

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade em conjuntos de  
funções reais que atingem o máximo  
em um único ponto

por

Tony Kleverton Nogueira

2014

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Lineabilidade em conjuntos de funções reais que atingem o máximo em um único ponto

por

**Tony Kleverson Nogueira**

sob a orientação de

**Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2014

João Pessoa - PB

N778I Nogueira, Tony Kleverson.  
Lineabilidade em conjuntos de funções reais que atingem o  
máximo em um único ponto / Tony Kleverson Nogueira.- João  
Pessoa, 2014.  
64f.  
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Lineabilidade. 3. Funções reais  
contínuas - conjuntos. 4. Teorema de Borsuk-Ulan.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Lineabilidade em conjuntos de funções reais que atingem o máximo em um único ponto

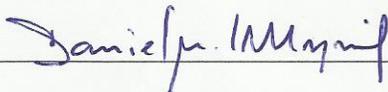
por

Tony Kleverton Nogueira

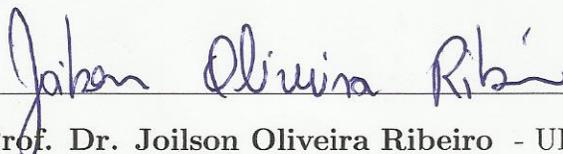
Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

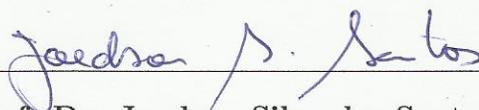
Aprovada em 17 de março de 2014, por:



Prof. Dr. Daniel Marino Pellegrino - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro - UFBA



Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Jeová Deus pelas bênçãos que colocou em minha vida, pela força para suportar as dificuldades, pelos amigos que conquistei e agora por esse título de mestre.

Agradeço a minha mãe, Cleonice Nogueira, razão do meu esforço, pelo apoio incondicional, pelas orações e palavras de incentivo que me deixaram tranquilo diante das adversidades. Agradeço também à toda minha família.

Agradeço a minha namorada Mariana Maia, por ter sido: meu apoio, minha motivação, meu juízo e falta dele, meu espelho, minha flor. Poderia dizer que foi a melhor coisa que a matemática me deu, mas não, foi a melhor que já me aconteceu.

Agradeço aos meus professores, especialmente ao meu orientador Daniel Pellegrino, pela excelente orientação, disposto a ajudar sempre que precisei. Agradeço aos meus professores da graduação, em especial a Flávio Falcão pelo incentivo em cursar o mestrado.

Agradeço aos meus amigos, Mônica, Wanderley, Ginaldo, Eudes, Luan, Gérsica, Wanderson, Myllena, Renato, Lili, Luis Alba, José Carlos, Gustavo, Esteban, Kely, Tuanny, Eniese, Marcius, Rayssa, Ricardo Pinheiro, Ricardo Burity, Geilson, Ronaldo, Nacib, Igor, Everton, Moisés, Hudson, Lucas, Carlos, João Bento, Diego, Sr Mariano, Luan, Wasteney e todos aqueles que convivi nesse período, por terem tornado tudo mais fácil. São mais valiosos do que qualquer título que eu conquistei ou venha a conquistar. Agradeço ao Edno pelas caronas.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

*À Cleonice e Mariana*

# Resumo

Neste trabalho estudamos o conceito de lineabilidade e suas recentes aplicações a alguns conjuntos de funções reais contínuas. Esses conjuntos são formados por funções que atingem o máximo absoluto em um único ponto de seu domínio. No primeiro capítulo consideramos a reta e seus intervalos fechados e semifechados como domínios para essas funções. No segundo capítulo estudamos resultados sobre domínios mais gerais que os do capítulo anterior. No terceiro capítulo apresentamos a teoria de grau de aplicações contínuas de  $S^n$  em  $S^n$  como ferramenta para demonstrarmos o Teorema de Borsuk-Ulam. Este resultado é usado de modo crucial no Capítulo 2.

**Palavras - chave:** Lineabilidade, funções que atingem o máximo em um único ponto, Teorema de Borsuk-Ulam.

# Abstract

In this paper we study the concept of lineability and its recent applications to some sets of continuous real functions. These sets are formed by functions that achieve the absolute maximum in a single point of its domain. In the first chapter we consider the real line and its closed and semi-closed domains as intervals for these functions. In the second chapter we study more general results than those in the previous chapters. In the third chapter we present the theory of degree of continuous applications of  $S^n$  in  $S^n$  as a tool to demonstrate the Borsuk-Ulam theorem. This result is used a crucial tool in Chapter 2.

**Keywords:** Lineability, functions that reach their maximum at a single point, Theorem of Borsuk-Ulam.

# Sumário

Notações	9
Introdução	11
<b>1 Lineabilidade em conjuntos de funções reais com domínios reais</b>	<b>13</b>
1.1 Lineabilidade	13
1.2 A lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$ e $\widehat{C}(\mathbb{R})$	14
1.3 A não-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 1]$	17
1.4 A lineabilidade de $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$	21
<b>2 Lineabilidade em conjuntos de funções reais definidas em espaços topológicos</b>	<b>32</b>
2.1 Generalizando a 2-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$	32
2.2 Generalizando a 2-lineabilidade de $\widehat{C}(\mathbb{R})$	35
2.3 Generalizando a não-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 1]$	37
<b>3 O Teorema de Borsuk-Ulam</b>	<b>47</b>
3.1 Homotopia	47
3.2 Simplexo Geométrico	48
3.3 O grau de uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$	50
3.4 O grau de uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^n$	51
3.5 $T$ -aproximação linear	58

3.6 Teorema antipodal de Borsuk . . . . .	59
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Notações

Seja  $X$  um espaço topológico. Seja  $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$  o conjunto das funções definidas de  $X$  em  $\mathbb{R}$ . Para  $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ , estabelecemos as seguintes notações:

- $C(X) := \{f \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) : f \text{ é contínua}\}$
- $\widehat{C}(X) := \{f \in C(X) : f \text{ atinge o máximo em um único ponto } t \in X\}$
- $M(f) := \sup_{t \in X} f(t)$
- $m(f) := \inf_{t \in X} f(t)$
- $M_f := \{t \in X : f(t) = M(f)\}$
- $m_f := \{t \in X : f(t) = m(f)\}$
- $\|f\| := M(|f|) = \sup_{t \in X} |f(t)| = \|f\|_\infty$
- $\text{span}\{f, g\} := \text{Subconjunto de } \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \text{ gerado por } f \text{ e } g \text{ com coeficientes em } \mathbb{R}$
- $\#X := \text{Cardinalidade de } X$
- $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  (Norma Euclidiana)
- $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_+^* := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$
- $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$
- $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < r\}$
- $\overline{B(a, r)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 \leq r\}$

- $\text{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$

# Introdução

Nos últimos anos, temos visto um crescente interesse na busca de estruturas algébricas dentro de determinados subconjuntos de espaços vetoriais. Uma boa forma de investigar quão “interessante” é um subconjunto é encontrar subespaços vetoriais  $n$ -dimensionais ou de dimensão infinita dentro de tais subconjuntos. Ao estudo de conjuntos com essa propriedade dá-se o nome de *lineabilidade*.

Um conjunto  $M$  em um espaço topológico  $X$  é dito  $n$ -lineável (respectivamente, lineável) em  $X$  se  $M \cup \{0\}$  contém um subespaço  $Y$  de  $X$  tal que  $\dim Y = n$  (respectivamente,  $\dim Y = \infty$ ).

O termo lineabilidade começou a ser usado recentemente, aparecendo pela primeira vez no artigo *On lineability of sets of continuous functions* de Gurariy e Quarta [4], uma das referências principais desse trabalho.

Dentro do espaço das funções contínuas da reta na reta, olhemos para aquelas que atingem um máximo em um único ponto. Será que este subconjunto contém alguma estrutura linear? E se pudéssemos provar que esse conjunto unido com a função nula contém um subespaço 2-dimensional? Este é apenas um dos problemas abordados neste trabalho.

Nosso objetivo é o estudo da lineabilidade de conjuntos de funções reais contínuas que atingem o máximo absoluto em um único ponto de seu domínio. Tais domínios são a reta, intervalos da reta e certos espaços topológicos munidos de algumas propriedades.

Em 2004, Gurariy e Quarta, no artigo supracitado, provaram que o conjunto das funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que atingem o máximo em um único ponto, o qual denotaremos por  $\widehat{C}(\mathbb{R})$ , é 2-lineável dentro do espaço  $C(\mathbb{R})$ . Provaram ainda que se restringirmos nosso domínio a intervalos semifechados, o conjunto  $\widehat{C}([a, b])$  será também 2-lineável, ao

passo que o conjunto  $\widehat{C}([a, b])$  não é. Estes resultados serão estudados no nosso primeiro capítulo. Ainda no Capítulo 1, veremos que o subconjunto  $\widehat{C}_0(\mathbb{R}) \subset \widehat{C}(\mathbb{R})$  das funções que tendem para zero no infinito é 2-lineável, não podendo ser  $n$ -lineável para  $n \geq 3$ .

Em 2013, Botelho, Cariello, Fávaro, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda em seu artigo *On very non-linear subsets of continuous functions* [2] generalizaram os resultados de Gurariy e Quarta citados inicialmente, considerando funções definidas em domínios bem mais gerais que a reta ou intervalos dela. Nesses novos conjuntos foi investigada a existência de subespaços  $n$ -dimensionais em vez de 2-dimensionais. Esses resultados generalizados serão estudados no segundo capítulo desse trabalho que, além disso, trará um exemplo de lineabilidade de conjunto em espaço de dimensão infinita.

Para os resultados apresentados no Capítulo 2, Botelho *et al* abordaram a natureza topológica do problema, em vez do uso das técnicas analíticas, que foram empregadas por Gurariy e Quarta para obtenção dos seus resultados. Seguindo por este caminho, faremos uso de um importante teorema de topologia, o Teorema de Borsuk-Ulam, ao qual dedicaremos o terceiro e último capítulo deste trabalho, que terá por objetivo demonstrar esse teorema, esboçando a teoria necessária para isso, tendo por referência o livro de J. Dugundji ([3]).

# Capítulo 1

## Lineabilidade em conjuntos de funções reais com domínios reais

Este capítulo introduz a teoria de lineabilidade trazendo suas definições e terminologias. Aqui veremos essa teoria aplicada a alguns conjuntos de funções reais. Esses conjuntos são compostos por funções com uma característica em comum, atingem o máximo absoluto apenas uma única vez em seu domínio. Os domínios em questão são a reta e intervalos dela.

### 1.1 Lineabilidade

Esta seção é dedicada a teoria de lineabilidade. A seguir, apresentamos as definições que usaremos em todo o trabalho.

**Definição 1.1.** *Um conjunto  $M$  em um espaço vetorial topológico  $X$  é dito:*

- (1)  *$n$ -lineável em  $X$ , se  $M \cup \{0\}$  contém um subespaço vetorial  $Y$ , tal que  $\dim Y = n$ .*
- (2) *lineável em  $X$ , se  $M \cup \{0\}$  contém um subespaço vetorial  $W$ , tal que  $\dim W = \infty$ .*

**Definição 1.2.** *Sejam  $X$  um espaço vetorial topológico e  $M \subseteq X$  um conjunto. O número*

$$\lambda(M) = \max\{\dim Y : Y \subseteq M \cup \{0\} \text{ é subespaço de } X\}$$

*é chamado de a lineabilidade de  $M$ .*

**Observação 1.1.** É válido ressaltar que  $\lambda(M)$  pode não existir.

Por exemplo, se  $\mathcal{P}$  é o espaço vetorial dos polinômios de grau  $n \in \mathbb{N}$ , considere os inteiros positivos

$$j_1 \leq k_1 < j_2 \leq k_2 < \cdots \leq k_m < j_{m+1} \leq \cdots$$

tais que  $k_m - j_m = m$  e o subconjunto de  $\mathcal{P}$

$$M = \bigcup_m \left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que  $\lambda(M) \geq n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , mas  $\lambda(M) \neq \dim(\mathbb{N})$  pois os subespaços

$$\left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

$m \in \mathbb{N}$ , são dois a dois disjuntos e finitamente gerados. Assim,  $M$  é  $n$ -lineável para todo  $n \in \mathbb{N}$ , mas não é lineável, ou seja,  $\lambda(M)$  não é atingido.

**Definição 1.3.** O conjunto  $M \subseteq X$  é dito ser totalmente não-lineável, ou simplesmente, não-lineável, se  $\lambda(M) \leq 1$ .

## 1.2 A lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$ e $\widehat{C}(\mathbb{R})$

Aqui,  $\widehat{C}[0, 2\pi)$  representa o conjunto das funções contínuas,  $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , que atingem o máximo em um único ponto de seu domínio. O próximo teorema demonstrará a 2-lineabilidade desse conjunto. Como o leitor verá, essa demonstração tem um aspecto construtivo, pois esboçaremos a base do subespaço 2-dimensional.

**Teorema 1.1.**  $\widehat{C}[0, 2\pi)$  é 2-lineável.

**Demonstração:** Vamos considerar as funções trigonométricas  $\sin x$  e  $\cos x$  definidas no intervalo semiaberto  $[0, 2\pi)$ . Note que ambas atingem o valor máximo em um único ponto de  $[0, 2\pi)$  e são linearmente independentes. Mostraremos que qualquer combinação não trivial, também, atinge o máximo em um único ponto.

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \cos x + \beta \sin x$  uma combinação linear não trivial. Sabemos que para qualquer ponto  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , existe  $\theta \in [0, 2\pi)$ , tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin \theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta \cos x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} x \\
 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \theta \cos x + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} x) \\
 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\theta - x) \\
 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(x - \theta).
 \end{aligned}$$

Uma vez que a função cosseno admite um único ponto de máximo em  $[-\theta, 2\pi - \theta]$ , segue que  $\alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x$ , para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , admite um único ponto de máximo em  $[0, 2\pi)$ . Portanto, tomamos  $\operatorname{span}\{\operatorname{sen} x, \cos x\} \setminus \{0\} \subset \widehat{C}[0, 2\pi)$  e concluímos a demonstração. ■

A partir do teorema acima temos a 2-lineabilidade de  $\widehat{C}[a, b)$  para quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , basta compor cada função  $f \in \widehat{C}[0, 2\pi)$  com a função  $g : [a, b) \rightarrow [0, 2\pi)$ ,  $g(x) = \frac{2\pi(x-a)}{b-a}$ .

O próximo teorema nos dará a 2-lineabilidade de  $\widehat{C}(\mathbb{R})$ , conjunto das funções contínuas,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que atingem o máximo apenas uma vez. Aqui, também exibiremos a base do subespaço 2-dimensional.

**Teorema 1.2.**  $\widehat{C}(\mathbb{R})$  é 2-lineável.

**Demonstração:** Considere as funções  $x(t), y(t)$  definidas por

$$x(t) := \mu(t) \cos(4\arctg |t|)$$

e

$$y(t) := \mu(t) \operatorname{sen}(4\arctg |t|),$$

onde  $\mu$  é uma função contínua definida em  $\mathbb{R}$  dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } t \leq 0, \\ 1, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Note que  $x(t)$  e  $y(t)$  são linearmente independentes. De fato, considere  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  o intervalo de definição da função  $\operatorname{tg} x$ . Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e

$$h(t) := \alpha x(t) + \beta y(t)$$

uma combinação linear não trivial de  $x(t)$  e  $y(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Note que se  $h = 0$  então

$$\alpha \mu(t) \cos(4\arctg |t|) + \beta \mu(t) \operatorname{sen}(4\arctg |t|) = 0$$

ou ainda

$$\mu(t)(\alpha \cos(4\arctg |t|) + \beta \text{sen}(4\arctg |t|)) = 0.$$

Como  $\mu(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\alpha \cos(4\arctg |t|) + \beta \text{sen}(4\arctg |t|) = 0.$$

Mostremos que  $\alpha = \beta = 0$ . Se  $t = 0$ , então

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cos(4\arctg 0) + \beta \text{sen}(4\arctg 0) \\ &= \alpha \cos 0 + \beta \text{sen} 0 \\ &= \alpha \cdot 1 + 0 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Se  $t = \sqrt{3}$ , então

$$\begin{aligned} 0 &= \beta \text{sen}(4\arctg \sqrt{3}) \\ &= \beta \text{sen} \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}(\frac{4\pi}{3}) \neq 0$  segue que  $\beta = 0$ . Desse modo,  $x(t)$  e  $y(t)$  são linearmente independentes. Como  $\cos(4\arctg |t|) \leq 1$ ,  $\text{sen}(4\arctg |t|) \leq 1$  e  $\mu(t) \geq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , segue que  $x(t) \leq \mu(t)$  e  $y(t) \leq \mu(t)$ . Sendo  $\mu(t) \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são limitadas superiormente por 1.

Mostremos que  $x(t)$  e  $y(t)$  atingem o valor 1 apenas em um único ponto. Para  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} x(0) &= 1 \cdot \cos(4\arctg 0) \\ &= \cos 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, vemos que  $t = 0$  é ponto de máximo. Para  $t \neq 0$ ,  $4\arctg |t| \in (0, 2\pi)$ , logo  $\cos(4\arctg |t|) < 1$ . Como  $\mu(t) \leq 1$  segue que  $x(t) < 1$ , para todo  $t \neq 0$ . Daí, vemos que  $x(t) \in \widehat{C}(\mathbb{R})$ . Quanto a  $y(t)$ , tome  $t = \text{tg} \frac{\pi}{8}$  e note que

$$\begin{aligned} y\left(\text{tg} \frac{\pi}{8}\right) &= 1 \cdot \text{sen}(4\arctg(\text{tg} \frac{\pi}{8})) \\ &= 1 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo,  $t = \text{tg} \frac{\pi}{8}$  é ponto de máximo. Para  $t < 0$ ,  $\text{sen}(4\arctg |t|) \leq 1$  e  $\mu(t) < 1$ . Logo,  $y(t) < 1$ . Para  $t \geq 0$ , temos  $\mu(t) = 1$  e  $4\arctg t \in [0, 2\pi)$ . Como  $\text{sen} x = 1$  em  $[0, 2\pi)$

apenas quando  $x = \frac{\pi}{2}$ , segue que  $y(t) = \text{sen}(4\text{arctg}t) = 1$  somente quando  $4\text{arctg}t = \frac{\pi}{2}$ . Portanto, pela bijetividade da função  $\text{arctg}t$ , segue que  $t = \text{tg}\frac{\pi}{8}$  é o único ponto de máximo de  $y(t)$ .

Agora mostremos que qualquer combinação linear não trivial de  $x(t)$  e  $y(t)$  possui um único ponto de máximo.

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha x(t) + \beta y(t)$  uma combinação linear não trivial. Já sabemos que para qualquer par  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , existe  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{sen} \theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha x(t) + \beta y(t) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta \cdot x(t) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{sen} \theta \cdot y(t) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta \cdot \mu(t) \cos(4\text{arctg}|t|) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{sen} \theta \cdot \mu(t) \text{sen}(4\text{arctg}|t|) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \mu(t) \cdot (\cos \theta \cdot \cos(4\text{arctg}|t|) + \text{sen} \theta \cdot \text{sen}(4\text{arctg}|t|)) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \mu(t) \cdot \cos(\theta - 4\text{arctg}|t|) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \mu(t) \cdot \cos(4\text{arctg}|t| - \theta). \end{aligned}$$

Note que para  $t \geq 0$ ,  $\mu(t) = 1$  e  $4\text{arctg}t \in [0, 2\pi)$ . Uma vez que a função  $\cos x$  admite um único ponto de máximo em  $[-\theta, 2\pi - \theta)$ , segue que

$$\alpha x(t) + \beta y(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(4\text{arctg}t - \theta)$$

atinge um único ponto de máximo quando  $t \geq 0$ . Para  $t < 0$ ,  $\mu(t) = e^t < 1$ , então

$$\begin{aligned} \alpha x(t) + \beta y(t) &= \mu(t) \cdot (\alpha \cos(4\text{arctg}|t|) + \beta \text{sen}(4\text{arctg}|t|)) \\ &< \alpha \cos(4\text{arctg}|t|) + \beta \text{sen}(4\text{arctg}|t|) \\ &= \alpha x(-t) + \beta y(-t), \end{aligned}$$

ou seja, o máximo não é atingido. Portanto, qualquer combinação não trivial  $\alpha x(t) + \beta y(t)$  pertence a  $\widehat{C}(\mathbb{R})$ . Isso prova que  $\text{span}\{x(t), y(t)\} \setminus \{0\} \subset \widehat{C}(\mathbb{R})$  e com isso concluímos a demonstração. ■

### 1.3 A não-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 1]$

Nesta seção, estudaremos a lineabilidade de  $\widehat{C}[0, 1]$ , conjunto das funções contínuas,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , que atingem o valor máximo em um único ponto de  $[0, 1]$ . Neste estudo,

usaremos fortemente as noções de ignorabilidade e de ponto de barreira introduzidos por Gurariy e Quarta, em [4]. Antes de apresentar tais conceitos, fixamos as seguintes notações: dado  $X$  um espaço topológico qualquer e  $f \in C(X)$ , denotamos

- $M(f) := \sup_{t \in X} f(t)$ ;
- $m(f) := \inf_{t \in X} f(t)$ ;
- $M_f := \{t \in X : f(t) = M(f)\}$  ;
- $m_f := \{t \in X : f(t) = m(f)\}$ .

Ao longo deste trabalho consideraremos para cada  $f \in C(X)$  a norma

$$\|f\| := \sup_{t \in X} |f(t)|,$$

caso necessário definiremos a norma utilizada. Note que de acordo com as notações fixadas acima,  $\|f\| = M(|f|)$ .

**Definição 1.4.** *Sejam  $f_1, \dots, f_n \in C[0, 1]$ . Um ponto  $t \in [0, 1]$  é dito ignorável para  $f_1, \dots, f_n$  se, para quaisquer  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t \notin M_{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i}$ .*

**Definição 1.5.** *Para  $f_1, \dots, f_n \in C[0, 1]$ , um ponto  $t \in [0, 1]$  é dito de barreira entre  $t_1$  e  $t_2$  em  $[0, 1]$ , se  $t \in (t_1, t_2)$  e  $t$  é ignorável para  $f_1, \dots, f_n$ .*

**Definição 1.6.** *Um par de funções  $\{f, g\}$  em  $C[0, 1]$  é dito canônico, se existem  $t_f \in M_f, t_g \in M_g$  e  $\bar{t} \in (t_f, t_g)$  ou  $\bar{t} \in (t_g, t_f)$  tais que  $m_f = \{\bar{t}\}$  ou  $m_g = \{\bar{t}\}$ .*

**Lema 1.1.** *Nas condições da definição anterior,  $\bar{t} \in (t_f, t_g)$  é ponto de barreira para as funções  $f$  e  $g$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $m_f = \{\bar{t}\}$ . Então,  $f(\bar{t}) < f(t)$  para todo  $t \in [0, 1] \setminus \{\bar{t}\}$ , em particular,  $f(\bar{t}) < f(t_g)$ . Como  $t_g \in M_g$ , segue que

$$g(t_g) = M(g) = \sup_{t \in [0, 1]} g(t).$$

Daí,

$$g(\bar{t}) \leq g(t_g).$$

Assim,

$$\alpha f(\bar{t}) + \beta g(\bar{t}) < \alpha f(t_g) + \alpha g(t_g).$$

Logo, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\bar{t} \notin M_{\alpha f + \beta g}$ . Se  $m_g = \{\bar{t}\}$  o resultado é análogo. ■

Um par canônico de funções não pode ser base de um subespaço vetorial 2-dimensional  $V$  tal que  $V \setminus \{0\} \subseteq \widehat{C}[0, 1]$ . Para provar isso utilizaremos o próximo lema.

De agora em diante, para uma aplicação  $\phi : [0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  denotaremos  $\phi(x)$  por  $\phi_x$ .

**Lema 1.2.** *Se  $\phi$  é uma aplicação contínua de  $[0, 1]$  em  $C[0, 1]$  tal que, para todo  $x \in [0, 1]$ ,  $M_{\phi_x}$  é unitário e igual a  $\{t_x\}$ , então a função*

$$\begin{aligned} \mu : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mu(x) = t_x \end{aligned}$$

é contínua.

**Demonstração:** Suponhamos que existe  $(x_n)_{n=1}^\infty \in [0, 1]$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ , mas  $\mu(x_n) = t_{x_n} \not\rightarrow t_{x_0} = \mu(x_0)$ . Como  $[0, 1]$  é compacto, existe uma subsequência de  $(t_{x_n})_{n=1}^\infty$  convergindo para um ponto  $\bar{t} \in [0, 1]$  que, por economia de notação, denotaremos pela própria sequência. Note que

$$\begin{aligned} |\phi_{x_n}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| &= |\phi_{x_n}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(t_{x_n}) + \phi_{x_0}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \\ &\leq |\phi_{x_n}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(t_{x_n})| + |\phi_{x_0}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \\ &\leq \sup_{y \in [0, 1]} |\phi_{x_n}(y) - \phi_{x_0}(y)| + |\phi_{x_0}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \\ &= \|\phi_{x_n} - \phi_{x_0}\| + |\phi_{x_0}(t_{x_n}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi_{x_n}(t_{x_n}) \longrightarrow \phi_{x_0}(\bar{t})$$

quando  $x_n \rightarrow x_0$ , pois  $\phi$  e  $\phi_{x_0}$  são contínuas. Também pela continuidade de  $\phi$ , quando  $x_n \rightarrow x_0$ , temos

$$\phi_{x_n}(t_{x_n}) = M(\phi_{x_n}) \longrightarrow M(\phi_{x_0}) = \phi_{x_0}(t_{x_0}).$$

Pela unicidade do limite segue que

$$\phi_{x_0}(\bar{t}) = \phi_{x_0}(t_{x_0}) = M(\phi_{x_0}),$$

e como  $M(\phi_{x_0}) = \{t_{x_0}\}$ , temos  $\bar{t} = t_{x_0}$ . Portanto,  $\mu$  é contínua. ■

**Proposição 1.1.** *Para qualquer par canônico de funções  $\{f, g\} \subset C[0, 1]$ , existem dois reais positivos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que a função  $\alpha f + \beta g$  tem pelo menos dois pontos de máximo.*

**Demonstração:** Suponhamos que existe um par canônico de funções  $\{f, g\}$  tal que para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $M_{\alpha f + \beta g}$  é unitário. Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} \phi: [0, 1] &\rightarrow C[0, 1] \\ x &\mapsto \phi_x = (1-x)f + xg \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu: [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mu(x) = t_x \end{aligned}$$

onde  $\{t_x\} = M_{\phi_x}$ . Pelo lema anterior  $\mu$  é contínua, logo assume todos os valores entre  $\mu(0) = t_0$  e  $\mu(1) = t_1$  onde  $t_0 = M_f$  e  $t_1 = M_g$ . Mas isso contraria o Lema 1.1, que afirma existir um ponto de barreira entre  $t_0$  e  $t_1$ , isto é, um ponto  $\tilde{t} \in (t_0, t_1)$  tal que  $\tilde{t} \notin M_{\alpha f + \beta g}$  para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . ■

Agora, estamos prontos para analisar a lineabilidade de  $\widehat{C}[0, 1]$ .

**Teorema 1.3.**  $\lambda(\widehat{C}[0, 1]) = 1$ .

**Demonstração:** Mostraremos que para qualquer par de funções linearmente independentes  $\{f, g\} \subset C[0, 1]$ , existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tal que a função  $\alpha f + \beta g$  admite pelo menos dois pontos de máximo. Suponhamos o contrário, que existem  $f, g \in C[0, 1]$  tais que para todo par  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $M_{\alpha f + \beta g}$  é unitário. Como  $[0, 1]$  é compacto e a função  $\alpha f + \beta g$  é contínua,  $M_{\alpha f + \beta g}$  e  $m_{\alpha f + \beta g}$  sempre existem, e mais, são unitários:  $M_{\alpha f + \beta g}$  é unitário por hipótese e  $m_{\alpha f + \beta g}$  é unitário por ser igual a  $M_{-(\alpha f + \beta g)}$ , que é unitário por hipótese. Definamos

$$\epsilon(f, g) := M_f \cup M_g \cup m_f \cup m_g.$$

É fácil ver que  $\#\epsilon(f, g) \leq 4$ , pois  $\#M_i = \#m_j = 1$ , para  $\{i, j\} = \{f, g\}$ . Consideremos dois casos:

(1) Se  $\#\epsilon(f, g) \geq 3$ , então pelo menos um dos quatro pares de funções  $\{f, g\}, \{f, -g\}, \{-f, g\}$  ou  $\{-f, -g\}$  é canônico. Para ver isso, basta supor que algum desses pares não é canônico, pela definição de par canônico de funções e usando o fato de  $M_f = m_{-f}, M_g = m_{-g}, M_{-f} = m_f$  e  $M_{-g} = m_g$ , segue que algum dos pares restantes será canônico. Assim, se por exemplo,  $\{f, g\}$  é canônico, pela Proposição 1.1 existem  $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}_+^*$  tais que  $M_{\alpha'f + \beta'g}$  têm pelo menos dois pontos e isso contradiz o que supusemos inicialmente.

(2) Se  $\#\epsilon(f, g) = 2$ , temos dois casos:  $M_f = m_g$  e  $m_f = M_g$  ou  $M_f = M_g$  e  $m_f = m_g$ . Note que não podemos ter  $M_f = m_f$ , pois se assim fosse  $f$  não pertenceria a  $\widehat{C}[0, 1]$ . Se  $M_f = m_g$  e  $m_f = M_g$ , considerando as mesmas funções  $\phi$  e  $\mu$  usadas na demonstração da Proposição 1.1, encontramos  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $M_{(1-\alpha)f + \alpha g}$  é diferente de  $M_f$  e  $m_f = M_g$ . Logo,  $\#\epsilon(f, (1-\alpha)f + \alpha g) \geq 3$  e pelo caso (1), temos uma contradição. Para o caso  $M_f = M_g$  e  $m_f = m_g$ , em vez de  $M_g$  e  $m_g$ , trabalhamos com  $m_{-g}$  e  $M_{-g}$ . Como  $M_f = m_{-g}$  e  $m_f = M_{-g}$ , adaptando as funções  $\phi$  e  $\mu$  para  $f$  e  $-g$ , encontramos  $\beta \in (0, 1)$  tal que  $M_{(1-\beta)f + \beta(-g)}$  é diferente de  $M_f$  e  $m_f = M_{-g}$ , assim,  $\#\epsilon(f, (1-\beta)f + \beta(-g)) \geq 3$  e novamente pelo caso (1) temos uma contradição.

Portanto, só nos resta  $\#\epsilon(f, g) = 1$ . Daí,  $M_f = m_f = m_g = M_g$ , logo,  $f$  e  $g$  são constantes, conseqüentemente linearmente dependentes, o que é uma contradição. ■

Também como na seção anterior, segue do teorema acima a não-lineabilidade de  $\widehat{C}[a, b]$ , para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , pois cada função  $f \in \widehat{C}[a, b]$  nada mais é do que a composição de uma função  $g \in \widehat{C}[0, 1]$  com a função  $h : [a, b] \rightarrow [0, 1], h(x) = \frac{x-a}{b-a}$ .

## 1.4 A lineabilidade de $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$

**Definição 1.7.** Denotamos por  $C_0(\mathbb{R})$  o conjunto das funções contínuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Definimos por  $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$  o subconjunto de  $C_0(\mathbb{R})$  das funções que atingem o máximo em um único ponto.

Nesta seção, mostraremos que existe um subespaço vetorial 2-dimensional,  $F \subset C_0(\mathbb{R})$ , tal que  $F \setminus \{0\} \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R})$ . Mostraremos, também, que se  $n > 2$ , é impossível construir um subespaço  $n$ -dimensional com tal propriedade. Iniciemos com algumas definições.

**Definição 1.8.** *Sejam  $P$  e  $Q$  dois subespaços fechados de um espaço de Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$ . A inclinação de  $P$  em  $Q$  é definida por*

$$(\widehat{P, Q}) := \inf\{d(x, Q) : x \in P, \|x\|_X = 1\},$$

onde  $d(x, Q) := \inf\{\|x - q\|_X : q \in Q\}$ .

**Observação 1.2.** Obviamente, se  $P = \text{span}\{x\}$  e  $Q = \text{span}\{y\}$  onde  $x$  e  $y$  são linearmente independentes em  $X$ , então  $(\widehat{P, Q})$  e  $(\widehat{Q, P})$  são estritamente positivos. Além disso, se  $(\widehat{P, Q}) = \delta > 0$  e  $z = \alpha x + \beta y$  com  $x \in P, y \in Q$  e  $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$  então  $|\alpha| \leq \frac{\|z\|_X}{\delta}$ . De fato, se  $\alpha = 0$  é trivial, então suponhamos  $\alpha \neq 0$ , sendo assim temos

$$\begin{aligned} \|z\|_X &= \|\alpha x + \beta y\|_X = |\alpha| \cdot \left\| \frac{\alpha}{|\alpha|}x + \frac{\beta}{|\alpha|}y \right\|_X \\ &= |\alpha| \cdot \left\| \frac{\alpha}{|\alpha|}x - \left( \frac{-\beta}{|\alpha|}y \right) \right\|_X \\ &\geq |\alpha| \cdot \inf \left\{ \left\| \frac{\alpha}{|\alpha|}x - \bar{y} \right\|_X : \bar{y} \in Q \right\} \\ &= |\alpha| \cdot d \left( \frac{\alpha}{|\alpha|}x, Q \right) \\ &\geq |\alpha| \cdot \inf \{d(\bar{x}, Q) : \bar{x} \in P \text{ e } \|\bar{x}\|_X = 1\} \\ &= |\alpha| \cdot (\widehat{P, Q}) \\ &= |\alpha| \cdot \delta, \end{aligned}$$

logo,

$$|\alpha| \leq \frac{\|z\|_X}{\delta}.$$

Note que nessas mesmas condições, se  $(\widehat{Q, P}) = \delta' > 0$ , então

$$|\beta| \leq \frac{\|z\|_X}{\delta'}.$$

**Definição 1.9.** *Seja  $K$  um conjunto. Uma função  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é dita alternada se existem  $t_1, t_2 \in K$  tais que  $f(t_1) < 0$  e  $f(t_2) > 0$ . Um conjunto de funções é dito alternado, se cada função não nula é alternada.*

**Proposição 1.2.** *Não existe subespaço vetorial 2-dimensional alternado,  $A \subset C_0(\mathbb{R})$ , tal que  $A \setminus \{0\} \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R})$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que existem funções  $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ , linearmente independentes, tais que  $\text{span}\{f, g\} \setminus \{0\} \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R})$  é alternado. Sem perda de generalidade,

suponhamos  $\|f\| = \|g\| = 1$ . Consideremos o conjunto

$$Z := \{z = \alpha f + \beta g : \|z\| = 1\}.$$

Assim, tomando  $P = \text{span}\{f\}$  e  $Q = \text{span}\{g\}$ , pela Observação 1.2, existe  $\delta > 0$  tal que se  $z \in Z$  então  $\alpha, \beta \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ . De fato, como  $(\widehat{P}, \widehat{Q}) = \delta_1 > 0$  e  $(\widehat{Q}, \widehat{P}) = \delta_2 > 0$  segue que  $|\alpha| \leq \frac{\|z\|}{\delta_1}$  e  $|\beta| \leq \frac{\|z\|}{\delta_2}$ . Tomemos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , como  $\|z\| = 1$ , segue que  $\alpha, \beta \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ .

Definamos para cada  $z = \alpha f + \beta g \in Z$ ,

$$m_{\alpha\beta} := \inf\{(\alpha f + \beta g)(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$M_{\alpha\beta} := \sup\{(\alpha f + \beta g)(t) : t \in \mathbb{R}\},$$

que existem pois  $z = \alpha f + \beta g \in C_0(\mathbb{R})$ . Afirmamos que

$$\sup\{m_{\alpha\beta} : z = \alpha f + \beta g \in Z\} < 0.$$

Com efeito, se não fosse existiriam seqüências  $(\alpha_n)_{n=1}^\infty, (\beta_n)_{n=1}^\infty \subset \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ , de modo que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \geq 1$ , tal que

$$-\varepsilon < m_{\alpha_n\beta_n} \leq 0, \tag{1.1}$$

sempre que  $n \geq n_0$ . Note que  $m_{\alpha_n\beta_n} \leq 0$  pois  $\alpha f + \beta g$  é alternada, logo, assume valores negativos. Sendo  $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$  compacto, existem  $(\alpha_{n_j})_{j=1}^\infty, (\beta_{n_j})_{j=1}^\infty$  e  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$  tais que  $\alpha_{n_j} \rightarrow \tilde{\alpha}$  e  $\beta_{n_j} \rightarrow \tilde{\beta}$ . Desse modo,  $m_{\alpha_{n_j}\beta_{n_j}} \rightarrow m_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ , logo, de (1.1) temos  $m_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = 0$ . Como  $m_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \inf\{(\tilde{\alpha}f + \tilde{\beta}g)(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , segue que  $\tilde{z} = \tilde{\alpha}f + \tilde{\beta}g$  é não-negativa, isso contraria o fato de  $\tilde{z}$  ser alternada. De forma análoga concluímos que  $\inf\{M_{\alpha\beta} : \alpha f + \beta g \in Z\} > 0$ .

Agora, seja  $N > 0$  tal que, para todo  $z \in Z$ ,

$$m(z) < -N < 0 < N < M(z).$$

Tal  $N$  existe devido as desigualdades que acabamos de ver. Como  $f, g \in C_0(\mathbb{R})$  e para  $z = \alpha f + \beta g \in Z$  temos  $\alpha, \beta \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ , existe  $T > 0$ , suficientemente grande, tal que se  $|t| > T$  e  $z \in Z \subset C_0(\mathbb{R})$ , então  $z(t) \in [-N, N]$ . Daí, vemos que para cada  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|t| > T$ ,

$z(t) \neq M(z)$ , e portanto,  $t$  é ignorável para  $z \in Z$ . Então, restringimos nosso domínio a  $[-T, T]$  e temos  $\widehat{C}_0[-T, T] = \{f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R} : f = h|_{[-T, T]} \text{ com } h \in \widehat{C}_0(\mathbb{R})\}$  contido em  $\widehat{C}[-T, T]$ . Assim, o subespaço 2-dimensional  $\text{span}\{f|_{[-T, T]}, g|_{[-T, T]}\}$  está contido em  $\widehat{C}[-T, T] \cup \{0\}$ , o que contradiz o Teorema 1.3 onde diz que  $\lambda(\widehat{C}[-T, T]) = 1$ .

■

O lema a seguir, nos ajudará a provar a próxima proposição.

**Lema 1.3.** *Seja  $K$  um conjunto. Seja  $V$  um espaço vetorial,  $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ), formado por funções  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Existem  $n$  pontos  $t_1, \dots, t_n$  em  $K$  tais que, para toda matriz  $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , existem  $n$  funções  $f_1, \dots, f_n$  em  $V$ , tais que para todos  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i(t_j) = y_{ij}$ .*

**Demonstração:** Claramente, se  $\dim V = n$  então  $K$  contém pelo menos  $n$  pontos.

Inicialmente, provaremos por indução que se  $\{X_1, \dots, X_n\}$  é uma base de  $V$ , então existem  $n$  pontos  $t_1, \dots, t_n \in K$  tais que os  $n$  vetores  $(X_1(t_j))_{j=1}^n, \dots, (X_n(t_j))_{j=1}^n$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$ .

Para  $n = 2$ . Suponhamos por contradição, que para cada  $t_1, t_2 \in K$  os vetores  $(X_1(t_1), X_1(t_2))$  e  $(X_2(t_1), X_2(t_2))$  são linearmente dependentes em  $\mathbb{R}^2$ . Então, podemos supor que existem  $t_0 \in K$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$X_2(t_0) = \alpha X_1(t_0) \neq 0, \quad (1.2)$$

pois do contrário nada teríamos que provar. Sabemos que dois vetores  $v_1, v_2$  são linearmente dependentes se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $v_1 = \lambda v_2$ , dessa forma, para todo  $t \in K$  existe  $\beta_t \in \mathbb{R}$  tal que

$$(\beta_t X_1(t_0), \beta_t X_1(t)) = (X_2(t_0), X_2(t)).$$

Dada a igualdade das duas primeiras coordenadas, segue de (1.2) que para cada  $t \in K$ ,  $\beta_t = \alpha$  e então

$$X_2(t) = \alpha X_1(t)$$

para todo  $t \in K$ , que contradiz o fato de  $\{X_1, X_2\}$  ser uma base de  $V$ . Por hipótese de indução, consideremos a afirmação válida para  $n = k \geq 2$  e provemos que também vale para  $n = k + 1$ . Novamente, por contradição, suponhamos que para todos  $t_1, \dots, t_{k+1} \in K$ , os vetores  $(X_1(t_j))_{j=1}^{k+1}, \dots, (X_{k+1}(t_j))_{j=1}^{k+1}$  são linearmente dependentes. Por hipótese de

indução, a afirmação é válida para  $n = k$ , então existem  $t_1, \dots, t_n \in K$  tais que

$$\text{span} \{ (X_1(t_j))_{j=1}^k, \dots, (X_k(t_j))_{j=1}^k \} = \mathbb{R}^k.$$

Então, existe uma única sequência  $(\alpha_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$  tal que

$$\left( \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i(t_j) \right)_{j=1}^k = (X_{k+1}(t_j))_{j=1}^k.$$

De fato, como o posto da matriz  $(X_i(t_j))_{i,j=1}^k$  é igual a  $k$ , pois suas linhas

$(X_1(t_j))_{j=1}^k, \dots, (X_k(t_j))_{j=1}^k$  são linearmente independentes, segue que  $(\alpha_i)_{i=1}^k$  é a única solução do sistema

$$\begin{cases} \beta_1 X_1(t_1) + \dots + \beta_k X_k(t_1) = X_{k+1}(t_1) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_1 X_1(t_k) + \dots + \beta_k X_k(t_k) = X_{k+1}(t_k). \end{cases}$$

Note que para todos  $t_1, \dots, t_k, t \in K$  os  $k+1$  vetores

$$((X_1(t_j))_{j=1}^k, X_1(t)), \dots, ((X_{k+1}(t_j))_{j=1}^k, X_{k+1}(t))$$

são linearmente dependentes. Então, para todo  $t \in K$  existem  $\gamma_{1t}, \dots, \gamma_{kt} \in \mathbb{R}$  tais que

$$\left( \left( \sum_{i=1}^k \gamma_{it} X_i(t_j) \right)_{j=1}^k, \sum_{i=1}^k \gamma_{it} X_i(t) \right) = ((X_{k+1}(t_j))_{j=1}^k, X_{k+1}(t)).$$

A igualdade das primeiras  $k$  coordenadas implica que  $\gamma_{it} = \alpha_i, i = 1, \dots, k$ , e então, para todo  $t \in K$ ,

$$X_{k+1}(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i(t),$$

o que contradiz o fato de  $\{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}\}$  ser uma base de  $V$ . Logo, a afirmação é válida para  $n = k+1$ , e assim, concluímos a indução.

Agora, suponhamos que  $\dim V = n$  e seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  uma base de  $V$ . Pelo que acabamos de provar, existem  $n$  pontos  $t_1, \dots, t_n \in K$  tais que os vetores

$$(X_1(t_j))_{j=1}^n, \dots, (X_n(t_j))_{j=1}^n$$

são linearmente independentes. Consideremos a matriz  $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Então, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existem  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in} \in \mathbb{R}$  tais que

$$\sum_{l=1}^n \alpha_{il} (X_l(t_j))_{j=1}^n = (y_{ij})_{j=1}^n.$$

Portanto, as funções  $Y_1, \dots, Y_n \in V$  definidas por  $Y_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} X_l$ , são tais que  $Y_i(t_j) = y_{ij}$ . ■

**Observação 1.3.** Note que, dada uma matriz  $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \leq n$ , pelo lema anterior existem  $n$  pontos  $t_1, \dots, t_n$  em  $K$  e  $m$  funções  $f_1, \dots, f_m$  em  $V$ , tais que para todos  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i(t_j) = y_{ij}$ . Basta olharmos  $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  como submatriz de  $(x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Proposição 1.3.** *Seja  $K$  um conjunto. Todo espaço vetorial de funções  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$ -dimensional,  $n > 2$ , contém um subespaço alternado,  $(n - 1)$ -dimensional.*

**Demonstração:** Seja  $V$  um espaço vetorial,  $n$ -dimensional,  $n > 2$ , formado por funções definidas de  $K$  em  $\mathbb{R}$ . Considere o subespaço  $(n - 1)$ -dimensional

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}.$$

Note que, de certa forma, é um subespaço alternado, pois os seus vetores não nulos têm coordenadas positivas e negativas.

Seja  $\{(y_{1j})_{j=1}^n, \dots, (y_{(n-1)j})_{j=1}^n\}$  uma base desse subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Pelo Lema 1.3 e Observação 1.3, existem  $n$  pontos  $t_1, \dots, t_n \in K$  e  $n - 1$  funções  $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in V$  tais que  $Y_i(t_j) = y_{ij}$ . Note que  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  são linearmente independentes, pois se

$$\alpha_1 Y_1(t) + \dots + \alpha_{n-1} Y_{n-1}(t) = 0$$

para todo  $t \in K$ , tomamos  $t = t_1, \dots, t_n$ , e do sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \dots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)1} = 0 \\ \alpha_1 y_{12} + \dots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)2} = 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_1 y_{1n} + \dots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)n} = 0 \end{cases}$$

segue que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ , pois  $(y_{1j})_{j=1}^n, \dots, (y_{(n-1)j})_{j=1}^n$  são linearmente independentes. Assim,  $F = \text{span}\{Y_i\}_{i=1}^{n-1}$  é um subespaço alternado  $(n - 1)$ -dimensional de  $V$ . ■

Agora, já temos as ferramentas necessárias para provar o resultado principal desta seção.

**Teorema 1.4.**  $\lambda(\widehat{C}_0(\mathbb{R})) = 2$ .

**Demonstração:** Primeiro, note que  $\text{span}\{\sin x, 1 - \cos x\} \setminus \{0\} \subset \widehat{C}[0, 2\pi)$ . De fato, é fácil ver que  $\sin x$  e  $1 - \cos x$  atingem o seu máximo em um único ponto de  $[0, 2\pi)$ ,  $\sin x$  em  $x = \frac{\pi}{2}$ , e  $1 - \cos x$  em  $x = \pi$ . Agora, sejam  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \sin x + \beta(1 - \cos x)$  uma combinação não trivial. Usando o mesmo argumento da demonstração do Teorema 1.1, vemos que  $\alpha \sin x + \beta(1 - \cos x)$  atinge o máximo em um único ponto de  $[0, 2\pi)$ . Além disso,  $\sin x$  e  $1 - \cos x$  são linearmente independentes.

Agora, considere as funções

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(t) = \mu(t) \sin(4 \arctg |t|)$$

e

$$q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(t) = \mu(t)(1 - \cos(4 \arctg |t|))$$

onde

$$\mu(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } t \leq 0, \\ 1, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Considere o subespaço

$$F = \text{span}\{p, q\}.$$

Afirmamos que  $F$  é 2-dimensional e

$$F \setminus \{0\} \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}).$$

De fato, se  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e

$$\alpha(\mu(t) \sin(4 \arctg |t|)) + \beta \mu(t)(1 - \cos(4 \arctg |t|)) = 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , sendo as funções  $\sin x$  e  $1 - \cos x$  linearmente independentes, segue que  $\alpha = \beta = 0$ , isto é,  $p$  e  $q$  são linearmente independentes. Note que para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha p(t) + \beta q(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha \sin(4 \arctg |t|) + \beta(1 - \cos(4 \arctg |t|)) \\ &= \alpha \sin(4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg |t|) + \beta(1 - \cos(4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg |t|)) \\ &= \alpha \sin(4 \cdot \frac{\pi}{2}) + \beta(1 - \cos(4 \cdot \frac{\pi}{2})) \\ &= \alpha \sin 2\pi + \beta(1 - \cos 2\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha p(t) + \beta q(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t (\alpha \operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg}|t|) + \beta(1 - \cos(4 \operatorname{arctg}|t|))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,  $\alpha p + \beta q \in C_0(\mathbb{R})$ . Finalmente, se  $\alpha p + \beta q$  é uma combinação não trivial, sabendo que  $\operatorname{span}\{\operatorname{sen} x, 1 - \cos x\} \in \widehat{C}[0, 2\pi)$  e usando argumentos semelhantes aos da prova do Teorema 1.2 temos

$$\alpha p + \beta q \in \widehat{C}_0(\mathbb{R}).$$

Para finalizar, provaremos que  $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$  não é  $n$ -lineável para  $n > 2$ . Suponha por absurdo, que exista um subespaço  $W$ , 3-dimensional, tal que

$$W \setminus \{0\} \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}). \quad (1.3)$$

Da Proposição 1.3,  $W$  possui um subespaço alternado  $W_0$  de dimensão 2. De (1.3) segue que  $W_0 \setminus \{0\} \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R})$ , que é um absurdo devido a Proposição 1.2. ■

Se em vez de  $C_0(\mathbb{R})$ , olharmos para o espaço das sequências convergentes, o resultado não é o mesmo, o conjunto  $\widehat{c}_0$ , das sequências que convergem para zero e atingem o máximo em um único ponto, é não-lineável. Mostraremos este fato na próxima proposição.

**Proposição 1.4.**  $\lambda(\widehat{c}_0) = 1$ .

**Demonstração:** Suponhamos por contradição que existem dois elementos  $x = (x_n)_{n=1}^\infty$  e  $y = (y_n)_{n=1}^\infty$  de  $c_0$ , linearmente independentes, tais que para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , a combinação  $\alpha x + \beta y$  admite um e apenas um valor de máximo. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\max_{i \in \mathbb{N}} x_i = x_{i_0} = 1, \quad y_{i_0} = 0$$

e que existe  $j_0 \neq i_0$  tal que  $y_{j_0} > 0$ . Seja  $\lambda_{j_0} \in \mathbb{R}_+^*$  tal que  $x_{j_0} + \lambda_{j_0} y_{j_0} = 1$ . Tal  $\lambda_{j_0}$  existe pois  $x_{j_0} < 1$  e  $y_{j_0} > 0$ . Considere  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}.$$

Como as sequências  $x$  e  $y$  convergem para 0, existe  $N > j_0$ , tal que para todo  $i \geq N$ ,

$$\max\{|x_i|, |y_i|\} < \varepsilon.$$

Consideremos

$$\{y_{i_k}\}_{k=1}^m \subset \{y_i\}_{i=1}^{N-1}$$

tais que para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $y_{i_k} > 0$  e sejam  $\{\lambda_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{R}_+$  tais que  $x_{i_k} + \lambda_k y_{i_k} = 1$ .

Assim,

$$\lambda_0 := \min\{\lambda_k\}_{k=1}^m > 0,$$

pois

$$\lambda_k = \frac{1 - x_{i_k}}{y_{i_k}} > 0$$

para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Definamos a sequência

$$z := x + \lambda_0 y.$$

Note que  $z$  é tal que

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathbb{N}} z_i &= \max_{i \in \mathbb{N}} \{x_i + \lambda_0 y_i\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De fato, para todo  $i \geq N$  sabemos que

$$\begin{aligned} \max\{|x_i|, |y_i|\} &< \varepsilon \\ &< \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}. \end{aligned}$$

Suponha sem perda de generalidade que  $\max\{|x_i|, |y_i|\} = |y_i|$ . Assim,  $|y_i| < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}$ . Daí,

$$\begin{aligned} 1 &> |y_i| + \lambda_{j_0} |y_i| \\ &\geq |x_i| + \lambda_{j_0} |y_i| \\ &\geq |x_i| + \lambda_0 |y_i| \\ &\geq |x_i + \lambda_0 y_i| \\ &\geq x_i + \lambda_0 y_i. \end{aligned}$$

Logo, para todo  $i \geq N$ ,  $z < 1$ . Para  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  se  $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$ , onde  $i_k$  é tal que  $x_{i_k} + \lambda_k y_{i_k} = 1$ , segue que  $x_{i_k} + \lambda_0 y_{i_k} \leq 1$  pois, como vimos  $\lambda_0 = \min\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ . Nos demais casos temos necessariamente  $y_i \leq 0$ , como  $x_i \leq 1$  para todo  $i$ , segue que

$$1 \geq x_i > x_i + \lambda_0 y_i = z_i.$$

Agora, note que

$$z_{i_0} = x_{i_0} = 1$$

e, para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\lambda_k = \lambda_0$  também temos  $z_{i_k} = 1$ . Então, vemos que  $z$  tem pelo menos dois pontos de máximo, o que é uma contradição.

■

A próxima proposição nos permitirá falar sobre a lineabilidade de  $\|\widehat{c}_0\|$ , o conjunto das sequências que convergem para zero e em norma atingem o máximo em um único ponto.

**Proposição 1.5.** *Seja  $L \subset c_0$  um subespaço tal que  $\dim L = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Então existe  $x \in L$  tal que  $\|x\| = 1$  e  $\#\{i \in \mathbb{N} : |x_i| = 1\} \geq n$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$  uma base de  $L$ . Usemos indução sobre a dimensão  $n$  de  $L$ . O caso  $n = 1$  é trivial. Para o caso  $n = 2$  suponhamos, por contradição, que para cada  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}$  atinge o valor máximo de sua norma em um único ponto. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\|x^{(1)}\| = x_{i_0}^{(1)} = 1, \quad x_{i_0}^{(2)} = 0$$

e que existe  $j_0 \neq i_0$  tal que  $x_{j_0}^{(2)} \neq 0$ . Defina  $\lambda_{j_0}$ , número real positivo, tal que  $x_{j_0}^{(1)} + \lambda_{j_0} x_{j_0}^{(2)} = \operatorname{sgn} x_{j_0}^{(2)}$  e considere  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}.$$

Como as sequências  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  convergem para zero, existe  $N > j_0$  de modo que para todo  $i \geq N$

$$\max\{|x_i^{(1)}|, |x_i^{(2)}|\} < \varepsilon.$$

Para  $i \in \{1, \dots, N - 1\}$  tal que  $x_i^{(2)} \neq 0$ , definamos  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  de modo que  $x_i^{(1)} + \lambda_i x_i^{(2)} = \operatorname{sgn} x_i^{(2)}$ . Consideremos  $\Lambda_0 = \min\{\lambda_i\} > 0$  e a sequência  $w^{(0)} = x^{(1)} + \Lambda_0 x^{(2)}$ . É fácil ver que  $\|w^{(0)}\| = 1$ , basta proceder de modo análogo ao feito na prova da Proposição 1.4. Note que  $w_{i_0}^{(0)} = x_{i_0}^{(1)} = 1$  e para todo  $i \in \{1, \dots, N - 1\}$  tal que  $\lambda_i = \Lambda_0$  temos  $w_i^{(0)} = \operatorname{sgn} x_i^{(2)}$ , donde vemos que  $|w_i^{(0)}| = 1$ . Então,  $w^{(0)}$  atinge o seu máximo em norma pelo menos em dois pontos distintos, que é uma contradição. No caso  $n = 3$  suponha, por contradição, que a proposição é falsa no caso  $n = 3$ . Assim, para o  $w^{(0)}$  definido na etapa anterior, existe somente um  $i_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda_{i_1} = \Lambda_0$ , pois caso contrário, dada a existência de  $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \Lambda_0$ , teríamos  $\|w^{(0)}\|$  alcançando o máximo em três pontos, logo, bastaríamos fazer

$$w^{(0)} = x^{(1)} + \Lambda_0 x^{(2)} + 0 \cdot x^{(3)}$$

e não teríamos nada a provar. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$x_{i_0}^{(3)} = x_{i_1}^{(3)} = 0$$

e que existe  $j_1 \notin \{i_0, i_1\}$  tal que  $x_{j_1}^{(3)} \neq 0$ . Definamos  $\lambda_{j_1}$ , o real positivo, tal que

$$w_{j_1}^{(0)} + \lambda_{j_1} x_{j_1}^{(3)} = \operatorname{sgn} x_{j_1}^{(3)}$$

e considere  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_1}}.$$

Como as sequências  $w^{(0)}$  e  $x^{(3)}$  convergem para 0, existe  $N > j_1$  tal que para todo  $i \geq N$  temos

$$\max\{|w_i^{(0)}|, |x_i^{(3)}|\} < \varepsilon.$$

Para  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  tal que  $x_i^{(3)} \neq 0$ , definamos  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$w_i^{(0)} + \lambda_i x_i^{(3)} = \operatorname{sgn} x_i^{(3)}.$$

Consideremos  $\Lambda_1 = \min\{\lambda_i\} > 0$  e a nova sequência

$$w^{(1)} = w^{(0)} + \Lambda_1 x^{(3)}.$$

Como era de se esperar  $\|w^{(1)}\| = 1$ ,  $w_{i_0}^{(1)} = w_{i_0}^{(0)} = 1$ ,  $w_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(0)} = \operatorname{sgn} x_{i_1}^{(2)}$  e para todo  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  tal que  $\lambda_i = \Lambda_1$ , temos  $w_i^{(1)} = \operatorname{sgn} x_i^{(3)}$ , daí, vemos que em pelo menos três pontos distintos,  $\|w^{(1)}\| = 1$ , o que é uma contradição.

Usando a mesma ideia para os casos  $n \geq 4$ , temos o resultado. ■

A lineabilidade de  $\|\widehat{c}_0\|$  é consequência direta da proposição que acabamos de ver.

**Corolário 1.1.**  $\lambda(\|\widehat{c}_0\|) = 1$ .

**Demonstração:** Suponha  $\lambda(\|\widehat{c}_0\|) = 2$ . Pela Proposição 1.5 temos uma contradição. ■

## Capítulo 2

# Lineabilidade em conjuntos de funções reais definidas em espaços topológicos

No capítulo anterior estudamos a lineabilidade dos conjuntos das funções reais contínuas que atingem o máximo em um único ponto de seu domínio. Esses domínios se restringiam a reta e intervalos dela. Estudamos os seguintes resultados:

(A)  $\widehat{C}[0, 2\pi)$  é 2-lineável;

(B)  $\widehat{C}(\mathbb{R})$  é 2-lineável;

(C)  $\widehat{C}[0, 1]$  não é lineável.

Este capítulo tem por objetivo estudar tais resultados tomando domínios mais gerais. Veremos que os resultados de (A), (B) e (C) são casos particulares dos que vem a seguir.

### 2.1 Generalizando a 2-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$

Aqui, o intervalo  $[0, 2\pi)$  dará lugar a  $D$ , espaço topológico que tem uma bijeção contínua com a esfera  $n - 1$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ . Mostraremos no próximo teorema que para todo espaço  $D$  com essa característica temos a  $n$ -lineabilidade de  $\widehat{C}(D)$ . Nesta seção, assim como em todo este capítulo,  $\|\cdot\|_2$  representará a norma euclidiana.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $n \geq 2$  um inteiro positivo e  $D$  um espaço topológico tal que exista uma bijeção contínua de  $D$  para  $S^{n-1}$ . Então  $\widehat{C}(D)$  é  $n$ -lineável.*

**Demonstração:** Seja  $\pi_i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção sobre a  $i$ -ésima coordenada,  $i = 1, \dots, n$ , e seja  $G : D \rightarrow S^{n-1}$  uma bijeção contínua. Mostremos inicialmente que as funções  $\pi_i, i = 1, \dots, n$ , são linearmente independentes. De fato, considere uma combinação linear qualquer

$$\sum_{i=1}^n a_i \pi_i.$$

Se esta combinação linear é não trivial, isto é,  $a_i \neq 0$  para algum  $i$ , segue que

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0.$$

Logo, tomamos

$$z = \frac{(a_1, \dots, a_n)}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}} \in S^{n-1}$$

e então

$$\sum_{i=1}^n a_i \pi_i(z) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}} \neq 0.$$

Agora, mostremos que cada combinação linear não trivial das funções  $\pi_i, i = 1, \dots, n$ , possui apenas um único ponto de máximo. Considere  $\sum_{i=1}^n a_i \pi_i$ , com  $a_i \neq 0$  para algum  $i = 1, \dots, n$ , e  $y \in S^{n-1}$ , assim,

$$\sum_{i=1}^n a_i \pi_i(y) = \langle a, y \rangle,$$

onde  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \langle a, y \rangle. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $f|_{S^{n-1}}$  atinge seu máximo em  $z \in S^{n-1}$  se, e somente se

$$z = \frac{(a_1, \dots, a_n)}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Inicialmente, note que  $f(S^{n-1})$  atinge um valor máximo, pois é imagem de um compacto por uma função contínua. Olhemos para  $S^{n-1}$  como imagem inversa do valor regular<sup>1</sup> 1

<sup>1</sup>Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . O número real  $c$  é um valor regular de  $f$  quando existem pontos críticos de  $f$  no nível  $c$ , ou seja, se  $f(x) = c$  então  $\text{grad } f(x) \neq 0$ .

pela função

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver [6], pag. 331)  $p \in S^{n-1}$  é ponto crítico de  $f|_{S^{n-1}}$  se, e somente se, existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{grad} f(p) = \mu \cdot \text{grad} \varphi(p)$ . Como  $\text{grad} f = a$  e  $\text{grad} \varphi = 2x$ , fazendo  $\lambda = 2\mu$ , segue que

$$a = \lambda x.$$

Como  $\|x\|_2^2 = 1$ , temos

$$\begin{aligned}\|a\|_2^2 &= \|\lambda x\|_2^2 \\ &= |\lambda|^2 \cdot \|x\|_2^2 \\ &= \lambda^2,\end{aligned}$$

daí

$$\lambda = \pm \|a\|_2.$$

Desse modo, os pontos críticos de  $f|_{S^{n-1}}$  são  $x = \pm \frac{a}{\|a\|_2}$ . Facilmente, podemos ver que  $z = \frac{a}{\|a\|_2}$  é ponto de máximo de  $f|_{S^{n-1}}$ .

Agora, considere as composições

$$\pi_i \circ G : D \rightarrow \mathbb{R}$$

para  $i = 1, \dots, n$ . É fácil ver que o conjunto

$$\{\pi_i \circ G : i = 1, \dots, n\}$$

é linearmente independente. Seja  $h = \sum_{i=1}^n b_i (\pi_i \circ G)$  combinação linear não trivial das funções  $\pi_i \circ G$ . Como  $\sum_{i=1}^n b_i \pi_i$  atinge o seu máximo em um único ponto  $x_0 \in S^{n-1}$  e  $G$  é uma bijeção, segue que  $h$  atinge o seu máximo em um único ponto,  $G^{-1}(x_0)$ . Portanto, o subespaço  $\text{span} \{\pi_i \circ G, i = 1, \dots, n\}$ , nos dá a  $n$ -lineabilidade de  $\widehat{C}(D)$ . ■

**Corolário 2.1.**  $\widehat{C}[0, 2\pi)$  é 2-lineável.

**Demonstração:** Basta mostrarmos que existe uma bijeção contínua de  $[0, 2\pi)$  para  $S^1$ , a esfera unitária de  $\mathbb{R}^2$ . Com efeito, considere a aplicação

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi) &\rightarrow S^1 \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta)\end{aligned}$$

que é claramente contínua e bijetiva. ■

## 2.2 Generalizando a 2-lineabilidade de $\widehat{C}(\mathbb{R})$

Nessa seção, a reta dará lugar aos espaços vetoriais  $D$  com algumas propriedades que especificaremos no próximo teorema. Novamente, usaremos a esfera unitária como parâmetro para determinar a  $n$ -lineabilidade de  $\widehat{C}(D)$ .

**Teorema 2.2.** *Sejam  $n \geq 2$  um inteiro positivo e  $D$  um espaço topológico contendo um fechado  $Y$  tal que exista uma bijeção contínua  $F : Y \rightarrow S^{n-1}$  e uma extensão contínua de  $F$ ,  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $\|G(x)\|_2 < 1$  para todo  $x \notin Y$ . Então  $\widehat{C}(D)$  é  $n$ -lineável.*

**Demonstração:** O símbolo  $\pi_i$  representa a projeção sobre a  $i$ -ésima coordenada de  $\mathbb{R}^n$ . Note que  $S^{n-1} \subset G(D)$ , pois

$$S^{n-1} = F(Y) = G(Y) \subset G(D).$$

Além disso,  $G(D) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ . Vejamos que qualquer combinação não trivial

$$f := \sum_{i=1}^n b_i \pi_i : G(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

atinge o máximo em um único ponto  $x_0 \in G(D)$  e que esse ponto pertence a  $S^{n-1}$ . Restringindo  $\sum_{i=1}^n b_i \pi_i$  a  $S^{n-1} \subset G(D)$ , o mesmo argumento usado na prova do teorema anterior garante que existe um único  $x_0 \in S^{n-1}$  tal que  $f|_{S^{n-1}}$  atinja o máximo, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x) \leq \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x_0), \quad (2.1)$$

para todo  $x \in S^{n-1}$ . Como para qualquer  $x \in S^{n-1}$ ,  $-x \in S^{n-1}$ , temos

$$\sum_{i=1}^n b_i \pi_i(-x) \leq \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x_0),$$

e daí

$$-\sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x) \leq \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x_0). \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) obtemos

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x_0) \quad (2.3)$$

para todo  $x \in S^{n-1}$ . Agora só precisamos provar que se  $y \in G(D) \setminus S^{n-1}$ , então

$$\sum_{i=1}^n b_i \pi_i(y) < \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x_0).$$

O caso  $y = 0$  é trivial, e portanto consideremos  $y \neq 0$ . Como  $\|y\|_2 < 1$ , usando (2.3), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(y) &\leq \left| \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(y) \right| \\ &= \|y\|_2 \cdot \left| \sum_{i=1}^n b_i \pi_i \left( \frac{y}{\|y\|_2} \right) \right| \\ &< \left| \sum_{i=1}^n b_i \pi_i \left( \frac{y}{\|y\|_2} \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n b_i \pi_i(x_0). \end{aligned}$$

Até aqui provamos que qualquer combinação não trivial

$$f = \sum_{i=1}^n b_i \pi_i : G(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

atinge seu máximo em um único ponto  $x_0 \in G(D)$  e que este ponto pertence a  $S^{n-1}$ .

Agora, afirmamos que qualquer combinação linear não trivial

$$h := \sum_{i=1}^n b_i (\pi_i \circ G) : D \rightarrow \mathbb{R}$$

atinge o seu máximo apenas no ponto  $F^{-1}(x_0) \in D$ . De fato, observe que  $h$  atinge o máximo num ponto  $z \in D$  se, e somente se,  $f$  atinge o máximo em  $G(z)$ . Então, o único ponto de máximo de  $h$  é  $F^{-1}(x_0)$ . Como  $S^{n-1} \subset G(D)$  e as funções  $\pi_i, i = 1, \dots, n$ , são linearmente independentes em  $S^{n-1}$ , segue que  $\pi_i \circ G, i = 1, \dots, n$ , são linearmente independentes em  $D$ . Portanto, o subespaço vetorial dado por  $\text{span} \{ \pi_1 \circ G, \dots, \pi_n \circ G \}$  completa a prova. ■

**Corolário 2.2.** *O conjunto  $\widehat{C}(\mathbb{R})$  é 2-lineável em  $C(\mathbb{R})$ .*

**Demonstração:** Para  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , denotamos por  $|a, b|$  o segmento de reta aberto em  $\mathbb{R}^2$  de  $a$  até  $b$ . Tome o fechado  $Y = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ , uma bijeção contínua de  $[0, +\infty)$  em  $S^1$ , por exemplo,

$$F : [0, +\infty) \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto F(t) = \left( \cos \left( 2\pi - \frac{1}{\left( t + \frac{1}{2\pi} \right)} \right), \sin \left( 2\pi - \frac{1}{\left( t + \frac{1}{2\pi} \right)} \right) \right)$$

e um homeomorfismo

$$g : (-\infty, 0) \rightarrow |F(0), (0, 0)| \subset \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = F(0).$$

Defina a seguinte extensão contínua de  $F$ :

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{se } x \geq 0, \\ g(x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que  $\|G(x)\|_2 < 1$  para todo  $x \notin Y$ . De fato, se  $x \notin Y$  então  $x \in (-\infty, 0)$ , logo,

$$G(x) = g(x) \in |F(0), (0, 0)| \subset \mathbb{R}^2.$$

Como  $F(0) = (1, 0)$ , temos  $\|G(x)\|_2 < 1$ . Portanto, pelo teorema anterior  $\widehat{C}(\mathbb{R})$  é 2-lineável. ■

### 2.3 Generalizando a não-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 1]$

O compacto da reta,  $[0, 1]$ , dará lugar a compactos  $K$  de  $\mathbb{R}^m$ . O resultado principal desta seção tem por objetivo generalizar o resultado correspondente de Gurariy e Quarta e mostrar que o conjunto  $\widehat{C}(K)$  não é  $(m+1)$ -lineável. Antes de provar o teorema principal desta seção, provaremos alguns lemas técnicos.

**Lema 2.1.** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $D$  um espaço métrico tal que exista um espaço vetorial  $V$  de funções contínuas de  $D$  em  $\mathbb{R}$  satisfazendo*

$$(1) \dim(V) = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) *Cada  $0 \neq f \in V$  possui um único ponto de máximo.*

*Seja  $D' \subset D$  o conjunto dos pontos de máximo das funções que pertencem a  $V$ . Então o espaço vetorial*

$$V' := \{f|_{D'} : f \in V\}$$

*também satisfaz (1) e (2).*

**Demonstração:** Inicialmente mostremos que os elementos de  $V'$  satisfazem (2). De fato, observe que cada função não nula  $f|_{D'} \in V'$  possui um único ponto de máximo, pois  $f \in V$  possui um único ponto de máximo. Agora, provemos que  $\dim(V') = n$ .

Seja  $\{f_1, \dots, f_n\}$  uma base de  $V$ . Se  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  são tais que

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i|_{D'} = 0,$$

então

$$-\sum_{i=1}^n a_i f_i|_{D'} = 0.$$

Suponha que

$$g := \sum_{i=1}^n a_i f_i \neq 0,$$

e portanto

$$-g \neq 0.$$

Como os pontos de máximo de  $g$  e  $-g$  pertencem a  $D'$ , as imagens desses pontos de máximo são 0, pois

$$g|_{D'} = -g|_{D'} = 0.$$

Assim,  $|g|_{D'} = 0$ , logo podemos concluir que  $g = 0$ . Como o conjunto  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é linearmente independente, temos  $a_1 = \dots = a_n = 0$  e, portanto,  $\{f_1|_{D'}, \dots, f_n|_{D'}\}$  também é linearmente independente. Para completar a prova, considere a desigualdade  $\dim(V') \leq \dim(V)$ , que é obviamente verificada quando olhamos para a função

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V' \\ f &\mapsto f|_{D'}, \end{aligned}$$

que é claramente sobrejetiva. ■

**Lema 2.2.** *Mantendo a terminologia e a notação do Lema 2.1 e de sua demonstração, considere a função contínua*

$$\begin{aligned} F : D &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto (f_1(y), \dots, f_n(y)). \end{aligned}$$

Seja  $X := F(D')$ . Então

(1) Para cada  $v \in S^{n-1}$ , a função

$$\begin{aligned} g_v : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, v \rangle \end{aligned}$$

possui um único ponto de máximo.

(2) Para cada  $x \in X$  existe  $v \in S^{n-1}$  tal que  $x$  é o único ponto de máximo da função  $g_v$ .

(3) Se munirmos  $D'$  com a métrica induzida pela métrica de  $D$  e  $X$  com a métrica euclidiana do  $\mathbb{R}^n$ , então

$$F|_{D'} : D' \rightarrow X$$

é uma bijeção contínua.

**Demonstração:** (1) Dado  $v = (a_1, \dots, a_n) \in S^{n-1}$ , considere a função

$$g_v \circ F : D' \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para cada  $y \in D'$ ,

$$g_v \circ F(y) = \langle F(y), v \rangle = \sum_{i=1}^n a_i f_i|_{D'}(y).$$

Logo,  $g_v \circ F \in V'$ . Do Lema 2.1,  $g_v \circ F : D' \rightarrow \mathbb{R}$  possui um único ponto de máximo,  $d \in D'$ . Portanto,

$$\langle F(y), v \rangle \leq \langle F(d), v \rangle,$$

para todo  $y \in D'$ , onde a igualdade é verificada apenas quando  $y = d$ . Então

$$\langle x, v \rangle \leq \langle F(d), v \rangle$$

para todo  $x \in X$ . Assim,  $F(d) \in X$  é um ponto de máximo de  $g_v$ . Mostremos que este ponto é o único de máximo. Suponha que  $g_v$  tenha outro ponto de máximo,  $x' \in X$ . Neste caso,  $x' = F(d')$  para algum  $d' \neq d$  e a função

$$g_v \circ F : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

possui dois pontos de máximo, o que contraria o fato de  $g_v \circ F$  possuir apenas um.

(2) Para cada  $x \in X$  existe  $d \in D'$  tal que  $x = F(d)$ . Mas  $d$  é o ponto de máximo de alguma função não-nula

$$h := \sum_{i=1}^n a_i f_i|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = 1.$$

De fato, se  $d$  é ponto de máximo de  $h$ , onde  $(a_1, \dots, a_n)$  não é necessariamente unitário, então  $d$  também é ponto de máximo da função  $\frac{h}{\|(a_1, \dots, a_n)\|_2}$ .

Tomando  $v := (a_1, \dots, a_n) \in S^{n-1}$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i f_i|_{D'}(y) &= \langle F(y), v \rangle \\ &\leq \langle F(d), v \rangle \\ &= \langle x, v \rangle \end{aligned}$$

para todo  $y \in D'$ . Então,  $\langle z, v \rangle \leq \langle x, v \rangle$  para todo  $z \in X$ . Do item (1) segue que  $x$  é o único ponto de máximo de  $g_v$ .

(3) Como cada função coordenada  $f_i|_{D'}$  é contínua e  $X = F(D')$ , só precisamos provar que  $F|_{D'}$  é injetora. Suponha por absurdo que não é. Assim, se  $d'_1 \neq d'_2 \in D'$  são tais que  $F(d'_1) = F(d'_2)$  então

$$\begin{aligned} g_v \circ F(d'_1) &= \langle v, F(d'_1) \rangle \\ &= \langle v, F(d'_2) \rangle \\ &= g_v \circ F(d'_2) \end{aligned}$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ . Portanto, nem  $d'_1$  e nem  $d'_2$  podem ser pontos de máximo de  $g_v \circ F : D' \rightarrow \mathbb{R} \in V'$ , para qualquer  $v$ , pois se fossem deveríamos ter  $d'_1 = d'_2$ . Mas isso contraria o fato de  $D'$  ser o conjunto dos pontos de máximo das funções que pertencem a  $V$ . ■

**Definição 2.1.** *Seja  $n \geq 2$  e seja  $X$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  com  $\#X > 1$  satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *Para cada  $v \in S^{n-1}$ , a função*

$$\begin{aligned} g_v : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_v(x) = \langle x, v \rangle \end{aligned}$$

*possui um único ponto de máximo, denotado por  $x_v$ .*

(2) *Para cada  $x \in X$  existe  $v_x \in S^{n-1}$  tal que  $x$  é o único ponto de máximo da função  $g_{v_x}$ .*

*Defina a função*

$$\begin{aligned} f : S^{n-1} &\rightarrow X \\ v &\mapsto f(v) = x_v, \end{aligned}$$

*onde  $x_v$  é descrito em (1). De (2) segue que  $f$  é sobrejetiva.*

**Lema 2.3.** *Sejam  $X$  e a função  $f$  os mesmos da definição anterior. Seja  $K \subset X$  um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^n$ . Então  $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Como  $f^{-1}(K) \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , basta mostrarmos que  $f^{-1}(K)$  é fechado. Seja  $(v_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência em  $f^{-1}(K)$ . Como  $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$  e  $S^{n-1}$  é compacto, existe uma subsequência convergente

$$v_{n_j} \longrightarrow v \in S^{n-1}.$$

Para cada  $j$ , seja  $x_j = f(v_{n_j}) \in K$ . Como  $K$  é compacto, existe uma subsequência  $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$  tal que  $x_{j_k} \longrightarrow x \in K$ . Agora, como  $x_{j_k}$  é o único ponto de máximo da função  $g_{v_{n_{j_k}}}$  em  $X$ , temos

$$\langle f(v), v_{n_{j_k}} \rangle \leq \langle x_{j_k}, v_{n_{j_k}} \rangle.$$

Fazendo  $k \longrightarrow \infty$ , obtemos

$$\langle f(v), v \rangle \leq \langle x, v \rangle.$$

Mas  $f(v) = x_v$  é o único ponto de máximo de  $g_v$ , então  $f(v) = x$  e  $v \in f^{-1}(K)$ . Assim,  $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$  é fechado e, portanto, compacto. ■

**Lema 2.4.** *A função  $f$  da Definição 2.1 é contínua se, e somente se,  $X$  é compacto.*

**Demonstração:** Lembre que em  $X$  e  $S^{n-1}$  estamos considerando a métrica euclidiana do  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  é contínua. Como  $f$  é sobrejetiva e  $S^{n-1}$  é compacto, segue que  $X = f(S^{n-1})$  é compacto. Para a recíproca, suponha que  $X$  é compacto. Seja  $B$  um subconjunto fechado de  $X$ . Como  $X$  é um espaço métrico compacto, segue que  $B$  também é compacto em  $\mathbb{R}^n$ . Do Lema 2.3 sabemos que  $f^{-1}(B)$  é um subconjunto compacto de  $S^{n-1}$ , em particular fechado. Portanto,  $f$  é contínua. ■

**Teorema 2.3.** *Sejam  $n \geq 2$  e  $m \geq 1$  inteiros positivos. Então  $m < n$  se, e somente se, para todo conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\widehat{C}(K)$  não é  $n$ -lineável.*

**Demonstração:** Suponha por absurdo que  $m < n$  e que existam um compacto  $K \subset \mathbb{R}^m$  e um conjunto  $V \subset \widehat{C}(K)$ , de modo que  $V \cup \{0\}$  é um subespaço vetorial  $n$ -dimensional de  $C(K)$ , ou seja,  $\widehat{C}(K)$  é  $n$ -lineável. Aqui, o compacto  $K$  desempenhará o papel do espaço métrico  $D$  dos lemas anteriores.

Seja  $\{f_1, \dots, f_n\}$  uma base de  $V \cup \{0\}$  e defina

$$\begin{aligned} F : D &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto F(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y)) \end{aligned}$$

como no Lema 2.2. Também, como antes, seja  $D' \subset D$  o conjunto dos pontos de máximo das funções pertencentes a  $V$  e seja  $X := F(D')$ . Como  $n \geq 2$ , segue que  $\dim(V \cup \{0\}) \geq 2$ , logo,  $V$  contém funções não constantes. Sendo  $g \in V$  uma função não constante, é evidente que  $g$  e  $-g$  possuem diferentes pontos de máximo, logo,  $D'$  não é unitário. Pelo Lema 2.2 item (3), a restrição

$$F|_{D'} : D' \rightarrow X$$

é bijetiva, assim  $X$  também não é unitário. Desse modo,  $X$  satisfaz as condições da Definição 2.1. Considere a função

$$f : S^{n-1} \rightarrow X$$

da Definição 2.1. Vamos provar que  $D'$  é fechado em  $D$  e, conseqüentemente, compacto em  $\mathbb{R}^m$ . Seja  $(d_k)_{k=1}^{\infty}$  uma seqüência em  $D'$  convergindo para  $d$ . Pela compacidade de  $D$  segue que  $d \in D$ . Da Definição 2.1, para cada  $k$ ,

$$F(d_k) = f(v_k)$$

para algum  $v_k \in S_{n-1}$ , e isso significa que  $F(d_k)$  é o único ponto de máximo em  $X$  da função

$$\begin{aligned} g_{v_k} : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_{v_k}(x) = \langle x, v_k \rangle. \end{aligned}$$

Da compacidade de  $S^{n-1}$ ,  $(v_k)_{k=1}^{\infty}$  possui uma subsequência convergente

$$v_{k_j} \longrightarrow v \in S^{n-1}.$$

Note que

$$\langle F(d_{k_j}), v_{k_j} \rangle \geq \langle F(y), v_{k_j} \rangle$$

para todo  $y \in D'$ . Como os pontos  $y \in D'$  são pontos de máximo das funções  $g_v \circ F : D \rightarrow \mathbb{R}$ , a desigualdade

$$\langle F(d_{k_j}), v_{k_j} \rangle \geq \langle F(z), v_{k_j} \rangle$$

vale para cada  $z \in D$ . Usando a continuidade de  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  temos

$$\begin{aligned} \langle F(d), v \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle F(d_{k_j}), v_{k_j} \rangle \\ &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \langle F(z), v_{k_j} \rangle \\ &= \langle F(z), v \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $z \in D$ . Assim,  $d$  é ponto de máximo da função  $g_v \circ F : D \rightarrow \mathbb{R}$ , portanto,  $d \in D'$  e assim  $D'$  é fechado em  $D$ . Pelo Lema 2.2 item (3), sabemos que a função  $F : D' \rightarrow X$  é uma bijeção contínua entre o compacto  $D'$  e  $X$ , que é Hausdorff, logo  $F$  é um homeomorfismo<sup>2</sup>. Como  $D'$  é compacto, segue que  $X = F(D')$  é compacto e, pelo Lema 2.4, a função

$$f : S^{n-1} \rightarrow X$$

é contínua. Considerando  $\mathbb{R}^m$  convenientemente contido em  $\mathbb{R}^{n-1}$ , visto que  $m < n$ , a função

$$F^{-1} \circ f : S^{n-1} \rightarrow D' \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

é contínua. Pelo Teorema de Borsuk-Ulam, existe um par de antípodas  $v, -v \in S^{n-1}$  tal que

$$F^{-1} \circ f(v) = F^{-1} \circ f(-v).$$

Da injetividade de  $F^{-1}$  temos  $f(v) = f(-v) =: x$ . Como  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  é definida por  $f(v) = x_v$ , onde  $x_v$  é o único ponto de máximo de  $g_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_v(x) = \langle x, v \rangle$ , segue que  $g_v : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_{-v} : X \rightarrow \mathbb{R}$  têm  $x$  como ponto de máximo. Por outro lado,  $g_{-v} = -g_v$  pois

$$\begin{aligned} g_{-v}(z) &= \langle z, -v \rangle \\ &= -\langle z, v \rangle \\ &= -g_v(z) \end{aligned}$$

para todo  $z \in X$ . Logo,  $-g_v$  e  $g_v$  atingem o máximo no mesmo ponto, e portanto  $g_v$  é constante, o que é uma contradição, pois  $X$  tem mais de um ponto e  $g_v$  atinge o máximo apenas uma única vez em  $X$ .

A recíproca obtemos por contradição. Suponha que  $m \geq n$  e tome o compacto  $K = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ . Escolhendo, por exemplo, a bijeção  $Id : K = S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  segue, pelo Teorema 2.1, que  $\widehat{C}(K)$  é  $n$ -lineável. ■

**Corolário 2.3.** *O conjunto  $\widehat{C}[a, b]$  não é 2-lineável.*

No exemplo que segue, veremos que num espaço de dimensão infinita pode existir um compacto  $K$ , de modo que  $\widehat{C}(K)$  é lineável.

<sup>2</sup>Estamos usando o seguinte resultado de topologia: Toda aplicação  $f : K \rightarrow Y$ , contínua e bijetiva, de um espaço compacto  $K$  sobre um espaço de Hausdorff  $Y$  é um homeomorfismo.

**Exemplo 2.1.** Seja  $K$  o seguinte conjunto de  $\ell_2$ :

$$K = \left\{ \left( \frac{a_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} : (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \text{ e } \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 \leq 1 \right\}.$$

Claramente, vemos que  $K$  é um subconjunto do cubo de Hilbert

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 : |a_n| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Como o cubo de Hilbert é compacto (ver [5], pag. 229), para provar que  $K$  é compacto, basta mostrarmos que  $K$  é fechado. Seja então

$$(v_j)_{j=1}^{\infty} = \left( \left( \frac{v_n^j}{n} \right)_{n=1}^{\infty} \right)_{j=1}^{\infty}$$

uma seqüência em  $K$  convergindo para

$$w = (w_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Como a convergência de uma seqüência em  $\ell_2$  implica na convergência de suas seqüências coordenadas, segue que

$$w_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{v_n^j}{n}.$$

Assim,  $nw_n = \lim_{j \rightarrow \infty} v_n^j$  para cada  $n$  fixado. Para cada  $k$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k n^2 |w_n|^2 &= \sum_{n=1}^k \lim_{j \rightarrow \infty} |v_n^j|^2 \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |v_n^j|^2 \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sup \sum_{n=1}^{\infty} |v_n^j|^2 \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sup \|(v_n^j)_{n=1}^{\infty}\|_2^2 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Logo, temos  $\|(nw_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 \leq 1$ , provando que  $w \in K$ . Portanto,  $K$  é um subconjunto compacto de  $\ell_2$ .

Agora, mostremos que  $\widehat{C}(K)$  é lineável, isto é,  $\widehat{C}(K) \cup \{0\}$  contém um subespaço de dimensão infinita de  $C(K)$ . Considere a função

$$\begin{aligned} F : K &\rightarrow \ell_2 \\ \left( \frac{a_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} &\mapsto F \left( \left( \frac{a_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} \right) = (a_n)_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Seja  $\pi_j : \ell_2 \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção sobre a  $j$ -ésima coordenada,  $j \in \mathbb{N}$ . Para cada  $j$ , a função

$$\pi_j \circ F : K \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua, pois  $\pi_j \circ F = j \cdot \pi_j$ . Com efeito, dada  $\left(\frac{b_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in K$ ,

$$\begin{aligned} \pi_j \circ F \left( \left( \frac{b_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} \right) &= \pi_j((b_n)_{n=1}^{\infty}) \\ &= b_j \\ &= j \cdot \frac{b_j}{j} \\ &= j \cdot \pi_j \left( \left( \frac{b_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} \right). \end{aligned}$$

Claramente, as funções  $\pi_j \circ F$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , são linearmente independentes. De fato, tome uma combinação linear não trivial qualquer,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j (\pi_j \circ F),$$

onde  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Considere a sequência  $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ , tal que  $c_j = \frac{1}{\alpha_j}$  se  $\alpha_j \neq 0$ ,  $c_j = 1$  se  $\alpha_j = 0$  e  $c_j = 0$  se  $j > n$ . Seja  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\alpha_{j_0} \neq 0$ . Assim,  $\left(\frac{c_j}{j \| (c_j)_{j=1}^{\infty} \|_2^2}\right)_{j=1}^{\infty} \in K$  e

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \pi_j \circ F \left( \left( \frac{c_j}{j \| (c_j)_{j=1}^{\infty} \|_2^2} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot j \cdot \frac{c_j}{j \| (c_j)_{j=1}^{\infty} \|_2^2} \\ &= \alpha_{j_0} \cdot j_0 \cdot \frac{c_{j_0}}{j_0 \| (c_j)_{j=1}^{\infty} \|_2^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \alpha_j \cdot j \cdot \frac{c_j}{j \| (c_j)_{j=1}^{\infty} \|_2^2} \\ &\geq \frac{1}{\| (c_j)_{j=1}^{\infty} \|_2^2} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Seja

$$f := \sum_{j=1}^k b_j (\pi_j \circ F)$$

uma combinação linear não trivial dessas funções contínuas. Tomando  $b = (b_1, \dots, b_k, 0, 0, \dots) \in$

$\ell_2$ , temos, para todo  $x = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) \in K$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^k b_j \cdot (\pi_j \circ F(x)) \\ &= \sum_{j=1}^k b_j \cdot x_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot x_j \\ &= \langle b, (x_j)_{j=1}^{\infty} \rangle \\ &= \langle b, F(x) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $b \in \ell_2^k = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2 : a_i = 0 \text{ para todo } i > k\}$  e  $\|F(x)\|_2 \leq 1$  para todo  $x \in K$ ,

$$\begin{aligned} f(x) = \langle b, F(x) \rangle &\leq |\langle b, F(x) \rangle| \\ &\leq \|b\|_2 \cdot \|F(x)\|_2 \\ &\leq \|b\|_2 \\ &= \frac{\|b\|_2^2}{\|b\|_2} \\ &= \left\langle b, \frac{b}{\|b\|_2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = \langle b, F(x) \rangle < \left\langle b, \frac{b}{\|b\|_2} \right\rangle$$

sempre que  $F(x) \neq \frac{b}{\|b\|_2}$ , pois como vimos na demonstração do Teorema 2.1, a função  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \langle b, x \rangle$ , atinge seu máximo apenas em  $x = \frac{b}{\|b\|_2}$ . Agora, como  $F$  é uma bijeção entre  $K$  e a bola unitária fechada de  $\ell_2$ , existe um único ponto  $y \in K$  tal que  $F(y) = \frac{b}{\|b\|_2}$ . Isso mostra que  $f$  atinge seu máximo em  $y$ . Note que esse máximo é atingido apenas em  $y$ , pois  $f$  atinge seu máximo em  $z \in K$  se, e somente se,

$$g := \sum_{j=1}^k b_j \pi_j : F(K) \rightarrow \mathbb{R}$$

atinge seu máximo em  $F(z)$ , pois  $F$  é bijeção. Então, o único ponto de máximo de  $f$  é  $F^{-1}\left(\frac{b}{\|b\|_2}\right) = y$ .

Com isso encerramos o estudo de lineabilidade deste trabalho. Para mais resultados o leitor poderá consultar [1].

# Capítulo 3

## O Teorema de Borsuk-Ulam

No capítulo anterior, mais precisamente no Teorema 2.3, usamos um resultado clássico em topologia, o Teorema de Borsuk-Ulam. Neste capítulo, apresentamos uma demonstração desse teorema usando o conceito de grau de uma aplicação de  $S^n$  em  $S^n$  dado em [3]. Doravante,  $\|\cdot\|$  representará a norma euclidiana.

### 3.1 Homotopia

**Definição 3.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são ditas homotópicas (se escreve  $f \simeq g$ ) se existe uma aplicação contínua  $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $\Phi(x, 0) = f(x)$  e  $\Phi(x, 1) = g(x)$  para cada  $x \in X$ .*

Se  $f : X \rightarrow Y$  é homotópica a uma função constante então  $f$  é chamada de *homotopicamente nula* e escrevemos  $f \simeq 0$ . Podemos mostrar que homotopia é uma relação de equivalência. O conjunto das funções que são homotópicas entre si é chamado de classe de homotopia dentro do espaços das funções.

**Proposição 3.1.** *Seja  $X$  um espaço topológico qualquer. Se  $f, g : X \rightarrow S^n$  são duas aplicações contínuas tais que para cada  $x \in X$ ,  $f(x)$  e  $g(x)$  não são pontos antípodas, isto é,  $f(x) \neq -g(x)$ , então  $f \simeq g$ .*

**Demonstração:** Com efeito, se  $f(x) \neq -g(x)$  para cada  $x \in X$ , basta construirmos a homotopia  $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow S^n$  definida por

$$\Phi(x, t) = \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}.$$

Note que  $\Phi$  está bem definida pois o denominador nunca se anula e, além disso,  $\Phi$  é claramente contínua. Portanto,  $f \simeq g$ . ■

**Corolário 3.1.** *Toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow S^n$  não sobrejetora é homotopicamente nula.*

**Demonstração:** Sendo  $f$  não sobrejetora, tome  $c \in S^n \setminus f(X)$  e considere a aplicação constante

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow S^n \\ x &\mapsto -c. \end{aligned}$$

Note que  $f$  e  $g$  não são antipodais, logo, pela proposição anterior são homotópicas. ■

## 3.2 Simplexo Geométrico

A definição que segue generaliza o conceito de triângulo no espaço  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.2.** *Dados  $n + 1$  pontos distintos  $p_0, \dots, p_n$  em  $\mathbb{R}^n$ , o  $n$ -simplexo geométrico  $\sigma^n$  gerado por  $p_0, \dots, p_n$  é o conjunto*

$$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i : \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, n \right\},$$

denotado por  $(p_0, \dots, p_n)$ . Qualquer  $\sigma^q \subset \sigma^n$  é chamado de  $q$ -face de  $\sigma^n$ . Os pontos  $p_0, \dots, p_n$  são chamados de vértices de  $\sigma^n$ .

Um  $n$ -simplexo aberto é o interior da envoltória convexa que os seus vértices geram no espaço euclidiano  $n$ -dimensional, ou seja, se  $\sigma^n = (p_0, \dots, p_n)$  é aberto o encontramos fazendo  $0 < \lambda_i < 1$  para  $i = 0, \dots, n$ . Por exemplo, no caso 1-dimensional dados  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^1$  é o intervalo aberto  $(p_0, p_1) \subset \mathbb{R}$ ; já em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sigma^2 = (p_0, p_1, p_2)$  é o triângulo de vértices  $p_0, p_1$  e  $p_2$  exceto a sua fronteira. Os  $\lambda_i$ , com  $i = 0, \dots, n$ , são chamadas as *coordenadas baricêntricas* de  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i$  em  $\sigma^n$ . Fixado  $n$  podemos denotar o  $n$ -simplexo simplesmente por  $\sigma$ .

Dado  $\{p_0, \dots, p_{n+1}\}$  o conjunto de quaisquer  $n+2$  pontos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , considere o  $(n+1)$ -simplexo geométrico  $\sigma = (p_0, \dots, p_{n+1})$ .  $\sigma$  é dito *degenerado* se, e somente se, os  $n+2$  vértices estão em um hiperplano  $n$ -dimensional, ou, equivalentemente, que  $(p_0, \dots, p_{n+1})$

tenha volume igual a zero, isto é, se  $x_i^1, \dots, x_i^{n+1}$  são as coordenadas de  $p_i$ , então

$$\det(p_0, \dots, p_{n+1}) := \begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^{n+1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^1 & \cdots & x_{n+1}^{n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Um  $(n + 1)$ -simplexo *ordenado* é um  $(n + 1)$ -simplexo que possui uma ordenação bem definida de seus vértices. Por exemplo, o simplexo  $\sigma = (p_0, \dots, p_{n+1})$  que possui a ordenação  $p_0 < \cdots < p_{n+1}$ , será escrito da seguinte forma

$$[\sigma] = [p_0, \dots, p_{n+1}].$$

O  *sinal* do simplexo ordenado  $[p_0, \dots, p_{n+1}]$  é dado pelo sinal de  $\det(p_0, \dots, p_{n+1})$ . Se o simplexo é degenerado não temos sinal. Pode-se ver facilmente que uma permutação *par* não altera o sinal.

**Lema 3.1.** *Sejam  $[\sigma] = [p_0, p_1, \dots, p_{n+1}]$  e  $[\sigma'] = [p'_0, p_1, \dots, p_{n+1}]$  dois  $(n + 1)$ -simplexos ordenados não degenerados possuindo a face  $(p_1, \dots, p_{n+1})$  em comum e seja  $H$  o hiperplano  $n$ -dimensional que contém esta face. Então  $p_0$  e  $p'_0$  estão em um mesmo lado de  $H$  se, e somente se,  $[\sigma]$  e  $[\sigma']$  possuem o mesmo sinal.*

**Demonstração:** Dizer que os pontos estão de um mesmo lado do hiperplano  $H$  significa que o segmento de reta que os une não intersepta  $H$ . Então, seja  $\lambda p_0 + (1 - \lambda)p'_0$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , o segmento de reta que une os pontos  $p_0$  e  $p'_0$ . Logo,  $p_0$  e  $p'_0$  estão do mesmo de  $H$  se, e somente se, não existe  $\lambda \in [0, 1]$  tal que

$$\det[\lambda p_0 + (1 - \lambda)p'_0, p_1, \dots, p_{n+1}] = 0.$$

Por propriedade de determinante segue que

$$\det[\lambda p_0 + (1 - \lambda)p'_0, p_1, \dots, p_{n+1}] = \lambda \det[\sigma] + (1 - \lambda) \det[\sigma'].$$

Logo,  $p_0$  e  $p'_0$  estão do mesmo lado de  $H$  se, e somente se,  $0$  não pertence ao intervalo fechado  $[\det \sigma, \det \sigma']$ , ou seja,  $\det \sigma \cdot \det \sigma' > 0$ . Portanto,  $[\sigma]$  e  $[\sigma']$  têm o mesmo sinal. ■

O lema acima nos mostra que se  $[\sigma] = [p_0, p_1, \dots, p_n]$  tem sinal positivo e  $p_0$  e  $p'_0$  estão em lados diferentes do hiperplano que contém  $[p_1, \dots, p_n]$  então  $[\sigma'] = [p'_0, p_1, \dots, p_n]$  tem sinal negativo. Logo, para orientar  $[\sigma']$  de forma positiva permutaremos os seus vértices uma quantidade ímpar de vezes.

A seguir, definimos um tipo importante de aplicação entre simplexos geométricos.

**Definição 3.3.** *Dados dois simplexos geométricos  $\sigma_1 = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  e  $\sigma_2 = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ , uma aplicação baricêntrica entre  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  é uma aplicação da seguinte forma*

$$f : \begin{array}{ccc} \sigma_1 & \rightarrow & \sigma_2 \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i & \mapsto & \sum_{i=0}^n \lambda_i q_i. \end{array}$$

*Ou seja,  $f$  associa os pontos que possuem coordenadas baricêntricas iguais.*

### 3.3 O grau de uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$

De maneira informal, o grau de uma aplicação contínua  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , nada mais é que o número de vezes em que  $f(x)$  rotaciona em torno de  $S^1$  quando  $x$  executa uma rotação orientada de  $S^1$ . Se  $f(x)$  executa a rotação orientada positivamente o grau é positivo do contrário é negativo.

Para obter o grau vamos proceder da seguinte maneira: inicialmente oriente  $S^1$  de modo que exista um sentido de rotação definido e divida  $S^1$  em arcos pequenos de modo que a imagem por  $f$  desses arcos não possua pontos antipodais, ou seja, tenham diâmetro menor que 1. Sejam  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = x_1$  os pontos da divisão na ordem em que torna a rotação positiva. A partir de agora trabalharemos apenas com os pontos  $f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$  seja  $\alpha_i$  o menor arco entre  $f(x_i)$  e  $f(x_{i+1})$ , chamamos tal arco de positivo, se tiver orientado positivamente, e negativo caso contrário. Escolha um ponto  $\xi \in S^1$ , que não seja um  $f(x_i)$  e seja  $P(\xi)$  o número de positivos  $\alpha_i$  que contêm  $\xi$  e  $N(\xi)$  o número de negativos  $\alpha_i$  que contêm  $\xi$ . Com a notação estabelecida acima temos a seguinte

**Definição 3.4.** *O número  $P(\xi) - N(\xi)$  é chamado o grau de  $f$ .*

Mostraremos posteriormente que o número definido acima independe da escolha de  $\xi$ , assim como a maneira que dividimos  $S^1$  em arcos. Vemos isso claramente na aplicação identidade  $Id : S^1 \rightarrow S^1$ .

**Exemplo 3.1.** *Para cada  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  a aplicação*

$$f : \begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & S^1 \\ e^{i\theta} & \mapsto & e^{in\theta} \end{array}$$

*tem grau  $n$ .*

### 3.4 O grau de uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^n$

A partir de agora generalizaremos o conceito de grau para uma aplicação  $f : S^n \rightarrow S^n$ , com  $n \geq 1$ .

Até aqui estudamos as propriedades dos  $(n + 1)$ -simplexos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . A partir de agora vamos estudar os simplexos de  $S^n$ .

Considere  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $\{p_0, \dots, p_n\}$  é um conjunto qualquer de  $n + 1$  pontos em  $S^n$  tais que a distância entre quaisquer dois pontos seja menor que 1, a sua envoltória convexa não contém a origem, assim, podemos projetá-la radialmente em  $S^n$ , isto é, normalizar cada ponto da envoltória convexa.

**Definição 3.5.** *Sejam  $p_0, p_1, \dots, p_n$  pontos distintos em  $S^n$  tais que a envoltória convexa formada por esses pontos não possua a origem. A projeção radial em  $S^n$  dessa envoltória é chamada de  $n$ -simplexo esférico  $\sigma = (p_0, \dots, p_n)$ .*

O simplexo esférico  $\sigma$  é degenerado se, e somente se, os seus  $n + 1$  vértices juntos com a origem pertencem a um hiperplano  $n$ -dimensional, isto é, se o  $(n + 1)$ -simplexo  $(p_0, \dots, p_n, 0)$  é degenerado em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Assim como antes, um  $n$ -simplexo esférico *ordenado* é um  $n$ -simplexo esférico que possui uma ordenação definida de seus vértices. O sinal de um  $n$ -simplexo esférico ordenado  $[p_0, \dots, p_n]$  é definido como sendo o sinal do  $(n + 1)$ -simplexo ordenado  $[p_0, \dots, p_n, 0]$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Podemos estender o conceito de aplicação baricêntrica a aplicações entre simplexos esféricos, por associar pontos que possuem as mesmas coordenadas baricêntricas nos simplexos geométricos antes de serem projetados radialmente em  $S^n$ .

A partir de agora, quando usarmos o termo simplexo ( $n$ -simplexo) estaremos nos referindo aos simplexos ( $n$ -simplexos) esféricos de  $S^n$ .

**Definição 3.6.** *Uma triangulação  $T$  de  $S^n$  é uma decomposição da mesma em um número finito de simplexos esféricos não degenerados e não sobrepostos tais que cada  $(n - 1)$ -face de um  $n$ -simplexo é comum a apenas outro  $n$ -simplexo esférico.*

Em alguns momentos confundiremos uma triangulação  $T$  com o conjunto de seus vértices.

Sejam  $S^n$  e  $\Sigma^n$  duas esferas  $n$ -dimensionais e  $T$  uma triangulação de  $S^n$ . Uma aplicação vértice própria  $\varphi : T \rightarrow \Sigma^n$  é uma aplicação definida apenas nos vértices de  $T$  e possui a seguinte propriedade: Se  $p_0, \dots, p_n$  são vértices de um simplexo de  $T$  então o conjunto  $\{\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_n)\} \subset \Sigma^n$  tem diâmetro menor que 1, e para cada simplexo esférico  $\sigma = (p_0, \dots, p_n) \in T$ , existe um único simplexo em  $\Sigma^n$  que é a envoltória convexa do conjunto  $\{\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_n)\}$  projetada em  $\Sigma^n$ , denotado por  $\varphi(\sigma)$ . Se  $\sigma$  é um simplexo ordenado,  $[\sigma] = [p_0, \dots, p_n]$ , então  $\varphi[\sigma] := [\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_n)]$ . Embora a ordenação de  $[\sigma]$  determine a de  $\varphi[\sigma]$ , é óbvio que o sinal de  $[\sigma]$  pode ser diferente do sinal de  $\varphi[\sigma]$ , como podemos ver no próximo exemplo.

**Exemplo 3.2.** Dada uma triangulação  $T$  de  $S^n$ , suponha que  $\varphi : T \rightarrow \Sigma^n$  leva cada vértice na sua antípoda, assim se  $[\sigma] = [p_0, \dots, p_n]$ , então  $\varphi[\sigma] = [-p_0, \dots, -p_n]$ , logo

$$\det \varphi[\sigma] = \begin{vmatrix} -x_0^1 & \cdots & -x_0^{n+1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -x_n^1 & \cdots & -x_n^{n+1} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \det[\sigma],$$

onde  $p_i = (x_i^1, \dots, x_i^{n+1})$  para cada  $i = 0, \dots, n$ .

Note que o conjunto  $\{\varphi(\sigma) : \sigma \in T\}$  pode não formar uma triangulação para  $\Sigma^n$ , pois poderão existir simplexos sobrepostos ou degenerados.

Seja  $T$  uma triangulação de  $S^n$  e  $\varphi : T \rightarrow \Sigma^n$  uma aplicação vértice própria. Ordene cada  $n$ -simplexo de  $T$  positivamente e tome  $\xi$  qualquer ponto do conjunto  $\{\varphi[\sigma] : \sigma \in T\}$  a menos da fronteira. O simplexo  $\varphi[\sigma]$  que contém  $\xi$  será chamado de *positivo* se estiver orientado positivamente, e de *negativo* se estiver orientado negativamente.

Agora, seja  $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$  uma aplicação contínua. Como  $S^n$  é compacto, podemos encontrar uma triangulação  $T$  de  $S^n$  tal que  $\text{diam}(f(\sigma)) < 1$ , para cada  $\sigma \in T$ . Isso nos permitirá definir uma aplicação vértice própria  $\varphi_f$  associada a  $f$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_f : T &\rightarrow \Sigma^n \\ p &\mapsto \varphi_f(p) = f(p), \end{aligned}$$

para cada vértice  $p$  de  $T$ .

**Definição 3.7.** Sejam  $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$  uma aplicação contínua,  $T$  triangulação de  $S^n$  e  $\varphi_f$  a aplicação vértice própria associada a  $f$ . Sejam  $P(\xi, T, \varphi)$  e  $N(\xi, T, \varphi)$ , respectivamente,

o número de positivos e negativos  $\varphi_f[\sigma]$  contendo  $\xi$ . O número inteiro

$$G(\xi, T, \varphi_f) = P(\xi, T, \varphi_f) - N(\xi, T, \varphi_f)$$

é chamado o grau de  $f$ .

Os próximos lemas nos mostrarão que o grau de uma aplicação  $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$  depende do ponto  $\xi \in \Sigma^n$  e da triangulação  $T$  de  $S^n$ .

**Lema 3.2.**  $G(\xi, T, \varphi_f) = P(\xi, T, \varphi_f) - N(\xi, T, \varphi_f)$  é o mesmo para todo  $\xi \in \Sigma^n$  que não pertence a fronteira de nenhum  $\varphi_f(\sigma)$ .

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso 1:  $\varphi_f[\sigma]$  não é degenerado para todo  $[\sigma] \in T$ . Sejam  $\xi$  e  $\zeta$  dois pontos quaisquer de  $\Sigma^n$  que não pertencem a fronteira de nenhum  $\varphi[\sigma]$  com  $[\sigma] \in T$ . Ligue  $\xi$  a  $\zeta$  por uma curva suave em  $\Sigma^n$  que não passe por nenhuma face de dimensão menor que  $n - 1$  de qualquer  $\varphi(\sigma)$  e façamos  $\xi$  se aproximar de  $\zeta$  o longo dessa curva. Claramente,  $G(\xi, T, \varphi_f)$  muda apenas quando  $\xi$  atravessa alguma  $(n - 1)$ -face de algum  $\varphi_f(\sigma)$ , pois isso alteraria  $P(\xi, T, \varphi_f)$  ou  $N(\xi, T, \varphi_f)$ . Note que cada  $(n - 1)$ -simplexo  $(p_1, \dots, p_n)$  em  $T$  corresponde a uma  $(n - 1)$ -face de dois  $n$ -simplexos,  $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  e  $\sigma' = (p'_0, p_1, \dots, p_n)$  em  $T$  e, mais importante,  $[\sigma]$  e  $[\sigma']$  possuem sinais contrários devido ao Lema 3.1.

Agora, seja  $H$  o hiperplano  $n$ -dimensional que passa pela origem e por  $(\varphi_f(p_1), \dots, \varphi_f(p_n))$ , a  $(n - 1)$ -face a ser atravessada por  $\xi$ . Temos duas possibilidades:

1.  $\varphi_f(p_0)$  e  $\varphi_f(p'_0)$  estão do mesmo lado de  $H$ . Então  $\xi$  sai (ou entra) de  $\varphi_f(\sigma)$  e  $\varphi_f(\sigma')$  quando atravessa  $H$ . De acordo com o Lema 3.1  $\varphi_f[\sigma] = [\varphi_f(p_0), \dots, \varphi_f(p_n)]$  e  $\varphi_f[\sigma'] = [\varphi_f(p'_0), \dots, \varphi_f(p_n)]$  deveriam possuir o mesmo sinal, no entanto, o sinal de cada  $\varphi_f(\sigma)$  é determinado pelos simplexos positivos de  $T$ , então se, por exemplo,  $[\sigma]$  está ordenado positivamente e  $[\sigma']$  negativamente, se reordenarmos  $[\sigma']$  de forma a torná-lo positivo, estaremos fazendo uma permutação ímpar de seus elementos, que implicará numa permutação ímpar dos elementos de  $\varphi_f[\sigma']$  alterando o seu sinal. Portanto, quando  $\xi$  atravessa  $H$  perde (ou ganha) um simplexo positivo e um simplexo negativo, consequentemente  $G(\xi, T, \varphi_f)$  não se altera.
2.  $\varphi_f(p_0)$  e  $\varphi_f(p'_0)$  estão em lados opostos de  $H$ . Então,  $\xi$  sai (digamos) de  $\varphi_f(\sigma)$  e entra em  $\varphi_f(\sigma')$ . Novamente pelo Lema 3.1 deveríamos ter sinais diferentes para  $\varphi_f(\sigma)$  e  $\varphi_f(\sigma')$ , mas como o sinal de cada  $\varphi_f(\sigma)$  é determinado a partir dos simplexos positivos de  $T$  segue

que  $\xi$  sai de um simplexo e entra em outro com mesmo sinal. Portanto,  $G(\xi, T, \varphi_f)$  não é alterado. Assim, concluímos a demonstração para o caso não degenerado.

Caso 2:  $\varphi_f(\sigma)$  é degenerado para algum  $\sigma \in T$ . Fixando  $\xi$  e  $\zeta$  em  $\Sigma^n$  podemos encontrar  $\varepsilon > 0$  e uma aplicação vértice própria  $\varphi' : T \rightarrow \Sigma^n$  tal que:

- a)  $\varphi'(\sigma)$  não é degenerado e  $\|\varphi_f(p) - \varphi'(p)\| < \varepsilon$  para cada vértice  $p$  em  $T$ .
- b) Sempre que  $\varphi_f(\sigma)$  é não degenerado,  $\varphi_f[\sigma]$  e  $\varphi'[\sigma]$  possuem o mesmo sinal.
- c)  $\xi$  (e  $\zeta$ ) está no interior de  $\varphi'(\sigma)$  se, e somente se, está no interior de  $\varphi_f(\sigma)$ .

De fato, para cada  $\sigma \in T$  tal que  $\varphi_f(\sigma)$  é degenerado, tome

$$\varepsilon = \min\{d(\xi, \varphi_f(\sigma)), d(\zeta, \varphi_f(\sigma))\}.$$

Agora, seja  $\sigma = (p_0, \dots, p_n)$  um simplexo tal que  $\varphi_f(\sigma) = (\varphi_f(p_0), \dots, \varphi_f(p_n))$  é degenerado. Então os pontos  $\varphi_f(p_0), \dots, \varphi_f(p_n)$  e 0 pertencem a um hiperplano de dimensão menor que  $n - 1$ . Fixe os  $\varphi_f(p_i)$  necessários pra construir junto com a origem tal hiperplano e translade sobre  $\Sigma^n$  os demais pontos a uma distância  $\frac{\varepsilon}{2}$  a fim de construir um simplexo esférico não degenerado  $\hat{\sigma} \in \Sigma^n$ . Os pontos  $\varphi_f(p_i)$  fixados denotemos por  $v_i$  e os pontos obtidos ao transladarmos os  $\varphi_f(p_j)$  restantes denotemos por  $v_j$ ,  $i \neq j$ . Juntos,  $v_i$  e  $v_j$  formarão os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  do simplexo  $\hat{\sigma}$ , dessa forma, teremos  $\varphi_f(p_i) = v_i$  e  $\|\varphi_f(p_j) - v_j\| = \frac{\varepsilon}{2}$ . Definamos a seguinte aplicação

$$\varphi' : T \rightarrow \Sigma^n$$

$$\sigma \mapsto \varphi'(\sigma) = \begin{cases} \varphi_f(\sigma), & \text{se } \varphi_f(\sigma) \text{ não é degenerado} \\ \hat{\sigma}, & \text{se } \varphi_f(\sigma) \text{ é degenerado.} \end{cases}$$

Podemos ver que o valor de  $\varepsilon$  e a aplicação  $\varphi'$  satisfazem a), b) e c).

Agora, olhando para os positivos e negativos que surgem de  $\varphi_f$  e  $\varphi'$  pela triangulação  $T$ , temos, pelos itens b) e c),  $P(\alpha, T, \varphi_f) = P(\alpha, T, \varphi')$  e  $N(\alpha, T, \varphi_f) = N(\alpha, T, \varphi')$ ,  $\alpha = \xi, \zeta$ , daí e pelo Caso 1 segue que

$$\begin{aligned} G(\xi, T, \varphi_f) &= P(\xi, T, \varphi_f) - N(\xi, T, \varphi_f) \\ &= P(\xi, T, \varphi') - N(\xi, T, \varphi') \\ &= P(\zeta, T, \varphi') - N(\zeta, T, \varphi') \\ &= P(\zeta, T, \varphi_f) - N(\zeta, T, \varphi_f) \\ &= G(\zeta, T, \varphi_f). \end{aligned}$$

■

A partir de agora podemos usar  $G(T, \varphi_f)$  para denotar o grau de uma aplicação contínua  $f : S^n \rightarrow \Sigma^n$ .

Os argumentos usados na prova do lema anterior para o caso 2, nos fornecem um resultado mais geral:

**Lema 3.3.** *Dados quaisquer  $T, \varphi$  e  $\xi$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que uma aplicação vértice própria  $\varphi' : T \rightarrow \Sigma^n$  satisfaz  $\|\varphi(p) - \varphi'(p)\| < \varepsilon$  para cada vértice  $p$ , então  $G(\xi, T, \varphi) = G(\xi, T, \varphi')^1$ .*

**Lema 3.4.**  *$G(T, \varphi_f)$  independe da triangulação  $T$  de  $S^n$ .*

**Demonstração:** Sejam  $T$  e  $T'$  duas triangulações de  $S^n$  e sejam  $\varphi_f$  e  $\varphi'_f$  as aplicações vértices associadas a  $f$ . Considere a triangulação  $T''$  formada a partir da união dos vértices de  $T$  e  $T'$ . Mostremos que  $G(\varphi_f, T)$  e  $G(\varphi'_f, T')$  são iguais a  $G(\varphi''_f, T'')$ .

Como  $S^n$  é compacto existe uma quantidade finita de simplexos esféricos em  $T$  e  $T'$ , o que implica numa quantidade finita de vértices para tais triangulações. Se  $T$  e  $T'$  possuem respectivamente  $p$  e  $q$  vértices, então  $T''$  tem no máximo  $p+q$  vértices. Como as funções vértice próprias são definidas apenas nos vértices das triangulações, mostraremos por indução que inserindo, por exemplo, os  $q$  vértices de  $T'$  na triangulação  $T$  obtendo assim a triangulação  $T_q = T''$ , então  $G(\varphi_f, T) = G(\varphi_f^q, T_q)$ , onde  $\varphi_f$  e  $\varphi_f^q$  estão associadas a  $f$ . Para  $n = 1$ . Introduzimos  $v_1 \in T'$  em  $T$ , criando uma triangulação  $T_1$  que pode ou não coincidir com  $T$ . Mostremos que  $G(\varphi_f, T) = G(\varphi_f^1, T_1)$ . Considere a aplicação vértice própria  $\varphi_f^1 : T_1 \rightarrow \Sigma^n$ . Note que  $f(v_1)$  pertence a  $\varphi_f(\sigma)$  sempre que  $v_1$  pertence a algum  $\sigma \subset T$ , assim, tomamos  $\alpha \in \Sigma^n$  tal que  $\alpha \notin \varphi_f(\sigma)$ , isso evitará que  $\alpha$  pertença a um novo positivo ou negativo que surgiu quando consideramos o ponto  $f(v_1)$  em  $\Sigma^n$ . Dessa forma, para esse  $\alpha \in \Sigma^n$  segue que  $G(\alpha, T, \varphi_f) = G(\alpha, T_1, \varphi_f^1)$ , junto com o Lema 3.2 temos

$$G(T, \varphi_f) = G(\alpha, T, \varphi_f) = G(\alpha, T_1, \varphi_f^1) = G(T_1, \varphi_f^1)$$

e isso prova o primeiro passo de indução. Por hipótese de indução, ao introduzirmos  $q - 1$  vértices,  $v_1, \dots, v_{q-1}$ , de  $T'$  em  $T$  obtendo a triangulação  $T_{q-1}$ , temos  $G(T, \varphi_f) = G(T_{q-1}, \varphi_f^{q-1})$ , onde  $\varphi_f^{q-1} : T_{q-1} \rightarrow \Sigma^n$  é a aplicação vértice própria associada a  $f$ . Mos-

---

<sup>1</sup>Aqui, o símbolo  $G(\xi, T, \varphi)$  não está sendo usado para denotar o grau de uma aplicação contínua, mas apenas a diferença  $P(\xi, T, \varphi) - N(\xi, T, \varphi)$ .

tremos que o mesmo acontece quando introduzimos os  $q$  vértices. Note que

$$T'' = T_q = T \cup T' = T \cup \{v_1, \dots, v_q\} = T_{q-1} \cup \{v_q\}.$$

Então, pela hipótese de indução, para mostrar que  $G(T, \varphi_f) = G(T_q, \varphi_f^q)$  basta mostrar que  $G(T_{q-1}, \varphi_f^{q-1}) = G(T_q, \varphi_f^q)$ . Mas isso nada mais é do que a repetição do primeiro passo de indução, logo  $G(T, \varphi_f) = G(T'', \varphi_f'')$ . Procedendo de modo análogo, mostramos que ao introduzir os  $p$  vértices de  $T$  em  $T'$  obtendo a triangulação  $T''$ ,  $G(T', \varphi_f') = G(T'', \varphi_f'')$ . Portanto,  $G(T, \varphi_f) = G(T', \varphi_f')$  o que encerra a demonstração do lema. ■

A partir de agora usaremos  $G(f)$  para representar o grau de uma aplicação contínua  $f : S^n \rightarrow S^n$ .

**Exemplo 3.3.** Considere a aplicação identidade  $Id : S^n \rightarrow S^n$ . É claro que  $G(Id) = 1$ .

**Exemplo 3.4.** Seja  $g : S^n \rightarrow S^n$  uma aplicação constante. Calculando  $G(\xi, T, \varphi_g)$  onde  $\xi$  não é um ponto de imagem segue que  $G(g) = 0$ .

**Exemplo 3.5.** Seja  $h : S^n \rightarrow S^n$ ,  $h(x) = -x$ , a aplicação antipodal. Do Exemplo 3.2 segue que  $G(h) = (-1)^{n+1}$ .

**Observação 3.1.** Para uma aplicação  $f : S^0 \rightarrow S^0$  é necessária uma nova definição de grau, pois a que demos acima não se aplica por não existirem positivos e negativos. Como as possíveis funções entre  $S^0$  e  $S^0$  são as dadas nos exemplos anteriores, definiremos os seus graus da seguinte forma: para  $Id : S^0 \rightarrow S^0$ ,  $g : S^0 \rightarrow S^0$  e  $h : S^0 \rightarrow S^0$ ,  $G(Id) = 1$ ,  $G(g) = 0$  e  $G(h) = -1$ .

Mostraremos no próximo teorema que o grau é um invariante homotópico.

**Teorema 3.1.** *Seja  $n \geq 0$ . Se  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  são homotópicas, então  $G(f) = G(g)$ .*

**Demonstração:** Para  $n = 0$  o resultado é evidente, pois cada função  $f : S^0 \rightarrow S^0$  é homotópica apenas a si mesma. Façamos para  $n \geq 1$ . Seja  $\Phi : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$  a homotopia entre  $f$  e  $g$ . Para cada  $t \in [0, 1]$  escreva  $\Phi(x, t) = f_t(x)$  e considere  $d$  a métrica da soma para  $S^n \times [0, 1]$ . Como  $S^n \times [0, 1]$  é compacto, a aplicação  $\Phi$  é uniformemente contínua, logo, existe  $\delta > 0$  tal que se  $d((x, t), (x', t')) < \delta$  então  $\|f_t(x) - f_{t'}(x')\| < 1$  onde  $(x, t)$  e  $(x', t')$  pertencem  $S^n \times [0, 1]$ . Logo, se  $\|x - x'\| < \delta$  então  $\|f_t(x) - f_t(x')\| < 1$ . Considere uma triangulação  $T$  tal que  $\text{diam}(\sigma) < \delta$  para cada  $\sigma \in T$ . Dessa

forma,  $\text{diam}(f_t(\sigma)) < 1$  para cada  $\sigma \in T$  e  $t \in [0, 1]$ . Consideremos a partir de agora a triangulação  $T$ . Dado  $t_0 \in [0, 1]$  e fixando  $\xi \in \Sigma^n$ , pelo Lema 3.3 encontramos  $\varepsilon > 0$  tal que  $G(\xi, T, \varphi_{f_{t_0}})$  não muda quando os vértices  $\{\varphi_{f_{t_0}}\}$  executam uma translação de raio  $\varepsilon$ . Pela continuidade uniforme de  $\Phi$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que se  $|t - t_0| < \delta$  então  $\|f_t(x) - f_{t_0}(x)\| < \varepsilon$  para cada  $x \in S^n$ , conseqüentemente,  $G(f_t) = G(f_{t_0})$  sempre que  $|t - t_0| < \delta$ . Como  $t_0 \in [0, 1]$  é qualquer, segue que  $G(f_t)$  é constante em  $[0, 1]$ . Portanto,  $f$  e  $g$  possuem o mesmo grau. ■

Denote a bola unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $B^{n+1}$ . A seguir estudaremos o grau de uma classe de aplicações contínuas  $f : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ .

**Definição 3.8.** *Uma aplicação contínua  $f : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$  é dita uma aplicação regular de  $B^{n+1}$ , se  $f(S^n) \subset S^n$ . Denotaremos tal aplicação por  $f : (B^{n+1}; S^n) \rightarrow (B^{n+1}; S^n)$ .*

Como  $B^{n+1}$  possui triangulações  $T$  formadas por  $(n + 1)$ -simplexos tais que cada  $n$ -face que não está em  $S^n$  é face de exatamente dois  $(n + 1)$ -simplexos, podemos definir o grau de aplicações regulares de  $B^{n+1}$  de maneira análoga ao de aplicações de  $S^n$  em  $S^n$ . Com efeito, dada uma triangulação  $T$  de  $B^{n+1}$ ,  $\varphi : T \rightarrow B^{n+1}$  é uma aplicação vértice própria regular se:

- (i) cada vértice de  $S^n$  é levado em um ponto de  $S^n$ .
- (ii)  $\varphi|_{S^n}$  é uma aplicação vértice própria.

Então, se  $f$  é uma aplicação regular de  $B^{n+1}$ , o grau de  $f$ ,  $G_r(f)$ , é determinado por

$$G_r(f) = (\text{número de positivos } \varphi_f[\sigma] \text{ contendo } \xi) - (\text{número de negativos } \varphi_f[\sigma] \text{ contendo } \xi)$$

onde  $\varphi_f : T \rightarrow B^{n+1}$  é uma aplicação vértice regular associada a  $f$  e  $\xi \in B^{n+1} \setminus S^n$  é um ponto que não está na fronteira de nenhum  $(n + 1)$ -simplexo  $\varphi_f(\sigma)$ .

O sinal de  $\varphi_f[\sigma]$  é determinado a partir dos simplexos positivos  $[\sigma]$  de  $T$ .

Usando exatamente os mesmos argumentos das provas dos Lemas 3.1 a 3.4 e do Teorema 3.1, podemos mostrar que  $G_r(f)$  depende somente de  $f$  e que duas aplicações regulares possuem o mesmo grau sempre que são homotópicas e a imagem de  $S^n$  por  $f$  permanece em  $S^n$  durante a deformação.

**Proposição 3.2.** *Seja  $g : (B^{n+1}; S^n) \rightarrow (B^{n+1}; S^n)$  uma aplicação regular de  $B^{n+1}$ , e seja  $f = g|_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ . Então,  $G(f) = G_r(g)$ .*

**Demonstração:** Inicialmente, estendemos  $f$  a  $F$ , uma aplicação regular de  $B^{n+1}$ , levando linearmente o vetor  $tx, 0 \leq t \leq 1$ , no vetor  $tf(x), 0 \leq t \leq 1$ , para cada  $x \in S^n$ . É óbvio que  $G(f) = G_r(F)$ , basta tomar uma triangulação de  $B^{n+1}$  com simplexes da forma  $p_0, p_1, \dots, p_n, 0$  onde  $(p_0, \dots, p_n)$  é simplexo de uma triangulação de  $S^n$ . Além disso,  $F$  é homotópica a  $g$  de modo que a imagem de  $S^n$  permanece fixa durante a deformação. Mostramos isso tomando a homotopia

$$\begin{aligned} \Phi : B^{n+1} \times [0, 1] &\rightarrow B^{n+1} \\ (x, t) &\mapsto tF(x) + (1-t)g(x). \end{aligned}$$

Assim,  $G_r(F) = G_r(g)$ , completando a prova da proposição. ■

### 3.5 $T$ -aproximação linear

Sejam  $f : S^n \rightarrow S^n$  contínua e  $T$  uma triangulação de  $S^n$  tal que  $\text{diam } f(\sigma) < 1$  para cada simplexo  $\sigma \in T$ . Seja  $\varphi_f : T \rightarrow S^n$  a aplicação vértice própria associada. Estendemos  $\varphi_f$  a aplicação  $\lambda_f : S^n \rightarrow S^n$  levando cada  $n$ -simplexo  $\sigma \in T$  baricentricamente em  $\varphi_f(\sigma)$ .  $\lambda_f$  é contínua se é contínua em cada simplexo  $\sigma$  e suas definições coincidem em cada  $(n-1)$ -face comum de dois simplexos.

**Definição 3.9.** A aplicação  $\lambda_f : S^n \rightarrow S^n$  é chamada a  $T$ -aproximação linear de  $f$ .

Mais geralmente, qualquer aplicação contínua  $\lambda : S^n \rightarrow S^n$  que leva cada simplexo de uma triangulação de  $S^n$  baricentricamente em outro simplexo é chamada de *aplicação linear por partes*. Se  $T$  é uma triangulação de  $S^n$  e  $f : S^n \rightarrow S^n$  é uma aplicação linear por partes nos simplexos de  $T$ , chamaremos  $f$  de uma aplicação  $T$ -linear. Esses conceitos se estendem para aplicações contínuas  $g : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$  desde que  $T$  seja uma triangulação de  $B^{n+1}$  tal que  $\text{diam } g(\sigma) < 1$  para cada  $\sigma$  em  $T$  e  $\varphi_g : T \rightarrow B^{n+1}$  seja uma aplicação vértice própria regular associada a  $g$ . Assim,  $\lambda_g$  é uma  $T$ -aproximação linear de  $g$  se  $\lambda_g$  leva cada  $(n+1)$ -simplexo de  $T$  baricentricamente em outro  $(n+1)$ -simplexo de  $B^{n+1}$ . Se  $\lambda_g$  é contínua, a chamaremos de aplicação  $T$ -linear.

**Proposição 3.3.** Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  uma aplicação contínua. Então  $f \simeq \lambda_f$  para cada  $T$ -aproximação linear  $\lambda_f$  de  $f$ .

**Demonstração:** Pela Proposição 3.1, basta provar que  $\lambda_f(x)$  e  $f(x)$  não são antípodas para cada  $x \in S^n$ . Seja  $x \in \sigma = (p_0, \dots, p_n)$ , onde  $\sigma \in T$ . Como  $f(p_i) = \lambda_f(p_i)$ , para cada  $i = 0, \dots, n$  e  $\text{diam } f(\sigma) < 1$ , segue que cada  $\lambda_f(p_i)$  está contido numa bola  $B(\lambda_f(p_0), 1)$ . Como a bola é convexa e contém cada  $\lambda_f(p_i)$ , deverá conter a envoltória convexa formada a partir dos  $\lambda_f(p_i), i = 0, 1, \dots, n$ , conseqüentemente contém  $\lambda_f(\sigma)$ . Daí, segue que  $d(\lambda_f(x), \lambda_f(p_0)) < 1$  e, conseqüentemente,

$$d(f(x), \lambda_f(x)) \leq d(f(x), f(p_0)) + d(\lambda_f(p_0), \lambda_f(x)) < 2.$$

Portanto, os pontos  $f(x)$  e  $\lambda_f(x)$  não são antípodas. ■

## 3.6 Teorema antipodal de Borsuk

**Definição 3.10.** *Uma aplicação contínua  $f : S^n \rightarrow S^n$  é dita antipodal se  $f(-x) = -f(x)$ , para cada  $x \in S^n$ , isto é,  $f$  envia cada par de pontos antipodais em um par de pontos antipodais.*

As aplicações identidade  $Id : S^n \rightarrow S^n$  e  $\alpha : S^n \rightarrow S^n, \alpha(x) = -x$  são exemplos de aplicações antipodais. Podemos provar que uma aplicação  $f : S^n \rightarrow S^n$  é antipodal se, e somente se,  $f \circ \alpha = \alpha \circ f$ .

**Observação 3.2.** Se  $f$  é uma aplicação baricêntrica de um  $n$ -simplexo geométrico  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  e se  $\text{Int } f(\sigma) \neq \emptyset$ , então para cada  $y \in f(\sigma)$  existe exatamente um ponto  $x \in \sigma$  tal que  $f(x) = y$ .

**Definição 3.11.** *Sejam  $T_1$  e  $T_2$  triangulações de  $B^n$ . Dizemos que  $T_1$  é um refinamento de  $T_2$ , se para todo simplexo  $\sigma_1$  de  $T_1$  existe um simplexo  $\sigma_2$  de  $T_2$  tal que  $\sigma_1 \subset \sigma_2$ .*

**Lema 3.5.** *Sejam  $T$  uma triangulação de  $B^n$  ( $n \geq 1$ ) e  $g : B^n \rightarrow B^n$  uma aplicação  $T$ -linear qualquer tal que a origem não pertença a fronteira de nenhum  $g(\sigma)$ . Seja  $\pi : B^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  a projeção radial e  $\varphi := \pi \circ (g|_{S^{n-1}}) : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Então, se  $q$  é o número de pontos levados para a origem por  $g$ , temos  $q \equiv G(\varphi) \pmod{2}$ .*

**Demonstração:** Inicialmente, definamos a seguinte aplicação regular de  $B^n$

$$h : B^n \rightarrow B^n$$

$$tx \mapsto h(tx) = \begin{cases} g(2tx) & \text{se } x \in S^{n-1}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)g(x) + (2t-1)\pi \circ g(x) & \text{se } x \in S^{n-1}, \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Logo, pela Proposição 3.2 é suficiente mostrar que  $G_r(h) \equiv q \pmod{2}$ . Considere o compacto  $A = B^n \setminus B(0, \frac{1}{2})$ . Como  $g$  e  $\pi$  são contínuas, segue que  $h$  é contínua e, portanto,  $h(A)$  é compacto. Note que  $h(A)$  não contém a origem, pois se contivesse teríamos  $g(x) = 0$  para algum  $x \in S^{n-1}$ , logo,  $x$  estaria na fronteira de algum simplexo  $\sigma$  de  $B^n$ . Como  $g$  é  $T$ -linear implicaria que a origem estaria na fronteira de  $g(\sigma)$ . Assim, seja  $\varepsilon = d(h(A), 0) > 0$ . Podemos encontrar uma triangulação  $\bar{T}$  de  $B^n$  tal que

- (i)  $\text{diam } h(\sigma) < \frac{\varepsilon}{4}$  para cada  $\sigma \in \bar{T}$ ;
- (ii)  $\bar{T}$  é um refinamento de  $T$  em  $\overline{B(0, \frac{1}{2})}$ ;
- (iii) Se  $h(x) = 0$ , então  $x$  não está na fronteira de nenhum  $n$ -simplexo de  $\bar{T}$ .

Seja  $\lambda_h$  a  $\bar{T}$  aproximação linear de  $h$ . Então:

- a)  $\lambda_h(\sigma)$  não contém a origem sempre que  $\sigma \subset A$ .

Com efeito, por (i)  $\text{diam } h(\sigma) < \frac{\varepsilon}{4}$  para cada  $\sigma \in \bar{T}$ , como  $\sigma \subset A$  e  $d(h(A), 0) = \varepsilon$  segue que  $\lambda_h(\sigma)$ , que é convexo, não contém a origem. Além disso, como  $g$  é  $T$ -linear, (ii) implica que

- b)  $\lambda_h|_{\overline{B(0, \frac{1}{2})}} = g$ , como conjunto imagem.

De fato, como cada simplexo de  $\bar{T}$  está inteiramente contido em um simplexo de  $T$ ,  $\lambda_h$  nada mais é do que uma restrição de  $g$  ao simplexo menor. Usando (iii), segue que a origem não se encontra na fronteira de nenhum simplexo  $\lambda_h(\sigma)$ . Portanto, podemos calcular a paridade de  $G_r(h)$  contando o número de  $\lambda_h(\sigma)$  contendo a origem. Note que a observação 3.2 garante que a quantidade de simplexos  $\lambda_h(\sigma)$  que contém a origem corresponde ao número de pontos que serão levados por  $\lambda_h$  à origem. Por a) estes pontos se encontram apenas em  $\overline{B(0, \frac{1}{2})}$ , e por b) o conjunto imagem de  $g$  coincide com o de  $\lambda_h|_{\overline{B(0, \frac{1}{2})}}$ . Portanto, o número procurado é exatamente  $q$ . ■

O lema acima nos ajudará a provar o próximo teorema, a ferramenta principal que usaremos na demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam.

**Teorema 3.2** (K. Borsuk). *Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  ( $n \geq 0$ ) uma aplicação antipodal contínua.*

Então  $G(f)$  é ímpar. Em particular,  $f$  não é homotopicamente nula.

**Demonstração:** A demonstração segue por indução em  $n$ . Para  $n = 0$ , o resultado é óbvio pela Observação 3.1. Assumimos o resultado válido para  $n - 1$  e provaremos que é válido para  $n$ . Podemos encontrar uma triangulação  $T$  de  $S^n$  tal que:

- (i)  $T$  é levado em si mesmo pela aplicação antipodal  $\alpha(x) = -x$ , isto é,  $\alpha(\sigma) \in T$ , para cada  $\sigma \in T$ .
- (ii)  $T$  contém uma triangulação do equador  $S^{n-1} = \{x \in S^n : x_{n+1} = 0\}$ .
- (iii)  $\text{diam } f(\sigma) < 1$ , para cada  $\sigma \in T$ .

De fato, podemos construir uma triangulação para  $S^n$  a partir de uma triangulação de  $S^{n-1}$ , exigindo que o conjunto dos vértices seja composto por pares de pontos antípodas, assim, por simetria, obtemos uma triangulação que satisfaça (i) e (ii). A continuidade da  $f$  nos permite satisfazer (iii).

Seja  $\lambda_f$  a  $T$ -aproximação linear de  $f$ . Por (i) segue que  $\lambda_f$  é uma aplicação antipodal. Podemos supor também que:

- (iv) O polo norte,  $p_+$ , e o polo sul,  $p_-$ , não se encontram na fronteira de nenhum  $\lambda_f(\sigma)$ , em particular,  $\lambda_f(S^{n-1})$  não contém  $p_+$  nem  $p_-$ .

Com efeito, podemos alterar ligeiramente os valores de  $\lambda_f$  em vértices antipodais para satisfazer o primeiro quesito de (iv), e a segunda parte de (iv) segue por (ii). Lembremos que pela Proposição 3.1 qualquer pequena deformação feita em  $\lambda_f$  não altera a sua classe de homotopia. Como  $\lambda_f \simeq f$ , basta mostrar que  $G(\lambda_f)$  é ímpar, e como  $\lambda_f$  é linear por partes, o item (iv) mostra que basta contar o número de simplexes  $\lambda_f(\sigma)$  contendo  $p_+$  e, assim, saberemos o número de pontos que são levados em  $p_+$ . Assim, pela observação 3.2 o teorema será provado se mostrarmos que existe um número ímpar de pontos sendo levados por  $\lambda_f$  em  $p_+$ .

Seja  $B^n$  a bola de dimensão  $n$  que tem como fronteira o equador  $S^{n-1}$ . Seja  $P : S^n \rightarrow B^n$  a projeção paralela ao eixo  $x_{n+1}$  e seja  $S_+^n := \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$  o hemisfério norte. Considere a aplicação linear por partes

$$g := P \circ \lambda_f |_{S_+^n} : S_+^n \rightarrow B^n.$$

Note que  $P |_{S_+^n} : S_+^n \rightarrow B^n$  nos mostra que  $S_+^n$  é homeomorfo a  $B^n$ . De (iv), vemos que a origem não está na fronteira de nenhum  $P \circ \lambda_f(\sigma)$  e que a aplicação

$$\varphi := \pi \circ P \circ \lambda_f |_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

está bem definida e é contínua, pois  $\varphi$ ,  $P$  e  $\lambda_f$  são contínuas e a imagem de  $P \circ \lambda_f|_{S^{n-1}}$  não contém a origem. Sendo  $\lambda_f$  antipodal,  $\varphi$  é antipodal, logo, a hipótese de indução afirma que  $\varphi$  tem grau ímpar, e pelo Lema 3.5,  $g$  leva um número ímpar de pontos de  $S_+^n$  na origem.

Agora, note que  $g(x) = 0$  se, e somente se,  $\lambda_f(x) = p_+$  ou  $\lambda_f(x) = p_-$ , isto é,

$$\{x \in S_+^n : g(x) = 0\} = \{x \in S_+^n : \lambda_f(x) = p_+\} \cup \{x \in S_+^n : \lambda_f(x) = p_-\}.$$

Como  $\lambda_f$  é antipodal, segue que para cada  $x \in S_+^n$ ,  $\lambda_f(x) = p_-$  se, e somente se,

$$\lambda_f(-x) = -\lambda_f(x) = -p_- = p_+.$$

Assim, por (iv), o número de pontos  $x \in S^n$  tal que  $\lambda_f(x) = p_+$  é ímpar, donde concluímos a indução. ■

**Corolário 3.2.** *Não existe uma aplicação antipodal  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ .*

**Demonstração:** Suponha que existe uma aplicação antipodal

$$f : S^n \rightarrow S^{n-1}.$$

Identificando  $S^{n-1}$  como o equador de  $S^n$ , claramente vemos que a aplicação antipodal

$$f : S^n \rightarrow S^n$$

não é sobrejetora, logo, pelo Corolário 3.1,  $f$  é homotopicamente nula, o que contraria o teorema anterior. ■

Finalmente estamos preparados para provar o resultado principal deste capítulo que é o Teorema de Borsuk-Ulam enunciado a seguir:

**Teorema 3.3** (Borsuk-Ulam). *Seja  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua. Então existe  $x$  em  $S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .*

**Demonstração:** Suponha o contrário, que existe  $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $g(-x) \neq g(x)$ , para cada  $x \in S^n$ . Defina  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  por

$$f(x) = \frac{g(-x) - g(x)}{\|g(-x) - g(x)\|}.$$

Note que  $f$  está bem definida e é antipodal, pois

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{g(-(-x)) - g(-x)}{\|g(-(-x)) - g(-x)\|} \\ &= \frac{-(g(-x) - g(x))}{\|-(g(-x) - g(x))\|} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Mas isso contraria o Corolário 3.2. ■

Portanto, fica demonstrado o teorema.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Linear subsets of non-linear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51 (2014), no. 1, 71-130.
- [2] Botelho, G.; Cariello, D.; Fávoro, V. V.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *On very non-linear subsets of continuous functions*, Quart. J. Math., a aparecer.
- [3] Dugundji, J. *Topology*. Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.
- [4] Gurariy, V. I.; Quarta, L. *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), no. 1, 62-72.
- [5] Lima, E. L. *Elementos de topologia geral*. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2009.
- [6] Lima, E. L. *Curso de análise - Vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.