

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de atrator global para equações de Navier-Stokes sobre alguns domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$

Jarbas Dantas da Silva

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de atrator global para equações de Navier-Stokes sobre alguns domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$

por

Jarbas Dantas da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Flank David Moraes Bezerra

João Pessoa – PB
Julho de 2014

S586e Silva, Jarbas Dantas da.
Existência de atrator global para equações de Navier-Stokes
sobre alguns domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$ / Jarbas Dantas da
Silva.-- João Pessoa, 2014.
69f.
Orientador: Flank David Moraes Bezerra
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Atrator global. 3. Domínios ilimitados.
4. Equações de Navier-Stokes. 5. Desigualdade de Poincaré.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Existência de atrator global para equações de Navier-Stokes sobre alguns domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$

por

Jarbas Dantas da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 18 de julho de 2014.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Severino Horácio da Silva – UFCG
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais e irmãos.

Agradecimentos

Ao professor Doutor Flank David Morais Bezerra pela excelente orientação e dedicação ao trabalho.

Aos professores que fizeram parte da minha trajetória no mestrado acadêmico Uberlandio Batista Severo, Fágner Dias Araruna, Bruno Henrique, Antônio Andrade, Alexandre Simas, Pedro Hinojosa e Aurélio Menegon.

Às minhas professoras de graduação Márcia e Gisélia por sempre acreditar em minha capacidade, pela assistência em meu nivelamento e por motivar o curso de pós-graduação.

Aos meus pais, irmãos Jordânia e Jordão, tios Marinaldo e Celeste, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

A Daiany Pinheiro, pelo companheirismo e por me apoiar em momentos difíceis.

Aos meus colegas Cleiton Ricardo, Hudson Cavalcante, Luan Sousa e Renato Augusto pelos momentos compartilhados.

Aos amigos Felipe Alfredo, José de Brito, Fágner, Vandeson e Clemerson Menezes.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o sistema de equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \text{ em } \Omega \times [0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times [0, +\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

em domínios ilimitados sob os quais vale a desigualdade de Poincaré, isto é, existe uma constante $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \phi^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Provamos a existência de atrator global no espaço de fases natural para este sistema explorando a equação de energia do problema.

Palavras-chave: Atrator global; domínios ilimitados; equações de Navier-Stokes; desigualdade de Poincaré.

Abstract

In this work, we study the Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \text{ em } \Omega \times [0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times [0, +\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

in an unbounded domain such that the Poincaré's inequality is holds, i.e., there is a constant $\lambda_1 > 0$ such that we have the following inequality

$$\int_{\Omega} \phi^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx, \text{ for all } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

We show the existence of global attractor in the natural phases spaces for this system exploring the energy equation of the problem.

Keywords: Global attractor; unbounded domains; Navier-Stokes system; Poincaré's inequality.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados e conceitos preliminares	5
1.1 Espaços funcionais	5
1.2 Principais resultados utilizados	9
2 Teoria de atratores globais para semigrupos não lineares	14
2.1 Noções básicas	14
2.2 Atrator global	22
3 Equações de Navier-Stokes sobre alguns domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$	25
3.1 O sistema de equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^2$	25
3.2 Existência de um conjunto absorvente	36
3.3 A compacidade assintótica do semigrupo	39
4 Considerações finais	56
Referências Bibliográficas	58

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X ;
- $\sup_{ess}$ denota o supremo essencial;
- $C, C_1, C_2, \dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota a convergência na topologia fraca*;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $\hookrightarrow$ denota imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota imersão compacta;
- $supp(u)$ denota o suporte da função u ;

Introdução

O objetivo deste trabalho é, tendo como base o artido do autor R. Rosa [14], fazer o estudo das equações de Navier²-Stokes³, as quais regem escoamentos de fluídos incompressíveis tais como líquidos e gases. Aqui, não trataremos da modelagem de tal fenômeno via equações diferenciais, no entanto para situar fisicamente o problema, faremos inicialmente algumas colocações de caráter geral para depois analisar as questões técnicas envolvidas e discutidas no presente trabalho.

Recordemos que, na teoria clássica da Mecânica dos Meios Contínuos, o comportamento físico dos materiais deve obedecer a três princípios básicos de balanço, conforme descrito por Boldrini [4], o de massa, o de momento linear e o de energia, sendo o balanço de momento angular geralmente levado em conta pela hipótese de que não existem fontes microscópicas de momento angular; conclui-se então que o tensor tensão é simétrico, o que, por sua vez, implica que o balanço de momento angular é consequência do balanço do momento linear. Além disso, em muitas situações fisicamente importantes, nos quais estamos interessados apenas no comportamento estritamente mecânico, e não energético do material, é possível desacoplar as equações que correspondem aos balanços de massa e momento linear da equação que corresponde ao balanço de energia. Se esta é a situação, e se o material estudado corresponde a um fluido Newtoniano com dissipação do tipo viscoso, somos levados ao estudo das chamadas equações de Navier-Stokes.

Se supusermos, além das hipóteses anteriores, o fato de que o fluido é incompressível e homogêneo (densidade constante), somos levados às equações clássicas de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \rho_0 (u \cdot \nabla) u + \nabla p = \rho_0 f \text{ em } \Omega \times [0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \times [0, +\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (1)$$

²Claude Louis Marie Henri Navier (Dijon, 10 de fevereiro de 1785 - Paris, 21 de agosto de 1836)

³Sir George Gabriel Stokes (Skreen, Condando de Sligo, 13 de Agosto de 1819 - Cambridge, 1 de Fevereiro de 1903)

onde Ω (região de escoamento do fluido) é um domínio (aberto e conexo) do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$, não necessariamente limitado, $u = u(x, t)$ é o campo de velocidades do fluido em um ponto $x \in \Omega$ do espaço e instante $t \geq 0$; $\rho_0 > 0$ é a densidade (constante) do fluido; $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade cinemática (constante), a viscosidade desempenha nos fluidos o mesmo papel que o atrito nos sólidos; $f = f(x)$ é a densidade de forças externas por unidade de massa (assumiremos ser independente do tempo); ∇ e Δ e div , representam os operadores gradientes, laplaciano e divergente, respectivamente; $u \cdot \nabla u$ indica o operador de convecção, cuja i -ésima componente em coordenadas cartesianas é dado por

$$[(u \cdot \nabla)u]_i = \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

onde u_k indica a k -ésima componente da velocidade u em coordenadas cartesianas, e $p = p(x, t)$ é a pressão hidrostática. A equação

$$\text{div} u = \nabla \cdot u = 0, \quad \text{em } \Omega \times [0, +\infty), \quad (2)$$

indica que o fluido é incompressível (neste caso, o balanço de massa também é automático). A condição

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty), \quad (3)$$

indica que o fluido adere às paredes da região Ω que é considerado em repouso;

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{em } \Omega$$

é a velocidade inicial do fluido.

Vale notar que o caso $N = 1$ é trivial, pois neste caso a condição (2) juntamente com (3), implica que $u(x, t) \equiv 0$.

Por razões técnicas, consideramos somente o caso em que $\rho_0 = 1$ e a dimensão especial $N = 2$.

A análise matemática de (1) foi introduzida na literatura por Leray em 1934 [9], depois ela foi sistematicamente investigada por O. Ladyzhenskaya⁴ [8], Lions [11], Temam [18], Tartar [17] e vários outros matemáticos.

É comumente aceito que a compreensão completa do comportamento assintótico dos fluidos de Navier-Stokes é essencial em vários aspectos. No contexto da teoria de atratores globais, os primeiros a provarem a existência do atrator global para as

⁴Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (Kologriv, 7 de março de 1922 - São Petersburgo, 12 de janeiro de 2004)

equações de Navier-Stokes em domínios suaves (domínios com fronteira regular, por exemplo, de classe C^2) e limitados do $\mathbb{R}^2$ foram Ladyzhenskaya [8] e C. Foias e R. Temam [6], os resultados de C. Foias e R. Temam permite-nos concluir que quando o domínio é um subconjunto suave e limitado do $\mathbb{R}^2$, o sistema dinâmico associado às equações de Navier-Stokes possuem um atrator global de dimensão fractal finita; em outras palavras, o comportamento assintótico de tal sistema é “determinado” por um objeto finito-dimensional.

Nesta dissertação estamos interessados no caso de domínios ilimitados, e acreditamos que os primeiros a tratarem deste caso foram F. Abergel [1] e A. V. Babin [3] onde é exigido que o termo forçante f pertença a algum espaço de Sobolev com peso.

Para melhor compreensão desta dissertação, a seguir resumimos os capítulos que a compõem.

No primeiro capítulo relembramos alguns resultados essenciais à continuidade do trabalho. Primeiro, apresentamos um breve compêndio sobre a teoria dos espaços L^p s e espaços de Sobolev. Em seguida, será feita uma enumeração dos resultados a serem utilizados no decorrer do texto. Basicamente, faremos neste capítulo algumas definições e conceitos básicos, resultados sobre teoria das distribuições e análise funcional, veja por exemplo, H. Brézis [5], R. Adams [2]. A leitura deste capítulo pode ser omitida, se o leitor estiver familiaridade com estes assuntos.

O segundo capítulo é dedicado à teoria de atratores globais para semigrupos não lineares, relembramos a definição de semigrupos não lineares, semidistância de Hausdorff, conjuntos absorventes e atratores globais para semigrupos não lineares. Por fim, apresentamos resultados clássicos que apresenta condições necessárias e suficientes para a existência de atratores globais, para maiores detalhes veja J. K. Hale⁵ [7] e R. Temam [18]; a leitura deste capítulo também pode ser omitida, se o leitor estiver familiaridade com estes assuntos.

Supondo que Ω seja um domínio não necessariamente limitado do $\mathbb{R}^2$ sobre o qual vale a desigualdade de Poincaré, isto é, existe uma constante $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \phi^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega),$$

por exemplo, Ω pode ser um domínio limitado do $\mathbb{R}^2$ com projeção limitada em alguma coordenada.

Esta condição é bastante utilizada em R. Rosa [14] de modo que se possa contornar a falta de compacidade nas imersões sem que seja necessário o uso de espaços de Sobolev com peso.

⁵Jack Kenneth Hale (Dudley, Kentucky, 3 de outubro de 1928 - Atlanta, Georgia, 9 de dezembro 2009)

Também, supomos que a não linearidade f pertence ao espaço dual V' , onde o espaço V é definido como sendo o fecho do espaço $\mathcal{V}$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, dado por

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega); \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega\}.$$

No terceiro capítulo dissertamos sobre a existência de atrator global para o problema (1) em H , onde este espaço é definido com sendo o fecho do espaço $\mathcal{V}$ em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. A prova possui basicamente duas etapas cruciais:

- Etapa 1. Prova da existência de um conjunto absorvente em H , conforme Teorema 3.8, e a ideia central foi explorar a equação da energia 3.35;
- Etapa 2. Prova da compacidade assintótica em H do semigrupo gerado pelo problema (1), conforme o Teorema 3.12, e a ideia central foi explorar a equação da energia e o Lema 3.11.

A nossa principal referência neste capítulo da dissertação foi o artigo do R. Rosa [14] que trata da existência de atrator global para o problema (1) em H e de estimativas para a dimensão fractal e dimensão de Hausdorff do atrator.

Finalmente, no quarto capítulo faremos breves considerações finais sobre o trabalho. Apresentamos algumas motivações ao considerar o texto do R. Rosa [14], e alguns problemas a cerca do sistema de Navier-Stokes a serem abordados com a mesma análise matemática aqui utilizada.

Capítulo 1

Resultados e conceitos preliminares

Neste capítulo, assim como no capítulo 2, serão abordados resultados e conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f , e denota-se por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Assim, $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominado de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções definidas sobre Ω , infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto, em Ω .

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por:

Exemplo 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ compactamente contido em Ω . Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ a norma euclidiana de x . Temos que

$f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1. Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

- (i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Observação 1.1. É possível (ver Schwartz [15]) dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de espaço das funções testes sobre Ω .

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria de espaços funcionais.

Exemplo 1.2. Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver Medeiros-Miranda [12]). Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L_{loc}^1(\Omega)$ será identificado como uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3. Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [12], vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não definido por uma função de $L_{loc}^1(\Omega)$.

Definição 1.2. Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3. Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2. Decorre da Definição 1.3 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 1.3. $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω , onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim,

$$|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.4. Vê-se em Medeiros-Rivera [13] que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m , sobre Ω , formado pelas (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, para qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (vide Medeiros-Rivera [13]).

Observação 1.5. Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

é um espaço de Hilbert.

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0, T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.6. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em Lions [11].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado de espaço das distribuições vetoriais sobre $]0, T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.4. Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0, T[$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Exemplo 1.4. Dadas $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação

$T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

integral de Bochner em X , é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -sima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0, T; X)$ é um espaço de Banach (vide Adams [2]).

Observação 1.7. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0, T; X)$ será denotado por $H^m(0, T; X)$, o qual, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0, T; X)$ o fecho, em $H^m(0, T; X)$, de $\mathcal{D}(0, T; X)$ e por $H^{-m}(0, T; X)$ o dual topológico de $H_0^m(0, T; X)$.

1.2 Principais resultados utilizados

Lema 1.1 (Imersões de Sobolev). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Aqui o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Prova. Ver Brezis [5].

Lema 1.2 (Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

Aqui o símbolo $\xhookrightarrow{c}$ denota imersão compacta.

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Seja E um espaço de Banach, o conjunto $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca* $\sigma(E', E)$.*

Prova. Ver Brezis [5].

Lema 1.4 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Prova. Ver Medeiros-Rivera [13].

Lema 1.5 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então existe uma constante C que depende apenas de Ω e p tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (1.1)$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que por sua vez é equivalente à norma usual.

Observação 1.8. *A desigualdade de Poincaré permanece válida se Ω tem medida finita e também se Ω tem projeção limitada em uma das coordenadas.*

Prova. Ver Adams [2] ou Brezis [5].

Lema 1.6 (Desigualdade de Young). *Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova. Ver Brezis [5].

Lema 1.7 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova. Ver Brezis [5].

Proposição 1.8. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Então a aplicação*

$$v \mapsto \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma em $H^2(\Omega)$.

Prova. Ver Medeiros-Miranda [12].

Definição 1.5. *Uma forma bilinear $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é dita*

(i) Contínua se existe uma constante C tal que

$$|b(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) Coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$b(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.9 (Lax-Milgram). *Sejam H um espaço de Banach e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.10. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\mu \in L^p(0, T, X)$, $\mu' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $\mu \in C^0([0, T]; Y)$.*

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.11 (Compacidade Aubin-Lions). *Suponha $X \subset B \subset Y$ com imersão compacta $X \xhookrightarrow{c} B$ onde X, Y e B são espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$. Seja F limitado em $L^p(0, T, X) \cap W^{s,r}(0, T, Y)$, onde $s > 0$ se $r \geq p$ e onde $s > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ se $r \leq p$. Então F relativamente compacto em $L^p(0, T, B)$ (e em $C(0, T, B)$ se $p = \infty$).*

Prova. Ver Simon [16].

Definição 1.6. *Seja N um espaço normado e N' o seu dual, dizemos que uma sequência $\{x_n\}_n \subset N$ converge fraco para $x \in N$, denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, se*

$$f(x_n) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

para todo $f \in N'$.

Definição 1.7. *Dizemos que uma sequência $\{f_n\}_n \subset N'$ converge fraco* para $f \in N'$, denotamos por $f_n \xrightarrow{*} f$, se*

$$\widehat{x}(f_n) \rightarrow \widehat{x}(f), \quad n \rightarrow \infty,$$

para todo $\widehat{x} \in \widehat{N} \subset N''$.

Teorema 1.12. *Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sequência de E' . Se $f_n \rightarrow f$ fraco* em E' , então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.13 (Banach-Steinhaus). *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge, quando $n \rightarrow \infty$, a um limite que denotamos por Tx . Então tem-se:*

$$(i) \quad \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty,$$

$$(ii) \quad T \in \mathcal{L}(E, F),$$

$$(iii) \quad \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.14 (Gauss-Green). *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} u \nu^i d\Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.15 (Fórmulas de Green). (i) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} \nabla \gamma \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta \gamma dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} u \Delta \gamma - \gamma \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Prova. Ver Brezis [5].

Teorema 1.16. Sejam X e Y espaços de Banach tais que $Y \xhookrightarrow{c} X$ e $\mathcal{G}$ um conjunto de funções em $L^1(\mathbb{R}; Y) \cap L^p(\mathbb{R}; X)$, $p > 1$, satisfazendo as condições:

1. $\mathcal{G}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}; X)$ e $L^1(\mathbb{R}; Y)$;
2. a convergência

$$\int_0^{T-a} |g(a+s) - g(s)|_X^p ds \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

é uniforme em $g \in \mathcal{G}$;

3. o suporte das funções $g \in \mathcal{G}$ está contido num compacto fixo de $\mathbb{R}$; digamos $[-L, +L]$.

Então $\mathcal{G}$ é relativamente compacto em $L^p(0, T; X)$.

Prova. Ver Temam [19] pg. 97.

Proposição 1.17. Seja B um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em B tal que $x_n \rightharpoonup x$, fraco, e

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \rightarrow x$, forte em B .

Prova. Ver Brezis [5] pg. 78.

Capítulo 2

Teoria de atratores globais para semigrupos não lineares

2.1 Noções básicas

Nesta seção introduziremos a noção de atrator global para semigrupos não lineares (sistemas dinâmicos autônomos) dissipativos. No que segue (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{C}(X)$ é o conjunto das aplicações contínuas de X em si próprio.

Definição 2.1. *Um semigrupo não linear (sistema dinâmico autônomo) em $\mathcal{C}(X)$ é uma família de aplicações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em $\mathcal{C}(X)$ que verifica as propriedades:*

- (i) $S(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X ;
- (ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para todos $t, s \geq 0$;
- (iii) A aplicação $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)x \in X$ é contínua.

Exemplo 2.1. *Consideremos o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = -ax(t) + f(x), & t \geq 0; \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde f é uma função (não necessariamente linear). Queremos encontrar $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (2.1). Pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias o problema acima possui uma única solução para cada dado inicial $x(0) = x_0$.

Para cada $t \geq 0$ definimos

$$\begin{aligned} S(t) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 &\mapsto e^{-at}x_0 + \int_0^t e^{a(s-t)}f(x(s))ds. \end{aligned}$$

A família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o semigrupo não linear associado ao problema de valor inicial (2.1).

No que segue apresentamos a definição de órbita.

Definição 2.2. Por um ponto x em X , define-se a órbita positiva $\gamma^+(x)$ por x como sendo $\gamma^+(x) := \{S(t)x; t \geq 0\}$. Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^+(x) := \{S(t)x; t \geq s\}$ a órbita positiva por x no instante s .

Uma *solução para trás* por $x \in X$ é uma aplicação contínua $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $t \leq 0$ vale $S(s)\phi(t) = \phi(s+t)$ para todo $0 \leq s \leq -t$. Uma *solução global* por $x \in X$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $S(s)\phi(t) = \phi(s+t)$ para todo $s \geq 0$.

Caso X seja um espaço de Banach de dimensão infinita e $S(t)$ seja linear, *soluções para trás* ou *globais*, em geral, não existem e sua existência está condicionada à escolha de x . Além disso, quando uma *solução para trás* existe, ela pode não ser única, isto ocorre, pois $S(t)$ não é necessariamente injetivo para todo $t > 0$.

Definição 2.3. Se existir uma *solução para trás* por $x \in X$, então definimos a órbita negativa por x como sendo

$$\gamma^-(x) := \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde

$H(t, x) = \{y \in X; \text{ existe uma solução para trás por } x, \text{ definida por } \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ com}$

$$\phi(0) = x \text{ e } \phi(-t) = y\}.$$

Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^-(x) := \bigcup_{t \geq s} H(t, x)$ a órbita negativa por x no instante s .

Definição 2.4. A órbita completa por x (se existir órbita negativa por x) é definida por $\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Para um subconjunto B de X , definamos as órbitas positiva, negativa e completa por B (se existir a órbita negativa para cada $x \in B$), respectivamente, como sendo

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x) \quad \text{e} \quad \gamma(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma(x).$$

Fixado $s > 0$, também usaremos as notações

$$\gamma_s^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^+(x) \quad \text{e} \quad \gamma_s^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^-(x).$$

Definição 2.5. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito limitado, se $\gamma^+(B)$ for limitada sempre que B for um subconjunto limitado de X .

Definição 2.6. Seja B um subconjunto de X . Definimos os conjuntos ω -limite e α -limite de B , respectivamente, como sendo

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)}^1 \quad \text{e} \quad \alpha(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(B)}.$$

Em particular, os conjuntos ω -limite e α -limite de um ponto $x \in X$, respectivamente, são dados por

$$\omega(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(x)} \quad \text{e} \quad \alpha(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(x)}.$$

Os conjuntos α -limite e ω -limite de um ponto constituem as regiões do espaço onde “nascem” e “morrem” as órbitas deste ponto, respectivamente.

Vale notar a seguinte caracterização do conjunto ω -limite de um subconjunto B de X ,

$$\omega(B) = \{y \in X; \text{ existem sequências } \{t_n\} \text{ em } [0, +\infty), t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } \{x_n\} \text{ em } B, \\ \text{com } y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n\}.$$

Agora, abordaremos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo. Para isto, recordemos a definição da *semi-distância de Hausdorff*, $\text{dist}(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de X . A saber

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Notemos que a semi-distância de Hausdorff mede o quanto o conjunto A está contido no conjunto B . Além disso se A e B são subconjuntos limitados de X , então

$$\text{dist}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

¹Se Ω é um subconjunto de X , então $\overline{\Omega}$ denota o seu fecho em X .

De fato, por um lado dado $a \in A$, como $\text{dist}(A, B) = 0$ temos que

$$\inf_{b \in B} d(a, b) \leq \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = 0,$$

logo $\inf_{b \in B} d(a, b) = d(a, B) = 0$, conseqüentemente, $a \in \overline{B}$. Reciprocamente, se $A \subset \overline{B}$, temos que $d(a, B) = 0$, para cada $a \in A$, daí

$$\inf_{b \in B} d(a, b) = 0, \quad \forall a \in A,$$

portanto

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = \text{dist}(A, B) = 0.$$

Observação 2.1. $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ não é simétrica e a igualdade $\text{dist}(A, B) = 0$ não implica que $A = B$. Se A é um subconjunto de B em X , então $\text{dist}(A, B) = 0$. A distância simétrica de Hausdorff, $\text{dist}_H(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de X é definida por

$$\text{dist}_H(A, B) := \text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, A).$$

Definição 2.7. Sejam A e B subconjuntos de X . Diremos que A atrai B sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)B, A) = 0,$$

ou equivalentemente, para cada $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon, B) > 0$ tal que $S(t)B$ está contido em

$$\mathcal{O}_\epsilon(A) := \cup_{x \in A} \{z \in X; d(z, x) < \epsilon\} \text{ para todo } t \geq T.$$

Se existir um $t_0 \geq 0$ tal que $S(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$, então diremos que A absorve B sob o semigrupo.

Em particular, pela Observação 2.1, se A absorve B , então A atrai B . A recíproca nem sempre é válida, para isso consideremos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. Consideremos o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ gerado pelo problema de valor inicial (2.1) com f identicamente nula e os conjuntos $A = \{0\}$ e $B = (0, 1]$. Notemos

que A atrai B sob ação do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ pois

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)B, A) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{y \in S(t)B} \inf_{x \in A} |x - y| \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in B} \inf_{x \in A} |x - S(t)x_0| \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in B} \inf_{x \in A} |x - e^{-at}x_0| \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in B} |0 - e^{-at}x_0| \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} = 0.
 \end{aligned}$$

Notemos que no exemplo anterior, A não absorve B sob ação de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, visto que para cada $x_0 \in B = (0, 1]$

$$S(t)x_0 = e^{-at}x_0 \neq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto

$$S(t)B \not\subset A, \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 2.8. *Seja X um espaço métrico dizemos que $B_0 \subset X$ é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se para cada $B \subset X$ limitado, existe $t_B > 0$ tal que*

$$S(t)B \subset B_0, \quad \forall t \geq t_B.$$

Definição 2.9. *Diremos que um subconjunto A de X é invariante (ou positivamente invariante ou negativamente invariante) com relação ao semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ quando para qualquer $x \in A$, existir uma órbita completa $\gamma(x)$ por x tal que $\gamma(x) \subset A$ (ou tal que $\gamma^+(x) \subset A$ ou tal que $\gamma^-(x) \subset A$).*

Observação 2.2. *Um subconjunto A de X é invariante sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se, $S(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.*

Exemplo 2.3. *Os conjuntos ω e α -limites de um subconjunto de X são invariantes.*

Definição 2.10. *Um equilíbrio (ponto de equilíbrio) para o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$ é um ponto $x^* \in X$ tal que $S(t)x^* = x^*$ para todo $t \geq 0$. A aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto x^* \in X$ é dita uma solução estacionária ou solução de equilíbrio para o semigrupo.*

Lema 2.1. *Sejam K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}$ uma sequência em X com $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, K) = 0$. Então, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Se um conjunto compacto K atrai um conjunto compacto K_1 sob o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, então $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $d(x_n, K) = d(x_n, c_n)$ para algum $c_n \in K$. Como K é compacto existe uma subsequência $\{c_{n_j}\} \subset \{c_n\}$ com $c_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j}$, para algum $c_0 \in K$. Além disso, $\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n_j}, K) = 0$, onde

$$d(x_{n_j}, K) = d(x_{n_j}, c_{n_j}) \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = c_0$, pois para todo $j \in \mathbb{N}$, vale

$$d(x_{n_j}, c_0) \leq d(x_{n_j}, c_{n_j}) + d(c_{n_j}, c_0) = d(x_{n_j}, K) + d(c_{n_j}, c_0).$$

Quanto a segunda afirmação, tome $\{y_n\} \subset \gamma^+(K_1)$, onde $y_n = S(t_n)x_n$, $x_n \in K_1$. Pela compacidade de K_1 , existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$, $x \in K_1$.

Se existir $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$, com

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j} = t,$$

então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S(t_{n_j})x_{n_j} = S(t)x,$$

o que implica que $y_{n_j} = S(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para $S(t)x$ quando j tende ao infinito. Por outro lado, se $t_n \rightarrow \infty$, então usamos a primeira afirmação e concluímos que toda sequência em $\gamma^+(K_1)$ possui uma subsequência convergente.

A compacidade de $\overline{\gamma^+(K_1)}$ implica que $\omega(K_1)$ é não vazio. Além disso, seja $x \in \omega(K_1)$, então existem $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\{x_n\}$ em K_1 tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n$. Como K_1 é atraído por K e

$$d(x, K) \leq d(x, S(t_n)x_n) + d(S(t_n)x_n, K) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos que $x \in K$.

Lema 2.2. Seja B um subconjunto de X tal que $\omega(B)$ seja compacto e $\omega(B)$ atrai B , então $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. Quanto ao conjunto α -limite, se $\alpha(B)$ for compacto e $\text{dist}(H(t, B), \alpha(B)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\alpha(B)$ será invariante. Além disso, se $H(t, B)$ for conexo para cada t , então assim será $\alpha(B)$.

Prova. Caso $\omega(B) \neq \emptyset$, da continuidade de $S(t)$ e a da caracterização apresentada ao conjunto ω -limite, temos $S(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Resta-nos observar que $\omega(B) \subset S(t)\omega(B)$. Seja $x \in \omega(B)$, então existem sequências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$ e $\{x_n\}$ em B tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n$. Ora, como $t_n \rightarrow \infty$, para cada $t > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n > n_0$. Com isso, para $n > n_0$, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t)S(t_n - t)x_n$ e pela atração de B pelo compacto $\omega(B)$, o Lema 2.1 assegura

que $S(t_n - t)x_n$ admite uma subsequência convergente (ainda denotada por $S(t_n - t)x_n$), isto é, existe $y \in \omega(B)$ tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n - t)x_n$, o que implica, $x = S(t)y$, isto é, $x \in S(t)\omega(B)$.

Agora, suponhamos que B seja conexo. Se $\omega(B)$ fosse desconexo, então poderíamos escrever $\omega(B)$ como a união de dois compactos disjuntos. Sejam K_1 e K_2 compactos, não vazios e disjuntos tais que $\omega(B) = K_1 \cup K_2$. Como $\omega(B)$ atrai B , para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $M > 0$ tal que

$$S(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(\omega(B)) \text{ para todo } t \geq M.$$

Uma vez que, $\mathcal{O}_\epsilon(\omega(B)) = \mathcal{O}_\epsilon(K_1) \cup \mathcal{O}_\epsilon(K_2)$ com $\mathcal{O}_\epsilon(K_1) \cap \mathcal{O}_\epsilon(K_2) = \emptyset$, temos $S(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_i)$ para algum $i \in \{1, 2\}$ para todo $t \geq M$. Ora, como

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)} \subset \overline{\gamma_M^+(B)},$$

concluimos que $\omega(B) \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_i)$. Logo, $\omega(B) \subset K_i$, ou seja, K_j ($j \neq i$ em $\{1, 2\}$) é vazio.

Lema 2.3. Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto para algum $s_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B . Se para algum $s_0 > 0$, $\gamma_{s_0}^-(B)$ é não vazio e $\overline{\gamma_{s_0}^-(B)}$ é compacto, então $\alpha(B)$ é não vazio, compacto e invariante.

Prova. A família $\{\overline{\gamma_s^+(B)}; s \geq s_0\}$ é formada por conjuntos compactos, não vazios e verifica a propriedade da interseção finita, então $\omega(B)$ é não vazio e compacto. Suponha que $\omega(B)$ não atraia B , então existem $\epsilon > 0$ e sequências $\{x_n\}$ em B e $t_n \rightarrow \infty$ tais que

$$d(S(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto e $\{S(t_n)x_n; n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$ e $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ tais que $S(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para algum $y \in \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$. Veja que $y \in \omega(B)$. Logo, existe $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(S(t_{n_j})x_{n_j}, \omega(B)) < \epsilon \text{ para todo } j \geq j_\epsilon,$$

o que é absurdo.

Lema 2.4. Suponha que $x \in X$ tal que exista uma solução para trás $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ por x e tal que $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ seja compacto. Defina

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X; \text{ existe uma sequência } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ tal que } \phi(-t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v\}.$$

Então, $\alpha_\phi(x)$ é não vazio, compacto e invariante.

Prova. Note que $\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi((-\infty, -t])}$, disto segue que $\alpha_\phi(x)$ é não vazio e compacto. Além disso, se $x \in \alpha_\phi(x)$, então existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $\phi(-t_n) \rightarrow x$. Com isso, pela continuidade de $S(t)$, obtemos $\phi(-t_n + t) = S(t)\phi(-t_n) \rightarrow S(t)x$, e portanto, $S(t)x \in \alpha_\phi(x)$. Por outro lado, sejam $t > 0$ e $y \in \alpha_\phi(x)$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ (suponha que $t_n \geq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tal que $\phi(-t_n) \rightarrow y$. Como $\{\phi(-t_n - t); t \geq 0\}$ é relativamente compacto, passando para subsequência se necessário, existe $x \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \rightarrow x$, e portanto, $x \in \alpha_\phi(x)$. O que implica $S(t)x = y$.

Definição 2.11. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito assintoticamente suave, se para cada fechado, limitado e não vazio $B \subset X$ com $S(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $K = K(B) \subset B$ que atrai B .

Lema 2.5. Sejam $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ assintoticamente suave e B um subconjunto de X não vazio tal que $\gamma_{s_0}^+(B)$ é limitada para algum $s_0 > 0$. Então, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B .

Prova. Como $S(t)\gamma_{s_0}^+(B) \subset \gamma_{s_0}^+(B)$ para todo $t \geq 0$, da continuidade de $S(t) : X \rightarrow X$, temos $\omega(B) \subset \overline{S(t)\gamma_{s_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$. Como $S(t)$ é assintoticamente suave, existe um compacto $K \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$, a fortiori, atrai $\gamma_{s_0}^+(B)$. Portanto, existem sequências $\epsilon_n \rightarrow 0$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\overline{S(t)\gamma_{s_0}^+(B)} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(K)$ para todo $t \geq t_n$. Assim, $\omega(B) \subset K$. Como $\omega(B)$ é fechado e K é compacto, temos a compacidade de $\omega(B)$.

Suponha que $\omega(B)$ não atraia B , então existem $\epsilon > 0$ e sequências $\{x_n\}$ em B e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\text{dist}(S(t_n), \omega(B)) > \epsilon$. Segue da compacidade de K e do Lema 2.1 que existem subsequências $\{x_{n_j}\}$ e $t_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ tais que $S(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z \in \omega(B)$, o que é uma contradição. Por conseguinte, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B , e usando o Lema 2.2 concluímos a invariância.

Definição 2.12. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito condicionalmente eventualmente compacto, se para qualquer conjunto limitado B em X tal que $S(t)B$ é limitado para algum $t \geq 0$, temos $\overline{S(t)B}$ compacto. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito eventualmente compacto se ele é condicionalmente eventualmente compacto e para cada conjunto limitado B em X , existe $t \geq 0$ tal que $S(t)B$ é um conjunto limitado.

Teorema 2.6. Todo semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente suave.

Prova. Seja $B \subset X$ um subconjunto não vazio, fechado e limitado tal que $S(t)B \subset B$. Como $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ condicionalmente eventualmente compacto, temos $\overline{\gamma_s^+(B)}$ compacto

para todo $s \geq 0$. Assim, segue do Lema 2.3 que $\omega(B) \subset B$ é não vazio, compacto e atrai B .

Definição 2.13. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito ponto dissipativo (limitado dissipativo, compacto dissipativo, localmente compacto dissipativo) se existe um subconjunto limitado B em X que atrai pontos (subconjuntos limitados, conjuntos compactos, vizinhanças de conjuntos compactos) de X .

2.2 Atrator global

Nesta seção apresentamos a definição de atrator global para semigrupos não lineares e alguns resultados que caracterizam os semigrupos que possuem atratores globais.

Definição 2.14. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é dito um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, se ele é compacto, invariante, e atrai subconjuntos limitados de X .

Observação 2.3. Um atrator global se encontra dentro de um conjunto atraente B , e em geral, é muito menor que B e descreve o comportamento assintótico das soluções de uma maneira mais precisa. Um subconjunto B de X é dito atraente se ele é capaz de atrair todo subconjunto limitado de X sob o semigrupo em questão. Um atrator $\mathcal{A}$ para $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o conjunto maximal limitado invariante para $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, isto significa que, se C é limitado e $S(t)C = C$ para todo $t \geq 0$ então $C \subset \mathcal{A}$, isto implica em particular que o atrator global para $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se existir é único.

A compacidade implica que o atrator é um subconjunto topologicamente pequeno de X . A propriedade de atrair subconjuntos limitados significa que todo o comportamento assintótico do sistema acontece perto de $\mathcal{A}$ e não só dentro de B como na propriedade de atração. Finalmente a invariância é determinante, já que diz que toda a dinâmica sobre o atrator $\mathcal{A}$ é invariante, isto é, $\mathcal{A}$ atua como um objeto dinâmico independente.

Observação 2.4. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo. Suponha que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Segue da definição de atrator que através de cada ponto $x \in \mathcal{A}$ existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow X$. Reciprocamente, toda solução global limitada para o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui seu traço contido no atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo. Tendo dito isto, concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X; \text{ existe uma solução global limitada por } x\}.$$

Lema 2.7. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente suave. Suponha que para cada subconjunto compacto B de X existe um $s_B \geq 0$ tal que $\gamma_{s_B}^+(B)$ é limitado. Então, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é compacto dissipativo.

Prova. Como $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto B não vazio, fechado e limitado que absorve pontos de X . Seja $U = \{x \in B; \gamma^+(x) \subset B\}$. Como U absorve pontos, temos U não vazio. Claramente, $\gamma^+(U) \subset U$, e portanto, é limitado e absorve pontos.

Também, sabemos que $S(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ e que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente compacto. Portanto, existe um conjunto compacto K , com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U , e portanto, K atrai pontos de X . O conjunto K atrai a si próprio (pois ele atrai $\overline{U}$ e $K \subset U$), e portanto, segue do Lema 2.1 que $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K) \subset K$. O Lema 2.3 implica que $\omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai K . Portanto, $\omega(K)$ atrai K que atrai pontos de X e, por conseguinte, $\omega(K)$ atrai pontos de X .

No que segue, mostraremos que existe uma vizinhança V de $\omega(K)$ tal que $\gamma_s^+(V)$ é limitado para algum $s \geq 0$. Se este não é o caso, existem sequências $\{x_n\} \subset X$, com $x_n \rightarrow y$, onde $y \in \omega(K)$ e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $\{S(t_n)x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado. Considere $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, portanto $\overline{A}$ é compacto e $\gamma_s^+(A)$ é não limitado para cada $s \geq 0$. Isto contradiz a hipótese de que existe um t_A tal que $\gamma_{t_A}(A)$ é limitado.

Sejam V uma vizinhança de $\omega(K)$ e $t_V \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Como $\omega(K)$ atrai pontos de X e $S(t)$ é contínua, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $s_x > 0$ tais que $S(t)\mathcal{O}_x \subset \gamma_{t_V}^+(V)$ para $s > s_x$, isto é, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para todo $x \in X$. Com isso, segue que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é compacto dissipativo.

Lema 2.8. Sejam $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X e K subconjunto compacto de X . Se K atrai a si próprio sob o semigrupo $\{S(t); t \geq 0\}$, então $\omega(K) = \bigcap_{t \geq 0} S(t)K$.

Prova. Seja $y \in \bigcap_{t \geq 0} S(t)K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $t_n > n$ tal que $y \in S(t_n)K$. Logo, existe $x_n \in K$ tal que $y = S(t_n)x_n$. Com esta escolha, temos $t_n \rightarrow \infty$ e $\{x_n\}$ em K tal que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n$, ou seja, $y \in \omega(K)$. Por outro lado, sejam $y \in \omega(K)$ e $t \geq 0$, então existem sequências $\{x_n\}$ em B e $t_n \rightarrow \infty$ tais que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n$. Pela compacidade de K , existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $x_{n_j} \rightarrow x$, $x \in K$. Com isso, temos $S(t_{n_j})x \rightarrow S(t)x$, e usando o fato de que

$$d(y, S(t)x) \leq d(y, S(t_{n_j})x_{n_j}) + d(S(t_{n_j})x_{n_j}, K) + d(S(t_{n_j})x, K) + d(S(t_{n_j})x, S(t)x).$$

Podemos concluir que $y = S(t)x$, de onde concluímos que $y \in S(t)K$.

Definição 2.15. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito eventualmente limitado, se para cada subconjunto limitado B de X existe $s_B \geq 0$ tal que $\gamma_{s_B}^+(B)$ um subconjunto limitado de X .

O próximo Teorema caracteriza os semigrupos que possuem atrator global.

Teorema 2.9. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente suave se, e somente se, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Prova. *Segue do fato de que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo, assintoticamente suave e do Lema 2.7 que o semigrupo é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X . Considere $B = \{x \in C; \gamma^+(x) \subset C\}$. Então, $S(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente suave, então existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B e consequentemente K atrai subconjuntos compactos de X . O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai subconjuntos compactos de X .*

Seja B um subconjunto limitado de X , como $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é eventualmente limitado e assintoticamente suave, segue do Lema 2.5 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B . Como $\omega(B)$ é compacto e invariante, temos $\omega(B) \subset \mathcal{A}$, por conseguinte, $\mathcal{A}$ atrai B .

Não é difícil ver que, se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um atrator global, então o semigrupo é limitado, ponto dissipativo e assintoticamente suave.

Definição 2.16. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito assintoticamente compacto em um espaço métrico X se para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{S(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui sub-sequência convergente sempre que $t_n \rightarrow \infty$.*

Teorema 2.10. *Seja X um espaço métrico e seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores em X . Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um conjunto absorvente $\mathcal{B}$ em X e é assintoticamente compacto em X então $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um atrator global $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$. E mais, se $\mathcal{B}$ é conexo em X , então $\mathcal{A}$ é conexo em X .*

Prova. *Notemos que dado um conjunto fechado, limitado e não vazio $B \subset X$ com $S(t)B \subset B$, o conjunto $\omega(B) \subset B$ é compacto e atrai B , já que o semigrupo é assintoticamente compacto, e portanto o semigrupo em questão é assintoticamente suave. Agora, usando o fato de que o semigrupo em questão possui um conjunto absorvente, ele é ponto dissipativo e eventualmente limitado, por fim usando o Teorema 2.9, concluímos que o semigrupo possui um atrator global.*

Capítulo 3

Equações de Navier-Stokes sobre alguns domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$

3.1 O sistema de equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^2$

Consideremos o fluxo de um fluido viscoso incompressível de densidade constante contido em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com fronteira rígida $\partial\Omega$ e regido pelas equações de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \times [0, +\infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \times [0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \in \mathbb{R}^2$ e $p(x, t) \in \mathbb{R}$ representam a velocidade e a pressão, respectivamente, do fluido no ponto $x \in \Omega$ no tempo $t \geq 0$, $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática do fluido e $f = f(x) \in \mathbb{R}^2$ são as forças externas do meio. Além disso, denotamos

$$\begin{aligned} \Delta u &= (\Delta u_1, \Delta u_2); \\ (u \cdot \nabla)u &= \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u_1, u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 \right); \\ \nabla \cdot u &= \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 = \operatorname{div} u. \end{aligned}$$

O domínio Ω pode ser um aberto limitado ou ilimitado do $\mathbb{R}^2$ sem qualquer regularidade assumida na fronteira $\partial\Omega$, sobre o qual vale a desigualdade de Poincaré, isto é, existe

$\lambda_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} \phi^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.2)$$

A equação

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = 0, \quad \text{em } \Omega \times [0, +\infty),$$

indica que o fluido é incompressível (neste caso, o balanço de massa também é automático). A condição

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0, +\infty),$$

indica que o fluido adere às paredes da região Ω que é considerado em repouso e u_0 é a velocidade inicial do fluido. A estrutura matemática de (3.1) é agora clássica: primeiro sejam os espaços $\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^2$ e $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^2$, com seus respectivos produtos internos

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\Omega} uv dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i v_i dx, \quad \forall u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \\ \text{e} \\ ((u, v)) &= (\nabla u, \nabla v) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \nabla u_j \nabla v_j dx, \quad \forall u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Então as normas induzidas por estes produtos internos em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ são respectivamente $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$, $\|\cdot\| = ((\cdot, \cdot))^{\frac{1}{2}}$.

O fato de ser válida a desigualdade (3.2) faz com que a norma $\|\cdot\| = ((\cdot, \cdot))^{\frac{1}{2}}$ e a norma usual em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ sejam equivalentes em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Antes de iniciarmos a prova, consideremos algumas notações; denotemos por $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ a norma usual de $H_0^1(\Omega)$ (de modo análogo denotamos por $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ a norma usual de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$) e por $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno do $L^2(\Omega)$ (ou $\mathbb{L}^2(\Omega)$).

Lema 3.1 (Caso $H_0^1(\Omega)$). *Se (3.2) é satisfeita, então as normas $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.*

Prova. *Por um lado, dado $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que*

$$\|u\| = |\nabla u|_{L^2(\Omega)} \leq |\nabla u|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = |u|_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\lambda_1} |\nabla u|_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) |\nabla u| = \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|u\|.\end{aligned}$$

Teorema 3.2 (Caso $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$). *Se (3.2) é satisfeita, então as normas $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.*

Prova. A norma usual de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ a ser considerada é

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \sqrt{\|u_1\|_{H_0^1}^2 + \|u_2\|_{H_0^1}^2} \quad (3.3)$$

para cada $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, onde u_1 e u_2 são elementos de $H_0^1(\Omega)$.

Aplicando o Lema 3.1 em (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} &= \sqrt{\|u_1\|_{H_0^1}^2 + \|u_2\|_{H_0^1}^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|u_1\|^2 + \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|u_2\|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right)} \sqrt{\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right)} \|u\|.\end{aligned} \quad (3.4)$$

Por outro lado, temos

$$\|u\| = \sqrt{\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2},$$

onde novamente pelo Lema 3.1 conseguimos que

$$\|u\| \leq \sqrt{\|u_1\|_{H_0^1}^2 + \|u_2\|_{H_0^1}^2} = \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}. \quad (3.5)$$

Assim, de (3.4) e (3.5) concluímos a demonstração.

Consideremos agora os seguintes espaços

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{v \in (\mathcal{D}(\Omega))^2; \nabla \cdot v = 0 \text{ em } \Omega\}, \\ V &= \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\ H &= \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbb{L}^2(\Omega),\end{aligned}$$

com H e V munidos com o produto interno e norma de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, respectivamente.

Segue de (3.2) que

$$\begin{aligned} |u|_H^2 = (u, u) &= \int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definamos em V , a seguinte forma trilinear:

$$\begin{aligned} b : V \times V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\mapsto \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ pertencem a V .

Consideremos também o seguinte operador bilinear

$$\begin{aligned} B : V \times V &\rightarrow V' \\ (u, v) &\rightarrow b(u, v, \cdot), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w)$, para todo $w \in V$, em particular $B(u) = B(u, u) \in V'$, para todo $u \in V$. Notemos então que $\langle (u \cdot \nabla)u, v \rangle = b(u, u, v) = \langle B(u), v \rangle$ para cada $v \in V$. No que segue, provaremos algumas propriedades a respeito da forma trilinear b e da forma bilinear B .

Lema 3.3. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ sobre o qual é satisfeita a desigualdade (3.2), então*

$$|u|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Prova. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, definimos a aplicação $\tilde{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $\tilde{u}(x, y) = u(x, y)$, se $(x, y) \in \Omega$ e $\tilde{u}(x, y) = 0$, caso contrário. Sob essas condições temos que $\tilde{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$. Consideremos apenas o caso em que $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, visto que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ é denso em $H_0^1(\mathbb{R}^2)$. Notemos que

$$(\tilde{u}(x, y))^2 = \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{u}(s, y))^2 ds = \int_{-\infty}^x 2\tilde{u}(s, y) \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{u}(s, y)) ds,$$

logo

$$|\tilde{u}(x, y)|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(s, y)| \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(s, y) \right| ds = g(y). \quad (3.9)$$

De modo análogo temos que

$$|\tilde{u}(x, y)|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(x, s)| \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(x, s) \right| ds = g(x). \quad (3.10)$$

Multiplicando (3.9) por (3.10), membro a membro, obtemos

$$|\tilde{u}(x, y)|^4 \leq g(x)g(y),$$

integrando em $\mathbb{R}^2$ a expressão acima chegamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x, y)|^4 dx dy &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x, y)|^4 dx dy \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(x, s)| \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(x, s) \right| ds dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(s, y)| \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(s, y) \right| ds dy,$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x, y)|^4 dz \leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}| \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \right| dz \cdot \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}| \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \right| dz, \quad (3.11)$$

usando a desigualdade de Schwarz em (3.11) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x, y)|^4 dz \leq 4 |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)} |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad (3.12)$$

aplicando a desigualdade de Young, seguida da desigualdade de Poincaré em (3.12) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x, y)|^4 dz &\leq 4 |\tilde{u}|_{L^2}^2 \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right|_{L^2}^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right|_{L^2}^2 \right) \\ &= 2 |\tilde{u}|_{L^2}^2 |\nabla \tilde{u}|_{L^2}^2 \\ &\leq 2C(\mathbb{R}^2) |\tilde{u}|_{L^2}^2 \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\tilde{u}|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C(\mathbb{R}^2) \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Assim

$$|u|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 3.4. *A forma trilinear $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ é contínua em $V \times V \times V$.*

Prova. *De fato, dados $u, v, w \in V$ pela desigualdade triangular*

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &= \left| \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left| \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} |u_j w_i| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos que, para cada $i, j \in \{1, 2\}$

$$\int_{\Omega} |u_j w_i| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_j w_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

aplicando a desigualdade de Hölder novamente, segue de (3.14) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_j w_i| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx &\leq \left(\left(\int_{\Omega} |u_j|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w_i|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u_j|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} |w_i|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |u_j|_{L^4(\Omega)} |w_i|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como em nosso caso $n = 2 = p$, ou seja,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = 0,$$

pelo Lema 1.1 temos que

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty), \quad (3.16)$$

em particular $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$. Segue então de (3.15) que

$$\int_{\Omega} |u_j w_i| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \leq C \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.17)$$

substituindo (3.17) em (3.13) obtemos que

$$|b(u, v, w)| \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.18)$$

Finalmente, aplicando a desigualdade de Hölder (para somas) em (3.18) chegamos que

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq C \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C \sum_{i=1}^2 \|u\|_V |\nabla v_i|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C \|u\|_V \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H_0^1} \|w_i\|_{H_0^1} \\ &\leq C \|u\|_V \left(\sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H_0^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V. \end{aligned}$$

Lema 3.5. Para todos $u, v \in V$ temos que

$$b(u, v, v) = 0.$$

Prova. De fato, dados $u, v \in V$, tais que $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, temos que

$$b(u, v, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i dx \quad (3.19)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i dx, \quad (3.20)$$

notemos que para cada $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2\}$

$$\int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i = \int_{\Omega} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right), \quad (3.21)$$

integrando por partes (3.21) e usando o fato de $v_i = 0$ e $u_j = 0$ em $\partial(\Omega)$, obtemos que

$$\int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) (v_i)^2 dx. \quad (3.22)$$

Assim, segue de (3.22) e (3.20) que

$$\begin{aligned}
 b(u, v, v) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i dx \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) (v_i)^2 dx \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) (v_i)^2 dx = 0.
 \end{aligned}$$

Observação 3.1. Tomando $v = v+w$ no Lema 3.5 concluímos também que $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$, $\forall u, v, w \in V$.

Lema 3.6. Se $u, v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ então $B(u, v) \in L^2(0, T; V')$

Prova. Como $B : V \times V \rightarrow V'$, pela desigualdade de Young, temos

$$|B(u, v)|_{V'} \leq C \|u\|_V \|v\|_V \leq \frac{C}{2} (\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2),$$

então

$$\int_0^T |B(u, v)|_{V'} dt \leq \frac{C}{2} \left(\int_0^T \|u\|_V^2 dt + \int_0^T \|v\|_V^2 dt \right) < \infty,$$

ou seja, $B(u, v) \in L^1(0, T; V')$. Provemos agora que $B(u, v) \in L^2(0, T; V')$.

De fato, dado $w \in V$ pela Observação 3.1 temos que

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) = -b(u, w, v),$$

dai pela desigualdade (3.15) do Lema 3.4 obtemos

$$\begin{aligned}
 |\langle B(u, v), w \rangle| = |b(u, w, v)| &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)} |v_i|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \\
 &= \sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

e aplicando a desigualdade de Hölder em (3.23) temos

$$\begin{aligned}
|\langle B(u, v), w \rangle| &\leq \sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\nabla w_i| \\
&= \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)} |\nabla w_i| \right) \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|w\|_V \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|w\|_V \|u\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Logo

$$\|B(u, v)\|_{V'} \leq \|u\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \|v\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}.$$

Notemos então que

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{V'}^2 &\leq \|u\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^2 \|v\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)}^2 \right). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.3 em (3.25) e, em seguida, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{V'}^2 &\leq C \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^2(\Omega)} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \right) \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \|u\|_H \|u\| \|v\|_H \|v\|,
\end{aligned}$$

ou seja, dados $u, v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|B(u(t), v(t))\|_{V'}^2 \leq C \|u(t)\|_H \|u(t)\| \|v(t)\|_H \|v(t)\|, \quad \forall t \in [0, T].$$

Daí, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|B(u(t), v(t))\|_{V'}^2 &\leq C \left(\sup_{t \in [0, T]} \text{ess} |u(t)|_H \right) \left(\sup_{t \in [0, T]} \text{ess} |v(t)|_H \right) \|u(t)\| \|v(t)\| \\ &\leq C_T \|u(t)\| \|v(t)\| \\ &\leq C_T \frac{1}{2} (\|u(t)\|_V^2 + \|v(t)\|_V^2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Portanto,

$$\int_0^T \|B(u(t), v(t))\|_{V'}^2 dt \leq \frac{C_T}{2} \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|v(t)\|_V^2) dt < \infty.$$

Uma outra forma bilinear que devemos considerar é a seguinte:

$$\begin{aligned} A : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \end{aligned}$$

isto é, $A(u, v) = ((u, v))$, para cada $u, v \in V$. Então usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|A(u, v)| \leq \nu |u| |v|, \quad \forall u, v \in V,$$

logo A é contínua. Também temos

$$A(u, u) = |u|^2, \quad \forall u \in V,$$

ou seja, A também é coerciva.

Considerando o sistema de equações de Navier-Stokes o objetivo passa a ser encontrar uma função

$$u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

e uma aplicação

$$p : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $T > 0$, considerando $Q = \Omega \times [0, T]$, vale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f & \text{em } Q; \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } Q; \\ u = 0 & \text{em } \partial Q; \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

No que segue, buscamos a formulação fraca de (3.27). Dado $v \in \mathcal{V}$, multiplicando (3.27) por v no sentido de $L^2(\Omega)$ obtemos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{du}{dt} v - \nu(\Delta u)v + (u \cdot \nabla)uv + (\nabla p)v \right) dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

daí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{du}{dt} v dx - \int_{\Omega} \nu(\Delta u)v dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} (\nabla p)v dx \\ = \int_{\Omega} f v dx, \end{aligned} \quad (3.28)$$

aplicando a identidade de Green no segundo termo do primeiro membro da soma (3.28) e o teorema da representação de Riesz no lado direito da igualdade temos

$$\frac{d}{dt}(u, v) - \nu((u, v)) + b(u, u, v) + \int_{\Omega} (\nabla p)v dx = \langle f, v \rangle, \quad (3.29)$$

a identidade (3.29) está no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$, assim temos

$$\int_{\Omega} (\nabla p)v dx = - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot v) dx = 0, \quad (3.30)$$

pois $v \in \mathcal{V}$ e $\nabla \cdot v = 0$. Então de (3.30) e (3.29) obtemos que

$$\frac{d}{dt}(u, v) - \nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{no sentido de } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.31)$$

Na expressão acima, todas as aplicações são contínuas, e o fato de $\mathcal{V}$ ser denso em V nos leva a concluir que (3.31) é satisfeita para todo $v \in V$. Isso sugere a seguinte formulação fraca para (3.27):

Problema 3.1. *Dados $f \in V'$ e $u_0 \in H$, encontrar $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, para todo $T > 0$, tal que*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u, v) - \nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad \forall t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.32)$$

A existência de uma única solução para o Problema (3.32) é garantida pelo teorema seguinte.

Teorema 3.7. *Sejam $f \in V'$ e $u_0 \in H$, então existe uma única aplicação*

$u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; H), \quad \forall T > 0, \\ u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, H), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V'), \quad \forall T > 0, \\ \frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle, \text{ no sentido de } \mathcal{D}'(0, T), \\ \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Prova. Veja o Teorema 1.1, página 255 e observação da página 265 em Temam [18].

Com isso, podemos definir um semigrupo não linear $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em H dado por

$$S(t)u_0 = u(t, u_0) = u(t),$$

para todo $t \geq 0$, onde $u_0 \in H$ e u é a única solução do problema 3.32.

3.2 Existência de um conjunto absorvente

Nesta seção mostraremos que o problema (3.32) é dissipativo, isto é, provamos a existência de um conjunto absorvente para o semigrupo gerado pelo problema (3.32) usando uma equação da energia associada ao mesmo.

Teorema 3.8. *O subconjunto de H*

$$\mathcal{B} = \left\{ v \in H; \quad |v| \leq \rho = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}} \|f\|_{V'} \right\}, \quad (3.33)$$

é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, isto é, $\mathcal{B}$ absorve os conjuntos limitados de H sob ação do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Prova. Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(0, T; V)$ uma solução do problema (3.1) dada pelo Teorema 3.7, para cada $t > 0$, tomando $v = u(t)$ em (3.32) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \nu((u(t), u(t))) + b(u(t), u(t), u(t)) = \langle f, u(t) \rangle. \quad (3.34)$$

Do Lema 3.5 temos que

$$b(u(t), u(t), u(t)) = 0, \quad \forall t > 0,$$

logo, segue de (3.34) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \|u\|^2 = \langle f, u \rangle, \quad \forall t > 0,$$

ou seja, temos a equação da energia associada ao problema (3.32)

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + 2\nu \|u\|^2 = 2 \langle f, u \rangle, \quad \forall t > 0, \quad (3.35)$$

no sentido das distribuições em $\mathbb{R}^+$. Além disso, de (3.35) obtemos que

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + 2\nu \|u\|^2 = 2 \langle f, u \rangle \leq 2 \|f\|_{V'} \|u\|_V,$$

daí

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + 2\nu \|u\|^2 \leq 2 \|f\|_{V'} \|u\|_V \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}. \quad (3.36)$$

Usando a desigualdade de Young em (3.36) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u|^2 + 2\nu \|u\|^2 &\leq 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} + \frac{1}{2} \|u\|^2 \nu \right) \\ &= \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} + \|u\|^2 \nu, \end{aligned} \quad (3.37)$$

logo, por (3.37)

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \|u\|^2 \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu}, \quad (3.38)$$

donde, aplicando a desigualdade (3.6) chegamos que

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \lambda_1 |u|^2 \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu}. \quad (3.39)$$

Multiplicando (3.39) por $e^{\nu \lambda_1 t}$ temos

$$\frac{d}{dt} |u|^2 e^{\nu \lambda_1 t} + \nu \lambda_1 |u|^2 e^{\nu \lambda_1 t} \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} e^{\nu \lambda_1 t},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} (|u|^2 e^{\nu \lambda_1 t}) \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} e^{\nu \lambda_1 t}, \quad \forall t > 0. \quad (3.40)$$

Então, dado $t \geq 0$, integrando (3.40) de 0 a t obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (|u|^2 e^{\nu \lambda_1 s}) ds \leq \int_0^t \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} e^{\nu \lambda_1 s} ds,$$

daí

$$|u(t)|^2 e^{\nu\lambda_1 t} - |u_0|^2 \leq \int_0^t \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} e^{\nu\lambda_1 s} ds, \quad \forall t \geq 0,$$

e como f não depende de s

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 e^{\nu\lambda_1 t} - |u_0|^2 &\leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} \int_0^t e^{\nu\lambda_1 s} ds \\ &= \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} \left(\frac{e^{\nu\lambda_1 t}}{\nu\lambda_1} - \frac{1}{\nu\lambda_1} \right) \\ &\leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} \frac{e^{\nu\lambda_1 t}}{\nu\lambda_1}. \end{aligned}$$

Assim

$$|u(t)|^2 - |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2 \lambda_1}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.41)$$

Agora, seja B um subconjunto limitado qualquer de H , existe $C > 0$ tal que

$$|u| \leq C, \quad \forall u \in B, \quad (3.42)$$

escolhamos então $t_B > 0$ de tal modo que

$$\frac{C^2}{e^{\nu\lambda_1 t}} \leq \frac{1}{\nu\lambda_1} \|f\|_{V'}^2, \quad \forall t \geq t_B, \quad (3.43)$$

e provemos que, com essa condição,

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq t_B.$$

Para isto, dado $t \geq t_B$, tomemos um elemento arbitrário $S(t)u_0 = u(t)$ tal que

$$\begin{aligned} S(t)u_0 \in S(t)B &= \{S(t)u_0; u_0 \in B\} \\ &= \{u(t); u_0 \in B\}, \end{aligned}$$

e mostremos que $S(t)u_0 \in \mathcal{B}$.

Pela estimativa (3.41) temos

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2 \lambda_1} \\ &\stackrel{(3.42)}{\leq} \underbrace{\frac{C^2}{e^{\nu\lambda_1 t}}}_{\leq \frac{1}{\nu\lambda_1}} + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1} \|f\|_{V'}^2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

por outro lado temos, de (3.43), que

$$\frac{C^2}{e^{\nu\lambda_1 t}} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1} \|f\|_{V'}^2 \leq \frac{2}{\nu\lambda_1} \|f\|_{V'}^2. \quad (3.45)$$

Comparando (3.44) e (3.45) chegamos que

$$|u(t)|^2 \leq \frac{2}{\nu^2\lambda_1} \|f\|_{V'}^2,$$

isto é,

$$|u(t)| \leq \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{2}{\nu^2\lambda_1}} \|f\|_{V'},$$

logo $S(t)u_0 \in \mathcal{B}$, o que nos leva a concluir que

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq t_B.$$

Portanto o conjunto $\mathcal{B} \subset H$ absorve todos os conjuntos limitados de H sob ação do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

3.3 A compacidade assintótica do semigrupo

Nosso objetivo nessa seção é provar que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente compacto em H , para isso é necessário demonstrar um resultado de continuidade.

Lema 3.9. *Sejam $u_0 \in H$ e $f \in V'$, então*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \frac{|u_0|^2}{\nu t} + \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2}, \quad \forall t > 0. \quad (3.46)$$

Prova. Dado $t \geq 0$, integrando (3.38) de 0 a t obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds} |u(s)|^2 ds + \int_0^t \nu \|u(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} ds,$$

ou seja,

$$|u(t)|^2 - |u_0|^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} ds.$$

Sendo f independente de s , segue que

$$|u(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq |u_0|^2 + \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} (t - 0),$$

logo

$$\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq |u_0|^2 + \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} t. \quad (3.47)$$

Finalmente, multiplicando (3.47) por $(1/\nu t)$ concluímos que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \frac{|u_0|^2}{\nu t} + \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2}, \quad \forall t > 0.$$

Lema 3.10. Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(0, T; V)$, a sequência

$$\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^2(0, T; V'), \text{ para todo } T > 0.$$

Prova. De fato, sabemos que $f \in V'$ e $Bu_n \in V'$, além disso, a aplicação bilinear $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente também pode ser interpretada da seguinte forma

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V' \\ v &\mapsto ((v, \cdot)), \end{aligned}$$

onde para cada $v \in V$ fixado

$$\langle Av, u \rangle = ((v, u)) \leq \|v\|_V \|u\|_V, \quad \forall u \in V,$$

logo $Au_n \in V'$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Au_n\|^2 = ((u_n, u_n)) = \|u_n\|^2$. Como

$$\frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = f - \nu Au_n(t) - Bu_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0$$

temos que

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{V'} = \|f - \nu Au_n - Bu_n\|_{V'} \leq \|f\|_{V'} + \nu \|Au_n\|_{V'} + \|Bu_n\|_{V'},$$

daí

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{V'}^2 \leq (\|f\|_{V'} + \nu \|Au_n\|_{V'} + \|Bu_n\|_{V'})^2. \quad (3.48)$$

Desenvolvendo o lado direito da desigualdade (3.48) e, em seguida, aplicando a desi-

qualdade de Young chegamos em algo da forma

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{V'}^2 &\leq C_1 \|f\|_{V'}^2 + C_2 \nu \|Au_n\|_{V'}^2 + C_3 \|Bu_n\|_{V'}^2 \\ &\leq C_1 \|f\|_{V'}^2 + C_2 \nu \|u_n\|_V^2 + C_3 \|Bu_n\|_{V'}^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

fazendo uso do argumento (3.26) no terceiro termo da soma acima obtemos que

$$\left\| \frac{\partial u_n(t)}{\partial t} \right\|_{V'}^2 \leq C_1 \|f\|_{V'}^2 + C_4 \|u_n(t)\|_V^2, \quad \text{q.s. em } [0, T], \quad (3.50)$$

para cada $T > 0$. Finalmente, integrando (3.50) de 0 a T e usando a hipótese concluímos que

$$\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^2(0, T; V'), \quad \forall T > 0. \quad (3.51)$$

Lema 3.11. *Seja $\{u_{0n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em H convergindo fracamente para um elemento $u_0 \in H$. Então*

$$S(t)u_{0n} \rightharpoonup S(t)u_0 \quad \text{em } H, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (3.52)$$

e

$$S(\cdot)u_{0n} \rightharpoonup S(\cdot)u_0 \quad \text{em } L^2(0, T; V), \quad \text{para todo } T > 0. \quad (3.53)$$

Prova. *Sejam $u_n(t) = S(t)u_{0n}$ e $u(t) = S(t)u_0$, para cada $t \geq 0$. Tomando o supremo essencial na estimativa (3.41) temos*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{ess} |u(t)|^2 \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{ess} \left(|u_0|^2 \frac{1}{e^{\nu \lambda_1 t}} + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1} \|f\|_{V'}^2 \right) \leq C_1, \quad (3.54)$$

onde C_1 não depende de t . Além disso, para cada $T > 0$, a estimativa (3.46) nos fornece que

$$\int_0^T \|u(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\nu} |u_0|^2 + \frac{T}{\nu^2} \|f\|_{V'}^2 \leq C_2. \quad (3.55)$$

Segue então de (3.54) e (3.55) que

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L^2(0, T; V), \quad \text{para todo } T > 0. \quad (3.56)$$

Temos pelo Lema 3.10 que, para todo $v \in V$, $a > 0$ e $t > 0$ tal que $0 \leq t \leq t+a \leq T$,

com $T > 0$,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+a} \left\langle \frac{\partial u_n(s)}{\partial t}, v \right\rangle_{V'V} ds &= \int_t^{t+a} \frac{d}{dt} (u_n(s), v)_H ds \\ &= (u_n(t+a), v)_H - (u_n(t), v)_H \\ &= (u_n(t+a) - u_n(t), v)_H, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V'V}$ denota a dualidade V', V . Logo,

$$\begin{aligned} (u_n(t+a) - u_n(t), v)_H &= \int_t^{t+a} \left\langle \frac{\partial u_n(s)}{\partial t}, v \right\rangle_{V'V} ds \\ &\leq \int_t^{t+a} \left\| \frac{\partial u_n(s)}{\partial t} \right\|_{V'} \|v\|_V ds \\ &\leq \left(\int_t^{t+a} \left\| \frac{\partial u_n(s)}{\partial t} \right\|_{V'}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+a} \|v\|_V^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial u_n(s)}{\partial t} \right\|_{V'}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_V^2 \int_t^{t+a} 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{Lema 3.10}}{\leq} c_T a^{\frac{1}{2}} \|v\|_V, \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde $c_T > 0$ não depende de $n \in \mathbb{N}$. Em particular tomando $v = u_n(t+a) - u_n(t)$, que pertence a V para cada $t \in (0, T-a)$, encontramos de (3.57) o seguinte

$$|u_n(t+a) - u_n(t)|^2 \leq c_T a^{\frac{1}{2}} \|u_n(t+a) - u_n(t)\|_V. \tag{3.58}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|u_n(t+a) - u_n(t)\|_V^2 &= ((u_n(t+a) - u_n(t), u_n(t+a) - u_n(t)))_V \\ &= \|u_n(t+a)\|^2 - 2((u_n(t+a), u_n(t))) + \|u_n(t)\|^2 \\ &\leq \|u_n(t+a)\|^2 + 2\|u_n(t+a)\| \|u_n(t)\| + \|u_n(t)\|^2 \\ &= (\|u_n(t+a)\| + \|u_n(t)\|)^2, \end{aligned} \tag{3.59}$$

segue então de (3.58) e (3.59) que

$$|u_n(t+a) - u_n(t)|^2 \leq 2c_T a^{\frac{1}{2}} (\|u_n(t+a)\| + \|u_n(t)\|), \quad \forall t \in [0, T-a] \tag{3.60}$$

Integrando (3.60) de 0 a $T - a$ obtemos por (3.56) que

$$\begin{aligned} \int_0^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|^2 dt &\leq c_T a^{\frac{1}{2}} \int_0^{T-a} (\|u_n(t+a)\| + \|u_n(t)\|) dt \\ &\leq \tilde{c}_T a^{\frac{1}{2}}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

pois $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Temos então que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|^2 dt \leq \tilde{c}_T a^{\frac{1}{2}},$$

consequentemente,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|_H^2 dt = 0. \quad (3.61)$$

Dado $r > 0$, restringindo o domínio Ω ao domínio $\Omega_r = \Omega \cap B(0, r)$, onde $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < r\}$ obtemos de (3.61) que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|_{\mathbb{L}^2(\Omega_r)}^2 dt = 0, \quad \forall r > 0, \quad (3.62)$$

além disso, de (3.56)

$$\{u_n|_{\Omega_r}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega_r)) \cap L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_r)), \quad \forall r > 0. \quad (3.63)$$

Para cada $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ definamos a aplicação

$$\begin{aligned} v_{n,r} : [0, T] \times \Omega_{2r} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\rightarrow \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right) u_n(t, x), \end{aligned}$$

onde $\tau \in C^1(\mathbb{R}^+)$ é tal que

$$\tau(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in [0, 1], \\ \phi(a), & \text{se } a \in [1, 2], \\ 0, & \text{se } a \in [2, +\infty); \end{cases}$$

com $\phi \in C^1([1, 2])$ de modo que $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{\phi(a)}{a-2} &= 0, \\ \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{\phi(a)-1}{a-1} &= 1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
& \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&= \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \left\| \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right) u_n(t+a, x) - \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right) u_n(t, x) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&= \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \left\| \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right) (u_n(t+a, x) - u_n(t, x)) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&\leq \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|C(u_n(t+a, x) - u_n(t, x))\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&= C^2 \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|(u_n(t+a, x) - u_n(t, x))\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt, \tag{3.64}
\end{aligned}$$

onde $C = \max_{x \in \Omega_{2r}} \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right)$. Usando (3.62) com $2r$ no lugar de r , obtemos de (3.64) que

$$\begin{aligned}
& \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&\leq C^2 \limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|(u_n(t+a, x) - u_n(t, x))\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&= 0, \quad \forall T > 0, \quad \forall r > 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt = 0, \quad \forall T > 0, \quad \forall r > 0.$$

Em outras palavras temos que, para cada $T > 0$ e $r > 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{T-a} \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt = 0, \quad \forall v_{n,r} \in \{v_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}},$$

ou ainda,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{T-a} \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})}^2 dt = 0, \tag{3.65}$$

uniformemente em $\{v_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Além disso, para cada $r > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|v_{n,r}(t, x)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega_{2r})}^2 dt &= \int_0^T \left\| \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right) u(t, x) \right\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega_{2r})}^2 dt \\
&\leq \int_0^T C^2 \|u(t, x)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega_{2r})}^2 dt \tag{3.66} \\
&< \infty, \quad \forall T > 0, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{ess} \|v_{n,r}(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} &= \sup_{t \in [0, T]} \operatorname{ess} \left\| \tau \left(\frac{|x|^2}{r^2} \right) u(t, x) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} \\ &\leq C \left(\sup_{t \in [0, T]} \operatorname{ess} \|u(t, x)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} \right), \quad \forall T > 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

usando (3.63) com $2r$ no lugar de r temos de (3.67) e (3.68) que

$$\begin{aligned} \{v_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega_{2r})) \cap L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_{2r})), \quad \forall T > 0, \\ &\forall r > 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

podemos então aplicar o Teorema 1.16, com $X = \mathbb{L}^2(\Omega_{2r})$, $Y = \mathbb{H}_0^1(\Omega_{2r})$ e $p = 2$, obtendo que

$$\{v_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é relativamente compacto em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_{2r})), \quad \forall T > 0, \quad \forall r > 0,$$

isto é,

$$\overline{\{v_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}}}$$

é compacto em $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_{2r}))$, para todo $T > 0$ e $r > 0$. Em particular

$$\overline{\{v_{n,r}|_{\Omega_r}\}_{n \in \mathbb{N}}} = \overline{\{u_n|_{\Omega_r}\}_{n \in \mathbb{N}}} \quad (3.70)$$

é compacto em $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_r))$, para todos $T > 0$ e $r > 0$.

Tomando, em particular, $r \in \mathbb{N}$ e $T > 0$ fixo, para $r = 1$, $\overline{\{u_n|_{\Omega_1}\}_{n \in \mathbb{N}}}$ é compacto, logo existe uma subsequência $\{u_{1_n}|_{\Omega_1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{u_n|_{\Omega_1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, isto é,

$$u_{1_n}|_{\Omega_1} \rightarrow \tilde{u}|_{\Omega_1}, \quad \text{em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_1)).$$

Por sua vez, a sequência $\{u_{1_n}|_{\Omega_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está contida em $\overline{\{u_n|_{\Omega_2}\}_{n \in \mathbb{N}}}$, que é compacto, logo também possui uma subsequência $\{u_{2_n}|_{\Omega_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_{2_n}|_{\Omega_2} \rightarrow \tilde{u}|_{\Omega_2}, \quad \text{em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_2)).$$

Continuando o processo, chegamos que, para cada $T > 0$

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11}|_{\Omega_1}, & u_{12}|_{\Omega_1}, & u_{13}|_{\Omega_1} & \cdots & \rightarrow & \tilde{u}|_{\Omega_1} & \text{em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_1)) \\ u_{21}|_{\Omega_2}, & u_{22}|_{\Omega_2}, & u_{23}|_{\Omega_2} & \cdots & \rightarrow & \tilde{u}|_{\Omega_2} & \text{em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_2)) \\ u_{31}|_{\Omega_3}, & u_{32}|_{\Omega_3}, & u_{33}|_{\Omega_3} & \cdots & \rightarrow & \tilde{u}|_{\Omega_3} & \text{em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega_3)). \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \end{array} \quad (3.71)$$

Tomando em (3.71) a sequência diagonal

$$\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}} := \{u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{44}, \dots\}, \text{ estendida a todo o } \Omega,$$

notamos que $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n'} \rightarrow \tilde{u} \text{ forte em } L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Omega_r)), \forall r > 0. \quad (3.72)$$

Além disso, de (3.56) e o teorema de Banach Alaoglu, considerando uma subsequência se necessário, podemos admitir também que

$$u_{n'} \rightarrow \tilde{u} \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^+; H), \quad (3.73)$$

$$\text{fraco em } L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; V), \quad (3.74)$$

onde $\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; V)$. Notemos que para cada $v \in V \subset H$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ temos da convergência (3.73) que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} u_{n'}(t), v \right) \theta(t) dt &= \int_0^T (u_{n'}(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow \\ &\int_0^T (\tilde{u}(t), v) \theta'(t) dt = \int_0^T \left(\frac{d}{dt} \tilde{u}(t), v \right) \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Além disso pela continuidade das transformações $B : V \times V \rightarrow V'$ e $A : V \rightarrow V'$ podemos fazer $n' \rightarrow \infty$ em

$$\frac{d}{dt}(u_{n'}(t), v) - \nu((u_{n'}(t), v)) + b(u_{n'}(t), u_{n'}(t), v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V, \forall t \in [0, T],$$

obtendo que

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}(t), v) - \nu((\tilde{u}(t), v)) + b(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t), v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V, \forall t \in [0, T].$$

Temos também que $\tilde{u} \in C^0([0, T], V')$, visto que $\tilde{u} \in L^2(0, T; V)$ e $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} \in L^2(0, T; V')$,

então faz sentido calcular $\tilde{u}(0)$. Da convergência (3.73) segue que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_{n'}(t), v)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}(\tilde{u}(t), v)\theta(t)dt, \quad \forall \theta \in L^1(0, T), \quad (3.75)$$

em particular tomando $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, visto que $t \mapsto (\tilde{u}(t), w_i)$ é contínua, podemos integrar (3.75) obtendo

$$-\left\{(u_{n'}(0), v) + \int_0^T (u_{n'}(t), v)\theta'(t)dt\right\} \rightarrow -\left\{(\tilde{u}(0), v) + \int_0^T (\tilde{u}(t), v)\theta'(t)dt\right\}. \quad (3.76)$$

Visto que $v\theta' \in C^0([0, T]; V) \subset L^1(0, T; H)$ temos novamente pelo fato de $u_{n'} \xrightarrow{*} \tilde{u}$ em $L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$ que

$$-\int_0^T (u_{n'}(t), v)\theta'(t)dt \rightarrow -\int_0^T (\tilde{u}(t), v)\theta'(t)dt. \quad (3.77)$$

De (3.76) e (3.77) deduzimos que

$$(u_{n'}(0), v) \rightarrow (\tilde{u}(0), v), \quad \forall v \in V, \quad (3.78)$$

por outro lado temos por hipótese que $u_{n'_0} \rightharpoonup u_0$ em H , daí

$$(u_{n'}(0), v) \rightarrow (u_0, v), \quad \forall v \in V, \quad (3.79)$$

pois $V \hookrightarrow H$. De (3.78) e (3.79) obtemos que

$$(\tilde{u}(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in V,$$

logo,

$$\tilde{u}(0) = u_0,$$

que, pela unicidade de soluções, nos leva a concluir que $u = \tilde{u}$. Para provar (3.53) usaremos um argumento de contradição. Supomos que não vale a convergência seguinte

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; V), \quad \forall T > 0,$$

então existe alguma subsequência $\{u_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que não possui subsequência convergindo fraco para u em $L^2(0, T; V)$. Para essa sequência repetimos todo processo realizado desde o início da demonstração. Chegamos então que existe uma subsequência $\{u_{n'_k}\}_{n'_k \in \mathbb{N}}$, que converge para um certo $\tilde{u}_k$ no sentido de (3.72)-(3.74). Novamente, tomando $u = u_{n'_k}$ em (3.32) e fazendo $n'_k \rightarrow \infty$ chegamos que $\tilde{u}_k$ é solução de (3.1)

com $\tilde{u}_k(0) = u_0$. O fato da solução ser única nos garante que $\tilde{u}_k = u$, logo $\{u_{n'_k}\}_{n'_k \in \mathbb{N}}$ converge para u no sentido de (3.73), que é uma contradição.

Provaremos agora 3.52. Para cada $t \geq 0$ e $v \in V$ temos por (3.56) que

$$|(u_n(t), v)| \leq \|u_n(t)\|_V \|v\|_V \leq \frac{1}{2} \|u_n(t)\| + \frac{1}{2} \|v\| \leq C,$$

onde $C > 0$ independe de $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência $\{(u_n(t), v)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é equilimitada.

Notemos também que a sequência $\{(u_n(t), v)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua. De fato, dado $v \in V$, se $\|v\| = 0$ a equicontinuidade é direta de (3.57), se por outro lado $\|v\| > 0$, dado $\varepsilon > 0$, tomando

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{(c_T \|v\|)^2},$$

para todos $t, t + a \in [0, T]$ tais que

$$|(t + a) - t| = |a| < \delta,$$

segue por (3.57) que

$$|(u_n(t + a), v) - (u_n(t), v)| \leq c_T \|v\| a^{\frac{1}{2}} < c_T \|v\| \delta^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Usando o teorema de Arzelá-Ascoli temos que existe uma subsequência $\{(u_{n'}(t), v)\}_{n' \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(u_{n'}(t), v) \rightarrow (u(t), v), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

onde novamente por um argumento de contradição deduzimos que

$$(u_n(t), v) \rightarrow (u(t), v), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Finalmente usando o fato de $\mathcal{V}$ ser denso em H concluímos que

$$(u_n(t), v) \rightarrow (u(t), v), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall v \in H,$$

ou seja,

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{em } H, \quad \forall t \geq 0,$$

isto é,

$$S(t)u_{0_n} \rightharpoonup S(t)u_0, \quad \text{em } H, \quad \forall t \geq 0.$$

A seguir, provaremos um resultado importante para garantir a existência de um atrator global, a compacidade assintótica do semigrupo obtido pelas soluções do sistema de Navier-Stokes.

Teorema 3.12. *O semigrupo não linear $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente compacto em H .*

Prova. *A princípio, consideremos a seguinte aplicação bilinear*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \nu((u, v)) - \nu \frac{\lambda_1}{2}(u, v). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Notemos que $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ define um produto interno em V pois:

- $[0, 0] = 0$;
- se $u \in V - \{0\}$ segue por (3.6) que

$$[u, u] = \nu \left(\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|^2 \right) = \nu \left(\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|^2 \right) + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 \geq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 > 0;$$

- para cada $u, v_1, v_2 \in V$ e $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [u, v_1 + kv_2] &= \nu((u, v_1 + kv_2)) - \nu \frac{\lambda_1}{2}(u, v_1 + kv_2) = \nu((u, v_1)) - \nu \frac{\lambda_1}{2}(u, v_1) \\ &\quad + k\nu((u, v_2)) - k\nu \frac{\lambda_1}{2}(u, v_2) = [u, v_1] + k[u, v_2]. \end{aligned}$$

Além disso pela desigualdade (3.6), dado $u \in V$, temos

$$\frac{\nu}{2}\|u\|^2 = \nu\|u\|^2 - \frac{\nu}{2}\|u\|^2 \leq \nu\|u\|^2 - \nu \frac{\lambda_1}{2}|u|^2 = [u, u] = [u]^2 \leq \nu\|u\|^2,$$

isto é,

$$\frac{\nu}{2}\|u\|^2 \leq [u]^2 \leq \nu\|u\|^2, \quad \forall u \in V. \quad (3.81)$$

Então $[\cdot, \cdot]$ define um produto interno em V que induz uma norma $[\cdot] = [\cdot, \cdot]^{\frac{1}{2}}$ equivalente à norma $\|\cdot\|_V$. Somando e subtraindo $\nu\lambda_1|u|^2$ na equação da energia (3.35) obtemos

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2\nu\|u\|^2 - \nu\lambda_1|u|^2 + \nu\lambda_1|u|^2 = 2\langle f, u \rangle,$$

daí,

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2[u]^2 + \nu\lambda_1|u|^2 = 2\langle f, u \rangle,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\lambda_1|u|^2 = 2(\langle f, u \rangle - [u]^2), \quad \forall u(t) = S(t)u_0, \quad u_0 \in H. \quad (3.82)$$

Multiplicando (3.82) pelo fator integrante $e^{\nu\lambda_1 t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}|u|^2 e^{\nu\lambda_1 t} + \nu\lambda_1|u|^2 e^{\nu\lambda_1 t} = 2(\langle f, u \rangle - [u]^2) e^{\nu\lambda_1 t},$$

então

$$\frac{d}{dt}(|u|^2 e^{\nu\lambda_1 t}) = 2(\langle f, u \rangle - [u]^2) e^{\nu\lambda_1 t}. \quad (3.83)$$

Para cada $t \geq 0$, integrando (3.83) de 0 a t , temos

$$|u(t)|^2 e^{\nu\lambda_1 t} - |u_0|^2 = 2 \int_0^t e^{\nu\lambda_1 s} (\langle f, u(s) \rangle - [u(s)]^2) ds,$$

ou ainda,

$$|S(t)u_0|^2 e^{\nu\lambda_1 t} = |u_0|^2 + 2 \int_0^t e^{\nu\lambda_1 s} (\langle f, S(s)u_0 \rangle - [S(s)u_0]^2) ds, \quad \forall u_0 \in H, \quad t \geq 0 \quad (3.84)$$

Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em H e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \geq 0$ convergindo para o infinito, tomemos então um conjunto limitado $B \subset H$ tal que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$. Visto que o conjunto $\mathcal{B}$ é absorvente, existe um tempo $T_B > 0$ tal que

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq T_B,$$

então

$$t_n \geq T_B \Rightarrow S(t_n)u_n \in \mathcal{B}.$$

Pelo teorema de Banach-Alaoglu existe uma subsequência $\{S(t_n)u_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ tal que

$$S(t_n)u_n \rightharpoonup w \text{ em } H, \quad n \in \mathbb{N}', \quad (3.85)$$

onde $w \in \mathcal{B}$, pois $\mathcal{B}$ é convexo e fechado na topologia fraca, uma vez que, um espaço de Banach é fechado e convexo na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia forte. Além disso, para cada $T > 0$, temos que

$$S(t_n - T)u_n \in \mathcal{B}, \quad (3.86)$$

sempre que $t_n - T > T_B$. Então para cada $T > 0$ o teorema de Banach Alaoglu nos

garante que existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_T \subset \mathbb{N}$ tal que

$$S(t_n - T)u_n \rightharpoonup w_T \text{ em } H, \text{ quando } n \rightarrow +\infty \text{ em } \mathbb{N}_T$$

e $w_T \in \mathcal{B}$. Tomemos em particular $T \in \mathbb{N}$ e façamos o seguinte processo, para $T = 1$ consideremos o conjunto de índices

$$\mathbb{N}_0^1 = \{n \in \mathbb{N}'; t_n - 1 \geq T_B\},$$

notemos que por (3.86)

$$\{S(t_n - 1)u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0^1} \subset \mathcal{B},$$

logo existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0^1$ tal que

$$S(t_n - 1)u_n \rightharpoonup w_1 \text{ em } H, \text{ quando } n \rightarrow +\infty \text{ em } \mathbb{N}_1$$

e $w_1 \in \mathcal{B}$. Para $T = 2$ consideremos o conjunto de índices

$$\mathbb{N}_0^2 = \{n \in \mathbb{N}_1; t_n - 2 \geq T_B\},$$

por (3.86) obtemos que

$$\{S(t_n - 1)u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0^2} \subset \mathcal{B},$$

logo existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_0^2$ tal que

$$S(t_n - 2)u_n \rightharpoonup w_2 \text{ em } H, \text{ quando } n \rightarrow +\infty \text{ em } \mathbb{N}_2$$

e $w_2 \in \mathcal{B}$. Continuando o processo temos

$$\dots \mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}'.$$

Tomando o conjunto de índices

$$\mathbb{N}^* = \bigcap_{T=1}^{\infty} \mathbb{N}_T,$$

e denotando seu elementos por n' , chegamos que a subsequência $\{S(t_{n'})u_{n'}\}_{n'}$ é tal que

$$S(t_{n'} - T)u_{n'} \rightharpoonup w_T, \text{ em } H, \forall T \in \mathbb{N}, \quad (3.87)$$

com $w_T \in \mathcal{B}$. Notemos então que

$$\begin{aligned} w = \lim_{H_f} S(t_{n'})u_{n'} &= \lim_{H_f} S(T - T + t_{n'})u_{n'} = \lim_{H_f} S(T)S(t_{n'} - T)u_{n'} \\ &\underbrace{=}_{\text{Lema 3.11}} S(T) \lim_{H_f} S(t_{n'} - T)u_{n'} = S(T)w_T, \quad \forall T \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde $\lim_{H_f}$ denota o limite tomado na topologia fraca de H , com $n' \rightarrow \infty$. Logo

$$w = S(T)w_T, \quad \forall T \in \mathbb{N}.$$

Por (3.85) e usando o fato da função norma ser fracamente semicontínua inferiormente temos que

$$|w| \leq \liminf_{n'} |S(t_{n'})u_{n'}|, \quad (3.89)$$

provemos agora que

$$\limsup_{n'} |S(t_{n'})u_{n'}| \leq |w|. \quad (3.90)$$

Dado $T \in \mathbb{N}$ e $t_{n'} > T$ temos por (3.84) que

$$\begin{aligned} |S(t_{n'})u_{n'}|^2 &= |S(T)S(t_{n'} - T)u_{n'}|^2 \\ &= |S(t_{n'} - T)u_{n'}|^2 \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} + 2 \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} (\langle f, S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'} \rangle - \\ &\quad - [S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'}]^2) ds. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Por (3.86) temos que

$$\left| S(t_{n'} - T) \frac{\partial u_{n'}}{\partial t} \right|^2 \leq \rho^2,$$

logo

$$\limsup_{n'} \left(\frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} |S(t_{n'} - T)u_{n'}|^2 \right) \leq \rho^2 \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}}. \quad (3.92)$$

Aplicando o Lema 3.11 em (3.87) obtemos que

$$S(\cdot)S(t_{n'} - T)u_{n'} \rightharpoonup S(\cdot)w_T \quad \text{em } L^2(0, T; V). \quad (3.93)$$

Além disso a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : \Omega \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\rightarrow \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-t)}} f(x)\end{aligned}\quad (3.94)$$

está em $L^2(0, T; V')$, visto que

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-t)}} f(x) \right\|_{V'}^2 dt \leq \int_0^T \|f\|_{V'}^2 dt \leq c_T.$$

Então por (3.93) obtemos também que

$$\langle \phi, S(\cdot)S(t_{n'} - T)u_{n'} \rangle \rightarrow \langle \phi, S(\cdot)w_T \rangle,$$

ou seja,

$$\lim_{n'} \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} \langle f, S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'} \rangle ds = \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} \langle f, S(s)w_T \rangle ds. \quad (3.95)$$

Notemos que como

$$0 < \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} \leq \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} \leq 1, \quad \forall s \in [0, T]$$

temos por (3.81) que

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2e^{\nu\lambda_1 T}} \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2 &= \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} \int_0^T \frac{\nu}{2} \|u\|_V^2 ds \\ &\leq \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} [u]^2 ds \\ &\leq \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [u]^2 ds \\ &\leq \int_0^T [u]^2 ds \\ &= \nu \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2, \quad \forall u \in L^2(0, T; V).\end{aligned}$$

Logo a aplicação

$$\begin{aligned}\mu : L^2(0, T; V) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \left(\int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [u]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

define uma norma (não é difícil verificar que satisfaz a definição de norma) em $L^2(0, T; V)$

equivalente à norma usual. Segue então de (3.93) que

$$\int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [S(s)w_T]^2 ds \leq \liminf_{n'} \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'}]^2 ds. \quad (3.96)$$

Assim, usando algumas propriedades de limite do supremo obtemos

$$\begin{aligned} & \limsup_{n'} \left(-2 \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'}]^2 ds \right) \\ &= -\liminf_{n'} \left(2 \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'}]^2 ds \right) \\ &\stackrel{(3.96)}{\leq} -2 \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} [S(s)w_T]^2 ds. \end{aligned} \quad (3.97)$$

As desigualdades (3.92), (3.95) e (3.97) nos permite passar o $\limsup_{n'}$ em (3.91), obtendo

$$\limsup_{n'} |S(t_{n'})u_{n'}|^2 \leq \rho^2 \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} + 2 \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} (\langle f, S(s)w_T \rangle - [S(s)w_T]^2) ds. \quad (3.98)$$

Por outro lado, tomando $S(T)w_T = w$ em (3.84) obtemos que

$$|w|^2 = \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} |w_T|^2 + 2 \int_0^T \frac{1}{e^{\nu\lambda_1(T-s)}} (\langle f, S(s)w_T \rangle - [S(s)w_T]^2) ds. \quad (3.99)$$

De (3.98) e (3.99) chegamos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n' \in \mathbb{N}} |S(t_{n'})u_{n'}|^2 &\leq \rho^2 \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} + |w|^2 - \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}} |w_T|^2 \\ &\leq |w|^2 + \rho^2 \frac{1}{e^{\nu\lambda_1 T}}, \quad \forall T \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Fazendo $T \rightarrow \infty$ em (3.100) obtemos finalmente que

$$\limsup_{n' \in \mathbb{N}} |S(t_{n'})u_{n'}|^2 \leq |w|^2. \quad (3.101)$$

Portanto, segue de (3.89) e (3.101) que

$$S(t_{n'})u_{n'} \rightarrow w \text{ forte em } H. \quad (3.102)$$

Combinando Teorema 3.12, Teorema 3.33 e Teorema 2.10, obtemos o resultado principal deste trabalho:

Teorema 3.13. *Seja Ω um aberto que satisfaz (3.2). Assuma $\nu > 0$ e $f \in V'$. Então, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associado à equação (3.1) possui um atrator global em H , isto é, um compacto $\mathcal{A}$ em H invariante sob ação do semigrupo que atrai todos os conjuntos limitados de H . E mais, $\mathcal{A}$ é conexo em H .*

Capítulo 4

Considerações finais

Uma das motivações em considerar o problema de provar a existência de atrator global para o sistema de equações de Navier-Stokes sobre domínios ilimitados em $\mathbb{R}^2$, conforme R. Rosa em [14], reside na falta da compacidade nas imersões de Sobolev, o que torna a análise matemática desses problemas mais interessante. Aqui, chamamos a atenção do leitor para o fato de que não usamos espaços de Sobolev com peso que é uma das principais técnicas usadas para contornar a falta de compacidade para as imersões. O argumento usado aqui é assumir que o domínio espacial embora ilimitado seja tal que sobre ele vale a desigualdade de Poincaré. Num primeiro momento notamos a importância de considerar que vale a desigualdade de Poincaré sobre o domínio Ω (não necessariamente limitado) quando se pretende demonstrar a equivalência das normas, como obtido no Teorema 3.2 e, consequentemente, nos espaços H e V . A desigualdade de Poincaré também é importante na obtenção de algumas propriedades da forma trilinear b onde usamos apenas as imersões contínuas de Sobolev. A obtenção das estimativas 3.41 e 3.46, também consequências da desigualdade de Poincaré, são de fundamental importância para a prova da existência de um conjunto absorvente e a compacidade assintótica do semigrupo estudado, garantindo assim a existência de um atrator global para o mesmo. Um dos motivos usado para usar este *framework* se dá pelo fato de que embora F. Abergel [1] e A. V. Babin [3] tenham assumido que o termo forçante pertence a espaços de Sobolev com peso para provar a existência do atrator, eles também obtiveram estimativas sobre a sua dimensão, e estas estimativas eram independentes na norma ponderada do termo forçante.

A presente dissertação nos motiva a considerar as seguintes questões em futuros trabalhos.

(Q1) Estudar estimativas da dimensão fractal e da dimensão de Hausdorff do atrator global, para mais detalhes veja [14];

(Q2) Considerar o termo forçante como função de t , e condição $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, V')$;

- (Q3) Considerar a viscosidade como função de t , por exemplo substituir a viscosidade constante ν em (1) pela expressão $\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2$, como foi considerado por [10] e outros.

Referências Bibliográficas

- [1] F. ABERGEL, *Attractors for a Navier-Stokes flow in an unbounded domain*. Math. Mod. and Num. Anal., 23(3):359–370, 1989.
- [2] R. A. ADAMS, *Sobolev Space*, Academic Press, London, (1975).
- [3] A. V. BABIN, *The attractor of a Navier-Stokes system in an unbounded channel-like domain*. J. Dynamics and Diff. Eqs., 4(4):555–584, 1992.
- [4] J. L. BOLDRINI, *Uma breve introdução às equações de Navier-Stokes*. Artigo de divulgação científica, UNICAMP-IMMECC, Campinas-SP, Brasil.
- [5] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [6] C. FOIAS E R. TEMAM, *Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations*. J. Math. Pures et Appl., 58:334–268, 1979.
- [7] J. K. HALE, asymptotic behavior and dynamics in infinite dimensions. In *Research Notes in Mathematics*, J.K. Hale and P. Martínez-Amores, Vol. 132. Pitman, New York, 1985, 1–420.
- [8] O. LADYZHENSKAYA, *On the dynamical system generated by the Navier-Stokes equations*. Zapiskii of nauchnish seminarovs LOMI, 27:91114, 1972. English translation in J. of Soviet Math. 3, (1975). No. 4.
- [9] J. LERAY, *Essai sur les mouvements plans de un liquide visqueux que limitent des parois*, J. Math. Pures Appl. t. XIII, 331–418 (1934).
- [10] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1, (1969).
- [11] J. L. LIONS E E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogenes et applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1, (1968).

- [12] L. A. MEDEIROS E M. M. MIRANDA , *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, *Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [13] L. A. MEDEIROS E P. H. RIVEIRA, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, *Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [14] R. ROSA, *The Global Attractor for the 2d Navier-Stokes Flow on Some Unbounded Domains*, *Nonlinear Analysis TMA*, 32, 1, 71-85, (1998).
- [15] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, (1966).
- [16] J. SIMON, *Compact sets in the space $L^p(0; T; B)$* , *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* CXLVI (1987) 65-96.
- [17] L. TARTAR, *Partial Differential Equations Models in Oceanography*, Carnegie Mellon University (1999).
- [18] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, New York, Oxford, (1977).
- [19] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, 2nd ed., Université de Paris-Sud, Orsay, France, (1995).