

Desigualdade de Carleman e Controlabilidade Nula para uma EDP com Coeficientes Complexos

por

Maurício Cardoso Santos

sob orientação de

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB)

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática-
CCEN-UFPB, como requisito parcial para ob-
tenção do grau de Mestre em Matemática.

Agosto/2010

João Pessoa - PB

S237d Santos, Maurício Cardoso.
Desigualdade de Carleman e controlabilidade nula para
uma EDP com coeficientes complexos / Maurício Cardoso
Santos.-- João Pessoa, 2013.
61f. : il.
Orientador: Fágner Dias Araruna
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Controlabilidade nula. 3. Desigualdade
de Carleman. 4. Equação do calor.

UFPB/BC

CDU: 51 (043)

**Desigualdade de Carleman e Controlabilidade Nula para uma EDP com
Coeficientes complexos**

por

Maurício Cardoso Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Presidente)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda
(Universidade Estadual da Paraíba - UEPB)

Prof. Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes
(Universidade Federal do Ceará - UFC)

Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira (Suplente)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agradecimentos

-Aos meus amigos acadêmicos, Diego (Diegão), Felipe (Felipão), José (Zé) e Pitágoras (Pita) que juntos conseguimos enfrentar as dificuldades que surgiram na vida como estudante.

-Ao professor Marcondes Rodrigues Clark, por ter me recebido de braços abertos e ter dedicado parte do seu tempo a me passar e ensinar um pouco do seu conhecimento, sobretudo lições de vida que vou carregar pelo resto da minha vida.

-Ao professor Fágner Dias Araruna, que aceitou ser meu orientador e proporcionou várias oportunidades de avançar mais e estudar tópicos cada vez mais interessantes.

-Ao professor Enrique Fernández-Cara, por sua atenção e hospitalidade em Sevilla, fornecendo o ambiente ideal para desenvolver esse trabalho de conclusão. Muito obrigado por tudo!

-Aos amigos que fiz na Paraíba durante o mestrado, em especial a: Disson, Elielson e Fágner.

-Aos amigos de graduação que me ajudaram a dar os primeiros passos. Estudando coletivamente conseguimos aprender muito e se preparar para uma Pós-Graduação, em especial a: Gleison, João Carlos e Diego.

-Aos professores de graduação e pós graduação que tive na UFPI e UFPB, respectivamente. Por meio de incentivos e cursos motivadores fui capaz de avançar e cumprir o estabelecido. Em especial: Barnabé Pessoa Lima, Daniel Marinho Pellegrino, Everaldo Souto de Medeiros, João Marcos Bezerra do Ó, Jurandir de Oliveira Lopes, Roger Peres de Moura.

-À CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

-Dedico aos meus pais (Manoel e Francisca) que sempre me apoiaram, incentivaram e trabalharam duro para educar e a dar o melhor que eles podiam para mim e para meus irmãos.

-Aos meus irmãos (Fábio, Fabrício e Marcelo) com quem posso contar a qualquer momento e em qualquer situação.

-A minha namorada Mabel Lopes, por tudo que construímos juntos nessa caminhada. Soube ter a paciência e a cumplicidade para que eu conseguisse desenvolver esse trabalho.

-A todas as minhas tias-mães que sempre me trataram com muito carinho e amor. Dedico em especial a minha madrinha Silvia Maria que sempre me deu o apoio que eu precisava.

-Aos meus primos-irmãos, pelo carinho que tenho por vocês.

-Aos meus avós que representam a base de toda minha família.

Desigualdade de Carleman e Controlabilidade Nula para uma EDP com Coeficientes complexos

Resumo

No presente trabalho, estudaremos resultados de controlabilidade para dois problemas da teoria das equações diferenciais parciais. Por meio de estimativas globais de Carleman, mostraremos detalhadamente a controlabilidade nula para a equação do calor e para uma equação diferencial parcial com parte principal complexa. Obteremos o controle de norma mínima resolvendo um problema dual de minimização.

Palavras-chave: Controlabilidade Nula, Desigualdade de Carleman, Equação do Calor.

Carleman Inequality and null controllability for a PDE with complex coefficients

Abstract

In the present work, we study controllability results for two problems on the theory of the partial differential equations. We use global Carleman inequalities to show the null controllability for the heat equation and for a PDE with complex principal part. We obtain the control of minimal norm solving a dual minimization problem.

Keywords: Null Controllability, Carleman Inequality, Heat equation.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados preliminares	6
1.1 Espaços funcionais	6
1.1.1 Distribuições e derivada fraca	6
1.1.2 Espaços de Sobolev	8
1.1.3 Os espaços $C([0, T]; X)$ e $L^p(0, T; X)$	9
1.2 Alguns resultados utilizados	10
1.3 Teoria de semigrupos	11
1.3.1 Operadores não limitados em espaços de Hilbert	13
1.3.2 Espaços de Hilbert complexos	14
1.3.3 O semigrupo gerado por um operador m-dissipativo	16
1.3.4 O problema não homogêneo	18
1.4 Existência e unicidade de solução fraca	19
2 Controlabilidade nula	21
2.1 Controlabilidade nula no caso real	21
2.1.1 Observabilidade	22
2.1.2 Estimativa de Carleman	27
2.2 Controlabilidade nula no caso complexo	40
2.3 Considerações finais e problemas em aberto	47
Referências Bibliográficas	53

Introdução

A palavra controlar tem um significado duplo. Primeiramente, controlar um sistema pode ser simplesmente entendido como testar ou checar se um determinado comportamento é satisfatório. Em um sentido mais profundo, o ato de controlar é agir de modo a garantir que um sistema se comporte da forma desejada.

Relembrando um pouco a história, encontramos que os Romanos utilizaram alguns elementos de controle para a construção de seus arquedutos. Mais precisamente, sistemas engenhosos regulavam válvulas de modo a manter um nível de água constante.

Algumas pessoas afirmam que na antiga mesopotâmia, mais de 2000 anos antes de cristo, o sistema de controle de irrigação também era uma arte conhecida.

O trabalho de Ch. Huygens e R. Hooke ao final do século XVII sobre oscilação do pêndulo é um dos modelos mais modernos do desenvolvimento da teoria do controle. O objetivo deles era alcançar uma medida precisa de tempo e localização, tão preciosos na navegação. Estes trabalhos futuramente foram adaptados para regular a velocidade de moinhos de vento. O principal mecanismo era baseado em sistemas de esferas girando em torno de um eixo com velocidade proporcional a velocidade do moinho de vento. Quando a velocidade rotacional aumentava, as esferas se afastavam do eixo, agindo nas asas do moinho por meio de um mecanismo apropriado.

J. Watt adaptou este modelo em seu *motor a vapor* que constituiu um mecanismo importantíssimo na revolução industrial. Neste mecanismo, quando a velocidade das esferas aumentava, uma ou várias esferas destapavam algumas válvulas diminuindo a pressão e reduzindo a velocidade, conseqüentemente as esferas voltavam a tapar as válvulas novamente de modo a velocidade aumentar. Este mecanismo tinha o objetivo de controlar a velocidade de forma a ficar aproximadamente constante.

O astrônomo britânico G. Airy foi o primeiro a analisar matematicamente o sistema regulador apresentado por Watt. Porém a primeira descrição matemática definitiva foi dada apenas no trabalho de J. C. Maxwell, em 1868, em que alguns comportamentos indesejados encontrados no motor a vapor foram descritos e alguns mecanismos de controle foram propostos.

Com o passar dos anos, as ideias centrais da teoria de controle sofreram um impacto notável. Em meados de 1920, os engenheiros já estavam preferindo usar processamento contínuo usando técnicas de controle automático ou semi automático. Assim, a engenharia de controle germinou e ganhou o reconhecimento de uma área independente.

Durante a segunda guerra mundial e os anos seguintes, engenheiros e cientistas melhoraram suas experiências com mecanismos de controle de rastreamento, mísseis balísticos e modelagem de esquadrões aéreos.

Depois dos anos 60, os métodos e teorias mencionados acima passaram a ser considerados como parte da teoria "clássica" do controle. A segunda guerra mundial serviu para perceber que os modelos considerados até o momento não eram suficientes para descrever a complexidade do mundo real. Na verdade, já se sabia que os verdadeiros sistemas eram não lineares ou indetermináveis, desde que estes são afetados por alguma "perturbação".

As contribuições de R. Bellman no contexto de programação dinâmica, R. Kalman nas técnicas de filtragem e aproximações algébricas a sistemas lineares e L. Pontryagin com o princípio do máximo para problemas de controle ótimo não linear, estabeleceram a base para a teoria do controle moderna. Tal teoria ganhou um formalismo ou uma representação matemática de modo a conseguirmos usar as ferramentas matemáticas que temos para solucionarmos tais problemas de controle.

Analisando o ponto de vista teórico, para compreendermos um problema de controle, iremos supor que queremos um bom comportamento para o sistema físico governado pela equação estado

$$A(y) = f(v).$$

Neste caso, y denota o estado, a variável do sistema que planejamos controlar e que pertence a um espaço vetorial Y e v é o controle. Tal controle pertencerá ao conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ que chamaremos de *conjunto dos estados admissíveis*.

Vamos assumir que $A : D(A) \subset Y \mapsto Y$ e $f : \mathcal{U}_{ad} \mapsto Y$ são aplicações lineares, ou não lineares, arbitrárias. O operador A determina a equação que deve ser satisfeita pelo estado de acordo com as leis da física. A função f indica a forma que o controle v age no sistema governado pelo estado. Dessa forma, um problema de controle, é encontrar um elemento em $\mathcal{U}_{ad}$, de modo que o seu estado atinja, em algum sentido, o resultado desejado.

No caso de dimensão finita, ou seja, sistemas modelados por EDO's, existem resultados devidos a R. E. Kalman que nos fornece uma resposta completa a problemas de controlabilidade exata. Kalman mostrou, neste caso, que a dependência do controle da variável tempo é irrelevante.

Para sistemas modelados por EDP's, existem muitos trabalhos que tratam vários tipos de controlabilidade para diversos sistemas que modelam fenômenos que aparecem na natureza. Podemos citar aqui o clássico trabalho de Russel [21] em que foi relatado os progressos e os resultados mais relevantes obtidos neste campo. Posteriormente J.-L. Lions (ver [18] e [19]) introduziu um método sistemático e construtivo conhecido como HUM (Hilbert Uniqueness Method). O HUM constitui em reduzir a controlabilidade de sistemas lineares em um resultado de continuação única, que por sua vez pode ser obtida como consequência de uma desigualdade inversa, também denominada por Ho (ver [13]), desigualdade de observabilidade. A partir do HUM muitas descobertas importantes foram feitas neste campo. Para leitores mais interessados em aspectos históricos e resultados recentes sobre a controlabilidade de sistemas governados por equações diferenciais, indicamos os trabalhos [8], [10], [17] e [25].

Nesta dissertação, analizaremos resultados de controlabilidade para dois sistemas governados por equações diferenciais parciais. O primeiro problema está associado à conhecida equação do calor:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = v 1_\omega & \text{em } Q = (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{em } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2 e ω é um subconjunto aberto e não vazio de Ω . Temos também que $T > 0$ é um tempo dado, e 1_ω é a função característica de ω . Para este problema, há várias noções de controlabilidade que

devem ser distinguidas.

Controlabilidade exata: Dado $y^1 \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar uma função $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que a solução y do problema (1) seja tal que $y(T) = y^1$.

O conceito de controlabilidade exata é, em alguns casos, muito forte de modo que dependendo da natureza do problema seja impossível obter tal resultado de controlabilidade. Por este motivo outros conceitos surgem naturalmente, tais como

Controlabilidade aproximada: Dados $y^1 \in L^2(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função controle $v \in L^2(\Omega)$ tal que a solução y , do problema (1), associada ao controle v satisfaz

$$|y(T) - y^1| < \epsilon.$$

Controlabilidade exata para as trajetórias: Se z é uma trajetória, ou seja, z é solução do problema

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = 0 & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = z^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

em que z^0 é um dado em $L^2(\Omega)$, então existe um controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que a solução de (1) satisfaz $y(T) = z(T)$.

O conceito de controlabilidade exata para as trajetórias foi proposto por Fursikov e Imanuvilov [12] para problemas do tipo (3) ou qualquer problema com efeito regularizante. Veremos mais detalhes no Capítulo 2.

Controlabilidade nula: Queremos encontrar uma função $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que a solução y do problema (1) seja tal que $y(T) = 0$.

Os primeiros resultados sobre controlabilidade nula para (1) aparecem em [21]. Posteriormente, Lebeau e Robbiano [15] provaram, via *estimativa de Carleman*, a controlabilidade nula sem nenhuma restrição ao aberto ω em que o controle atua, e com coeficientes dependendo apenas da variável espacial. Resultados similares, mas num contexto bem mais geral, incluindo a dependência do tempo para os coeficientes, foram provados por Fursikov e Imanuvilov [11] utilizando estimativa de Carleman global para a equação do calor.

Neste trabalho, estudaremos a *controlabilidade nula* para (1) tomando como base o artigo de Fernández-Cara e Guerrero [12], onde além de ter sido feito um estudo da *estimativa de Carleman* para o problema acima, aplica-se tal estimativas

para problemas envolvendo termos de primeira ordem, problemas semilineares, entre outros.

No segundo problema, generalizaremos o resultado obtido para o problema (1), considerando a seguinte EDP linear de segunda ordem com parte principal complexa:

$$\begin{cases} (a + ib)y_t - \Delta y = v1_\omega & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{em } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Neste caso tomamos como base o trabalho de X. Fu [11], em que se encontra a estimativa de Carleman para um problema de segunda ordem com parte principal complexa em que o operador é fortemente elíptico.

Se $a = 1$ e $b = 0$, o problema acima é um sistema desacoplado formado por duas equações do calor, e assim, poderemos utilizar os resultados obtidos no caso real.

Se $a = 0$ e $b = 1$, recaímos na equação de Schrödinger onde temos uma vasta literatura a disposição e muitos problemas em aberto. Essa equação não será o foco do trabalho, entretanto faremos alguns comentários na Seção 2.3.

O trabalho está dividido em 2 capítulos:

No **Capítulo 1** iremos expor alguns resultados de análise funcional, apresentando alguns resultados básicos que necessitaremos durante o trabalho. Veremos alguns resultados da teoria de semigrupos com o objetivo de garantir a existência e unicidade de *solução fraca* para os problemas considerados acima.

No **Capítulo 2** veremos o conceito de controlabilidade nula para a equação do calor. Apresentaremos a *desigualdade de observabilidade* e a desigualdade de Carleman. Mostraremos que por meio da desigualdade de Carleman, podemos obter a desigualdade de observabilidade, que implicará na controlabilidade nula para a equação do calor. Posteriormente, buscaremos controlabilidade nula para o sistema (3), com argumentos similares aos do caso real. Neste capítulo (veja a Seção 2.3), faremos algumas considerações finais sobre os problemas estudados e apresentaremos alguns problemas em aberto relacionados ao tema.

Capítulo 1

Resultados preliminares

No intuito de deixar o texto mais autosuficiente, vamos definir alguns conceitos básicos e apresentar alguns resultados que serão necessários posteriormente.

1.1 Espaços funcionais

1.1.1 Distribuições e derivada fraca

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, em que $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, define-se o suporte de f e denota-se por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Pela continuidade de f , $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω .

Um exemplo de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) \Subset \Omega$ em que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1\}$, e o símbolo $\Subset$ denota que $\overline{B_1(0)} \subset \Omega$. Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,*

tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}}, & \text{se } \|x\|_{\mathbb{R}^n} < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq 1 \end{cases},$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é, $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções pertencendo a $C_0^\infty(\Omega)$ é dita convergente no sentido do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ a uma função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas:

i. Existe $K \Subset \Omega$ tal que $\text{Supp}(\phi_n - \phi) \subset K$ para todo n , e

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido com a convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado o espaço das funções teste sobre Ω .

Observação 1.1. É possível definir em $\mathcal{D}(\Omega)$ uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada acima (veja [22]).

Uma distribuição escalar sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

ii. T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Denotaremos o espaço das distribuições por $\mathcal{D}'(\Omega)$ a qual é espaço vetorial munido das operações:

$$\begin{aligned} (S + T)(\phi) &= S(\phi) + T(\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \\ (cT)(\phi) &= cT(\phi), \quad c \in \mathbb{K}, \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Uma função u definida quase sempre em Ω é dita *localmente integrável* em Ω se $u \in L^1(A)$ para todo $A \Subset \Omega$ ($\bar{A} \subset \Omega$), neste caso dizemos que $u \in L_{Loc}^1(\Omega)$. Para cada $u \in L_{Loc}^1(\Omega)$ definindo

$$T_u(\phi) = \int_Q u(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

podemos mostrar que T_u é linear e contínuo(ver [1] p.20), ou seja, $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Isto nos permite identificar $L^1_{Loc}(\Omega)$ com um subconjunto (próprio) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.2. Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\delta_0(\varphi) = \varphi(0).$$

Em [1] p.20-21, vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não pode ser definido por uma função de $L^1_{Loc}(\Omega)$.

Seja $u \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Como ϕ se anula fora de um compacto de Ω , obtemos por integração por partes na variável x_j

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) dx.$$

Similarmente, itegrando por parte $|\alpha|$ vezes teremos

$$\int_{\Omega} (D^{\alpha} u(x)) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \phi(x) dx,$$

se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Isto motiva a seguinte definição da derivada $D^{\alpha}T$ de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$(D^{\alpha}T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^{\alpha}(\phi)). \quad (1.1)$$

Observação 1.2. Por (1.1), notamos que T possui derivada de todas as ordem.

Observação 1.3. Pode-se mostrar que D^{α} é uma aplicação linear e contínua definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ e, portanto, $D^{\alpha} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (ver [1] p.21).

1.1.2 Espaços de Sobolev

Definiremos os *espaços de Sobolev* e vamos expor algumas propriedades básicas. Tais espaços são definidos sobre um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^N$ e são subespaços vetoriais de vários espaços $L^p(\Omega)$.

No que segue, $|\cdot|$ e $(;)$ representarão, respectivamente, a norma e o produto interno em $L^2(\Omega)$. Todas as derivadas utilizadas nesta seção, são derivadas fracas ou derivadas no sentido das distribuições definida em (1.1).

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$ representa-se o espaço de Sobolev de ordem m , as (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, para todo

multi-índice α com $|\alpha| < m$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial qualquer que seja $1 \leq p \leq \infty$. Munindo das normas

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left\{ \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{m,\infty} &= \max_{1 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_\infty, \end{aligned} \quad (1.2)$$

os espaços de Sobolev $W^{m,p}$ são espaços de Banach (veja [1] p.60). Pode-se mostrar $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, para $1 \leq p < \infty$, e uniformemente convexo, para $1 < p < \infty$. Particularmente temos que $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com o produto interno

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Denotaremos o espaço dual de $W^{m,p}(\Omega)$ por $W^{-m,p}(\Omega)$. Em particular, quando $p = 2$ denotaremos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e seu dual $W^{-m,2}(\Omega) = H^{-m}(\Omega)$.

Definiremos agora o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. $W_0^{m,p}(\Omega)$ é, também, um espaço de sobolev e valem as seguintes imersões contínuas:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Seja Ω um domínio limitado, e seja $\partial\Omega$ a fronteira de Ω . Temos a seguinte caracterização do espaço $H_0^1(\Omega)$ onde a prova pode ser encontrada em [1] p.165.

Teorema 1.1. *Seja $\varphi \in H^1(\Omega)$, então $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

1.1.3 Os espaços $C([0, T]; X)$ e $L^p(0, T; X)$

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $C([0, T]; X)$, o espaço de Banach das funções u , definidas em $[0, T]$, com valores em X que são contínuas em $[0, T]$. Definimos em tal espaço a norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

De forma análoga, dado um espaço de Banach X , denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $(0, T)$ com

valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.4. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

1.2 Alguns resultados utilizados

Teorema 1.2. *Seja E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um convexo fechado, não vazio e $J : A \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, semi contínua inferiormente, $\varphi \neq \infty$ tal que*

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\|_E \rightarrow \infty}} J(x) = +\infty.$$

Então J possui um mínimo sobre A , isto é, existe x_0 tal que $\varphi(x_0) = \min_A \varphi$.

Prova: Veja [3, p. 46]. ■

Observação 1.5. *Caso J seja estritamente convexa, o mínimo x_0 obtido no Teorema 1.2 é único. De fato, seja ψ_0 outro mínimo para o funcional φ . Dessa forma,*

$$J(\lambda\psi_0 + (1-\lambda)x_0) < \lambda J(\psi_0) + (1-\lambda)J(x_0) = J(x_0) \quad \forall \lambda \in (0, 1),$$

o que contradiz o fato de x_0 ser mínimo do funcional J .

Teorema 1.3. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\|_{E'} \leq 1\}$ é compacto pela topologia fraca $\sigma(E', E)$, em que E é um espaço de Banach.*

Prova: veja [3, p. 42-43]. ■

Teorema 1.4. (*Desigualdade de Poincaré*) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado em alguma direção x_i . Então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|\varphi|^2 \leq K \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^2$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Prova: Veja [19, p. 36]. ■

Observação 1.6. Se Ω é um domínio limitado, então

$$|\varphi|^2 \leq K |\nabla \varphi|^2$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. A aplicação $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla \cdot|$ define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ a qual, pela desigualdade acima, é equivalente a norma de $H^1(\Omega)$. Assim, podemos definir em $H_0^1(\Omega)$ a norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ que denotaremos simplesmente por $\|\cdot\|$.

Teorema 1.5. (*Lax-Milgram*) Seja H um espaço de Hilbert e $B(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e conerciva. Então para todo $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H,$$

em que $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno em H .

Prova: Veja [3, p. 84]. ■

Teorema 1.6. (*Gauss-Green*) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u \nu^i d\Gamma$$

em que ν^i é a i -ésima componente do vetor normal a fronteira, para $i = 1, \dots, n$.

Prova: Ver [6]. ■

1.3 Teoria de semigrupos

A teoria de semigrupos constitui uma ferramenta bastante poderosa para garantir existência e unicidade de soluções para diversos problemas lineares e não lineares. Para isso, precisamos fazer um estudo do operador que constitui a equação de modo

a estabelecer condições para que o problema em questão tenha solução. Em outras palavras, a teoria de semigrupos nos fornece condições para que o problema problema

$$u_t - Au = f(t, u(t)), \quad (1.3)$$

tenha solução.

A teoria aqui apresentada será direcionada a garantir existência e unicidade de solução para o problema (3). Para um estudo mais detalhado de tal teoria, veja [4].

Observando a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} - ax = 0, \text{ em que } a \text{ é uma constante,}$$

temos que sua solução é dada por

$$x(t) = e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}.$$

Desta forma, definindo de forma natural o operador

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!},$$

vemos que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} A = A e^{tA},$$

e, portanto,

$$\frac{de^{At}}{dt} = A e^{At}.$$

Neste caso, sempre consideraremos um espaço de Banach X , e o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ não necessariamente limitado, $D(A)$ representando o domínio do operador A .

Para iniciar a teoria necessitaremos das seguintes definições.

Definição 1.1. *Um operador A em X é dissipativo se*

$$|u - \lambda Au|_X \geq |u|_X$$

para todo $u \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Definição 1.2. *Um operador A é m -dissipativo se*

i. A é dissipativo

ii. Para todo $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda Au = f$.

Observemos que se um operador A é m-dissipativo, então o operador $I - \lambda A$ é bijetor e, portanto, existe sua inversa $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$, que para cada $f \in X$, $J_\lambda f = u$ em que u é a solução do problema $u - \lambda Au = f$.

Na realidade, veremos que não é necessário verificar a condição (ii.) para todo λ , como vemos na seguinte

Proposição 1.1. *Seja A um operador dissipativo em X . As seguintes propriedades são equivalentes*

i. A é m-dissipativo em X ;

ii. Existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $f \in X$, existe uma solução $u \in D(A)$ de $u - \lambda_0 Au = f$.

Prova: Veja [4, p. 19]. ■

1.3.1 Operadores não limitados em espaços de Hilbert

Definimos o gráfico do operador A por

$$G(A) = \{(u, f) \in X \times X; u \in D(A) \text{ e } f = Au\}.$$

Suponhamos que X seja um espaço de Hilbert e denotemos por $(\cdot, \cdot)_X$ seu produto interno. Se A é um operador linear em X com domínio denso, então

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in X \times X; (\varphi, u)_X = (v, f)_X \text{ para todo } (u, f) \in G(A)\},$$

define o operador linear A^* . O domínio de A^* é dado por

$$D(A^*) = \{v \in X, \exists C < \infty, |(Au, v)_X| \leq C|u|_X, \forall u \in D(A)\},$$

e A^* satisfaz

$$(A^*v, u)_X = (v, Au)_X, \forall u \in D(A).$$

Com base nisto, podemos deduzir o seguinte resultado

Proposição 1.2. *A é dissipativo em X se, e somente se, $(Au, u)_X \leq 0$, para todo $u \in D(A)$.*

Prova: veja [4, p. 22]. ■

Definição 1.3. *Dizemos que um operador A é auto-adjunto se $A^* = A$.*

As propriedades dos operadores auto-adjuntos nos permitem verificar de uma maneira bem mais eficiente se um dado operador A é m-dissipativo, como vemos por meio do

Teorema 1.7. *Se A é um operador auto-adjunto em X, e se $(Au, u)_X \leq 0$ então A é m-dissipativo.*

Prova: veja [4, p. 24]. ■

Teorema 1.8. *Seja A um operador linear em X com domínio denso, tal que $G(A) \subset G(A^*)$ e $(Au, u) \leq 0$. Então A é m-dissipativo se, e somente se, A é auto-adjunto.*

Prova: Veja [4, p. 24]. ■

Observação 1.7. *Há outra classe de operadores das quais podemos extrair diversas propriedades interessantes, são os chamados operadores skew adjuntos. Tais Operadores tem a propriedade que $A^* = -A$. Observemos que se A é auto adjunto, então $(iA)^* = -iA^*$, ou seja, iA é um operador skew adjunto. Para mais detalhes, veja [4].*

1.3.2 Espaços de Hilbert complexos

Nesta seção teremos X sendo um espaço de Hilbert complexo. Lembremos que se X é um espaço de Hilbert complexo, então existe um forma $\mathbb{R}$ -bilinear $b : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} b(iu, v) &= ib(u, v), \quad \forall u, v \in X \times X, \\ b(v, u) &= \overline{b(u, v)}, \quad \forall u, v \in X \times X, \\ b(u, u) &= |u|_X^2, \quad \forall u \in X. \end{aligned}$$

Neste caso $(u, v) = \operatorname{re}(b(u, v))$ é um produto interno real que torna X um espaço de Hilbert.

Façamos agora alguns exemplos para ilustrar o que foi exposto até agora.

Exemplo 1.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e seja $X = L^2(\Omega)$. Definiremos o operador linear B em X por

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \\ B(u) = \Delta u \quad \forall u \in D(B). \end{cases}$$

Neste caso, queremos mostrar que B é m -dissipativo com domínio denso. Mais precisamente, B é auto adjunto e $(Bu, u)_X \leq 0$ para todo $u \in D(B)$.

Primeiramente, $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(B)$ e assim, $D(B)$ é denso em X . Pelos Teoremas (1.1) e (1.6),

$$(Bu, u) = \int_{\Omega} \Delta u u dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0$$

e, assim, B é dissipativo. A aplicação bilinear

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx,$$

é contínua e coerciva em $H_0^1(\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.5, para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Obtemos então que $u - \Delta u = f$ no sentido das distribuições. Como $u \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$, temos $\Delta u \in L^2(\Omega)$ e, portanto, $u \in D(B)$. Por conseguinte, B é m -dissipativo.

É fácil ver que

$$(Bu, v) = (u, Bv).$$

Logo $G(B) \subset G(B^*)$ e, pelo Teorema 1.8, segue que B é auto-adjunto.

Exemplo 1.4. Consideremos agora $X = L^2(\Omega; \mathbb{C})$ e o operador

$$\begin{cases} D(C) = \{H_0^1(\Omega; \mathbb{C}), \Delta u \in X\} \\ C(u) = (c + id)\Delta u \quad , \quad \forall u \in D(B) \quad , c > 0. \end{cases}$$

Vejamos que B é m -dissipativo com domínio denso. Com efeito,

$$\begin{aligned} (Cu, u) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} (c + id) \Delta u \bar{u} dx \right) = -\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} (c + id) |\nabla u|^2 dx \right) \\ &= -c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, C é dissipativo. Acima percebemos a necessidade de considerarmos $c > 0$.

Definindo a forma bilinear $d : H_0^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_0^1(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$d(u, v) = \int_{\Omega} ((c + id)\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + u\bar{v}) dx,$$

d é claramente contínua, e ainda

$$|d(u, u)| \geq (|c|^2 + |d|^2)^{\frac{1}{2}} \|u\|^2.$$

Portanto, pelo Teorema 1.5, para cada $f \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$ existe $\xi_f \in H_0^1(\Omega; \mathbb{C})$ tal que

$$f(u) = d(\xi_f, u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{C}).$$

Em outros termos,

$$\int_{\Omega} f u dx = \int_{\Omega} ((c + id)\nabla \xi_f \nabla \bar{u} + \xi_f \bar{u}) dx,$$

ou ainda,

$$\xi_f - (c + id)\Delta \xi_f = f \quad \text{em } D'(\Omega; \mathbb{C}).$$

Como $\xi_f \in H_0^1(\Omega; \mathbb{C})$ e $f \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$ teremos que $\Delta \xi_f \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$ e assim $\xi_f \in D(C)$ e assim C é m -dissipativo.

1.3.3 O semigrupo gerado por um operador m -dissipativo

Seja A um operador m -dissipativo, podemos definir $A_{\lambda} = AJ_{\lambda}$, recordemos que $J_{\lambda} = (I - \lambda A)^{-1}$. Considerando $T_{\lambda}(t) = e^{tA_{\lambda}}$ temos o seguinte

Teorema 1.9. Para todo $x \in X$, a sequência $u_{\lambda}(t) = T_{\lambda}(t)x$ converge uniformemente em intervalos limitados $[0, T]$ a uma função $u \in C([0, \infty); X)$, quando $\lambda \downarrow 0$. Escreveremos $T(t)x = u(t)$, para todo $x \in X$ e $t \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} T(t) &\in \mathcal{L}(X) \text{ e } \|T\| \leq 1, \quad t \geq 0, \\ T(0) &= I, \\ T(t+s) &= T(t)T(s) \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Mais ainda, para todo $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)(x)$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X), \\ u'(t) = Au(t) \quad t \geq 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{1.5}$$

Prova: veja [4, p. 33]. ■

Observação 1.8. *No caso em que A é auto adjunto, teremos um resultado similar ao Teorema 1.9. Mais precisamente, se $x \in X$ e A é auto adjunto então $u(t) = T(t)x$ satisfaz*

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty); X) \cap C((0, \infty); D(A)) \cap C^1((0, \infty); D(A)), \\ u'(t) = Au(t) \quad t \geq 0, \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Observemos que para o caso auto adjunto, conseguimos que a solução seja mais regular que o dado inicial. Este fenômeno é chamado de efeito regularizante do operador auto adjunto.

Definição 1.4. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ uma família de aplicações de um parâmetro, dizemos que L definido por*

$$D(L) = \left\{ x \in X; \frac{T(h) - I}{h}x \text{ possui limite em } X \text{ quando } h \downarrow 0 \right\},$$

e

$$Lx = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h}x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(L),$$

é dito gerador da família $(T(t))_{t \geq 0}$.

Definição 1.5. *Dizemos que a família $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contração se satisfaz as propriedades (1.4) para todo $t \geq 0$.*

Teorema 1.10 (Teorema de Hille-Yosida-Philips). *Um operador linear A é o gerador de um semigrupo de contração em X se, e somente se, A é m -dissipativo e com domínio denso.*

Prova: Veja [4, p. 40]. ■

Proposição 1.3. *Seja A um operador m -dissipativo com domínio denso. Suponha que A é o gerador de um semigrupo de contração $(S(t))_{t \geq 0}$. Então $(S(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo correspondente a A no Teorema 1.9.*

Prova: Veja [4, p. 41]. ■

Observação 1.9. *A proposição 1.3 nos permite concluir a unicidade do semigrupo gerado por um dado operador m -dissipativo.*

Observação 1.10. *O Teorema 1.3 e o Teorema 1.10 nos diz que, para sabermos se o problema (1.5) possui uma única solução ($x \in D(A)$), basta verificarmos que o operador A é m -dissipativo com domínio denso, ou então que o semigrupo gerado por A é de contração.*

Observação 1.11. *Como foi mostrado, os operadores B e C definidos nos exemplos 1.3 e 1.4 são m -dissipativos com domínio denso e, se $x \in D(A)$, existe solução para o problema (1.5) para tais operadores. Como B é auto-adjunto, garantimos solução para $x \in X$.*

1.3.4 O problema não homogêneo

Seja $T > 0$ e $f : [0, T] \rightarrow X$, nosso objetivo é determinar existência e unicidade de solução pra problemas da forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & , \forall t \geq 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (1.6)$$

Definição 1.6. *Seja A o gerador de um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de contração e seja $x \in X$ e $f \in L^1((0, T); X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad (1.7)$$

é chamada solução generalizada do problema (1.6).

Temos agora o seguinte

Lema 1.1. *Seja $x \in D(A)$ e $f \in C([0, T]; X)$. Se u é solução de (1.6), então (1.7) vale para todo $t \in [0, T]$.*

Prova: Veja [4, p. 50]. ■

Proposição 1.4. *Seja $x \in D(A)$ e $f \in C([0, T]; X)$. Se além disso $f \in L^1((0, T); D(A))$ ou $f \in W^{1,1}((0, T); X)$, então u dada por (1.7) é solução de (1.6).*

Prova: Veja [4, p. 51]. ■

1.4 Existência e unicidade de solução fraca

Vamos agora garantir a existência de uma única *solução fraca* para o problema (3). Definimos o conceito de solução fraca como segue.

Definição 1.7. *Seja $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$ o lado direito de $(3)_1$. Dizemos que $y : Q \rightarrow \mathbb{C}$ é solução fraca de (3) se*

$$y \in C([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{C})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega, \mathbb{C})), \quad (1.8)$$

e

$$(y(t), \bar{\varphi}(t)) - \int_0^t (y, \bar{\varphi}') ds = (y_0, \bar{\varphi}(0)) - \int_0^t ((c + id)\nabla y, \nabla \bar{\varphi}) ds + \int_0^t (f, \bar{\varphi}) ds, \quad (1.9)$$

com $y(0) = y_0$.

Teorema 1.11. *Seja $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$ e $f \in L^1((0, T); L^2(\Omega; \mathbb{C}))$ então existe uma única $y \in C([0, T], L^2(\Omega; \mathbb{C})) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega; \mathbb{C}))$ solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} y' = C(y) + f, & \text{em } Q, \\ y = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que C é o operador definido no Exemplo 1.4.

Prova: Sejam $(y_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências em $C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ e $C^\infty(Q; \mathbb{C})$, respectivamente, tal que

$$\begin{aligned} y_n^0 &\rightarrow y^0 && \text{em } L^2(\Omega; \mathbb{C}), \\ f_n &\rightarrow f && \text{em } L^2(Q; \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como C é m-dissipativo e $D(C)$ é denso em $L^2(\Omega; \mathbb{C})$, temos que C gera um semi-grupo de contração e y_n é solução do problema

$$\begin{cases} y_n \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X), \\ y_n'(t) = Cy_n(t) + f_n(t) \quad , \forall t \geq 0, \\ y_n(0) = y_n^0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Multiplicando $(1.11)_2$ por $\overline{y_n}$, integrando em $\Omega \times (0, t)$ e, em seguida, considerando a parte real, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^T \int_\Omega |y_n|^2 dx dt + c \int_0^T \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx dt = \operatorname{Re} \int_0^T \int_\Omega f_n y_n dx dt. \quad (1.12)$$

Usando a desigualdade de Young e em seguida a desigualdade de Gronwall obtemos diretamente que

$$|y_n(t)|^2 + \int_0^t |\nabla y_n(s)|^2 ds \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |f_n|^2 dx dt + \int_{\Omega} |y_n^0|^2 dx \right), \quad C \text{ independe de } m \text{ e } t.$$

Pela linearidade do problema temos em particular que

$$|y_n(t) - y_m(t)|^2 + \int_0^t |\nabla y_n(s) - \nabla y_m(s)|^2 ds \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |f_n - f_m|^2 dx dt + \int_{\Omega} |y_n^0 - y_m^0|^2 dx \right)$$

Logo (y_n) é de Cauchy em $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e portanto é convergente. Como, em particular, y_n é solução de (1.9) podemos passar o limite e concluir o resultado. ■

Observação 1.12. *Para o problema não homogêneo envolvendo o operador B (veja Exemplo 1.4), temos que dado $y^0 \in L^2(\Omega)$, existe uma única função y na classe*

$$C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

tal que

$$(y(t), \phi(t)) - \int_0^t (y, \phi') ds = (y_0, \phi(0)) - \int_0^t (\nabla y, \nabla \phi) ds + \int_0^t (f, \phi) ds,$$

com $y(0) = y^0$. Notemos que a solução tem um caráter mais regular que o dado inicial e a parte não homogênea, o que caracteriza o efeito regularizante da equação do calor.

Capítulo 2

Controlabilidade nula

2.1 Controlabilidade nula no caso real

Nas observações a seguir, veremos porque a controlabilidade nula para (1) é o resultado importante a ser estudado.

Observação 2.1. *Devido ao efeito regularizante da equação do calor (veja Observação 1.12), não esperamos alcançar controlabilidade exata para (1). De fato, se $y^1 \in L^2(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$ temos que para qualquer função controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, $y(T) \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{\omega})$. Dessa forma não poderemos ter $y(T) = y^1$.*

Observação 2.2. *Podemos ver, devido a linearidade do problema, que controlabilidade exata para as trajetórias é equivalente a controlabilidade nula. De fato, suponhamos controlabilidade nula. Seja z uma trajetória (ver (2)). Temos que existe um controle v tal que a solução do problema*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = v1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ y = 0, & \text{em } \Sigma, \\ y(0) = y^0 - z^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

satisfaz $y(T) = 0$. Pela linearidade do problema, a função $w = y + z$ satisfaz

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = v1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = y^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e ainda $w(T) = z(T)$. Reciprocamente, se z for a trajetória nula, temos, por

hipótese, que existe um controle v tal que a solução y associada ao controle v é tal que $y(T) = z(T) = 0$.

2.1.1 Observabilidade

Mostraremos que a controlabilidade nula de (1) pode ser obtida por meio de uma desigualdade de *observabilidade* do sistema adjunto associado.

Para cada $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, consideremos o seguinte sistema adjunto:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Observação 2.3. De forma inteiramente análoga a que foi mostrada no primeiro capítulo, podemos assegurar a existência e unicidade da solução fraca para (2.1).

Teorema 2.1. A controlabilidade nula de (1) é equivalente a seguinte desigualdade:

$$|\varphi(0)|^2 \leq C \int \int_{Q \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt. \quad (2.2)$$

Observação 2.4. A desigualdade (2.2) é conhecida como *desigualdade de observabilidade*, e a constante C é conhecida como *constante de observabilidade*.

Prova: Por simplicidade, dividiremos a prova em três passos. No primeiro passo, obteremos um controle v_ϵ por meio da minimização de um funcional. No segundo passo obteremos a controlabilidade aproximada para o problema (1), ou seja, mostraremos que a solução y_ϵ associadas ao controle aproximado v_ϵ satisfaz

$$|y_\epsilon(T)| \leq \epsilon. \quad (2.3)$$

No terceiro passo, combinando a controlabilidade aproximada com a limitação do controle, poderemos concluir a controlabilidade nula.

Passo 1: Minimização do funcional. Dados $y^0 \in L^2(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, consideremos o funcional $J_\epsilon : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$J_\epsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int \int_{Q \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt + \epsilon |\varphi^0| + (\varphi(0), y^0), \quad (2.4)$$

em que φ é a solução de (2.1) com dado φ^0 . Mostraremos que o controle aproximado v_ϵ que procuramos está relacionado com o mínimo do funcional

J_ϵ . Para garantir a existência de tal mínimo, faremos uso do Teorema 1.2. Devemos mostrar que J_ϵ é estritamente convexo, contínuo e coercivo.

a. J_ϵ é estritamente convexo. Sendo a função $\varphi \mapsto |\varphi|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}^2$ estritamente convexa, temos imediatamente a convexidade estrita de J_ϵ .

b. J_ϵ é contínuo. Multiplicando (2.1) por φ e integrando em $\Omega \times (t, T)$ obtemos

$$|\varphi(t)|^2 + \int_t^T \|\varphi\|^2 dx dt = |\varphi^0|^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Assim,

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt \leq \int \int_{\Omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt \leq T |\varphi^0|^2. \quad (2.5)$$

Por (2.2) e (2.5) temos

$$(\varphi(0), y^0) \leq |\varphi(0)| |y^0| \leq |y^0| |\varphi^0| \quad (2.6)$$

Sejam φ e ψ soluções de (2.1) com dados φ^0 e ψ^0 respectivamente. Pela linearidade do problema, $\varphi - \psi$ é solução para o problema (2.1) com dado $\varphi^0 - \psi^0$. Assim, por (2.5) e (2.6) teremos que

$$|J_\epsilon(\varphi^0 - \psi^0)| \leq (T + |y^0|^2 + \epsilon) |\varphi^0 - \psi^0|^2,$$

o que é suficiente para concluirmos a continuidade de J_ϵ .

c. J_ϵ é coercivo. Para $\varphi_0 \neq 0$, temos por (2.4) que

$$\frac{J_\epsilon(\varphi^0)}{|\varphi^0|} = \frac{1}{2|\varphi^0|} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt + \epsilon + \frac{1}{|\varphi^0|} (\varphi(0), y^0). \quad (2.7)$$

Se

$$\liminf_{|\varphi^0| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\varphi^0|} \left(\frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt + (\varphi(0), y^0) \right) \leq 0,$$

então existe $K > 0$ tal que $|\varphi^0| > K$ implica

$$\frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt + (\varphi(0), y^0) \leq 0.$$

Assim, por (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt &\leq -(\varphi(0), y^0) \\ &\leq |\varphi(0)| |y^0| \\ &\leq C^{\frac{1}{2}} |y^0| \left(\int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |y^0|, \quad \text{para todo } |\varphi^0| \geq K. \quad (2.8)$$

Fixado φ^0 tal que $|\varphi^0| \geq K$, temos que $|n\varphi^0| \geq K$ para todo $n \geq K$.

Pela linearidade do problema e por (2.8) teremos

$$\left(\int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{n} |y^0|, \quad \text{para todo } |\varphi^0| \geq K,$$

donde concluimos que

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt = 0 \quad \text{sempre que } |\varphi^0| \geq K.$$

Pela desigualdade de observabilidade (2.2), temos também que $\varphi(0) = 0$

e, portanto, $(\varphi(0), y^0) = 0$. Dessa forma, segue por (2.7)

$$\frac{J_\epsilon(\varphi^0)}{|\varphi^0|} = \epsilon.$$

Caso

$$\liminf_{|\varphi^0| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\varphi^0|} \left(\frac{1}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt + (\varphi(0), y^0) \right) \geq 0,$$

teremos diretamente, por (2.7), que

$$\liminf_{|\varphi^0| \rightarrow \infty} \frac{J_\epsilon(\varphi^0)}{|\varphi^0|} \geq \epsilon,$$

o que nos permite concluir que J_ϵ é coercivo.

Das propriedades a , b , c provadas acima e pelo Teorema 1.2, segue que o funcional J_ϵ possui um mínimo que denotaremos φ_ϵ^0 .

Passo 2: Controlabilidade aproximada. Consideremos $v_\epsilon = \varphi_\epsilon$, e por y_ϵ a solução do problema (1) com controle v_ϵ .

Se $\varphi_\epsilon^0 = 0$, então sua solução correspondente φ_ϵ é a solução nula e, portanto, $J_\epsilon(\varphi_\epsilon^0) = 0$. Como φ_ϵ^0 é o mínimo do funcional J_ϵ temos

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{J_\epsilon(t\varphi^0)}{t} = \epsilon |\varphi^0| + (y_\epsilon(T), \varphi^0) \geq \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} J_\epsilon(\varphi_\epsilon^0) = 0, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega),$$

e, dessa forma,

$$(y_\epsilon(T), \varphi^0) \leq \epsilon |\varphi^0| \quad \varphi^0 \in L^2(\Omega).$$

Sabendo que

$$|y_\epsilon(T)| = \inf\{k > 0; (y(T), \varphi^0) \leq k|\varphi^0| \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega)\},$$

concluimos (2.3).

Caso $\varphi_\epsilon^0 \neq 0$, podemos diferenciar o funcional J_ϵ em φ_ϵ^0 obtendo

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi_\epsilon \varphi dx dt + \epsilon \left(\frac{\varphi_\epsilon^0}{|\varphi_\epsilon^0|}, \varphi^0 \right) + (\varphi(0), y^0) = 0, \quad (2.9)$$

para todo $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. Como os sistemas (1) e (2.1) estão em dualidade, é valido

$$\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi_\epsilon \varphi dx dt = (y_\epsilon(T), \varphi^0) - (y^0, \varphi(0)). \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9) deduzimos (2.3).

Passo 3: Controlabilidade nula. Considerando $\varphi^0 = \varphi_\epsilon^0$ em (2.9), e utilizando a desigualdade de observabilidade (2.2) temos

$$\begin{aligned} |v_\epsilon|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 &\leq -(\varphi_\epsilon(0), y^0) \\ &\leq |\varphi_\epsilon(0)| |y^0| \\ &\leq \left(C \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi_\epsilon|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} |y^0|, \end{aligned}$$

donde concluimos que

$$|v_\epsilon|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \leq \sqrt{C} |y^0|, \quad (2.11)$$

em que C é a constante de observabilidade em (2.2).

Multiplicando (1) por y_ϵ e integrando em $\Omega \times (0, T)$ obtemos, por procedimentos padrões, a seguinte desigualdade de energia

$$|y_\epsilon(t)|^2 + \int_0^T \|y_\epsilon(t)\|^2 \leq C \left(|y^0|^2 + |v_\epsilon|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}^2 \right). \quad (2.12)$$

Por (2.11) e (2.12) temos que

$$(v_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(\mathcal{O} \times (0, T)), \quad (2.13)$$

$$(y_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.14)$$

Pelo Teorema 1.3,

$$\begin{aligned} v_\epsilon &\rightharpoonup v \text{ em } L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) , \\ y_\epsilon &\rightharpoonup y \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como y_ϵ é solução fraca de (1)

$$-\int_0^T (y_\epsilon(s), \varphi'(s))ds = -\int_0^T (\nabla y_\epsilon, \nabla \varphi)ds + \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} v_\epsilon \varphi dx ds,$$

e pelas convergências 2.15 temos que

$$-\int_0^T (y(s), \varphi'(s))ds = -\int_0^T (\nabla y, \nabla \varphi)ds + \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} v \varphi dx ds,$$

ou seja, y é solução de (1) com função controle v .

Pela limitação (2.14) concluímos que

$$(\Delta y_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.16)$$

Por (2.13) e (2.16), e sendo y_ϵ solução de (1), segue que (y'_ϵ) é limitada em $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, e assim

$$y'_\epsilon \rightharpoonup^* y' \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.17)$$

Seja $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in C^1[0, T]$, tal que $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$. Temos que

$$(y_\epsilon(T), v) = \int_0^T \langle y'_\epsilon(t), v \rangle \theta(t) dt + \int_0^T (y_\epsilon(t), v) \theta'(t) dt.$$

Pelas convergências (2.15)₂ e (2.17) concluímos que

$$(y_\epsilon(T), v) \rightarrow (y(T), v), \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como $L^2(\Omega)$ é reflexivo, teremos que

$$y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T) \text{ em } L^2(\Omega)$$

e, por (2.3) obtemos

$$|y(T)| \leq \liminf |y_\epsilon(T)| = 0.$$

Reciprocamente, vamos supor controlabilidade nula para (1). Suponhamos também que o controle seja limitado, ou seja, para cada $y^0 \in L^2(\Omega)$ se $v \in L^2(\Omega)$ é o controle que conduz a solução de (1) a zero com dado y^0 , então

$$|v|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \leq \sqrt{C} |y^0|.$$

Dessa forma, podemos garantir que a desigualdade de observabilidade é válida. De fato, por dualidade temos

$$\begin{aligned}
(y^0, \varphi(0)) &= - \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v \varphi dx dt \\
&\leq \|v\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \\
&\leq \sqrt{C} |y^0| \left(\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nessas condições,

$$|\varphi(0)| \leq \sqrt{C} \left(\int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Devemos então mostrar que a desigualdade (2.2) é válida. Com esse objetivo faremos uso de uma desigualdade de Carleman para (2.1). Estimativas do tipo Carleman para problemas de controlabilidade foram idealizadas por Fursikov e Imanuvilov em [12]. Faremos a prova dessa desigualdade com detalhes na seção seguinte.

2.1.2 Estimativa de Carleman

Para iniciar o estudo da estimativa Carleman para a equação do calor, precisaremos inicialmente do seguinte resultado cuja prova pode ser encontrado em [12].

Lema 2.1. *Seja $\omega \Subset \Omega$ um subconjunto aberto e não vazio. Então existe $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\eta^0 > 0$ em Ω , $\eta^0 = 0$ sobre $\partial\Omega$ e $|\nabla \eta^0| > 0$ em $\overline{\Omega \setminus \omega}$.*

Tendo em posse o Lema 2.1, definamos as seguintes funções peso:

$$\begin{aligned}
\alpha(x, t) &= \frac{e^{2\lambda m \|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)}, \\
\xi(x, t) &= \frac{e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t(T-t)},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

em que $(x, t) \in Q$ e $m > 1$ um número real. Denominamos essas funções por *funções peso*. As funções definidas em (2.18) foram inicialmente introduzidas por Imanuvilov em [12].

Vamos agora ao principal resultado.

Lema 2.2. *Existe uma constante $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega, \mathcal{O}) \geq 1$, $s_1 = C(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$ e $C_1(\Omega, \mathcal{O})$ tal que, para qualquer $\lambda \geq \lambda_1$ e qualquer $s \geq s_1$, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\begin{aligned} & s^{-1}\lambda^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} (|q_t|^2 + |\Delta q|^2) dx dt + s\lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 dx dt \\ & + s^3 \lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dx dt \leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha} |q_t + \Delta q|^2 dx dt \right. \\ & \left. + s^3 \lambda^4 \int \int_{\omega \times (0, T)} \xi^3 e^{-2s\alpha} |q|^2 dx dt \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

para toda $q \in C^2(\overline{Q})$ com $q = 0$ em Σ .

No que segue, $C = C(\Omega, \mathcal{O})$ ou simplesmente C denotará uma constante genérica que depende apenas de Ω e $\mathcal{O}$.

Antes de provarmos o Lema 2.2, deduziremos por meio do mesmo, a desigualdade de observabilidade (2.2) e, conseqüentemente, teremos controlabilidade nula para (1).

Por densidade, podemos supor que (2.19) é válida para a solução do problema (2.1). Então, fixando $\lambda = \lambda_1$, obtemos

$$\int \int_Q e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt \leq C \int \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt, \quad (2.20)$$

para todo $s \geq s_1$. Utilizando (2.20) e as desigualdades

$$e^{-2s_1\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \geq e^{-2C(1+\frac{1}{T})} \frac{1}{T^6} \quad \text{em } \Omega \times \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right),$$

$$e^{-2s_1\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \leq e^{-C(1+\frac{1}{T})} \frac{1}{T^6} \quad \text{em } \Omega \times (0, T),$$

obtemos

$$\int \int_{\Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})} |\varphi|^2 dx dt \leq K \int \int_{\Omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt, \quad (2.21)$$

em que a constante $K = K(\Omega, \mathcal{O}, T) = e^{C(1+\frac{1}{T})}$.

Multiplicando (2.1) por φ e integrando em $\Omega \times (0, t)$ obtemos

$$|\varphi(0)|^2 \leq |\varphi(t)|^2. \quad (2.22)$$

Integrando (2.22) em $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$ segue que

$$|\varphi(0)|^2 \leq \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} |\varphi(t)|^2 dt. \quad (2.23)$$

Assim, combinando (2.21) e (2.23) concluimos a desigualdade de observabilidade (2.2).

Passemos agora para a demonstração do Lema 2.2.

Prova do Lema 3.2: Tomemos $q \in C^2(\overline{Q})$ tal que $q = 0$ sobre Σ . Consideremos a mudança de variável

$$\psi = e^{-s\alpha} q \quad \text{ou} \quad q = e^{s\alpha} \psi.$$

Consideremos também a seguinte função

$$g = e^{-s\alpha} f,$$

onde $f = q_t + \Delta q$. Observemos que

$$q_t = s e^{s\alpha} \alpha_t \psi + e^{s\alpha} \psi_t,$$

e

$$\Delta q = e^{s\alpha} \Delta \psi + 2s e^{s\alpha} \nabla \alpha \cdot \nabla \psi + s^2 e^{s\alpha} |\nabla \alpha|^2 \psi + s e^{s\alpha} \Delta \alpha \psi.$$

Assim,

$$f = e^{s\alpha} (s \alpha_t \psi + \psi_t + \Delta \psi + 2s \nabla \alpha \cdot \nabla \psi + s^2 |\nabla \alpha|^2 \psi + s \Delta \alpha \psi).$$

Multiplicando a expressão acima por $e^{-s\alpha}$ obtemos

$$g = s \alpha_t \psi + \psi_t + \Delta \psi + 2s \nabla \alpha \cdot \nabla \psi + s^2 |\nabla \alpha|^2 \psi + s \Delta \alpha \psi.$$

Como

$$\nabla \alpha = -\xi \lambda \nabla \eta^0,$$

e

$$\Delta \alpha = -\lambda^2 \xi |\nabla \eta^0|^2 - \lambda \xi \Delta \eta^0,$$

segue que

$$g = s \alpha_t \psi + \psi_t + \Delta \psi - 2s \lambda \xi \nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \eta^0|^2 \psi - s \lambda^2 \xi |\nabla \eta^0|^2 \psi - \lambda \xi \Delta \eta^0 \psi.$$

Considerando

$$\begin{aligned} M_1 \psi &= -2s \lambda^2 |\nabla \eta^0|^2 \xi \psi - 2s \lambda \xi \nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi + \psi_t, \\ M_2 \psi &= s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \eta^0|^2 \psi + \Delta \psi + s \alpha_t \psi, \end{aligned} \tag{2.24}$$

temos que

$$M_1\psi + M_2\psi = g_{s,\lambda}, \quad (2.25)$$

onde

$$g_{s,\lambda} = g + s\lambda\Delta\eta^0\xi\psi - s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi\psi.$$

Para simplificar a notação, denotaremos $(M_i\psi)_j (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ o j -ésimo termo da expressão $M_i\psi$ dado em (2.24).

Com a notação anterior, temos por (2.25) que

$$|M_1\psi|^2 + |M_2\psi|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 ((M_1\psi))_i, (M_2\psi)_j = |g_{s,\lambda}|^2. \quad (2.26)$$

Observação 2.5. *À primeira vista, parece natural pôr o termo $(M_1\psi)_1$ do lado direito de (2.25), entretando decidimos mantê-lo na esquerda pois ajudará a produzir o segundo termo do lado esquerdo de (2.19) (Isto será melhor esclarecido mais adiante quando calcularmos o produto escalar $((M_1\psi))_1, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)}$.*

O próximo passo é desenvolver os nove termos que surgem do produto interno em (2.26). Com esta finalidade, faremos integração por partes várias vezes e, naturalmente, as derivadas das funções peso aparecerão. Portanto precisaremos das estimativas

$$\partial_i\alpha = -\partial_i\xi = -\lambda\partial_i\eta^0\xi \leq C\lambda\xi, \quad (2.27)$$

$$\alpha_t = -(T-2t) \frac{e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^2(T-t)^2} \leq CT\xi^2. \quad (2.28)$$

A última desigualdade segue do fato que

$$e^{2\lambda m\|\eta^0\|_\infty} \leq e^{2\lambda(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0)} \quad \text{em } \Omega. \quad (2.29)$$

Primeiramente temos

$$((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_1) = -2s^3\lambda^4 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt = A. \quad (2.30)$$

Temos também

$$\begin{aligned}
((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_1) &= -2s^2\lambda^3 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi^3 (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi) \psi dxdt \\
&= 3s^3\lambda^4 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&\quad + s^3\lambda^3 \int \int_Q \Delta\eta^0 |\nabla\eta^0|^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&\quad + 2s^3\lambda^3 \sum_{i,j=1}^N \int \int_Q \partial_i\eta^0 \partial_{ij}\eta^0 \partial_j\eta^0 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&= B_1 + B_2 + B_3,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde B_i ($i = 1, 2, 3$), representa o i -ésimo termo do lado direito de (2.31). Claramente temos que $A + B_1$ é um número positivo e, pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
A + B_1 &= s^3\lambda^4 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \geq s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega \setminus \omega} |\nabla\eta^0|^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&\geq Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega \setminus \omega} \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&= Cs^3\lambda^4 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt - Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\omega} \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&= \tilde{A} - \tilde{B}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Como $\eta^0 \in C^2(\overline{Q})$, teremos

$$B_2 \geq -Cs^3\lambda^3 \int_0^T \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt, \tag{2.33}$$

$$B_3 \geq -Cs^3\lambda^3 \int_0^T \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt. \tag{2.34}$$

Dessa forma, se $K < C$ é um número real, considerando $\lambda \geq \frac{C}{K}$ segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{A} + B_2 + B_3 &\geq Cs^3\lambda^4 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt - Cs^3\lambda^3 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\
&\geq (C - K)s^3\lambda^4 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt = Cs^3\lambda^4 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

em que C é uma constante positiva. Assim, podemos observar que B_2 e B_3 foram absorvidas por $\tilde{A}$. Isto foi possível pois as potências de s e λ de B_2 e B_3 são menores que a ordem $s^3\lambda^4$.

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1) &= s^2\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi^2 \psi_t \psi dxdt, \\
&= -s^2\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi \xi_t |\psi|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Como

$$\xi_t = -\xi \frac{T-2t}{t(T-t)} \leq CT\xi^2, \quad (2.37)$$

deduzimos que

$$|((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1)| \leq Cs^2\lambda^2T \int \int_Q \xi^3|\psi|^2 dxdt,$$

que também poderá ser absorvido como no caso anterior, bastando considerar $\lambda \geq 1$ e $s \geq CT$. Consequentemente

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_1)_{L^2(Q)} \\ &\geq Cs^3\lambda^4 \int \int_Q \xi^3|\psi|^2 dxdt \\ &\quad -Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_\omega \xi^3|\psi|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (2.38)$$

para qualquer $\lambda \geq C$ e $s \geq CT$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi \Delta\psi\psi dxdt \\ &= 2s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi |\nabla\psi|^2 dxdt \\ &\quad + 4s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^N \int \int_Q \partial_i\eta^0 \partial_{ij}\eta^0 \xi \partial_j\psi\psi dxdt \\ &\quad + 2s\lambda^3 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi)\psi dxdt \\ &= C_1 + C_2 + C_3, \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que C_i ($i = 1, 2, 3$) representa o i -ésimo termo do lado direito de (2.39). Obtemos as seguintes estimativas para C_2 e C_3 :

$$|C_2| \leq Cs\lambda^4 \int \int_Q \xi|\psi|^2 dxdt + Cs \int \int_Q \xi|\nabla\psi|^2 dxdt \quad (2.40)$$

e

$$|C_3| \leq Cs^2\lambda^4 \int \int_Q \xi|\psi|^2 dxdt + C\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\psi|^2 dxdt. \quad (2.41)$$

Como $\xi \geq \frac{1}{t(T-t)}$, temos que $T^2\xi^2 \geq \xi$. Assim,

$$Cs\lambda^4 \int \int_Q \xi|\psi|^2 dxdt \leq CT^2s\lambda^4 \int \int_Q \xi^2|\psi|^2 dxdt. \quad (2.42)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &\geq 2s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla \eta^0|^2 \xi |\nabla \psi|^2 dxdt \\ &\quad - Cs\lambda^4 \int \int_Q \xi^2 |\psi|^2 - C \int \int_Q (s\xi + \lambda^2) |\nabla \psi|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sendo $\psi = 0$ sobre Σ , obtemos $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} n^i$ e, portanto,

$$\begin{aligned} ((M_1 \psi)_2, (M_2 \psi)_2)_{L^2(Q)} &= -2s\lambda \int \int_Q \xi (\nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi) \Delta \psi d\sigma dt \\ &= -2s\lambda \int \int_\Sigma \xi \frac{\partial \eta^0}{\partial n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|^2 dxdt \\ &\quad + 2s\lambda \sum_{i,j=1}^N \int \int_Q \partial_{ij} \eta^0 \xi \partial_i \psi \partial_j \psi dxdt \\ &\quad + 2s\lambda^2 \int \int_Q \xi |\nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi|^2 dxdt \\ &\quad + s\lambda \int \int_Q \xi \nabla \eta^0 \cdot \nabla |\nabla \psi|^2 dxdt \\ &= D_1 + D_2 + D_3 + D_4, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde D_i ($i = 1, \dots, 4$) corresponde ao i -ésimo termo do lado direito de (2.44). Observemos que D_3 é um termo positivo, e

$$|D_2| \leq Cs\lambda \int \int_Q \xi |\nabla \psi|^2 dxdt. \quad (2.45)$$

Após alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} D_4 &= s\lambda \int \int_Q \xi \nabla \eta^0 \cdot \nabla |\nabla \psi|^2 dxdt = s\lambda \int \int_\Sigma \xi \frac{\partial \eta^0}{\partial n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|^2 dxdt \\ &\quad - s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla \eta^0|^2 \xi |\nabla \psi|^2 dxdt - s\lambda^2 \int \int_Q \Delta \eta^0 \xi |\nabla \psi|^2 dxdt \\ &= D_{41} + D_{42} + D_{43}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Observação 2.6. Como mencionamos na observação 3.6, é importante salientar nesse ponto a importância de termos preservado, na decomposição (2.25), o termo $s\lambda^2 |\nabla \eta^0|^2 \xi \psi$ em $M_1 \psi$ e em $g_{s,\lambda}$. Caso não o tivessemos feito, teríamos

$$M_1 \psi = -s\lambda^2 |\nabla \eta^0|^2 \xi \psi - 2s\lambda \xi \nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi + \psi_t,$$

e

$$g_{s,\lambda} = g + s\lambda \Delta \eta^0 \xi \psi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= -s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi \Delta\psi \psi dxdt \\
&= s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi |\nabla\psi|^2 dxdt \\
&\quad + 2s\lambda^2 \sum_{i,j=1}^N \int \int_Q \partial_i\eta^0 \partial_{ij}\eta^0 \xi \partial_j\psi \psi dxdt \\
&\quad + s\lambda^3 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi (\nabla\eta^0 \cdot \nabla\psi) \psi dxdt \\
&= C_1 + C_2 + C_3.
\end{aligned}$$

Assim $C_1 + D_{42} = 0$ e, portanto, perderemos o termo que nos fornece a integral em Ω envolvendo $|\nabla\psi|^2$ que necessitaremos que fique do lado esquerdo.

Notemos que, sendo η^0 uma função positiva que se anula na fronteira, existe uma vizinhança para cada ponto dessa fronteira, tal que η^0 é decrescente. Assim, $\frac{\partial\eta^0}{\partial n}$ é negativa e, por este motivo, $D_1 + D_{41} \geq 0$. Temos ainda que D_{43} pode ser limitado da mesma forma que D_2 . Portanto,

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 + D_3 + D_4 &\geq -s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi |\nabla\psi|^2 dxdt \\
&\quad - Cs\lambda \int \int_Q \xi |\nabla\psi|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Novamente, como $\psi = 0$ sobre Σ temos

$$((M_1\psi)_3, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} = \int \int_Q \psi_t \Delta\psi dxdt = 0. \tag{2.48}$$

Assim, combinando (2.39), (2.43), (2.44), (2.47) e (2.48) concluímos

$$\begin{aligned}
(M_1\psi, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_2) \\
&\geq s\lambda^2 \int \int_Q |\nabla\eta^0|^2 \xi |\nabla\psi|^2 dxdt \\
&\quad - Cs^2\lambda^4 \int \int_Q \xi^2 |\psi|^2 dxdt \\
&\quad - C \int \int_Q (s\lambda\xi + \lambda^2) |\nabla\psi|^2 dxdt \\
&= F_1 + F_2 + F_3,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

para $\lambda \geq 1$ e $s \geq CT^2$, em que F_i ($i = 1, 2, 3$) corresponde ao i -ésimo termo do lado

direito de (2.49). Notemos que

$$\begin{aligned} F_1 &\geq Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega \setminus \omega} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt \\ &= Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\omega} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.50)$$

e ainda

$$|F_3| \leq Cs\lambda \int_Q \xi |\nabla \psi|^2 dx dt + CT^2 \lambda^2 \int_Q |\nabla \psi|^2 dx dt. \quad (2.51)$$

Como em (2.51) as potências de s e λ são menores que a ordem $s\lambda^2$, estes termos podem, como anteriormente, ser absorvidos. Dessa forma,

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_2)_{L^2(Q)} &\geq Cs\lambda^2 \int_Q \xi |\nabla \psi|^2 dx dt \\ &\quad - Cs^2\lambda^4 \int_Q \xi^2 |\psi|^2 dx dt \\ &\quad - Cs\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.52)$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq CT^2$.

Por (2.28) temos

$$\begin{aligned} ((M_1\psi)_1, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= -2s^2\lambda^2 \int_Q |\nabla \eta^0|^2 \alpha_t \xi |\psi|^2 dx dt \\ &\leq Cs^2\lambda^2 T \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.53)$$

que é absorvido por $\tilde{A}$, bastando tomar $\lambda \geq 1$ e $s \geq CT$.

Observemos que

$$\begin{aligned} ((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= -2s^2\lambda \int_Q \alpha_t \xi (\nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi) \psi dx dt \\ &= s^2\lambda^2 \int_Q \alpha_t |\nabla \eta^0|^2 \xi |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + s^2\lambda \int_Q \nabla \alpha_t \cdot \nabla \eta^0 \xi |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + s^2\lambda \int_Q \alpha_t \Delta \eta^0 \xi |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por (2.28)

$$\nabla \alpha_t = -\lambda \frac{(T-2t)}{t(T-t)} \xi \nabla \eta^0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| s^2\lambda \int_Q \nabla \alpha_t \cdot \nabla \eta^0 \xi |\psi|^2 dx dt \right| &= s^2\lambda^2 \int_Q \frac{(T-2t)}{t(T-t)} \xi^2 |\nabla \eta^0|^2 |\psi|^2 dx dt \\ &\leq Cs^2\lambda^2 T \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Por raciocínio análogo, podemos mostrar que os outros dois termos do lado direito de (2.54), também são limitados, em módulo, por $Cs^2\lambda^2T \int \int_Q \xi^3|\psi|^2 dxdt$ ($\lambda \geq 1$). Então,

$$((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \geq -Cs^2\lambda^2T \int \int_Q \xi^3|\psi|^2 dxdt. \quad (2.56)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} ((M_1\psi)_2, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= s \int \int_Q \alpha_t \psi_t \psi dxdt \\ &= -\frac{1}{2}s \int \int_Q \alpha_{tt} |\psi|^2 dxdt \leq CsT^2 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (2.57)$$

visto que

$$\alpha_{tt} \leq C\xi^2(1 + T^2\xi) \leq CT^2\xi^3. \quad (2.58)$$

Por (2.53), (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57) concluímos

$$\begin{aligned} (M_1\psi, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} &= ((M_1\psi)_1 + (M_1\psi)_2 + (M_1\psi)_3, (M_2\psi)_3)_{L^2(Q)} \\ &\geq -Cs^3\lambda^2 \int \int_Q \xi^3 |\psi|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (2.59)$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq CT$.

Por (2.38), (2.52) e (2.59) temos

$$\begin{aligned} (M_1\psi, M_2\psi)_{L^2(\Omega)} &\geq \int \int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2) dxdt \\ &\quad - C \int \int_{\omega \times (0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2) d\sigma dt, \end{aligned} \quad (2.60)$$

para qualquer $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T + T^2)$.

Aplicando (2.60) em (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} |M_1\psi|^2 &+ |M_2\psi|^2 + \int \int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2) dxdt \\ &\leq C \left(|g_{s,\lambda}|^2 + \int \int_{\omega \times (0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2) d\sigma dt \right) \\ &\leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha} |f|^2 dxdt + s^2\lambda^4 \int \int_Q \xi^2 |\psi|^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + \int \int_{\omega \times (0,T)} (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2) d\sigma dt \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

A integral em Q envolvendo o termo $|\psi|$, que se encontra do lado direito de (2.61), pode ser facilmente absorvida pelos termos do lado esquerdo, bastando considerar

$s > 2C$. Daí

$$\begin{aligned}
|M_1\psi|^2 &+ |M_2\psi|^2 + \int \int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)dxdt \\
&\leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2dxdt + \int \int_{\omega \times (0,T)} s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2d\sigma dt \right. \\
&\quad \left. + \int \int_{\omega \times (0,T)} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2d\sigma dt \right). \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é acrescentar as integrais dos termos $|\Delta\psi|^2$ e $|\psi_t|^2$ no lado esquerdo de (2.62).

Por (2.24) vemos que

$$\begin{aligned}
s^{-1} \int \int_Q \xi^{-1}|\psi_t|^2dxdt &\leq C \left(s\lambda^2 \int \int_Q \xi|\nabla\psi|^2dxdt \right. \\
&\quad \left. + s\lambda^4 \int \int_Q \xi|\psi|^2dxdt + |M_1\psi|^2 \right) \tag{2.63}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
s^{-1} \int \int_Q \xi^{-1}|\Delta\psi|^2dxdt &\leq C \left(s^3\lambda^4 \int \int_Q \xi^3|\psi|^2dxdt \right. \\
&\quad \left. + sT^2 \int \int_Q \xi^3|\psi|^2dxdt + |M_2\psi|^2 \right), \tag{2.64}
\end{aligned}$$

para $s \geq CT^2$. Logo, combinando (2.62), (2.63) e (2.64) segue que

$$\begin{aligned}
\int \int_Q s^{-1}\xi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2)dxdt &+ \int \int_Q (s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2)dxdt \\
&\leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha}|f|^2dxdt + \int \int_{\omega \times (0,T)} s\lambda^2\xi|\nabla\psi|^2dxdt \right. \\
&\quad \left. + \int \int_{\omega \times (0,T)} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2dxdt \right), \tag{2.65}
\end{aligned}$$

para qualquer $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T + T^2)$.

O intuito agora é eliminar a segunda integral do lado direito de (2.65). Para este fim, consideremos $\theta = \theta(x)$ tal que

$$\theta \in C_0^2(\mathcal{O}), \quad \theta \equiv 1 \quad \text{em} \quad \omega, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{2.66}$$

Assim

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int \int_{\omega \times (0,T)} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt &\leq s\lambda^2 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi |\nabla \psi|^2 dx dt \\
&= -s\lambda^2 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi \Delta \psi \psi dx dt \\
&\quad -s\lambda^2 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi (\nabla \theta \cdot \nabla \psi) \psi dx dt \quad (2.67) \\
&\quad -s\lambda^3 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi (\nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi) \psi dx dt \\
&= G_1 + G_2 + G_3,
\end{aligned}$$

em que G_i ($i = 1, 2, 3$) representa o i -ésimo termo do lado direito de (2.67).

Pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
G_1 &= -s\lambda^2 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi \Delta \psi \psi dx dt \\
&\leq \frac{1}{2} s^{-1} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi^{-1} |\Delta \psi|^2 dx dt \\
&\quad + 2s^3 \lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
G_2 &= -s\lambda^2 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi (\nabla \theta \cdot \nabla \psi) \psi dx dt \\
&= -\frac{s\lambda^2}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi (\nabla \theta \cdot \nabla |\psi|^2) dx dt \\
&= \frac{s\lambda^3}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi (\nabla \theta \cdot \nabla \eta^0) |\psi|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{s\lambda^2}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi \Delta \theta |\psi|^2 dx dt \\
&\leq s\lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi |\psi|^2 dx dt, \quad (2.69)
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
G_3 &= -s\lambda^3 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi (\nabla \eta^0 \cdot \nabla \psi) \psi dx dt \\
&= -\frac{s\lambda^3}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi (\nabla \eta^0 \cdot \nabla |\psi|^2) dx dt \\
&= \frac{s\lambda^3}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi (\nabla \eta^0 \cdot \nabla \theta) |\psi|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{s\lambda^4}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi |\nabla \eta^0|^2 |\psi|^2 dx dt \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \theta \xi \Delta \eta^0 |\psi|^2 dx dt \\
&\leq s\lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi |\psi|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Logo, combinando (2.67)-(2.70)

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int \int_{\omega \times (0,T)} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt &\leq \frac{1}{2} s^{-1} \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi^{-1} |\Delta \psi|^2 dx dt \\
&\quad + C \left(s^3 \lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi^3 |\psi|^2 dx dt \right. \\
&\quad \left. + s\lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi |\psi|^2 dx dt \right).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

A desigualdade (2.71) é suficiente para removermos a integral em $\omega \times (0, T)$ do termo $|\nabla \psi|^2$ no lado direito de (2.65). Assim, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\int \int_Q (s^{-1} \xi^{-1} (|\psi_t|^2 + |\Delta \psi|^2) + s\lambda^2 \xi |\nabla \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2) dx dt \\
&\leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha} |f|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \xi^3 |\psi|^2 dx dt \right),
\end{aligned} \tag{2.72}$$

para $\lambda \geq C$ e $s \geq C(T + T^2)$.

Finalmente voltaremos para nossa função original q . Sendo $q = e^{s\alpha} \psi$, segue diretamente por (2.72) que

$$\begin{aligned}
&\int \int_Q (s^{-1} \xi^{-1} (|\psi_t|^2 + |\Delta \psi|^2) + s\lambda^2 \xi |\nabla \psi|^2 + s^3 \lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2) dx dt \\
&\leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha} |f|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dx dt \right).
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Pelo fato que

$$\nabla q = e^{s\alpha} (\nabla \psi - s\lambda \nabla \eta^0 \xi \psi),$$

obtemos

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 dx dt &\leq C s \lambda^2 \int \int_Q \xi |\nabla \psi|^2 dx dt \\ &\quad + C s^3 \lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por (2.73) e (2.74) obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_Q (s^{-1} \xi^{-1} (|\psi_t|^2 + |\Delta \psi|^2) + s\lambda^2 \xi |\nabla q|^2 + s^3 \lambda^4 e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2) dx dt \\ \leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha} |f|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Consideremos agora a seguinte identidade:

$$\Delta \psi = e^{-s\alpha} (\Delta q + s\lambda \Delta \eta^0 \xi q + s\lambda^2 |\nabla \eta^0|^2 \xi q + 2s\lambda \xi \nabla \eta^0 \cdot \nabla q + s^2 \lambda^2 |\nabla \eta^0|^2 \xi^2 q).$$

Assim

$$\begin{aligned} s^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} |\Delta q|^2 dx dt &\leq C \left(s^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} |\Delta \psi|^2 dx dt + s\lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |q|^2 dx dt \right. \\ &\quad + s\lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |q|^2 dx dt + s\lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla q|^2 dx dt \\ &\quad \left. + s^3 \lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Temos também que

$$q_t = s\alpha_t q + e^{s\alpha} \psi_t, \quad (2.77)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} s^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} |q_t|^2 dx dt &\leq C \left(s^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt \right. \\ &\quad \left. + sT^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |q|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Tomando $\lambda \geq 1$, $s \geq C(T + T^2)$ e combinando (2.75)-(2.78), obtemos a desigualdade (2.19). ■

2.2 Controlabilidade nula no caso complexo

O objetivo desta seção é o estudo da controlabilidade nula para o problema (3). De maneira inteiramente análoga ao que fizemos na seção anterior, podemos afirmar

que, para obtermos um resultado de controlabilidade nula para este problema, é suficiente obtermos uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto de (3). Mais uma vez obteremos a observabilidade como consequência da desigualdade de Carleman. Assim, a obtenção dessa desigualdade nos levará a atingir nossa principal meta.

Somos levados a pensar que nosso problema seja talvez seja uma simples adaptação do caso real, mas infelizmente o caso complexo é, sem trocadilhos, de fato mais complexo.

Consideremos o seguinte sistema adjunto de (3):

$$\begin{cases} (-a + ib)\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(0) = \varphi_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.79)$$

Vamos agora ao principal resultado do nosso trabalho.

Teorema 2.2. *Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, então existe um $\lambda_0 > 0$, $s_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $s \geq s_0$ temos*

$$\begin{aligned} & s^{-1}\lambda^{-1} \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} (|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2) dxdt + s\lambda^2 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla\varphi|^2 dxdt \\ & + s^3\lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt \leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\alpha} |(-a + ib)\varphi_t + \Delta\varphi|^2 dxdt \right. \\ & \left. + s^3\lambda^4 \int \int_{\omega \times (0,T)} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 dxdt \right), \end{aligned} \quad (2.80)$$

em que φ é solução do problema (2.79).

Prova: Tomemos $q \in C^2(\overline{Q}, \mathbb{C})$ tal que $q = 0$ sobre Σ . Consideremos a mudança de variável

$$\psi = e^{-s\alpha} q \quad \text{ou} \quad q = e^{s\alpha} \psi.$$

Consideremos também a seguinte função

$$g = e^{-s\alpha} f,$$

em que $f = (-a + ib)q_t - \Delta q$. Observemos que

$$q_t = se^{s\alpha} \alpha_t \psi + e^{s\alpha} \psi_t,$$

e

$$\Delta q = e^{s\alpha} \Delta \psi + 2se^{s\alpha} \nabla \alpha \cdot \nabla \psi + s^2 e^{s\alpha} |\nabla \alpha|^2 \psi + se^{s\alpha} \Delta \alpha \psi.$$

Assim,

$$f = e^{s\alpha} \left((-a + ib)s\alpha_t\psi + (-a + ib)\psi_t + \Delta\psi + 2s\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + s^2|\nabla\alpha|^2\psi + s\Delta\alpha\psi \right).$$

Multiplicando a expressão acima por $e^{-s\alpha}$ obtemos

$$g = (-a + ib)\psi_t + (-a + ib)s\alpha_t\psi + \Delta\psi + 2s\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + s^2|\nabla\alpha|^2\psi + s\Delta\alpha\psi.$$

Considerando

$$\begin{aligned} I_1\psi &= ib\psi_t - as\alpha_t\psi + \Delta\psi + s^2|\nabla\alpha|^2\psi, \\ I_2\psi &= -a\psi_t + ibs\alpha_t\psi + 2s\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + s\Delta\alpha\psi, \end{aligned} \quad (2.81)$$

temos que

$$|I_1\psi|^2 + |I_2\psi|^2 + \int \int_Q (I_1\psi \overline{I_2\psi} + \overline{I_1\psi} I_2\psi) dxdt = |g|^2. \quad (2.82)$$

Como no caso real, nosso objetivo agora é obter uma estimativa para o termo $\int \int_Q (I_1\psi \overline{I_2\psi} + \overline{I_1\psi} I_2\psi) dxdt$. Multiplicando diretamente termo a termo e em seguida considerando a parte real, obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} I_1\psi \overline{I_2\psi} + \overline{I_1\psi} I_2\psi &= iab(\overline{\psi}_t\psi_t - \psi_t\overline{\psi}_t) + b^2s\alpha_t(\psi_t\overline{\psi} + \overline{\psi}_t\psi) \\ &\quad - ib2s[\overline{\psi}_t(\nabla\alpha \cdot \nabla\psi) - \psi_t(\nabla\alpha \cdot \nabla\overline{\psi})] - ibs\Delta\alpha(\overline{\psi}_t\psi - \psi_t\overline{\psi}) \\ &\quad + a^2s\alpha_t(\psi\overline{\psi}_t + \overline{\psi}\psi_t) - iabs^2|\alpha_t|^2(|\psi|^2 - |\overline{\psi}|^2) \\ &\quad - 2as^2\alpha_t[\psi(\nabla\alpha \cdot \nabla\overline{\psi}) + \overline{\psi}(\nabla\alpha \cdot \nabla\psi)] - as^2\alpha_t\Delta\alpha(\psi\overline{\psi} + \overline{\psi}\psi) \\ &\quad - a(\Delta\psi\overline{\psi}_t + \Delta\overline{\psi}\psi_t) - ibs\alpha_t(\Delta\psi\overline{\psi} - \Delta\overline{\psi}\psi) \\ &\quad + 2s[\Delta\psi(\nabla\alpha \cdot \nabla\overline{\psi}) + \Delta\overline{\psi}(\nabla\alpha \cdot \nabla\psi)] + s\Delta\alpha(\Delta\psi\overline{\psi} + \Delta\overline{\psi}\psi) \\ &\quad - as^2|\nabla\alpha|^2(\psi\overline{\psi}_t + \overline{\psi}\psi_t) - ibs^3\alpha_t|\nabla\alpha|^2(|\psi|^2 - |\overline{\psi}|^2) \\ &\quad + 2s^3|\nabla\alpha|^2[\psi(\nabla\alpha \cdot \nabla\overline{\psi}) + \overline{\psi}(\nabla\alpha \cdot \nabla\psi)] \\ &\quad + s^3|\nabla\alpha|^2\Delta\alpha(\psi\overline{\psi} + \overline{\psi}\psi) \\ &= \sum_{j=1}^{16} T_j, \end{aligned} \quad (2.83)$$

em que T_j ($j = 1, \dots, 16$) representa o j -ésimo termo de (2.83). Observemos que $T_1 = T_6 = T_{14} = 0$.

Tentaremos agora obter uma nova identidade, similar à identidade (2.83), combinando os termos da mesma. Por meio desta nova identidade, poderemos obter a estimativa desejada para o termo $I_1\psi\overline{I_2\psi} + \overline{I_1\psi}I_2$.

Analizando T_2 temos que

$$\begin{aligned} T_2 &= b^2 s \alpha_t (\psi_t \overline{\psi} + \overline{\psi}_t \psi) = b^2 s \alpha_t (|\psi|^2)_t \\ &= b^2 s (\alpha_t |\psi|^2)_t - b^2 s \alpha_{tt} |\psi|^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{T_3}{2} &= -ibs \nabla \cdot (\overline{\psi}_t (\nabla \alpha \psi) - \psi_t (\nabla \alpha \overline{\psi})) \\ &\quad + ibs (\nabla \overline{\psi}_t \cdot \nabla \alpha \psi - \nabla \psi_t \cdot \nabla \alpha \overline{\psi}) \\ &\quad + ibs \Delta \alpha (\overline{\psi}_t \psi - \psi_t \overline{\psi}) \\ &= L_1 + L_2 - T_4, \end{aligned} \quad (2.85)$$

em que L_i ($i = 1, 2$) corresponde ao i -ésimo elemento do lado direito de (2.85). E, ainda temos,

$$\begin{aligned} L_2 &= ibs (\nabla \overline{\psi}_t \cdot \nabla \alpha \psi - \nabla \psi_t \cdot \nabla \alpha \overline{\psi}) \\ &= ibs ((\nabla \overline{\psi} \cdot \nabla \alpha) \psi - (\nabla \psi \cdot \nabla \alpha) \overline{\psi})_t \\ &\quad - ibs ((\nabla \overline{\psi} \cdot \nabla \alpha_t) \psi - (\nabla \psi \cdot \nabla \alpha_t) \overline{\psi}) \\ &\quad - \frac{T_3}{2}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Combinando (2.85) e (2.86) obtemos,

$$\begin{aligned} T_3 + T_4 &= -ibs \nabla \cdot (\overline{\psi}_t (\nabla \alpha \psi) - \psi_t (\nabla \alpha \overline{\psi})) \\ &\quad + ibs ((\nabla \overline{\psi} \cdot \nabla \alpha) \psi - (\nabla \psi \cdot \nabla \alpha) \overline{\psi})_t \\ &\quad + ibs \nabla \alpha_t \cdot (\nabla \psi \overline{\psi} - \nabla \overline{\psi} \psi). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Para o termo T_5 segue que

$$\begin{aligned} T_5 &= a^2 s \alpha_t (\psi \overline{\psi}_t + \overline{\psi} \psi_t) = a^2 s \alpha_t (|\psi|^2)_t \\ &= a^2 s (\alpha_t |\psi|^2)_t - a^2 s \alpha_{tt} |\psi|^2. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \frac{T_7}{2} &= -2as^2 \nabla \cdot (\alpha_t \nabla \alpha |\psi|^2) \\ &\quad + 2as^2 (\nabla \alpha_t \cdot \nabla \alpha |\psi|^2) \\ &\quad - \frac{T_7}{2} - T_8, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} T_7 + T_8 &= -2as^2 \nabla \cdot (\alpha_t \nabla \alpha |\psi|^2) \\ &\quad + 2as^2 (\nabla \alpha_t \cdot \nabla \alpha |\psi|^2). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned} T_9 &= -a(\Delta \psi \bar{\psi}_t + \Delta \bar{\psi} \psi_t) \\ &= -a \nabla \cdot (\nabla \psi \bar{\psi}_t + \nabla \bar{\psi} \psi_t) + a(\nabla \psi \nabla \bar{\psi}_t + \nabla \bar{\psi} \nabla \psi_t), \end{aligned} \quad (2.90)$$

e

$$\begin{aligned} T_{10} &= -ibs \alpha_t (\Delta \psi \bar{\psi} - \Delta \bar{\psi} \psi) \\ &= -ibs \nabla \cdot (\alpha_t (\nabla \psi \bar{\psi} - \nabla \bar{\psi} \psi)) + ibs \nabla \alpha_t \cdot (\nabla \psi \bar{\psi} - \nabla \bar{\psi} \psi). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Para T_{11} , segue que

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2s(\Delta \psi (\nabla \alpha \cdot \nabla \bar{\psi}) + \Delta \bar{\psi} (\nabla \alpha \cdot \nabla \psi)) \\ &= s \nabla \cdot (\nabla \psi (\nabla \alpha \cdot \nabla \bar{\psi}) + \nabla \bar{\psi} (\nabla \alpha \cdot \nabla \psi)) - 2s(\Delta \alpha) |\nabla \psi|^2. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Para T_{12} e T_{13} deduzimos,

$$\begin{aligned} T_{12} &= s \Delta \alpha (\Delta \psi \bar{\psi} + \Delta \bar{\psi} \psi) \\ &= s \nabla \cdot ((\Delta \alpha) (\nabla \psi \bar{\psi} + \nabla \bar{\psi} \psi)) - s \nabla (\Delta \alpha) \cdot (\nabla \psi \bar{\psi} + \nabla \bar{\psi} \psi) \\ &\quad - 2s(\Delta \alpha) |\nabla \psi|^2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

e

$$\begin{aligned} T_{13} &= -as^2 |\nabla \alpha|^2 (\psi \bar{\psi}_t + \bar{\psi} \psi_t) = -as^2 |\nabla \alpha|^2 |\psi|_t^2 \\ &= -as^2 (|\nabla \alpha|^2 |\psi|^2)_t + 2as^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha_t |\psi|^2. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Para finalizar,

$$\begin{aligned} \frac{T_{15}}{2} &= 2s^3 \nabla \cdot (|\nabla \alpha|^2 \nabla \alpha |\psi|^2) \\ &\quad - 2s^3 (\nabla |\nabla \alpha|^2 \cdot \nabla \alpha |\psi|^2) \\ &\quad - \frac{T_{15}}{2} - T_{16}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} T_{15} + T_{16} &= 2s^3 \nabla \cdot (|\nabla \alpha|^2 \nabla \alpha |\psi|^2) \\ &\quad - 2s^3 (\nabla |\nabla \alpha|^2 \cdot \nabla \alpha |\psi|^2). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Por (2.84)-(2.95), obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
I_1\psi\overline{I_2\psi} + \overline{I_1\psi}I_2\psi &= \nabla \cdot [-ibs\nabla\alpha(\psi\overline{\psi}_t - \psi_t\overline{\psi}) - 2as^2\alpha_t\nabla\alpha|\psi|^2 \\
&\quad -a(\nabla\psi\overline{\psi}_t + \nabla\overline{\psi}\psi_t) - ibs\alpha_t(\nabla\psi\overline{\psi} - \nabla\overline{\psi}\psi) \\
&\quad +s(\nabla\psi(\nabla\alpha \cdot \nabla\overline{\psi}) + \nabla\overline{\psi}(\nabla\alpha \cdot \nabla\psi) + \Delta\alpha(\nabla\psi\overline{\psi} + \nabla\overline{\psi}\psi)) \\
&\quad +2s^3|\nabla\alpha|^2\nabla\alpha|\psi|^2] \\
&\quad + [b^2s\alpha_t|\psi|^2 + ibs((\nabla\alpha \cdot \nabla\overline{\psi})\psi - (\nabla\alpha \cdot \nabla\psi)\overline{\psi}) \\
&\quad + a^2s\alpha_t|\psi|^2 - as^2|\nabla\alpha|^2|\psi|^2]_t \\
&\quad -b^2s\alpha_{tt}|\psi|^2 + 2ibs\nabla\alpha_t \cdot (\nabla\psi\overline{\psi} - \nabla\overline{\psi}\psi) \\
&\quad -a^2s\alpha_{tt}|\psi|^2 + 4as^2(\nabla\alpha_t \cdot \nabla\alpha)|\psi|^2 + a(\nabla\psi\nabla\overline{\psi}_t + \nabla\overline{\psi}\nabla\psi_t) \\
&\quad -4s(\Delta\alpha)|\nabla\psi|^2 - s\nabla(\Delta\alpha) \cdot (\nabla\psi\overline{\psi} + \nabla\overline{\psi}\psi) \\
&\quad -2s^3(\nabla|\nabla\alpha|^2 \cdot \nabla\alpha)|\psi|^2,
\end{aligned} \tag{2.96}$$

em que simplesmente escreveremos

$$\begin{aligned}
(I_1\psi\overline{I_2\psi} + \overline{I_1\psi}I_2\psi) &= \nabla \cdot H_1 + (H_2)_t \\
&\quad + \sum_{j=1}^8 K_j,
\end{aligned} \tag{2.97}$$

em que H_1 representa todos os termos em que a divergência está aplicada, H_2 todos os termos que a derivação com respeito ao tempo está aplicada, e K_j representa o j -ésimo termo seguinte. Por (2.58) segue que

$$|K_1| \leq CT^2s\xi^3|\psi|^2. \tag{2.98}$$

Para K_2 , temos que

$$K_2 = 2ibs\nabla\alpha_t \cdot (\nabla\psi\overline{\psi} - \nabla\overline{\psi}\psi) = 2ibs\frac{T-2t}{t(T-t)}\xi\lambda\nabla\eta^0 \cdot (\nabla\psi\overline{\psi} - \nabla\overline{\psi}\psi). \tag{2.99}$$

Consequentemente

$$|K_2| \leq CT^3s\lambda\xi^2|\nabla\psi||\psi| \leq Cs\lambda\xi|\nabla\psi|^2 + Cs\lambda\xi^3|\psi|^2. \tag{2.100}$$

Novamente por (2.58),

$$|K_3| \leq CT^2s\xi^3|\psi|^2. \tag{2.101}$$

Para o termo K_4 obtemos

$$K_4 = -2as^2\xi^2(\nabla\alpha_t \cdot \nabla\alpha)|\psi|^2 = 2as^2\xi^2\lambda^2\frac{T-2t}{t(T-t)}|\nabla\eta^0|^2|\psi|^2,$$

concluindo que

$$|K_4| \leq Cs^2\lambda^2T^3\xi^3|\psi|^2. \quad (2.102)$$

Analizando K_6 temos

$$\begin{aligned} K_6 &= -4s(\Delta\alpha)|\nabla\psi|^2 = 4s\lambda^2|\nabla\eta^0|^2\xi|\nabla\psi|^2 + 4s\lambda\Delta\eta^0\xi|\nabla\psi|^2 \\ &= K_{61} + K_{62}. \end{aligned}$$

Notemos que K_{61} nos forenecerá a integral em Q de $|\nabla\psi|^2$ que se encontra do lado esquerdo da desigualdade (2.80). Por outro lado

$$|K_{62}| = 4s\lambda\Delta\eta^0\xi|\nabla\psi|^2 \leq Cs\lambda\xi|\nabla\psi|^2. \quad (2.103)$$

Para K_7 obtemos

$$\begin{aligned} K_7 &= -s\nabla(\Delta\alpha) \cdot (\nabla\psi\bar{\psi} + \nabla\bar{\psi}\psi) \\ &= s\lambda^3\xi|\nabla\eta^0|^2\nabla\eta^0 \cdot (\nabla\psi\bar{\psi} + \nabla\bar{\psi}\psi) \\ &\quad + s\lambda^2\xi\nabla|\nabla\eta^0|^2 \cdot (\nabla\psi\bar{\psi} + \nabla\bar{\psi}\psi) \\ &\quad + s\lambda\xi\nabla(\Delta\eta^0) \cdot (\nabla\psi\bar{\psi} + \nabla\bar{\psi}\psi) \\ &\quad + s\lambda^2\xi\Delta\eta^0\nabla\eta^0 \cdot (\nabla\psi\bar{\psi} + \nabla\bar{\psi}\psi) \end{aligned} \quad (2.104)$$

e para $\lambda \geq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} |K_7| &\leq Cs\lambda^3\xi|\nabla\psi||\psi| \leq C\lambda^2|\nabla\psi|^2 + Cs^2\lambda^4\xi^2|\psi|^2 \\ &\leq C\lambda^2T^2\xi|\nabla\psi|^2 + CT^2s^2\lambda^4\xi^3|\psi|^2. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Finalmente, para o termo K_8 temos

$$\begin{aligned} K_8 &= -2s^3(\nabla|\nabla\alpha|^2 \cdot \nabla\alpha)|\psi|^2 \\ &= 4s^3\lambda^4\xi^3|\nabla\eta^0|^4|\psi|^2 + 2s^3\lambda^3\xi^3\nabla|\nabla\eta^0| \cdot \nabla\eta^0|\psi|^2 \\ &= K_{81} + K_{82}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Notemos que K_{81} nos forenecerá a integral em Q de $|\psi|^2$ que se encontra do lado esquerdo da desigualdade (2.80), mais ainda

$$|K_{82}| \leq Cs^3\lambda^3\xi^3|\psi|^2. \quad (2.107)$$

Integrando (2.96) em Q obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_Q (I_1 \psi \overline{I_2 \psi} + \overline{I_1 \psi} I_2 \psi) dx dt &\geq s \int \int_{\Sigma} (\nabla \psi (\nabla \alpha \cdot \nabla \bar{\psi}) + \nabla \bar{\psi} (\nabla \alpha \cdot \nabla \psi)) \cdot \nu d\Sigma \\ &+ F\psi \end{aligned} \quad (2.108)$$

em que

$$F\psi = \sum_{j=1}^n \int_Q K_j dx dt.$$

Por (2.98)-(2.107), e utilizando o fato que

$$\int_Q K_5 dx dt = a \int_Q \frac{d}{dt} |\nabla \psi|^2 dx dt = 0,$$

obtemos, por procedimento inteiramente análogo ao do caso real, que

$$\begin{aligned} |F\psi| &\geq \int \int_Q s \lambda^2 \xi |\nabla \psi|^2 dx dt + \int \int_Q s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ &- \int \int_{\omega \times (0, T)} s \lambda^2 \xi |\nabla \psi|^2 dx dt - \int \int_{\omega \times (0, T)} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Considerando (2.108) temos, pelo mesmo argumento usado para obter (2.47), que $\frac{\partial \psi}{\partial n} \leq 0$ e, portanto

$$\begin{aligned} s \int \int_{\Sigma} (\nabla \psi (\nabla \alpha \cdot \nabla \bar{\psi}) + \nabla \bar{\psi} (\nabla \alpha \cdot \nabla \psi)) \cdot \nu d\Sigma &= -2s\lambda \int \int_{\Sigma} \frac{\partial \eta^0}{\partial n} \xi \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|^2 d\Sigma \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Assim, por (2.108), (2.109) e (2.110) conseguimos obter

$$\begin{aligned} |I_1 \psi|^2 + |I_2 \psi|^2 &+ \int \int_Q s \lambda^2 \xi |\nabla \psi|^2 dx dt + \int \int_Q s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ &\leq C \left(\int \int_{\omega \times (0, T)} s \lambda^2 \xi |\nabla \psi|^2 dx dt + \int \int_{\omega \times (0, T)} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt + |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.111)$$

De forma inteiramente análoga ao caso real, podemos acrescentar as integrais em Q dos termos $|\psi_t|^2$ e $|\Delta \psi|^2$, remover o termo local de $|\nabla \psi|^2$ e ainda voltar a variável original. ■

2.3 Considerações finais e problemas em aberto

Em se tratando do caso complexo, existem interessantes problemas que podemos tratar de maneira similar ao que fizemos na seção anterior e outros que ainda não possuem uma resposta.

Sistema Parabólico Geral Linear: Usando as mesmas técnicas de [9], é possível encontrar uma estimativa Carleman para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -(a - ib)\varphi_t - \Delta\varphi - B(x, t) \cdot \nabla\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com $a \in L^\infty(Q)$ e $B \in L^\infty(Q)^N$. Isto nos permite obter uma desigualdade de observabilidade e, portanto, controlabilidade nula para o problema

$$\begin{cases} (a + ib)y_t - \Delta y + \nabla \cdot (yB(x, t)) + a(x, t)y = v1_Q & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Condições de Fronteira: Seria possível obter controlabilidade nula para o problema

$$\begin{cases} (a + ib)y_t - \Delta y = v1_\omega & \text{em } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} + a(x, t)y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que $a \in L^\infty(\Sigma)$ e $y^0 \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$? Esta é uma questão em aberto.

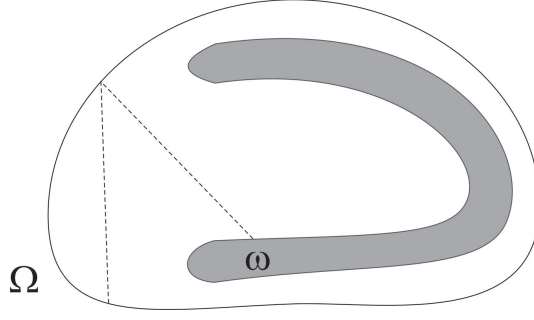
Controle na Fronteira: Outra questão interessante e ainda sem resposta é sobre a controlabilidade do seguinte sistema:

$$\begin{cases} (a + ib)y_t - \Delta y = 0 & \text{em } Q, \\ y = v1_\gamma & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que o controle atua na fronteira (ou em parte dela).

Importante salientar que para o caso real, todos estes resultados já são conhecidos (ver [9]).

Equação de Schrodinger: Em ([16]) Lebeau provou que para estudarmos a controlabilidade exata para a equação de Schrödinger, uma condição geométrica é requerida. Tal condição pode ser formulada exigindo que os raios que se propagam dentro de Ω que rebatem em sua fronteira atingem ω em um tempo T finito.



É possível obter uma versão da desigualdade de Carleman dada por

Lema 2.3. *Existe um $\lambda_0 > 0$, $s_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $s \geq s_0$ temos, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\begin{aligned} & s\lambda \int \int_Q e^{-2s\varphi} |\nabla q|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \int \int_Q e^{-2s\varphi} |q|^2 dxdt \\ & \leq C \left(\int \int_Q e^{-2s\varphi} |iq_t + \Delta q|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \int \int_{\Gamma_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha\theta} \left| \frac{\partial q}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \right) \end{aligned}$$

para toda $q \in C^2(\overline{Q}, \mathbb{C})$ com $q = 0$ em Σ .

No lema acima temos que

$$\varphi(x, t) = \frac{\beta - e^{\lambda\psi(x)}}{(T-t)(T+t)}, \quad \theta(x, t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{(T-t)(T+t)},$$

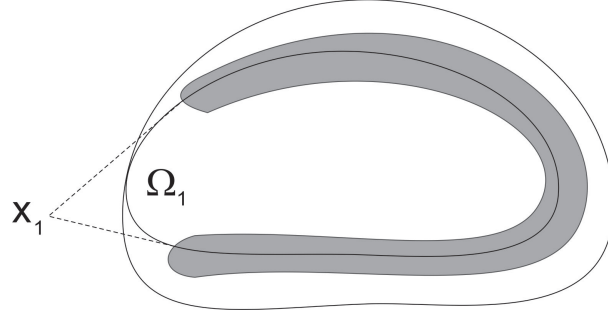
e ainda existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega : (x - x_0) \cdot \nu \geq 0\}$. Com esta desigualdade, é possível obter controlabilidade nula para o problema

$$\begin{cases} iy_t - \Delta y = 0 & \text{em } Q, \\ y = v1_\gamma & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.112)$$

Em outros termos, para o caso da equação de Schrödinger, é possível obter uma desigualdade de Carleman que resulte em controlabilidade nula com controle na fronteira. Entretanto, este resultado de controlabilidade nos garante uma controlabilidade com controle distribuído, ou seja, considerando o problema

$$\begin{cases} iy_t - \Delta y = v1_\omega & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.113)$$

em que ω é um aberto que satisfaz uma condição geométrica que mencionamos acima. Consideremos Ω_1 um novo domínio de tal forma que $\partial\Omega_1 \cap \omega \neq \emptyset$ e que exista $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_1) \cdot \nu > 0\} \subset \partial\Omega_1 \cap \omega$.



Alguns cálculos são necessários, mas a idéia é controlar nesse pedaço da fronteira de Ω_1 contido em ω e depois estender a solução para todo o Ω obtendo assim um controle distribuído que garante a controlabilidade nula (pela regularidade da equação de Schrödinger, esse controle não será uma função em $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$). Da mesma forma feita no trabalho, poderíamos pensar em obter uma desigualdade global de Carleman distribuída de modo a obtermos a controlabilidade nula por meio dela, entretanto o fato que na equação de Schrödinger o coeficiente é um número imaginário puro realmente gera muita dificuldade técnica. Podemos ser levados a pensar que na demonstração da desigualdade de Carleman para o problema complexo que fizemos, poderíamos ter simplesmente ter considerado $a = 0$ nos cálculos que tudo se comportaria da mesma forma. No entanto se observarmos a decomposição (2.81), se considerarmos $a = 0$ teríamos que adicionar os termos envolvendo $|\psi_t|^2$ e $|\Delta\psi|^2$ apenas com a equação $I_1\psi$ o que não é possível. Na verdade, esta desigualdade para a equação de Schrödinger é um problema em aberto.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A. and FOURNIER, J. J. F. *Sobolev spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics, v.140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] BAUDOIN, L. and PUEL, J. P. *Uniqueness and stability in a inverse problem for the Schrödinger equation*, Inverser Problems, v.18. p. 1537-1554. 2002.
- [3] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Dunod, Paris, 1999.
- [4] CAZENAVE, T. and HARAUX, A. *An introduction to semilinear evolution equations*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, v.13, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [5] DOUBOVA, A.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; GONZÁLEZ-BURGOS, M.; ZUAZUA, E. *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, SIAM J. Control Optim. v.41. p.798-819, 2002 .
- [6] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, v.19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [7] FABRE, C.; PUEL, J-P; ZUAZUA, E. *Approximate controllability of the semilinear heat equation*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. n. 1, p. 31-61, 1995.
- [8] FERNÁNDEZ-CARA, E. *Remarks on the controllability of some parabolic equations and systems*. Mat. Contemp. 32 (2007), 129–146.
- [9] FERNÁNDEZ-CARA, E. and GUERRERO, S. *Global Carleman Inequalities for Parabolic Systems and Applications to controllability*, SIAM J. CONTROL OPTIM, v. 45, n. 4, p. 1395-1446, 2006.

- [10] FERNÁNDEZ-CARA, E. and ZUAZUA, E. *Control Theory: History, mathematical achievements and perspectives*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. v.26. p. 79-140. 2003.
- [11] FU, X. *A weighted identity for a partial differential operator of second order and its applications*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, v.342,p.579-584, 2006.
- [12] FURSIKOV, A. V. and IMANUVILOV, O. Y. *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Note Series, v.34, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul, 1996.
- [13] HO, L. F. *Observabilité frontière de l'équation des ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math. v.302, p. 443-446. 1986.
- [14] LASIECKA, I.; TRIGGIANI, R.; ZHANG, X. *Global uniqueness, observability and stabilization of non conservative Schrödinger equations via point wise Carleman estimates, Part I: $H^1(\Omega)$ -estimates*, J.Inverse Ill-Posed Problem. v.12. p. 43-123. 2004.
- [15] LEBEAU, G. and ROBBIANO, L. *Contrôle Exacte de l'Équation de la Chaleur*, Communications in Partial Differential Equations, v. 20, p. 335-356, 1995.
- [16] LEBEAU, G., *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures Appl., 71 (1992), 267-291.
- [17] LI, H.; LÜ, Q.; ZHANG, X. *Recent progress on controllability/observability for systems governed by partial differential equations*, Jrl Syst Sci & Complexity. v.23. p. 1-19. 2010.
- [18] LIONS, J.-L., *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. v. 30. p.1-68. 1988.
- [19] LIONS, J.-L. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisations de Systèmes Distribués*, Tome 1,2, Rech. Math. Appl. v.8. Masson, Paris 1988.
- [20] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, v. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

- [21] RUSSEL, D.L. , *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions*, SIAM Rev., 20.
- [22] SCHWARTZ, L. *Theorie des Distributions*, Hermann, 1966.
- [23] SIMON, J. *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* . Annali di Matematica Pura ed Applicata CXLXVI (IV), 1987, 65-96.
- [24] ZHANG, X.; *Exact controllability of the semilinear plate equations*. Asymptotic Anal. v.27. p. 95-125. 2001.
- [25] ZUAZUA, E. *Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems*. Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland. v. 3. p. 527-621. Amsterdam, 2007.