

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Multiplicidade de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Danilo da Nóbrega Santos

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2014

Danilo da Nóbrega Santos

Multiplicidade de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2014

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S237m Santos, Danilo da Nóbrega.
Multiplicidade de equações diferenciais parciais de primeira
ordem / Danilo da Nóbrega Santos – João Pessoa, 2014.
52f. : il.

Orientador: Lizandro Sanchez Challapa.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Multiplicidade. 3. Equações diferenciais
de primeira ordem. 4. Equações diferenciais implícitas

UFPB/BC

CDU: 51(043)

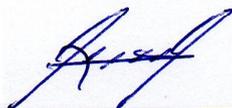
Multiplicidade de Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

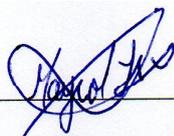
Orientador: Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa

Aprovado em: 20 de Fevereiro de 2014

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa – UFPB



Prof. Dr. Hernan Maycol Falla Luza – UFF



Profª. Drª. Miriam da Silva Perereira – UFPB

Agradecimentos

A Deus.

Ao meu pai e minha mãe, que fizeram todo possível para dar educação de qualidade a mim e meus irmãos.

Aos meus irmãos: Daniel, por todo companheirismo e Darlan, pelo espelho para minha vida acadêmica.

À minha noiva Juliana Kelly, por todo carinho, conforto e amor que precisei, e que nela encontrei.

Ao professor Lizandro, por me orientar no presente trabalho e pela valiosa contribuição contribuição para meu conhecimento durante toda minha vida acadêmica. A professora Miriam e ao professor Hernan pela valiosa contribuição neste trabalho participando da banca examinadora, e a todos os demais professores do departamento, pela contribuição para minha formação. Em especial aos professores Andrade, Fágner e Flank.

Aos meus amigos do departamento, pela contribuição direta e indireta no presente trabalho e por todo companheirismo.

Aos amigos dos laboratórios LPBS e LACOM do departamento de Química, pelos bons momentos compartilhados

A todos muito obrigado.

“Todos os dias nascem deuses alguns maiores e outros menores do que você...”

No Olimpo
Nação Zumbi

Resumo

Neste trabalho estudaremos as equações diferenciais parciais de primeira ordem em uma vizinhança de um zero isolado. Utilizando a classificação de pontos singulares apresentada por Izumiya em [27] e [28], estudaremos a multiplicidade de tais equações, introduzidas em [15]. Quando a equação diferencial parcial de primeira ordem define uma equação diferencial implícita, a definição de multiplicidade coincide com a noção de multiplicidade introduzida por Bruce e Tari em [21]. Estudaremos também a invariância dessa multiplicidade por equivalência suave.

Palavras-chave: Multiplicidade, equações diferenciais parciais de primeira ordem, equações diferenciais implícitas.

Abstract

In this work we study the first order partial differential equations on the neighborhood of an isolated zero. Using the classification of singular points put by Izumiya in [27] and [28], we study the multiplicity of such equations introduced in [15]. When the first order partial differential equation defines an implicit differential equation, the definition of multiplicity coincides with the notion of multiplicity introduced by Bruce and Tari in [21]. We will also study the invariance of this multiplicity by smooth equivalence.

Keywords: Multiplicity, first order differential equations, implicit differential equations.

Sumário

Introdução	ix
1 Preliminares	2
1.1 Germe de aplicações diferenciáveis	2
1.2 Transversalidade	5
1.3 Campo de vetores e formas diferenciais	9
1.4 Multiplicidade de aplicações	12
2 Multiplicidade de equações diferenciais implícitas	16
2.1 Pontos singulares de equações diferenciais implícitas	16
2.2 Forma normais de EDIs	20
2.3 Multiplicidade uma EDI	22
2.4 Equações diferenciais binárias	28
2.5 Multiplicidade de EDBs	30
3 Equações diferenciais parciais de primeira ordem	37
3.1 EDPs de primeira Ordem	37
3.2 Singularidades de EDPs de primeira ordem	41
3.3 Multiplicidade de uma EDP de primeira ordem	44
Referências Bibliográficas	50

Introdução

Uma equação diferencial parcial (EDP) de primeira ordem é uma equação do tipo

$$F(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (1)$$

onde $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, com $n \geq 1$, é uma função suave. Uma solução clássica da Equação (1) é uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) = y$ e $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ com $i = 1, \dots, n$. Quando em um ponto $q_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$, $F_{p_i}(q_0) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, n$, a EDP de primeira ordem (1) define uma família de soluções clássicas (ver [30]). Em [27] e [28], Izumiya introduz a definição de solução singular de EDPs de primeira ordem e estuda as propriedades genéricas de soluções de tais equações em pontos π -singulares definido por

$$\Sigma(F) = \{q \in \mathbb{R}^{2n+1} : F = F_{p_i} = 0 \text{ em } q\}.$$

Izumiya mostra que, genericamente, em um ponto π -singular a EDP de primeira ordem (1) não tem solução singular (ver Teorema 3.7). Neste trabalho estudaremos a multiplicidade de uma EDP de primeira ordem introduzida em [14], que foi motivada pela definição de multiplicidade de uma equação diferencial implícita (EDI) apresentada por Bruce e Tari em [21]. Estudaremos também a invariância da multiplicidade por equivalência suave.

No capítulo 1, introduziremos algumas definições e resultados da Teoria das Singularidades de aplicações suaves, campo de vetores, formas diferenciais e multiplicidade de aplicações necessárias para melhor compreensão deste trabalho.

No capítulo 2, estudaremos as equações diferenciais implícitas e binárias em uma vizinhança de um ponto singular dado, visando definir sua multiplicidade e apresentar alguns resultados sobre a

mesma. Com respeito as equações diferenciais binárias, iremos dividir nosso estudo em dois casos: o caso em seus coeficientes se anulam no ponto singular em questão e no caso em que eles não se anulam.

No capítulo 3, estudaremos as equações diferenciais parciais de primeira ordem em uma vizinhança de um zero isolado, definiremos a multiplicidade de tal ponto e mostraremos a invariância da multiplicidade por equivalência suave.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados fundamentais usualmente utilizados na teoria das singularidades de aplicações diferenciáveis que serão os pilares deste trabalho tais como: singularidades de germes de aplicações suaves, transversalidade de Thom, índices de campo de vetores, multiplicidade de 1-formas diferenciais e multiplicidade de aplicações suaves. As principais referencias deste capítulo são:[1], [2], [5], [7], [8], [16], [24].

1.1 Germe de aplicações diferenciáveis

No que segue, a menos de menção contrária, $U \subset \mathbb{R}^n$ denotará um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n com $n \geq 1$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação, diremos que f é de classe \mathcal{C}^k , se as derivadas parciais de f até ordem k são contínuas. Quando f tem derivadas parciais de todas as ordem contínuas diremos que ela é de classe \mathcal{C}^∞ ou simplesmente que f é suave. Denotaremos a derivada de f em um ponto $x_0 \in U$ por $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que f é um \mathcal{C}^k -difeomorfismo se f juntamente com sua inversa f^{-1} são de classe \mathcal{C}^k e que é um difeomorfismo se f e f^{-1} são suaves.

Dada uma aplicação suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ podemos associar a cada $x_0 \in U$ a matriz

$$Jf(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right), \text{ onde } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n, \quad (1.1)$$

chamada de *matriz jacobiana* de f em x_0 . Quando $n = m$ o determinante da matriz (1.1) é

denominado *jacobiano* de f em x_0 .

Definição 1.1. Diremos que x_0 é um *ponto singular* de aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ quando a da matriz jacobiana (1.1) em x_0 não tem posto máximo. Caso contrário, diremos que x_0 é um *ponto regular* de f .

Consideremos o caso de funções suaves $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Um ponto singular $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é dito ser um *ponto singular não degenerado* de f se o determinante da matriz

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right), \quad i, j \in 1, \dots, n$$

é diferente de zero. Chamaremos o determinante da matriz $Hf(x_0)$ de *hessiana* de f .

Definição 1.2. Diremos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é do *tipo Morse* se todos os seus pontos singulares são não degenerados.

É imediato da definição acima que se uma função não tem pontos singulares, ela será naturalmente do tipo Morse. Note que a Definição 1.1 trata de uma propriedade pontual de aplicações. Em quase todo o trabalho estudaremos, sem perda de generalidade, singularidades na origem.

A seguir daremos a definição de germe de uma aplicação suave. Denote por $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o conjunto de todas as aplicações de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m ($\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para as de classe \mathcal{C}^∞). Podemos definir em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a seguinte relação: dadas duas aplicações suaves $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ e um ponto $x \in U_1 \cap U_2$, diremos que f_1 está relacionada com f_2 , e escreveremos $f_1 \sim f_2$, se existe uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x tal que $f_1(q) = f_2(q)$ para todo $q \in U$. Claramente \sim define uma relação de equivalência.

Definição 1.3. A classe de equivalência dada pela relação \sim é denominada de *germe de aplicações* em x .

Note que se f_1 e f_2 são representantes do mesmo germe em x , então $f_1(x) = f_2(x) = y$. Tendo em vista esse fato denotemos por $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$ o germe de uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em x . Além disso, chamaremos x e y de *fonte* e *meta* do germe, respectivamente. Observe que a cada germe em x , $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$, podemos associar a sua derivada, a qual denotaremos por $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida com sendo a derivada em x de qualquer representante do germe. Note

que está definição não depende da escolha do representante do germe. Um germe será *invertível* se, e somente se, sua derivada for invertível.

Definição 1.4. O *posto* de um germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$ é definido como sendo o posto de sua derivada em x . Quando seu posto for igual a n diremos que o germe é uma *imersão* e se for igual a m uma *submersão*.

Pela definição acima temos que um germe é invertível se, e somente se, o mesmo for uma imersão e submersão. Um germe que não for uma imersão nem uma submersão será chamado de *singular*.

Definição 1.5. Dois germes $f_1 : (U_1, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_1)$ e $f_2 : (U_2, x_2) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_2)$, são *\mathcal{A} -equivalente* se existirem germes invertíveis $h : (U_1, x_1) \rightarrow (U_2, x_2)$ e $k : (\mathbb{R}^m, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_2)$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (U_1, x_1) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{R}^m, y_1) \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ (U_2, x_2) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{R}^m, y_2) \end{array}$$

comuta, isto é, $k \circ f_1 = f_2 \circ h$.

Uma consequência imediata da definição acima é que qualquer germe $f : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$ é equivalente a algum germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$.

Introduziremos agora a noção de *jato* de uma aplicação suave. A noção precisa de espaço $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dos k -jatos de uma aplicação suave é dada no capítulo II, §2 de [12]. Para este trabalho será suficiente a seguinte identificação.

Proposição 1.1. ([12]) Existe uma bijeção entre $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e o conjunto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times P^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, onde $P^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é o espaço vetorial das aplicações polinomiais de grau $\leq k$ de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m sem termo constante.

Naturalmente $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tem dimensão finita.

Definição 1.6. Dada uma aplicação suave $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $j^k f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dada por $j^k f(a)(x) = (a, f(a), P_1(a), \dots, P_m(a))$, onde cada $P_i(a)$ é o polinômio de Taylor de ordem k da função $f_i(x + a) - f_i(a)$ na origem.

A aplicação $j^k f(a)$ é suave e é chamada de k -jato de f em a .

Exemplo 1.1. Considere uma função suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então, polinômio de Taylor de ordem k de $f(x+a) - f(a)$ em 0 tem a forma

$$f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$$

e pela identificação

$$(a, f(a), f'(a)t + \frac{f''(a)}{2!}t^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k) \longleftrightarrow (a, f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(k)}(a))$$

$j^k f(a)$ pode ser visto como um elemento do espaço euclidiano \mathbb{R}^{k+2} .

Em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ podemos definir uma topologia, chamada de topologia de Whitney. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, uma base para a topologia de classe \mathcal{C}^k é dada pelos conjuntos

$$V(f, \delta) = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \|j^k f(x) - j^k g(x)\| < \delta(x)\}$$

onde $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva.

Definição 1.7. A topologia de classe \mathcal{C}^∞ em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, tem como base a união de todos os abertos das topologias de classe \mathcal{C}^k de Whitney, com $k \geq 0$.

1.2 Transversalidade

Nesta seção introduziremos a noção de transversalidade e enunciaremos um dos principais resultados da teoria das singularidades, o Teorema da Transversalidade de Thom. A noção de dois objetos se interceptarem transversalmente é de fundamental importância no estudo da teoria das singularidades, e o Teorema da Transversalidade de Thom nos dá uma bem sucedida classificação de uma das ideias fundamentais desta teoria, o conceito de propriedade genérica. Entenderemos que uma propriedade P é *genérica* em um conjunto A , se existe um subconjunto aberto de denso de A no qual a propriedade P é sempre válida.

Definição 1.8. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma *variedade suave de dimensão m* , ou simplesmente uma *m -variedade*, se para cada ponto $x \in M$ existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^k$ de x e um difeomorfismo $h : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \cap M$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^m . Denotaremos uma m -variedade por M^m .

A aplicação h é chamada de *parametrização* de $W \cap M$. Note que a parametrização não é necessariamente única. Quando $n = 1$ diremos que M é uma *curva*. Definimos também o *espaço tangente* de M em x , denotado por $T_x M$, como sendo a imagem da $dh_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $q \in U$ e $h(q) = x$. É claro que a definição de plano tangente independe da escolha da parametrização.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Diremos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é suave se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ de x e uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$. A derivada de uma aplicação entre variedades suaves $f : M \rightarrow N$, em um ponto $x \in M$, é uma aplicação linear de $T_x M$ em $T_{f(x)} N$ denotada por df_x .

Definição 1.9. Uma aplicação suave $g : M \rightarrow N$ é dita ser um *imersão* se para todo $x \in M$ a aplicação derivada $dg_x : T_x M \rightarrow T_{g(x)} N$ é injetora. Além disso, se a aplicação g é um homeomorfismo sobre sua imagem, diremos que g é uma *mergulho*.

No caso em que $M \subset N$ e a aplicação inclusão $i : M \hookrightarrow N$ for um mergulho, diremos que M é uma *subvariedade* de N .

Definição 1.10. Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades suaves, $S \subset N$ uma subvariedade e $x \in M$. Diremos que f é *transversal* a S em x se uma das seguintes condições é satisfeita:

- i. $f(x) \notin S$ ou
- ii. $f(x) \in S$ e $T_{f(x)} S + df_x(T_x M) = T_{f(x)} N$

Diremos simplesmente que f é *transversal* a S , se f for transversal a S para todo $x \in M$ e denotaremos por $f \pitchfork S$.

Exemplo 1.2. Considere $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$, $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ e $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f_1(x) = (x, x^2 - 1)$. Então temos que $f \pitchfork S$. No entanto, se tivermos as mesmas condições só que agora $f_2(x) = (x, x^2)$, temos que f não é transversal a S em $(0, 0)$.

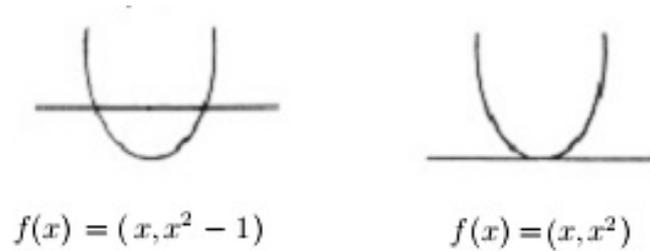


Figura 1.1: Interseção transversal e não transversal

Seja N uma variedade suave e $S \subset N$ uma subvariedade. Denotaremos por $\dim(N)$ a dimensão de N e por $\text{cod}(S) = \dim(N) - \dim(S)$ a *codimensão* de S .

Proposição 1.2. ([12]) Sejam M, N variedades suaves, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e S uma subvariedade de N . Se $f \pitchfork S$ e $\dim(M) < \text{cod}(S)$, então $f(M) \cap S = \emptyset$.

Um dos principais resultados sobre transversalidade será apresentado agora e ele é devido a René Frédéric Thom.

Teorema 1.3. ([26]) Seja $S \subset J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ uma subvariedade suave e fechada. Então o conjunto de aplicações $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que $j^k f \pitchfork S$ é aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ na topologia de classe C^r de Whitney, para qualquer $r > k$

Uma consequência do teorema 1.3 é o seguinte resultado:

Proposição 1.4. ([2]) O conjunto das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo de Morse é aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Existem versões alternativas para esse mesmo teorema, uma delas que será útil neste trabalho é a seguinte.

Teorema 1.5. ([24]) Sejam $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^t$ aberto e $G : M \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave transversal a N . Então, existe um conjunto denso $A \subset U$ tal que as aplicações $G_a : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $G_a(x) = G(x, a)$ são transversais a N para todo $a \in A$.

Como aplicação do Teorema 1.5 temos o seguinte resultado.

Proposição 1.6. ([24]) Sejam M e N variedades suave em \mathbb{R}^n . Então existe um conjunto denso $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que transladando a M por um vetor $a \in A$ a nova variedade transladada M_a será transversal a N .

Um dos grandes resultados sobre as singularidades de aplicações do plano no plano foi enunciado e demonstrado por Hassler Whitney. Antes de enunciarmos tal resultado precisamos de alguns conceitos no que diz respeito a aplicações do plano no plano. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. O conjunto dos pontos singulares da aplicação f , isto é, o conjunto dos pontos (x, y) tais que $\det(Jf(x, y)) = 0$, é chamado de *conjunto singular* de f .

Definição 1.11. Uma aplicação suave $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é dita ser *boa* se o seu conjunto singular é suave

Observação 1.1. Note que se f é boa a imagem da aplicação linear $df(p)$ tem dimensão 2 se p é regular e tem dimensão 1 se p é um ponto singular. Com isso temos que o conjunto singular de uma aplicação boa é uma curva suave plana.

Definição 1.12. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação boa e $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ uma parametrização suave do seu conjunto singular tal que $\varphi(0) = p$, com p ponto singular de f .

- i. p é um *ponto de dobra* de f se $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(0) \neq 0$ e
- ii. p é um *ponto de cúspide* se $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(0) = 0$ e $\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \varphi)(0) \neq 0$.

A definição acima independe da escolha da parametrização dos pontos singulares de f .

Teorema 1.7 (Teorema de Whitney). ([2]) *O conjunto das aplicações suaves $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possuem apenas pontos regulares, singulares de dobra e cúspide é aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^2)$.*

A seguir enunciaremos um teorema que caracteriza a forma normal de uma aplicação do plano no plano em uma vizinhança de um ponto singular.

Teorema 1.8. ([2]) *Dada uma aplicação suave $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^2)$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, e um ponto $p \in U$ temos o seguinte:*

- i. se p é um *ponto de dobra* de f , então o germe $f : (U, p) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é equivalente ao germe $g : (U, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $g(x, y) = (x, y^2)$ e
- ii. se p é um *ponto de cúspide* de f , então o germe $f : (U, p) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é equivalente ao germe $g : (U, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $g(x, y) = (x, xy - y^3)$.

Uma caracterização que será também útil a este trabalho é a seguinte. Dado um germe de aplicações suave $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, o *coposto* do germe f é definido com sendo $2 - \text{rank}(df(0))$.

Proposição 1.9. ([11]) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial de grau ≤ 2 sem termos constante. Se o germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tem coposto 1, então ele será \mathcal{A} -equivalente a um dos germes $g_1, g_2, g_3 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados por $g_1(x, y) = (x, y^2)$, $g_2(x, y) = (x, xy)$ ou $g_3(x, y) = (x, 0)$.

Observação 1.2. Quando tratamos de germes $f : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ as singularidades genéricas são de dobras, cúspides e *calda de andorinha*. As formas normais destas singularidade são:

- i. $g(x, y, z, t) = (x, y, z^2 \pm t^2)$ para singularidades de dobra;
- ii. $g(x, y, z) = (x, y, z^3 + xz - t^2)$ para singularidades de cúspides e
- iii. $g(x, y, z) = (x, y, z^4 + z^2x + zy \pm t^2)$ para singularidade de calda de andorinha.

Para maiores detalhes ver §3.1 de [3].

1.3 Campo de vetores e formas diferenciais

Nesta seção apresentaremos conceitos e resultados básicos sobre campo de vetores e formas diferenciáveis que serão relevantes neste trabalho.

Definição 1.13. Seja M^n uma variedade suave. Um *campo de vetores* sobre um aberto $U \subset M$ é uma correspondência ξ que associa a cada ponto $p \in U$ um vetor $\xi(p) \in T_pM$.

Observação 1.3. Note que dada uma parametrização $\mathbf{x} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de um ponto $p \in M$, a mesma determina uma base para T_pM formada pelos vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}$ com $1 \leq i \leq n$. Dessa forma, um campo de vetores pode ser escrito como

$$\xi(q) = \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}(q)}, \quad (1.2)$$

para todo $q \in V$, onde a_i são funções em $\mathbf{x}(V)$. Uma curva $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$ é dita ser uma *curva integral* de ξ se $\gamma'(t) = \xi(\gamma(t))$ para todo $t \in (-1, 1)$.

Definição 1.14. O campo de vetores ξ é suave se as funções a_i , $1 \leq i \leq n$, definidas em (1.2), são suaves.

Quando a variedade suave $M = \mathbb{R}^n$ podemos identificar o plano tangente $T_p M$ como próprio \mathbb{R}^n . Nestas condições um campo de vetores se reduz a uma aplicação $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Considere agora $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, denotemos por $\Delta(p)$ e $T(p)$ o determinante e o traço da matriz jacobiana de ξ em p , respectivamente. Diremos que um ponto p é um *zero* do campo de vetores, se $\xi(p) = 0$. Um zero do campo de vetores ξ é dito *não degenerado* se $\Delta(p) \neq 0$, caso contrário p será *degenerado*.

Definição 1.15. Seja $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores em \mathbb{R}^2 . Dado um zero p de ξ não degenerado, temos as seguintes classificações:

- i. p é dito ser de *sela* se $4\Delta(p) < 0$;
- ii. p é dito ser de *nó* se $T^2(p) \geq 4\Delta(p) \geq 0$ e
- iii. p é dito ser de *foco* se $4\Delta(p) > T^2(p) > 0$.

Fixemos agora algumas notações a fim de definir o que vem a ser formas diferenciais em uma variedade suave M . Dado um espaço vetorial E , denotemos por $\Lambda^k(E)$ o conjunto de todas as k -formas lineares alternadas $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$, onde $E \times \dots \times E$ é o produto cartesiano de k cópias do espaço vetorial E . Sabemos que $\Lambda^k(E)$ é um espaço vetorial e que dados $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E^*$, podemos obter um elemento em $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(E)$ definido da seguinte forma

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad (1.3)$$

onde $v_j \in E$.

Proposição 1.10. ([7]) O conjunto

$$\{(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) : i_1 < \dots < i_k, i_j \in \{1, \dots, n\}\},$$

forma uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, onde $\{dx_{i_j}\}$ é a base dual do \mathbb{R}^n associada a base canônica do \mathbb{R}^n .

Definição 1.16. Seja M uma variedade suave. Uma k -forma exterior em M é uma aplicação ω que associa a cada $p \in M$ um elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p M)$.

Observação 1.4. Note que pela proposição 1.10 uma k -forma exterior ω em \mathbb{R}^n pode ser escrita da seguinte forma

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}), \quad 1 \leq i_j \leq n, \quad (1.4)$$

onde os $a_{i_1 \dots i_k}$ são funções em \mathbb{R}^n . Uma forma mais conveniente de escrever a k -forma exterior ω dada pela equação (1.4) é a seguinte: defina a k -upla $I = (i_1, \dots, i_k)$, com $i_1 < \dots < i_k$ e $1 \leq i_j \leq n$. Assim podemos escrever ω como

$$\omega = \sum_I a_I dx_I,$$

onde $a_I = a_{i_1 \dots i_k}$ de $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Se as funções $a_{i_1 \dots i_k}$ dadas em (1.4) forem suaves diremos que ω é uma k -forma suave. No que segue, quando mencionarmos a palavra k -forma estaremos nos referindo a uma k -forma suave. Denotaremos por $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ o conjunto formado por todas as k -formas suaves em \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.3. Note que para o caso em que $k = 1$, a 1-forma ω em \mathbb{R}^n pode ser escrita simplesmente como

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx_i$$

e uma 0-forma em \mathbb{R}^n é simplesmente uma função suave em \mathbb{R}^n .

Definiremos agora duas operações entre k -formas em \mathbb{R}^n . Sejam

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \text{ e } \alpha = \sum_I b_I dx_I$$

duas k -formas em \mathbb{R}^n . Então a soma $\omega + \alpha$ é dada por

$$\omega + \alpha = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Suponha agora que

$$\eta = \sum_J a_J dx_J$$

seja uma r -forma em \mathbb{R}^n . Então o *produto exterior* $\omega \wedge \eta$, que será uma $(s+r)$ -forma, é dado por

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J,$$

Observação 1.5. A definição de produto exterior é de tal forma que se tivermos 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_k$ o produto exterior destas coincide com a definição dada pela equação (1.3).

Dada uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma característica muito importante das k -formas suaves é a maneira que ela se relaciona com a aplicação f . A aplicação f induz uma aplicação $f^* : \Omega^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, chamada de *pullback*, que leva k -formas em \mathbb{R}^m em k -formas em \mathbb{R}^n , definida da seguinte maneira: seja ω uma k -forma em \mathbb{R}^m , definimos o pullback $f^*(\omega)$ como

$$f^*(\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

onde $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Note que se g é uma 0-forma em \mathbb{R}^n , então $f^*(g) = g \circ f$. O pullback goza das seguintes propriedades.

Proposição 1.11. ([7]) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave. Então

- i. $f^*(\omega + \alpha) = f^*(\omega) + f^*(\alpha)$
- ii. $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$
- iii. $f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = f^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)$,

onde ω e α são k -formas em \mathbb{R}^m , g é uma 0-forma sobre \mathbb{R}^m e $\omega_1, \dots, \omega_k$ são 1-formas sobre \mathbb{R}^m .

1.4 Multiplicidade de aplicações

Nesta seção daremos a definição de multiplicidade de um germe de aplicação suave juntamente com alguns resultados interessantes para o nosso trabalho. O conjunto de todos os germes de aplicações suaves $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ será denotado por $\mathcal{E}_{n,m}$. Quando $m = 1$, o mesmo será

indicado apenas por \mathcal{E}_n . Com as operações usuais entre funções, \mathcal{E}_n forma um anel local que tem como único ideal maximal $m_n = \{f \in \mathcal{E}_n : f(0) = 0\}$. Quando tratarmos de aplicações analíticas $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ usaremos a notações $\mathcal{O}_{n,m}$ e \mathcal{O}_n quando $m = 1$. Considere agora um germe de aplicações suave $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, o anel local de f é definido por

$$Q(f) = \mathcal{E}_n / \langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

onde $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ é o ideal em \mathcal{E}_n gerado pelas funções coordenadas de f . O anel local $Q(f)$ independe da escolha de coordenadas e da escolha do representante do germe. Além disso, o anel local de $Q(f)$ pode ser visto como um espaço vetorial real.

Definição 1.17. Dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ a *multiplicidade* de f é definida como

$$m(f) = \dim_{\mathbb{R}} Q(f).$$

Diremos que o germe f é *finito* quando $\dim_{\mathbb{R}} Q(f) < \infty$.

Observação 1.6. Quando $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe analítico, a multiplicidade de g é definida e denotada por

$$m(g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / \langle g_1, \dots, g_n \rangle,$$

onde $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ é o ideal em \mathcal{O}_n gerado pela funções coordenadas de g . Diremos que g é finito se $m(g) < \infty$.

Finitude de um germe é uma propriedade muito interessante. A seguir enunciaremos alguns resultados sob tal propriedade.

Teorema 1.12. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe finito. Então, 0 é isolado de $f^{-1}(0)$.*

A recíproca do Teorema 1.12 não verdadeira.

Proposição 1.13. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de aplicações. Então, o germe f é finito se, e somente se, 0 é isolado em $f^{-1}(0)$.*

Observação 1.7. Quando o germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é analítico real temos que $m(f) = m(f_{\mathbb{C}})$, onde $f_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é a complexificação do germe f (ver [18]).

Um resultado interessante sobre complexificação de germes analíticos reais é o seguinte:

Teorema 1.14. ([18]) *Sejam $f = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe analítico real e $f_{\mathbb{C}} = (f_{1\mathbb{C}}, \dots, f_{n\mathbb{C}}) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ a complexificação de f . Se escolhermos D suficientemente pequeno de modo que $f_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap D = \{0\}$, então existirá uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_n / \langle f_1, \dots, f_n \rangle = \sum_{f_{\mathbb{C}}^{-1}(y) \cap D} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / \langle f_{1\mathbb{C}}, \dots, f_{n\mathbb{C}} \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / \langle f_{1\mathbb{C}}, \dots, f_{n\mathbb{C}} \rangle,$$

para todo $y \in U$.

Corolário 1.15. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe analítico de multiplicidade finita. Então, a multiplicidade do germe f coincide com o número de pré-imagens de f em y , onde y é um valor regular de f .*

Proposição 1.16. ([16]) *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe aplicação finito. Então:*

- i. A multiplicidade independe de mudança de coordenadas;
- ii. Escrevendo $f = (f_1, \dots, f_n)$ e cada $f_i = f_i^{k_i} + F_i$, onde $f_i^{k_i}$ é a parte homogênea de grau k_i e F_i são os termos de grau superior. Então $m(f) \geq \prod_{i=1}^n k_i$ e $m(f) = \prod_{i=1}^n k_i$ se, e somente se, o sistema $f_i^{k_i} = 0$, com $1 \leq i \leq n$, tem apenas solução trivial em \mathbb{C}^n ;
- iii. Se para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ tivermos que $f_i = g_{i_1} g_{i_2}$, com $g_{i_1}(0) = g_{i_2}(0) = 0$, então $m(f) = m(g_1) + m(g_2)$, onde $g_j = (f_1, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n)$ para $j = 1, 2$;
- iv. Se para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ tivermos que $f_i = h g_i$, com $h(0) \neq 0$, então $m(f) = m(g)$, onde $g = (f_1, \dots, f_{i-1}, g_i, f_{i+1}, \dots, f_n)$;
- v. Seja $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe finito. Então $m(f \circ g) = m(f)m(g)$;

A seguinte definição pode ser encontrada no capítulo 1 seção 1.B de [10].

Definição 1.18. *Seja $g = (g_1, \dots, g_{n-m}) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-m}, 0)$ um germe analítico. Dizemos que $g^{-1}(0)$ é uma *interseção completa com singularidades isoladas* (ICIS) de dimensão m se g_j não é um divisor de zero do anel $\mathcal{O}_n / \langle g_1, \dots, g_{j-1} \rangle$, e todo $p \in g^{-1}(0)$, diferente de zero, é um ponto regular de g .*

Em [31] J. Montaldi e D. van Straten introduzem a noção de multiplicidade de 1-formas sobre uma curva que não é necessariamente uma interseção completa com singularidade isolada (ICIS). Esta definição terá fundamental importância neste trabalho.

Denotemos por $\rho(\alpha)$ a multiplicidade da 1-forma α sobre uma curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^n$ na origem introduzida em [31]. Note que se a curva \mathcal{C} é suave e $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ é uma 1-forma sobre \mathbb{C}^n , temos que o pullback

$$(i \circ \mathbf{x})^*(\alpha) = b(t)dt,$$

onde $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ é a aplicação inclusão e $\mathbf{x} : (-1, 1) \rightarrow (\mathcal{C}, 0)$ é uma parametrização de \mathcal{C} em uma vizinhança da origem. Neste caso, $\rho(\alpha)$ coincide com a multiplicidade do germe $b : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Os itens da proposição abaixo podem ser vistos com mais detalhes em [31].

Proposição 1.17. ([31]) Sejam \mathcal{C} o germe de uma curva em \mathbb{C}^n e α uma 1-forma em \mathbb{C}^n . Então:

- i. $\rho(\alpha)$ é invariante por deformações da curva \mathcal{C} e deformações da 1-forma α .
- ii. Se $n : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é a normalização de \mathcal{C} , então a multiplicidade do pullback $n^*(\alpha)$ é dada por $\rho(n^*(\alpha)) = \rho(\alpha) - 2\delta$, onde δ é o δ -invariante da curva \mathcal{C} .

Capítulo 2

Multiplicidade de equações diferenciais implícitas

Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução à teoria qualitativa das equações diferenciais implícitas (EDIs), tais como o estudo de pontos singulares, formas normais entre outros, a fim de definir a noção de multiplicidade de uma EDI e apresentar alguns resultados. Com respeito equações diferenciais binárias (EDBs) estudaremos separadamente o caso em que seus coeficientes são todos nulos no ponto singular e o caso em que eles não são todos nulos no ponto singular dado. As principais referências para este capítulo são: [14], [20], [21], [22], [26].

2.1 Pontos singulares de equações diferenciais implícitas

Uma equação diferencial implícita (EDI) é uma equação de forma

$$F(x, y, p) = 0, \tag{2.1}$$

onde $p = \frac{dy}{dx}$ e F é uma função suave em \mathbb{R}^3 . Uma curva integral da EDI (2.1) é uma curva suave $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(t) = (\gamma(t), \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_1'(t)})$ satisfaz Equação (2.1), isto é, $F(\beta(t)) = 0$. Se para algum ponto $q_0 = (x_0, y_0, p_0) \in \mathbb{R}^3$ tivermos $F(q_0) = 0$ e $F_p(q_0) \neq 0$, então pelo Teorema da Função Implícita, a EDI (2.1) pode ser reduzida, em uma vizinhança de (x_0, y_0) , a uma equação

diferencial ordinária (EDO) da forma

$$g(x, y) = \frac{dy}{dx}.$$

Neste caso, para cada $p_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ e $F_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$ obtemos uma curva integral que passando por (x_0, y_0) . Logo, uma EDI pode ser vista como uma superposição de EDOs.

Os pontos de uma EDI tais que $F_p \neq 0$ são estudados com as ferramentas das EDOs. Assim, os pontos de interesse para o estudo das EDIs são os pontos tais que $F = F_p = 0$, isto é, os pontos em que a EDI (2.1) não se reduz a uma EDO. Como o estudo destes pontos é de caráter local, é suficientes estudarmos a EDI (2.1) apenas em uma vizinhança de um ponto fixado. Denotaremos por (F, q) o germe de uma EDI (2.1), onde $q \in \mathbb{R}^3$ é tal que $F(q) = F_p(q) = 0$.

Definição 2.1. Um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ é dito ser um ponto *singular* da EDI (2.1) se $F(q) = F_p(q) = 0$.

Pelo Teorema de Sard podemos supor, genericamente, que a EDI (2.1) define uma superfície suave. Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação projeção dada por $\pi(x, y, p) = (x, y)$. Considere a aplicação restrição da projeção π a superfície $M = F^{-1}(0)$, denotada por $\pi|_M$.

Observação 2.1. (a) Genericamente, os pontos singulares da EDI (2.1) correspondem a pontos críticos da restrição $\pi|_M$. Além disso, pontos singulares correspondem a pontos $q \in M$ tais que o plano tangente $T_q M$ é perpendicular ao plano $\mathbb{R}^2 \times 0$.

(b) O conjunto de todos os pontos críticos de $\pi|_M$ é chamado de *criminante* da EDI, esse conjunto é denotado por C . Tais pontos correspondem a zeros da aplicação $C_F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $C_F(q) = (F(q), F_p(q))$. A aplicação C_F é chamada de *aplicação criminante*. Genericamente, o conjunto de zeros de C_F formam uma curva suave.

Definição 2.2. A imagem do criminante pela aplicação restrição $\pi|_M$ é chamada de *discriminante* da EDI (2.1).

Pela Definição 1.12 os pontos críticos de $\pi|_M$ que correspondem a pontos de dobra são tais que $F_{pp} \neq 0$ e os pontos que correspondem a cúspide são tais que $F_{pp} = 0$ e $F_{ppp} \neq 0$. Pelo Teorema 1.7 podemos supor que, genericamente $\pi|_M$ apenas possui pontos singulares de dobra e cúspide.

Existem dois métodos para o estudo das EDIs: o método da *transformação de Legendre* (para mais detalhes ver [22]) e outro é o método de levantamento de linhas a um campo de vetores no fibrado projetivo. Este último método, que será o adotado neste trabalho, consiste em desdobrar uma EDI em uma simples EDO sobre um espaço mais complicado. Tal método utiliza a aplicação $\pi|_M$ para levantar a EDI (2.1) em uma EDO sobre M . Esta EDO é dada pelo campo vetorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (2.2)$$

que é tangente a M . Denotaremos a aplicação restrição do campo de vetores ξ dado por (2.2) a superfície suave $M = F^{-1}(0)$ por $\xi|_M$.

Uma das primeiras propriedades interessantes do campo de vetores ξ é que a imagem por $\pi|_M$ das curvas de integrais de ξ sobre M , corresponde a curvas integrais da EDI (2.1). Também é de fundamental importância o estudo dos zeros do campo de vetores $\xi|_M$. Considere a 1-forma $\omega = dy - pdx$ definida em \mathbb{R}^3 , chamada de *forma canônica* ou *forma de contato*. A restrição da 1-forma canônica ω a superfície M é denotada por $\omega|_M$.

Proposição 2.1. Seja $q_0 \in \mathbb{R}^3$ um ponto singular da EDI (2.1). Então, q_0 é um zero da 1-forma $\omega|_M$ se, e somente se, q_0 é um zero de $\xi|_M$.

Demonstração. Seja $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$ um zero de $\omega|_M$. Defina a transformação linear $T_{q_0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T_{q_0}(u, v, w) = (F_x(q_0)u + F_y(q_0)v + F_p(q_0)w, v - p_0u)$. Note que o núcleo de T_{q_0} coincide com o plano tangente a M em q_0 . Logo o posto de T_{q_0} tem de ser 1. Portanto $F_p(q_0) = (F_x + pF_y)(q_0) = 0$. Reciprocamente, seja $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$ um zero do campo de vetores $\xi|_M$. Como q_0 é um valor regular de F podemos supor que $F_y(q_0) \neq 0$. Note que o vetor gradiente de F em q_0 tem é dado por

$$\nabla F(q_0) = (-p_0F_y(q_0), F_y(q_0), 0).$$

Logo para todo (u, v, w) no plano tangente a M em q_0 temos que

$$-p_0u + v = 0.$$

O que mostra o resultado. □

A proposição acima nos permite ver que o estudo de EDIs também pode ser feito estudando a 1-forma canônica restrita a superfície M .

Definição 2.3. Um ponto singular $q \in \mathbb{R}^3$ da EDI (2.1) é um *ponto singular regular* se o criminante C da EDI (2.1) é suave e q não é um zero da 1-forma canônica $\omega|_C$.

Proposição 2.2. ([26]) Uma condição necessária e suficiente para que um ponto q seja singular regular da EDI (2.1) é que

$$F(q) = F_p(q) = 0 \text{ e } (F_x - pF_y)(q)F_{pp}(q) \neq 0.$$

Exemplo 2.1. Considere a equação $F(x, y, p) = p^2 - x = 0$. Note que o criminante de F é formado pelos pontos $x = p = 0$, ou seja o eixo- y . A condição de regularidade de C é claramente satisfeita. Além disso, o vetor $(0, y, 0)$ pertence ao plano tangente ao criminante mas $\omega|_C(0, 1, 0) = 0$. Assim, todo ponto singular de F é regular.

Observação 2.2. Um ponto singular que não atende as condições da Definição 2.3 é chamado de *não regular*, é possível mostrar que pontos singulares não regulares correspondem a zeros da 1-forma $\omega|_C$ ou a pontos singulares de C . Genericamente, os zeros de 1-forma $\omega|_C$ são isolados. Logo, o conjunto de pontos singulares regulares é aberto e denso no criminante C .

Definição 2.4. Um ponto singular $q \in M$ é uma *singularidade de tipo cúspide* da EDI (2.1) se q é um ponto de cúspide da projeção $\pi|_M$ e q não é um zero da 1-forma canônica $\omega|_M$.

Proposição 2.3. ([26]) Uma condição necessária e suficiente para que um ponto q seja uma singularidade de tipo cúspide é que

$$F(q) = F_p(q) = F_{pp}(q) = 0 \text{ e } [F_x(q)F_{py}(q) - F_y(q)F_{px}(q)]F_{ppp}(q)(F_x + pF_y)(q) \neq 0$$

Definição 2.5. Dizemos que um ponto q é um *zero* da EDI (2.1) se q for um ponto singular não regular da EDI (2.1).

Definição 2.6. Dados dois germes de EDIs (F, q_0) e (G, q_1) , diremos que eles são *equivalentes*, se existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_1)$ que leva curvas integrais de F em curvas integrais de G , onde $q_0 = (z_0, p_0)$ e $q_1 = (z_1, p_1)$.

Observação 2.3. Note que se $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, z_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_1)$ é um germe de difeomorfismo e $\rho : (\mathbb{R}^3, q_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe de função suave tal que $\rho(q_0) \neq 0$, então o germe de EDI dado por $\overline{G}(x, y, p) = [\rho(F \circ H)](x, y, p)$ é equivalente ao germe (F, q_0) , onde $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo definido por $H(x, y, p) = (h(x, y), \frac{h_{2x}(x, y) + p h_{2y}(x, y)}{h_{1x}(x, y) + p h_{1y}(x, y)})$. Com efeito, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva integral de \overline{G} devemos mostrar que $h \circ \alpha$ é uma curva integral de F . Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} \beta(t) &= ((h \circ \alpha)(t), \frac{(h_2 \circ \alpha)'}{(h_1 \circ \alpha)'}) \\ &= ((h \circ \alpha)(t), \frac{(h_{2x} \circ \alpha)(t)\alpha_1'(t) + (h_{2y} \circ \alpha)(t)\alpha_2'(t)}{(h_{1x} \circ \alpha)(t)\alpha_1'(t) + (h_{1y} \circ \alpha)(t)\alpha_2'(t)}) \\ &= ((h \circ \alpha)(t), \frac{(h_{2x} \circ \alpha)(t) + (h_{2y} \circ \alpha)(t)\frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)}}{(h_{1x} \circ \alpha)(t) + (h_{1y} \circ \alpha)(t)\frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)})} \\ &= H(\alpha(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)}). \end{aligned}$$

Assim,

$$F(\beta(t)) = F(H(\alpha(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)})) = \overline{G}(\alpha(t), \frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)}) = 0.$$

Também diremos que (F, q_0) é topologicamente (respectivamente, analiticamente) equivalente a (G, q_1) se h é um germe de homeomorfismo (respectivamente, analítico real), que leva curvas integrais de F em curvas integrais de G .

2.2 Forma normais de EDIs

Nesta seção faremos um breve estudo sobre formas normais de EDIs, em uma vizinhança de um zero da EDI. Para este estudo, o principal resultado desta seção foi obtido por A. A. Davydov em [20], encontrando as formas normais de uma EDI em uma vizinhança de um zero de tipo sela, nó e foco do campo de vetores (ver Definição 1.15) $\xi|_M$ dado por (2.2). Iremos nos referir a tais pontos como pontos singulares de tipo sela, nó e foco da EDI.

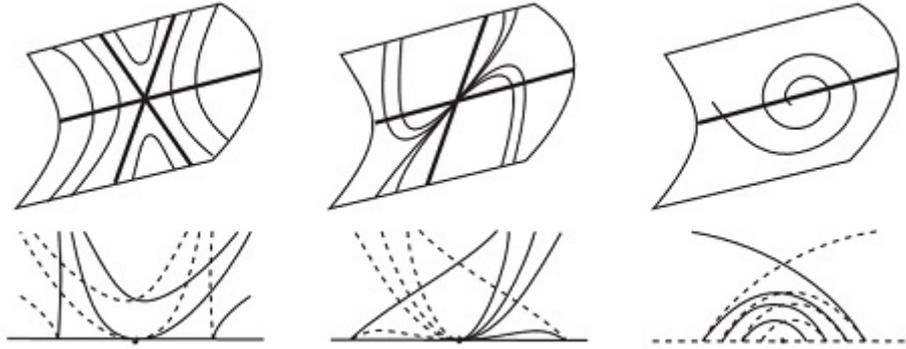


Figura 2.1: Pontos singularidades de tipo sela, nó e foco respectivamente

Observação 2.4. Se $p \in M$ é um ponto não singular da EDI (2.1), então o germe $(F, 0)$ é equivalente ao germe $(G, 0)$, onde $G(x, y, p) = p$.

Teorema 2.4. ([26]) *Seja q um ponto singular regular da EDI (2.1). Então, (F, q) é equivalente a um germe de EDI da forma $(x - p^2, 0)$.*

O resultado acima caracteriza as EDIs em pontos singulares regulares. Existe também um estudo das formas normais em pontos singulares não regulares.

Definição 2.7. *Seja (F, q) um germe de EDI com q ponto singular da EDI que satisfaz as condições $F_{pp}(q) = 0$ e $F_{ppp}(q)(F_x + pF_y)(q) \neq 0$. Então diremos que:*

- i. q é uma *cúspide elíptica* se $(F_x F_{py} - F_y F_{px})(q) > 0$ e
- ii. q é uma *cúspide hiperbólica* se $(F_x F_{py} - F_y F_{px})(q) < 0$.

L. Dara em [26], através do teorema da transversalidade de Thom, estudou os pontos singulares não regulares de uma EDI. Enunciaremos agora o principal resultado de L. Dara.

Teorema 2.5. ([26]) *O conjunto de todas as funções $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, tais que os pontos singulares da EDI*

$$F(x, y, p) = 0$$

são apenas dos seis tipos:

- i. *regulares;*
- ii. *sela, nó e foco;*

iii. *cúspide elíptico e hiperbólico,*

é um conjunto aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ com a topologia de classe \mathcal{C}^r de Whitney, com $r \geq 3$.

Ainda no mesmo trabalho L. Dara conjecturou as seguintes formas normais:

- i. Se q é um ponto singular de tipo sela, nó ou foco, então o germe (F, q) é equivalente a $(p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2, 0)$ para $\lambda < 0$, $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ e $\lambda > \frac{1}{4}$ respectivamente;
- ii. Se q é um ponto singular de tipo cúspide elíptica, então o germe (F, q) é equivalente a $(x - p^3 + yp, 0)$ e que
- iii. Se q é um ponto singular de tipo cúspide hiperbólico, então o germe (F, q) é equivalente a $(x - p^3 - yp, 0)$

A. A. Davydov em [20] obteve as formas normais de EDIs em uma vizinhança de um ponto singular de tipo sela, nó ou foco. Entretanto, ainda em [20], Davydov mostrou que em uma vizinhança de um ponto singular de tipo cúspide, elíptica ou hiperbólica, a conjectura de Dara não era verdadeira, mesmo no caso topológico.

Teorema 2.6. ([20]) *Seja q um ponto singular do tipo sela, nó ou foco do campo $\xi|_M$. Então o germe (F, q) é equivalente a $(p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2, 0)$ para $\lambda < 0$, $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ e $\lambda > \frac{1}{4}$ respectivamente.*

2.3 Multiplicidade uma EDI

Nesta seção definiremos a multiplicidade de uma EDI e provaremos alguns resultados. Para tanto iremos considerar uma EDI dada por

$$F(x, y, p) = 0, \tag{2.3}$$

onde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função analítica real. Como já definido iremos considerar a superfície suave $M = F^{-1}(0)$ e a restrição da projeção natural $\pi|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi|_M(x, y, p) = (x, y)$.

Em [21] é introduzida a definição de multiplicidade de um germe de EDI, $(F, 0)$, da seguinte forma.

Definição 2.8. Seja $q \in \mathbb{R}^3$ um zero da EDI (2.3). A *multiplicidade* do germe de EDI (F, q) é o número máximo de zeros de uma deformação da EDI (2.3) (incluindo os zeros complexos).

Aqui iremos considerar que o criminante é uma *singularidade de interseção completa isolada* (ICIS). Note também que a multiplicidade não está definida se a 1-forma canônica $\omega|_M$ é identicamente nula sobre o criminante.

Nossa primeira tarefa será encontrar condições necessárias e suficientes para que a multiplicidade da 1-forma canônica restrita ao criminante $\omega|_C$ seja igual a 1.

Proposição 2.7. Se um ponto sobre o criminante é um ponto de cúspide da projeção, então a multiplicidade da 1-forma $dy - pdx$ é genericamente 1, e será precisamente 1 quando o limite da direção tangente ao ponto de cúspide não está na mesma direção que a determinada pelo valor de p em um ponto de cúspide. Se o ponto singular em questão é mais degenerado, então a multiplicidade é pelo menos 2. Além disso, em um ponto de cúspide temos multiplicidade 1 se, e somente se, o campo de vetores $\xi|_M$ é diferente de zero neste ponto.

Demonstração. Se tivermos uma cúspide na projeção, podemos parametriza-la da forma

$$\gamma(t) = (x(t) + x_0, y(t) + y_0, t + p_0) \quad (2.4)$$

tal que $t = 0$ corresponde ao ponto de cúspide. Logo $F(\gamma(t)) = F_p(\gamma(t)) = 0$, derivando ambas as expressões e avaliando em $t = 0$ temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} F_x x'(0) + F_y y'(0) = 0 \\ F_{px} x'(0) + F_{py} y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Como o ponto em questão é de cúspide (definição 2.4) temos que $x'(0) = y'(0) = 0$. E com alguns cálculos temos também que os vetores $(x''(0), x'''(0))$ e $(y''(0), y'''(0))$ são linearmente independentes. Agora note que o pullback da 1-forma sobre o criminante

$$(y'(t) - (t + p_0)x'(t))dt$$

terá multiplicidade 1 genericamente. E deduzimos que que será precisamente 1 quando

$$y''(t) - tx'(t) - (t + p_0)x''(t)$$

for diferente de zero em $t = 0$, ou seja, quando

$$y''(0) \neq p_0x''(0). \quad (2.5)$$

Note que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x'(t)}{y'(t)} &= p_0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{y'(t) - y'(0)}{t}}{\frac{x'(t) - x'(0)}{t}} &= p_0 \\ \Rightarrow \frac{y''(0)}{x''(0)} &= p_0 \end{aligned}$$

assim temos que 2.5 é válida se, e somente se, o limite da direção tangente na cúspide no plano (x, y) não tem inclinação p_0 .

Para a segunda parte, temos que se o discriminante é singular, então a multiplicidade do ponto singular é maior do que 1. Sendo 0 um valor regular de F , podemos supor que $F_y(x_0, y_0, p_0) \neq 0$. Sendo assim é possível parametrizar $M = F^{-1}(0)$ como

$$\mathbf{X}(x, p) = (x, h(x, p), p), \quad (2.6)$$

e desta forma, a aplicação $\pi|_M$ será uma aplicação do plano no plano dada por

$$\pi(x, p) = (x, h(x, p)).$$

Note que o coposto da aplicação $\pi|_M$ será 1, e pela proposição 1.9 o 2-jato de π será equivalente a uma (x, y^2) ou (x, xy) . No primeiro caso vemos que o discriminante é suave. No segundo caso, não é difícil mostrar que, a menos que tenhamos uma cúspide, o discriminante tem multiplicidade maior que 2. Para a última parte, por simplicidade, assumiremos que $p_0 = 0$. Como $(x''(0), x'''(0))$ e $(y''(0), y'''(0))$ são linearmente independentes, segue que $x(t)$ e $y(t)$ tem ordem pelo menos 2 e um deles terá ordem exatamente 2. Agora derivando $F(\gamma(t)) = 0$ e usando o fato de que $F_p(\gamma(t)) = 0$

tem-se

$$F_x(\gamma(t))x'(t) + F_y(\gamma(t))y'(t) = 0.$$

Derivando mais uma vez e avaliando em $t = 0$ obtemos que

$$F_x x'(0) + F_y y'(0) = 0,$$

assim $y(t)$ terá ordem > 2 se, e somente se, $F_x(0, 0, 0) = 0$. Ora, mas essa é a condição para o campo ξ tenha um zero em $(0, 0, 0)$. \square

Proposição 2.8. Suponha que o criminante C da EDI (2.3) é suave. Seja $q \in \mathbb{R}^3$ um ponto de tipo dobra da EDI (2.3). Então a multiplicidade da 1-forma $\omega|_C$ em q é 1 se, e somente se, q é um ponto regular da aplicação $(F, F_p, -(F_x + pF_x))$.

Demonstração. Suponha que q seja um ponto sobre o criminante correspondendo a um zero do campo de vetores ξ de tipo sela, nó ou foco. Pelo Teorema 2.6 podemos escrever F na forma $p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2$. Assim, seu criminante C é dado por $p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2 = 2p = 0$ que pode ser parametrizado na forma $(t, \frac{\lambda}{4}t^2, 0)$. Logo o pullback da 1-forma canônica $\omega|_C$ é $(\frac{\lambda}{2}t)dt$ e teremos que em zero a multiplicidade de $\omega|_M$ é 1 desde que $\lambda \neq 0$. Agora analisaremos a condição de $\lambda \neq 0$. Note que no sistema de coordenadas $X(x, p) = (x, -\frac{\lambda}{4}x^2 - p^2, p)$ o campo de vetores $\xi|_M$ é da forma

$$p \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\lambda}{2}x - p\right) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Assim, seu polinômio característico terá a forma

$$t(1 - t) - \frac{\lambda}{2}. \tag{2.7}$$

Claramente, $\xi|_M$ terá autovalor igual a zero se, e somente se, $\lambda = 0$. Ou equivalentemente se definirmos, a aplicação

$$G(x, y, p) = (F, F_p, -(F_x + pF_x)) = \left(p^2 + y + \frac{\lambda}{4}x^2, 2p, -\left(\frac{\lambda}{2}x + p\right)\right),$$

temos que

$$\det(JG(0, 0, 0)) = -\frac{\lambda}{2}.$$

Portanto, $(0, 0, 0)$ é um valor regular de G se, e somente se, $\lambda \neq 0$. \square

Proposição 2.9. Seja $(F, 0)$ um germe de EDI. Então existe uma aplicação suave $\bar{F} : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de modo que para todo t em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$ a EDI $F_t = \bar{F}(-, -, -, t) = 0$ tem zeros de multiplicidade 1.

Demonstração. É sempre possível deformar F de modo que o criminante seja suave, e pelo teorema 1.7, as únicas singularidades da projeção $\pi|_M$ são dobras e cúspides. Pela proposição 2.7 em um ponto de cúspide devemos apenas verificar que o limite das direções tangentes não é a mesma direção determinada pelo ponto p . Isto pode ser feito apenas trasladando a superfície M na direção p , mudando o valor de p mas mantendo o criminante e discriminante invariáveis. Usando agora a proposição 2.8, para obter um conjunto discretos de zeros do campo de vetores $\xi|_M$, precisamos apenas que $(0, 0, 0)$ seja um valor regular da aplicação $(F, F_p, -(F_x + pF_y))$, o que é possível. \square

Como os germes nesta seção são analíticos reais, pela observação 1.7, a proposição acima também será verdadeira se complexificarmos o germe $(F, 0)$.

Agora obteremos uma fórmula para a multiplicidade de uma EDI como na definição de multiplicidade dada no capítulo 1. No que segue admitiremos que o ponto singular em questão será $(0, 0, 0)$.

Proposição 2.10. Seja $(F, 0)$ um germe de EDI. Então:

- (a) Se $F_{pp}(0) \neq 0$, então a multiplicidade do germe $(F, 0)$ é dado pela $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_3 / \langle F, F_p, F_x + pF_y \rangle$.
- (b) Se $F_{pp} = 0$ e $\xi|_M(0) \neq 0$, então a multiplicidade do germe $(F, 0)$ é dado pela $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_3 / \langle F, F_p, F_{pp} \rangle$.
- (c) Se $F_{pp} = 0$ e $\xi|_M(0) = 0$, então a multiplicidade de tal ponto é dado pela soma dos números em (a) e (b)

Demonstração. Deformando a superfície M , o ponto singular em questão irá se dividir em vários outros próximos cada um com multiplicidade 1. No caso (a), segue da proposição 2.8 que estes

novos pontos singulares correspondem a zeros do campo $\xi|_M$. Para o caso (b), a proposição 2.7 garante que esses novos pontos singulares correspondem a pontos de cúspide. Note agora que os conjuntos de (a) e (b) são formados pelas três equações cada, logo o resultado neste caso, se dão como em (c). \square

Teorema 2.11. *A multiplicidade da EDI (2.3) é finita se, e somente se, os inteiros dados em (a) e (b) da proposição 2.10 são finitos.*

Demonstração. É claro que se os inteiros em (a) e (b) da proposição 2.10 são finitos, então a multiplicidade é finita. Por outro lado suponha que a multiplicidade não seja finita, então o criminante tem uma componente parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), p(t))$, sobre a qual a 1-forma canônica $\omega|_C$ se anula. O pullback $\gamma^*(\omega|_C)$ terá a forma $(y'(t) - p(t)x'(t))dt$. Derivando $F(\gamma(t)) = 0$ e usando fato de que $F_p(\gamma(t)) = 0$ tem-se que

$$F_x(\gamma(t))x'(t) + F_y(\gamma(t))y'(t) = 0,$$

para todo t e pelo pullback tem-se ainda

$$(F_x(\gamma(t)) + p(t)F_y(\gamma(t)))x'(t) = 0.$$

Assim concluí-se que ou $(F, F_p, F_x + pF_y)$ não é uma aplicação finita (ver proposição 1.13) ou $x'(t) = y'(t) = 0$. Este último caso significa que o eixo p é uma uma componente do criminante, logo (F, F_p, F_{pp}) não é uma aplicação finita, o que mostra o resultado. \square

Diremos que um conjunto $W \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tem codimensão infinita se para todo $z \in J^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ existe uma função $f \notin W$ tal que $j^r f(0) = z$. (ver [32]).

Teorema 2.12. ([21]) *O conjunto formado pelas EDIs que tem multiplicidade infinita tem codimensão infinita no conjunto de todas as EDIs.*

Observação 2.5. (a) É fácil ver que se o criminante não é uma ICIS então um dos inteiros na proposição 2.10 são infinitos. Pois se o criminante falha em ser uma ICIS podemos encontrar uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), p(t))$ sobre $F = F_p = 0$ ao longo da qual $dF \wedge dF_p$ se anula.

Isto implica que ou F_{pp} ou ambos F_x e F_y se anulam ao longo da curva. Logo, (F, F_p, F_{pp}) ou $(F, F_p, F_x + pF_y)$ não será uma aplicação finita.

- (b) No caso em que o discriminante é uma ICIS então pode-se calcular a multiplicidade da EDI diretamente como $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_3 / \langle F, F_p, \theta \rangle$ onde $\theta = ((dy - p dx) \wedge (F, F_p)^* \omega_2) / \omega_3$ e ω_i é a forma volume canônica de \mathbb{C}^i . (para mais detalhes sobre esta afirmação ver §1 de [31]). Assim θ é dado por

$$\det \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_p \\ F_{px} & F_{py} & F_{pp} \\ -p & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma o espaço vetorial acima se reduz a $\mathcal{O}_3 / \langle F, F_p, F_{pp}(F_x + pF_y) \rangle$.

A observação acima nos remete a dois tipos de zeros distinguindo-os geometricamente.

Exemplo 2.2. (a) Considere a EDI dada pela equação $F(x, y, p) = p^3 + xp + sx + y = 0$. O discriminante da EDI é dado por $p^3 + xp + sx + y = 3p^2 + x = 0$, que por sua vez, pode ser parametrizado por $\gamma(t) = (-3t^2, 3st^2 + 2t^3, t)$. Assim, o pullback da 1-forma canônica $\omega|_C$ é dado por $\gamma^*(\omega) = 6(st + 2t^2)dt$. Quando $s = 0$, multiplicidade da 1-forma canônica $\omega|_C$ é 2 em $t = 0$, embora isso implique que a projeção tenha uma singularidade de tipo cúspide. Agora quando $s \neq 0$ temos dois zeros no pullback que correspondem a um ponto de cúspide da projeção $\pi|_M$ ($t = 0$) e o outro corresponde a um zero do campo de vetores $\xi|_M$ ($t = -s/2$).

- (b) Considere agora a EDI dada pela equação $F(x, y, p) = p^2 + x^2 = 0$. O discriminante é dado por $p^2 + x^2 = p = 0$, ou seja o discriminante é o eixo y . Logo, o discriminante não é uma ICIS, na verdade, a aplicação $(F, F_p, F_x + pF_y)$ é infinita. Analogamente o mesmo ocorre com a superfície $p^3 + x = 0$, só que aqui a aplicação (F, F_p, F_{pp}) é infinita.

2.4 Equações diferenciais binárias

Uma equação diferencial binária (EDB) é uma equação do tipo

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (2.8)$$

onde a, b e c são funções suaves de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} . As funções a, b e c são chamadas de *coeficientes* da EDB. Note que a Equação (2.8) pode ser vista como uma EDI. De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que $dx \neq 0$. Assim, obtemos que a EDB (2.8) é uma EDI da forma

$$F(x, y, p) = ap^2 + 2bp + c = 0. \quad (2.9)$$

Dessa forma o discriminante da EDI (2.9) é dado por $ap^2 + 2bp + c = ap + b = 0$. A função $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta = b^2 - ac$ é chamada de *aplicação discriminante*, e com um simples cálculo podemos mostrar que o discriminante da EDI (2.9) é formado pelos zeros da aplicação δ .

Uma curva integral da EDB (2.8) é uma curva suave $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $E(\gamma(t))[\gamma'(t)] = 0$. Uma EDB é dita ser *positiva* se $\delta(x, y) \geq 0$, e $\delta(x, y) = 0$ se, e somente se, $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$. Para mais detalhes sobre EDB positivas ver [25]. EDBs surgem em diferentes ramos da matemática, e em particular na geometria diferencial das superfícies em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.3. (a) As linhas de curvatura de uma superfície em \mathbb{R}^3 , em torno de um ponto umbílico determina uma EDB positiva definida por

$$(gF - fG)dy^2 + (gE - eG)dxdy + (fE - eF)dx^2 = 0$$

onde e, f, g e E, F, G são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais da superfície, respectivamente.

(b) As linhas assintóticas de uma superfície em \mathbb{R}^3 determina uma EDB

$$edy^2 + 2fdxdy + gdx^2 = 0$$

onde e, f e g são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície. Neste caso a EDB não é necessariamente positiva.

Definição 2.9. Um ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ é pontos singular da EDB (2.8) se existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tal que (z_0, p_0) é um ponto singular da EDI (2.9).

Denotaremos por (E, z_0) o germe de uma EDB, onde z_0 é um ponto singular da EDB (2.8).

Definição 2.10. Dois germes de EDBs (E_1, z_1) e (E_2, z_2) dados por

$$E_1(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0$$

$$E_2(x, y)[dx, dy] = A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0$$

são *equivalentes* se existem um germe de função $\rho : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow \mathbb{R}$ não nulo em z_1 e um germe de difeomorfismo $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_2)$ tais que

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(a \circ h) & \rho(b \circ h) \\ \rho(b \circ h) & \rho(c \circ h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

onde $h_x^1 = \alpha$, $h_y^1 = \beta$, $h_x^2 = \gamma$ e $h_y^2 = \xi$ são as derivadas parciais das funções coordenadas do germe h .

Uma propriedade importante do germe h é que ele leva curvas integrais de (E_2, z_2) em curvas integrais de (E_1, z_1) . Com relação a equivalência acima, a classificação de EDBs apresenta infinitas formas normais, neste caso diremos que a EDB apresenta moduli. Todavia, é possível definir uma relação de equivalência mais fraca e que é a seguinte.

Definição 2.11. Dois germes de EDB (E_1, z_1) e (E_2, z_2) são *topologicamente equivalentes* se existe um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_2)$ que leva curvas integrais de (E_1, z_1) em curvas integrais de (E_2, z_2) .

2.5 Multiplicidade de EDBs

Seja $(E, 0)$ um germe de EDB dado por (2.8). Se fixarmos um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ veremos que a equação $a(x_0, y_0)p^2 + 2b(x_0, y_0)p + c(x_0, y_0) = 0$ terá 0, 1, 2 ou infinitas soluções, o último caso ocorre quando $a(x_0, y_0) = b(x_0, y_0) = c(x_0, y_0) = 0$.

Quando os coeficientes da EDB (2.8) não são todos nulos em (x_0, y_0) , podemos supor sem perda de generalidade que $a(x_0, y_0) \neq 0$, pois se $a(x_0, y_0) = c(x_0, y_0) = 0$ e $b(x_0, y_0) \neq 0$ uma mudança de coordenadas do tipo $X = x + y$, $Y = x - y$ nos remete a uma nova EDB $A(X, Y)dY^2 +$

$2B(X, Y)dXdY + C(X, Y)dX^2 = 0$, onde o coeficiente

$$A(X, Y) = a\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right) - 2b\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right) + c\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}\right),$$

é claramente não nulo em (x_0, y_0) . Se (x_0, y_0) é um ponto singular da EDB (2.8) e $a(x_0, y_0) \neq 0$, então (x_0, y_0, p_0) é um ponto singular da EDI (2.9), onde $p_0 = -\frac{b(x_0, y_0)}{a(x_0, y_0)}$.

Definição 2.12. Seja $(E, (x_0, y_0))$ um germe de EDB (2.8) com coeficiente $a(x_0, y_0) \neq 0$. A *multiplicidade* do germe $(E, (x_0, y_0))$ é definida como $M(E, (x_0, y_0)) = M(F, (x_0, y_0, p_0))$, onde $(F, (x_0, y_0, p_0))$ é o germe de EDI dado por (2.9) e $p_0 = -\frac{b(x_0, y_0)}{a(x_0, y_0)}$.

Proposição 2.13. Seja $(E, 0)$ um germe de EDB com $a(0, 0) \neq 0$ e $p_0 = -\frac{b(x_0, y_0)}{a(x_0, y_0)}$. Então:

- (a) $(0, 0, p_0)$ é um ponto de dobra da projeção $\pi|_M$;
- (b) $(0, 0, p_0)$ é um zero do campo de vetores $\xi|_M$ se, e somente se,

$$a_y(0, 0)p_0^3 + (a_x(0, 0) + 2b_y(0, 0))p_0^2 + (2b_x(0, 0) + c_y(0, 0))p_0 + c_x(0, 0) = 0; \quad (2.11)$$

- (c) A multiplicidade do germe $(E, 0)$ é dado por $M(E, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_2 / \langle \delta, a(x, y)\delta_x - b(x, y)\delta_y \rangle$

Demonstração. (a) Note que $F_p(0, 0, p_0) = 2a(0, 0)p_0 + b(0, 0) = 0$ e $F_{pp}(0, 0, p_0) = 2a(0, 0) \neq 0$.

- (b) O resultado segue direto da Equação (2.9).

- (c) Pelo item (a) da proposição 2.10 temos que $M(E, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_3 / \langle F, F_p, F_x + pF_y \rangle$, onde $(F, (0, 0, p_0))$ é o germe de EDI dado por (2.9). Mas com alguns cálculos simples podemos mostrar que $F(0, 0, p_0) = F_p(0, 0, p_0) = (F_x + pF_y)(0, 0, p_0) = 0$ se, e somente se, $\delta(0, 0) = a(0, 0)\delta_x(0, 0) - b(0, 0)\delta_y(0, 0) = 0$. Assim,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_3 / \langle F, F_p, F_x + pF_y \rangle = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_2 / \langle \delta, a\delta_x - b\delta_y \rangle.$$

□

Proposição 2.14. Seja $(E, 0)$ um germe de EDB com coeficientes não nulos em $0 \in \mathbb{R}^2$. Então $(E, 0)$ é equivalente a um germe $(L, 0)$ dado por

$$L(x, y, [dx, dy]) = dy^2 + f(x, y)dx^2 = 0.$$

Demonstração. Suponha que $a(0, 0) \neq 0$. Agora encontraremos uma mudança de coordenadas da forma $x = X$ e $y = \phi(X, Y)$, onde $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Dessa forma $dx = dX$ e $dy = \phi_X dX + \phi_Y dY$, por vezes omitiremos o ponto (X, Y) . Usando a mudança de coordenadas descrita acima obtemos uma EDB da forma

$$A(X, Y)dY^2 + B(X, Y)dXdY + C(X, Y)dX^2 = 0, \quad (2.12)$$

onde $A(X, Y) = a(X, \phi)\phi_Y^2$, $B(X, Y) = 2a(X, \phi)\phi_X\phi_Y + 2b(X, \phi)\phi_Y$ e $C(X, Y) = a(X, \phi)\phi_X^2 + 2b(X, \phi)\phi_X + c(X, \phi)$. Agora queremos que o coeficiente $B(X, Y) = 0$. Em outras palavras, procuramos solução da equação diferencial parcial

$$a(X, \phi)\phi_X\phi_Y + b(X, \phi)\phi_Y = 0.$$

Podemos supor que $\phi_Y(0, 0) \neq 0$. Assim,

$$\phi_X = -\frac{b(X, \phi)}{a(X, \phi)}. \quad (2.13)$$

Uma vez fixado Y , a Equação (2.13) se torna uma EDO para a qual ϕ é uma solução. Se impormos a condição inicial de que $\phi(0, Y) = Y$, então obteremos uma única solução que dependerá suavemente do valor inicial Y . Além disso, note que $\phi_Y(0, 0) = 1$. Logo temos uma verdadeira mudança de coordenadas. Como o coeficiente $A(X, Y)$ é não nulo em $(0, 0)$ obtemos a forma normal desejada. \square

Note que a proposição acima nos diz que para uma EDB com coeficientes não nulos além de supor que $a(0, 0) \neq 0$ também é possível supor que $b(0, 0) = 0$.

Observação 2.6. A superfície dada pela EDI $F(x, y, p) = p^2 - f(x, y) = 0$ tem um ponto singular

em $(0, 0, 0)$ se $(0, 0)$ é um ponto singular de f . Esta singularidade é do mesmo tipo de f , seu discriminante será dado por $p^2 + f(x, y) = p = 0$, ou seja, são os zeros de f e a 1-forma canônica $\omega|_C$ se reduzirá apenas a dy . É claro que a multiplicidade não estará definida se o pullback da 1-forma canônica se anula sobre uma componente do discriminante, ou seja, isso ocorrerá quando $y' = 0$ (equivalentemente quando $y = 0$ for uma componente de $f(x, y) = 0$).

Agora estudaremos os germes de EDBs $(E, 0)$ com coeficientes todos nulos em $(0, 0)$. Note que tais equações são bem diferentes da EDIs, pois sempre temos que $F_{p^r}(0, 0, p) = 0$ para qualquer r . Logo o estudo feito até agora sobre multiplicidade de EDIs não poderá ser aplicado diretamente neste tipo de germe. Entretanto, podemos deformar tais germes, dentro do conjunto das EDBs, de modo que os pontos singulares sejam de tipo dobra. Para encontrar essa deformação podemos seguir o argumento da prova da proposição 2.9. Segue então o seguinte resultado.

Proposição 2.15. Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma aplicação dada por $F(x, y, p, q) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)pq + c(x, y)q^2 = 0$ que determina uma EDB. Então podemos encontrar uma família de aplicações analíticas $\bar{F} : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, (0, 0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, da forma $\bar{F}(x, y, p, q, t) = a(x, y, t)p^2 + b(x, y, t)pq + c(x, y, t)q^2$, tal que $\bar{F}_0 = \bar{F}(-, -, -, 0) = F$ e com a propriedade de que para todo t em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ a equação dada por $\bar{F}_t = \bar{F}(-, -, -, t) = 0$ tenha discriminante suave, discriminante com ramos suaves e pontos singulares de multiplicidade 1 na vizinhança de $0 \times \mathbb{C}^2$.

Definição 2.13. Seja $(E, (x_0, y_0))$ um germe de EDB. Diremos que um ponto (x_0, y_0) é um ponto singular *não degenerado* se $\delta(x_0, y_0) = (a\delta_x - b\delta_y)(x_0, y_0) = 0$ e (x_0, y_0) é um ponto regular da aplicação $(\delta, a\delta_x - b\delta_y)$.

Definição 2.14. Seja $(E, 0)$ um germe de EDB com coeficientes nulos em $(0, 0)$. A multiplicidade do germe $(E, 0)$ é definido como sendo o número de pontos singulares não degenerados da EDB perturbada dada na proposição 2.15.

Exemplo 2.4. Considere a EDB dada por

$$E(x, y, [dx, dy]) = xdy^2 + 2ydydx + xdx^2 = 0. \quad (2.14)$$

Note que o discriminante $\delta(x, y) = y^2 - x^2$ é do tipo Morse (Definição 1.2). Mas adiante mostraremos um resultado que irá garantir que essa equação tem multiplicidade 3. Entretanto, se deformarmos a EDB (2.14) da forma

$$F^t(x, y, p) = tp^{n+2} + xp^2 + 2yp + x = 0,$$

temos que a equação $F^t = F_p^t = F_{pp}^t = 0$ tem multiplicidade n em zero. Assim, de acordo com a análise feita na seção 2.3 e pela arbitrariedade de n a multiplicidade desta EDI é infinita.

Agora encontraremos uma fórmula para a multiplicidade em termos dos coeficientes a, b e c da EDB (2.8). Para tanto, usaremos uma caracterização geométrica de pontos singulares, isto é, aqueles pontos do discriminante para os quais a única direção definida pela equação é tangente ao discriminante. Equivalentemente, a direção tangente ao discriminante é solução da EDB (2.8). Assim, os pontos singulares da EDB (2.8) irão satisfazer o sistema

$$\begin{aligned} \delta &= 0 \\ a(\delta_x)^2 - 2b\delta_x\delta_y + c(\delta_y)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Note que em pontos singulares não degenerados a segunda equação se torna um quadrado perfeito, de modo que o número de soluções do sistema acima é contado em dobro. Isto nos leva a inferir que a multiplicidade da EDB é dada por

$$M(E, 0) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_2 / \langle \delta, a(\delta_x)^2 - 2b\delta_x\delta_y + c(\delta_y)^2 \rangle. \quad (2.15)$$

Para concluir que o inteiro $M(E, 0)$ é de fato a multiplicidade da EDB primeiro mostraremos o seguinte resultado:

Proposição 2.16. Sejam $(E, 0)$ e $(G, 0)$ germes de EDBs. Se o germe $(E, 0)$ é equivalente a $(G, 0)$, então $M(E, 0) = M(G, 0)$.

Demonstração. Escrevendo

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2$$

e

$$G(x, y)[dx, dy] = A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2,$$

temos, pela definição 2.10, existem um germe de funções suaves $\rho : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\rho(0) \neq 0$, e um germe de difeomorfismo $h = (h^1, h^2) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que

$$\begin{aligned} A &= \xi^2 \rho(a \circ h) + 2\xi\beta\rho(b \circ h) + \beta^2 \rho(c \circ h) \\ B &= \xi\gamma\rho(a \circ h) + \xi\alpha\rho(b \circ h) + \beta\gamma\rho(b \circ h) + \alpha\beta\rho(c \circ h) \\ C &= \gamma^2 \rho(a \circ h) + 2\alpha\gamma\rho(b \circ h) + \alpha^2 \rho(c \circ h), \end{aligned}$$

onde $\alpha(x, y) = h_x^1(x, y)$, $\beta(x, y) = h_y^1(x, y)$, $\gamma(x, y) = h_x^2(x, y)$ e $\xi(x, y) = h_y^2(x, y)$, apenas por questão de notação omitiremos o ponto (x, y) . Com alguns cálculos, usando as expressões de A , B e C acima podemos mostrar que

$$B^2 - AC = \rho(\det dh)^2(\delta \circ h).$$

Visto que h é um difeomorfismo temos que $\det dh \neq 0$ na origem. Denote agora $\Delta = B^2 - AC$ como sendo a função discriminante do germe $(G, 0)$. Assim, $\Delta = \rho(\det h)^2 \cdot \delta \circ h$. Derivando esta última igualdade e usando as expressões de A , B , e C em termos de a , b e c podemos mostra que os ideais $\langle \Delta, A(\Delta_X)^2 - 2B\Delta_X\Delta_Y + C(\Delta_Y)^2 \rangle$ e $\langle \delta, a(\delta_x)^2 - 2\delta_x\delta_y + c(\delta_y)^2 \rangle$ tem a mesma codimensão. \square

Proposição 2.17. Seja $(E, 0)$ um germe de EDB dado por (2.8). Então, a multiplicidade do germe $(E, 0)$ é dada pelo inteiro $M(E, 0)$ definido em (2.15).

Demonstração. Seja \bar{F}_t uma deformação da EDI associada ao germe $(E, 0)$ como na proposição 2.15. Com isso garantimos que o criminante é suave e o discriminante não tem cúspides. Pelo teorema 2.6 existe apenas uma quantidade finita de pontos singulares não degenerados, onde localmente a equação pode ser reduzida a forma normal $F = p^2 - y - \lambda x^2 = 0$. Neste caso temos que $\delta = -y - \lambda x^2$. Além disso,

$$\begin{aligned} M(E, 0) &= \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2 / \langle \delta, a(\delta_x)^2 + 2b\delta_x\delta_y + c(\delta_y)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2 / \langle \lambda x^2 + y, \lambda(4\lambda - 1)x^2 - y \rangle \end{aligned}$$

$$M(E, 0) = 1.$$

Donde segue o resultado. □

O proximo lema simplifica o calculo da multiplicidade de uma EDB.

Lema 2.18. Seja $(E, 0)$ um germe de EDB. Então,

$$M(E, 0) = m(\delta, a\delta_x - b\delta_y) - m(a, b) = m(\delta, b\delta - c\delta_y) + m(b, c).$$

Demonstração. Usando a proposição 1.16 temos que

$$\begin{aligned} 2m(b^2 - ac, a\delta_x - b\delta_y) &= m(b^2 - ac, a\delta_x - b\delta_y) + m(b^2 - ac, a\delta_x - b\delta_y) \\ &= m(b^2 - ac, [a\delta_x - b\delta_y]^2) \\ &= m(b^2 - ac, a[a\delta_x^2 - 2b\delta_x\delta_y + c\delta_y^2]) \\ &= m(b^2 - ac, a) + m(b^2 - ac, a\delta_x^2 - 2b\delta_x\delta_y + c\delta_y^2) \\ &= 2m(b, a) + 2M(E, 0), \end{aligned}$$

o que mostra a primeira igualdade. A segunda igualdade segue analogamente. □

Capítulo 3

Equações diferenciais parciais de primeira ordem

Neste capítulo estudaremos as equações diferenciais parciais (EDP) de primeira ordem sobre o ponto de vista da teoria das singularidades, com intuito de expandir os conceitos e resultados de multiplicidade, apresentados no capítulo anterior, a equações mais gerais. As principais referências deste capítulo são [15], [27], [28].

3.1 EDPs de primeira Ordem

Nesta seção iremos descrever algumas propriedades genéricas das *equações diferenciais parciais de primeira ordem*. Uma EDP de primeira ordem é uma equação da forma

$$F(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (3.1)$$

onde $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Uma *solução clássica* da EDP de primeira ordem (3.1) é uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x_1, \dots, x_n)$ e $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$. Por simplicidade usaremos a notação $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$, a menos que seja necessário explicitar as coordenadas destes vetores. Se $F_{p_i}(q_0) \neq 0$, com $q_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$, para algum $i = 1 \dots, n$, então a EDP de primeira ordem (3.1) define uma família de soluções clássicas em uma vizinhança de q_0 (ver [30]).

Definição 3.1. Dada uma EDP de primeira ordem (3.1), o conjunto

$$D_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x, y, p) = F_{p_i}(x, y, p) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ para algum } p \in \mathbb{R}^n\}$$

é chamado de *discriminante* da EDP de primeira ordem.

Denote por $\Sigma(F)$ o conjunto dos pontos $q_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tais que $F(q_0) = F_{p_i}(q_0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

O método que iremos empregar para o estudo das EDP de primeira ordem será o método de Lie, que consiste em estudar o seguinte sistema

$$\begin{aligned} F(x, y, p) &= 0 \\ dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i &= 0, \end{aligned}$$

a 1-forma em \mathbb{R}^{2n+1} no sistema acima é denotada por ω .

Vamos agora descrever um pouco das estruturas que estão conectadas com as EDPs de primeira ordem. Seja $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a projeção natural definida por $\pi(x, y, p) = (x, y)$.

Observação 3.1. Note que qualquer subvariedade $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, tal que $\dim M = 2n$, pode ser vista como uma EDP de primeira ordem.

Definição 3.2. Diremos que um conjunto $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ é uma *subvariedade de Legendre* se $\dim L = n$ e o pullback $i^*\omega = 0$, onde $i : L \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ é um mergulho.

Dada uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a aplicação $j^1 f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (ver definição 1.6) é um mergulho legendriano, isto é, a imagem de $j^1 f$ é uma subvariedade de Legendre. Através deste fato podemos definir a noção de solução de uma EDP de primeira ordem.

Definição 3.3. Uma subvariedade de legendre $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ é uma *solução* da EDP de primeira ordem (3.1) se $L \subset F^{-1}(0)$.

Definição 3.4. Seja $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ uma subvariedade de Legendre. Diremos que um ponto $q \in L$ é um *ponto singular legendriano*, se q é um ponto singular da composição $\pi \circ i$, onde $i : L \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ é a aplicação inclusão.

A restrição da projeção natural ao conjunto $F^{-1}(0)$ será denotada por $\pi|_{F^{-1}(0)}$.

Definição 3.5. Dados uma EDP de primeira ordem (3.1) tal que 0 é um valor regular de F e $q \in F^{-1}(0)$. Diremos que:

- i. q é um *ponto de contato singular* se $\omega|_{F^{-1}(0)}(q) = 0$
- ii. q é um *ponto π -singular* se q for um ponto singular de $\pi|_{F^{-1}(0)}$,

O conjunto dos pontos π -singulares será denotado por $\Sigma(\pi|_{F^{-1}(0)})$.

Definição 3.6. Se o conjunto $\Sigma(\pi|_{F^{-1}(0)})$ for uma subvariedade de Legendre, diremos então que $\Sigma(\pi|_{F^{-1}(0)})$ é uma *solução singular* da EDP de primeira ordem (3.1).

Como as caracterizações acima são intrínsecas a $F^{-1}(0)$, elas não serão muito úteis ao nosso propósito. Escreveremos agora estas definições através de equações extrínsecas.

Proposição 3.1. Seja $F : (\mathbb{R}^{2n+1}, q_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de funções suaves com $\nabla F(q_0) \neq 0$, onde $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$. Então temos que

- (a) q_0 é um *ponto de contato singular* se, e somente se, q_0 é um zero do campo

$$\xi = \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \sum_{i=1}^n (F_{x_i} + p_i F_y) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

- (b) q_0 é um *ponto π -singular* se, e somente se, $F = F_{p_1} = \dots = F_{p_n} = 0$ em q_0 .

Demonstração. (a) Por definição $\omega|_{F^{-1}(0)}(q_0) = 0$. E isso acontece se, e somente se, $\omega \wedge dF = 0$ em q_0 . Uma vez que $dF = \sum_{i=1}^n F_{x_i} dx_i + F_z dz + \sum_{i=1}^n F_{p_i} dp_i$, temos que o produto exterior acima é nulo se

$$F_{p_i} = F_{x_i} + p_i F_z = 0$$

em q_0 .

- (b) Podemos supor, sem perda de generalidade, que $F_y \neq 0$ em q_0 . Assim é possível parametrizar $F^{-1}(0)$ na forma $X(x, p) = (x, h(x, p), p)$, em uma vizinhança de q_0 . Logo os pontos singulares de $\pi \circ X$ correspondem exatamente a pontos onde $F(q_0) = F_{p_i}(q_0) = \dots = F_{p_n}(q_0) = 0$.

□

Note que a imagem de $\Sigma(\pi|_{F^{-1}(0)})$ pela aplicação π coincide com o discriminante da EDP de primeira ordem (3.1).

Como uma solução $N \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ da EDP (3.1) é uma subvariedade de Legendre, também é necessário caracterizar os pontos tais que $\omega|_N(q) = 0$ em termos das equações que definem N . Tais pontos são chamados de *isotrópicos*. O próximo lema nos permite ter uma caracterização para solução singular.

Lema 3.2. ([27]) Seja N uma subvariedade n -dimensional de \mathbb{R}^{2n+1} dada pelas equações

$$f^1 = \dots = f^{n+1} = 0.$$

Então, N é isotrópica em $q_0 \in N$ se, e somente se, o posto da matriz

$$\begin{pmatrix} f_{x_1}^1 + p_1 f_y^1 & \dots & f_{x_1}^{n+1} + p_1 f_y^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n}^1 + p_n f_y^1 & \dots & f_{x_n}^{n+1} + p_n f_y^{n+1} \\ f_{p_1}^1 & \dots & f_{p_1}^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p_n}^{n+1} & \dots & f_{p_n}^{n+1} \\ & (*) & \end{pmatrix}$$

é menor que $n + 1$ em q_0 , onde $(*)$ é a matriz $(p_k f_{x_l}^j - p_l f_{x_k}^j)$ de ordem $\frac{n(n-1)}{2} \times (n + 1)$, com $1 \leq l < k \leq n$.

Corolário 3.3. Suponha que $\Sigma(F)$ seja uma subvariedade n -dimensional em \mathbb{R}^{2n+1} em q_0 . Então, $\Sigma(F)$ é isotrópica em q_0 se, e somente se, o posto da matriz

$$\begin{pmatrix} F_{x_1} + p_1 F_y & F_{p_1 x_1} + p_1 F_{p_1 y} & \cdots & F_{p_n x_1} + p_1 F_{p_n y} \\ F_{x_2} + p_2 F_y & F_{p_1 x_2} + p_2 F_{p_1 y} & \cdots & F_{p_n x_2} + p_2 F_{p_n y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{x_n} + p_n F_y & F_{p_1 x_n} + p_n F_{p_1 y} & \cdots & F_{p_n x_n} + p_n F_{p_n y} \\ 0 & F_{p_1 p_1} & \cdots & F_{p_n p_1} \\ 0 & F_{p_2 p_1} & \cdots & F_{p_n p_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & F_{p_n p_1} & \cdots & F_{p_n p_n} \\ A & & & B \end{pmatrix}$$

tem posto menor $n + 1$ em q_0 , onde $A = (p_l F_{x_k} - p_k F_{x_l})$ é uma matriz de ordem $\frac{n(n-1)}{2} \times 1$ e $B = (p_l F_{p_i x_k} - p_k F_{p_i x_l})$ é uma matriz de ordem $\frac{n(n-1)}{2} \times n$, com $1 \leq l < k \leq n$.

3.2 Singularidades de EDPs de primeira ordem

Nesta seção estudaremos os pontos singulares da EDP de primeira ordem (3.1) em um conjunto aberto e denso. Para tanto, começaremos assumindo que 0 seja um valor regular de EDP de primeira ordem (3.1).

Definição 3.7. Um ponto $q_0 \in \Sigma(F)$ é um *ponto de dobra* da projeção $\pi|_{F^{-1}(0)}$ se o $\det(F_{p_i p_j}) \neq 0$, onde $1 \leq i, j \leq n$, em q_0 .

Definição 3.8. Diremos que uma EDP de primeira ordem (3.1) é uma *equação de tipo geral* se $\Sigma(F)$ é uma variedade suave tal que os pontos de dobra de $\pi|_{F^{-1}(0)}$ são densos em $\Sigma(F)$.

Iremos agora estudar a generalidade da propriedade acima.

Teorema 3.4. *Genericamente, EDPs de primeira ordem são do tipo geral.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$\Sigma = \{j^2 f(x, y, p) : f = f_{p_i} = 0 \text{ em } (x, y, p) \ i = 1, \dots, n\} \subset J^2(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}).$$

Observe que Σ é um subespaço vetorial de $J^2(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$ de codimensão $n + 1$. Considere também o conjunto

$$\Sigma_1 = \{j^2 f(x, y, p) : \det(f_{p_i p_j}) = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}).$$

Observe que Σ_1 é um subconjunto algébrico próprio de Σ de codimensão 1. Por isso, $\Sigma - \Sigma_1$ é aberto e denso em Σ . Seja $F : (\mathbb{R}^{2n+1}, q_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ que determina uma EDP de primeira ordem $F = 0$. Note que o conjunto $j^2 F^{-1}(\Sigma - \Sigma_1)$ consiste dos pontos de dobra de F . Assim, se $j^2 F \pitchfork (\Sigma - \Sigma_1)$, então F é do tipo geral. Mas pelo teorema da transversalidade isso genericamente é satisfeito. \square

No que segue (F, q_0) denotará um germe de EDP de primeira ordem, onde q_0 é um ponto singular.

Lema 3.5. Seja (F, q_0) um germe de EDP de primeira ordem de tipo geral com solução singular.

Então,

$$F = F_{p_i} = F_{x_i} + p_i F_y = 0, i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

em $\Sigma(F)$.

Demonstração. Em pontos de dobra da projeção $\pi|_{F^{-1}(0)}$ a matriz

$$\begin{pmatrix} F_{x_i} + p_i F_y & * \\ 0 & F_{p_i p_j} \\ p_l F_{x_k} - p_k F_{x_l} & * \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

tem posto maior ou igual a n . Por outro lado, o corolário 3.3 nos garante que o posto da matriz (3.3) é menor que $n + 1$. Assim, o posto da matriz (3.3) é n , isto é,

$$F_{x_i} + p_i F_y = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Pela densidade dos pontos de dobra sobre $\Sigma(F)$ estas igualdades são satisfeitas sobre todos os pontos de $\Sigma(F)$. \square

Corolário 3.6. Seja (F, q_0) um germe de EDP de primeira ordem de tipo geral com solução singular. Então, $F_y(q_0) \neq 0$.

Teorema 3.7. *Genericamente EDPs de primeira ordem não tem soluções singulares e o conjunto de pontos π -singulares consiste de pontos singulares de Legendre exceto no ponto q_0 .*

Demonstração. Primeiramente definamos o conjunto

$$A = \{j^1 f(x, y, p) : f = f_{p_i} = f_{x_i} + p_i f_y = 0 \text{ em } (x, y, p) \ i = 1, \dots, n\} \subset J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}).$$

Note que A é uma subvariedade suave de codimensão $2n + 1$. Considere uma EDP de primeira ordem de tipo geral tal que $j^1 F$ seja transversal a A (isto é sempre possível pelo teorema 1.3). Assim, $\dim(j^1 F)^{-1}(A) = 0$. Logo, segue que a imagem de $j^1 F$ e A não podem ter interseções que não sejam de pontos discretos. Pelo lema 3.5, tais ponto são apenas pontos sobre o qual $\Sigma(F)$ é isotrópico. Logo, o conjunto $\Sigma(F)$ não pode ser uma subvariedade de Legendre. Para a segunda parte, suponha que $\Sigma(F)$ não seja isotrópico em $q = (x, y, p)$. Neste caso, existe um vetor $v \in T_q \Sigma(F)$ tal que $\omega|_{\Sigma(F)}(q)(v) \neq 0$. Seja $L \subset F^{-1}(0)$ uma subvariedade de Legendre através de q . Por definição v não pertence a $T_q L + \ker(d\pi)$, pois caso contrário v anulava a 1-forma $\omega|_{\Sigma(F)}$. Suponha que q seja um ponto regular de $\pi|_L$. Então $\dim(d\pi(T_q L)) = n$. Como $\Sigma(F)$ e L são subvariedades de $F^{-1}(0)$, então $\langle v \rangle + T_q L$ é subespaço vetorial de $T_q F^{-1}(0)$. Agora aplicando $d\pi$ nos espaços vetoriais acima temos então que

$$d\pi(T_q F^{-1}(0)) = \mathbb{R}^{n+1}$$

o que contradiz o fato de que $q \in \Sigma(F)$. Portanto, q é um ponto singular de $\pi|_L$. □

Observação 3.2. Pelo teorema 3.7 podemos concluir a seguinte afirmação. Se $B \subset J^2(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$ é um conjunto definido por

$$B = \{j^2 f(x, y, p) : f = f_{p_i} = f_{x_i} + p_i f_y = \det(f_{p_i p_j}) = 0 \text{ em } (x, y, p) \ i = 1, \dots, n\}.$$

Então B é um subconjunto algébrico de codimensão $2n + 2$. Logo, genericamente podemos evitar tais conjuntos. Portanto, existe um conjunto aberto e denso $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$ tal que se $F \in A$,

então

- (a) $F^{-1}(0)$ e $\Sigma(F)$ são subvariedades suaves de \mathbb{R}^{2n+1} .
- (b) $\Sigma(F)$ não é uma solução singular da EDP de primeira ordem.
- (c) O conjunto de pontos de dobra de $\pi|_{F^{-1}(0)}$ é denso em $\Sigma(F)$.
- (d) O conjunto de pontos de contato singular são isolados.
- (e) Se $q \in \mathbb{R}^{2n+1}$ é um ponto de tipo cúspide de $\pi|_{F^{-1}(0)}$, então q é um ponto de contato singular.

3.3 Multiplicidade de uma EDP de primeira ordem

Nesta seção, motivado pela definição de multiplicidade dada na seção 2.3, iremos definir a multiplicidade de uma EDP de primeira ordem (3.1) e provar a sua invariância por equivalência suave. O conjunto dos pontos críticos de $\pi|_{\Sigma(F)}$ será denotado por $\Sigma^2(F)$. Tal conjunto é dado por

$$\Sigma^2(F) = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^{2n+1} : F = F_{p_i} = \det(F_{p_i p_j}) = 0 \text{ em } (x, y, p) \ 1 \leq i, j \leq n\}$$

Definição 3.9. Um ponto $q_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ é dito ser um *zero* da EDP de primeira ordem (3.1), se q_0 é um ponto de contato singular ou um zero da 1-forma $\omega|_{\Sigma^2(F)}$.

Note que esta definição coincide com a definição 2.5 para o caso em que a EDP de primeira ordem é uma EDI, isto é, quando $n = 1$. Note que por definição os pontos singulares da EDP de primeira ordem (3.1) encontram-se sobre o crinate de F . Motivado pela definição de multiplicidade de uma EDI dada em 2.8 temos o seguinte.

Definição 3.10. Seja (F, q_0) um germe analítico de EDP de primeira ordem (3.1). A *multiplicidade* de (F, q_0) é definida como o número máximo de zeros que pode surgir em uma deformação da equação $F = 0$ (incluindo zeros complexos).

Note que a multiplicidade não está definida se a 1-forma ω é identicamente nula em ambos $\Sigma^2(F)$ e $M = F^{-1}(0)$. A fim de encontrarmos uma fórmula para multiplicidade da EDP de primeira ordem (3.1) em termos $F^{-1}(0)$ e $\Sigma^2(F)$ temos a seguinte definição (ver [19]).

Definição 3.11. Sejam θ uma 1-forma sobre \mathbb{R}^n e $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ suave. Defina $I(f^{-1}(0), \theta)$ como o ideal gerado pelas funções coordenadas f^1, \dots, f^k de f e os menores $(k+1) \times (k+1)$ da matriz

$$\begin{pmatrix} f_{x_1}^1 & \cdots & f_{x_n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_1}^k & \cdots & f_{x_n}^k \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

onde $f_{x_j}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$.

Note que, por definição se $\lambda : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe de funções suaves com $\lambda(0) \neq 0$ temos que

$$I(f^{-1}(0), \theta) = I(f^{-1}(0), \lambda\theta)$$

Lema 3.8. Sejam f e θ como na definição 3.11, e 0 um valor regular de f . Então um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um zero da 1-forma θ sobre $f^{-1}(0)$ se, e somente se, $g(x_0) = 0$ para todo $g \in I(f^{-1}(0), \theta)$.

Demonstração. Denote por A a matriz 3.3. Suponha que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ seja um zero de θ sobre $f^{-1}(0)$. Então $\dim(\ker A) \geq n - k$. Como $n = \dim(\ker A) + \text{rank}(A)$, obtemos que $k \geq \text{rank}(A)$. Assim, $g(x_0) = 0$ para todo $g \in I(f^{-1}(0), \theta)$. Reciprocamente, se para todo $g \in I(f^{-1}(0), \theta)$ tivermos $g(x_0) = 0$, então $\text{rank}(A) \leq k$. Logo, o vetor (a_1, \dots, a_n) pode ser escrito como combinação linear de $\nabla f^1, \dots, \nabla f^k$. Portanto, x_0 é um zero da 1-forma sobre $f^{-1}(0)$. \square

Definimos $I(f^{-1}(0), \theta) = \langle g_1, \dots, g_l \rangle$, e denote $g = (g_1, \dots, g_l)$.

Lema 3.9. ([15]) Seja 0 um zero isolado da 1-forma θ sobre $f^{-1}(0)$. Se $l = n$, então $\dim \mathcal{E}/(I(f^{-1}(0), \theta)) = 1$ se, e somente se, 0 é um valor regular de g .

Denotaremos por \mathcal{E}_n^p o anel dos germes de funções suaves sobre \mathbb{R}^n em p .

Lema 3.10. Seja $(F, 0)$ um germe de EDP de primeira ordem. Suponha que o ideal $I(\Sigma^2(F), \omega)$ seja gerado por $2n + 1$ elementos. Então, existe uma família de funções $\overline{F}_t : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, com $t \in \mathbb{R}$ e $\overline{F}_0 = F$ tal que

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{2n+1}^{pt} / I(\Sigma^2(\overline{F}_t), \omega) = 1 \text{ e } \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{2n+1}^{qt} / I(\overline{F}_t^{-1}(0), \omega) = 1$$

para $t \neq 0$ suficientemente próximo de zero, onde p_t e q_t são zeros isolados da 1-forma ω sobre $\Sigma^2(\bar{F}_t)$ e $\bar{F}^{-1}(0)$ respectivamente.

Demonstração. Note que $I(F^{-1}(0), \omega) = \langle F, F_{p_1}, \dots, F_{p_n}, F_y, F_{x_1} + p_1 F_y, \dots, F_{x_n} + p_n F_y \rangle$, ou seja, é gerado por $2n + 1$ elementos. Sabemos que é sempre possível encontrar uma família de aplicações \bar{F}_t com $\bar{F}_0 = F$ tal que 0 seja um valor regular de $(\bar{F}_t, \bar{F}_{tp_1}, \dots, \bar{F}_{tp_n}, \bar{F}_{ty}, \bar{F}_{tx_1} + p_1 \bar{F}_{ty}, \dots, \bar{F}_{tx_n} + p_n \bar{F}_{ty})$. Agora pelo lema 3.9 obtemos $\dim \mathcal{E}_{2n+1}^{q_t} / I(\bar{F}_t^{-1}(0), \omega) = 1$, para $t \neq 0$ suficientemente próximo de 0. Analogamente, podemos concluir a segunda igualdade. \square

Usando os lemas podemos demonstrar o seguinte resultado

Proposição 3.11. Seja $(F, 0)$ um germe analítico de EDPs de primeira ordem. Se $I(\Sigma^2(F), \omega)$ é gerado por $2n + 1$ elementos, segue tem-se:

- (a) Se $\det(F_{p_i p_j}) \neq 0$, então a multiplicidade do germe do EDP de primeira ordem $(F, 0)$ é dada por $M_1(F, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{2n+1} / I(F^{-1}(0), \omega)$;
- (b) Se 0 não é um ponto de contato singular, então a multiplicidade do germe $(F, 0)$ é dado por $M_2(F, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{2n+1} / I(\Sigma^2(F), \omega)$;
- (c) Se 0 é um ponto de singular de contato e $\det(F_{p_i p_j}) = 0$ então a multiplicidade do germe $(F, 0)$ é dado pela soma dos inteiros dados em (a) e (b).

Demonstração. Os Lemas 3.9 e 3.10 também são válidos para o caso analítico complexo. Logo, o resultado é completamente provado complexificando as álgebras $\mathcal{E}_{2n+1} / I(F^{-1}(0), \omega)$ e $\mathcal{E}_{2n+1} / I(\Sigma^2(F), \omega)$. \square

Pela proposição acima vemos que a multiplicidade é invariante por deformações complexas de F . No entanto, o mesmo não é verdade para deformações reais de F .

Definição 3.12. Seja $h : (\mathbb{R}^{n+1}, (x_0, y_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, (x_1, y_1))$ um germe de difeomorfismo. Um germe de difeomorfismo $\hat{h} : (\mathbb{R}^{2n+1}, q_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n+1}, q_1)$ é dito ser um *levantamento canônico de contato* de h quando $\hat{h}^*(\omega) \wedge \omega = 0$ e $h \circ \pi = \pi \circ \hat{h}$.

Observação 3.3. Note que se \widehat{h} é um levantamento de contato canônico de h , então existe um germe de função $\lambda : (\mathbb{R}^{2n+1}, q_0) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\lambda(q_0) \neq 0$ tal que $\widehat{h}^*(\omega) = \lambda\omega$. Usando esta igualdade e o fato de que $h \circ \pi = \pi \circ \widehat{h}$, temos que para cada $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{h}_{n+1}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \widehat{h}_{n+1+j} \frac{\partial \widehat{h}_j}{\partial x_i} &= -\lambda p_i \\ \frac{\partial \widehat{h}_{n+1}}{\partial y} - \sum_{j=1}^n \widehat{h}_{n+1+j} \frac{\partial \widehat{h}_j}{\partial y} &= \lambda \\ \frac{\partial \widehat{h}_s}{\partial p_i} &= 0 \end{aligned}$$

onde $s = 1, \dots, n+1$ e $\widehat{h}_1, \dots, \widehat{h}_{2n+1}$ são as funções coordenadas de \widehat{h} .

Definição 3.13. Diremos que dois germes (F_0, q_0) e (F_1, q_1) são *equivalentes* se existe um germe de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^{n+1}, \pi(q_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \pi(q_1))$ e um germe de função $\gamma : (\mathbb{R}^{2n+1}, q_0) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\gamma(q_0) \neq 0$, tal que $F = \gamma(G \circ \widehat{h})$.

Teorema 3.12. ([15]) *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ germes de aplicações suaves, $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de difeomorfismos e $C : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$ um germe de aplicação suave, com $C(g \circ h^{-1}) = f$. Se θ é uma 1-forma sobre \mathbb{R}^n , então*

$$h^*(I(f^{-1}(0)), \theta) = I(g^{-1}(0), h^*(\theta)).$$

Observação 3.4. Sejam $(F, 0)$ e $(G, 0)$ germes de EDPs de primeira ordem equivalentes. Então existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ e um germe de função $\gamma : (\mathbb{R}^{2n+1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$F = \gamma(G \circ \widehat{h}).$$

Derivando a igualdade acima com relação a p_i e usando o fato de que $\frac{\partial \widehat{h}_s}{\partial p_i} = 0$, com $i = 1, \dots, n$ e $s = 1, \dots, n+1$ (ver observação 3.3) obtemos

$$\begin{pmatrix} F_{p_1} \\ \vdots \\ F_{p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{p_1} \\ \vdots \\ \gamma_{p_n} \end{pmatrix} (F \circ \widehat{h}) + \gamma \begin{pmatrix} G_{p_1} \circ \widehat{h} \\ \vdots \\ G_{p_n} \circ \widehat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{h}_{n+2}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \widehat{h}_{2n+1}}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{h}_{n+2}}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial \widehat{h}_{2n+1}}{\partial p_n} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Pela observação 3.3, segue que o jacobiano de \widehat{h} é dado por

$$\det(J\widehat{h}) = \det(Jh) \det \left(\frac{\partial \widehat{h}_{n+1+i}}{\partial p_j} \right).$$

Proposição 3.13. Sejam $(F, 0)$ e $(G, 0)$ germes de EDP de primeira ordem. Se $(F, 0)$ e $(G, 0)$ são equivalentes, então $M_2(F, 0) = M_2(G, 0)$ e $M_1(F, 0) = M_1(G, 0)$.

Demonstração. Denotemos por $N = \det \left(\frac{\partial \widehat{h}_{n+1+i}}{\partial p_j} \right)$. Derivando a equação (3.5) com relação a p_j , com $j = 1, \dots, n$, podemos escrever

$$\det(F_{p_i p_j}) = g_0(G \circ \widehat{h}) + \sum_{s=1}^n g_s(G_{p_s} \circ \widehat{h}) + \gamma N^2 [\det(G_{p_i p_j}) \circ \widehat{h}], \quad (3.6)$$

onde g_l são funções suaves em \mathbb{R}^{2n+1} , com $l = 0, \dots, n$, que surgem na expressão acima resultante da regra do produto para derivadas. Juntando as equações (3.5) e (3.6) teremos um sistema dado por

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_{p_1} & \gamma \frac{\partial \widehat{h}_{n+2}}{\partial p_1} & \dots & \gamma \frac{\partial \widehat{h}_{2n+1}}{\partial p_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p_n} & \gamma \frac{\partial \widehat{h}_{n+2}}{\partial p_n} & \dots & \gamma \frac{\partial \widehat{h}_{2n+1}}{\partial p_n} & 0 \\ g_0 & g_1 & \dots & g_n & \gamma N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \circ \widehat{h} \\ G_{p_1} \circ \widehat{h} \\ \vdots \\ G_{p_n} \circ \widehat{h} \\ \det(G_{p_i p_j}) \circ \widehat{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F_{p_1} \\ \vdots \\ F_{p_n} \\ \det(F_{p_i p_j}) \end{pmatrix}$$

Como $h^*(\omega) = \lambda\omega$, onde λ é não nula em 0 (observação 3.3), segue que $(\widehat{h}^{-1})^*(\omega) = \frac{1}{\lambda}\omega$. Agora pelo teorema 3.12 temos

$$\begin{aligned} (\widehat{h}^{-1})^* I(\Sigma^2(F), \omega) &= I(\Sigma^2(G), \frac{1}{\lambda}\omega) \\ &= I(\Sigma^2(G), \omega). \end{aligned}$$

Sendo \widehat{h} um difeomorfismo segue que $M_2(F) = M_2(G)$.

Como $F = \gamma(G \circ \widehat{h})$ e $(\widehat{h}^{-1})^*(\omega) = \frac{1}{\lambda}\omega$, obtemos pelo teorema 3.12 que

$$(\widehat{h}^{-1})^* I(F^{-1}(0), \omega) = I(G^{-1}(0), \frac{1}{\lambda}\omega)$$

$$= I(G^{-1}(0), \omega).$$

Sendo \widehat{h} um difeomorfismo segue que $M_1(F) = M_1(G)$. \square

Note que quando $n = 1$ a multiplicidade de um germe $(F, 0)$ de EDP de primeira ordem, é dado $M_1(F, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_3 / \langle F, F_p, F_x + pF_y \rangle$ no caso em que $F_{pp}(0) \neq 0$ e $M_2(F, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_3 / \langle F, F_p, F_{pp} \rangle$ no caso em $F_{pp}(0) = 0$ e 0 não é um zero da 1-forma canônica. Mostrando que a multiplicidade do germe $(F, 0)$ coincide com a multiplicidade introduzida na seção 2.3.

Agora quando $n = 2$ podemos mostrar que a multiplicidade de um germ $(F, 0)$ de EDP de primeira ordem, é dado por

$$M_1(F, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_3 / \langle F, F_{p_1}, F_{p_2}, F_{x_1} + p_1F_y, F_{x_2} + p_2F_y \rangle,$$

no caso em que $\det(F_{p_i p_j}(0)) \neq 0$, $1 \leq i, j \leq 2$, e

$$M_2(F, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_3 / \langle F, F_{p_1}, F_{p_2}, \det(F_{p_i p_j}), \det(A) \rangle$$

onde A é matriz

$$\begin{pmatrix} F_{x_1} + p_1F_y & F_{x_2} + p_2F_y & 0 & 0 \\ F_{p_1 x_1} + p_1F_{p_1 y} & F_{p_1 x_2} + p_2F_{p_1 y} & F_{p_1 p_1} & F_{p_1 p_2} \\ F_{p_2 x_1} + p_1F_{p_2 y} & F_{p_2 x_2} + p_2F_{p_2 y} & F_{p_2 p_1} & F_{p_2 p_2} \\ 0 & 0 & (\det(F_{p_i p_j}))_{p_1} & (\det(F_{p_i p_j}))_{p_2} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.14. ([15]) *Seja $(F, 0)$ um germe analítico de EDP de primeira ordem (3.1). Se $n = 2$ e 0 não é um zero da 1-forma canônica $\omega|_{\Sigma(F)}$, então a multiplicidade do germe $(F, 0)$ é o número máximo de pontos caldas de andorinha que surgem sobre deformações da projeção natural $\pi|_{F^{-1}(0)}$.*

Referências Bibliográficas

- [1] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. 1º Ed., Pitman, Londres, 1979.
- [2] Y. C. Lu, *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, Nova York, 1976.
- [3] O. Saeki, *Topology of Singular Fibres of Differential Maps*, Springer-Verlag, 2004.
- [4] V. I. Arnold, *Contact Geometry and Wave Propagation*, Palestra ministrada na Universidade de Oxford, L'Enseignement Mathématique, 1989.
- [5] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko , *Singularities of Differential Maps*, Birkhauser, Boston-Besel, 1985.
- [6] V. I. Arnold, *The Theory of Singularities and its Applications*, Cambridge University Press, Nova York, 1991.
- [7] M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*. Springer-Verlag, Alemanha, 1994.
- [8] M. P. do Carmo *Geometria Riemanniana*. 3º Ed., IMPA –Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2008.
- [9] C. T. C. Wall, *Singular Points of Plane Curves*, Cambridge University Press, Nova York, 2004.
- [10] E. J. N. Looijenga, *Isolated Singularities Points on Complete Intersections*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series: 77, Londres, 1984.
- [11] M. J. Saia, *Introdução a Teoria das Singularidades*, Notas de Aula, ICMC – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP – Universidade de São Paulo, 2011.

- [12] M. Golubtskye V. Guillemin, *Stable Mappings and their Singularities*. Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, 14, Nova York, 1945.
- [13] F. V. de Oliveira, *Singularidades de Equações Diferenciais Implícitas*. Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFPB – Universidade Federal d Paraíba, 2013.
- [14] L. S. Challapa, *Índices de Equações Diferenciais Implícitas*, tese, ICMC – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP – Universidade de São Paulo, 2006.
- [15] L. S. Challapa, *Invariant of First Order Partial Differential Equations*, preprint.
- [16] A. Cima, A. Gasull e J. Torregrosa, *On the Relation Between index and Multiplicity*, J. London Math. Soc. (2) **57**, (1998), 757-768.
- [17] D. Eisenbud, *An Algebraic Aproach to the Topological Degree of a Smooth Map*, Ann. Math. Soc., (2) **84** (1978), 751-764.
- [18] D. Eisenbud, H. I. Levine, *An Algebraic Formula for the Degree of a C^∞ Map Germ*, Ann. Math., (1) **106**, (1977), 19-44.
- [19] W. Ebeling e S. M. Gusein-Zade, *Indices of 1-forms on an Isolated complete intersection singularity*, Mosc. Math. J., **3**, (2003).
- [20] A. A. Davydov, *Normal forms of Differential Equations Unresolved with Respect to Derivatives in a Neighbourhood of its Singular Point*, Functional Anal. and Apl., **19** (1985), 1-10.
- [21] J. W. Bruce e F. Tari, *On the Multiplicity of Implicit Differential Equations*, J. of Dif. Equations, **148** (1998), 122-147.
- [22] J. W. Bruce e F. Tari, *Implicitly Differential Equations from the Theory Singularity Viewpoint*, Singularities and Differential Equations, Banach Center Publications, **33** (1996), 23-38.
- [23] J. W. Bruce e F. Tari, *On Binary Differential Equation*, Boll. Nonlinearity, **8** (1995), 255-271.
- [24] J. W. Bruce e P. J. Giblin, *Curves and Singularities*. 2º Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [25] J. W. Bruce e D. L. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, **111** (1989), 147-168.
- [26] L. Dara, *Singularites genreriques des equations differentielles multiformes*, Bol. Soc. Brasil Math., **6** (1975), 95-128.
- [27] S. Izumiya, *First Order Differential Equations and Singularity*, Hokkaido University, Série #40, 1988.
- [28] S. Izumiya, *Generic Properties of First Order Differential Equations*, Topology Hawaii, (1992), 91-100.
- [29] H. Whitney, *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*, Ann. Math., (2) **3** (1995), 374-410.
- [30] V. V. Lychagin, *Local classifications of non-linear first order partial differential equations*, Russian Math. Suveys, (2) **30** (1975), 105-175.
- [31] J. Montaldi e D. van Straten, *One-Forms on Singular Curves and the Topology of Real Curves Singularities*, Topology, (4) **29** (1990), 501-510.
- [32] J. C. Tougeron, *Idéaux de Fonctions Différentiables I*, Ann. Inst. Fourier, (1), **18** (1968), 177-240.