Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações de Schrödinger Semilineares com Potencial Não-Regular no Infinito

Eudes Leite de Lima

João Pessoa – PB
Junho de 2013

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Equações de Schrödinger Semilineares com Potencial Não-Regular no Infinito

por

Eudes Leite de Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

João Pessoa – PB
Junho de 2013

L732e Lima, Eudes Leite de.
Equações de Schrödinger semilineares com potencial não-regular no infinito / Eudes Leite de Lima.-- João Pessoa, 2013.
79f.

Orientador: Uberlandio Batista Severo
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Equação de Schödinger. 3. Teorema de Linking. 4. Princípio da Criticalidade Simétrico.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Equações de Schrödinger Semilineares com Potencial Não-Regular no Infinito

por

Eudes Leite de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 14 de junho de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos – UFCG
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB
(Examinador Interno)

Aos meus pais

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

Ao professor Uberlandio, por toda a valiosa ajuda e pelas palavras de sabedoria. Aos professores Everaldo Medeiros e Jefferson dos Santos por participarem da banca, e a todos os outros professores do departamento, pelo incentivo durante essa etapa da minha formação acadêmica.

Aos meus colegas, pelos momentos compartilhados.

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas a existência, não-existência e regularidade de soluções para equações de Schrödinger semilineares do tipo

$$-\Delta u + a(x)u = |u|^{p-2}u, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $N \geq 2$, $p > 2$ se $N = 2$ e $2 < p < 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$ e o potencial $a(x)$ é uma função positiva que pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para obtenção dos resultados, usamos um Teorema de Linking e o Princípio da Criticalidade Simétrica.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger, Teorema de Linking, Princípio da Criticalidade Simétrica.

Abstract

In this work, we study issues related the existence, nonexistence and regularity of solutions to semilinear Schrödinger equations of type

$$-\Delta u + a(x)u = |u|^{p-2}u,\ u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

where $N \geq 2$, $p > 2$ if $N = 2$ and $2 < p < 2N/(N-2)$ if $N \geq 3$ and the potential $a(x)$ is a positive function that belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. To obtain the results, we use a Linking Theorem and the Principle of Symmetric Criticality.

Keywords: Schrödinger equation, Linking Theorem, Principle of Symmetric Criticality.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas na dissertação.

- X denota um espaço de Banach;
- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- id denota a aplicação identidade;
- C, C_1, C_2, ... denotam constantes positivas, possivelmente deferentes;
- $\Box$ denota o final de uma demonstração;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $x_n = o(1)$ denota que $x_n \to 0$;
- χ_A denota a função característica de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $supp(u)$ denota o suporte da função u;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função u;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, em que $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto

mensurável, com norma dada por

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Em particular, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, denotamos $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |u|_p$;

- $L^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 \; ; \; |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Em particular, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, denotamos $|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = |u|_\infty$;

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas de suporte compacto;

- $C^k(\Omega)$, com $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;

- $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;

- Para $1 \leq p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{c} \text{Existem} \quad g_1, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right. \right\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{1/p}.$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, escrevemos $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{1,p}$;

- Para $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p < \infty$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ para todo } i = 1, \ldots, N \right\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}.$$

Em particular, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, escrevemos $\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{m,p}$.

Introdução

Neste trabalho, seguindo idéias de Cerami e Molle em [7], estudamos questões relacionadas a existência, não-existência e regularidade de soluções para a equação de Schrödinger semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P}$$

onde $N \geq 2$, $2 < p < \infty$ se $N = 2$ e $2 < p < 2N/(N-2)$ se $N \geq 3$. O potencial $a(x)$ é uma função positiva pertencente a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com ínfimo positivo, mas que não é requerido ter um limite no infinito.

O interesse em problemas do tipo (P) é essencialmente devido a duas razões: primeiro, o fato de que tais problemas surgem naturalmente em vários ramos da Física Matemática e, segundo, a perda de compacidade, obstáculo desafiador para o uso de métodos variacionais usuais.

Equações do tipo (P), com

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty \geq 0,$$

foram extensivamente estudadas nas últimas décadas por diferentes autores, veja, por exemplo, [8], [14] e suas referências.

Esse tipo de problema é motivado também, por exemplo, na busca de soluções estacionárias da equação de Klein-Gordon não-linear

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha^2 v = f(v),$$

onde v é uma função complexa definida em $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, α é uma constante real e f é uma função dada que satisfaz

$$f(\beta e^{i\theta}) = f(\beta)e^{i\theta}, \quad \beta, \theta \in \mathbb{R}.$$

Por uma solução estacionária, entendemos uma função $v(x,t) = e^{i\omega t}u(x)$, em que $\omega \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Por exemplo, considerando $f(v) = |v|^{p-1}v$ vemos facilmente que f satisfaz a condição acima. Neste caso, se $v(x,t) = e^{i\omega t}u(x)$ é uma solução da equação de

Klein-Gordon, temos

$$-\omega^2 e^{i\omega t}u(x) - e^{i\omega t}\Delta u(x) + \alpha^2 e^{i\omega t}u(x) = |e^{i\omega t}u(x)|^{p-1}e^{i\omega t}u(x).$$

Logo, $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ deve satisfazer

$$-\Delta u + (\alpha^2 - \omega^2)u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x).$$

Fazendo $a_0 = \alpha^2 - \omega^2$, segue que u deve satisfazer a seguinte equação

$$-\Delta u + a_0 u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x),$$

que é do tipo considerado em nosso trabalho.

No estudo de soluções estacionárias dois tipos de questões surgem de maneira natural.

(i) Existem soluções estacionárias, isto é, a equação acima admite solução não trivial? Se sim, que tipo de propriedades para estas soluções podemos mostrar, isto é, qual a sua regularidade, qual seu decaimento no infinito. Podemos encontrar características variacionais para algumas destas soluções?

(ii) Se soluções estacionárias existem, são elas estáveis? Se não são estáveis, qual é a natureza da instabilidade?

O primeiro tipo de questão é relacionado ao estudo de soluções para problemas elípticos semilineares. Os métodos usados neste contexto são as vezes de natureza vairacional e soluções são obtidas por minimização sobre restrições ou argumentos do tipo minimax. O segundo tipo diz respeito a dinâmica da equação de evolução. Todavia, ambos os problemas são intimamente relacionados. De fato, informações de natureza variacional de soluções estacionárias são essenciais para obtenção de resultados de estabilidade ou instabilidade.

Como veremos, o problema (P) tem uma estrutura variacional bem formulada. Mais precisamente, suas soluções correspondem a pontos críticos do funcional energia

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

restrito a variedade

$$M = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ ; \ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\}.$$

Observe que M não é fracamente fechada na topologia de $H^1(\mathbb{R}^N)$ (ver [9], pag. 59) Portanto, métodos minimax e minimização não podem ser aplicados diretamente. Para obtenção dos resultados, usamos um Teorema de Linking e argumentos de minimização.

Nosso trabalho, está dividido em três capítulos e dois apêndices.

No *Capítulo* 1, estudamos resultados básicos que servirão de suporte para o desenvolvimento da dissertação. Além disso, fazemos uma exposição do problema que será abordado nos capítulos subsequentes.

O *Capítulo* 2 é dedicado aos resultados de regularidade e não-existência de solução para o problema (P). Mais precisamente, veremos que toda solução de (P) é suave e decai exponencialmente no infinito. Além disso, para uma classe significativa de potenciais $a(x)$, mostramos que o problema (P) não admite solução não-trivial.

No *Capítulo* 3, estudamos dois resultados de existência de solução para o problema (P). O primeiro deles, é uma situação mais simples onde (P) pode ser resolvido por minimização. Precisamente, provamos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Suponha que para todo* $\eta \in (0, \liminf_{|x|\to\infty} a(x) - \inf_{\mathbb{R}^N} a(x))$, *exista um raio* $\rho_\eta > 0$ *suficientemente grande tal que*

$$\sup_{B(x_\eta,\rho_\eta)} a(x) \leq \liminf_{|x|\to\infty} a(x) - \eta, \text{ para algum } x_\eta \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Então, o problema (P) tem pelo menos uma solução positiva.

O segundo teorema de existência para (P), o principal resultado da dissertação, analisa uma situação topológica mais complicada, na qual (P) não pode ser resolvido por minimização. De fato, provamos o seguinte teorema:

Teorema 0.2. *Suponha que o potencial* $a(x)$ *tem ínfimo positivo satisfaz as seguinte hipóteses:*

(H_1) $\lim_{\rho\to\infty} a(\rho e_1) = \lim_{\rho\to\infty} a(-\rho e_1) := \Theta$, *onde* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

(H_2) $\limsup_{\rho\to\infty} a(\rho\sigma) \to \Theta$, *quando* $\sigma \to e_1$ *e* $\sigma \to -e_1$.

(H_3) $a(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = a(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N)$, $\forall\, i = 2, \ldots, N$, $x \in \mathbb{R}^N$.

(H_4) *i)* $a(x) \geq \Theta$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$; *ii)* $|a - \Theta|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < (2^{1-2/p} - 1)\Theta$.

Então, o problema (P) tem pelo menos uma solução positiva.

Nosso roteiro para provar o Teorema 0.2 é o seguinte: primeiro, usando o Princípio da Criticalida Simétrica, vemos que é suficiente olhar para pontos críticos de E restrita a uma subvariedade de M adequada. Em seguida, provamos que E restrito a esta subvariedade satisfaz a condição de Palais-Smale em um determinado intervalo de energia. Por fim, uma aplicação de um Teorema de Linking, juntamente com o uso de uma aplicação do tipo baricentro adequada, permite concluir a existência de solução para o problema (P) e, com uma estimativa de sua energia concluímos que tal solução é positiva.

Finalmente, o *Apêndice A* é dedicado a diversos resultados utilizados ao longo dos Capítulos 1, 2 e 3. No *Apêndice B*, fazemos um estudo detalhado da aplicação baricentro, ferramenta importante na prova do Teorema 0.2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, provamos três resultados importantes que servem de base para o desenvolvimento da nossa dissertação, a saber: o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, um Teorema de Linking e o Princípio da Criticalidade Simétrica. Faremos também uma exposição sucinta do problema que será abordado nos capítulos subsequentes e as principais ferramentas necessárias para isto. Além disso, estabelecemos as notações necessárias para o bom entendimento do trabalho.

1.1 Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção, apresentamos o importante Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (já adaptado ao nosso contexto) e a definição da condição de Palais-Smale para um funcional restrito a uma subvariedade de um espaço de Banach. As idéias aqui abordadas podem ser encontradas em [14]. Sejam X um espaço de Banach e $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2. Considere a subvariedade de X definida por

$$M = \{u \in X \ ; \ J(u) = 1\}$$

e suponha que $J'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$. Nesta situação, considere:

Definição 1.1. *O espaço tangente de M em u é definido por*

$$T_uM := \{v \in X \ ; \ J'(u)v = 0\}.$$

Sejam $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e $u \in M$. A norma da derivada da restrição de I a M em u é definida por

$$\|I'(u)\|_* := \sup_{\substack{v \in T_uM \\ \|v\|=1}} I'(u)v. \tag{1.1}$$

O ponto u é ponto crítico da restrição de I a M se a restrição de $I'(u)$ a T_uM é igual a 0.

Para prosseguirmos, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.1. *Se $f, g \in X'$, então*

$$\sup_{\substack{g(v)=0 \\ \|v\|=1}} f(v) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Demonstração. Note primeiro que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup_{\substack{g(v)=0 \\ \|v\|=1}} f(v) = \sup_{\substack{g(v)=0 \\ \|v\|=1}} (f(v) - \lambda g(v)) \leq \sup_{\|v\|=1} (f - \lambda g)(v) = \|f - \lambda g\|,$$

ou seja,

$$\sup_{\substack{g(v)=0 \\ \|v\|=1}} f(v) \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Mostremos que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que vale a igualdade acima. Seja f_0 a restrição de f ao núcleo de g. Então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear contínuo f_1 definido em X tal que $f_1(x) = f_0(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Ker } g$ e

$$\|f_1\| = \|f_0\| = \sup_{\substack{g(v)=0 \\ \|v\|=1}} f(v).$$

Como $\text{Ker } g \subset \text{Ker } (f - f_1)$, usando argumentos de Álgebra Linear (Ver [11], Pag. 110), existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f - f_1 = \lambda_0 g$, ou seja, $f_1 = f - \lambda_0 g$. Portanto,

$$\sup_{\substack{g(v)=0 \\ \|v\|=1}} f(v) = \|f_1\| = \|f - \lambda g\|$$

o que prova o resultado. $\square$

A próxima proposição segue imediatamente do Lema 1.1.

Proposição 1.2. (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e $u \in M$. Então,*

$$\|I'(u)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|I'(u) - \lambda J'(u)\|.$$

Em particular, u é ponto crítico de $I|_M$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(u) = \lambda J'(u).$$

Finalizamos esta seção com uma importante definição.

Definição 1.2. *Dizemos que $I|_M$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, se toda sequência $(u_n) \subset M$, tal que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } \|I'(u_n)\|_* \to 0,$$

possui subsequência convergente.

1.2 Princípio da Criticalidade Simétrica

Antes de introduzirmos o Princípio da Criticalidade Simétrica, algumas definições são necessárias.

Definição 1.3. *Um grupo topológico G é um grupo munido de uma topologia tal que a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & gh^{-1} \end{array}$$

é contínua, quando se considera $G \times G$ com a topologia produto.

Definição 1.4. *Sejam G um grupo topológico e H um espaço normado. Uma ação de G em H é uma aplicação contínua*

$$\begin{array}{rcl} G \times H & \longrightarrow & H \\ (g,u) & \longmapsto & gu \end{array}$$

tal que

(i) $1_G \cdot u = u$, para todo $u \in H$.

(ii) $(gh)u = g(hu)$, para todo $g, h \in G$ e $u \in H$.

(iii) A aplicação $u \longmapsto gu$ é linear para cada $g \in G$.

Definição 1.5. *Considere a ação de uma grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado H.*

(i) O espaço de pontos invariantes desta ação é o subespaço fechado de H definido por

$$Fix(G) := \{u \in H \; ; \; gu = u, \; \forall \, g \in G\}.$$

(ii) Um conjunto $A \subset H$ é G-invariante se $g(A) = A$, para todo $g \in G$.

(iii) Um funcional $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é G-invariante se $J \circ g = J$, para todo $g \in G$.

(iv) Uma aplicação $f : H \longrightarrow H$ é G-invariante se $f \circ g = g \circ f$, para todo $g \in G$.

(v) A ação é dita isométrica se $\|gu\|_H = \|u\|_H$ para todo $g \in G$ e $u \in H$.

Agora, estamos em condições de provar o Princípio da Criticalidade Simétrica.

Teorema 1.3. (Princípio da Criticalidade Simétrica) *Suponha que a ação de um grupo topológico G sobre uma espaço de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ seja isométrica. Seja $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional* *de classe C^1 G-invariante. Se u é um ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, então u é um ponto crítico de I em H.*

Demonstração. Note que, para cada $g \in G$ e $u \in H$,

$$I'(gu)v = \lim_{t \to 0} \frac{I(gu + tv) - I(gu)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{I(g(u + tg^{-1}v)) - I(gu)}{t}, \ \forall\, v \in H,$$

e desde que I é G-invariante, temos

$$I'(gu)v = \lim_{t \to 0} \frac{I(u + tg^{-1}v) - I(u)}{t} = I'(u)(g^{-1}v), \ \forall\, v \in H. \tag{1.2}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, podemos definir $\nabla I : H \longrightarrow H$ por

$$\langle I'(u), v \rangle = \langle \nabla I(u), v \rangle \text{ e } \|I'(u)\| = \|\nabla u\|_H.$$

Logo, por (1.2), segue que

$$\langle \nabla I(gu), v \rangle = I'(gu)v = I'(u)(g^{-1}v) = \langle \nabla I(u), g^{-1}v \rangle, \ \forall\, v \in H. \tag{1.3}$$

Afirmamos que ∇I é G-invariante, isto é,

$$g \circ \nabla I = \nabla I \circ g, \ \forall\, g \in G.$$

De fato, temos que

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}v\|_H^2 = \|\nabla I(u)\|_H^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v \rangle + \|g^{-1}v\|_H^2$$

e como a relação é isométrica, obtemos

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}v\|_H^2 = \|\nabla I(u)\|_H^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v \rangle + \|v\|_H^2, \ \forall\, v \in H. \tag{1.4}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|g\nabla I(u) + v\|_H^2 &= \|g\nabla I(u)\|_H^2 + 2\langle g\nabla I(u), v \rangle + \|v\|_H^2 \\ &= \|\nabla I(u)\|_H^2 + 2\langle g\nabla I(u), v \rangle + \|v\|_H^2, \ \forall\, v \in H. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \|g\nabla I(u) + v\|_H^2 &= \|g\nabla I(u) + g(g^{-1}v)\|_H^2 \\ &= \|\nabla I(u) + g^{-1}v\|_H^2, \ \forall\, v \in H \end{aligned}$$

tem-se de (1.4) e (1.5) que

$$\langle \nabla I(u), g^{-1}v \rangle = \langle g\nabla I(u), v \rangle.$$

Por (1.3)

$$\langle \nabla I(gu), v \rangle = \langle g\nabla I(u), v \rangle,\ \forall\, v \in H,$$

donde segue que

$$\nabla I(gu) = g\nabla I(u). \tag{1.6}$$

Agora, vamos mostrar que u é ponto crítico de I em H. Como $u \in Fix(G)$, $gu = u$, para todo $g \in G$. De (1.6)

$$\nabla I(u) \in Fix(G).$$

Como u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, temos

$$\langle \nabla I(u), v \rangle = I'(u)v = 0,\ \forall\, v \in Fix(G),$$

ou seja,

$$\nabla I(u) \in Fix(G)^{\perp}.$$

Portanto,

$$\nabla I(u) \in Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp}$$

mostrando que $\nabla I(u) = 0$ em H, donde segue que u é um ponto crítico de I em H. □

1.3 Teorema de Linking

Vamos, agora, estudar um Teorema de Linking. Para tanto, começamos introduzindo algumas definições e resultados. Seguiremos as idéias de [13]. Sejam X um espaço de Banach e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 definido em X. Dado $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned} I_c &= \{u \in X\ ;\ I(u) < c\}, \\ K_c &= \{u \in X\ ;\ I(u) = c, I'(u) = 0\}, \end{aligned}$$

isto é, K_c é o conjunto de todos os pontos críticos de I com energia c.

A principal ferramenta para demonstrar o Teorema de Linking é o Lema da Deformação que enunciamos a seguir.

Lema 1.4. (Lema da Deformação) *Suponha que $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 satisfazendo a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$. Sejam $\overline{\varepsilon} > 0$ dado e N uma vizinhança qualquer de K_c. Então, existe um número $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e uma família a 1-parâmetro contínua de homeomorfismos $\Psi(\cdot, t)$ de X, $0 \leq t < \infty$, com as seguintes propriedades:*

(i) $\Psi(u,t) = u$, *se* $t = 0$, *ou* $I'(u) = 0$, *ou* $|I(u) - c| \geq \overline{\varepsilon}$.

(ii) $I(\Psi(u,t))$ *é não-crescente em* t *para qualquer* $u \in X$.

(iii) $\Psi(I_{c+\varepsilon} \backslash N, 1) \subset I_{c-\varepsilon}$ *e* $\Psi(I_{c+\varepsilon}, 1) \subset I_{c-\varepsilon} \cup N$.

Além disso, $\Psi : X \times [0,\infty) \longrightarrow X$ *satisfaz* $\Psi(\cdot,t) \circ \Psi(\cdot,t) = \Psi(\cdot, s+t)$, *para todo* $s,t \geq 0$. *A aplicação* Ψ *é chamada de fluxo pseudo-gradiente.*

Demonstração. Ver [13], pag. 83. □

Definiremos agora a noção topológica de "link".

Definição 1.6. *Sejam* S *um subconjunto fechado de um espaço de Banach* X *e* Q *uma subvariedade de* X *com fronteira relativa* ∂Q. *Dizemos que* S *e* ∂Q *"link" se*

(i) $S \cap \partial Q = \emptyset$, *e*

(ii) Para qualquer aplicação $h \in C(X,X)$ *tal que* $h|_{\partial Q} = id$, *então* $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.

Mais geralmente, se S *e* Q *são como acima e* Γ *é um subconjunto de* $C(X,X)$, *dizemos que* S *e* ∂Q *"link"com respeito a* Γ, *se satisfazem* (i) *e* (ii) *para qualquer* $h \in \Gamma$.

Vejamos alguns exemplos de "link". Para tanto, utilizaremos argumentos de Teoria do Grau de Brouwer (Ver, por exemplo, [10], Pags. 16 e 17, Teorema 3.1)

Exemplo 1.1. Seja X um espaço de Banach e suponha que X admite uma decomposição em soma direta de subespaços fechados X_1 e X_2, com dim$X_2 < \infty$, ou seja, $X = X_1 \oplus X_2$. Definimos $S = X_1$ e $Q = B_{X_2}(0,R)$, com $R > 0$, a bola de centro 0 e raio R em X_2.

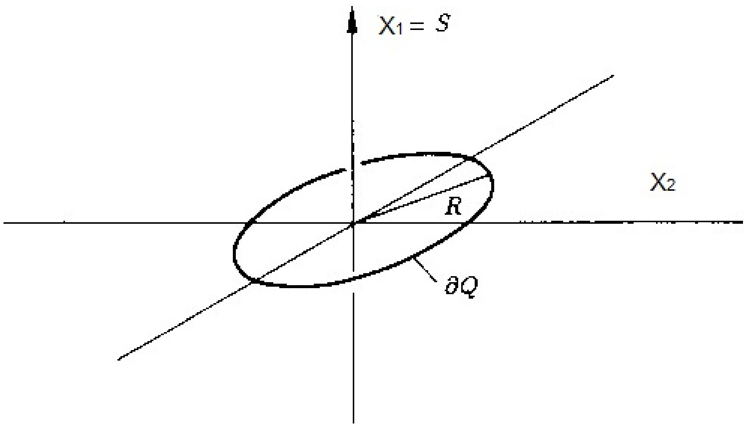

Figura 1.1: scale = 0.75

Afirmamos que S e ∂Q "link". De fato, comece observando que a fronteira relativa de Q é dada por

$$\partial Q = \{u \in X_2 \; ; \; \|u\| = R\}.$$

Defina agora $\pi : X \longrightarrow X_2$ a projeção de X em X_2. Sabemos que π e contínua. Seja $h : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua tal que $h|_{\partial Q} = id$. Considere a seguinte aplicação: $\tilde{h} : [0,1] \times X_2 \longrightarrow X_2$

definida por

$$\tilde{h}(t,u) = t\pi(h(u)) + (1-t)u.$$

É claro que $\tilde{h}$ está bem definida e, para cada $t \in [0,1]$, a aplicação $\tilde{h}(t,\cdot) : X_2 \longrightarrow X_2$ é contínua. Note também que

$$\tilde{h}(0,\cdot) = id \qquad \text{e} \quad \tilde{h}(1,\cdot) = \pi \circ h.$$

Logo, $\tilde{h}$ define uma homotopia entre id e $\pi \circ h$. Além disso, se $u \in \partial Q$, então

$$\tilde{h}(t,u) = t\pi(h(u)) + (1-t)u = t\pi(u) + (1-t)u = u, \tag{1.7}$$

ou seja, $\tilde{h}(t,\cdot)|_{\partial Q} = id$. Segue que o grau topológico $deg(\tilde{h}(t,\cdot), Q, 0)$ está bem definido para todo $t \in [0,1]$. Pela invariância homotópica e normalização do grau de Brouwer, podemos concluir que

$$deg(\pi \circ h, Q, 0) = deg(id, Q, 0) = 1. \tag{1.8}$$

Assim, $0 \in \pi(h(Q))$ (ver [10], pag. 16, propriedade (d4) no Teorema 3.1). Mas, isto significa dizer que existe $x \in Q$ tal que

$$\pi(h(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) \in X_2 = S \quad \Rightarrow \quad h(Q) \cap S \neq \emptyset, \tag{1.9}$$

como queríamos.

Exemplo 1.2. Seja X um espaço de Banach e suponha que X admite uma decomposição em soma direta de subespaços fechados X_1 e X_2, com $\dim X_2 < \infty$. Considere $u_1 \in X_1$, com $\|u_1\| = 1$, e $R_1, R_2, \rho > 0$ tais que $\rho < R_1$. Defina

$$S = \{u \in X_1 \; ; \; \|u\| = \rho\}$$
$$Q = \{\lambda u_1 + u_2 \; ; \; 0 \leq \lambda \leq R_1, u_2 \in X_2, \|u_2\| \leq R_2\}.$$

Provemos que S e ∂Q "link". Primeiramente, observe que

$$\partial Q = \{\lambda u_1 + u_2 \in Q \; ; \; \lambda \in \{0, R_1\} \quad \text{ou} \quad \|u_2\| = R_2\}.$$

Como no exemplo anterior, sejam $\pi : X \longrightarrow X_2$ a projeção sobre X_2 e $h : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua tal que $h|_{\partial Q} = id$. Defina agora $\tilde{h} : [0,1] \times \mathbb{R} \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R} \times X_2$ por

$$\tilde{h}(t,\lambda,u_2) = \left(t\|h(u) - \pi(h(u))\| + (1-t)\lambda - \rho, t\pi(h(u)) + (1-t)u_2\right),$$

onde $u = \lambda u_1 + u_2$. Observe que $\tilde{h}$ está bem definida e, para cada $t \in [0,1]$, a aplicação $\tilde{h}(t,\cdot,\cdot)$:

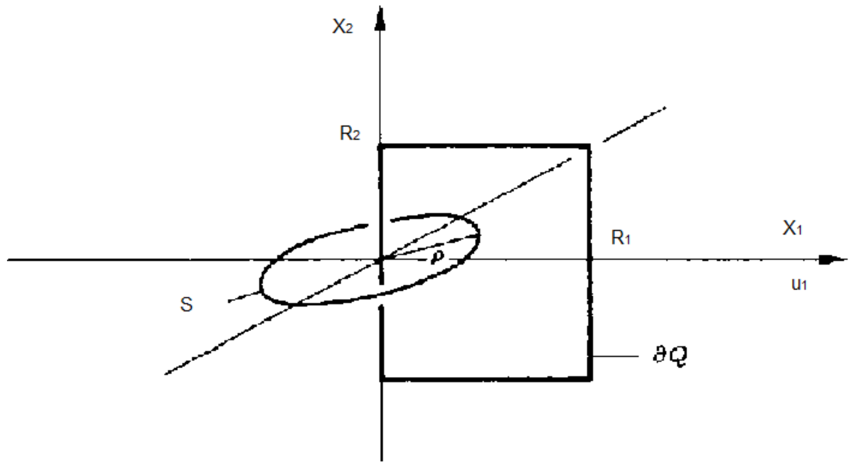

Figura 1.2: scale = 0.60

$\mathbb{R} \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R} \times X_2$ é contínua. Note também que

$$\tilde{h}_0(\lambda, u_2) := \tilde{h}(0, \lambda, u_2) = (\lambda - \rho, u_2) \quad \text{e} \quad \tilde{h}_1(\lambda, u_2) := \tilde{h}(1, \lambda, u_2) = (\|h(u) - \pi(h(u))\| - \rho, \pi(h(u))).$$

Logo, $\tilde{h}$ define uma homotopia de $\tilde{h}(0, \lambda, u_2)$ com $\tilde{h}(1, \lambda, u_2)$. Além disso, se $u = \lambda u_1 + u_2 \in \partial Q$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t, \lambda, u_2) &= (t\|u - u_2\| + (1-t)\lambda - \rho, u_2) \\ &= (t\|\lambda u_1\| + (1-t)\lambda - \rho, u_2) \\ &= (\lambda - \rho, u_2) \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, se identificarmos Q com um subconjunto de $\mathbb{R} \times X_2$ via a decomposição $u = \lambda u_1 + u_2$, o grau topológico $deg(\tilde{h}(t, \cdot, \cdot), Q, 0)$ está bem definido e, pela invariância homotópica, temos

$$deg(\tilde{h}_1, Q, 0) = deg(\tilde{h}_0, Q, 0) = 1.$$

Segue então que existe $u = \lambda u_1 + u_2 \in Q$ tal que

$$\tilde{h}_1(s, u_2) = \tilde{h}(u) = 0,$$

ou seja,

$$\pi(h(u)) = 0 \quad \text{e} \quad \|h(u)\| = \rho \quad \Rightarrow \quad h(u) \in X_1 \quad \text{e} \quad \|h(u)\| = \rho.$$

Portanto, $h(u) \in S$ e, consequentemente, $h(Q) \cap S \neq \emptyset$, como desejado.

Agora, provemos o Teorema de Linking.

Teorema 1.5. (Teorema de Linking) *Seja $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Considere um subconjunto fechado $S \subset X$ e uma subvariedade $Q \subset X$ com fronteira relativa ∂Q. Suponha que*

(i) S e ∂Q "link",

(ii) $\alpha = \inf\limits_{u \in S} I(u) > \sup\limits_{u \in \partial Q} I(u) = \alpha_0$.

Seja

$$\Gamma = \{h \in C(X, X) \; ; \; h|_{\partial Q} = id\}.$$

Suponha que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} I(h(u)).$$

Então, $c \geq \alpha$ e c é um valor crítico de I.

Demonstração. Primeiramente, seja $h \in \Gamma$. Como S e ∂Q "link", segue que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$. Logo,

$$\sup_{u \in Q} I(h(u)) \geq \inf_{u \in S} I(u) \quad \Rightarrow \quad c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} I(h(u)) \geq \alpha.$$

Para provar a segunda parte, suponha, por contradição, que $K_c = \emptyset$. Para $\overline{\varepsilon} = \alpha - \alpha_0 > 0$ e $N = \emptyset$, sejam $\varepsilon > 0$ e $\Psi : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ o fluxo pseudo-gradiente dado pelo Lema da Deformação. Pela escolha de $\overline{\varepsilon}$, temos que $\Psi(\cdot, t)|_{\partial Q} = id$ para todo t, pois se $u \in \partial Q$, então

$$I(u) - c \leq I(u) - \alpha \leq \alpha_0 - \alpha = -\overline{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |I(u) - c| \geq \overline{\varepsilon}.$$

Escolha $h \in \Gamma$ tal que $I(h(u)) < c+\varepsilon$ para todo $u \in Q$, ou seja, $h(u) \in I_{c+\varepsilon}$. Defina $h_1 = \Psi(\cdot, 1) \circ h$. Então, $h_1 \in \Gamma$, pois se $u \in \partial Q$ temos

$$h_1(u) = \Psi(h(u), 1) = \Psi(u, 1) = u.$$

Além disso, pelo item (iii) do Lema da Deformação, segue que

$$\Psi(h(u), 1) \in I_{c-\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad h_1(u) \in I_{c-\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad I(h_1(u)) < c - \varepsilon,$$

contradizendo a definição de c. Portanto, c é um valor crítico de I. □

Observação 1.1. Observe que a demonstração do Teorema de Linking depende exclusivamente da existência do fluxo pseudo-gradiente para o funcional I, dado pelo Lema da Deformação. Como o fluxo pseudo-gradiente existe para funcionais $I \in C^1(M)$ (ver [13], pag. 87), onde M é uma subvariedade de X, satisfazendo a condição de Palais-Smale em um certo nível $c \in \mathbb{R}$, o Teorema de Linking continua válido para funcionais definidos em M desde que $S, Q \subset M$.

1.4 O Problema

No que segue, apresentamos o problema que iremos abordar em nosso trabalho e a noção de solução fraca para o mesmo. Mais especificamente, vamos considerar o seguinte problema semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P}$$

onde $2 < p < \infty$ se $N \geq 2$, e $2 < p < 2^* := \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$. O potencial $a(x)$ é uma função satisfazendo

$$a \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{ e } \quad a_0 := \inf_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0. \tag{1.10}$$

Note que o potencial $a(x)$ pode não ter um limite no infinito.

Antes de definirmos o que entendemos por solução fraca para (P), estabeleceremos algumas notações. Sempre que $a(x)$ for um potencial satisfazendo (1.10), definimos:

$$l := \liminf_{|x|\to\infty} a(x) \quad \text{ e } \quad L := \limsup_{|x|\to\infty} a(x).$$

Aqui, vamos considerar o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + lu^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, considerando em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ a norma

$$\|u\|_a := \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

e lembrando que estamos supondo as condições em (1.10), então é simples concluírmos que as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ são equivalentes. Portanto, se tomarmos o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_a$ em vez de $\|\cdot\|$, obtemos o mesmo espaço (topológico) $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Voltemos para a noção de solução fraca para (P). Diremos que uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (P) se

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx = 0, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

A idéia, agora, é associar soluções fracas do problema (P) a pontos críticos de um funcional apropriado, definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Considere o funcional $E : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx.$$

É claro que E é um funcional de classe C^1 e sua derivada em $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$E'(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Daqui em diante, denotaremos por M a subvariedade de $H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$M = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ;\ J(u) = 1\right\},$$

onde $J : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ é o funcional dado por

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx. \tag{1.11}$$

Note que J é um funcional de classe C^2 (Ver, [14], pag. 9). Afirmamos que, a partir de um ponto crítico de E restrito a subvariedade M, obtemos uma solução fraca de (P). De fato, seja $u \in M$ um ponto crítico de E restrito a M. Então, pela Proposição 1.2, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = \lambda_0 p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{2}$, podemos escrever a igualdade acima da seguinte maneira

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = \lambda p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.12}$$

Em particular, se $v = u$, temos

$$\lambda p = \|u\|_a^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

Considere $\bar{u} = (\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}\, u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$u = \frac{\bar{u}}{(\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}}$$

e por (1.12), obtemos

$$\frac{1}{(\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}}\left[\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u} \nabla v + a(x)\bar{u}v)dx\right] = \frac{\lambda p}{\lambda p\,(\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}vdx, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u} \nabla v + a(x)\bar{u}v)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}vdx = 0, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (P) com o mesmo sinal de u. Concluímos, dos argumentos acima, que para encontrar uma solução fraca do problema (P), é suficiente derterminar um ponto crítico do funcional E restrito a subvariedade M.

Finalmente, para finalizar esta seção, definamos os números

$$m := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + lu^2)dx\ ;\ u \in M\right\} = \inf_{u\in M}\|u\|^2 \tag{1.13}$$

$$m_a := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx\ ;\ u \in M\right\} = \inf_{u\in M}E(u) \tag{1.14}$$

e consideremos a seguinte proposição:

Proposição 1.6. *O ínfimo*

$$m = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + lu^2)dx\ ;\ u \in M\right\}$$

é atingido por uma função positiva ω de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ que é única, módulo translação, radialmente simétrica e verifica

$$\lim_{|x|\to\infty}|D^j\omega(x)||x|^{\frac{N-1}{2}}e^{\sqrt{l}}|x| = d_j > 0, \quad \textit{para} \quad j = 1, 2.$$

Além disso, para qualquer outro ponto crítico v de $\|\cdot\|^2$ restrito a M, vale a seguinte desigualdade

$$\|v\|^2 \geq 2^{1-2/p}m.$$

Demonstração. Ver [1], [8] e suas referências. □

Capítulo 2

Regularidade e Não-Existência de Solução para o Problema (P)

Neste capítulo, estudamos resultados de regularidade, comportamento assintótico e não-existência de solução para o problema (P):

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P}$$

onde $2 < p < \infty$ se $N \geq 2$, e $2 < p < 2^* := \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e o potencial $a(x)$ satisfaz (1.10).

2.1 Resultado de Regularidade

Nesta seção, estudamos um resultado de regularidade para o problema (P). Mais precisamente, provamos que toda solução fraca do problema (P) é uma função suave com decaimento exponencial no infinito.

Teorema 2.1. *Sejam $a(x)$ um potencial satisfazendo* (1.10) *e u uma solução fraca de (P). Então, existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$|u(x)| \leq ce^{-\delta|x|},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

$$|\nabla u| \in L^q(\mathbb{R}^N),\ \forall\, q > 1,\ \ e \ \lim_{|x|\to\infty} |\nabla u| = 0. \tag{2.2}$$

Demonstração. Fazemos a demonstração em duas etapas. Primeiro, provamos que

$$u(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty,$$

e, em seguida, mostramos o decaimento exponencial e a somabilidade das derivadas.

Etapa 1. Comece observando que podemos escrever a equação em (P) como

$$-\Delta u + u = |u|^{p-2}u + (1 - a(x))u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Agora, considere os seguintes problemas:

$$-\Delta u_1 + u_1 = (1 - a(x))u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.3}$$

$$-\Delta u_2 + u_2 = |u|^{p-2}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Segue do Teorema da Representação de Riesz que existem únicos u_1 e u_2 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ soluções de (2.3) e (2.4), respectivamente. Logo, $u_1 + u_2$ é solução do problema

$$-\Delta(u_1 + u_2) + (u_1 + u_2) = |u|^{p-2}u + (1 - a(x))u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$-\Delta(u_1 + u_2) + (u_1 + u_2) = -\Delta u + u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

ou ainda,

$$-\Delta(u_1 + u_2 - u) + (u_1 + u_2 - u) = 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Como a função identicamente nula é a única solução do problema acima, concluímos que

$$u = u_1 + u_2.$$

Suponha inicialmente $N \geq 3$. Então,

$$2 < p < 2^* =: p_0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2N - \sigma}{N - 2}, \text{ para algum } \sigma \in (0, 4).$$

Pelo mergulho $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_0^p(\mathbb{R}^N)$, temos $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^N)$ e, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$(1 - a(x))u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad |u|^{p-2}u \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } q_1 = \frac{p_0}{p - 1} < p_0.$$

Pela Proposição $A.1$(ii) (ver Apêndice A), segue que

$$u_1 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,p_0}(\mathbb{R}^N) \tag{2.5}$$

$$u_2 \in W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N). \tag{2.6}$$

Consideremos dois casos:

(i) $2q_1 > N$.

Então, como $p_0 > q_1$, obtemos $2p_0 > 2q_1 > N$, donde segue que

$$\frac{1}{2q_1} < \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2p_0} < \frac{1}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q_1} - \frac{2}{N} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N} < 0.$$

Pelo Teorema $A.2$ (ver Apêndice A), concluímos que $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$|u_i|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B(0,r)})} \leq C\|u_i\|_{W^{2,q_1}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B(0,r)})}, \ \forall\, i = 1, 2, \ \forall\, r > 0,$$

onde C e uma constante independente do domínio. Tomando o limite quando $r \to \infty$ na desigualdade acima, segue do Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema $A.5$, Apêndice A) de Lebesgue que $\lim\limits_{|x| \to \infty} u_i(x) = 0$, o que conclui a primeira etapa neste caso.

(ii) $2q_1 \leq N$.

Neste caso,

$$2q_1 \leq N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q_1} - \frac{2}{N} \geq 0.$$

Novamente, pelo Teorema $A.2$, segue de (2.6) e (2.5) que

$$u_2 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N), \ \text{onde } p_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{q_1} - \dfrac{2}{N}\right)^{-1} = \left(\dfrac{N+2-\sigma}{2N} - \dfrac{2}{N}\right)^{-1} = \dfrac{2N}{N-2-\sigma} (> p_0), \\ \text{se } 2q_1 < N; \\ \\ p_1 > p_0, \quad \text{de modo que} \quad 2\dfrac{p_1}{p-1} > N, \ \text{se } 2q_1 = N \end{cases}$$

$$u_1 \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{s_1}(\mathbb{R}^N), \quad \text{onde} \quad s_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{p_0} - \dfrac{2}{N}\right)^{-1} = \dfrac{Np_0}{N - 2p_0} (> p_1), & se \quad 2p_0 < N \\ s_1 > p_1, & se \quad 2p_0 \geq N. \end{cases}$$

Usando interpolação (ver Proposição $A.3$, Apêndice A) para u_1, temos que $u_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Como $u_2 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$, obtemos $u \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$, de onde segue que

$$u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, aplicando mais uma vez a Proposição $A.1$(ii) a (2.3) e (2.4), vemos que

$$u_1 \in W^{2,2} \cap W^{2,p_1}(\mathbb{R}^N)$$

$$u_2 \in W^{2,q_2}(\mathbb{R}^N), \quad \text{onde} \quad q_2 = \frac{p_1}{p-1} > q_1.$$

Note que $p_1 > q_2$. Assim, se $2q_2 > N$ podemos usar o mesmo argumento de (i) e concluir o resultado nesta situação. Caso contrário, ou seja, $2q_2 \leq N$, repetimos o argumento acima e, definindo $\bar{p} = p - 1$, obtemos que

$$u_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N), \quad \text{onde} \quad p_2 = \begin{cases} \dfrac{2N}{(N-2)-(1-\bar{p})\sigma}(> p_1), & se \quad 2q_2 < N \\ p_2 > p_1, \quad \text{de modo que} \quad 2\dfrac{p_2}{\bar{p}} > N, & se \quad 2q_1 = N \end{cases}$$

$$u_1 \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{s_2}(\mathbb{R}^N), \quad \text{onde} \quad s_2 = \begin{cases} \dfrac{Np_1}{N-2p_1}(> p_2), & se \quad 2p_1 < N \\ s_2 > p_2, & se \quad 2p_0 \geq N. \end{cases}$$

Logo, por interpolação, segue que $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$.

Interagindo esse procedimento, encontramos números q_k e p_k tais que

$$q_k > q_{k-1}, \quad p_k > p_{k-1} \quad \text{e} \quad q_{k+1} = \frac{p_k}{\bar{p}}(\Rightarrow p_k > q_{k+1}).$$

Além disso,

$$u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_k}(\mathbb{R}^N)$$

$$u_1 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,p_k}(\mathbb{R}^N)$$

$$u_2 \in W^{2,q_{k+1}}(\mathbb{R}^N)$$

$$p_k = \frac{Nq_k}{N-2q_k} = \frac{2N}{(N-2)-(1+\bar{p}+\cdots+\bar{p}^{k-1})\sigma} \tag{2.7}$$

$$q_{k+1} = \frac{2N}{(N-2)-(1+\bar{p}+\cdots+\bar{p}^{k-1})\sigma}.\frac{N-2}{N+2-\sigma}.$$

Em particular, (2.7) implica que

$$\text{sinal}(N-2q_k) = \text{sinal}[(N-2)-(1+\bar{p}+\cdots+\bar{p}^{k-1})\sigma].$$

Como $\bar{p} = p - 1 > 1$, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$(N-2)-(1+\bar{p}+\cdots+\bar{p}^{\bar{k}-1})\sigma < 0,$$

ou seja,

$$N - 2q_{\bar{k}} < 0 \quad \Rightarrow \quad N < 2q_{\bar{k}}.$$

Podemos então repetir o argumento de (i) e concluir a demonstração da etapa 1 no caso $N \geq 3$. Para o caso $N = 2$, o mesmo argumento do caso $N \geq 3$, agora com o mergulho de $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 2$, conclui esta etapa.

Etapa 2. Escrevendo $u = u^+ + u^-$, vemos que é suficiente mostrar o resultado para u^+ e u^-. Provamos apenas para u^+. O argumento para u^- é análogo. Primeiro, note que u^+ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{l}{2}u = u^{p-1} - \left(a(x) - \dfrac{l}{2}\right)u, & \text{em} \quad \Omega^+ \\ u \in H_0^1(\Omega^+), \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; u(x) > 0\}$, pois

$$\int_{\Omega^+} \nabla u^+ \nabla v + \int_{\Omega^+} u^+ v - \int_{\Omega^+} |u^+|^{p-2} u^+ v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v \chi_{\Omega^+} + \int_{\mathbb{R}^N} uv\chi_{\Omega^+} - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv\chi_{\Omega^+} = 0$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega^+)$. Se Ω^+ for limitado, o resultado é trivial. Suponhamos que Ω^+ seja ilimitado. Pela definição de l, existe $r_1 > 0$ tal que $a(x) > \dfrac{l}{2}$ se $|x| \geq r_1$. Da etapa 1, $u^+(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Logo, podemos escolher $r > r_1$ tal que

$$\left(a(x) - \frac{l}{2}\right)u^+ - (u^+)^{p-1} > 0, \, \forall \, x \in \Omega^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; |x| > r\}.$$

Denote por $\gamma(r) = \gamma(|x|)$ a solução fundamental radial de

$$\begin{cases} -\Delta v + \dfrac{l}{2}v = 0, & \text{em} \quad \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; |x| > r\} \\ v(\bar{r}) = \max\limits_{|x|=r} u^+. \end{cases} \tag{2.9}$$

Então (ver [6], pag. 84, Teorema 4.6),

$$\gamma(r)|r|^{\frac{N-1}{2}} e^{\sqrt{\frac{l}{2}}r} \to C_1 > 0, \quad \text{quando} \quad |r| \to \infty.$$

Logo, γ tem um decaimento exponencial no infinito. Além disso, segue de (2.8) e (2.9) que $w(x) := \gamma(x) - u^+(x)$ é solução do problema

$$-\Delta w + \frac{l}{2}w = \left(a(x) - \frac{l}{2}\right)u^+ - (u^+)^{p-1}, \quad \text{em} \quad \Omega^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; |x| > r\}.$$

Pelo Princípio do Máximo Fraco (ver [3], pag. 179, Teorema 8.1), obtemos que

$$\inf_{\Omega^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; |x| > r\}} w \geq \inf_{\partial(\Omega^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; |x| > r\})} \geq 0,$$

ou seja,

$$0 \leq u^+(x) \leq \gamma(x), \quad \text{quando} \quad |x| > r.$$

Desta forma, concluímos que u^+ tem decaimento exponencial.

Finalmente, observe que u é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta v + Lv = f \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $f = |u|^{p-2}u + (L - a(x))u$, e que $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [1, \infty)$. Logo, pela Proposição (A.1), segue que $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [1, \infty)$, o que prova (2.2) e conclui a demonstração do Teorema. □

2.2 Resultado de Não-Existência

Vamos, agora, provar um resultado de não-existência de solução para (P). De fato, mostraremos que para uma significativa classe de potenciais $a(x)$ o problema (P) não possui solução não trivial. Mais precisamente, provaremos que:

Teorema 2.2. *Seja $a(x)$ um potencial satisfazendo* (1.10) *tal que $\frac{\partial a}{\partial \sigma}$ existe para alguma direção $\sigma \in S^{N-1}$, $\frac{\partial a}{\partial \sigma} \geq 0$, com $\frac{\partial a}{\partial \sigma} \neq 0$, e $\frac{\partial a}{\partial \sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (P), devemos ter $u = 0$.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $\sigma = e_1$ e seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução do problema (P). Pelo Teorema 2.1, u é uma solução clássica de (P), ou seja,

$$-\Delta u(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) - a(x)u(x), \ \forall \, x \in \mathbb{R}^N.$$

Calculando a derivada parcial com respeito a x_1 na igualdade acima, deduzimos que

$$-\Delta u_{x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1}(x)u + a(x)u_{x_1} = (p-1)|u|^{p-2}u_{x_1}$$

no sentido fraco. Multiplicando a igualdade acima por u e integrando, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_{x_1} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial a}{\partial x_1}(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)uu_{x_1} dx = (p-1)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uu_{x_1}.$$

Por outro lado, multiplicando (P) por u_{x_1} e integrando, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_{x_1} dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)uu_{x_1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uu_{x_1} dx.$$

Subtraindo as duas últimas igualdades uma da outra, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial a}{\partial x_1}(x)u^2 dx = (p-2)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uu_{x_1} dx = \frac{p-2}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial |u|^p}{\partial x_1} dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial |u|^p}{\partial x_1} dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial |u|^p}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_N.$$

Segue do decaimento exponencial de u que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial |u|^p}{\partial x_1} dx_1 = \lim_{A \to \infty} (u(A) - u(-A)) = 0$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial a}{\partial x_1}(x) u^2 dx = 0$$

e, consequentemente,

$$\frac{\partial a}{\partial x_1}(x) u^2 = 0, \tag{2.10}$$

pois, $\dfrac{\partial a}{\partial x_1} \geq 0$. Suponha, por contradição, que $u \neq 0$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ u(x) > 0\}, \\ \Omega^0 &= \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ u(x) = 0\}, \\ \Omega^- &= \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ u(x) < 0\}. \end{aligned}$$

É claro que $\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- \subset \Omega^0$. Mais ainda, afirmamos que $\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \Omega^0$ pois, caso contrário, existiriam $y \in \Omega^0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$B(y, \varepsilon) \subset \Omega^0 \quad \text{e} \quad B(y, \varepsilon) \cap (\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-) = \emptyset. \tag{2.11}$$

Seja $r > 0$ o maior raio satisfazendo

$$B(y, r) \subset \Omega^0, \quad B(y, r) \cap (\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-) = \emptyset \tag{2.12}$$

e o fecho da bola $B(y, r)$ intersecta $\partial\Omega^+$ ou $\partial\Omega^-$. Suponha, sem perda de generalidade, que o fecho da bola $B(y, r)$ intersecta primeiro $\partial\Omega^+$. Escolha x_0 nessa intersecção. Por um lado, como Ω^+ satisfaz a condição da bola interior em x_0, segue do Lema de Hopf (ver Teorema $A.4$, Apêndice A) que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, onde ν é a normal unitária exterior a x_0 em Ω^+. Por outro lado, um cálculo direto mostra que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = 0$, o que caracteriza uma contradição e prova que $\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \Omega^0$.

Assim, se $x \in \Omega^0$, podemos, novamente, aplicar o Lema de Hopf e concluir que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0$, ou seja, 0 é um valor regular de u. Logo, Ω^0 é uma superfície $n - 1$-dimensional em $\mathbb{R}^N$ e, consequentemente, tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^N$ (Ver [5], Pag. 358). Segue de (2.10) que $\frac{\partial a}{\partial x_1}(x) = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, o que contradiz a hipótese do teorema. Portanto, $u = 0$. $\square$

Capítulo 3

Resultados de Existência de Solução para o Problema (P)

Neste capítulo, provamos dois resultados de existência de solução para o problema (P). O primeiro deles, é uma situação mais simples, na qual (P) pode ser resolvido por minimização. O segundo, e o principal resultado da dissertação, considera um caso topológico mais complicado, em que (P) não pode ser resolvido por minimização. Mais precisamente, usaremos um Teorema de Linking para mostrar a existência de solução positiva para o problema (P).

3.1 Primeiro Resultado de Existência

Esta seção é dedicada ao nosso primeiro teorema de existência de solução para o problema (P). Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja $a(x)$ um potencial satisfazendo* (1.10). *Suponha que para todo $\eta \in (0, l - a_0)$, existe um raio $\rho_\eta > 0$ suficientemente grande tal que*

$$\sup_{B(x_\eta, \rho_\eta)} a(x) \leq l - \eta, \ \textit{para algum } x_\eta \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1}$$

Então, o problema (P) tem pelo menos uma solução positiva.

Para demonstrar este teorema, precisamos de dois lemas técnicos, que apresentamos agora. Antes, lembremos que

$$m := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + l u^2) dx \ ; \ u \in M \right\}$$

$$m_a := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x) u^2) dx \ ; \ u \in M \right\}$$

Lema 3.2. *Suponha que* $a(x)$ *satisfaz* (1.10) *e seja* $\eta \in (0, l - a_0)$. *Então, existe* $r_\eta > 0$ *tal que*

$$\int_{B(0,r)} (|\nabla \omega|^2 + l\omega^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} (|\nabla \omega|^2 + |a|_\infty \omega^2)dx < m + \eta \int_{B(0,r)} \omega^2 dx, \tag{3.2}$$

para todo $r \geq r_\eta$, *onde* ω *é a função dada pela Proposição* 1.6.

Demonstração. Pela Proposição 1.6, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega|^2 + l\omega^2)dx = m,$$

a qual podemos reescrever como

$$\int_{B(0,r)} (|\nabla \omega|^2 + l\omega^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |\nabla u|^2 dx = m - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} l\omega^2 dx$$

para $r > 0$. Então, somando o termo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |a|_\infty \omega^2 dx$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} (|\nabla \omega|^2 + l\omega^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} (|\nabla u|^2 + |a|_\infty \omega^2)dx &= m + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |a|_\infty \omega^2 dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} l\omega^2 dx \\
&\leq m + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |a|_\infty \omega^2 dx \\
&= m + \eta \int_{B(0,r)} \omega^2 dx - \eta \int_{B(0,r)} \omega^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |a|_\infty \omega^2 dx. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Note que, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, quando $r \to \infty$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |a|_\infty \omega^2 dx \to 0 \text{ e}$$
$$\eta \int_{B(0,r)} \omega^2 dx \to \eta \int_{\mathbb{R}^N} \omega^2 dx > 0.$$

Logo, existe $r_\eta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |a|_\infty \omega^2 dx - \eta \int_{B(0,r)} \omega^2 dx < 0,$$

para todo $r \geq r_\eta$. Portanto, por (3.3) obtemos que

$$\int_{B(0,r)} (|\nabla\omega|^2 + l\omega^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} (|\nabla\omega|^2 + |a|_\infty \omega^2)dx < m + \eta \int_{B(0,r)} \omega^2 dx,$$

para todo $r \geq r_\eta$, o que prova o lema. □

Vejamos o segundo lema.

Lema 3.3. *Seja $a(x)$ satisfazendo* (1.10) *e* (3.1). *Então,*

$$m_a < m.$$

Demonstração. De fato, seja ω dada pela Proposição 1.6 e suponha $\rho_\eta \geq r_\eta$, onde r_η é dado no Lema 3.2. Então, por (3.1), temos

$$\begin{aligned}
E(\omega(x - x_\eta)) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + a(x)\omega^2(x - x_\eta))dx \\
&= \int_{B(x_\eta,\rho_\eta)} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + a(x)\omega^2(x - x_\eta))dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_\eta,\rho_\eta)} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + a(x)\omega^2(x - x_\eta))dx \\
&\leq \int_{B(x_\eta,\rho_\eta)} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + (l - \eta)\omega^2(x - x_\eta))dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_\eta,\rho_\eta)} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + |a|_\infty\omega^2(x - x_\eta))dx \\
&= \int_{B(x_\eta,\rho_\eta)} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + l\omega^2(x - x_\eta))dx - \eta \int_{B(x_\eta,\rho_\eta)} \omega^2(x - x_\eta)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_\eta,\rho_\eta)} (|\nabla\omega(x - x_\eta)|^2 + |a|_\infty\omega^2(x - x_\eta))dx.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema da Mudança de Variáveis na última igualdade, segue que

$$\begin{aligned}
E(\omega(x - x_\eta)) \leq\ & \int_{B(0,\rho_\eta)} (|\nabla\omega|^2 + l\omega^2)dx - \eta \int_{B(0,\rho_\eta)} \omega^2 dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\rho_\eta)} (|\nabla\omega|^2 + |a|_\infty\omega^2)dx. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2,

$$E(\omega(x - x_\eta)) < m,$$

o que permite concluir o que queríamos. □

Finalmente, estamos aptos a demonstrar nosso primeiro resultado de existência de solução para o problema (P).

Demonstração do Teorema 3.1. Para mostrar a existência de solução para o problema (P), é suficiente provar a existência de um ponto crítico para o funcional E restrito a subvariedade M. Para tanto, seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para (3.1), isto é,

$$\begin{cases} \text{a) } u_n \in H^1(\mathbb{R}^N), |u_n|_p = 1 \\ \text{b) } E(u_n) = m_a + o(1). \end{cases} \tag{3.5}$$

Pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Teorema A.6, Apêndice A), podemos supor sem perda de generalidade que $\nabla E|_M(u_n) = o(1)$. Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\|E'(u_n)\|_* = \|\nabla E|_M(u_n)\| = o(1),$$

onde $\|\cdot\|_*$ é definido em (1.1). Pela Proposição 1.2,

$$\|E'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\| = o(1),$$

onde J é dado por (1.11) e $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Mas, isto significa que

$$E'(u_n)w - \lambda_n J'(u_n)w = o(1)\|w\|, \; \forall\, w \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla w + a(x) u_n w) dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n w dx = o(1)\|w\|, \; \forall\, w \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{3.6}$$

para certos $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ são equivalentes, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C\|u_n\|_a.$$

Por (3.5)(b), segue-se que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, para alguma subsequência de (u_n), que também denotaremos por (u_n), temos

$$\begin{cases} \text{a) } u_n \rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ \text{b) } u_n(x) \to u_0(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N; \\ \text{c) } u_n \to u_0 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*. \end{cases} \tag{3.7}$$

Além disso, se considerarmos $w = u_n$ em (3.6), obtemos

$$E(u_n) - \lambda_n = o(1)\|u_n\| \Rightarrow m_a + o(1) - o(1)\|u_n\| = \lambda_n \Rightarrow m_a + o(1) = \lambda_n. \tag{3.8}$$

Logo, pela Proposição 3.4, que provaremos na sequência, segue de (3.5), (3.7) e (3.8) que u_0 é solução fraca do problema

$$-\Delta u + a(x)u = m_a|u|^{p-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{3.9}$$

Afim de concluírmos a existência de solução para (P), vamos mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 3.1. $|u_0|_p = 1$.

De fato, como $|u_n|_p = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u_n \rightharpoonup u_0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, segue da semicontinuidade fraca da norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$ que

$$|u_0|_p \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_p = 1. \tag{3.10}$$

Para provar que vale a igualdade em (3.10), vamos mostrar dois fatos:
Fato 1. $u_0 \neq 0$.

Suponha, por contradição, que $u_0 = 0$ e defina $\alpha(x) := \min\{0, a(x) - l\}$. Então,

$$\begin{aligned} E(u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + a(x)u_n^2)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + lu_n^2)dx + \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - l)u_n^2 dx \\ &\geq m + \int_{\mathbb{R}^N} \alpha(x)u_n^2 dx \\ &= m + \int_{B(0,\rho)} \alpha(x)u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho)} \alpha(x)u_n^2 dx, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $\rho > 0$. Por (3.7)(c) a primeira integral em (3.11) converge para zero quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\int_{B(0,\rho)} \alpha(x)u_n^2 dx = o(1). \tag{3.12}$$

Para a segunda integral em (3.11), lembre que pela definição de $\liminf$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que, se $|x| \geq \rho$ então

$$l - \varepsilon \leq a(x) \Rightarrow -\varepsilon \leq a(x) - l \Rightarrow -\varepsilon \leq \alpha(x) \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho)} \alpha(x)u_n^2 dx \geq -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho)} u_n^2 dx \geq -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx. \tag{3.13}$$

Logo, por (3.12) e (3.13) temos

$$\begin{aligned} E(u_n) &\geq m + \int_{B(0,\rho)} \alpha(x)u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\rho)} \alpha(x)u_n^2 dx \\ &\geq m + o(1) - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.14), deduzimos que

$$E(u_n) \geq m + o(1).$$

Segue do Lema 3.3 e da desigualdade acima que

$$m_a + o(1) = E(u_n) \geq m + o(1) \Rightarrow m_a \geq m,$$

o que é uma contradição.

Fato 2. $|u_0|_p = 1$.

Suponha, novamente, o contrário, ou seja, $|u_0|_p \neq 1$. Então, (3.10) e o Fato 1 implicam que $0 < |u_0|_p < 1$. Defina $v_n = u_n - u_0$. Por (3.7), obtemos

$$\begin{cases} \text{a) } v_n \rightharpoonup 0 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ \text{b) } v_n(x) \to 0 \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N; \\ \text{c) } v_n \to 0 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*. \end{cases} \tag{3.15}$$

Além disso, pelo Lema de Brézis-Lieb (Teorema $A.7$, Apêndice A) temos

$$|u_n|_p^p - |v_n|_p^p - |u_0|_p^p = o(1) \Rightarrow |v_n|_p^p = 1 - |u_0|_p^p + o(1). \tag{3.16}$$

Então,

$$\begin{aligned} E(u_n) &= E(u_0 + v_n) \\ &= E(u_0) + E(v_n) + 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla v_n + a(x) u_0 v_n) dx \\ &\overset{v_n \rightharpoonup 0}{=} |u_0|_p^2 E\left(\frac{u_0}{|u_0|_p}\right) + |v_n|_p^2 E\left(\frac{v_n}{|v_n|_p}\right) + o(1), \end{aligned}$$

donde segue-se da definição de m_a que

$$\begin{aligned} E(u_n) &\geq m_a |u_0|_p^2 + m_a |v_n|_p^2 + o(1) \\ &= m_a \left(|u_0|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + m_a \left(|v_n|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + o(1) \\ &\overset{(3.16)}{=} m_a \left(|u_0|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + m_a \left(1 - |u_0|_p^p + o(1)\right)^{\frac{2}{p}} + o(1) \\ &= m_a \left(|u_0|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + m_a \left(1 - |u_0|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + m_a o(1) + o(1) \\ &= m_a \left[\left(1 - |u_0|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + \left(|u_0|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}\right] + o(1) \end{aligned}$$

Como a função $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1-x)^t + x^t$, com $0 < t < 1$, é estritamente maior que 1 (para ver isto basta calcular a derivada de f), temos que

$$E(u_n) > m_a + o(1),$$

contradizendo (3.5), o que prova o Fato 2 e, consequentemente, a Afirmação.

Vamos agora continuar com a prova do teorema. Como u_0 é solução fraca de (3.9), temos

$$E'(u_0)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla v + a(x)u_0 v)dx = m_a \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-2}u_0 v dx = J'(u_0)v, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue da Proposição 1.2 que u_0 é um ponto crítico de E restrito a M, o que prova a existência de solução para (P).

Provemos, agora, que u_0 é positiva. Para tanto, comece observando que se $u \in M$ é um mínimo de E, então u tem sinal constante. De fato, se u mudasse de sinal, teríamos

$$\begin{aligned}
E(u) &= E(u^+ - u^-) \\
&= E(u^+) + E(u^-) \\
&= |u^+|_p^2 E\left(\frac{u^+}{|u^+|_p}\right) + |u^-|_p^2 E\left(\frac{u^-}{|u^-|_p}\right) \\
&\geq m_a\left(|u^+|_p^2 + |u^-|_p^2\right) \\
&= m_a\left[\left(|u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + \left(|u^-|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}\right] \\
&= m_a\left[\left(|u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + \left(|u - u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}\right] \\
&= m_a\left[\left(|u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + \left(|u|_p^p - |u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}\right] \\
&= m_a\left[\left(|u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}} + \left(1 - |u^+|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}\right] \\
&> m_a
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Segue que u tem sinal constante, como queríamos.

Para finalizar, seja $u \in M$ um mínimo de E restriro a M. Então, u é ponto crítico de E restrito a M. Logo, u gera uma solução $\bar{u}$, com o mesmo sinal, para o problema (P). Trocando $\bar{u}$ por $-\bar{u}$, se necessário, podemos supor que $\bar{u} \geq 0$. Finalmente, afirmamos que $\bar{u}$ é positiva. De fato, suponha que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\bar{u}(x_0) = 0$. Considere a bola aberta $B(x_0, r)$, onde $r > 0$. Como $\bar{u} \geq 0$ em $B(x_0, r)$, segue que x_0 é um ponto de mínimo para $\bar{u}$ em $B(x_0, r)$. Logo, como $\bar{u}$ é uma solução clássica, pelo Princípio do Máximo Forte concluímos que $\bar{u}$ é constante em $B(x_0, r)$. Assim, $\bar{u}(x) = 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$, pois $\bar{u}(x_0) = 0$. Desde que $r > 0$ é arbitrário, $\bar{u}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, o que é um absurdo, já que $\bar{u}$ é não trivial. Isto conclui a demonstração do teorema. $\square$

Ná próxima proposição, vamos provar que u_0 é solução fraca de (3.9), fato importante na demosntração do nosso primeiro teorema de existência de solução para o problema (P).

Proposição 3.4. *Suponha que vale as condições* (3.5), (3.7) *e* (3.8). *Então,* u_0 *é solução fraca do problema*

$$-\Delta u + a(x)u = m_a|u|^{p-2}u, \quad em \quad \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Devemos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_0\nabla v + a(x)u_0 v)dx - m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{p-2}uvdx = 0,\ \forall\, v\in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Primeiramente, afirmamos que se $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n\nabla v + a(x)u_n v)dx - m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p-2}u_n vdx \to \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_0\nabla v + a(x)u_0 v)dx - m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{p-2}uvdx.$$

De fato, é claro que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n\nabla v + a(x)u_n v)dx \to \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_0\nabla v + a(x)u_0 v)dx,$$

pois $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, como $u_n\to u_0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$u_n \to u_0 \text{ em } L^p(supp(v))$$

de onde deduzimos que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned}
&(i)\quad |u_n(x)|\le h(x) \text{ quase sempre, com } h\in L^p(supp(v)), \text{ para todo } n\in\mathbb{N} \text{ e}\\
&(ii)\quad |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)v(x)\to |u_0(x)|^{p-2}u_0(x)v(x) \text{ para quase todo } x\in\mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p-2}u_n vdx = m_a\int_{supp(v)}|u_n|^{p-2}u_n vdx \to m_a\int_{supp(v)}|u_0|^{p-2}u_0 vdx = m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{p-2}u_0 vdx.$$

Por densidade, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n\nabla v + a(x)u_n v)dx - m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p-2}u_n vdx \to \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_0\nabla v + a(x)u_0 v)dx - m_a\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{p-2}uvdx,$$

para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, o que conclui a afirmação. Por outro lado, se $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + a(x) u_n v) dx - m_a \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v dx &= \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v dx \\
&- m_a \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v dx + o(1)\|v\| \\
&= (\lambda_n - m_a) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v dx + o(1)\|v\| \\
&= o(1) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v dx + o(1)\|v\| \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + a(x) u_n v) dx - m_a \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v dx \to 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla v + a(x) u_0 v) dx - m_a \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-2} u_0 v dx = 0,$$

para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, o que prova a proposição. $\square$

3.2 Segundo Resultado de Existência

No que segue, vamos demonstrar nosso segundo resultado de existência de solução para o problema (P), o principal resultado da dissertação. Mais precisamente, vamos provar o seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Seja $a(x)$ um potencial satisfazendo* (1.10). *Além disso, suponha que*

(H_1) $\lim\limits_{\rho\to\infty} a(\rho e_1) = \lim\limits_{\rho\to\infty} a(-\rho e_1) := \Theta$, *onde* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

(H_2) $\limsup\limits_{\rho\to\infty} a(\rho\sigma) \to \Theta$, *quando* $\sigma \to e_1$ *e* $\sigma \to -e_1$.

(H_3) $a(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = a(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N)$, $\forall\, i = 2, \ldots, N$, $x \in \mathbb{R}^N$.

(H_4) *i)* $a(x) \geq \Theta$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$; *ii)* $|a - \Theta|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < (2^{1-2/p} - 1)\Theta$.

Então, o problema (P) tem pelo menos uma solução positiva.

Para demonstrar o Teorema 3.5, começamos mostrando como o Princípio da Criticalidade Simétrica pode nos ajudar a determinar soluções para o problema (P). De fato, com o auxílio da hipótese (H_3), provaremos que basta olharmos para pontos críticos do funcional E restrito a subvariedade de M consistindo de todas as funções que satisfazem a hipótese de simetria (H_3). O próximo passo é encontrar um intervalo de energia no qual o funcional E satisfaça a condição de Palais-Smale. Feito isso, uma aplicação do Teorema de Linking (Teorema 1.5), envolvendo também o uso de uma aplicação baricentro adequada (Ver Apêndice B), permite demonstrar a existência de uma solução não-trivial para (P). Finalmente, uma estimativa de sua energia possibilita concluirmos que tal solução é positiva.

Antes, no entanto, provaremos uma proposição que explicita a não-existência, na mesma situação do Teorema 3.5, de um mínimo de E em M ou em uma subvariedade consistindo das funções que satisfazem a hipótese de simetria (H_3). Precisamente falando, vamos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 3.6. *Seja $a(x)$ um potencial satisfazendo* (1.10). *Suponha que valem (H_1), (H_2), $(H_4)(i)$ e $a(x) \not\equiv \Theta$. Considere a subvariedade de $H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por*

$$M_s := \{u \in M \ ; \ u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = u(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N), \ \forall\, i = 2, \ldots, N, x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Então,

$$\tilde{m_a} := \inf_{M_s} E = \inf_{M} E = \min_{u \in M} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \Theta u^2) dx = m,$$

e os ínfimos não são atingidos.

A fim de provar esta proposição, façamos primeiro um lema técnico.

Lema 3.7. *(i) Suponha que valem as hipóteses (H_1) e $(H_4)(i)$. Então,*

$$l := \liminf_{|x| \to \infty} a(x) = \Theta.$$

(ii) Suponha que valem as hipóteses (H_1) e (H_2). Então, existe uma sequência $(\rho_n) \subset \mathbb{R}$, com $\rho_n > 0$ e $\rho_n \to \infty$, tal que

$$\sup_{B(\rho_n e_1, n)} |a(x) - \Theta| < \frac{1}{2^n}.$$

Demonstração. (i) Por (H_1), é claro que $l \leq \Theta$. Pela definição de l, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|x_n| \to \infty$ e $a(x_n) \to l$. Por $(H_4)(i)$, temos que $a(x_n) \geq \Theta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $l \geq \Theta$. Portanto,

$$l = \Theta.$$

(ii) Defina $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(\sigma) = \limsup_{\rho \to \infty} a(\rho\sigma).$$

Note que g é bem definida, pois $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, por (H_1), $g(e_1) = \Theta$. Por (H_2), se $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}^N$ é tal que $\sigma_n \to e_1$, então $g(\sigma_n) \to \Theta = g(e_1)$, ou seja, g é contínua em e_1. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\sigma - e_1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(\sigma) - \Theta| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sejam $\rho > 0$ e $x \in B(\rho e_1, \rho\delta)$. Então, $x = \rho\sigma$ para algum $\sigma \in B(e_1, \delta)$. Escolha ρ suficientemente grande de modo que

$$|a(\rho\sigma) - g(\sigma)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Assim,

$$|a(x) - \Theta| \leq |a(\rho\sigma) - g(\sigma)| + |g(\sigma) - \Theta| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, x \in B(\rho e_1, \rho\delta).$$

Logo,

$$\sup_{B(\rho e_1, \rho\delta)} |a(x) - \Theta| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Em particular, podemos construir uma sequência $(\rho_n) \subset \mathbb{R}$, com $\rho_n \to \infty$, tal que

$$\sup_{B(\rho_n e_1, n)} |a(x) - \Theta| < \frac{1}{2^n}.$$

$\square$

Provemos, agora, a Proposição 3.6.

Demonstração da Proposição 3.6. Como $M_s \subset M$, temos que $m_a \leq \tilde{m_a}$. Por outro lado, segue da hipótese $(H_4)(i)$ que $m \leq m_a$. Com efeito, se $u \in M$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \Theta u_2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx \quad \Rightarrow \quad m \leq m_a.$$

Logo, valem as desigualdades $m \leq m_a \leq \tilde{m_a}$. Para provar as desigualdades contrárias, é suficiente mostrar que $\tilde{m_a} \leq m$, o que faremos agora. Pelo Lema 3.7, existe uma sequência $(\rho_n) \subset \mathbb{R}$, com $\rho_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\rho_n \to \infty$, tal que

$$\sup_{B(\rho_n e_1, n)} |a(x) - \Theta| < \frac{1}{2^n}, \tag{3.17}$$

ou seja, $a(x) = \Theta + o(1)$ dentro de uma bola $B(\rho_n e_1, n)$ para n suficientemente grande. Considere a sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$u_n(x) = \omega(x - \rho_n e_1),$$

onde ω é dada na Proposição 1.6. Como $|\omega|_p = 1$, pelo Teorema da Mudança de Variáveis,

$$|u_n|_p = |\omega(\cdot - \rho_n e_1)|_p = |\omega|_p = 1, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad u_n \in M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como ω é radialmente simétrica, segue que, para todo $i = 2, \ldots, N$, vale

$$\begin{aligned} u_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) &= \omega(x_1 - \rho_n, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \\ &= \omega(x_1 - \rho_n, \ldots, -x_i, \ldots, x_N) \\ &= u_n(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N), \end{aligned} \tag{3.18}$$

ou seja, $u_n \in M_s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\tilde{m_a} \leq E(u_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} E(\omega(x - \rho_n e_1)) = m. \tag{3.19}$$

Façamos isso. Primeiro, note que

$$\begin{aligned} E(u_n) &= E(\omega(x - \rho_n e_1)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\omega(x - \rho_n e_1)|^2 + a(x)\omega^2(x - \rho_n e_1))dx \\ &= \int_{B(\rho_n e_1, n)} (|\nabla\omega(x - \rho_n e_1)|^2 + a(x)\omega^2(x - \rho_n e_1))dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(\rho_n e_1, n)} (|\nabla\omega(x - \rho_n e_1)|^2 + a(x)\omega^2(x - \rho_n e_1))dx. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Analisemos a segunda integral da última igualdade acima. Por (1.10) e pelo Teorema da Mudança de Variáveis, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(\rho_n e_1, n)} (|\nabla\omega(x - \rho_n e_1)|^2 &+ a(x)\omega^2(x - \rho_n e_1))dx \leq \\ & \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(\rho_n e_1, n)} (|\nabla\omega(x - \rho_n e_1)|^2 + |a|_\infty \omega^2(x - \rho_n e_1))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)} (|\nabla\omega(x)|^2 + |a|_\infty \omega^2(x))dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, aplicado em (3.21), que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(\rho_n e_1, n)} (|\nabla\omega(x - \rho_n e_1)|^2 + a(x)\omega^2(x - \rho_n e_1))dx = o(1). \tag{3.22}$$

Por outro lado, aplicando (3.17) e o Teorema da Mudança de Variáveis na primeira integral em

(3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B(\rho_n e_1,n)} (|\nabla \omega(x-\rho_n e_1)|^2 &+ a(x)\omega^2(x-\rho_n e_1))dx = \\
& \int_{B(\rho_n e_1,n)} (|\nabla \omega(x-\rho_n e_1)|^2 + (\Theta + o(1))\omega^2(x-\rho_n e_1))dx \\
&= \int_{B(\rho_n e_1,n)} (|\nabla \omega(x-\rho_n e_1)|^2 + \Theta\omega^2(x-\rho_n e_1))dx + \\
&+ o(1)\int_{B(\rho_n e_1,n)} \omega^2(x-\rho_n e_1))dx \\
&= \int_{B(0,n)} (|\nabla \omega(x)|^2 + \Theta\omega^2(x))dx + o(1)\int_{B(0,n)} \omega^2(x)dx \\
&= \int_{B(0,n)} (|\nabla \omega(x)|^2 + \Theta\omega^2(x))dx + o(1) \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Logo, por (3.22) e (3.23), podemos escrever (3.20) como

$$E(u_n) = \int_{B(0,n)} (|\nabla \omega(x)|^2 + \Theta\omega^2(x))dx + o(1). \qquad (3.24)$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, aplicado em (3.24), concluímos que

$$E(u_n) \to \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega(x)|^2 + \Theta\omega^2(x))dx = m,$$

como queríamos. Finalmente, para provar a segunda parte da nossa proposição, suponha por contradição, que existe $u \in M$ tal que $E(u) = m$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx = m.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.6 temos

$$m \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + lu^2)dx.$$

Como $\Theta = l$ e $a(x) \not\equiv \Theta$, segue que

$$m \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + lu^2)dx < \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx = m,$$

o que é um absurdo. Portanto, o resultado está provado. □

3.2.1 Aplicando o Princípio da Criticalidade Simétrica

Vamos mostrar, nesta seção, que para encontrar solução do problema (P), é suficiente olhar para pontos críticos do funcional E restrito a subvariedade M_s. Para tanto, faremos uso do Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais (Veja Teorema 1.3 do Capítulo 1).

Considere o grupo $G = \{1, -1\}$ com a operação de produto usual e defina a seguinte ação em $H^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{array}{rcc} \bullet^1 : \ G \times H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^N) \\ (1, u) & \longmapsto & u(x_1, x_2 \ldots, x_N) \\ (-1, u) & \longmapsto & u(x_1, -x_2 \ldots, x_N) \end{array}$$

Note que o funcional E é G-invariante. De fato, basta mostrarmos que

$$E(u(x_1, x_2, \ldots, x_N)) = E(u(x_1, -x_2, \ldots, x_N)), \ \forall \, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por (H_3), observe que $a(x_1, x_2, \ldots, x_N) = a(x_1, -x_2, \ldots, x_N)$. Logo,

$$\begin{aligned} E(u(x_1, -x_2, \ldots, x_N)) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x_1, -x_2, \ldots, x_N)|^2 + a(x_1, x_2, \ldots, x_N) u^2(x_1, -x_2, \ldots, x_N)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x_1, -x_2, \ldots, x_N)|^2 + a(x_1, -x_2, \ldots, x_N) u^2(x_1, -x_2, \ldots, x_N)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x_1, x_2, \ldots, x_N)|^2 + a(x_1, x_2, \ldots, x_N) u^2(x_1, x_2, \ldots, x_N)) dx \\ &= E(u(x_1, x_2, \ldots, x_N)) \end{aligned}$$

como queríamos. Além disso, a ação é claramente isométrica e o espaço de pontos invariantes desta ação é dado por

$$\mathcal{H}_2 := Fix(G) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ ; \ u(x_1, , x_2, \ldots, x_N) = u(x_1, -x_2, \ldots, x_N)\}.$$

Como $\mathcal{H}_2$ é um espaço de Hilbert, podemos repetir o mesmo argumento acima feito com $H^1(\mathbb{R}^N)$ para $\mathcal{H}_2$. Defina a seguinte ação em $\mathcal{H}_2$:

$$\begin{array}{rcc} \bullet^2 : \ G \times \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \\ (1, u) & \longmapsto & u(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_N) \\ (-1, u) & \longmapsto & u(x_1, x_2, -x_3 \ldots, x_N) \end{array}$$

Novamente, é claro que esta ação é isométrica e o mesmo argumento feito para a ação $\bullet^1$ mostra que o funcional E restrito a $\mathcal{H}_2$ é G-invariante. Mais ainda, o espaço dos pontos invariantes por esta ação é dado por

$$\mathcal{H}_3 := Fix(G) = \{u \in \mathcal{H}_2 \ ; \ u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) = u(x_1, x_2, -x_3, \ldots, x_N)\}.$$

Observe ainda que

$$\mathcal{H}_3 = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ;\ u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_N) = u(x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_N),\ \forall\, i = 2,3\}.$$

Repetindo esse mesmo argumento até o passo $N-1$, temos a ação isométrica

$$\begin{array}{rccc} \bullet^{N-1}: & G \times \mathcal{H}_{N-1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{N-1} \\ & (1,u) & \longmapsto & u(x_1,\ldots,x_N) \\ & (-1,u) & \longmapsto & u(x_1,\ldots,-x_N) \end{array}$$

e o funcional E restrito a $\mathcal{H}_{N-1}$ é G-invariante. Além disso, o espaço de Hilbert dos pontos invariantes da ação $\bullet^{N-1}$ é dado por

$$\mathcal{H}_N := Fix(G) = \{u \in \mathcal{H}_{N-1}\ ;\ u(x_1,\ldots,x_N) = u(x_1,\ldots,-x_N).$$

Mais ainda, é fácil ver que

$$\mathcal{H}_N = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ;\ u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_N) = u(x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_N),\ \forall\, i = 2,\ldots,N\}.$$

Logo, a subvariedade M_s é igual a

$$M_s = \left\{u \in \mathcal{H}_N\ ;\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1\right\}.$$

Proposição 3.8. *Suponha que $u \in M_s$ seja um ponto crítico de E restrito a M_s. Então, existe $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ solução fraca não-trivial de (P).*

Demonstração. De fato, seja $u \in M_s$ um ponto crítico de E restrito a M_s. Então, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = \lambda_0 p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx,\ \forall\, v \in \mathcal{H}_N.$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{2}$, podemos escrever a igualdade acima como

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = \lambda p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx,\ \forall\, v \in \mathcal{H}_N. \tag{3.25}$$

Em particular, se $v = u$, temos

$$\lambda p = \|u\|_a^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

Considere $\bar{u} = (\lambda p)^{\frac{1}{p-2}} u \in \mathcal{H}_N$. Assim,

$$u = \frac{\bar{u}}{(\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}}.$$

Logo, por (3.25), obtemos

$$\frac{1}{(\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u} \nabla v + a(x)\bar{u}v)dx \right] = \frac{\lambda p}{\lambda p\, (\lambda p)^{\frac{1}{p-2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}v dx, \ \forall\, v \in \mathcal{H}_N,$$

e, consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u} \nabla v + a(x)\bar{u}v)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}|^{p-2}\bar{u}v dx = 0, \ \forall\, v \in \mathcal{H}_N,$$

ou seja, $\bar{u} \in \mathcal{H}_N$ é um ponto crítico do funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, restrito a $\mathcal{H}_N$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}E(u) - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Como E é de classe C^1 e G-invariante por todas as ações $\bullet^1, \ldots, \bullet^{N-1}$, segue que o funcional I é de classe C^1 e G-invariante por todas as ações $\bullet^1, \ldots, \bullet^{N-1}$. Assim, podemos aplicar o Princípio da Criticalidade Simétrica $N-1$ vezes e concluir que $\bar{u}$ é um ponto crítico de I. Portanto, $\bar{u}$ é uma solução fraca do problema (P). □

3.2.2 A Condição de Palais-Smale

O nosso próximo passo para provar o Teorema 3.5 é encontrar um intervalo de energia no qual alguma compacidade é preservada. Para este fim, provaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.9. *Suponha que as hipóteses do Teorema* 3.5 *são satisfeitas. Então, o funcional E restrito a M_s satisfaz a condição de Palais-Smale no intervalo $(m, 2^{1-2/p}m)$, ou seja, se $(u_n) \subset M_s$ é tal que*

$$E(u_n) \to c \in (m, 2^{1-2/p}m) \quad e \quad \|E'(u_n)\|_* \to 0,$$

então (u_n) admite subsequência convergindo forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

A fim de demonstrarmos esta proposição, começamos provando o seguinte lema:

Lema 3.10. *Seja $(u_n) \subset M_s$ tal que*

$$E(u_n) \to c \in (m, 2^{1-2/p}m) \quad e \quad \|E'(u_n)\|_* \to 0. \tag{3.26}$$

Então, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Em particular, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de *subsequência,*

$$\begin{cases} a)\ u_n \rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \le p \le 2^*; \\ b)\ u_n \to u_0 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \le p < 2^*; \\ c)\ u_n(x) \to u_0(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.27}$$

Além disso, u_0 é solução fraca do problema

$$-\Delta u_0 + a(x)u_0 = c|u_0|^{p-2}u_0. \tag{3.28}$$

Mais ainda, se $u_0 \neq 0$, então

$$|u_0|_p \ge \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Demonstração. Dizer que $(u_n) \subset M_s$ satisfaz (3.26) significa, pela Proposição 1.2 e pelo mesmo argumento usado para obter (3.6), que

$$\begin{cases} \text{a) } |u_n|_p = 1, u_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = u_n(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N), \text{ para } i = 2, \ldots, N, \\ \text{b) } \lim\limits_{n\to\infty} E(u_n) = c \in (m, 2^{1-2/p}m), \\ \text{c) } \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla w + a(x)u_n w)dx - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2}u_n w dx = o(1)\|w\|, \, \forall\, w \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ \text{para certos } \mu_n \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Por (3.29)(b), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|E(u_n)| \le C \quad \Rightarrow \quad \|u_n\|_a^2 \le C.$$

Como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ são equivalentes, segue que existe uma outra constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u_n\|^2 \le C_1 \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ é limitada em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (3.27). Além disso, considerando $w = u_n$ em (3.29)(c) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + a(x)u_n^2)dx = \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx + o(1)\|u_n\| = \mu_n + o(1)\|u_n\|.$$

Desde que (u_n) é limitida em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos por (3.29)(b) que

$$c + o(1) = E(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + a(x)u_n^2)dx = \mu_n + o(1),$$

de onde segue que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = c.$$

Logo, o mesmo argumento usado para demonstrar a Proposição 3.4, prova que $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema (3.28). Finalmente, suponha que $u_0 \neq 0$. Por (3.28), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_0 \nabla v + a(x) u_0 v) dx = c \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-2} u_0 v dx, \; \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, se $v = u_0$, então

$$\|u_0\|_a^2 = c|u_0|_p^p.$$

Como $a(x) \geq \Theta$ e $l = \Theta$, segue que

$$\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_0|^2 + l u_0^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_0|^2 + a(x) u_0^2) dx = \|u_0\|_a^2 = c|u_0|_p^p,$$

ou seja,

$$\|u_0\|^2 \leq c|u_0|_p^p. \tag{3.30}$$

Por outro lado, como $u_0 \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_0|^2 + l u_0^2) dx \;&=\; |u_0|_p^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \tilde{u}_0|^2 + l \tilde{u}_0^2) dx, \text{ com } \tilde{u}_0 = \frac{u_0}{|u_0|_p} \\ &\geq\; m|u_0|_p^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$m|u_0|_p^2 \leq \|u_0\|^2. \tag{3.31}$$

Portanto, por (3.30) e (3.31) concluímos que

$$m|u_0|_p^2 \leq c|u_0|_p^p \quad \Rightarrow \quad |u_0|_p^{p-2} \geq \frac{m}{c} \quad \Rightarrow \quad |u_0|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

o que prova o lema. □

Devido a demonstração da Proposição 3.9 ser longa, vamos dividi-la em duas etapas. Para provarmos a primeira delas, obteremos, inicialmente, alguns resultados auxiliares na intenção de torna mais explicativa a demonstração. Tais resultados complementarão, de maneira satisfatória, a demonstração da primeira etapa da proposição acima.

Na sequência, continuamos com as mesmas notações do lema anterior.

Lema 3.11. *Suponha que valem as hipóteses do Teorema* 3.5, *do Lema* 3.10 *e* $u_n \not\to u_0$ *fortemente em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Então, existem sequências* $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, *com* $|y_n| \to \infty$, *tais que, definindo* $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$, *existe* $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} a) \; \tilde{v}_n \rightharpoonup v_0 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ b) \; \tilde{v}_n \to v_0 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*; \\ c) \; \tilde{v}_n(x) \to v_0(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.32}$$

Mais ainda, $v_0 \neq 0$.

Demonstração. Observe primeiro que, como $u_n \not\to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo, temos $\|u_n\| \not\to \|u_0\|$. Pela equivalência das normas, $\|u_n\|_a \not\to \|u_0\|_a$. Defina $v_n := u_n - u_0$ e mostremos que (v_n), a menos de subsequência, tem as propriedades desejadas. Note que, pelo Lema de Brezis-Lieb,

$$|v_n|_p^p = |u_n|_p^p - |u_0|_p^p + o(1). \tag{3.33}$$

Por outro lado, tomando $w = u_n$ em (3.29)(c) e levando em conta que $\mu_n \to c$, obtemos

$$\|u_n\|_a^2 = c|u_n|_p^p + o(1) \quad \Rightarrow \quad |u_n|_p^p = \frac{1}{c}\|u_n\|_a^2 + o(1). \tag{3.34}$$

Como u_0 é solução fraca de (3.28), temos

$$\|u_0\|_a^2 = c|u_0|_p^p \quad \Rightarrow \quad |u_0|_p^p = \frac{1}{c}\|u_0\|_a^2. \tag{3.35}$$

Por (3.33), (3.34) e (3.35) deduzimos que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|v_n|_p^p = \frac{1}{c}(\|u_n\|_a^2 - \|u_0\|_a^2) + o(1) \geq C_2, \tag{3.36}$$

pois $\|u_n\|_a^2 \not\to \|u_0\|_a^2$. Defina

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p dx \right).$$

Note que $\delta > 0$, pois, caso contrário, teríamos

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p dx = 0 = \liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p dx \quad \Rightarrow \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p dx \to 0$$

o que implicaria, pelo Lema de Lions (Teorema $A.8$, Apêndice A), que $v_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $|v_n|_p^p \to 0$ contradizendo (3.36). Continuando, existe, por definição, uma subsequência de $\delta_n := \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p dx$, também denotada por δ_n, tal que $\delta_n \to \delta$. Logo, dado $\varepsilon = \delta/2 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
|\delta_n - \delta| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0 \quad &\Rightarrow \quad -\varepsilon + \delta < \delta_n < \varepsilon + \delta,\ \forall\, n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\delta}{2} < \delta_n,\ \forall\, n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\delta}{2} < \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^p dx,\ \forall\, n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \quad \text{para cada } n \geq n_0,\ \text{existe } y_n \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } \frac{\delta}{2} < \int_{B(y_n,1)} |v_n|^p dx,
\end{aligned}$$

ou seja, podemos construir uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\frac{\delta}{2} < \int_{B(y_n,1)} |v_n|^p dx = \int_{B(0,1)} |v_n(x+y_n)|^p dx, \tag{3.37}$$

onde a última igualdade segue do Teorema da Mudança de Variáveis. Mais ainda, $|y_n| \to \infty$, pois, caso contrário, existiria $C > 0$ tal que $|y_n| \leq C$ o que implicaria em

$$0 < \frac{\delta}{2} < \int_{B(y_n,1)} |v_n|^p dx \leq \int_{B(0,C+1)} |v_n|^p dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

pois $v_n \to 0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, o que seria uma contradição. Finalmente, definindo $\tilde{v}_n(x) = v_n(x+y_n)$, temos, pelo Teorema da Mudança de Variáveis, que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \tilde{v}_n(x)|^2 + l\tilde{v}_n^2(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n(x+y_n)|^2 + lv_n^2(x+y_n))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n(x)|^2 + lv_n^2(x))dx \\ &= \|v_n\|^2, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $(\tilde{v}_n)$ é limitida em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, a menos de subsequência, existe $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (3.32). Em particular,

$$\int_{B(0,1)} |\tilde{v}_n|^p dx \to \int_{B(0,1)} |v_0|^p dx \quad \Rightarrow \quad \int_{B(0,1)} |v_n(x+y_n)|^p dx \to \int_{B(0,1)} |v_0|^p dx.$$

Tomando o limite em (3.37), obtemos

$$\int_{B(0,1)} |v_0|^p \geq \frac{\delta}{2},$$

mostrando que $v_0 \neq 0$. Portanto, o lema está provado. □

Novamente, a seguir, continuamos com as notações dos lemas anteriores. Vejamos o próximo lema:

Lema 3.12. *Sob as hipóteses do Teorema* 3.5 *e do Lema* 3.10*, valem as seguintes convergências:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x+y_n) \nabla v_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx \tag{3.38}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x+y_n)|^{p-2} u_n(x+y_n) v_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p dx. \tag{3.39}$$

Demonstração. Note que, como $v_n(x) = u_n(x) - u_0(x)$ e $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$, onde $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ é dada pelo Lema anterior, temos que $\tilde{v}_n(x) = u_n(x + y_n) - u_0(x + y_n)$, ou ainda, $u_n(x + y_n) = \tilde{v}_n(x) + u_0(x + y_n)$. Provemos primeiro (3.38). Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x + y_n)\nabla v_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \tilde{v}_n(x)\nabla v_0(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0(x + y_n)\nabla v_0(x)dx.$$

Como $\tilde{v}_n \rightharpoonup v_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \tilde{v}_n \nabla v_0 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx.$$

Logo, para obtermos (3.38) devemos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0(x + y_n)\nabla v_0(x)dx \to 0.$$

Lembrando que u_0 é solução do problema (3.28), segue que u_0 é uma função suave decaindo para zero no infinito. Em particular,

$$-\Delta u_0(x + y_n) + a(x + y_n)u_0(x + y_n) = c|u_0(x + y_n)|^{p-2}u_0(x + y_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Multiplicando a expressão acima por v_0 e integrando, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0(x+y_n)\nabla v_0(x)dx = c\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x+y_n)|^{p-2}u_0(x+y_n)v_0(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x+y_n)u_0(x+y_n)v_0(x)dx.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que as duas integrais do lado direito da igualdade acima convergem para zero, o que prova (3.38). Finalmente, usando os comentários do início da demonstração do lema, (3.39) segue diretamente do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. □

Lema 3.13. *Sob as hipóteses do Teorema* 3.5 *e do Lema* 3.10*, existe* $\lambda \in [\Theta, L]$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x + y_n)u_n(x + y_n)v_0(x)dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx. \tag{3.40}$$

Demonstração. Tomando $w_n(x) = v_0(x - y_n)$ em (3.29)(c) e usando o Teorema da Mudança de Variáveis, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x + y_n)\nabla v_0(x)dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} a(x + y_n)u_n(x + y_n)v_0(x)dx \\ &= \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x + y_n)|^{p-2}u_n(x + y_n)v_0(x)dx + o(1)\|v_0\|, \quad (3.41)\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} a(x+y_n)u_n(x+y_n)v_0(x)dx &= \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x+y_n)|^{p-2}u_n(x+y_n)v_0(x)dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x+y_n)\nabla v_0(x)dx + o(1)\|v_0\|. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Tomando o limite na igualdade acima e usando (3.38), (3.39) e o fato de $\mu_n \to c$, deduzimos que o limite do lado esquerdo em (3.40) existe. Por outro lado, como no Lema 3.12, podemos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n(x+y_n)v_0(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx.$$

Além disso, pela hipótese $(H_4)(i)$, $\Theta \leq a(x+y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, passando a uma subsequência se necessário, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} a(x+y_n) \leq L$. Logo,

$$\Theta \int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx + o(1) \leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x+y_n)u_n(x+y_n)v_0(x)dx \leq L \int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx + o(1),$$

ou ainda,

$$\Theta + o(1) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} a(x+y_n)u_n(x+y_n)v_0(x)dx}{\int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx} \leq L + o(1)$$

Portanto, existe $\lambda \in [\Theta, L]$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} a(x+y_n)u_n(x+y_n)v_0(x)dx}{\int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx} = \lambda,$$

donde segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x+y_n)u_n(x+y_n)v_0(x)dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} v_0^2(x)dx,$$

o que prova (3.40). □

Lema 3.14. *Sob as hipóteses do Teorema* 3.5 *e do Lema* 3.10*, temos*

$$|v_0|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Demonstração. Tomando o limite em (3.41) e usando o Lema 3.13, (3.38), (3.39) e o fato que $\mu_n \to c$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_0|^2 + \lambda v_0^2)dx = c \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p dx = c|v_0|_p^p.$$

Como $\lambda \in [\Theta, L]$, temos

$$\|v_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_0|^2 + \Theta v_0^2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_0|^2 + \lambda v_0^2)dx = c|v_0|_p^p.$$

Além disso, como

$$m|v_0|_p^2 \leq \|v_0\|^2,$$

segue que

$$m|v_0|_p^2 \leq c|v_0|_p^p \quad \Rightarrow \quad |v_0|_p^{p-2} \geq \frac{m}{c} \quad \Rightarrow \quad |v_0|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

o que prova o lema. $\square$

De posse destes resultados, estamos prontos para começarmos a demonstrar a Proposição 3.9.

Primeira Parte da Demonstração da Proposição 3.9. Para provar a proposição, devemos mostrar que se $(u_n) \subset M_s$ é uma sequência tal que

$$E(u_n) \to c \in (m, 2^{1-2/p}m) \text{ e } \|E'(u_n)\|_* \to 0, \tag{3.43}$$

então (u_n) admite subsequência convergindo forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Relembremos que, como vimos no Lema 3.10, dizer que $(u_n) \subset M_s$ satisfaz (3.43), segnifica que

$$\begin{cases} \text{a) } |u_n|_p = 1, u_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = u_n(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N), \text{ para } i = 2, \ldots, N, \\ \text{b) } \lim\limits_{n\to\infty} E(u_n) = c \in (m, 2^{1-2/p}m), \\ \text{c) } \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla w + a(x) u_n w)dx - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n w dx = o(1)\|w\|, \; \forall\, w \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \text{ e para certos } \mu_n \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.44}$$

Nestas condições, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo as conclusões do Lema 3.10. Para esta primeira etapa, vamos supor $u_0 \neq 0$. Então, pelo Lema 3.10, temos que

$$|u_0|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Suponha, por contradição, que $u_n \not\to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe uma sequência $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $v_n = u_n - u_0$, satisfazendo as conclusões do Lema 3.11. Além disso, existe $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $v_0 \neq 0$, satisfazendo as conclusões dos Lemas 3.11 e 3.14. Note que

$$\begin{aligned} \|v_n + u_0\|^2 = \|u_n\|^2 \quad &\Rightarrow \quad \|v_n\|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n \nabla u_0 + l v_n u_0)dx + \|u_0\|^2 = \|u_n\|^2 \\ &\Rightarrow \quad \|v_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n \nabla u_0 + l v_n u_0)dx \\ &\Rightarrow \quad \|v_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 + o(1), \end{aligned} \tag{3.45}$$

pois $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $v_n \rightharpoonup 0$. Logo,

$$E(u_n) \geq \|u_n\|^2 = \|u_0\|^2 + \|v_n\|^2 + o(1).$$

Tomando o lim inf na desigualdade acima e usando que $\|v_0\| \leq \liminf \|\tilde{v}_n\| = \liminf \|v_n\|$, pois $\tilde{v}_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, segue do Lema 3.14 que

$$\begin{aligned} c = \liminf_{n\to\infty} E(u_n) &\geq \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \\ &\geq m\left(|u_0|_p^2 + |v_0|_p^2\right) \\ &\geq 2m\left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{2}{p-2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c \geq 2m\left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{2}{p-2}} \Rightarrow c \geq 2^{1-2/p}m,$$

o que contradiz (3.44)(c). Portanto, $u_n \to u_0$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. □

Fica claro então, que a segunda etapa da demonstração é provar que $u_0 \neq 0$. Para tanto, provaremos alguns resultados preliminares que ajudarão na demonstração desta etapa. Como antes, continuamos com as mesmas notações das demonstrações acima.

Lema 3.15. *Suponha que valem as hipóteses do Teorema* 3.5 *e do Lema* 3.10. *Se* $u_0 = 0$*, então existe uma sequência* $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$*, com* $|x_n| \to \infty$*, e uma função* $v_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $v_1 \neq 0$ *e*

$$\begin{cases} a)\ u_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup v_1 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ b)\ u_n(\cdot + x_n) \to v_1 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*; \\ c)\ u_n(x + x_n) \to v_1(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.46}$$

Além disso, para toda $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$*, vale*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n(x+x_n)\nabla w(x)dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} a(x+x_n)u_n(x+x_n)w(x)dx \\ &= \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x+x_n)|^{p-2}u_n(x+x_n)w(x)dx + o(1)\|w\|, \end{aligned} \tag{3.47}$$

com $\mu_n \to c$.

Demonstração. Note primeiro que, como $E(u_n) \to c$ e as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ são equivalentes, temos

$$\|u_n\|_a^2 \to c \quad \Rightarrow \quad \|u_n\|_a^2 \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n\|_a \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n\| \not\to 0.$$

Além disso, é claro que $|u_n|_p \not\to 0$. Logo, podemos repetir o argumento usado no Lema 3.11 e concluir que existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, com $|x_n| \to \infty$, e uma função $v_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $v_1 \neq 0$, satisfazendo (3.46). Por fim, a igualdade em (3.47) segue do Teorema da Mudança de Variáveis aplicado em (3.44)(c), o que prova o lema. □

No que segue, definimos

$$\frac{x_n}{|x_n|} := b_n.$$

Então, podemos supor que, a menos de subsequência,

$$b_n \to b \in \mathbb{R}^N \text{ e } |b| = 1.$$

Na sequência, mantemos as notaçõs do lema anterior. Vejamos mais dois resultados:

Lema 3.16. *Suponha que as hipóteses do Teorema* 3.5 *e do Lema* 3.10 *são satisfeitas,* $u_0 = 0$ *e* $b = \pm e_1$. *Então, existem sequências* $(w_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $(t_n) \subset \mathbb{R}^N$, *com* $|t_n| \to \infty$, *tais que, definindo* $\tilde{w}_n(x) = w_n(x + t_n)$, *existe* $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, *com* $w_0 \neq 0$, *satisfazendo*

$$\begin{cases} a)\ \tilde{w}_n \rightharpoonup w_0 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \le p \le 2^*; \\ b)\ \tilde{w}_n \to w_0 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \le p < 2^*; \\ c)\ \tilde{w}_n(x) \to w_0(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.48}$$

Além disso,

$$|w_0|_p \ge \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Demonstração. Suponha que $b = e_1$ e observe que $x_n = |x_n| b_n$. Logo, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$a(x + x_n) = a(x + |x_n| b_n) = a\left(|x_n|\left(\frac{x}{|x_n|} + b_n\right)\right).$$

Por (H_2) e pelo fato de $b_n \to e_1$, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} a\left(|x_n|\left(\frac{x}{|x_n|} + b_n\right)\right) = \Theta = \liminf_{n\to\infty} a\left(|x_n|\left(\frac{x}{|x_n|} + b_n\right)\right),$$

ou seja, $a(x + x_n) \to \Theta$. De maneira inteiramente análoga vemos que $a(x + x_n) \to \Theta$ se $b = -e_1$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pela convergência fraca em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x + x_n) u(x + x_n) w(x) dx = \Theta \int_{\mathbb{R}^N} v_1(x) w(x) dx, \ \forall\, w \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Usando (3.47) e o limite acima, o mesmo argumento para provar a Proposição 3.4, mostra que v_1 é uma solução fraca não-trivial do problema

$$-\Delta v_1 + \Theta v_1 = c|v_1|^{p-2} v_1, \tag{3.49}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_1 \nabla w + \Theta v_1 w) dx = c \int_{\mathbb{R}^N} |v_1|^{p-2} v_1 w dx, \ \forall\, w \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.50}$$

Em particular, para $w = v_1$, temos

$$\|v_1\|^2 = c|v_1|_p^p. \tag{3.51}$$

Afirmamos agora que

$$u_n(\cdot + x_n) \not\to v_1 \text{ fortemente em } H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.52}$$

De fato, se ocorresse o contrário, teríamos que $u_n(\cdot + x_n) \to v_1$ fortemente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, o que implicaria em $1 = |u_n|_p \to |v_1|_p$, ou seja, $|v_1|_p = 1$. Assim, por (3.51), $\|v_1\|^2 = c$. Além disso, usando (3.50) e a Proposição 1.2, vemos que v_1 é um ponto crítico de $\|\cdot\|^2$ restrito a M. Segue da Proposição 1.6 que

(*i*) $\|v_1\|^2 = m \Rightarrow c = m,$ uma contradição ;

(*ii*) ou $\|v_1\|^2 \geq 2^{1-2/p}m \Rightarrow c \geq 2^{1-2/p}m,$ o que também caracteriza uma contradição,

provando a afirmação. Logo, $\|u_n\| \not\to \|v_1\|$. Defina, $w_n(x) = u_n(x + x_n) - v_1(x)$ e observe que, Pelo Lema de Brezis-Lieb, temos

$$|w_n|_p^p = |u_n|_p^p - |v_1|_p^p + o(1). \tag{3.53}$$

Escolhendo $w = u_n$ em (3.44), vemos que

$$\begin{aligned}
|u_n|_p^p &= \frac{1}{\mu_n}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + a(x)u_n^2)dx + o(1) \\
&\geq \frac{1}{\mu_n}\|u_n\|^2 + o(1), \text{ pois } a(x) \geq \Theta = l \\
&= \frac{1}{c}\|u_n\|^2 + o(1), \text{ pois } \mu_n \to c.
\end{aligned}$$

Por (3.51), (3.53) e a desigualdade acima, obtemos

$$|w_n|_p^p \geq \frac{1}{c}(\|u_n\|^2 - \|v_1\|^2) + o(1) \geq C_4 > 0,$$

pois $\|u_n\| \not\to \|v_1\|$. Desta forma, podemos repetir o argumento usado no Lema 3.11 e concluir que existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}^N$, com $|t_n| \to \infty$, tal que, definindo $\tilde{w}_n(x) = w_n(x + t_n)$, existe uma função $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $w_0 \neq 0$, satisfazendo (3.48). Além disso, a mesma demonstração do Lema 3.14 pode ser aplicada aqui para concluirmos que

$$|w_0|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

o que prova o lema. □

Lema 3.17. *Suponha que as hipótese do Teorema* 3.5 *e do Lema* 3.10 *são satisfeitas,* $u_0 = 0$ *e*

$b \neq \pm e_1$. Então existe uma sequência $(\tilde{z}_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{cases} a)\ \tilde{z}_n \rightharpoonup v_1 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ b)\ \tilde{z}_n \to v_1 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*; \\ c)\ \tilde{z}_n(x) \to v_1(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde v_1 é dada polo Lema 3.15. *Além disso,*

$$|v_1|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}. \tag{3.54}$$

Demonstração. Para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, defina $\hat{x} = (x_1, -x_2, \ldots, -x_N) \in \mathbb{R}^N$. Como $u_n \in M_s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $u_n(x) = u_n(\hat{x})$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e denote por $\hat{x}_n = (x_{n,1}, -x_{n,2}, \ldots, -x_{n,N})$. Notemos que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n(x+\hat{x}_n)\nabla w(x) + l u_n(x+\hat{x}_n)w(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n(\hat{x}+x_n)\nabla w(x) + l u_n(\hat{x}+x_n)w(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n(\hat{x})\nabla w(x-x_n) + l u_n(\hat{x})w(x-x_n))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n(x)\nabla w(x-x_n) + l u_n(x)w(x-x_n))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n(x+x_n)\nabla w(x) + l u_n(x+x_n)w(x))dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (ii) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x+\hat{x}_n) - v_1(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(\hat{x}+x_n) - v_1(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x+x_n) - v_1(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Segue-se de (i) e (ii) que

$$\begin{cases} \text{a) } u_n(\cdot+\hat{x}_n) \rightharpoonup v_1 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ \text{b) } u_n(\cdot+\hat{x}_n) \to v_1 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*; \\ \text{c) } u_n(x+\hat{x}_n) \to v_1(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Argumentando como na prova do Lema (3.16), temos que $u(\cdot + x_n) \not\to v_1$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Seja $z_n(x) = u_n(x+x_n) - v_1(x)$ e defina $\tilde{z}_n(x) = z(x+\hat{x}_n - x_n)$, ou seja,

$$\tilde{z}_n(x) = u_n(x+\hat{x}_n) - v_1(x+\hat{x}_n - x_n).$$

Observe que

$$\hat{x}_n - x_n = (0, -2x_{n,2}, \ldots, -2x_{n,N}).$$

Como $b = (b_1, \ldots, b_N) \neq \pm e_1$, existe $i \in \{2, \ldots, N\}$ tal que $b_i \neq 0$ e, por hipótese,

$$b_{n,i} = \frac{x_{n,i}}{|x_n|} \to b_i,$$

em que $b_n = (b_{n,1}, \ldots, b_{n,N})$. Lembrando que $|x_n| \to \infty$, segue que $|x_{n,i}| \to \infty$ e, consequentemente $|\hat{x}_n - x_n| \to \infty$. Portanto,

$$\begin{cases} \text{a) } \tilde{z}_n \rightharpoonup v_1 \text{ fracamente em } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ e em } L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*; \\ \text{b) } \tilde{z}_n \to v_1 \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq p < 2^*; \\ \text{c) } \tilde{z}_n(x) \to v_1(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Além disso, a mesma demonstração do Lema 3.14 pode ser aplicada aqui para concluirmos que

$$|v_1|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

o que prova o lema. $\square$

Finalmente, estamos prontos para concluir a demonstração da Proposição 3.9, ou seja, provar que $u_0 \neq 0$.

Segunda Parte da Demonstração da Proposição 3.9. Faremos a demonstração por contradição, ou seja, suponha que $u_0 = 0$. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, com $|x_n| \to \infty$, e uma função não nula $v_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo as conclusões do Lema 3.15. Definindo $\dfrac{x_n}{|x_n|} = b_n$, podemos supor que $b_n \to b \in \mathbb{R}^N$, com $|b| = 1$. Temos agora dois casos a analisar:

Caso 1. $b = \pm e_1$

Neste caso, vamos aplicar o Lema 3.16. Primeiramente, observe que por (3.51), temos

$$m|v_1|_p^2 \leq \|v_1\|^2 = c|v_1|_p^p \quad \Rightarrow \quad |v_1|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}. \tag{3.55}$$

Além disso, como em (3.45), podemos obter

$$\|w_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|v_1\|^2 + o(1).$$

Logo,

$$E(u_n) \geq \|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|v_1\|^2 + o(1).$$

Tomando o lim inf na desigualdade acima e aplicando o Lema 3.16, segue que

$$\begin{aligned} c = \liminf_{n\to\infty} E(u_n) &\geq \|w_0\|^2 + \|v_1\|^2 \\ &\geq m(|w_0|_p^2 + |v_1|_p^2) \\ &\geq 2m\left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{2}{p-2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c \geq 2m\left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{2}{p-2}} \quad \Rightarrow \quad c \geq 2^{1-2/p}m$$

caracterizando uma contradição.

Caso 2. $b \neq \pm e_1$

Neste caso, vamos considerar o Lema 3.17 e argumentar como no *Caso 1.* Comece observando que

$$\|z_n\|^2 = \|u_n\|^2 - \|v_1\|^2.$$

Logo,

$$E(u_n) \geq \|u_n\|^2 = \|z_n\|^2 + \|v_1\|^2 + o(1).$$

Como no *Caso 1*, obtemos

$$c \geq 2^{1-2/p}m$$

o que é uma contradição. Portanto, a proposição está provada. □

3.2.3 Resultados Envolvendo a Aplicação Baricentro

No que segue, provaremos dois lemas que serão utéis na demonstração do Teorema 3.5. Para tanto, faremos uso da aplicação baricentro, estudada em detalhes no Apêndice B. Vejamos rapidamente a construção da aplicação baricentro. Para $u \in M_s$, seja

$$\tilde{u}(x) := \frac{1}{|B(x,1)|}\int_{B(x,1)} |u(y)|dy = \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(x,1)} |u(y)|dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

e considere

$$\hat{u}(x) := \left[\tilde{u}(x) - \frac{1}{2}\max_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x)\right]^+, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Defina a aplicação baricentro como

$$\beta(u) = \frac{1}{|\hat{u}|_p^p}\int_{\mathbb{R}^N} x\hat{u}(x)^p dx = \frac{1}{|\hat{u}|_p^p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} x_1\hat{u}(x)^p dx, \ldots, \int_{\mathbb{R}^N} x_N\hat{u}(x)^p dx\right)$$

e denote por β_1 a projeção de β na direção de e_1, isto é,

$$\beta_1(u) = \langle \beta(u), e_1 \rangle.$$

Observe que, pela definição de M_s, β_1 é a única componente não nula de β. Além disso, $\beta_1 : M_s \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida e é contínua (Veja Apêndice B).

Defina

$$\mathcal{B} = \inf\{E(u) \ ; \ u \in M_s \text{ e } \beta_1(u) = 0\}.$$

Nos próximos dois lemas, vamos supor que $a(x) \not\equiv \Theta$.

Lema 3.18. *Suponha que as hipóteses do Teorema* 3.5 *são satisfeitas. Então,*

$$\mathcal{B} > m.$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.6 que $\mathcal{B} \geq m$. Para provar que a desigualdade é estrita, argumentamos por contradição. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{B} = m$. Então, existe $(u_n) \subset M_s$ tal que $\beta_1(u_n) = 0$ e

$$m = \lim_{n\to\infty} E(u_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + a(x)u_n^2)dx.$$

Como $a(x) \geq \Theta$, temos

$$m \leq \|u_n\|^2 \leq E(u_n) = m + o(1),$$

ou seja, $\|u_n\|^2 \to m$. Pelo Teorema $A.9$ (ver Apêndice A), existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, a menos de subsequência, a sequência $v_n(x) = u_n(x + y_n)$ converge para uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Segue da Proposição 1.6, que $v(x) = \omega(x - y)$, para algum $y \in \mathbb{R}^N$. Defina $\phi_n(x) = v_n(x - y_n) - v(x - y_n)$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\phi_n(x)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \phi_n(x)|^2 + l\phi_n^2(x))dx \\
&= \|v_n(x - y_n)\|^2 + \|v(x - y_n)\|^2 \\
&- 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n(x - y_n)v(x - y_n) + lv_n(x - y_n)v(x - y_n))dx \\
&= \|v_n(x)\|^2 + \|v(x)\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_n(x)v(x) + lv_n(x)v(x))dx.
\end{aligned}$$

Logo, $\phi_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$u_n(x) = \omega(x - x_n) + \phi_n(x), \text{ onde } x_n = y_n + y.$$

Além disso, pela Proposição 3.6, como m não é atingido, temos que (x_n) é ilimitada, ou seja, $|x_n| \to \infty$. Como $\beta_i = 0$ para todo $i = 2, \ldots, N$, podemos supor que $x_n = \tau_n e_1$, onde $(\tau_n) \subset \mathbb{R}$ e

$\tau_n \to \infty$. Assim, fazendo uma translação, podemos escrever

$$u_n(x+\tau_n e_1) = \omega(x) + \phi_n(x+\tau_n e_1).$$

Calculando β_1 em ambos os termos da igualdade acima, temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}
\beta_1(u_n(x+\tau_n e_1)) &= \frac{1}{|\hat{u}_n(x+\tau_n e_1)|_p^p}\int_{\mathbb{R}^N} x_1(\hat{u}_n(x+\tau_n e_1))^p dx \\
&= \frac{1}{|\hat{u}_n|_p^p}\int_{\mathbb{R}^N} (z_1-\tau_n)(\hat{u}_n(z))^p dz \\
&= \frac{1}{|\hat{u}_n|_p^p}\int_{\mathbb{R}^N} z_1(\hat{u}_n(z))^p dz - \tau_n \frac{1}{|\hat{u}_n|_p^p}\int_{\mathbb{R}^N} (\hat{u}_n(z))^p dz \\
&= \beta_1(u_n) - \tau_n = -\tau_n. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\phi_n \to 0$ e pela continuidade da aplicação β_1, segue que

$$\beta_1(\omega(x)+\phi_n(x+\tau_n e_1)) = \beta_1(\omega(x)) + o(1) = o(1),$$

pois, como ω é radialmente simétrica, $\beta_1(\omega(x)) = 0$. Portanto, como $\tau_n \to \infty$, temos uma contradição, provando o lema. $\square$

Agora, defina o operador $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow M_s$ por

$$\Phi(\tau) = \omega(\cdot - \tau e_1). \qquad (3.57)$$

Como ω é radialmente simétrica, segue que Φ está bem definido e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Φ é contínuo. Além disso, o mesmo argumento usado em (3.56) mostra que

$$\beta_1 \circ \Phi(\tau) = \beta_1(\omega(x-\tau e_1)) = \tau.$$

Vejamos mais um resultado.

Lema 3.19. *Suponha que as hipóteses do Teorema* 3.5 *são satisfeitas. Então, existe* $\alpha > 0$ *tal que*

$$\max\{E(\Phi(\alpha)), E(\Phi(-\alpha))\} < \mathcal{B} \qquad (3.58)$$

e

$$\max\{E(\Phi(\tau))\ ;\ \tau \in [-\alpha,\alpha]\} < 2^{1-2/p}m. \qquad (3.59)$$

Demonstração. Argumentando como na prova de (3.19), podemos mostrar que

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} E(\Phi(\tau)) = \lim_{\tau\to\pm\infty} E(\omega(x-\tau e_1) = m.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem R_1 e R_2 números positivos tais que

$$\begin{aligned} \tau &> R_1 \;\Rightarrow\; |E(\Phi(\tau)) - m| < \varepsilon \;\Rightarrow\; E(\Phi(\tau)) < \varepsilon + m \\ -\tau &> R_2 \;\Rightarrow\; |E(\Phi(\tau)) - m| < \varepsilon \;\Rightarrow\; E(\Phi(\tau)) < \varepsilon + m. \end{aligned}$$

Escolhendo $R = \max\{R_1, R_2\}$, temos

$$\begin{aligned} \tau &> R \;\Rightarrow E(\Phi(\tau)) < \varepsilon + m \\ -\tau &> R \;\Rightarrow E(\Phi(\tau)) < \varepsilon + m. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.18, $\varepsilon = \mathcal{B} - m > 0$. Logo, da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \tau &> R \;\Rightarrow E(\Phi(\tau)) < \mathcal{B} \\ -\tau &> R \;\Rightarrow E(\Phi(\tau)) < \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Do argumento acima, escolhendo $\alpha > R$ segue que

$$E(\Phi(\alpha)) < \mathcal{B} \quad \text{e} \quad E(\Phi(-\alpha)) < \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \max\{E(\Phi(\alpha)), E(\Phi(-\alpha))\} < \mathcal{B}.$$

Por outro lado, como para todo $\tau \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} E(\Phi(\tau)) &= E(\omega(x - \tau e_1)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega(x - \tau e_1)|^2 + a(x)\omega^2(x - \tau e_1))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega(x - \tau e_1)|^2 + \Theta\omega^2(x - \tau e_1))dx + \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - \Theta)\omega^2(x - \tau e_1)dx \\ &= m + \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - \Theta)\omega^2(x - \tau e_1))dx \\ &\leq m + |a - \Theta|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \omega^2(x - \tau e_1))dx \\ &= m + |a - \Theta|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \omega^2 dx, \end{aligned}$$

segue da hipótese $(H_4)(ii)$ que

$$\begin{aligned} E(\Phi(\tau)) &< m + (2^{1-2/p} - 1)\Theta \int_{\mathbb{R}^N} \omega^2 dx \\ &= m + (2^{1-2/p} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} \Theta\omega^2 dx \\ &\leq m + (2^{1-2/p} - 1)m \\ &= 2^{1-2/p} m, \end{aligned}$$

para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Desde que E e Φ são contínuos e $[-\alpha, \alpha]$ é compacto, concluímos que

$$\max\{E(\Phi(\tau))\ ;\ \tau \in [-\alpha, \alpha]\} < 2^{1-2/p}m,$$

o que prova o lema. □

3.2.4 Demonstração do Teorema 3.5

Finalmente, estamos aptos a demonstrar o Teorema 3.5. A demonstração consiste em aplicar um Teorema de Linking (Ver Capítulo 1) para garantir a existência de um ponto crítico do funcional E restrito a subvariedade M_s. Então, a Proposição 3.8 garante a existência de uma solução para (P).

Demonstração do Teorema 3.5. Comece observando que o caso $a(x) \equiv \Theta$ é considerado na Proposição 1.6. Logo, podemos supor $a(x) \not\equiv \Theta$. Considere o subconjunto fechado $S \subset M_s$ e a subvariedade $Q \subset M_s$ definidos, respectivamente, por

$$S = \{u \in M_s\ ;\ \beta_1(u) = 0\} \quad \text{e} \quad Q = \Phi([-\alpha, \alpha]),$$

onde β_1 é a projeção da aplicação baricentro β na direção de e_1, Φ é definida em (3.57) e α é dado pelo Lema 3.19. Provemos primeiro que S e ∂Q "link", ou seja, S e ∂Q satisfazem a Definição 1.6.

(i) $S \cap \partial Q = \emptyset$, pois, se existisse $u \in S \cap \partial Q$, teríamos

$$\Phi(\alpha) = u \text{ ou } \Phi(-\alpha) = u \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta_1(\Phi(\alpha)) = \beta_1(u) = 0 \text{ ou } -\alpha = \beta_1(\Phi(\alpha)) = \beta_1(u) = 0$$

o que é uma contradição, já que $\alpha > 0$.

(ii) Precisamos mostrar, agora, que

$$h(Q) \cap S \neq \emptyset,\ \forall\, h \in \Gamma,$$

onde

$$\Gamma = \{h \in C(Q, M_s)\ ;\ h|_{\partial Q} = id\}.$$

Seja $h \in \Gamma$ e defina a aplicação $\mathcal{T}_h : [-\alpha, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{T}_h(x) = \beta_1 \circ h \circ \Phi(x).$$

Como $\mathcal{T}_h$ é a composta de aplicações contínuas, temos que $\mathcal{T}_h$ é uma aplicação contínua. Além disso, como $\Phi(\pm\alpha) \in \partial Q$, temos

$$\mathcal{T}_h(\alpha) = \beta_1 \circ h \circ \Phi(\alpha) = \beta_1(\Phi(\alpha)) = \alpha > 0$$
$$\mathcal{T}_h(-\alpha) = \beta_1 \circ h \circ \Phi(-\alpha) = \beta_1(\Phi(-\alpha)) = -\alpha < 0.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ tal que $\mathcal{T}_h(x_0) = 0$. Mas isto significa que $\beta_1(h(\Phi(x_0))) = 0$, ou seja, $h(\Phi(x_0)) \in S$. Segue-se que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$, como queríamos.

Note agora que, por (3.58), temos

$$\max_{\partial Q} E = \max\{E(\Phi(\alpha)), E(\Phi(-\alpha))\} < \mathcal{B} = \inf_S E,$$

ou seja, vale a segunda condição do Teorema de Linking. Desde que o funcional E restrito a M_s satisfaz a condição de Palais-Smale no intervalo $(m, 2^{1-2/p}m)$, basta mostrarmos que o nível minimax

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in Q} E(h(u)) = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \Phi([-\alpha,\alpha])} E(h(u)) = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in [-\alpha,\alpha]} E(h \circ \Phi(x))$$

pertence ao intervalo $(m, 2^{1-2/p}m)$, para podermos aplicar o Teorema de Linking e garantir a existência de um ponto crítico de E restrito a M_s e, consequentemente, pela Proposição (3.8) a existência de uma solução para o problem (P). Façamos isto. Escolha $h = id \in \Gamma$. Então, por (3.59), temos

$$\max_{x \in [-\alpha,\alpha]} E(h(\Phi(x))) = \max_{x \in [-\alpha,\alpha]} E(\Phi(x)) < 2^{1-2/p}m \quad \Rightarrow \quad c < 2^{1-2/p}m.$$

Por outro lado, como $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ para toda $h \in \Gamma$, temos

$$\max_{u \in Q} E(h(u)) \geq \mathcal{B}.$$

Tomando o ínfimo na desigualdade acima e usando o Lema (3.18) temos $c > m$. Portanto, $c \in (m, 2^{1-2/p}m)$ e a primeira parte do teorema está demonstrada.

Para completar a demonstração, mostraremos que se u é um ponto crítico de E no nível c, então u tem sinal constante e, portanto, pelo Princípio Máximo $u > 0$. Vamos argumentar por contradição. Suponha, por contradição que

$$u = u^+ - u^-, \quad \text{com} \quad u^+ \neq 0 \quad \text{e} \quad u^- \neq 0.$$

Como u é solução do problema

$$-\Delta u + a(x)u = c|u|^{p-2}u,$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = c\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx, \ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, quando $v = u^+$ e $v = u^-$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + a(x)(u^+)^2)dx = c\int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^p dx$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + a(x)(u^-)^2)dx = c\int_{\mathbb{R}^N} |u^-|^p dx$$

ou seja, $E(u^\pm) = c|u^\pm|_p^p$. Por outro lado, vale

$$E(u^\pm) \geq \|u^\pm\|^2 \geq m|u^\pm|_p^2.$$

Logo,

$$|u^\pm|_p \geq \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Assim, concluímos que

$$c = E(u) = E(u^+) + E(u^-) \geq \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 \geq m(|u^+|_p^2 + |u^-|_p^2) \geq 2m\left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

o que implica que $c \geq 2^{1-2/p}m$, caracterizando uma contradição. Portanto, o teorema está provado, como queríamos. $\square$

3.2.5 Observações a Respeito do Teorema 3.5

Esta seção é dedicada a algumas observações sobre as hipóteses do Teorema 3.5. De fato, veremos que algumas de suas hipóteses podem ser enfraquecidas de modo que ainda nos permitam concluir a existência de solução positiva para (P).

Primeiramente, observe que, em (H_1) o vetor unitário e_1 pode ser substituído por qualquer outro vetor unitário, mudando de acordo com este as hipóteses (H_2) e (H_3). Por exemplo, se considerarmos $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ em vez de e_1, substituímos as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3), respectivamente, por:

(H_1') $\lim\limits_{\rho\to\infty} a(\rho e_2) = \lim\limits_{\rho\to\infty} a(-\rho e_2) := \Theta$, onde $e_2 = (1, 0, \ldots, 0)$.

(H_2') $\limsup\limits_{\rho\to\infty} a(\rho\sigma) \to \Theta$, quando $\sigma \to e_2$ e $\sigma \to -e_2$.

(H_3') $a(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = a(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N)$, $\forall\, i = 1, 3, \ldots, N$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Outro ponto importante é a hipótese $(H_4)(ii)$. Note que ela implica uma condição de pequenez na imagem do potencial $a(x)$ que não é necessária. De fato, a oscilação de $a(x)$ pode ser arbitrariamente grande em $\mathbb{R}^N$, pois para provar o Teorema 3.5 é suficiente que $a(x)$ satisfaça a seguinte condição: existe $R > 0$ tal que

$$(H_4')(ii) \qquad \begin{cases} \text{a) } |\omega|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus C_R)} < \dfrac{(2^{-2/p}-2^{-1})m}{|a-\Theta|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}, \\ \text{b) } |a-\Theta|_{L^\infty(C_R)} < (2^{-2/p}-2^{-1})\Theta, \end{cases} \tag{3.60}$$

onde

$$C_R = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \; ; \; \sum_{i=2}^{N} x_i^2 < R^2\right\}$$

e ω é dada pela Proposição 1.6. Para ver isto, comece observando que o único momento em que a hipótese $(H_4)(ii)$ é requerida é no Lema 3.19. Assim, basta provarmos o seguinte resultado:

Proposição 3.20. *Suponha que as hipóteses do Teorema* 3.5 *são satisfeitas, com* $(H_4')(ii)$ *em vez de* $(H_4)(ii)$. *Então, vale a mesma afirmação do Lema* 3.19, *ou seja, existe* $\alpha > 0$ *tal que*

$$\max\{E(\Phi(\alpha)), E(\Phi(-\alpha))\} < \mathcal{B} \tag{3.61}$$

e

$$\max\{E(\Phi(\tau)) \; ; \; \tau \in [-\alpha, \alpha]\} < 2^{1-2/p}m. \tag{3.62}$$

Demonstração. Note que a demonstração de (3.61) não depende da hipótese $(H_4)(ii)$. Logo, basta provar que vale (3.62). Para tanto, observe que para todo $R > 0$, temos

$$\begin{aligned}
E(\Phi(\tau)) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\omega(x-\tau e_1)|^2 + a(x)\omega^2(x-\tau e_1))dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\omega(x-\tau e_1)|^2 + \Theta\omega^2(x-\tau e_1))dx + \int_{\mathbb{R}^N} (a(x)-\Theta)\omega^2(x-\tau e_1))dx \\
&= m + \int_{\mathbb{R}^N} (a(x)-\Theta)\omega^2(x-\tau e_1))dx \\
&= m + \int_{\mathbb{R}^N\setminus C_R} (a(x)-\Theta)\omega^2(x-\tau e_1))dx + \int_{C_R} (a(x)-\Theta)\omega^2(x-\tau e_1))dx \\
&= m + |a-\Theta|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus C_R)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus C_R} \omega^2(x-\tau e_1)dx + |a-\Theta|_{L^\infty(C_R)} \int_{C_R} \omega^2(x-\tau e_1)dx \\
&= m + |a-\Theta|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus C_R)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus C_R} \omega^2(x)dx + |a-\Theta|_{L^\infty(C_R)} \int_{C_R} \omega^2(x)dx \\
&= m + |a-\Theta|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus C_R)}|\omega|^2_{L^2(\mathbb{R}^N\setminus C_R)} + |a-\Theta|_{L^\infty(C_R)}|\omega|^2_{L^2(C_R)} \\
&< m + (2^{-2/p}-2^{-1})m + (2^{-2/p}-2^{-1})\Theta|\omega|^2_{L^2(C_R)} \\
&\leq m + (2^{-2/p}-2^{-1})m + (2^{-2/p}-2^{-1})\Theta|\omega|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq m + (2^{-2/p}-2^{-1})m + (2^{-2/p}-2^{-1})m \\
&= m + 2(2^{-2/p}-2^{-1})m \\
&= 2^{1-2/p}m,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

ou seja, dado $R > 0$ vale

$$E(\Phi(\tau)) < 2^{1-2/p}m, \ \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Pela continuidade do funcional E, da aplicação Φ e a compacidade do intervalo $[-\alpha, \alpha]$, concluímos que

$$\max\{E(\Phi(\tau))\ ;\ \tau \in [-\alpha, \alpha]\} < 2^{1-2/p}m,$$

o que prova a proposição. □

Para finalizar, é fácil observar que a hipótese (H_2) pode ser substiuída pela seguinte condição mais fraca:

(H_2'') Para todo $\varepsilon, r > 0$, exitem $t^+ > 0$, $t^- < 0$ tais que

$$|a(x) - \Theta|_{L^\infty(B(t^+e_1,r))} < \varepsilon \quad \text{e} \quad |a(x) - \Theta|_{L^\infty(B(t^-e_1,r))} < \varepsilon.$$

Apêndice A

Resultados Básicos

Para tornar a leitura do trabalho independente, apresentamos alguns resultados básicos (e referências onde estes são provados) que são usados ao longo do texto.

Proposição A.1. *Seja h uma distribuição temperada no $\mathbb{R}^N$ e considere a equação*

$$\Delta u + \lambda u + h = 0 \tag{A.1}$$

no sentido das distribuições para $\lambda < 0$. Então,

(i) Existe uma única distribuição temperada satisfazendo (A.1).

(ii) Se $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então a solução $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $|\lambda||u|_p \leq |h|_p$. Além disso, se $1 < p < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u\|_{2,p} \leq C(\lambda, p)|h|_p.$$

(iii) Se $h \geq 0$, com $h \neq 0$, no sentido das distribuições, então

$$u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N), \ \textit{para } 1 < p < \frac{N}{N-1}.$$

Demonstração. Ver [2], Proposição 4.3. □

Teorema A.2. *Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $p \in [1, +\infty)$. Então,*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \textit{onde} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}, \quad \textit{se} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, \tag{A.2}$$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall\, q \in [p, \infty), \quad \textit{se} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, \tag{A.3}$$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \textit{se} \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0, \tag{A.4}$$

e todas as inclusões são contínuas. Além disso, se $m - \frac{N}{p} > 0$ *não é um inteiro, seja* k *a parte inteira de* $m - \frac{N}{p} > 0$ *e* $\theta = m - \frac{N}{p} - k (0 < \theta < 1)$*. Então, para toda* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$|D^\alpha u|_\infty \leq C\|u\|_{m,p}, \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k,$$

onde C *é uma constante dependendo apenas de* p *e* N*, e*

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{m,p}|x-y|^\theta, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N, \forall\, \alpha \text{ com } |\alpha| = k.$$

Em particular, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$*, em que esta inclusão é no sentido de que podemos escolher um representante contínuo.*

Demonstração. Ver [9], Teorema 9.9, Corolário 9.11, Teorema 9.12 e Corolário 9.13. $\square$

Proposição A.3. (Desigualdade de Interpolação) *Sejam* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *e suponha que* $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$*. Então,* $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *para todo* r*, com* $p \leq r \leq q$*. Além disso,*

$$|f|_r \leq |f|_p^\alpha |f|_q^{1-\alpha}, \quad \text{onde} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Demonstração. Ver [9], pag. 93. $\square$

Teorema A.4. (Lema de Hopf - Refinamento) *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto aberto,* $u \in C^2(\bar{U})$ *e* $c \in L^\infty(U)$*. Suponha que*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u \geq 0 \text{ em } U \\ u \geq 0, \text{ em } U \end{cases} \tag{A.5}$$

e $u \neq 0$*. Então,*

(i) Se $x_0 \in \partial U$ *é tal que* $u(x_0) = 0$ *e* U *satisfaz a condição da bola interior, vale*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

(ii) Além disso,

$$u > 0, \text{ em } U.$$

Demonstração. Ver [12], pag. 519. $\square$

Teorema A.5. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *e suponha que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *quase sempre em* Ω*;*

(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *quase sempre em* Ω*.*

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $|f_n - f|_{L^1(\Omega)} \to 0$

Demonstração. Ver [9], pag. 90. □

Teorema A.6. (Princípio Variacional de Ekeland) *Seja H um espaço de Hilbert, $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e $M = \{u \in E \ ; \ J(u) = 0\}$, onde $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $\nabla J(u) \neq 0$ para todo $u \in M$. Suponha que I e limitado inferiormente em M e seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para $I|_M$. Então, existe uma outra sequência minimizante $(v_n) \subset M$ tal que*

$$I(v_n) \leq I(u_n),$$
$$\|v_n - u_n\| \to 0$$

e

$$\|\nabla(I|_M)(v_n)\| \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração. Ver [4], pag. 128. □

Teorema A.7. (Lema de Brézis-Lieb) *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, tal que*

(i) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

(ii) $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω.

Entao, $u \in L^p(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Demonstração. Ver [14], pag. 21. □

Teorema A.8. (Lema de Lions) *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q = 0.$$

Então, $u_n \to 0$ fortemente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Ver [14], pag. 16. □

Teorema A.9. (P. L. Lions, 1984) *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante de* (3.1)*. Então, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que a sequência $v_n(x) = u_n(x+y_n)$ possui subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Ver [14], pag. 22. □

Apêndice B

Aplicação Tipo Baricentro

Neste apêndice, vamos definir uma aplicação do tipo baricentro e provar os principais resultados relativos a esta aplicação, que foi imprescindível no Capítulo 3 do nosso trabalho. Comecemos relembrando que

$$M_s = \{u \in M \ ; \ u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = u(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_N), \ \forall\, i = 2, \ldots, N, x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Seja $u \in M_s$ e defina

$$\tilde{u}(x) := \frac{1}{|B(x,1)|} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Note que $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida, ou seja, $\tilde{u}(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De fato, como $|B(0,1)|$ é constante, basta mostrar que

$$\int_{B(x,1)} |u(y)| dy < \infty, \ \text{para cada } x \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ temos, pela Desigualdade de Hölder, que

$$\int_{B(x,1)} |u(y)| dy \leq \left(\int_{B(x,1)} 1 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = |B(0,1)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{B.1}$$

pois $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, é claro que $\tilde{u}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

No que segue, a fim de mostrar que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, provaremos duas afirmações.

Afirmação B.1. $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(x,1)} |u(y)| dy \right)^2 dx = \frac{1}{|B(0,1)|^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)| dy \right)^2 dx. \tag{B.2}$$

Por (B.1), segue de (B.2), que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy dx.$$

Aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis a integral do lado direito acima, temos

$$\frac{1}{|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy dx = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(0,1)} |u(z+x)|^2 dz dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(0,1)} |u(z+x)|^2 dz dx.$$

Pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(z+x)|^2 dx dz.$$

Usando, novamente o Teorema da Mudança de Variáveis, na integral do lado direito acima, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(w)|^2 dw dz.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} |u|_2^2 dz = |u|_2^2 < \infty,$$

o que prova a afirmação. $\square$

Afirmação B.2. $\tilde{u}$ possui derivadas fracas, a saber,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(x,1)} \frac{\partial |u(y)|}{\partial y_i} dy, \ \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

Além disso, $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Note primeiramente que, como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então $|u| \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial |u(x)|}{\partial x_i} \varphi(x) dx, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{B.3}$$

onde $\dfrac{\partial |u|}{\partial x_i}$ são as derivadas fracas de $|u|$. Seja agora $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \left(\int_{B(x,1)} |u(y)| dy \right) dx.$$

Aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis a integral dentro dos parênteses do lado direito acima, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\left(\int_{B(0,1)} |u(z+x)|dz\right)dx \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,1)} |u(z+x)|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dzdx \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}\int_{\mathbb{R}^N} |u(z+x)|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dxdz. \qquad \text{(B.4)}\end{aligned}$$

onde a última igualdade é dada pelo Teorema de Fubini. Dado $z \in \mathbb{R}^N$, defina $\psi(x) = \varphi(x-z)$. Então, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(z+x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).$$

Segue que podemos escrever (B.4) como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}\int_{\mathbb{R}^N} |u(z+x)|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(z+x)dxdz.$$

Por (B.3), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial |u(z+x)|}{\partial x_i}\psi(z+x)dxdz \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(0,1)}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial |u(z+x)|}{\partial x_i}\varphi(x)dxdz \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,1)} \frac{\partial |u(z+x)|}{\partial x_i}\varphi(x)dzdx \\ &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\int_{B(0,1)} \frac{\partial |u(z+x)|}{\partial x_i}dzdx,\end{aligned}$$

onde a antepenúltima igualdade é dada pelo Teorema de Fubini. Novamente, pelo Teorema da Mudança de Variáveis aplicado a última igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx &= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\int_{B(x,1)} \frac{\partial |u(w)|}{\partial w_i}dwdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\left(\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(x,1)} \frac{\partial |u(w)|}{\partial w_i}dw\right)dx,\end{aligned}$$

o que mostra a primeira parte da afirmação. Além disso, o mesmo argumento usado para mostrar que $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pode ser aplicado aqui para provar que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(x,1)} \frac{\partial |u(y)|}{\partial y_i}dy \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

□

Concluímos das afirmações (B.1) e (B.2) que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Defina agora

$$\hat{u}(x) := \left[\tilde{u}(x) - \frac{1}{2}\max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x)\right]^+, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{B.5}$$

Note que $\hat{u} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida, ou seja, $\hat{u}(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De fato, é claro que se $\max\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x) < \infty$, então $\hat{u}(x) < \infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Por outro lado, se for $\max\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x) = \infty$, então $\hat{u}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, o que mostra que $\hat{u}$ está bem definida. Além disso, $\hat{u}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\hat{u}(x) = \left[\tilde{u}(x) - \max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x)\right]^+ = \begin{cases} 0, \ \text{se } \tilde{u}(x) < \dfrac{1}{2}\max\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x) \\ \tilde{u}(x) - \dfrac{1}{2}\max\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x), \ \text{se } \tilde{u}(x) \geq \dfrac{1}{2}\max\limits_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x). \end{cases}$$

Afirmação B.3. Se $2 \leq p \leq 2^*$, então $\hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \tilde{u}(x) \geq \frac{1}{2}\max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x)\right\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(x)|^p &= \int_X \left[\tilde{u}(x) - \frac{1}{2}\max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x)\right]^p dx \\ &\leq \int_X \left[\max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x) - \frac{1}{2}\max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x)\right]^p dx \\ &= \int_X \left[\frac{1}{2}\max_{\mathbb{R}^N}\tilde{u}(x)\right]^p dx \\ &\leq \int_X \tilde{u}^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^p dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

□

Vamos, agora, definir a aplicação baricentro. Para cada $u \in M_s$, defina

$$\beta(u) := \frac{1}{|\hat{u}|_p^p}\int_{\mathbb{R}^N} x\hat{u}(x)^p dx = \frac{1}{|\hat{u}|_p^p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} x_1\hat{u}(x)^p dx, \ldots, \int_{\mathbb{R}^N} x_N\hat{u}(x)^p dx\right),$$

onde $\hat{u}$ foi definida em (B.5). Mostremos que $\beta : M_s \longrightarrow \mathbb{R}^N$ está bem definida, ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_i\hat{u}(x)^p dx < \infty, \ \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

Para tanto, considere a seguinte afirmação:

Afirmação B.4. $\tilde{u}(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Demonstração. Relembre que

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(x,1)} |u(y)|dy \leq |B(0,1)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando o lim sup na igualdade acima, segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\begin{aligned}
\limsup_{|x|\to\infty} \tilde{u}(x) &\leq |B(0,1)|^{\frac{1}{2}} \limsup_{|x|\to\infty} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |B(0,1)|^{\frac{1}{2}} \limsup_{|x|\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2 \chi_{B(x,1)}(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0 \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

Como $\tilde{u}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, concluímos que $\liminf\limits_{|x|\to 0} \tilde{u}(x) = 0$, o que prova a afirmação.

□

Note agora que

$$\text{supp } \hat{u} = \overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^N \; ; \; \tilde{u}(x) \geq \frac{1}{2} \max_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x) \right\}}$$

é compacto, pois, caso contrário, teríamos uma sequência $(x_n) \subset \text{supp } \hat{u}$ tal que $|x_n| \to \infty$ e

$$\tilde{u}(x_n) \geq \frac{1}{2} \max_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x), \; \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}(x_n) \geq \frac{1}{2} \max_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} = 0$$

o que é uma contradição. Logo, para cada $i = 1, \ldots, N$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_i \hat{u}(x)^p dx = \int_{\text{supp } \hat{u}} x_i \hat{u}(x)^p dx \leq C \int_{\text{supp } \hat{u}} \hat{u}(x)^p dx < \infty,$$

pois $\hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, provando que β está bem definida.

Para cada $i = 1, \ldots, N$, seja $\beta_i : M_s \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção de β na direção de e_i, isto é,

$$\beta_i(u) = \langle \beta(u), e_i \rangle.$$

Prova-se que, se $i = 2, \ldots, N$, então $\beta_i(u) = 0$ para toda $u \in M_s$. Além disso, temos a seguinte proposição:

Proposição B.1. *$\beta_1 : M_s \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset M_s$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como na demonstração da Afirmação $B.1$, podemos obter uma constante $C > 0$ tal que

$$|\tilde{u}_n - \tilde{u}|_p^p \leq C|u_n - u|_p^p \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_n \to \tilde{u} \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

Mais ainda, como a aplicação $u \longrightarrow u^+$ é contínua, segue, da definição de $\hat{u}$, que

$$\hat{u}_n \to \hat{u} \text{ em } L^p.$$

Assim, existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e uma função $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$(i) \quad \hat{u}_{n_k}(x) \to \hat{u}(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N$$
$$(ii) \quad |\hat{u}_{n_k}(x)| \leq h(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_1(\hat{u}_{n_k}(x))^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} x_1(\hat{u}(x))^p dx,$$

ou seja,

$$\beta_1(u_{n_k}) \to \beta_1(u) \quad \Rightarrow \quad \beta \text{ é contínua .}$$

□

Referências Bibliográficas

[1] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. 82-4 (1983), 313 - 345.

[2] C. A. Stuart, *Bifurcation in $L^p(\mathbb{R}^N)$ for a Semilinear Elliptic Equation*, Proc. London Math. Soc. - 3, 57 (1988), 511 - 541.

[3] D. Gilbarg & N. S. Trundiger, *Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[4] D. G. Costa, *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhäuser, 2006.

[5] E. L. Lima, *Curso de Análise, Vol. 2*, IMPA, Rio de Janeiro 2007.

[6] F. A. Berezin e M. A. Shubin, *The Schrödinger Equations*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[7] G. Cerami, R. Molle, *On some Schrödinger equations with non regular potential at infinity*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 28 (2010), 827–844.

[8] G. Cerami, *Some nonlinear elliptic problems in unbounded domains*, Milan J. Math., 74 (2006), 47–77.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[10] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[11] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Printice-Hall, 1971.

[12] L. C. Evans, *Partial Defferential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[13] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer Verlag, 4° Ed., 2007.

[14] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.