

- M é um A -módulo. De fato, M é o ideal gerado por $\bar{3}$ em A .
- M não é um A -módulo livre. Com efeito, suponha que M é um A -módulo livre, então $M \cong A^n$ para algum $n \geq 1$ inteiro ou $M \cong \bigoplus_J A$ com J infinito, o que não pode ocorrer pela cardinalidade de M .
- M é um A -módulo projetivo. Vamos mostrar que existe N A -módulo tal que $M \oplus N \cong M \times N$ é um A -módulo livre. Considere $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, o ideal gerado por $\bar{2}$ em A .

Observe que $\alpha = (\bar{3}, \bar{2})$ gera $M \times N$ como A -módulo. Além disso $\{\alpha\}$ é L.I. Portanto $M \times N$ é um A -módulo livre de posto 1, conseqüentemente $M \times N \cong A$.

Exemplo 1.3. O $\mathbb{C}[t]$ -módulo $\mathbb{C}(t) = \text{Frac}(\mathbb{C}[t])$ não é um $\mathbb{C}[t]$ -módulo projetivo.

Suponha por absurdo que $\mathbb{C}(t)$ é um $\mathbb{C}[t]$ -módulo projetivo, logo existe N $\mathbb{C}[t]$ -módulo tal que $\mathbb{C}(t) \times N$ é livre e podemos considerar $\{u_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base de $\mathbb{C}(t) \times N$. Note que

$(\frac{1}{1}, 0_N) \in \mathbb{C}(t) \times N$, assim existem únicos $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{C}[t]$ e u_{i_1}, \dots, u_{i_k} na base, de maneira que $(\frac{1}{1}, 0_N) = p_1 u_{i_1} + \dots + p_k u_{i_k}$. A seguir escolha $q \in \mathbb{C}[t]$ tal que q não divide p_i para $i = 1, \dots, k$. Como $(\frac{1}{q}, 0_N) \in \mathbb{C}(t) \times N$, existem únicos $h_1, \dots, h_l \in \mathbb{C}[t]$ e u_{j_1}, \dots, u_{j_l} na base tal que

$$(\frac{1}{q}, 0_N) = h_1 u_{j_1} + \dots + h_l u_{j_l} \Rightarrow (1, 0_N) = q h_1 u_{j_1} + \dots + q h_l u_{j_l} = p_1 u_{i_1} + \dots + p_k u_{i_k}$$

segue, da unicidade da escrita, que $\forall 1 \leq i \leq k = l \exists h_j$ tal que $p_i = q h_j$, com $h_j q = p_i \neq 0$, para algum i , logo $q \mid p_i$ o que é uma contradição, pois $q \nmid p_i$.

Proposição 1.1. Seja $\pi : M \rightarrow P$ um homomorfismo de A -módulos sobrejetivo. Se existir um homomorfismo de A -módulos $i : P \rightarrow M$ tal que $\pi \circ i = Id_P$, então P é somando direto de M . Em particular, se M for livre, concluímos que P é um A -módulo projetivo.

Demonstração. Se $i : P \rightarrow M$ é um homomorfismo tal que $\pi \circ i = Id_P$, vamos mostrar que $M = Im(i) \oplus \ker(\pi)$.

Seja $m \in M$, considere $u = i \circ \pi(m)$, e tome $v = m - u$, logo $m = v + u$, com $u \in Im(i)$ e $v \in \ker(\pi)$, pois

$$\pi(v) = \pi(m) - \pi(u) = \pi(m) - \pi(i \circ \pi(m)) = \pi(m) - ((\pi \circ i) \circ \pi)(m) = \pi(m) - \pi(m) = 0.$$

Por fim mostraremos que $Im(i) \cap \ker(\pi) = \{0\}$.

Com efeito, seja $m \in Im(i) \cap \ker(\pi)$. Como $m \in Im(i)$ temos que $m = i(u)$ para algum $u \in P$. Agora, tendo em consideração que $m \in \ker(\pi)$ temos

$$\pi(m) = 0 \Rightarrow \pi(i(u)) = 0 \Rightarrow Id_P(u) = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow m = i(u) = 0.$$

Como i tem inverso à esquerda, i é injetivo, assim $P \cong Im(i)$. Portanto, $M = P \oplus \ker(\pi)$. □

Proposição 1.2. Sejam A um anel e P um A -módulo, então P é um A -módulo projetivo se, e somente se, $\forall M$ A -módulo e $\pi : M \rightarrow P$ homomorfismo sobrejetor de A -módulos existe $i : P \rightarrow M$ homomorfismo de A -módulos tal que $\pi \circ i = Id_P$, ou seja, i faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & P \\ \uparrow i & \circlearrowleft & \nearrow Id_P \\ P & & \end{array}$$

Demonstração. Assuma que P é projetivo e seja $\pi : M \rightarrow P$ um homomorfismo de A -módulos sobrejetivo. Sabemos que existe N A -módulo tal que $P \oplus N$ é livre (como

A -módulo). Considere $\alpha = \{u_i\}_{i \in J}$ base de $P \oplus N$, vamos mostrar que $\{p_1(u_i)\}_{i \in J}$ gera P , onde $p_1 : P \oplus N \rightarrow P$ é a projeção na primeira coordenada.

De fato, se $x \in P$ então $(x, 0_N) \in P \oplus N$. Assim existem únicos $a_1, \dots, a_k \in A$ e u_{i_1}, \dots, u_{i_k} em α tal que $(x, 0_N) = a_1 u_{i_1} + \dots + a_k u_{i_k}$. Assim,

$$p_1(x, 0_N) = p_1(a_1 u_{i_1} + \dots + a_k u_{i_k}) \Rightarrow x = a_1 p_1(u_{i_1}) + \dots + a_k p_1(u_{i_k}).$$

A seguir como $\pi : M \rightarrow P$ é sobrejetiva, para cada $i \in J$ podemos fixar $m_i \in M$ tal que $\pi(m_i) = p_1(u_i)$. Seja $\varphi : P \oplus N \rightarrow M$ o único homomorfismo de A -módulos tal que $\varphi(u_i) = m_i$.

Agora considere $j : P \rightarrow P \oplus N$ definida por $x \mapsto (x, 0_N)$ e defina $i : P \rightarrow M$ por $i = \varphi \circ j$. Vamos mostrar que $\pi \circ i = Id_P$.

Com efeito, seja $x \in P$. Assim $(x, 0_N) \in P \oplus N$, logo existem únicos $a_1, \dots, a_k \in A$ e u_{i_1}, \dots, u_{i_k} na base tais que $(x, 0_N) = \sum_{j=1}^k a_j u_{i_j}$. Portanto,

$$\pi \circ i(x) = \pi \circ \varphi\left(\sum_{j=1}^k a_j u_{i_j}\right) = \pi\left(\sum_{j=1}^k a_j m_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^k a_j p_1(u_{i_j}) = p_1(x, 0_N) = x.$$

Reciprocamente, fixe $\{q_i\}_{i \in J}$ um conjunto de geradores do A -módulo P e considere o único homomorfismo A -linear $\pi : \bigoplus_{i \in J} A \rightarrow P$ tal que $(a_i)_{i \in J} \mapsto \sum a_i q_i$.

É fácil ver que π é sobrejetor, assim existe um homomorfismo A -linear $i : P \rightarrow \bigoplus_{i \in J} A$ tal que $\pi \circ i = Id_P$.

Defina agora $\varphi : \bigoplus_{i \in J} A \rightarrow \bigoplus_{i \in J} A$ por $\varphi = i \circ \pi$ e tenha em mente que $\pi \circ i = Id_P$ então $\varphi^2 = i \circ \pi \circ i \circ \pi = i \circ \pi = \varphi$, portanto $\varphi^2 = \varphi$.

Verificaremos a seguir que $\bigoplus_{i \in J} A \cong \ker \varphi \oplus Im(\varphi)$.

- $\ker \varphi \cap Im(\varphi) = \{0\}$. Seja $w \in \ker \varphi \cap Im(\varphi)$. Assim $w = \varphi(v)$ para algum $v \in \bigoplus_{i \in J} A$.

Logo $\varphi(w) = \varphi^2(v) = \varphi(v) = 0$, pois $w \in \ker \varphi$. Portanto $w = 0$.

- $\bigoplus_{i \in J} A = \ker \varphi + Im(\varphi)$

Seja $w \in \bigoplus_{i \in J} A$; então $w = \varphi(w) + (w - \varphi(w))$. Note que $\varphi(w) \in Im(\varphi)$, e $\varphi(w - \varphi(w)) = \varphi(w) - \varphi^2(w) = \varphi(w) - \varphi(w) = 0$, portanto $w - \varphi(w) \in \ker \varphi$.

Além disso $\varphi \circ i = i \circ \pi \circ i = i \circ Id_P = i$. Assim para todo $x \in P$, verifica-se que $\varphi(i(x)) = i(x)$.

Então, $\psi : P \rightarrow Im(\varphi)$ dada por $\psi(x) = i(x)$ está bem definida. Mostraremos agora que ψ é um isomorfismo de A -módulos.

- ψ é injetiva. Com efeito se $i(x) = 0$, então $\pi(i(x)) = \pi(0) = 0$. Como $\pi \circ i = Id_P$, concluímos que $x = 0$.

- ψ é sobrejetiva. Seja $y \in \text{Im}(\varphi)$, então $y = \varphi(a)$, para algum $a \in \bigoplus_{i \in J} A$. Lembremos que $\varphi = i \circ \pi$, logo $y = i(\pi(a))$ e $\pi(a) \in P$. Portanto ψ é sobrejetiva.

□

1.2 Conexões

Definição 1.2. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo. Uma conexão em M é um homomorfismo \mathbb{K} -linear $\nabla : M \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M$ tal que

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + d(a) \otimes m, \quad \forall a \in A, m \in M,$$

onde $d : A \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ é a derivação universal.

Denotaremos por $\text{Con}(M)$ o conjunto de todas as conexões em M .

Uma das questões centrais deste trabalho é determinar para que classe de módulos $\text{Con}(M)$ é vazio ou não. De fato, no teorema 1.4 mostraremos que $\text{Con}(M) \neq \emptyset$, se M for um A -módulo projetivo. O que sugere a pergunta: $\text{Con}(M) \neq \emptyset$ implica M projetivo?

Vamos começar nosso estudo de $\text{Con}(M)$ para módulos livres de posto finito.

Exemplo 1.4. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e $M = A^n$. Seja $\nabla_0 : A^n \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A A^n$ definida por: $\nabla_0(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n da_i \otimes E_i$, onde $d : A \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ é a derivação universal e $\{E_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de $M = A^n$ como A -módulo.

Note que:

- Como d é \mathbb{K} -linear, temos que ∇_0 é \mathbb{K} -linear.
- Observe que se $\alpha \in A$ e $m = (a_1, \dots, a_n)$, então

$$\begin{aligned} \nabla_0(\alpha(a_1, \dots, a_n)) &= \sum_{i=1}^n d(\alpha a_i) \otimes E_i = \sum_{i=1}^n [d(\alpha)a_i + \alpha d(a_i)] \otimes E_i \\ &= \sum_{i=1}^n d(\alpha)a_i \otimes E_i + \alpha \nabla_0(m) = d(\alpha) \otimes m + \alpha \nabla_0(m). \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_0 \in \text{Con}(A^n)$.

Proposição 1.3. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo tal que $\text{Con}(M) \neq \emptyset$. Então

$$\begin{aligned} \oplus : \text{Con}(M) \times \text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M) &\rightarrow \text{Con}(M) \\ (\nabla, L) &\mapsto \nabla + L, \end{aligned}$$

definida por $\nabla \oplus L = \nabla + L$ é uma ação pela direita livre e transitiva do grupo aditivo $\text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)$ sobre o conjunto $\text{Con}(M)$. Em particular, $\text{Con}(M)$ é um espaço afim que está em bijeção com $\text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)$.

Demonstração. Primeiramente note que, L é \mathbb{K} -linear (desde que é A -linear e A é uma \mathbb{K} -álgebra). Assim, como ∇ é \mathbb{K} -linear $\nabla + L$ também o é.

A seguir observe que:

$$\begin{aligned} (\nabla + L)(am) &= \nabla(am) + L(am) = a\nabla(m) + d(a) \otimes m + aL(m) \\ &= a(\nabla + L)(m) + d(a) \otimes (m), \quad \forall a \in A, m \in M. \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla + L \in \text{Con}(M)$.

Segue da definição de que \oplus que \oplus define uma ação livre pela direita de $\text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)$ em $\text{Con}(M)$.

Note que \oplus é uma ação transitiva, pois dados $\nabla, \nabla_1 \in \text{Con}(M)$, definindo $L = \nabla_1 - \nabla$, temos que $L \in \text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)$ e que $\nabla \oplus L = \nabla_1$.

De fato, como ∇_1 e ∇ são \mathbb{K} -lineares L preserva estrutura aditiva, e dados $a \in A$ e $m \in M$ temos,

$$\begin{aligned} L(am) &= \nabla_1(am) - \nabla(am) = a\nabla_1(m) + d(a) \otimes m - (a\nabla(m) + d(a) \otimes m) \\ &= a(\nabla_1 - \nabla)(m) = aL(m) \end{aligned}$$

Além disso, $\nabla \oplus L = \nabla + (\nabla_1 - \nabla) = \nabla_1$.

Finalmente, fixe $\nabla_0 \in \text{Con}(M)$ e defina

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M) &\rightarrow \text{Con}(M) \\ L &\mapsto \nabla_0 \oplus L \end{aligned}$$

Assim, sejam $L, L_1 \in \text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)$, tais que $\nabla_0 \oplus L = \nabla_0 \oplus L_1$. Então $L = L_1$. Logo, ψ é injetiva.

Observe que ψ é sobrejetiva, pois dada $\nabla \in \text{Con}(m)$, o homomorfismo A -linear $L = \nabla - \nabla_0 \in \text{Hom}_A(M, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)$ é tal que $\psi(L) = \nabla$. \square

O teorema a seguir generaliza o exemplo 1.4.

Teorema 1.4. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra e P um A -módulo projetivo. Então $\text{Con}(P) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Inicialmente verificaremos que todo módulo livre admite conexão. Para isso seja M um A -módulo livre, com base $\{u_j\}_{j \in J}$. Assim, dado $u \in M$ existem $u_{j_1}, \dots, u_{j_k} \in \{u_j\}_{j \in J}$ tais que u é escrito de forma única como $u = \sum_{i=1}^k a_i u_{j_i}$, com $a_i \in A$.

Defina $\nabla_0 : M \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M$ por $\nabla_0(u) = \sum_{i=1}^k d(a_i) \otimes u_{j_i}$, se $u = \sum_{i=1}^k a_i u_{j_i}$.

A verificação de que ∇_0 é uma conexão é análoga a que fizemos no exemplo 1.4.

Considere agora que P é um A -módulo projetivo. Portanto, existe N A -módulo de modo que $P \oplus N$ é um A -módulo livre.

Note que existe um único isomorfismo A -linear de $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A (P \oplus N)$ em $[\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A P] \oplus [\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A N]$ que envia $u \otimes (m, n)$ em $(u \otimes m, u \otimes n)$ (ver [2, Prop. 2.14.]). Além disso considere os homomorfismos de A -módulos $j : P \rightarrow P \oplus N$ dado por $m \mapsto (m, 0_N)$ e p_1 dado pela projeção de $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A (P \oplus N)$ em $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A P$.

Seja $\nabla \in \text{Con}(P \oplus N)$, defina $\tilde{\nabla} : P \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A P$ por $\tilde{\nabla} = p_1 \circ \nabla \circ j$.

Sendo $\tilde{\nabla}$ definida pela composta de aplicações \mathbb{K} -lineares, concluímos que $\tilde{\nabla}$ é \mathbb{K} -linear.

Considere ainda $a \in A$ e $m \in P$ quaisquer. Observe que:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(am) &= p_1 \circ \nabla \circ j(am) = p_1(\nabla(am, 0_N)) = p_1(\nabla(a(m, 0_N))) \\ &= p_1(a\nabla(m, 0_N) + d(a) \otimes (m, 0_N)) = a\tilde{\nabla}(m) + p_1(d(a) \otimes (m, 0_N)) \\ &= a\tilde{\nabla}(m) + d(a) \otimes m. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\nabla} \in \text{Con}(P)$. □

A recíproca deste teorema não é verdadeira, ou seja, nem todo módulo que admite conexão é projetivo, de fato, como já vimos no exemplo 1.3 o $\mathbb{C}[t]$ -módulo $\mathbb{C}(t)$ não é projetivo, no entanto, no exemplo a seguir mostraremos que ele admite conexão.

Exemplo 1.5. O $\mathbb{C}[t]$ -módulo $\mathbb{C}(t)$ admite uma conexão.

Segue do exemplo B.2 que $(d, \Omega_{\mathbb{C}[t]/\mathbb{C}}^1) \cong (e, \mathbb{C}[t])$, onde $e : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]$ é dada por $p \mapsto p'$. Observe que a função $e_1 : \mathbb{C}(t) \rightarrow \mathbb{C}(t)$ dada pela derivada usual define uma derivação em $\mathbb{C}(t)$.

Mostraremos agora que $\nabla : \mathbb{C}(t) \rightarrow \mathbb{C}[t] \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathbb{C}(t)$ definida por $m \mapsto 1 \otimes m'$ é uma conexão em $\mathbb{C}(t)$.

Tendo em mente que e_1 é \mathbb{C} -linear, concluímos facilmente que ∇ é \mathbb{C} -linear.

Sejam agora $a \in \mathbb{C}[t]$ e $m \in \mathbb{C}(t)$, tendo em consideração que e_1 é uma derivação e o produto tensorial é bilinear, concluímos que

$$\nabla(am) = 1 \otimes (am)' = 1 \otimes am' + 1 \otimes a'm = a1 \otimes m' + a' \otimes m = a\nabla(m) + e(a) \otimes m.$$

Portanto, ∇ é uma conexão. Ao considerar que, para todo A -módulo M , $A \otimes_A M$ e M são isomorfos como A -módulo, concluímos que $\nabla \equiv e_1$.

A seguir introduziremos o conceito de derivada covariante. O mesmo nos permitira mostrar que nem todo módulo admite conexão. Mais ainda vamos verificar que existe uma

correspondência biunívoca entre $DC(M)$ (o conjunto de todas as derivadas covariantes em M) e $Con(M)$, quando consideramos A uma \mathbb{K} -álgebra regular de tipo finito.

1.3 Derivada Covariante

Definição 1.3. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra (ver Definição B.1) e M um A -módulo. Uma derivada covariante em M é um homomorfismo A -linear

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : Der_{\mathbb{K}}(A) &\rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(M, M) \\ \partial &\mapsto \mathbb{D}_{\partial} \end{aligned}$$

que para cada $\partial \in Der_{\mathbb{K}}(A)$ (ver Observação B.3) verifica

$$\mathbb{D}_{\partial}(am) = a\mathbb{D}_{\partial}(m) + \partial(a)m, \quad \forall a \in A, m \in M.$$

Exemplo 1.6. $A = C^0(\mathbb{R})$ é uma \mathbb{R} -álgebra tal que $Der_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ (vide Ex. 2.5., [28]). Logo $\mathbb{D} \equiv 0$ é uma derivada covariante.

Proposição 1.5. Se $\nabla \in Con(M)$ então $\mathbb{D}^{\nabla} : Der_{\mathbb{K}}(A) \rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(M, M)$ definida por $\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla} = \tilde{\varphi}_{\partial} \circ \nabla$ é uma derivada covariante em M , onde $\tilde{\varphi}_{\partial} \in Hom_A(\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M, M)$ é o único homomorfismo tal que $\tilde{\varphi}_{\partial}(u \otimes m) = \varphi_{\partial}(u)m$ para cada $\partial \in Der_{\mathbb{K}}(A)$ (veja Lema B.4).

Demonstração. Observe inicialmente que $\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla} = \tilde{\varphi}_{\partial} \circ \nabla$ preserva a estrutura aditiva, pois $\tilde{\varphi}_{\partial}$ é A -linear e ∇ é \mathbb{K} -linear.

Agora, sejam M um A -módulo, $\varphi_A : \mathbb{K} \rightarrow A$ o homomorfismo de anéis que torna A uma \mathbb{K} -álgebra e $\alpha \cdot m = \varphi_A(\alpha)m$ a operação que torna M um \mathbb{K} -módulo. Assim,

$$\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(\alpha \cdot m) = \tilde{\varphi}_{\partial} \circ \nabla(\alpha \cdot m) = \tilde{\varphi}_{\partial}(\alpha \cdot \nabla(m)) = \tilde{\varphi}_{\partial}(\varphi_A(\alpha)\nabla(m)) = \varphi_A(\alpha)\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(m) = \alpha \cdot \mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(m).$$

Assim, $\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla} \in Hom_{\mathbb{K}}(M, M)$. Portanto, \mathbb{D}^{∇} está bem definida.

Segue da observação B.4 e da definição de \mathbb{D}^{∇} , que \mathbb{D}^{∇} é A -linear.

A seguir considere $\partial \in Der_{\mathbb{K}}(A)$, $a \in A$ e $m \in M$ quaisquer. Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(am) &= \tilde{\varphi}_{\partial}(\nabla(am)) = \tilde{\varphi}_{\partial}(a\nabla(m) + d(a) \otimes m) = a\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(m) + \tilde{\varphi}_{\partial}(d(a) \otimes m) \\ &= a\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(m) + \varphi_{\partial}(da)m = a\mathbb{D}_{\partial}^{\nabla}(m) + \partial(a)m. \end{aligned}$$

O que mostra que \mathbb{D}^{∇} é uma derivada covariante. □

Esta proposição nos garante que se um A -módulo admite conexões deve possuir derivadas covariantes. O exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo 1.7. Vimos no exemplo 1.4 que $\nabla_0 : A^n \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}} \otimes_A A^n$ definida por:

$\nabla_0(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n da_i \otimes E_i$ é uma conexão em $M = A^n$.

Pela proposição 1.5 obtemos a derivada covariante $\mathbb{D}^{\nabla_0} : Der_{\mathbb{K}}(A) \rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(M, M)$ definida por $\mathbb{D}^{\nabla_0}(\partial) = (\mathbb{D}^{\nabla_0})_{\partial} = \tilde{\varphi}_{\partial} \circ \nabla_0$, logo $(\mathbb{D}^{\nabla_0})_{\partial}(m) = (\partial(a_1), \dots, \partial(a_n))$, se $m = (a_1, \dots, a_n)$.

A seguir mostraremos que nem todo módulo admite conexões exibindo um A -módulo M tal que $DC(M) = \emptyset$.

1.3.1 Nem todo módulo admite conexão

Considere a \mathbb{R} -álgebra $A = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{\langle xy \rangle}$.

É fácil ver que todo elemento $\alpha \in A$ se escreve de forma única como:

$\alpha = \overline{\alpha_0 + x\alpha_1(x) + y\alpha_2(y)}$, onde $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha_2(y) \in \mathbb{R}[y]$, desde que $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^n, \dots, \bar{y}, \dots, \bar{y}^n, \dots\}$ é uma base de A como \mathbb{R} -espaço vetorial.

Lema 1.6. Sejam $\partial_1, \partial_2 : A \rightarrow A$ definidas por $\partial_1(\alpha) = \overline{x\alpha_1(x) + x^2\alpha_1'(x)}$ e $\partial_2(\alpha) = \overline{y\alpha_2(y) + y^2\alpha_2'(y)}$, se $\alpha = \overline{\alpha_0 + x\alpha_1(x) + y\alpha_2(y)}$, onde $\alpha_1'(x)$ e $\alpha_2'(y)$ denotam a derivada usual com relação a x e y , respectivamente. Então

1. $\partial_1, \partial_2 \in Der_{\mathbb{R}}(A)$.
2. $\{\partial_1, \partial_2\}$ gera $Der_{\mathbb{R}}(A)$ como A -módulo.
3. $\bar{y}\partial_1 = \bar{0}$ e $\bar{x}\partial_2 = \bar{0}$, em particular $\{\partial_1, \partial_2\}$ é L.D.
4. $\alpha\partial_1 + \beta\partial_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1\bar{y}$ e $\beta = \beta_1\bar{x}$, para algum $\alpha_1, \beta_1 \in A$.

Demonstração. Tendo em consideração que $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ definem \mathbb{R} -derivações em $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{R}[y]$, respectivamente, segue-se das definições de ∂_1 e ∂_2 , após cálculos explícitos que $\partial_i \in Der_{\mathbb{R}}(A)$ para $i = 1, 2$. A seguir verificaremos que $\{\partial_1, \partial_2\}$ gera $Der_{\mathbb{R}}(A)$ como A -módulo.

Seja $\partial \in Der_{\mathbb{R}}(A)$. Logo

$$\partial(\bar{0}) = \bar{0} = \partial(\bar{xy}) = \bar{x}\partial(\bar{y}) + \bar{y}\partial(\bar{x}). \quad (1.1)$$

Agora assuma que:

$$\partial(\bar{x}) = \overline{a_0 + xa_1(x) + ya_2(y)} \quad \text{e} \quad \partial(\bar{y}) = \overline{b_0 + xb_1(x) + yb_2(y)}.$$

Substituindo as expressões de $\partial(\bar{x})$ e $\partial(\bar{y})$ em (1.1) obtemos:

$\bar{0} = \overline{xb_0 + x^2b_1(x) + ya_0 + y^2a_2(y)}$. Logo, $xb_0 + x^2b_1(x) + ya_0 + y^2a_2(y) = v(x, y)xy$, para algum $v(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$.

Fazendo $y = 0$ temos $x(b_0 + xb_1(x)) = 0$, portanto $b_0 = 0$ e $b_1(x) = 0$.

Analogamente, fazendo $x = 0$ concluímos que $a_0 = 0$ e $a_2(y) = 0$.

Portanto, $\partial(\bar{x}) = \overline{xa_1(x)}$ e $\partial(\bar{y}) = \overline{yb_2(y)}$.

Mostremos agora que $\partial = \overline{a_1(x)}\partial_1 + \overline{b_2(y)}\partial_2$.

Lembremos que $\{\bar{1}, \bar{x}^n, \bar{y}^m\}_{n \geq 1}$ é uma base de A como \mathbb{R} -espaço vetorial. Além disso, toda derivação $\partial \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ satisfaz que: $\partial(\bar{1}) = \bar{0}$, $\partial(\bar{x}^n) = n\bar{x}^{n-1}\partial(\bar{x})$ e $\partial(\bar{y}^m) = m\bar{y}^{m-1}\partial(\bar{y})$. Portanto, ∂ é determinada pelos seus valores em \bar{x} e \bar{y} .

Como $\partial(\bar{x}) = \overline{xa_1(x)}$, $\partial_1(\bar{x}) = \bar{x}$ e $\partial_2(\bar{x}) = 0$, concluímos que ∂ e $\overline{a_1(x)}\partial_1 + \overline{b_2(y)}\partial_2$ assumem o mesmo valor em \bar{x} .

De maneira análoga concluímos que: $\partial(\bar{y}) = (\overline{a_1(x)}\partial_1 + \overline{b_2(y)}\partial_2)(\bar{y})$.

Finalmente, tendo em consideração que $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ o item (3) segue das definições de ∂_1 e ∂_2 .

Para o item (4) temos, se $\alpha\partial_1 + \beta\partial_2 = 0$, avaliando em \bar{x} temos $\alpha\bar{x} = \bar{0}$ ou seja $\alpha = \alpha_1\bar{y}$ para algum $\alpha_1 \in A$. Avaliando em \bar{y} concluímos que $\beta = \beta_1\bar{x}$ para algum $\beta_1 \in A$.

A implicação contrária segue do item (3). \square

Lema 1.7. $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ é isomorfo, como A -módulo, a $\mathcal{N} = \frac{A^2}{N}$, onde $N = \{(a\bar{y}, b\bar{x}) \in A^2; a, b \in A\}$.

Demonstração. Defina $\varphi : A^2 \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ por $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha\partial_1 + \beta\partial_2$. Note que φ é um homomorfismo A -linear. Como $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ é gerado por $\{\partial_1, \partial_2\}$ φ é sobrejetivo. Além disso, $\ker(\varphi) = N$ pelo item (4) do Lema 1.6. Portanto, existe um único $\tilde{\varphi} : \mathcal{N} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ isomorfismo A -linear dado por $\tilde{\varphi}(\alpha + N, \beta + N) = \alpha\partial_1 + \beta\partial_2$. \square

O isomorfismo $\tilde{\varphi}$ do Lema 1.7 é tal que ∂_1 e ∂_2 são as imagens de $\mathcal{N}_1 = E_1 + N$ e $\mathcal{N}_2 = E_2 + N$ respectivamente, portanto \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 satisfazem as propriedades do Lema 1.6.

Considere agora $\mathcal{K} = \frac{A^2}{K}$, onde $K = \{(a\bar{y}, a\bar{x}) \in A^2; a \in A\}$, e defina

$$\begin{aligned} d_1 : A &\longrightarrow \frac{A^2}{K} \\ \bar{p} &\longmapsto \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) + K, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ são as derivadas parciais usuais de p .

Verifica-se que d_1 está bem definida, e é uma \mathbb{R} -derivação.

Vamos agora verificar que o par (d_1, \mathcal{K}) satisfaz a PUDK.

Sejam M um A -módulo e $\partial : A \rightarrow M$ uma \mathbb{R} -derivação, mostremos que existe um único homomorfismo de A -módulos $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow M$ tal que $\varphi \circ d_1 = \partial$.

Defina $\psi : A^2 \rightarrow M$ por $\psi(\bar{p}, \bar{q}) = \bar{p}\partial(\bar{x}) + \bar{q}\partial(\bar{y})$ e observe que

$$\psi(\bar{y}, \bar{x}) = \bar{y}\partial(\bar{x}) + \bar{x}\partial(\bar{y}) = \partial(\bar{x}\bar{y}) = d_1(\bar{0}) = 0.$$

Logo $K \subset \ker \psi$. E assim podemos considerar o único homomorfismo de A -módulos $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow M$ tal que $\varphi((\bar{p}, \bar{q}) + K) = \bar{p}\partial(x) + \bar{q}\partial(\bar{y})$. Denote por $\mathcal{K}_1 = E_1 + K$ e $\mathcal{K}_2 = E_2 + K$ os geradores de \mathcal{K} .

Note que $\varphi \circ d_1(\bar{x}) = \varphi(\mathcal{K}_1) = \partial(\bar{x})$ e $\varphi \circ d_1(\bar{y}) = \varphi(\mathcal{K}_2) = \partial(\bar{y})$, portanto $\varphi \circ d_1 = \partial$. Suponha agora que existe $\varphi_1 : \frac{A^2}{K} \rightarrow M$ tal que $\varphi_1 \circ d_1 = \partial$, então

$$\varphi_1(\mathcal{K}_1) = \varphi_1 \circ d_1(\bar{x}) = \partial(\bar{x}) = \varphi(\mathcal{K}_1) \quad \text{e} \quad \varphi_1(\mathcal{K}_2) = \varphi_1 \circ d_1(\bar{y}) = \partial(\bar{y}) = \varphi(\mathcal{K}_2)$$

Portanto, $\varphi_1 = \varphi$, pois coincidem nos geradores.

Logo $(d, \Omega_{A/\mathbb{R}}^1)$ e $(d_1, \frac{A^2}{K})$ são isomorfos como A -módulos.

Lema 1.8. Seja $\mathcal{K} = \frac{A^2}{K}$, onde $K = \{(a\bar{y}, a\bar{x}) \in A^2; a \in A\}$. Considere $\mathcal{K}_1 = E_1 + K$ e $\mathcal{K}_2 = E_2 + K$ seus geradores como A -módulo. Então

1. $\bar{y}\mathcal{K}_1 \neq 0$ e $\bar{x}\mathcal{K}_2 \neq 0$.
2. $\bar{y}\mathcal{K}_1 + \bar{x}\mathcal{K}_2 = 0$.
3. $\alpha\mathcal{K}_1 + \beta\mathcal{K}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1\bar{y}$ e $\beta = \alpha_1\bar{x}$, para algum $\alpha_1 \in A$.

Demonstração. 1. Se $\bar{y}\mathcal{K}_1 \neq 0$ teríamos $yE_1 = (y, 0) \in K$ o que não ocorre logo $\bar{y}\mathcal{K}_1 \neq 0$. Para $\bar{x}\mathcal{K}_2 \neq 0$ a demonstração é análoga.

2. $\bar{y}E_1 + \bar{x}E_2 = (\bar{y}, \bar{x}) \in K$. Logo, $\bar{y}\mathcal{K}_1 + \bar{x}\mathcal{K}_2 = 0$

3. $\alpha\mathcal{K}_1 + \beta\mathcal{K}_2 = 0 \Rightarrow \alpha E_1 + \beta E_2 \in K \Rightarrow (\alpha, \bar{0}) + (\bar{0}, \beta) \in K \Rightarrow (\alpha, \beta) \in K$. Logo $\alpha = \alpha_1\bar{y}$ e $\beta = \alpha_1\bar{x}$ para algum $\alpha_1 \in A$. A implicação contrária segue do item (2)

□

Observação 1.1. Além disso como $\mathcal{K}_1 = E_1 + K$ e $\mathcal{K}_2 = E_2 + K$ são os geradores de $\frac{A^2}{K}$ dados por $d_1(\bar{x})$ e $d_1(\bar{y})$, respectivamente. Temos que $\delta^1 = d(\bar{x})$ e $\delta^2 = d(\bar{y})$ são os geradores em $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1$ correspondentes a \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 . Logo δ^1, δ^2 satisfazem as relações do lema 1.8.

Proposição 1.9. O A -módulo $\mathcal{K} = \frac{A^2}{K}$, onde $K = \{(a\bar{y}, a\bar{x}) \in A^2; a \in A\}$ não admite conexão.

Demonstração. Pelo absurdo. Suponha que \mathcal{K} possui uma conexão, então segue-se da proposição 1.5 que existe \mathbb{D} derivada covariante em \mathcal{K} .

Assim $\mathbb{D}(\partial_2) = \mathbb{D}_{\partial_2} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$ e temos $\mathbb{D}_{\partial_2}(\mathcal{K}_1) \stackrel{(*)}{=} \alpha\mathcal{K}_1 + \beta\mathcal{K}_2$, para algum $\alpha, \beta \in A$. Além disso, como \mathbb{D} é A -linear e $\bar{x}\partial_2 = \bar{0}$, concluímos que $\mathbb{D}_{\bar{x}\partial_2} = 0$, por outro lado:

$$0 = \mathbb{D}_{\bar{x}\partial_2}(\mathcal{K}_1) = \bar{x}\mathbb{D}_{\partial_2}(\mathcal{K}_1) = \bar{x}\alpha\mathcal{K}_1 + \bar{x}\beta\mathcal{K}_2.$$

Assim pelo lema 1.8 temos que $\bar{x}\alpha = \overline{a\bar{y}}$, para algum $\bar{a} \in A$. Portanto se $\alpha = \overline{\alpha_0 + x\alpha_1(x) + y\alpha_2(y)}$ então $\bar{x}\alpha = \overline{(\alpha_0 + x\alpha_1(x))x} = \overline{a\bar{y}}$. Da segunda igualdade concluímos que

$$(\alpha_0 + x\alpha_1(x))x - ay = \gamma(x, y)xy, \quad \text{para algum } \gamma \in \mathbb{R}[x, y].$$

Substituindo y por 0 na igualdade acima, obtemos $\alpha_0 = 0$.

Temos também pelo lema 1.8 que $\bar{y}\mathcal{K}_1 + \bar{x}\mathcal{K}_2 = 0$, então

$$0 = \mathbb{D}_{\partial_2}(\bar{y}\mathcal{K}_1 + \bar{x}\mathcal{K}_2) = \mathbb{D}_{\partial_2}(\bar{y}\mathcal{K}_1) + \mathbb{D}_{\partial_2}(\bar{x}\mathcal{K}_2) = \bar{y}\mathbb{D}_{\partial_2}(\mathcal{K}_1) + \partial_2(\bar{y})\mathcal{K}_1 + \bar{x}\mathbb{D}_{\partial_2}(\mathcal{K}_2) + \partial_2(\bar{x})\mathcal{K}_2.$$

Tendo em consideração que $\bar{x}\mathbb{D}_{\partial_2} = \mathbb{D}_{\bar{x}\partial_2} = 0$, $\partial_2(\bar{y}) = \bar{y}$ e $\partial_2(\bar{x}) = \bar{0}$. Substituindo (*) na última expressão acima, obtemos:

$$0 = \bar{y}(\alpha\mathcal{K}_1 + \beta\mathcal{K}_2) + \bar{y}\mathcal{K}_1 = (\bar{y} + \bar{y}\alpha)\mathcal{K}_1 + \bar{y}\beta\mathcal{K}_2.$$

Usando novamente o lema 1.8, temos:

$$\bar{y} + \bar{y}\alpha = \delta\bar{y} \quad \text{e} \quad \bar{y}\beta = \delta\bar{x}, \quad \text{para algum } \delta = \overline{\delta_0 + x\delta_1(x) + y\delta_2(y)} \in A$$

Da segunda igualdade concluímos que

$$y\beta - (\delta_0 + x\delta_1(x))x = \nu(x, y)xy, \quad \text{para algum } \nu(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$$

Fazendo $y = 0$ na igualdade acima, obtemos $\delta_0 = 0$.

Da primeira igualdade temos,

$$\overline{y(+\alpha_0 + y\alpha_2(y))} = \overline{y^2\delta_2(y)}$$

$$y((1 + \alpha_0) + y(\alpha_2(y) - y\delta_2(y))) = \mu(x, y), \quad \text{para algum } \mu(x, y) \in \mathbb{R}[x, y].$$

Donde obtemos $1 + \alpha_0 = 0$, ou seja $\alpha_0 = -1$ o que contradiz o fato de $\alpha_0 = 0$. Portanto não existe uma derivada covariante, por conseguinte \mathcal{K} não admite conexões. \square

No Teorema 1.4 vimos que um módulo ser projetivo é condição suficiente para que ele possua uma conexão. E no exemplo 1.5 vimos que esta condição não é necessária para tal. Vimos ainda na proposição 1.5 que $DC(M) \neq \emptyset$ é uma condição necessária para que o módulo M admita conexões, o que sugere a seguinte pergunta: ter derivada covariante é suficiente para que um módulo tenha uma conexão?

Vamos ao seguinte lema, que será usado para provar que a resposta desta pergunta

será afirmativa, se fizermos certas restrições à classe de \mathbb{K} -álgebras a serem estudadas, como veremos no teorema a seguir.

Definição 1.4. Sejam A um anel e M um A -módulo, M é dito finitamente representado se existe uma sequencia exata curta da forma

$$0 \rightarrow \ker \varphi \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0,$$

onde $\ker \varphi$ é finitamente gerado e F é livre de posto finito.

Lema 1.10. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra comutativa regular, finitamente gerada. Então

1. $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ é um A -módulo finitamente representado.
2. $Der_{\mathbb{K}}(A)$ é um A -módulo finitamente representado.

Demonstração. 1. Sejam $\{y_1, \dots, y_k\}$ um conjunto de geradores da \mathbb{K} -álgebra A , então $\{dy_1, \dots, dy_k\}$ é um conjunto de geradores do A -módulo $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1$, ou seja, $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ é um A -módulo finitamente gerado. Assim, $f : A^k \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ dado por $(a_1, \dots, a_k) \mapsto a_1 dy_1 + \dots + a_k dy_k$ é um homomorfismo sobrejetivo de A -módulos. Portanto,

$$0 \rightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} A^k \xrightarrow{f} \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \rightarrow 0.$$

é uma representação finita para $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1$, desde que A é noetheriano.

2. Como A é uma \mathbb{K} -álgebra finitamente gerada, então $A = \frac{S}{I}$, onde $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é a álgebra dos polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_n e I é um ideal de S . Assim, por [4, Lema 2.1.2] $Der_{\mathbb{K}}(A) = Der_{\mathbb{K}}(S/I) \cong \{\partial \in Der_{\mathbb{K}}(S) \mid D(I) \subset I\} / IDer_{\mathbb{K}}(S)$, ou seja, $Der_{\mathbb{K}}(A)$ é um submódulo de $Der_{\mathbb{K}}(S) / IDer_{\mathbb{K}}(S) \cong (S/I)^n = A^n$. Portanto, como A é noetheriano $Der_{\mathbb{K}}(A)$ é finitamente gerado como A -módulo. E consequentemente, como na prova do item 1, concluímos que $Der_{\mathbb{K}}(A)$ é finitamente representado. □

Teorema 1.11. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra comutativa regular finitamente gerada e M um A -módulo. Então $DC(M) \neq \emptyset$ se, e somente se, $Con(M) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $\mathbb{D} \in DC(M)$. Para cada $m \in M$, defina $\phi_m : Der_{\mathbb{K}}(A) \rightarrow M$ por $\partial \mapsto \mathbb{D}_{\partial}(m)$. Note que, ϕ_m é A -linear para cada $m \in M$. De fato, dadas $\partial, \partial' \in Der_{\mathbb{K}}(A)$ e $a \in A$ temos

$$\begin{aligned} \phi_m(\partial + \partial') &= \mathbb{D}_{\partial + \partial'}(m) = (\mathbb{D}_{\partial} + \mathbb{D}_{\partial'})(m) = \mathbb{D}_{\partial}(m) + \mathbb{D}_{\partial'}(m) = \phi_m(\partial) + \phi_m(\partial'). \\ \phi_m(a\partial) &= \mathbb{D}_{a\partial}(m) = (a\mathbb{D}_{\partial})(m) = a\mathbb{D}_{\partial}(m) = a\phi_m(\partial). \end{aligned}$$

Considere o isomorfismo A -linear $\varphi : Der_{\mathbb{K}}(A) \rightarrow Hom(\Omega_{A/\mathbb{K}}^1, A)$ dado por $\partial \mapsto \varphi_{\partial}$ como no lema B.3 e defina:

$$Q : \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \times M \rightarrow Hom_A(Der_{\mathbb{K}}(A), M)$$

$$(w, m) \mapsto \widehat{w \otimes m},$$

onde $\widehat{w \otimes m}(D) = \varphi_D(w)m$. Segue da A -linearidade de φ_D que $\widehat{w \otimes m}$ é A -linear, estando assim Q bem definida.

Além disso Q é A -bilinear. Esta afirmação pode ser facilmente verificada tendo em mente que φ_D é A -linear.

Portanto pela PUPT existe um único homomorfismo A -linear, $\psi : \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M \rightarrow Hom_A(Der_{\mathbb{K}}(A), M)$, tal que $\psi(w \otimes m) = \widehat{w \otimes m}$. Note que, ψ é um isomorfismo se, e somente se, $\psi_P : (\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)_P \rightarrow (Hom_A(Der_{\mathbb{K}}(A), M))_P$ é um isomorfismo para todo ideal primo $P \subset A$ (veja prop. 3.9, p. 40 em [2]). Vamos mostrar que ψ_P é um isomorfismo de A_P -módulos.

Considere os seguintes isomorfismos:

$$(\Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M)_P \cong (\Omega_{A/\mathbb{K}}^1)_P \otimes_{A_P} M_P \quad (\text{ver prop. 3.7, p. 40 em [2]}) \quad (1.2)$$

$$\cong \Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1 \otimes_{A_P} M_P \quad (\text{ver prop. 16.9, p. 397 em [14]}) \quad (1.3)$$

$$\cong A_P^{n_P} \otimes_{A_P} M_P \quad (\text{ver Teo. 8.8, p. 174 em [18]}) \quad (1.4)$$

$$\cong M_P^{n_P}, \quad \text{onde } n_P \text{ denota a dimensão de Krull de } A_P. \quad (1.5)$$

Note que para obtermos $\Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1 \cong A_P^{n_P}$ e concluirmos (1.4) é imprescindível que A seja uma \mathbb{K} -álgebra regular finitamente gerada.

Dessa maneira, fixada a base $\{\delta^1, \dots, \delta^{n_P}\}$ do A_P -módulo livre $\Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1$ e sendo d' a derivada universal de $\Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1$, temos que existem únicos $a_1, \dots, a_{n_P} \in A_P$ tais que $d'(\frac{a}{1}) = \sum_1^{n_P} a_i \delta^i$, logo

$$\frac{(da \otimes m)}{1} \stackrel{(1.2)}{\mapsto} \frac{da}{1} \otimes \frac{m}{1} \stackrel{(1.3)}{\mapsto} d'(\frac{a}{1}) \otimes \frac{m}{1} = (a_1 \delta^1 + \dots + a_{n_P} \delta^{n_P}) \otimes \frac{m}{1}$$

$$\stackrel{(1.4)}{\mapsto} (a_1, \dots, a_{n_P}) \otimes \frac{m}{1} \stackrel{(1.5)}{\mapsto} (a_1 \frac{m}{1}, \dots, a_{n_P} \frac{m}{1}).$$

Usaremos, no que segue, a PUDK de $(\Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1, d')$, e o único isomorfismo de A -módulos $I : A^{n_P} \rightarrow \Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1$ definido por $I(E_i) = \delta^i$, para $i = 1, \dots, n_P$, onde $\{E_i\}_{i=1}^{n_P}$ é a base canônica de A^{n_P} .

Além disso, fixe $\{\partial_1, \dots, \partial_{n_P}\}$ base do A_P -módulo livre $Der_{\mathbb{K}}(A_P)$ e denote por φ_i o único homomorfismo de A_P -módulos que satisfaz $\varphi_i \circ d' = \partial_i$ para $i = 1, \dots, n_P$.

Como $\Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ é um A -módulo finitamente representado e usando novamente o fato de

que A é uma \mathbb{K} -álgebra finitamente gerada regular, segue da Prop. 2.10 (p. 68 em [14]), e do Teo. 8.8 (p. 174 em [18]) que:

$$Der_{\mathbb{K}}(A_P) \cong Hom_{A_P}(\Omega_{A_P/\mathbb{K}}^1, A_P) \cong Hom_{A_P}(A_P^{n_P}, A_P) \cong A_P^{n_P} \quad (1.6)$$

$$\cong (Hom_A(\Omega_{A/\mathbb{K}}^1, A))_P \cong (Der_{\mathbb{K}}(A))_P, \quad (1.7)$$

Logo para cada ∂_i na base de $Der_{\mathbb{K}}(A_P)$ temos:

$$\partial_i \longmapsto \varphi_i \longmapsto \widehat{\varphi}_i \longmapsto (\widehat{\varphi}_i(E_1), \dots, \widehat{\varphi}_i(E_{n_P}) = (\varphi_i(\delta^1), \dots, \varphi_i(\delta^{n_P})),$$

onde $\widehat{\varphi}_i = \varphi_i \circ I$, logo $\widehat{\varphi}_i(E_j) = \varphi_i(\delta^j)$. Denote por $v_i = (\varphi_i(\delta^1), \dots, \varphi_i(\delta^{n_P}))$, desta maneira, $\{v_1, \dots, v_{n_P}\}$ é uma base para $A_P^{n_P}$ desde que $\{\partial_1, \dots, \partial_{n_P}\}$ é uma base de $Der_{\mathbb{K}}(A_P)$.

Além disso, segue de (1.6) que:

$$Hom_{A_P}(Der_{\mathbb{K}}(A_P), M_P) \cong Hom_{A_P}(A_P^{n_P}, M_P) \cong (Hom_{A_P}(A_P, M_P))^{n_P} \cong M_P^{n_P}. \quad (1.8)$$

Agora usando o fato de que $Der_{\mathbb{K}}(A)$ também é um A -módulo finitamente representado, segue-se novamente da Prop. 2.10, (p. 68 em [14]) e de (1.6), (1.7) e (1.8) que

$$(Hom_A(Der_{\mathbb{K}}(A), M))_P \cong Hom_{A_P}((Der_{\mathbb{K}}(A))_P, M_P) \cong Hom_{A_P}(Der_{\mathbb{K}}(A_P), M_P) \cong M_P^{n_P}.$$

Como $\psi_P(d'(\frac{a}{1}) \otimes \frac{m}{1}) \in Hom_{A_P}(Der_{\mathbb{K}}(A_P), M_P)$, para cada ∂_i podemos calcular

$$\begin{aligned} \psi_P(d'(\frac{a}{1}) \otimes \frac{m}{1})(\partial_i) &= \varphi_i(d'(\frac{a}{1})) \frac{m}{1} = \varphi_i(a_1 \delta^1 + \dots + a_{n_P} \delta^{n_P}) \frac{m}{1} \\ &= \varphi_i(\delta^1) a_1 \frac{m}{1} + \dots + \varphi_i(\delta^{n_P}) a_{n_P} \frac{m}{1}. \end{aligned}$$

Logo, de (1.8) segue que $\psi_P(d'(\frac{a}{1}) \otimes \frac{m}{1})$ é enviado em

$$(\sum_{i=1}^{n_P} \varphi_1(\delta^i) a_i \frac{m}{1}, \dots, \sum_{i=1}^{n_P} \varphi_{n_P}(\delta^i) a_i \frac{m}{1}) \in M^{n_P}.$$

Assim como $d'(\frac{a}{1}) \otimes \frac{m}{1} \equiv (a_1 \frac{m}{1}, \dots, a_{n_P} \frac{m}{1})$ temos que $\psi_P : M^{n_P} \rightarrow M^{n_P}$ é tal que $\psi_P(a_1 \frac{m}{1}, \dots, a_{n_P} \frac{m}{1}) = (\sum_{i=1}^{n_P} u_{1i} a_i \frac{m}{1}, \dots, \sum_{i=1}^{n_P} u_{n_P i} a_i \frac{m}{1})$, se denotamos $u_{ij} = \varphi_i(\delta^j)$. Mais ainda, dado $(\frac{m_1}{1}, \dots, \frac{m_{n_P}}{1}) \in M^{n_P}$ temos

$$\psi_P(\frac{m_1}{1}, \dots, \frac{m_{n_P}}{1}) = (\sum_{i=1}^{n_P} u_{1i} \frac{m_i}{1}, \dots, \sum_{i=1}^{n_P} u_{n_P i} \frac{m_i}{1}).$$

Ou seja, para cada $\frac{m}{1} \in M^{n_P}$ temos que as coordenadas de $\psi_P(\frac{m}{1})$ são obtidas multiplicando as coordenadas de $\frac{m}{1}$ pela matriz $X = (u_{ij})$ cujas linhas são as coordenadas dos elementos da base $\{v_i\}_{i=1}^{n_P}$, que é exatamente a transposta da matriz de uma mudança de

base do A_P -módulo livre $A_P^{n_P}$. Como a matriz mudança de base de um módulo livre é inversível (ver [1, Prop. 14.2.6]), sua transposta X também o é. Consequentemente, ψ_P é inversível, e tem por inversa o homomorfismo A_P -linear ψ_P^{-1} cujas coordenadas de $\psi_P^{-1}(\frac{m}{1})$ são obtidas multiplicando as coordenadas de $\frac{m}{1}$ pela matriz X^{-1} , para cada $\frac{m}{1} \in M^{n_P}$.

Portanto ψ é um isomorfismo de A -módulos e podemos definir

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbb{D}} : M &\rightarrow \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M \\ m &\mapsto \psi^{-1}(\phi_m). \end{aligned}$$

Vamos verificar que $\nabla_{\mathbb{D}}$ define uma conexão em M .

1. $\nabla_{\mathbb{D}}$ é \mathbb{K} -linear.

De fato, sejam $m, m_1 \in M$ e $r \in \mathbb{K}$ primeiramente note que:

$$\phi_{m+rm_1}(\partial) = \mathbb{D}_{\partial}(m+rm_1) = \mathbb{D}_{\partial}(m) + r\mathbb{D}_{\partial}(m_1) = \phi_m(\partial) + r\phi_{m_1}(\partial), \quad \forall \partial \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbb{D}}(m + rm_1) &= \psi^{-1}(\phi_{m+rm_1}) = \psi^{-1}(\phi_m + r\phi_{m_1}) = \psi^{-1}(\phi_m) + \psi^{-1}(r\phi_{m_1}) \\ &= \psi^{-1}(\phi_m) + r\psi^{-1}(\phi_{m_1}) = \nabla_{\mathbb{D}}(m) + r\nabla_{\mathbb{D}}(m_1). \end{aligned}$$

2. Para todo $a \in A$ e $m \in M$, $\nabla_{\mathbb{D}}$ satisfaz $\nabla_{\mathbb{D}}(am) = a\nabla_{\mathbb{D}}(m) + da \otimes m$.

Primeiro observe que:

$$\begin{aligned} \phi_{am}(\partial) &= \mathbb{D}_{\partial}(am) = a\mathbb{D}_{\partial}(m) + \partial(a)m = a\phi_m(\partial) + \varphi_{\partial}(da)m \\ &= a\phi_m(\partial) + \widehat{da \otimes m}(\partial), \quad \forall \partial \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(A). \end{aligned}$$

Logo, $\phi_{am} = a\phi_m + \widehat{da \otimes m}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbb{D}}(am) &= \psi^{-1}(\phi_{am}) = \psi^{-1}(a\phi_m + \widehat{da \otimes m}) = a\psi^{-1}(\phi_m) + \psi^{-1}(\widehat{da \otimes m}) \\ &= a\nabla_{\mathbb{D}}(m) + da \otimes m. \end{aligned}$$

O que mostra que $\nabla_{\mathbb{D}} \in \text{Con}(M)$.

A recíproca é válida de modo geral, conforme a proposição 1.5.

□

Corolário 1.12. Sejam A uma \mathbb{K} -álgebra comutativa regular finitamente gerada e M um A -módulo. Então existe uma bijeção entre $DC(M)$ e $\text{Con}(M)$.

Demonstração. Dada $\nabla \in \text{Con}(M)$ e \mathbb{D}^∇ a derivada covariante associada a ∇ como na proposição 1.5. Vamos mostrar que $\nabla_{\mathbb{D}^\nabla}$ associada a \mathbb{D}^∇ como no teorema 1.11 é igual a ∇ . De fato, considere que $\nabla(m) = \sum_{i=1}^k w_i \otimes u_i$. Assim,

$$\phi_m(\partial) = \mathbb{D}_\partial^\nabla(m) = \tilde{\varphi}_\partial \circ \nabla(m) = \tilde{\varphi}_\partial \left(\sum_{i=1}^k w_i \otimes u_i \right) = \sum_{i=1}^k \varphi_\partial(w_i) u_i.$$

Portanto, $\phi_m = \sum_{i=1}^k \widehat{w_i \otimes u_i}$. Assim,

$$\nabla_{\mathbb{D}^\nabla}(m) = \psi^{-1}(\phi_m) = \psi^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \widehat{w_i \otimes u_i} \right) = \sum_{i=1}^k w_i \otimes u_i = \nabla(m).$$

Logo $\nabla_{\mathbb{D}^\nabla} = \nabla$.

A seguir, considere $\mathbb{D} \in DC(M)$ e seja $\nabla_{\mathbb{D}}$ a conexão associada pelo teorema 1.11. Vamos mostrar que $\mathbb{D}_\partial^{\nabla_{\mathbb{D}}} = \nabla_\partial$ (onde $\mathbb{D}_\partial^{\nabla_{\mathbb{D}}} = \tilde{\varphi}_\partial \circ \nabla_{\mathbb{D}}$), para todo $\partial \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(A)$.

Primeiro note para cada ∂ temos $\phi_m(\partial) = \mathbb{D}_\partial(m)$. Considere $\psi^{-1}(\phi_m) = \sum_{i=1}^k w_i \otimes m_i$, onde $w_i \in \Omega_{A/\mathbb{K}}^1, m_i \in M$. Portanto, tendo em mente a linearidade de ψ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\partial(m) = \phi_m(\partial) &= \sum_{i=1}^k \widehat{w_i \otimes m_i}(\partial) = \sum_{i=1}^k \varphi_\partial(w_i) m_i \\ &= \sum_{i=1}^k \tilde{\varphi}_\partial(w_i \otimes m_i) = \tilde{\varphi}_\partial \left(\sum_{i=1}^k w_i \otimes m_i \right) = \tilde{\varphi}_\partial(\psi^{-1}(\phi_m)) \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\mathbb{D}_\partial^{\nabla_{\mathbb{D}}}(m) = \tilde{\varphi}_\partial \circ \nabla_{\mathbb{D}}(m) = \tilde{\varphi}_\partial \circ \psi^{-1}(\phi_m) = \mathbb{D}_\partial(m).$$

□

Note ainda que, as condições do teorema 1.11 sobre o anel A são indispensáveis para obtermos tal resultado, pois se A não for uma \mathbb{K} -álgebra comutativa regular do tipo finito, é possível que existam A -módulo que tenham derivadas covariantes e não admitam conexões. É isso que mostraremos a seguir.

Considere $M = \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$, onde $A = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{\langle xy \rangle}$. Para $i = 1, 2$ defina $\phi_i : A^2 \rightarrow M$ por $(a, b) \rightarrow \partial_i(a)\partial_1 + \partial_i(b)\partial_2$, onde ∂_i são as derivações definidas no lema 1.6. Segue-se da \mathbb{R} -linearidade de ∂_1 e ∂_2 que ϕ_i é \mathbb{R} -linear.

Além disso $N \subset \ker(\phi_i)$. De fato, se tivermos em mente o item 3 do lema 1.6, dado $(\alpha\bar{y}, \beta\bar{x})$ em N então $\partial_i(\bar{y})\partial_1 = 0$ e $\partial_i(\bar{x})\partial_2 = 0$, logo

$$\phi_i(\alpha\bar{y}, \beta\bar{x}) = \partial_i(\alpha\bar{y})\partial_1 + \partial_i(\beta\bar{x})\partial_2 = \partial_i(\alpha)\bar{y}\partial_1 + \partial_i(\beta)\bar{x}\partial_2 + \alpha\partial_i(\bar{y})\partial_1 + \beta\partial_i(\bar{x})\partial_2 = 0.$$

Logo, ϕ_i induzem homomorfismos \mathbb{R} -lineares de $\frac{A^2}{N} \rightarrow M$.

Agora, tendo em mente o isomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathcal{N} \rightarrow M$ dado no lema 1.7, concluímos que existem únicos homomorfismos \mathbb{R} -lineares $\mathbb{D}_i : M \rightarrow M$ tais que $\mathbb{D}_i(a\partial_1 + b\partial_2) = \partial_i(a)\partial_1 + \partial_i(b)\partial_2$.

Como $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(M, M)$, está bem definida $\phi : A^2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(M, M)$ dada por $(a, b) \mapsto a\mathbb{D}_1 + b\mathbb{D}_2$. É fácil ver que ϕ é A -linear.

Seja $(\alpha\bar{y}, \beta\bar{x}) \in N$. Note que $\phi(\alpha\bar{y}, \beta\bar{x}) = \alpha\bar{y}\mathbb{D}_1 + \beta\bar{x}\mathbb{D}_2$ é o homomorfismo nulo em $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(M, M)$, desde que $\bar{y}\mathbb{D}_1 = 0 = \bar{x}\mathbb{D}_2$ (confira definição de \mathbb{D}_i e Lema 1.6).

Portanto, $N \subset \ker(\phi)$. Assim ϕ induz um homomorfismo A -linear de $\frac{A^2}{N}$ em M . Agora, tendo em consideração mais uma vez o isomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathcal{N} \rightarrow M$ dado no lema 1.7, concluímos que existe um único homomorfismo A -linear $\mathbb{D} : \text{Der}_{\mathbb{R}}(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(M, M)$, tal que $\mathbb{D}_{a\partial_1 + b\partial_2} = \mathbb{D}(a\partial_1 + b\partial_2) = a\mathbb{D}_1 + b\mathbb{D}_2$.

Vamos agora mostrar que \mathbb{D} satisfaz

$$\mathbb{D}_{\partial}(c\partial') = c\mathbb{D}_{\partial}(\partial') + \partial(c)\partial', \quad \text{para todo } \partial \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A), c \in A, \partial' \in M.$$

Sejam $c \in A$, $\partial = a\partial_1 + b\partial_2 \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ e $\partial' = \gamma\partial_1 + \delta\partial_2 \in M$ então temos:

$$\mathbb{D}_{\partial}(c\partial') = a\mathbb{D}_1(c\partial') + b\mathbb{D}_2(c\partial'). \quad (1.9)$$

A seguir verificaremos que \mathbb{D}_1 satisfaz $\mathbb{D}_1(c\partial') = c\mathbb{D}_1(\partial') + \partial_1(c)\partial'$, para todo $\partial \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$, $c \in A$, $\partial' \in M$. De fato,

$$\mathbb{D}_1(c\partial') = \mathbb{D}_1(c\gamma\partial_1 + c\delta\partial_2) = \partial_1(c\gamma)\partial_1 + \partial_1(c\delta)\partial_2 \quad (1.10)$$

$$= c(\partial_1(\gamma)\partial_1 + \partial_1(\delta)\partial_2) + \partial(c)(\gamma\partial_1 + \delta\partial_2) = c\mathbb{D}_1(\partial') + \partial_1(c)\partial'. \quad (1.11)$$

De maneira análoga verifica-se que:

$$\mathbb{D}_2(c\partial') = c\mathbb{D}_2(\partial') + \partial_2(c)\partial', \quad \text{para todo } \partial \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A), c \in A, \partial' \in M. \quad (1.12)$$

Portanto, substituindo (1.11) e (1.12) em (1.9), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_\partial(c\partial') &= a(c\mathbb{D}_1(\partial') + \partial_1(c)\partial') + b(c\mathbb{D}_2(\partial') + \partial_2(c)\partial') \\ &= c(a\mathbb{D}_1(\partial') + b\mathbb{D}_2(\partial')) + (a\partial_1(c) + b\partial_2(c))\partial' \\ &= c\mathbb{D}_\partial(\partial') + \partial(c)\partial'.\end{aligned}$$

Isto mostra que $\mathbb{D} \in DC(M)$. Portanto temos que $DC(M) \neq \emptyset$. Nos resta agora mostrar que $Con(M) = \emptyset$. Pelo absurdo, suponha que $Con(M) \neq \emptyset$, então existe $\nabla : M \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{R}}^1 \otimes_A M$ uma conexão.

Sabemos que M e $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1$ são finitamente gerados e tem por conjuntos de geradores $\{\partial_1, \partial_2\}$ e $\{\delta^1, \delta^2\}$, respectivamente. Portanto

$$\{\delta^1 \otimes \partial_1, \delta^1 \otimes \partial_2, \delta^2 \otimes \partial_1, \delta^2 \otimes \partial_2\}$$

é um conjunto de geradores para $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1 \otimes_A M$ como A -módulo.

Assim a imagem de ∂_1 por ∇ é dada por:

$$\nabla(\partial_1) = a_{11}\delta^1 \otimes \partial_1 + a_{12}\delta^1 \otimes \partial_2 + a_{21}\delta^2 \otimes \partial_1 + a_{22}\delta^2 \otimes \partial_2,$$

onde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in A$. Relembre que $\bar{y}\partial_1 = \bar{0}$, e pela propriedade de conexões obtemos:

$$\nabla(\bar{y}\partial_1) = \bar{y}\nabla(\partial_1) + \delta^2 \otimes \partial_1 = 0 \Rightarrow a_{12}\bar{y}\delta^1 \otimes \partial_2 + a_{22}\bar{y}\delta^2 \otimes \partial_2 + \delta^2 \otimes \partial_1 \stackrel{(*)}{=} 0$$

Além disso, da observação 1.1 temos que $\bar{y}\delta^1 + \bar{x}\delta^2 = 0$, portanto $-\bar{x}\delta^2 = \bar{y}\delta^1$.

Substituindo $\bar{y}\delta^1$ por $-\bar{x}\delta^2$ na igualdade (*) e tendo em consideração que $\bar{x}\partial_2 = 0$ obtemos,

$$a_{22}\bar{y}\delta^2 \otimes \partial_2 + \delta^2 \otimes \partial_1 = 0. \tag{1.13}$$

Considere agora o homomorfismo A -linear $\Lambda : \Omega_{A/\mathbb{R}}^1 \otimes_A (\Omega_{A/\mathbb{R}}^1)^* \rightarrow Hom_A(\Omega_{A/\mathbb{R}}^1, \Omega_{A/\mathbb{R}}^1)$ como na proposição A.6 e o isomorfismo A -linear $\varphi : Der_{\mathbb{R}}(A) \rightarrow (\Omega_{A/\mathbb{R}}^1)^*$ dada por $\partial \rightarrow \varphi_\partial$ tal que $\varphi_\partial \circ d = \partial$ para todo $\partial \in Der_{\mathbb{R}}(A)$ como no lema B.3.

Como $\{\partial_1, \partial_2\}$ gera $Der_{\mathbb{R}}(A)$ então $\varphi_1 = \varphi_{\partial_1}$ e $\varphi_2 = \varphi_{\partial_2}$ geram $(\Omega_{A/\mathbb{R}}^1)^*$ como A -módulo e satisfazem as relações do lema 1.6. Além disso $\varphi_1(\delta^1) = \bar{x}$, $\varphi_1(\delta^2) = \bar{0}$, $\varphi_2(\delta^1) = \bar{0}$ e $\varphi_2(\delta^2) = \bar{y}$. De fato,

$$\varphi_1(\delta^1) = \varphi_{\partial_1}(d(\bar{x})) = \partial_1(\bar{x}) = \bar{x} \quad \text{e} \quad \varphi_1(\delta^2) = \varphi_{\partial_1}(d(\bar{y})) = \partial_1(\bar{y}) = \bar{0},$$

as outras igualdades seguem de modo análogo.

Novamente por serem $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1$ e $(\Omega_{A/\mathbb{R}}^1)^*$ A -módulos finitamente gerados, com conjuntos de geradores $\{\delta^1, \delta^2\}$ e $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, respectivamente, temos que

$$\{\delta^1 \otimes \varphi_1, \delta^1 \otimes \varphi_2, \delta^2 \otimes \varphi_1, \delta^2 \otimes \varphi_2\}$$

é um conjunto de geradores para $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1 \otimes_A (\Omega_{A/\mathbb{R}}^1)^*$ como A -módulo. A partir do isomorfismo φ pode-se construir o único isomorfismo entre $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1 \otimes_A M$ e $\Omega_{A/\mathbb{R}}^1 \otimes_A (\Omega_{A/\mathbb{R}}^1)^*$ tal que $\delta^i \otimes \partial_j \rightarrow \delta^i \otimes \varphi_j$ e aplicando tal isomorfismo na equação (1.13) obtemos

$$a_{22}\bar{y}\delta^2 \otimes \varphi_2 + \delta^2 \otimes \varphi_1 = 0 \tag{1.14}$$

A imagem de (1.14) por Λ é dado por $a_{22}\bar{y}\widehat{\delta^2 \otimes \varphi_2} + \widehat{\delta^2 \otimes \varphi_1} = \widehat{0} \in \text{Hom}_A(\Omega_{A/\mathbb{K}}^1, \Omega_{A/\mathbb{K}}^1)$.

Avaliando este homomorfismo em δ^1 , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{22}\bar{y}\widehat{\delta^2 \otimes \varphi_2} + \widehat{\delta^2 \otimes \varphi_1})(\delta^1) = a_{22}\bar{y}\widehat{\delta^2 \otimes \varphi_2}(\delta^1) + \widehat{\delta^2 \otimes \varphi_1}(\delta^1) \\ &= a_{22}\bar{y}\varphi_2(\delta^1)\delta^2 + \varphi_1(\delta^1)\delta^2 = \bar{x}\delta^2, \end{aligned}$$

o que contradiz a observação 1.1. Portanto M possui uma derivada covariante contudo não admite conexões, como queríamos concluir.

Capítulo 2

Explorando o conceito de módulo projetivo em exemplos geométricos

Neste capítulo estaremos inspirados no teorema de Swan [31, Teorema 2]. Ele garante que um $C_{\mathcal{U}}^0$ -módulo finitamente gerado é projetivo se, e somente se, é isomorfo ao $C_{\mathcal{U}}^0$ -módulo das seções contínuas sobre um fibrado vetorial de um espaço topológico compacto Hausdorff \mathcal{U} . Assim o teorema 1.4 garante a existência de conexões para estes módulos de seções.

Nosso objetivo será mais específico, vamos estudar as seções do fibrado tangente, e verificar que, de fato, estes são $C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ -módulos. Além disso, vamos explorar de maneira direta estes módulos de seções no caso de algumas superfícies em \mathbb{R}^3 , e determinar se estes módulos são livres ou não. De fato, verificamos que os exemplos apresentados são $C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ -módulos projetivos.

2.1 As seções do fibrado tangente de uma variedade diferenciável

Seja \mathcal{U} uma variedade diferenciável de dimensão n . Considere a estrutura diferenciável em \mathcal{U} definida pelo atlas $\{c_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$.

Assim temos que:

- $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura aberta de \mathcal{U} .
- $c_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \tilde{U}_{\alpha} \stackrel{\text{aberto}}{\subset} \mathbb{R}^n$ é homeomorfismo $\forall \alpha \in J$.
- As mudanças de coordenadas $X_{\beta\alpha} = c_{\beta} \circ c_{\alpha}^{-1} \in C^{\infty}(c_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}), c_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}))$, $\forall \alpha, \beta \in J$.

Defina a seguinte relação em $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

$$\sigma \sim \tau \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(0) & = & \tau(0) \\ (c_\alpha \circ \sigma)'(0) & = & (c_\alpha \circ \tau)'(0), \text{ para algum } \alpha \in J. \end{cases}$$

Observe que \sim define uma relação de equivalência em $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Denotaremos por $T_{\mathcal{U}}$ o conjunto quociente determinado por esta relação, ou seja, $T_{\mathcal{U}} = \frac{C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U})}{\sim}$.

Proposição 2.1. Se \mathcal{U} é uma variedade diferenciável de dimensão n , então $T_{\mathcal{U}}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Demonstração. Seja $\{c_\alpha\}_{\alpha \in J}$ o atlas que define a estrutura diferenciável em \mathcal{U} . Defina

$$T_{U_\alpha} = \{[\sigma] \in T_{\mathcal{U}} \mid \sigma(0) \in U_\alpha\}.$$

Note que $T_{\mathcal{U}} = \bigcup_{\alpha \in J} T_{U_\alpha}$. De fato, seja $[\sigma] \in T_{\mathcal{U}}$. Assim $\sigma(0) \in \mathcal{U}$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma cobertura aberta de \mathcal{U} , então $\sigma(0) \in U_\alpha$, para algum $\alpha \in J$. Logo, $[\sigma] \in T_{U_\alpha}$.

A seguir definiremos as cartas T_α para $T_{\mathcal{U}}$

$$\begin{aligned} T_\alpha : T_{U_\alpha} &\rightarrow \tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ [\sigma] &\mapsto ((c_\alpha \circ \sigma)(0), (c_\alpha \circ \sigma)'(0)). \end{aligned}$$

Mostremos que T_α é uma bijeção. De fato,

- T_α é injetiva.

Sejam $[\sigma], [\tau] \in T_{U_\alpha}$ tais que $T_\alpha([\sigma]) = T_\alpha([\tau])$.

Assim $(c_\alpha \circ \sigma)(0) \stackrel{(*)}{=} (c_\alpha \circ \tau)(0)$ e $(c_\alpha \circ \sigma)'(0) = (c_\alpha \circ \tau)'(0)$. Como c_α é bijeção de $(*)$ temos que $\sigma(0) = \tau(0)$. Logo $[\sigma] = [\tau]$.

- T_α é sobrejetiva.

Dado $(x, v) \in \tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Defina $\sigma^\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ por $\sigma^\alpha(t) = c_\alpha^{-1}(c_\alpha(p) + tv)$, onde $p = c_\alpha^{-1}(x)$. Assim $\sigma^\alpha(0) = p \in U_\alpha$, logo $[\sigma^\alpha] \in T_{U_\alpha}$. Além disso $(c_\alpha \circ \sigma^\alpha)'(0) = (c_\alpha(p) + tv)'(0) = v$. Portanto

$$T_\alpha([\sigma^\alpha]) = ((c_\alpha \circ \sigma^\alpha)(0), (c_\alpha \circ \sigma^\alpha)'(0)) = (x, v).$$

Observação 2.1. $c_\alpha \circ \sigma(0) = c_\alpha(p) \in \tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e $c_\alpha \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que

$$(c_\alpha \circ \sigma)'(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \forall t \in \sigma^{-1}(U_\alpha).$$

2. Explorando o conceito de módulo projetivo em exemplos geométricos

Vamos mostrar agora que $T_\beta \circ T_\alpha^{-1} \in C^\infty(c_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n, c_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n)$, para todo $\alpha, \beta \in J$.

Para cada $(x, v) \in c_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ vamos agora determinar $(y, w) \in c_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ tal que $T_\beta \circ T_\alpha^{-1}(x, v) = (y, w)$.

Como

$$X_{\beta\alpha} \in C^\infty(c_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), c_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)),$$

com $c_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e $c_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \tilde{U}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ são abertos. Temos que

$$X'_{\beta\alpha} : c_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Assim para cada $x \in c_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $X'_{\beta\alpha}(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Considere $[\sigma] \in T_{U_\alpha} \cap T_{U_\beta}$ tal que $T_\alpha^{-1}(x, v) = [\sigma]$ e $T_\beta^{-1}(y, w) = [\sigma]$. Assim $c_\alpha(\sigma(0)) = c_\alpha(p) = x$ e $c_\beta(\sigma(0)) = c_\beta(p) = y$. Além disso $(c_\alpha \circ \sigma)'(0) = v$ e $(c_\beta \circ \sigma)'(0) = w$ e $\sigma(0) = p \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Note que

$$y = c_\beta(\sigma(0)) = c_\beta(p) = X_{\beta\alpha}(x).$$

Por outro lado $w = (c_\beta \circ \sigma)'(0) = (c_\beta \circ (c_\alpha^{-1} \circ c_\alpha) \circ \sigma)'(0) = ((c_\beta \circ c_\alpha^{-1}) \circ c_\alpha \circ \sigma)'(0) = (X'_{\beta\alpha} \circ c_\alpha \circ \sigma)'(0) = X'_{\beta\alpha}((c_\alpha \circ \sigma)'(0)) \circ (c_\alpha \circ \sigma)'(0) = X'_{\beta\alpha}(x)(v)$.

Portanto,

$$T_\beta \circ T_\alpha^{-1}(x, v) = (X_{\beta\alpha}(x), X'_{\beta\alpha}(x)(v)).$$

Como as funções $X_{\beta\alpha}$ e $X'_{\beta\alpha}$ são C^∞ , então $T_\beta \circ T_\alpha^{-1}$ também é de classe C^∞ . Assim $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ define uma estrutura diferenciável em $T_{\mathcal{U}}$.

Finalmente, note que $\tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$ é um aberto de \mathbb{R}^{2n} para todo $\alpha \in J$. Portanto, $T_{\mathcal{U}}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. \square

Assim faz sentido falar de $C^\infty(\mathcal{U}, T_{\mathcal{U}})$ que é o ambiente de onde extrairemos o principal objeto de estudo do presente capítulo, a saber, as seções do fibrado tangente de \mathcal{U} . A seguir vamos definir este conjunto e verificar que o mesmo é um $C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ -módulo.

Seja $\pi : T_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $[\sigma] \mapsto \sigma(0)$. Note que π é contínua. De fato, $U_0 \subset \mathcal{U}$ é um aberto, se, e somente se, $c_\alpha(U_0 \cap U_\alpha)$ é aberto em \tilde{U}_α , $\forall \alpha \in J$. Logo para que $\pi^{-1}(U_0)$ seja um aberto em $T_{\mathcal{U}}$ é suficiente mostrar que $T_\alpha(\pi^{-1}(U_0) \cap T_{U_\alpha})$ seja aberto em $\tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in J$. Mas

$$T_\alpha(\pi^{-1}(U_0) \cap T_{U_\alpha}) = T_\alpha(T_{U_0} \cap T_{U_\alpha}) = T_\alpha(T_{U_0 \cap U_\alpha}) = c(U_0 \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n,$$

que é aberto em $\tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in J$.

Considere agora $V \in C^\infty(\mathcal{U}, T\mathcal{U})$ tal que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{V} & T\mathcal{U} \\ & \searrow \text{Id}_{\mathcal{U}} & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{U} \end{array}$$

Chamaremos V de seção de $T\mathcal{U}$ e denotaremos por $\Gamma(T\mathcal{U})$ o conjunto formado pelas seções de $T\mathcal{U}$. Assim

$$\Gamma(T\mathcal{U}) = \{V \in C^\infty(\mathcal{U}, T\mathcal{U}) \mid \pi \circ V = \text{Id}_{\mathcal{U}}\}.$$

Proposição 2.2. Seja $C_{\mathcal{U}}^\infty = C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Verifica-se que:

1. $\Gamma(T\mathcal{U})$ é um $C_{\mathcal{U}}^\infty$ -módulo.
2. $\Gamma(TU_\alpha)$ é um $C_{U_\alpha}^\infty$ -módulo livre de posto $n, \forall \alpha \in J$.

Demonstração. Sejam $V, W \in \Gamma(T\mathcal{U})$. Assim para cada $p \in \mathcal{U}$

$$V(p) = [\sigma], \text{ com } \sigma(0) = p \text{ e } W(p) = [\tau], \text{ com } \tau(0) = p.$$

Suponha que $p \in U_\alpha$. Assim $[\sigma]$ e $[\tau] \in T_{U_\alpha}$. Observe que se $c_\alpha(p) = x$ então $T_\alpha([\sigma]) = (x, v)$, com $v = (c_\alpha \circ \sigma)'(0)$ e $T_\alpha([\tau]) = (x, w)$, com $w = (c_\alpha \circ \tau)'(0)$. Logo podemos definir

$$(V + W)(p) = T_\alpha^{-1}(T_\alpha(V(p)) + T_\alpha(W(p))) = T_\alpha^{-1}((x, v) + (x, w)) = T_\alpha^{-1}(x, v + w).$$

A seguir verificaremos que, se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ então

$$T_\alpha^{-1}(T_\alpha(V(p)) + T_\alpha(W(p))) = T_\beta^{-1}(T_\beta(V(p)) + T_\beta(W(p))).$$

De fato, se $c_\beta(p) = x_1$, então T_β é tal que

$$\begin{aligned} T_\beta([\sigma]) &= (x_1, v_1), \text{ com } v_1 = (c_\beta \circ \sigma)'(0), \\ T_\beta([\tau]) &= (x_1, w_1), \text{ com } w_1 = (c_\beta \circ \tau)'(0). \end{aligned}$$

Logo $X_{\beta\alpha}(x) = x_1$. Além disso

$$X'_{\beta\alpha}(x)(v) = v_1 \quad \text{e} \quad X'_{\beta\alpha}(x)(w) = w_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 T_\alpha^{-1}(T_\alpha(V(p)) + T_\alpha(W(p))) &= T_\beta^{-1} \circ T_\beta \circ T_\alpha^{-1}(T_\alpha(V(p)) + T_\alpha(W(p))) \\
 &= T_\beta^{-1} \circ T_\beta \circ T_\alpha^{-1}((x, v) + (x, w)) \\
 &= T_\beta^{-1} \circ T_\beta \circ T_\alpha^{-1}(x, v + w) \\
 &= T_\beta^{-1}(X_{\beta\alpha}(x), X'_{\beta\alpha}(x)(v + w)) \\
 &= T_\beta^{-1}(x_1, v_1 + w_1) \\
 &= T_\beta^{-1}((x_1, v_1) + (x_1, w_1)) \\
 &= T_\beta^{-1}(T_\beta(V(p)) + T_\beta(W(p))).
 \end{aligned}$$

A seguir daremos uma estrutura de $C_\mathcal{U}^\infty$ -módulo para $\Gamma(T_\mathcal{U})$.

Sejam $V \in \Gamma(T_\mathcal{U})$ e $f \in C_\mathcal{U}^\infty$. Para cada $p \in \mathcal{U}$ temos $V(p) = [\sigma]$, com $\sigma(0) = p$. Suponha que $p \in U_\alpha$. Assim $[\sigma] \in T_{U_\alpha}$. Observe que se $c_\alpha(p) = x$ então $T_\alpha([\sigma]) = (x, v)$, com $v = (c_\alpha \circ \sigma)'(0)$ vamos definir o produto por escalar da seguinte maneira:

$$(f \cdot V)(p) = T_\alpha^{-1}(f(p)T_\alpha(V(p))) = T_\alpha^{-1}(x, f(p)v).$$

Mostremos agora que esta definição não depende da carta T_α . De fato, se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $c_\beta(p) = x_1$, então T_β é tal que

$$T_\beta([\sigma]) = (x_1, v_1), \text{ com } v_1 = (c_\beta \circ \sigma)'(0).$$

Logo $X_{\beta\alpha}(x) = x_1$ e $X'_{\beta\alpha}(x)(v) = v_1$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 T_\alpha^{-1}(f(p)T_\alpha(V(p))) &= T_\beta^{-1} \circ T_\beta \circ T_\alpha^{-1}(f(p)(x, v)) \\
 &= T_\beta^{-1} \circ T_\beta \circ T_\alpha^{-1}((x, f(p)v)) \\
 &= T_\beta^{-1}(X_{\beta\alpha}(x), X'_{\beta\alpha}(x)(f(p)v)) \\
 &= T_\beta^{-1}(x_1, f(p)v_1) \\
 &= T_\beta^{-1}(f(p)(x_1, v_1)) \\
 &= T_\beta^{-1}(f(p)T_\beta(V(p))).
 \end{aligned}$$

Verificamos que as operações de soma e produto por escalar estão bem definidas.

Vamos agora mostrar que com estas operações $\Gamma(T_U)$ é um C_U^∞ -módulo.

De fatos, dados $U, V, W \in \Gamma(T_U)$ e $f, g \in C_U^\infty$ considerando $p \in U_\alpha$, tal que $c_\alpha(p) = x$, $U(p) = [\sigma]$, $V(p) = [\tau]$, $W(p) = [\omega]$, além disso sejam $T_\alpha([\sigma]) = (x, u)$, $T_\alpha([\tau]) = (x, v)$ e $T_\alpha([\omega]) = (x, w)$.

1.

$$\begin{aligned}
 ((U + V) + W)(p) &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha((U + V)(p)) + T_\alpha(W(p))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha(T_\alpha^{-1}((x, u) + (x, v)) + (x, w))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(((x, u) + (x, v)) + (x, w)) \\
 &= T_\alpha^{-1}((x, u) + T_\alpha(T_\alpha^{-1}((x, v) + (x, w)))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha((U(p)) + T_\alpha((V + W)(p)))) = (U + (V + W))(p).
 \end{aligned}$$

2.

$$(U + V)(p) = T_\alpha^{-1}((x, u) + (x, v)) = T_\alpha^{-1}((x, v) + (x, u)) = (V + U)(p).$$

3. O campo

$$\begin{aligned}
 O : U &\rightarrow T_U \\
 p &\mapsto [O_p], \quad \text{onde } O_p(t) = p, \forall t \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

é o elemento neutro de $\Gamma(T_U)$.

De fato, como $(c \circ O_p)(t) = x, \forall t \in \mathbb{R}$, temos que

$$T_\alpha(O_p) = (c_\alpha(O_p(0)), (c_\alpha \circ O_p)'(0)) = (x, 0) \in \tilde{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$(O + U)(p) = T_\alpha^{-1}((x, u) + (x, 0)) = T_\alpha^{-1}((x, u)) = U(p).$$

4. O campo $-U \in \Gamma(T_U)$, definido por $-U(p) = [\tilde{\sigma}]$, onde $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(-t)$ é tal que $-U + U = O$. De fato, $T_\alpha(-U(p)) = (x, (c_\alpha \circ \tilde{\sigma})'(0)) = (x, -(c_\alpha \circ \sigma)'(0)) = (x, -u)$.

Assim temos:

$$(-U + U)(p) = T_\alpha^{-1}((x, -u) + (x, u)) = T_\alpha^{-1}((x, 0)) = O_p.$$

5.

$$\begin{aligned}
 f(U + V)(p) &= T_\alpha^{-1}(f(p)(T_\alpha((U + V)(p))) = T_\alpha^{-1}(f(p)(T_\alpha(T_\alpha^{-1}(x, u + v)))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(f(p)(x, u + v)) = T_\alpha^{-1}((x, f(p)u) + (x, f(p)v)) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha(T_\alpha^{-1}(x, f(p)u)) + T_\alpha(T_\alpha^{-1}(x, f(p)v))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha((fU)(p)) + T_\alpha((fV)(p))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha(f(p)(U(p)) + (T_\alpha(f(p)(V(p)))) = (fU + fV)(p).
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 ((f + g)U)(p) &= T_\alpha^{-1}(x, (f(p) + g(p))u) = T_\alpha^{-1}((x, f(p)u) + (x, g(p)u)) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha(T_\alpha^{-1}(x, f(p)u)) + T_\alpha(T_\alpha^{-1}(x, g(p)u))) \\
 &= T_\alpha^{-1}(T_\alpha(fU)(p) + T_\alpha(gU)(p)) = (fU + gU)(p).
 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
 ((fg)U)(p) &= T_\alpha^{-1}(x, (fg)(p)u) = T_\alpha^{-1}(x, f(p)(g(p)u)) = T_\alpha^{-1}(f(p)(x, g(p)u)) \\
 &= T_\alpha^{-1}(f(p)T_\alpha(T_\alpha^{-1}(x, g(p)u))) = T_\alpha^{-1}(f(p)T_\alpha((gU)(p))) = f(gU)(p).
 \end{aligned}$$

8. Verifica-se facilmente que $1 \in C_U^\infty$ definido por $1(p) = 1$ é a unidade de C_U^∞ e $1U = U$.

A seguir verificaremos que $\Gamma(T_{U_\alpha})$ é um $C_{U_\alpha}^\infty$ -módulo livre de posto n para cada $\alpha \in J$.

Fixe $\alpha \in J$ e seja $p \in U_\alpha$. Defina:

$$E_i^\alpha(p) = [\sigma_\alpha^i], \text{ com } \sigma_\alpha^i(t) = c_\alpha^{-1}(c_\alpha(p) + te_i),$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de \mathbb{R}^n .

Observe que $E_i^\alpha \in \Gamma(T_{U_\alpha})$ para $i = 1, \dots, n$, pois $T_\alpha(E_i^\alpha(p)) = (c_\alpha \circ \sigma_\alpha^i(0), (c_\alpha \circ \sigma_\alpha^i)'(0)) = (c_\alpha(p), e_i)$, isto é $E_i^\alpha(p) = T_\alpha^{-1}(c_\alpha(p), e_i)$.

Vamos mostrar que $\{E_i^\alpha\}_{i=1}^n$ é uma base para $\Gamma(T_{U_\alpha})$ como $C_{U_\alpha}^\infty$ -módulo.

De fato, seja $V \in \Gamma(T_{U_\alpha})$. Assim $V(p) = [\gamma_p]$, com $\gamma_p(0) = p \in U_\alpha$. Como $v = (c_\alpha \circ \gamma_p)'(0) \in \mathbb{R}^n$, existem $f_1(p), \dots, f_n(p) \in \mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{i=1}^n f_i(p)e_i$.

Assim temos:

$$V = \sum_{i=1}^n f_i \cdot E_i^\alpha.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n f_i \cdot E_i^\alpha\right)(p) &= \sum_{i=1}^n T_\alpha^{-1}(f_i(p)T_\alpha(E_i^\alpha(p))) = \sum_{i=1}^n T_\alpha^{-1}(f_i(p)(x, e_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^n T_\alpha^{-1}(x, f_i(p)e_i) = T_\alpha^{-1}\left(\sum_{i=1}^n (x, f_i(p)e_i)\right) \\
 &= T_\alpha^{-1}\left(x, \sum_{i=1}^n f_i(p)e_i\right) = T_\alpha^{-1}(x, v) \\
 &= [\gamma_p] = V(p), \quad \forall p \in U_\alpha.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\{E_i^\alpha\}_{i=1}^n$ gera $\Gamma(T_{U_\alpha})$. Mostremos agora que $\{E_i^\alpha\}_{i=1}^n$ é L.I.

Com efeito, sejam $f_1, \dots, f_n \in C_{U_\alpha}^\infty$ tais que $\sum_{i=1}^n f_i \cdot E_i^\alpha = O$. Logo,

$$\begin{aligned}
 O_p &= \left(\sum_{i=1}^n f_i \cdot E_i^\alpha\right)(p), \quad \forall p \in U_\alpha \\
 \Rightarrow T_\alpha(O(p)) &= T_\alpha\left(\sum_{i=1}^n f_i \cdot E_i^\alpha(p)\right), \quad \forall p \in U_\alpha \\
 \Rightarrow (x, 0_{\mathbb{R}^n}) &= T_\alpha\left(\sum_{i=1}^n T_\alpha^{-1}(f_i(p)T_\alpha(E_i^\alpha(p)))\right) = T_\alpha\left(\sum_{i=1}^n T_\alpha^{-1}(f_i(p)(x, e_i))\right) \\
 &= T_\alpha\left(\sum_{i=1}^n T_\alpha^{-1}(x, f_i(p)e_i)\right) = T_\alpha\left(T_\alpha^{-1}\left(x, \sum_{i=1}^n f_i(p)e_i\right)\right) \\
 &= \left(x, \sum_{i=1}^n f_i(p)e_i\right), \quad \forall p \in U_\alpha \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(p)e_i &= 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall p \in U_\alpha \\
 \Rightarrow f_i(p) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall p \in U_\alpha.
 \end{aligned}$$

Portanto, $f_i \equiv 0, \forall i = 1, \dots, n$. □

2.2 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ em exemplos geométricos

Como já era sabido, pelo teorema de Swan ([31, Teorema 2]), as seções contínuas de um fibrado vetorial formam um $C_{\mathcal{U}}^0$ -módulo projetivo finitamente gerado. Contudo vamos olhar especificamente para alguns exemplos geométricos, a saber o plano, o cilindro e a esfera, com o objetivo determinar se estes módulos são ou não livres. E em cada caso verificaremos que são $C_{\mathcal{U}}^\infty$ -módulos projetivos.

2.2.1 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, se \mathcal{U} é um plano em \mathbb{R}^3

Para determinar $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, no caso em que \mathcal{U} é um plano em \mathbb{R}^3 vamos provar um resultado mais geral (Teorema 2.3), do qual o plano é apenas um caso particular.

Se \mathcal{U} é uma variedade diferenciável homeomorfa a um aberto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ então existe um homeomorfismo $c : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{U}$. Portanto podemos considerar o atlas $\mathcal{A} = \{c\}$ que define uma estrutura diferenciável para \mathcal{U} . Assim vamos mostrar no teorema a seguir que por este atlas $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ é, de fato, um $C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ -módulo livre de posto n .

Teorema 2.3. *Seja \mathcal{U} uma variedade diferenciável de dimensão n que admite um atlas constituído de uma só carta, digamos, $c : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. Então $\{E_i\}_{i=1}^n$ onde $E_i(p) = [\sigma]$, com $\sigma(t) = c^{-1}(c(p) + te_i)$ é uma base de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ como $C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ -módulo.*

Demonstração. A demonstração é análoga a feita no item 2 da proposição 2.2. Basta considerar $\mathcal{U} = U_{\alpha}$. □

Em particular, considere $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ um plano em \mathbb{R}^3 .

Como

$$\begin{aligned} c_1 : \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo entre \mathcal{U} e \mathbb{R}^2 , o atlas $\mathcal{A} = \{c_1\}$ define uma estrutura diferenciável em \mathcal{U} . Logo, o teorema 2.3 acima nos garante que $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ é um $C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ -módulo livre de posto 2. Observe que \mathcal{U} não é compacto.

2.2.2 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, se \mathcal{U} é um cilindro em \mathbb{R}^3

Seja $\mathcal{U} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), z) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ um cilindro em \mathbb{R}^3 . Considere $U_1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), z) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in (0, 2\pi)\}$ e $U_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), z) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in (-\pi, \pi)\}$ uma cobertura aberta de \mathcal{U} . Além disso, considere os abertos $\tilde{U}_1 = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ e $\tilde{U}_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 .

Verifica-se que \mathcal{U} é uma variedade diferenciável, com as seguintes cartas:

$$c_1 : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1 \text{ dada por } (\cos(\theta), \sin(\theta), z) \mapsto (\theta, z)$$

e

$$c_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2 \text{ dada por } (\cos(\theta), \sin(\theta), z) \mapsto (\theta, z).$$

Note que $U_1 \cap U_2 = \{(x, y, z) \in \mathcal{U}, x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$. Assim obtemos as seguintes mudanças de cartas:

$X_{21} : c_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow c_2(U_1 \cap U_2)$ dada por

$$X_{21}(t, z) = \begin{cases} (t, z), & \text{se } t \in (0, \pi) \\ (t + 2\pi, z), & \text{se } t \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

e $X_{12} = c_1 \circ c_2^{-1} : c_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow c_1(U_1 \cap U_2)$ dada por

$$X_{12}(t, z) = \begin{cases} (t, z), & \text{se } t \in (0, \pi) \\ (t - 2\pi, z), & \text{se } t \in (-\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Observe que X_{12} e X_{21} são de classe C^∞ e têm como derivada a identidade.

Considere agora os campos $\{V_1, V_2\}$ dados por:

$$V_1(p) = [\sigma_1], \text{ onde } \sigma_1(t) = (\cos(\theta + t), \text{sen}(\theta + t), z)$$

e

$$V_2(p) = [\sigma_2], \text{ onde } \sigma_2(t) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), z + t),$$

se $p = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), z)$.

Vamos mostrar que $\{V_1, V_2\}$ é uma base para o C_U^∞ -módulo $\Gamma(T_U)$.

Considere que $p \in U_i$ e denote $c_i(p) = x_i$ com $i \in \{1, 2\}$. Note que

$$T_i(V_1(p)) = (c_i(p), (c_i \circ \sigma_1)'(0)) = (x_i, (\theta + t, z)') = (x_i, e_1)$$

$$T_i(V_2(p)) = (c_i(p), (c_i \circ \sigma_2)'(0)) = (x_i, (\theta, z + t)') = (x_i, e_2),$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 .

Considere $V \in \Gamma(T_U)$. Assim $V(p) = [\gamma_p]$, com $\gamma_p(0) = p$ e $v = (c_i \circ \gamma_p)'(0) \in \mathbb{R}^2$. Então existem $f_1(p), f_2(p) \in \mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{i=1}^2 f_i(p)e_i$. Assim temos:

$$V = \sum_{i=1}^2 f_i \cdot V_i.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot V_1 + f_2 \cdot V_2)(p) &= T_i^{-1}(T_i(f_1 v_1(p) + f_2 v_2(p))) \\ &= T_i^{-1}(T_i(T_i^{-1}(x_i, f_1(p)e_1)) + T_i(T_i^{-1}(x_i, f_2(p)e_2))) \\ &= T_i^{-1}((x_i, f_1(p)e_1) + (x_i, f_2(p)e_2)) = T_i^{-1}((x_i, f_1(p)e_1 + f_2(p)e_2)) \\ &= T_i^{-1}((x_i, v)) = [\gamma_p] = V(p), \quad \forall p \in U_i. \end{aligned}$$

Portanto, $\{V_i\}_{i=1}^2$ gera $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$.

Mostremos agora que $\{V_i\}_{i=1}^2$ é L.I.

Com efeito, sejam $f_1, f_2 \in C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ tais que $\sum_{i=1}^2 f_i \cdot V_i = O$. Logo,

$$\begin{aligned} O_p &= (f_1 \cdot V_1 + f_2 \cdot V_2)(p) = T_i^{-1}(T_i(f_1 V_1(p) + T_i(f_2 V_2(p)))) \\ \Rightarrow T_i(O(p)) &= T_i(T_i^{-1}(T_i(f_1 V_1(p) + T_i(f_2 V_2(p)))) = T_i(f_1 V_1(p) + T_i(f_2 V_2(p))) \\ \Rightarrow (x, 0) &= T_i(T_i^{-1}(x, f_1(p)e_1)) + T_i(T_i^{-1}(x, f_2(p)e_2)) = (x, f_1(p)e_1 + f_2(p)e_2) \\ \Rightarrow 0 &= f_1(p)e_1 + f_2(p)e_2, \quad \forall p \in U_i \\ \Rightarrow f_i(p) &= 0, \quad \forall i = 1, 2 \quad \forall p \in U_i. \end{aligned}$$

Portanto, $f_i \equiv 0$, para $i = 1, 2$. E concluímos que $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ é um $C_{\mathcal{U}}^{\infty}$ -módulo livre de posto 2, que tem por base $\{V_1, V_2\}$. Observe que \mathcal{U} não é compacto.

2.2.3 Determinação de $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, se \mathcal{U} é uma esfera em \mathbb{R}^3

Nesta subseção estaremos considerando o isomorfismo natural entre \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} . Assim usaremos as operações de \mathbb{C} nos elementos de \mathbb{R}^2 no que segue.

Para determinarmos $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$, para $\mathcal{U} = S^2$ usaremos o seguinte modelo para a esfera, a saber $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Uma vez que, \mathcal{U} é difeomorfo a S^2 temos que $\Gamma(T_{S^2}) \cong \Gamma(T_{\mathcal{U}})$.

Inicialmente dotaremos $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ de uma estrutura diferenciável.

Seja $\{U_i\}_{i=1}^2$ uma cobertura aberta de \mathcal{U} , onde $U_1 = \mathbb{R}^2$ e $U_2 = (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) \cup \{\infty\}$.

Vamos verificar que o atlas $\mathcal{A} = [\{c_1, c_2\}]$ define uma estrutura diferenciável em \mathcal{U} , onde $c_1 = Id_{\mathbb{R}^2}$ e $c_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2 (= \mathbb{R}^2)$ é dada por:

$$c_2(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } p = \infty \\ \frac{-1}{p}, & \text{se } p \neq \infty. \end{cases}$$

Observe que c_1 e c_2 são bijeções, com inversas $c_1^{-1} = Id_{\mathbb{R}^2}$ e $c_2^{-1} : \tilde{U}_2 \rightarrow U_2$ dada por

$$c_2^{-1}(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = (0, 0) \\ \frac{-1}{p}, & \text{se } x \neq (0, 0). \end{cases}$$

Note ainda que: $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Assim temos as seguintes mudanças de cartas

$$X_{21} = c_2 \circ c_1^{-1} = c_2 : c_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow c_2(U_1 \cap U_2)$$

e

$$X_{12} = c_1 \circ c_2^{-1} = c_1 : c_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow c_1(U_1 \cap U_2)$$

que são de classe C^∞ e possuem a mesma derivada, a saber

$$X'_{12}(x)u = X'_{21}(x)u = \frac{1}{x^2}u.$$

Vamos agora mostrar que $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ não é um módulo livre.

De fato, se $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ fosse um módulo livre de posto 2, então existiriam campos $X_1, X_2 \in \Gamma(T_{S^2})$ tais que $\{X_1(p), X_2(p)\}$ é base de $T_p S^2$ para todo $p \in S^2$. Assim

$$X_i(p) \neq 0, \quad \forall p \in S^2 \text{ e } i = 1, 2.$$

O que é um absurdo, pois todo campo de vetores se anula na esfera (ver [24]).

Portanto, $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ não admite uma base, logo não é um $C_{\mathcal{U}}^\infty$ -módulo livre. Mais ainda, como $\Gamma(T_{S^2})$ não pode ter um campo L.I. não possui submódulo livre de posto 1.

Além disso, verifica-se que o fibrado trivial sobre \mathcal{U} , com fibra \mathbb{R}^3 é soma direta de $T_{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$, onde $\mathcal{V}_{\mathcal{U}} = \{(p, v) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3 \mid v \in [p]\}$ (é o fibrado normal de $\mathcal{U} = S^2$). De onde concluímos que $\Gamma(T_{\mathcal{U}})$ é um $C_{\mathcal{U}}^\infty$ -módulo projetivo.

Capítulo 3

Conexões em Módulos Sobre Anéis não Necessariamente Comutativos

Nesta seção \mathbb{K} denotará um corpo, e quando não houver risco de confusão denotaremos $M \otimes_{\mathbb{K}} N$ por $M \otimes N$. As referências principais que usaremos são [17] e [22].

Definição 3.1. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra possivelmente não comutativa e M um A -bimódulo. $D : A \rightarrow M$ é denominada de \mathbb{K} -derivadação ou derivadação sobre \mathbb{K} se:

1. D é \mathbb{K} -linear
2. $D(ab) = aD(b) + D(a)b, \forall a, b \in A$.

Definição 3.2. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra, definimos $\Omega^1 := \ker \eta \subset A \otimes A$, onde $\eta : A \otimes A \rightarrow A$ é o mapa de multiplicação determinado por $\eta(x \otimes y) = xy, \forall x, y \in A$.

Note que, consideraremos $A \otimes A$ como um A -bimódulo, sendo a multiplicação pela esquerda e pela direita, dada pela multiplicação no fator à esquerda e a direita de $A \otimes A$, respectivamente. A seguir observe que η é um homomorfismo de A -bimódulos, logo Ω^1 é um A -bimódulo.

Proposição 3.1. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra e $d : A \rightarrow \Omega^1$ definida por: $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Então

1. d é uma \mathbb{K} -derivadação.
2. $\{d(a) \mid a \in A\}$ gera Ω^1 como A -bimódulo.

Demonstração. 1. De fato, sejam $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ quaisquer. Então

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad d(a + \alpha b) &= 1 \otimes (a + \alpha b) - (a + \alpha b) \otimes 1 = 1 \otimes a + 1 \otimes \alpha b - (a \otimes 1 + \alpha b \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes a - a \otimes 1 + \alpha \otimes b - \alpha b \otimes 1 = 1 \otimes a - a \otimes 1 + \alpha(1 \otimes b - b \otimes 1) = d(a) + \alpha d(b). \end{aligned}$$

$$(b) \quad d(ab) = 1 \otimes ab - ab \otimes 1 = 1 \otimes ab - ab \otimes 1 + a \otimes b - a \otimes b = (1 \otimes a)b - a(b \otimes 1) + a(1 \otimes b) - (a \otimes 1)b = a(1 \otimes b - b \otimes 1) + (1 \otimes a - a \otimes 1)b = ad(b) + d(a)b.$$

2. Se $x \in \Omega^1 \subset A \otimes A$ então $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$, com $\eta(x) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i - 0 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \otimes 1 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^n a_i b_i \otimes 1 = \sum_{i=1}^n (a_i \otimes b_i - a_i b_i \otimes 1) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (1 \otimes b_i) - a_i (b_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^n a_i (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^n a_i d(b_i). \end{aligned}$$

De modo análogo conclui-se que $x = -\sum_{i=1}^n d(a_i)b_i$. □

Lema 3.2. Seja M um A -módulo e $\mu : A \otimes_{\mathbb{K}} M \rightarrow M$ a ação de A sobre M determinada por $a \otimes m \mapsto am$. Então $\Omega^1 \otimes_A M \cong \ker(\mu)$.

Demonstração. Como $\Omega^1 = \ker(\eta) \subset A \otimes A$ e η é sobrejetiva, temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow \Omega^1 \xrightarrow{i} A \otimes A \xrightarrow{\eta} A \rightarrow 0.$$

Tensorizando à esquerda pelo A -módulo M na sequência acima, obtemos a sequência exata longa (ver [14]).

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_1^A(A, M) \rightarrow \Omega^1 \otimes_A M \xrightarrow{i \otimes \text{Id}_M} (A \otimes A) \otimes_A M \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_M} A \otimes_A M \rightarrow 0,$$

mas $\text{Tor}_1^A(A, M) = 0$, pois A é plano sobre A (desde que todo módulo livre é plano). Além disso considere os seguintes isomorfismos de A -módulos $c_0 : A \otimes_A M \rightarrow M$ determinado por $a \otimes m \mapsto am$, $c_1 : (A \otimes_{\mathbb{K}} A) \otimes_A M \rightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} (A \otimes_A M)$ determinado por $a \otimes b \otimes m \mapsto a \otimes b \otimes m$ e $c_2 : A \otimes_{\mathbb{K}} (A \otimes_A M) \rightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} M$ determinado por $a \otimes b \otimes m \mapsto a \otimes bm$ como mostra o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes_A M & \xrightarrow{i \otimes \text{Id}_M} & (A \otimes A) \otimes_A M & \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_M} & A \otimes_A M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow c_1 & & \downarrow c_0 \\ & & & & A \otimes_{\mathbb{K}} (A \otimes_A M) & & M \\ & & \searrow j & & \downarrow c_2 & \nearrow \mu & \\ & & & & A \otimes_{\mathbb{K}} M & & \end{array}$$

Assim obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \rightarrow \Omega^1 \otimes_A M \xrightarrow{j} A \otimes M \xrightarrow{\mu} M \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Portanto j é injetiva, assim $\ker(\mu) \cong \text{Im}(j) \cong \Omega^1 \otimes_A M$. \square

Observação 3.1. A partir do diagrama acima concluímos que $j : \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \otimes_A M \rightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} M$ é determinado por $j(da \otimes m) = 1 \otimes am - a \otimes m \forall a, m \in M$.

Definição 3.3. Seja A uma \mathbb{K} -álgebra possivelmente não comutativa e M um A -módulo. Um homomorfismo \mathbb{K} -linear $\nabla : M \rightarrow \Omega^1 \otimes_A M$ que satisfaz $\nabla(am) = a\nabla(m) + da \otimes m \forall a \in A, m \in M$ é dito uma conexão em M .

Vimos no primeiro capítulo que no caso comutativo todo módulo projetivo admite conexão, contudo como mostra o exemplo 1.5 a recíproca não é verdadeira. O objetivo deste capítulo é mostrar que no contexto não comutativo módulos são projetivos se, e somente se, admitem conexão segundo a definição acima, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Seja A uma \mathbb{K} -álgebra e M um A -módulo. Então $\text{Con}(M)$ está em correspondência com $\mathcal{S} = \{s : M \rightarrow A \otimes M \mid s \text{ é } A\text{-linear e } \mu \circ s = \text{Id}_M\}$, o conjunto dos splittings A -lineares de μ .*

Demonstração. Seja $s : M \rightarrow A \otimes M$ um splitting A -linear de μ , então $\nabla^s = c \circ (d \otimes \text{Id}_M) \circ s$ é uma conexão em M , onde $c : \Omega^1 \otimes M \rightarrow \Omega^1 \otimes_A M$ é o homomorfismo A -linear canônico, e $d \otimes \text{Id}_M : A \otimes M \rightarrow \Omega^1 \otimes M$ é o homomorfismo \mathbb{K} -linear que envia $a \otimes m \mapsto da \otimes m$.

De fato, primeiramente observe que s e c também são \mathbb{K} -lineares, pois A é uma \mathbb{K} -álgebra, então ∇^s é \mathbb{K} -linear, pois é composta de homomorfismo \mathbb{K} -lineares.

Vamos verificar agora que $\nabla^s(am) = a\nabla^s(m) + d(a) \otimes m$.

De fato, sejam $a \in A$ e $m \in M$ tal que $s(m) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i \in A \otimes M$, segue da A -linearidade de s que $s(am) = a(s(m)) = \sum_{i=1}^n aa_i \otimes m_i$. Além disso, de $\mu \circ s(m) = m$ temos $\mu(\sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^n a_i m_i = m$. Portanto, $\nabla^s(m) = (c \circ (d \otimes \text{Id}_M))(s(m)) = (c \circ (d \otimes \text{Id}_M))(\sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i) = c(\sum_{i=1}^n da_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^n da_i \otimes_A m_i$.

Assim

$$\begin{aligned}
 \nabla^s(am) &= c \circ (d \otimes Id_M)(s(am)) = c((d \otimes Id_M)\left(\sum_{i=1}^n aa_i \otimes m_i\right)) \\
 &= c\left(\sum_{i=1}^n d(aa_i) \otimes m_i\right) = c\left(\sum_{i=1}^n ad(a_i) \otimes m_i + \sum_{i=1}^n d(a)a_i \otimes m_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n c(ad(a_i) \otimes m_i) + \sum_{i=1}^n c(d(a)a_i \otimes m_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n ad(a_i) \otimes_A m_i + \sum_{i=1}^n d(a)a_i \otimes_A m_i \\
 &= a \sum_{i=1}^n d(a_i) \otimes_A m_i + \sum_{i=1}^n d(a) \otimes_A a_i m_i = a\nabla(m) + d(a) \otimes_A \sum_{i=1}^n a_i m_i \\
 &= a\nabla^s(m) + d(a) \otimes_A m.
 \end{aligned}$$

Seja agora $\nabla \in \text{Con}(M)$, defina $s_\nabla : M \rightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} M$ por $m \mapsto 1 \otimes m - j(\nabla(m))$. Mostremos agora que s_∇ é um splitting A -linear.

De fato, como j é A -linear e ∇ é \mathbb{K} -linear s_∇ preserva a estrutura aditiva.

Sejam agora $a \in A$ e $m \in M$, assim temos:

$$\begin{aligned}
 s_\nabla(am) &= 1 \otimes am - j(\nabla(am)) = 1 \otimes am - j(a\nabla(m) + da \otimes m) \\
 &= 1 \otimes am - aj(\nabla(m)) - 1 \otimes am + a \otimes m \\
 &= -aj(\nabla(m)) + a \otimes m = as_\nabla(m).
 \end{aligned}$$

Vamos agora verificar que $\mu \circ s_\nabla = Id_M$.

Com efeito, seja $m \in M$. Note que, pela exatidão da sequência (3.1), $\mu \circ j = 0$. Assim temos:

$$\mu \circ s_\nabla(m) = \mu(1 \otimes m - j(\nabla(m))) = \mu(1 \otimes m) - \mu \circ j(\nabla(m)) = m.$$

Vamos agora mostrar que as funções $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \text{Con}(M)$ dada por $s \mapsto \nabla^s$ e $\psi : \text{Con}(M) \rightarrow \mathcal{S}$ dada por $\nabla \mapsto s_\nabla$ são inversas uma da outra. De fato:

Dados $s \in \mathcal{S}$, e $m \in M$. Assuma que $s(m) = \sum_{i=1}^k a_i \otimes m_i$. Como $s \in \mathcal{S}$ temos que

$\mu \circ s(m) = \sum_{i=1}^k a_i m_i = m$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
 \psi(\varphi(s))(m) &= 1 \otimes m - j(\varphi(s)(m)) = 1 \otimes m - j(c \circ d \otimes Id_M \circ s(m)) \\
 &= 1 \otimes m - j(c \circ d \otimes Id_M(\sum_{i=1}^k a_i \otimes m_i)) = 1 \otimes m - j(c(\sum_{i=1}^k da_i \otimes m_i)) \\
 &= 1 \otimes m - j(\sum_{i=1}^k da_i \otimes m_i) = 1 \otimes m - \sum_{i=1}^k (1 \otimes a_i m_i - a_i \otimes m_i) \\
 &= 1 \otimes m - (1 \otimes \sum_{i=1}^k a_i m_i - \sum_{i=1}^k a_i \otimes m_i) = 1 \otimes m - 1 \otimes m + \sum_{i=1}^k a_i \otimes m_i \\
 &= s(m).
 \end{aligned}$$

Seja agora $\nabla \in Con(M)$ e $m \in M$ tal que $\nabla(m) = \sum_{i=1}^k d(a_i) \otimes m_i$, assim temos:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\psi(\nabla))(m) &= c \circ d \otimes Id_M \circ \psi(\nabla)(m) = (c \circ d \otimes Id_M)(1 \otimes m - j(\nabla(m))) \\
 &= (c \circ d \otimes Id_M)(1 \otimes m - j(\sum_{i=1}^k d(a_i) \otimes m_i)) \\
 &= (c \circ d \otimes Id_M)(1 \otimes m - \sum_{i=1}^k (1 \otimes a_i m_i - a_i \otimes m_i)) \\
 &= c(d1 \otimes m) - \sum_{i=1}^k (d1 \otimes a_i m_i - d(a_i) \otimes m_i) = \sum_{i=1}^k d(a_i) \otimes m_i = \nabla(m).
 \end{aligned}$$

□

Corolário 3.4. Notações como no teorema 3.3. Então M admite uma conexão se, e somente se, é projetivo.

Demonstração. Suponha agora que M é um A -módulo projetivo. Como μ é um homomorfismo de A -módulos sobrejetivo, pela proposição 1.2 existe $s \in \mathcal{S}$. Logo, pelo teorema 3.3 $Con(M) \neq \emptyset$.

Suponha agora que $Con(M) \neq \emptyset$, assim pelo teorema 3.3 existe $s \in \mathcal{S}$. Como μ é sobrejetivo temos pela proposição 1.1 que $A \otimes_{\mathbb{K}} M \cong \ker \mu \oplus M$. Mostremos agora que $A \otimes_{\mathbb{K}} M$ é um A -módulo livre. De fato, como M é um A -módulo e A é uma \mathbb{K} -álgebra, M é um \mathbb{K} espaço vetorial, admitindo assim uma base. Portanto $M \cong \oplus_J \mathbb{K}$, onde J tem a cardinalidade da dita base de M . Assim temos:

$$A \otimes_{\mathbb{K}} M \cong A \otimes_{\mathbb{K}} (\oplus_J \mathbb{K}) \cong \oplus_J A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \cong \oplus_J A.$$

Portanto, M é um A módulo projetivo.

□

Apêndice A

Propriedade Universal do produto tensorial - PUPT

Estamos considerando mais uma vez todos os anéis comutativos com unidade e \mathbb{K} denotará um corpo.

Definição A.1. Sejam A um anel comutativo com unidade e X um conjunto não vazio. Para cada função $f : X \rightarrow A$ definimos o suporte de f como o seguinte conjunto:

$$\text{sup}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0_A\}.$$

Considere $L(X) = \{f : X \rightarrow A \mid \text{sup}(f) \text{ é um conjunto finito} \}$, o conjunto das funções quase nulas de X em A .

Lema A.1. Sejam A um anel e X um conjunto não vazio. Então $L(X)$ é um A -módulo livre com as seguintes operações:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (af)(x) = af(x), \quad \forall f, g \in L(X) \text{ e } \forall a \in A.$$

Demonstração. Seja $f \in L(X)$, então existem $x_i \in X$ e $\alpha_i \in A$, com $i = 1, \dots, n$ tais que

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } x = x_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, r, \\ 0, & \text{se } x \neq x_i, \quad \forall i = \{1, \dots, r\}. \end{cases}$$

Vamos denotar $f : X \rightarrow A$ pela seguinte soma formal $\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i$.

Note ainda que para cada soma formal $\sum_{x \in X} \alpha_x x$, onde $\alpha_x \neq 0$ apenas para um número finito de $x \in X$ existe uma única função $f \in L(X)$ definida por $f(x) = \alpha_x$.

Donde obtemos a seguinte identificação:

$$L(X) \longleftrightarrow \left\{ \sum_{x \in X} \alpha_x x \mid \alpha_x \neq 0 \text{ apenas para um número finito de } x \in X. \right\}.$$

Assim dados $f = \sum_{x \in X} \alpha_x x$, $g = \sum_{x \in X} \beta_x x \in L(X)$ e $a \in A$ temos:

$$f + g = \sum_{x \in X} (\alpha_x + \beta_x) x \quad \text{e} \quad af = \sum_{x \in X} (a\alpha_x) x.$$

Vamos agora mostrar que com estas operações $L(X)$ é um A -módulo.

Com efeito, sejam

$$f = \sum_{x \in X} \alpha_x x, \quad g = \sum_{x \in X} \beta_x x, \quad h = \sum_{x \in X} \gamma_x x \in L(X) \quad \text{e} \quad a, b \in A.$$

1. Associatividade da Soma:

$$\begin{aligned} (f + g) + h &= \sum_{x \in X} (\alpha_x + \beta_x) x + \sum_{x \in X} \gamma_x x = \sum_{x \in X} ((\alpha_x + \beta_x) + \gamma_x) x \\ &= \sum_{x \in X} (\alpha_x + (\beta_x + \gamma_x)) x = \sum_{x \in X} \alpha_x x + \sum_{x \in X} (\beta_x + \gamma_x) x = f + (g + h). \end{aligned}$$

2. Elemento neutro da soma: $O = \sum_{x \in X} 0x$ é o elemento neutro de $L(X)$, com relação a adição, pois

$$O + f = \sum_{x \in X} (0 + \alpha_x) x = \sum_{x \in X} \alpha_x x = f.$$

3. Existência do inverso aditivo:

$-f = \sum_{x \in X} (-\alpha_x) x$ é o inverso aditivo de f , pois

$$f + (-f) = \sum_{x \in X} (\alpha_x - \alpha_x) x = \sum_{x \in X} 0x.$$

4. Comutatividade da soma:

$$f + g = \sum_{x \in X} (\alpha_x + \beta_x) x = f + g = \sum_{x \in X} (\beta_x + \alpha_x) x = g + f.$$

5. Distributividade com relação a soma de A :

$$(a+b)f = \sum_{x \in X} ((a+b)\alpha_x)x = \sum_{x \in X} (a\alpha_x + b\alpha_x)x = \sum_{x \in X} (a\alpha_x)x + \sum_{x \in X} (b\alpha_x)x = af + bf.$$

6. Distributividade com relação a soma de $L(X)$:

$$\begin{aligned} a(f+g) &= a\left(\sum_{x \in X} (\alpha_x + \beta_x)x\right) = \sum_{x \in X} (a(\alpha_x + \beta_x))x = \sum_{x \in X} (a\alpha_x + a\beta_x)x \\ &= \sum_{x \in X} (a\alpha_x)x + \sum_{x \in X} (a\beta_x)x = af + ag. \end{aligned}$$

7. Associatividade do produto:

$$(ab)f = \sum_{x \in X} ((ab)\alpha_x)x = \sum_{x \in X} (a(b\alpha_x))x = a \sum_{x \in X} (b\alpha_x)x = a(bf).$$

8. Elemento neutro do produto:

$$1f = \sum_{x \in X} (1\alpha_x)x = \sum_{x \in X} \alpha_x x = f.$$

Para mostrar que $L(X)$ é livre basta verificar que $\{\delta_x\}_{x \in X}$ é uma base de $L(X)$, onde para cada x , δ_x é definida da seguinte forma:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y; \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Note que para cada $x \in X$, δ_x se identifica com $1x$. Assim, dado $f = \sum_{x \in X} \alpha_x x$. Temos que

$$f = \sum_{x \in X} \alpha_x x = \sum_{x \in X} \alpha_x 1x = \sum_{x \in X} \alpha_x \delta_x,$$

onde $\alpha_x \neq 0$ apenas para um número finito de $x \in X$.

Portanto, $\{\delta_x\}_{x \in X}$ gera $L(X)$.

Considere a seguinte combinação linear nula: $\sum_{i=1}^r \alpha_i \delta_x = \sum_{x \in X} 0x$.

É fácil ver que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, r$. O que mostra que $\{\delta_x\}_{x \in X}$ é uma base para $L(X)$. \square

Proposição A.2. Sejam M, N A -módulos e $\varphi : M \rightarrow N$ um homomorfismo de A -módulos. Então para cada A -submódulo $M_1 \subset \ker \varphi$, existe um único homomorfismo de A -módulos $\bar{\varphi} : \frac{M}{M_1} \rightarrow N$ tal que $\bar{\varphi}(\bar{m}) = \varphi(m)$, $\forall m \in M$.

Demonstração. De fato, $\bar{\varphi}$ está bem definida, pois

$$\begin{aligned}\bar{m}_1 = \bar{m}_2 &\Rightarrow m_1 - m_2 \in M_1 \Rightarrow m_1 - m_2 \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(m_1 - m_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(m_1) - \varphi(m_2) = 0 \Rightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2) \Rightarrow \bar{\varphi}(\bar{m}_1) = \bar{\varphi}(\bar{m}_2).\end{aligned}$$

Note que, $\bar{\varphi}$ é A -linear. Com efeito, sejam $a \in A$ e $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \in \frac{M}{M_1}$ então

$$\bar{\varphi}(\bar{m}_1 + a\bar{m}_2) = \varphi(m_1 + am_2) = \varphi(m_1) - a\varphi(m_2) = \bar{\varphi}(\bar{m}_1) + a\bar{\varphi}(\bar{m}_2).$$

Além disso, se $\psi : \frac{M}{M_1} \rightarrow N$ é um homomorfismo de A -módulos, tal que $\psi(\bar{m}) = \varphi(m)$, $\forall m \in M$. Então

$$\psi(\bar{m}) = \varphi(m) = \bar{\varphi}(\bar{m}), \quad \forall \bar{m} \in \frac{M}{M_1}.$$

Portanto, $\psi = \bar{\varphi}$. □

Teorema A.3 (Propriedade Universal do Produto Tensorial - PUPT). *Sejam A um anel e M, N A -módulos. Então existe um par $(M \otimes_A N, t)$, onde $M \otimes_A N$ é um A -módulo e $t : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ é uma aplicação A -bilinear, que satisfaz a seguinte propriedade universal: \forall A -módulo U e $\forall B : M \times N \rightarrow U$ aplicação A -bilinear existe um único homomorfismo de A -módulos $\varphi : M \otimes_A N \rightarrow U$ tal que $\varphi \circ t = B$.*

Demonstração. Considere o A -módulo livre $L(X)$, com $X = M \times N$. Seja $S \subset L(X)$ dado por:

$$S = \{\delta_{(m+m_1, n)} - \delta_{(m, n)} - \delta_{(m_1, n)}, \delta_{(m, n+n_1)} - \delta_{(m, n)} - \delta_{(m, n_1)}, \delta_{(am, n)} - a\delta_{(m, n)}, \delta_{(m, an)} - a\delta_{(m, n)}\},$$

para $m, m_1 \in M$, $n, n_1 \in N$ e $a \in A$ quaisquer.

Seja \mathcal{R} o submódulo de $L(X)$ gerado por S . Defina o A -módulo $M \otimes_A N = \frac{L(X)}{\mathcal{R}}$ e

$$\begin{aligned}t : M \times N &\rightarrow M \otimes_A N \\ (m, n) &\mapsto m \otimes n,\end{aligned}$$

onde $m \otimes n = \overline{\delta_{(m, n)}}$.

Note que:

$$\begin{aligned}t(m + am_1, n) &= \overline{\delta_{(m+am_1, n)}} = \overline{\delta_{(m, n)}} + \overline{\delta_{(am_1, n)}} = \overline{\delta_{(m, n)}} + \overline{a\delta_{(m_1, n)}} \\ &= \overline{\delta_{(m, n)}} + a\overline{\delta_{(m_1, n)}} = t(m, n) + at(m_1, n).\end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que $t(m, n + an_1) = t(m, n) + at(m, n_1)$. E Portanto que t é A -bilinear.

Mostremos que o par $(M \otimes_A N, t)$ satisfaz a PUPT.

Seja $B : M \times N \rightarrow U$ A -bilinear. Desde que $L(X)$ é livre, podemos definir ψ na base e estender por linearidade.

$$\begin{aligned} \psi : L(X) &\rightarrow U \\ \delta_{(m,n)} &\mapsto B(m, n) \end{aligned}$$

Note que ψ é A -linear, por construção e $\mathcal{R} \subset \ker \psi$, por B ser A -bilinear.

Assim segue da proposição A.2 que existe uma única $\varphi : M \otimes_A N \rightarrow U$ A -linear tal que $\varphi \circ t = B$. \square

Corolário A.4. Se (Λ, s) for outro par que satisfaz a PUPT. Então existe um único isomorfismo de A -módulos $\psi : M \otimes_A N \rightarrow \Lambda$ tal que $\psi \circ t = s$.

Demonstração. Sabemos que $(M \times N, t)$ e (Λ, s) satisfazem a PUPT assim comutam os diagramas:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{s} & \Lambda \\ t \downarrow & \circlearrowright & \uparrow \exists! \psi \\ M \otimes_A N & & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{t} & M \otimes_A N \\ s \downarrow & \circlearrowright & \uparrow \exists! \varphi \\ \Lambda & & \end{array}$$

ou seja, $\psi \circ t = s$ e $\varphi \circ s = t$. Logo $\psi \circ t = \psi \circ \varphi \circ s = s$. Como no diagrama abaixo existe uma única h que satisfaz $h \circ s = s$.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{t} & \Lambda \\ s \downarrow & \circlearrowright & \uparrow \exists! h \\ \Lambda & & \end{array}$$

como Id_Λ e $\psi \circ \varphi$ satisfazem esta condição temos que $\psi \circ \varphi = Id_\Lambda$. Analogamente mostramos que $\varphi \circ \psi = Id_{M \otimes_A N}$. Portanto $\varphi : \Lambda \rightarrow M \otimes_A N$ é um isomorfismo com inversa ψ . \square

Proposição A.5. Seja A um anel e M um A -módulo. Então existe um isomorfismo de A -módulos $\psi : A \otimes_A M \rightarrow M$ tal que $\psi(a \otimes m) = am$.

Demonstração. Defina $s : A \times M \rightarrow M$ por $(a, m) \mapsto am$.

Dada $B : A \times M \rightarrow U$ uma aplicação A -bilinear, defina $\varphi : M \rightarrow U$ por $m \mapsto B(1, m)$.

Note que φ é A -linear, pois B é A -bilinear

Além disso,

$$\varphi \circ s(a, m) = \varphi(am) = B(1, am) = B(a, m) \Rightarrow \varphi \circ s = B.$$

Suponha que existe uma aplicação A -linear $L : M \rightarrow U$ tal que $L \circ s = B$, então como

$L \circ s(a, m) = L(am) = B(a, m)$, fazendo $a = 1_A$ temos

$$L(m) = B(1, m) = \varphi(m) \quad \forall m \in M.$$

Portanto. $L = \varphi$.

Logo, (M, s) satisfaz a PUPT, e o resultado segue do corolário A.4. □

Proposição A.6. Sejam A um anel M, N A -módulos. Denote por $N^* = Hom_A(N, A)$. Então, existe

$$\begin{aligned} \Lambda : M \otimes N^* &\rightarrow Hom_A(N, M) \\ m \otimes f &\mapsto \widehat{m \otimes f}, \end{aligned}$$

homomorfismo A -linear, onde $\widehat{m \otimes f} : N \rightarrow M$ é dado por $n \rightarrow f(n)m$.

Demonstração. Observe que $B : M \times N^* \rightarrow Hom_A(N, M)$ definida por $B(m, f)(n) = f(n)m$ é A -bilinear. Portanto segue da PUPT que existe o homomorfismo Λ requisitado. □

Apêndice B

Propriedade Universal dos diferenciais de Kähler - PUDK

Consideraremos, novamente, todos os anéis comutativos com unidade.

Definição B.1. Sejam A e R anéis. A é denominado de R -álgebra se existe $\varphi : R \rightarrow A$ homomorfismo de anéis.

Observação B.1. Se A é uma R -álgebra e M um A -módulo, então M é um R -módulo, com a mesma soma e produto por escalar definido por $r \cdot m = \varphi(r)m$.

Definição B.2. Seja A uma R -álgebra e M um A -módulo. Uma R -derivação (ou derivação sobre R) em M é um homomorfismo R -linear $\partial : A \rightarrow M$ tal que

$$\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a), \forall a, b \in A.$$

Exemplo B.1. Considere a \mathbb{R} -álgebra $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Então cada derivada parcial usual, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma \mathbb{R} -derivação em A .

Observação B.2. Seja $d : A \rightarrow M$ uma R -derivação, então $d(r) = 0, \forall r \in R$. De fato, basta notar que

$$1 = 1^2 \implies d(1) = d(1) + d(1) \implies d(1) = 0.$$

Portanto se $r \in R$, então $d(r) = rd(1) = 0$.

Observação B.3. Seja $Der_R(A, M) = \{\partial : A \rightarrow M \mid \partial \text{ é uma derivação}\}$. Quando $M = A$, denotaremos $Der_R(A, A)$ simplesmente por $Der_R(A)$.

Note que $Der(A, M)$ é um A -módulo, com as seguintes operações:

$$(\partial + \partial_1)(a) = \partial(a) + \partial_1(a) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot \partial(a) = \alpha\partial(a), \quad \forall \partial, \partial_1 \in Der(A, M) \text{ e } \forall a \in A.$$

Teorema B.1 (Propriedade Universal dos diferenciais de Kähler - PUDK). *Seja R um anel e A uma R -álgebra. Então existe um par $(\Omega_{A/R}^1, d)$, onde $\Omega_{A/R}^1$ é um A -módulo, e $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}^1$ é uma R -derivação que verifica a seguinte propriedade universal: $\forall M$ A -módulo e $\forall \partial : A \rightarrow M$ R -derivação existe um único homomorfismo $\varphi_\partial : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow M$ A -linear tal que $\varphi_\partial \circ d = \partial$.*

Demonstração. Considere o A -módulo livre $L(A)$ e $S \subset L(A)$ dado por

$$S = \{\delta_{\alpha a + \beta b} - \alpha \delta_a - \beta \delta_b, \delta_{ab} - a \delta_b - b \delta_a, \forall \alpha, \beta \in R \text{ e } a, b \in A\}.$$

Seja o submódulo $\mathcal{R} = \langle S \rangle \subset L(A)$, e considere $\Omega_{A/R}^1 = \frac{L(A)}{\mathcal{R}}$. Defina

$$\begin{aligned} d : A &\rightarrow \Omega_{A/R}^1 \\ a &\mapsto d(a) = \overline{\delta_a}. \end{aligned}$$

Vamos verificar que d é uma R -derivação. De fato, sejam $a, b \in A$ e $r \in R$ então

- $d(a + rb) = \overline{\delta_{a+rb}} = \overline{\delta_a} + r \overline{\delta_b} = d(a) + rd(b).$
- $d(ab) = \overline{\delta_{ab}} = a \overline{\delta_b} + b \overline{\delta_a} = ad(b) + bd(a).$

Mostremos que o par $(\Omega_{A/R}^1, d)$ satisfaz a PUDK.

Seja $\partial : A \rightarrow M$ uma R -derivação. Considere $\psi : L(A) \rightarrow M$ o único homomorfismo A -linear tal que $\psi(\delta_a) = \partial(a)$, definido pelo fato de $L(A)$ ser livre.

Note que $\mathcal{R} \subset \ker \psi$, por construção.

Assim segue da proposição A.2 que existe uma única $\varphi_\partial : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow M$ A -linear tal que $\varphi_\partial \circ d = \partial$. □

Corolário B.2. Se (Λ, s) for outro par que satisfaz a PUDK. Então existe um único isomorfismo de A -módulos $\psi : M \otimes_A N \rightarrow \Lambda$ tal que $\psi \circ t = s$.

Demonstração. A prova é análoga a do corolário A.4. □

Lema B.3. Seja A uma R -álgebra. A função $\varphi : Der_R(A) \rightarrow Hom(\Omega_{A/R}^1, A)$ definida por $\varphi(\partial) = \varphi_\partial$, onde φ_∂ é obtido a partir da PUDK, é um isomorfismo de A -módulos.

Demonstração. Sejam $\partial, \partial_1 \in Der_R(A)$. Observe que

$$\varphi_{\partial+\partial_1} \circ d = \partial + \partial_1 = \varphi_\partial \circ d + \varphi_{\partial_1} \circ d = (\varphi_\partial + \varphi_{\partial_1}) \circ d.$$

Portanto, como $\varphi_{\partial+\partial_1}$ é a única, com essa propriedade, segue que $\varphi_{\partial+\partial_1} = \varphi_\partial + \varphi_{\partial_1}$.

Além disso, dados $a \in A$ e $\partial \in Der_R(A)$ temos

$$\varphi_{a\partial} \circ d = a\partial = a(\varphi_\partial \circ d) = (a\varphi_\partial) \circ d.$$

E mais uma vez, como $\varphi_{a\partial}$ é única, com essa propriedade, segue que $\varphi_{a\partial} = a\varphi_\partial$.

Logo, φ é A -linear.

Mostremos agora que φ é sobrejetiva.

De fato, dado $\psi \in \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, A)$ defina $D = \psi \circ d$. Verifica-se facilmente que $D \in \text{Der}_R(A)$. Além disso, $\varphi(D) = \varphi_D = \psi$, pois φ_D é o único homomorfismo A -linear que satisfaz $\varphi_D \circ d = D$.

Note ainda que, se $\varphi_D \equiv 0$, então para todo $a \in A$ $D(a) = \varphi_D \circ d(a) = 0$, assim, $D \equiv 0$. Logo φ é injetiva.

Portanto φ é um isomorfismo. \square

Lema B.4. Para cada $\partial \in \text{Der}_R(A)$ seja $\varphi_\partial \in \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, A)$ o único homomorfismo de A -módulos tal que $\varphi_\partial \circ d = \partial$ (como no lema B.3). Então existe um único $\tilde{\varphi}_\partial \in \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1 \otimes_A M, M)$ tal que $\tilde{\varphi}_\partial(u \otimes m) = \varphi_\partial(u)m$.

Demonstração. Para cada $\partial \in \text{Der}_R(A)$ considere $B_\partial : \Omega_{A/\mathbb{K}}^1 \times M \rightarrow M$ definida por $(u, m) \mapsto \varphi_\partial(u)m$.

Observe que B_∂ é A -bilinear. Logo segue da PUPT que existe um único homomorfismo de A -módulos $\tilde{\varphi}_\partial : \Omega_{A/R}^1 \otimes_A M \rightarrow M$ tal que $\tilde{\varphi}_\partial(u \otimes m) = B_\partial(u, m) := \varphi_\partial(u)m$.

Em particular, se $u = d(a) \in \Omega_{A/R}^1$ para algum $a \in A$ então, $\tilde{\varphi}_\partial(d(a) \otimes m) = \varphi_\partial(d(a))m = \partial(a)m$. \square

Observação B.4. Segue-se da unicidade de $\varphi_\partial \in \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, A)$ que:

$$\tilde{\varphi}_\partial + \tilde{\varphi}_{\partial_1} = \tilde{\varphi}_{\partial+\partial_1} \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}_{a\partial} = a\tilde{\varphi}_\partial, \quad \forall a \in A, \partial, \partial_1 \in \text{Der}_R(A).$$

Portanto, a função $\tilde{\varphi} : \text{Der}_R(A) \rightarrow \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1 \otimes_A M, M)$ dada por $\partial \mapsto \tilde{\varphi}_\partial$ é um homomorfismo de A -módulos.

Lema B.5. Se R é um anel e A, B são R -álgebras então $A \otimes_R B$ é uma R -álgebra.

Demonstração. Como A e B são R -módulos, então $A \otimes_R B$ é um R -módulo, ou seja tem uma operação de adição.

Vamos dotar $A \otimes_R B$ de uma multiplicação.

Primeiro considere as seguintes aplicações.

$$\begin{aligned} m_A : A \times A &\rightarrow A & \text{e} & & m_B : B \times B &\rightarrow B \\ (a, a_1) &\rightarrow aa_1 & & & (b, b_1) &\rightarrow bb_1 \end{aligned}$$

as operações de multiplicação em A e B , respectivamente. Note que m_A e m_B são R -bilineares.

Assim segue da PUPT que existem únicos homomorfismos R -lineares $\tilde{m}_A : A \otimes_R A \rightarrow A$ e $\tilde{m}_B : B \otimes_R B \rightarrow B$ tais que $\tilde{m}_A(a \otimes a_1) = aa_1$ e $\tilde{m}_B(b \otimes b_1) = bb_1$, $\forall a, a_1 \in A$ e $b, b_1 \in B$.

A seguir defina:

$$\begin{aligned} h : A \otimes_R A \times B \otimes_R B &\rightarrow A \otimes_R B \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \tilde{m}_A(\alpha) \otimes \tilde{m}_B(\beta) \end{aligned}$$

Segue da R -linearidade de \tilde{m}_A e \tilde{m}_B que h também é R -bilinear.

Assim, usando mais uma vez a PUPT, existe uma única aplicação R -linear

$$H : (A \otimes_R A) \otimes_R (B \otimes_R B) \rightarrow A \otimes_R B \quad \text{tal que} \quad H((a \otimes_R a_1) \otimes_R (b \otimes_R b_1)) = aa_1 \otimes_R bb_1.$$

Note que existe um único isomorfismo de R -módulos

$$\psi : (A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) \rightarrow (A \otimes_R A) \otimes_R (B \otimes_R B) \quad \text{tal que}$$

$$\psi((a \otimes b) \otimes (a_1 \otimes b_1)) = (a \otimes a_1) \otimes (b \otimes b_1).$$

Defina então

$$\begin{aligned} \cdot : (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) &\rightarrow A \otimes_R B \\ (\xi, \eta) &\rightarrow \xi \cdot \eta := H(\psi(\xi \otimes \eta)). \end{aligned}$$

Note que $(a \otimes b) \cdot (a_1 \otimes b_1) = H(\psi((a \otimes b) \otimes (a_1 \otimes b_1))) = H((a \otimes a_1) \otimes (b \otimes b_1)) = aa_1 \otimes bb_1$.

Após cálculos explícitos, verifica-se que $A \otimes_R B$ um anel comutativo com unidade $1_A \otimes 1_B$.

Considere agora a seguinte aplicação.

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow A \otimes_R B \\ r &\rightarrow \varphi_A(r) \otimes 1_B, \end{aligned}$$

onde $\varphi_A : R \rightarrow A$ é o homomorfismo que define a estrutura de R -álgebra em A .

Note que φ é um homomorfismo de anéis. De fato,

- $\varphi(x + y) = \varphi_A(x + y) \otimes 1_B = \varphi_A(x) \otimes 1_B + \varphi_A(y) \otimes 1_B = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(xy) = \varphi_A(xy) \otimes 1_B = \varphi_A(x)\varphi_A(y) \otimes 1_B = (\varphi_A(x) \otimes 1_B) \cdot (\varphi_A(y) \otimes 1_B) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Portanto, $A \otimes_R B$ é uma R -álgebra. □

Observação B.5. Seja A uma R -álgebra. Então, $A \otimes_R A$ é um A -módulo, isto é, existe uma operação $*$: $A \times A \otimes_R A \rightarrow A \otimes_R A$ tal que $a * (x \otimes y) = ax \otimes b$.

De fato, note que $ax \otimes y = (a \otimes 1) \cdot (x \otimes y)$. Considere a aplicação R -linear $q_1 : A \rightarrow A \otimes_R A$ dado por $a \mapsto a \otimes 1_A$, e defina

$$a * \xi := q_1(a) \cdot \eta, \quad \text{onde } a \in A \text{ e } \eta \in A \otimes_R A.$$

Portanto, $A \otimes_R A$ é um A -módulo, com este produto.

Observação B.6. Se J for um ideal em $A \otimes_R A$ então J é um A -módulo, com a operação $a * j = q_1(a) \cdot j$ em J , pois $q_1(a) \in A \otimes_R A$. Além disso, $\frac{J}{J^2}$ também é um A -módulo.

Lema B.6. Se R é um anel e A uma R -álgebra. Então $\tilde{m}_A : A \otimes_R A \rightarrow A$ é um homomorfismo de R -álgebras.

Demonstração. De fato, \tilde{m}_A preserva a estrutura aditiva, pois é um homomorfismo de R -módulos.

Vamos agora verificar que \tilde{m}_A preserva a estrutura multiplicativa.

Primeiramente temos que $\tilde{m}_A(a \otimes b \cdot c \otimes d) = \tilde{m}_A(ac \otimes bd) = acbd$. Agora sejam $\xi = \sum_i a_i \otimes b_i$, $\eta = \sum_j c_j \otimes d_j$, assim $\xi \cdot \eta = \sum_{i,j} (a_i \otimes b_i) \cdot (c_j \otimes d_j)$. Então,

- $\tilde{m}_A(\xi \cdot \eta) = \tilde{m}_A(\sum_{i,j} (a_i \otimes b_i) \cdot (c_j \otimes d_j)) = \sum_{i,j} \tilde{m}_A((a_i \otimes b_i) \cdot (c_j \otimes d_j)) = \sum_{i,j} a_i c_j b_i d_j$
e
- $\tilde{m}_A(\xi) \tilde{m}_A(\eta) = \tilde{m}_A(\sum_i a_i \otimes b_i) \tilde{m}_A(\sum_j c_j \otimes d_j) = (\sum_i \tilde{m}_A(a_i \otimes b_i)) (\sum_j \tilde{m}_A(c_j \otimes d_j)) = (\sum_i a_i b_i) (\sum_j c_j d_j) = \sum_{i,j} a_i c_j b_i d_j$.

Note ainda que $\tilde{m}_A \circ \varphi = \varphi_A$, onde $\varphi_A : R \rightarrow A$ é o homomorfismo que define a estrutura de R -álgebra em A e $\varphi : R \rightarrow A \otimes_R A$ dado por $r \mapsto \varphi_A(r) \otimes 1_A$ define a estrutura de R -álgebra em $A \otimes_R A$.

Assim concluímos que \tilde{m}_A é um homomorfismo de R -álgebras. □

Lema B.7. Sejam A uma R -álgebra e $I = \ker(\tilde{m}_A)$, onde $\tilde{m}_A : A \otimes A \rightarrow A$ é dado por $a \otimes b \mapsto ab$. Então

$$e : A \longrightarrow \frac{I}{I^2}$$

$$a \longmapsto \frac{1_A \otimes a - a \otimes 1_A}{I^2}$$

é uma R - derivação.

Demonstração. Observe que e esta bem definida, pois

$$\tilde{m}_A(1_A \otimes a - a \otimes 1_A) = \tilde{m}_A(1_A \otimes a) - \tilde{m}_A(a \otimes 1_A) = a - a = 0.$$

Sejam $r \in R$ e $a, a_1 \in A$ assim temos:

$$\begin{aligned}
 e(ra + a_1) &= 1 \otimes (ra + a_1) - (ra + a_1) \otimes 1 + I^2 \\
 &= 1 \otimes ra + 1 \otimes a_1 - ra \otimes 1 - a_1 \otimes 1 + I^2 \\
 &= r \otimes a + 1 \otimes a_1 - ra \otimes 1 - a_1 \otimes 1 + I^2 \\
 &= r(1 \otimes a - a \otimes 1) + 1 \otimes a_1 - a_1 \otimes 1 + I^2 = re(a) + e(a_1).
 \end{aligned}$$

Portanto, e é R -linear.

Considerando $a, b \in A$ temos,

$$e(ab) = \overline{1 \otimes ab - ab \otimes 1}. \quad (\text{B.1})$$

Além disso,

$$ae(b) + be(a) = \overline{a(1 \otimes b - b \otimes 1) + b(1 \otimes a - a \otimes 1)} \quad (\text{B.2})$$

$$= \overline{a \otimes b - ab \otimes 1 + b \otimes a - ab \otimes 1}. \quad (\text{B.3})$$

Assim fazendo a diferença entre os representantes das classes em (B.1) e (B.3), obtemos:

$$1 \otimes ab - a \otimes b + ab \otimes 1 - b \otimes a = (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \in I^2.$$

Portanto, e é uma R -derivação. □

Teorema B.8. *Existe um único isomorfismo de A -módulos $\psi : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow \frac{I}{I^2}$ tal que $\psi \circ d = e$ onde $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}^1$ é a derivação universal.*

Demonstração. Como e é uma R -derivação segue da PUDK relativa ao par $(d, \Omega_{A/R}^1)$ que existe um único homomorfismo de A -módulos $\psi : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow \frac{I}{I^2}$ tal que $\psi \circ d = e$.

Considere $T := A \times \Omega_{A/R}^1$, cujo conjunto suporte é $A \times \Omega_{A/R}^1$ e a adição é definida via produto direto, isto é, $(a, u) + (a_1, u_1) = (a + a_1, u + u_1)$.

Defina a seguinte multiplicação em T ,

$$(a, u) \cdot (a_1, u_1) = (aa_1, au_1 + a_1u).$$

Verifica-se que $(T, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade $(1_A, 0)$.

A seguir defina

$$\begin{aligned}
 \ell : A \times A &\longrightarrow T \\
 (a, b) &\longmapsto (ab, ad(b))
 \end{aligned}$$

Note que ℓ é R -bilinear. De fato,

$$\begin{aligned}\ell(a + ra_1, b) &= ((a + ra_1)b, (a + ra_1)d(b)) = (ab + ra_1b, ad(b) + ra_1d(b)) \\ &= (ab, ad(b)) + (ra_1b, ra_1d(b)) = \ell(a, b) + r(a_1b, a_1d(b)) \\ &= \ell(a, b) + r\ell(a_1, b), \quad \forall r \in R, a, a_1, b \in A.\end{aligned}$$

De maneira análoga verifica-se que:

$$\ell(a, b + rb_1) = r\ell(a, b) + \ell(a, b_1), \quad \forall r \in R, a, b, b_1 \in A.$$

Portanto, pela PUPT existe uma única aplicação R -linear $L : A \otimes_R A \rightarrow T$ tal que $a \otimes b \mapsto (ab, ad(b))$.

Verifica-se ainda que L é um homomorfismo de R -álgebras.

Note que T é um A -módulo com a operação $a \cdot (x, u) = (ax, au)$.

Vamos agora verificar que $L : A \otimes_R A \rightarrow T$ é uma aplicação A -linear.

Como L é R -linear preserva a estrutura aditiva.

Além disso, se $a \in A$ e $\xi = \sum_i x_i \otimes u_i$ em $A \otimes_R A$. Então

$$\begin{aligned}L(a\xi) &= L\left(\sum_i ax_i \otimes y_i\right) = \sum_i L(ax_i \otimes y_i) = \sum_i (ax_i y_i, ax_i d(y_i)) \\ &= \sum_i a(x_i y_i, x_i d(y_i)) = a\left(\sum_i (x_i y_i, x_i d(y_i))\right) = a\left(\sum_i L(x_i \otimes y_i)\right) = aL(\xi).\end{aligned}$$

Como $I = \ker(\tilde{m}_A) \subset A \otimes_R A$ é um submódulo (portanto um A módulo). Então podemos considerar o homomorfismo de A -módulos $L_1 = L|_I : I \rightarrow T$ definida por $\eta \mapsto L(\eta)$.

Observe que dado $\eta \in I$ existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in A$ tal que $\eta = \sum_i \alpha_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)$

De fato, considere $\eta = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \in I \subset A \otimes_R A$. Como $\eta \in I$, então

$$0 = \tilde{m}_A(\eta) = \sum_i \alpha_i \beta_i \in A.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i = \sum_i \alpha_i(1 \otimes \beta_i) = \sum_i \alpha_i(1 \otimes \beta_i - \beta_i \otimes 1) + \sum_i \alpha_i(\beta_i \otimes 1) \\ &= \sum_i \alpha_i(1 \otimes \beta_i - \beta_i \otimes 1) + \left(\sum_i \alpha_i \beta_i\right) \otimes 1 = \sum_i \alpha_i(1 \otimes \beta_i - \beta_i \otimes 1) + 0 \otimes 1 \\ &= \sum_i \alpha_i(1 \otimes \beta_i - \beta_i \otimes 1).\end{aligned}$$

Logo, dado $\eta = \sum_i \alpha_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) \in I$, temos que $L(\eta) = (0, \sum_i \alpha_i dx_i)$.

De fato,

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \sum_i a_i(L(1 \otimes x_i) - L(x_i \otimes 1)) = \sum_i a_i((x_i, dx_i) - (x_i, 0)) \\ &= \sum_i a_i(0, dx_i) = \sum_i (0, a_i dx_i) = (0, \sum_i a_i dx_i). \end{aligned}$$

A seguir considere $\alpha \in I^2$. Assim $\alpha = \sum_j \eta_j \gamma_j$, onde $\eta_i, \gamma_i \in I$. Logo,

$$\begin{aligned} L_1(\alpha) &= \sum_j L_1(\eta_j \gamma_j) = \sum_j L(\eta_j \gamma_j) = \sum_j L(\eta_j) \cdot L(\gamma_j) \\ &= \sum_j (0, \theta_j) \cdot (0, \theta'_j) = \sum_j (0, 0) = (0, 0). \end{aligned}$$

Assim $I^2 \subset \ker(L)$. Portanto existe um único homomorfismo de A -módulos $\tilde{L}_1 : \frac{I}{I^2} \rightarrow T$ tal que $\tilde{L}_1(\eta + I^2) = L_1(\eta) = L(\eta)$.

Considere a aplicação A -linear $p_2 : T \rightarrow \Omega_{A/R}^1$ dada por $(a, u) \mapsto u$, e defina a aplicação $\varphi : \frac{I}{I^2} \rightarrow \Omega_{A/R}^1$ por $\varphi = p_2 \circ \tilde{L}_1$, que é A -linear, pois é composta de aplicações A -lineares.

Finalmente vamos mostrar que $\psi \circ \varphi = Id_{\frac{I}{I^2}}$ e $\varphi \circ \psi = Id_{\Omega_{A/R}^1}$.

De fato, seja $\eta \in \frac{I}{I^2}$. Assim $\eta = \overline{\sum_i a_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(\eta) &= \sum_i a_i \psi \circ \varphi(\overline{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1}) = \sum_i a_i \psi(\varphi(\overline{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1})) \\ &= \sum_i a_i \psi(p_2(\tilde{L}_1(\overline{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1}))) = \sum_i a_i \psi(p_2(L(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1))) \\ &= \sum_i a_i \psi(p_2(0, dx_i)) = \sum_i a_i \psi(dx_i) = \sum_i a_i e(x_i) = \sum_i a_i \overline{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1} \\ &= \overline{\sum_i a_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)} = \eta. \end{aligned}$$

Para mostrar que $\varphi \circ \psi = Id_{\Omega_{A/R}^1}$ observemos que, $\Omega_{A/R}^1$ é gerado como A -módulo por $\{da\}_{a \in A}$, onde $da = \overline{\delta_a}$, desde que $\{\delta_a\}_{a \in A}$ dado por

$$\delta_a(b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b = a \\ 0, & \text{se } b \neq a, \end{cases}$$

gera $L(A)$ como A -módulo como na demonstração do lema A.1.

Assim se $\eta \in \Omega_{A/\mathbb{K}}^1$ então $\eta = \sum_i \alpha_i \overline{\delta_{a_i}} = \sum_i \alpha_i da_i$. Então como φ e ψ são A -lineares precisamos verificar apenas que $\varphi \circ \psi(da) = da$.

$$\text{Com efeito, } \varphi \circ \psi(da) = \varphi(e(a)) = \varphi(\overline{1 \otimes a - a \otimes 1}) = da$$

$$\text{Então, } \varphi \circ \psi(\eta) = \eta.$$

E portanto $\psi : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow \frac{I}{I^2}$ é um isomorfismo tal que $\psi \circ d = e$. □

Tendo em mente que M é um B -módulo com o produto $b \cdot m = \psi^{-1}(b)m$, e que $\partial \circ \psi^{-1}$ é uma R -derivação em B , a PUDK do par $(d_B, \Omega_{B/R}^1)$ garante que $\exists! L : \Omega_{B/R}^1 \rightarrow M$ B -linear tal que $L \circ d_B = \partial \circ \psi^{-1}$.

Note que

$$L(a \cdot u) = L(\psi(a)u) = \psi(a) \cdot L(u) = \psi^{-1}(\psi(a))L(u) = aL(u), \quad \forall a \in A \text{ e } u \in \Omega_{B/R}^1.$$

Portanto, L é um homomorfismo de A -módulos.

Vamos agora mostrar que L faz o diagrama acima comutar, pois

$$L \circ d_B = \partial \circ \psi^{-1} \Rightarrow L \circ d_B \circ \psi = \partial \Rightarrow L \circ d = \partial.$$

Além disso L é a única aplicação com esta propriedade, com efeito, se $T : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow M$ satisfaz $T \circ d = \partial$, então

$$T \circ d = \partial \Rightarrow T \circ d_B \circ \psi = \partial \Rightarrow T \circ d_B = \partial \circ \psi^{-1}.$$

Assim $T = L$ pela unicidade de L , na PUDK no par $(d_B, \Omega_{B/R}^1)$, segundo o diagrama acima. □

Referências Bibliográficas

- [1] ARTIN, M., *Algebra*. Pearson, Second Edition, 2010.
- [2] ATIYAH, M. F.; MACDONALDS, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.
- [3] BORN, M.; HEISENBERG, W.; JORDAN, P., *On quantum mechanics II*. Zs. Phys 35, 557-615 (1926).
- [4] BRUMATTI, P.; SIMIS, A., *The Module of Derivations of a Stanley-Reisner Ring*. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 23, No. 5, 1309-1318 (1995).
- [5] DO CARMO, M. P., *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1992.
- [6] CARTAN E., *Les espaces à connexion conforme*. Ann. Soc. Polon. Math., Vol. 2, 171-221 (1924).
- [7] CARTAN E., *Sur les variétés à connexion projective*. Bull. Soc. Math. France, Vol. 52, 205-241 (1924).
- [8] CHRISTOFFEL, E. B., *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*. Journal für die reine u. angew. Math. (Crelle) 70, 46-70; Ges. math. Abh. I, 352-377 (1869).
- [9] CONNES, A., *Non-commutative differential geometry*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 62, 257-360, (1985).
- [10] CONNES, A., *Non-commutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [11] CUNTZ, J.; QUILLEN, D., *Algebra Extensions and Nonsingularity*. J. Amer. Math. Soc. 8 (2) 251-89, (1995).
- [12] EHRESMANN, C., *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable*, C. R. Acad. Sc. t. 216, 628-630 (1943).
- [13] EHRESMANN, C., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, CBRM, Bruxelles, 29-55 (1950).

- [14] EISENBUD, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Math. 150, Springer, New York, 1995.
- [15] ERIKSEN, E., *Graded D-modules over Monomial Curves*. P.h.D. thesis, University of Oslo, 2000.
- [16] GOMES, R. T., *Conexões e Curvatura: Uma abordagem algébrica*. Dissertação de mestrado, DM-UFPE, 2009.
- [17] GRILLET, P. A., *Abstract Algebra*. Springer, Second Edition, 2007.
- [18] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry*. Graduate texts in Math. 52, Springer, New York, 1977.
- [19] HENRIQUE, M. L., *Derivações e Campo de Vetores*. Dissertação de Mestrado, DM-UFPE, 2001.
- [20] JUNIOR N.R., *Conexões e Transporte Paralelo: Abordagem Computacional*. Dissertação de mestrado, DM-UFPE, 2010.
- [21] KOSZUL, J. L., *Homologie et cohomologie des algebres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, Vol. 78, 65-127 (1950).
- [22] KRÄHMER, U., *Dirac Operators, Lecture 1: Projective Modules and Connections*, IPM Tehran 19 (2009).
- [23] LEVI-CIVITA, M. M. T.; RICCI, G., *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. B 54: 125-201 (1901).
- [24] LIMA, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [25] LIMA E. L., *Variedades Diferenciáveis*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2011.
- [26] MACEDO, R. B. C., *A igualdade de Auslander-Buchsbaum*. Monografia, UFPB 2011.
- [27] MATSUMURA, H., *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [28] ROCHA, V. M. T., *Cohomologia de de Rham via derivações*. Monografia, UFPB 2010.
- [29] ROJAS, J; MENDOZA, R., *A note on the existence of connections on modules*. (em preparação)

- [30] ROJAS, J., *Notas de Aula de Tópicos especiais de Álgebra II*. UFPB, 2012.
- [31] SWAN, R. G., *Vector Bundles and Projective Modules*. Trans. Amer. Math. Soc., 105 (2), 264-277 (1962).