Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre o Complexo de Koszul

Por
José Naéliton Marques da Silva

Sob orientação do
Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

e Co-orientação do
Prof. Dr. Aron Simis

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Dezembro - 2010
João Pessoa, Paraíba

Sobre o Complexo de Koszul

por

José Naéliton Marques da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. **Roberto Callejas Bedregal**
Orientador

Prof. Dr. **Aron Simis**
Co-orientador

Prof. Dr. **Cleto Brasileiro Miranda Neto**
Examinador

Prof. Dr. **Antônio de Andrade e Silva**
Suplente

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Dezembro - 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAíBA

Data: **Dezembro - 2010**

Autor: **José Naéliton Marques da Silva**

Título: **Sobre o Complexo de Koszul**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **Dezembro** Ano: **2010**

Assinatura do Autor

Índice

Resumo **v**

Introdução **vi**

1 Complexos de Koszul **1**
1.1 Definições e Propriedades Básicas 1
1.2 Conexão com teoria da profundidade 22
1.3 Conexão com teoria de multiplicidade 36

A Generalidades Sobre A-módulos **46**
A.1 Módulos Projetivos 46
A.2 Módulos Injetivos 61
A.3 Módulos Planos 69
A.4 Módulos Graduados 75

B Álgebra Homológica **84**
B.1 Complexos de A-módulos 84
B.2 Resoluções 92
B.3 Produto de Torção 103
B.4 Módulo de Extensão 122

C Álgebra Exterior **145**
C.1 Álgebras 145
C.2 Álgebra Tensorial 158
C.3 Álgebra Exterior 165

D Sequências Regulares e Símbolo de Multiplicidade **183**
D.1 Sequências Regulares e Profundidade 183
D.1.1 Sequências Regulares 183
D.1.2 Profundidade de um A-módulo relativo a um ideal 187
D.2 Característica de Euler-Poincaré e Símbolo de multiplicidade 196
D.2.1 Aplicações Aditivas 196
D.2.2 Característica de Euler-Poincaré 197
D.2.3 Sistema de Multiplicidade 199
D.2.4 Símbolo de Multiplicidade 209

Referências Bibliográficas **216**

Resumo

O complexo de Koszul é uma ferramenta de vital importância na Álgebra Comutativa. Ele nos permitirá definir alguns invariantes que nos dão informações refinadas acerca de um determinado módulo. Entre eles podemos ressaltar a profundidade e a multiplicidade de tal módulo em relação à um ideal. A primeira mede o comprimento da maior M-sequência formada por elementos do anel e a segunda nos dá informações assintóticas acerca do comprimento de módulos quocientes.

Palavras-Chave: Complexo de Koszul, Álgebra exterior, Multiplicidade, profundidade, Característica de Euler-Poincaré.

Introdução

O complexo de Koszul foi introduzido por Jean-Louis Koszul e apresentou-se como uma das ferramentas mais importantes da Álgebra Comutativa, tendo aplicações em inúmeros campos da matemática, tais como Geometria Algébrica, Álgebra de Lie e Teoria dos operadores. Tal complexo tem sua importância não apenas pelo fato de ser encontrado em vários campos da matemática, mas também por ter uma estrutura de Álgebra intrínseca e por dar uma aplicação direta à Álgebra de Grassmann.

Na presente dissertação pretendemos construir tal complexo e demonstrar suas propriedades mais básicas de forma mais rigorosamente possível. Para isso utilizaremos como pré-requisito apenas o livro introdutório em Álgebra Comutativa do Atiyah-MacDonald e a partir daí toda teoria necessária para tal feito será posta nos apêndices.

Entre muitas possíveis aplicações do complexo de Koszul, escolhemos sua conexão com a teoria da profundidade que correlaciona três invariantes de natureza completamente distinta, a saber, a profundidade de um módulo relativo a um ideal J, o comprimento de uma M-sequência maximal formada por elementos de J e o menor inteiro tal que a homologia do complexo de Koszul relacionado à uma família de geradores de J é não nulo. Quando o anel é noetheriano e o módulo finitamente gerado, veremos que tais inteiros são iguais.

Outra aplicação que abordaremos será a relação entre o símbolo de multiplicidade de um módulo relativo à uma sequência de elementos do anel e a característica de Euler-Poincaré do módulo de homologia do complexo de Koszul associado à mesma sequência. Relação esta, que no caso do anel noetheriano e do módulo finitamente gerado se mostrará ser de igualdade.

Finalizaremos com o teorema de Lech que nos dará, a partir do símbolo de multiplicidade, informações assintóticas sobre o comprimento de determinados módulos.

Todos os anéis considerados nessa dissertação serão comutativos com unidade.

Capítulo 1

Complexos de Koszul

1.1 Definições e Propriedades Básicas

Sejam I um conjunto e $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ um homomorfismo de A-módulos. Para cada $m \geq 2$ considere a aplicação:

$$\varphi_m : (A^{(I)})^m \longrightarrow \bigwedge^{m-1}(A^{(I)})$$

tal que $\varphi_m(y_1, y_2, ..., y_m) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge \widehat{y_i} \wedge ... \wedge y_m$, onde $\widehat{y_i}$ denota a omissão do elemento que está na posição i.

Afirmação: φ_m é uma aplicação m-linear alternada.

De fato, temos que:

$$\varphi_m(y_1, ..., y_j + ay_j', ..., y_m) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge \widehat{y_i} \wedge ... \wedge y_m =$$

$$(-1)^{j+1}u(y_j + ay_j')y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_m +$$

$$\sum_{i \neq j}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge (y_j + ay_j') \wedge ... \wedge \widehat{y_i} \wedge ... \wedge y_m =$$

$$(-1)^{j+1}u(y_j)y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_m +$$

$$a(-1)^{j+1}u(y_j')y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_m +$$

$$\sum_{i\neq j}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1\wedge y_2\wedge ...\wedge y_j\wedge ...\wedge \widehat{y_i}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$a\sum_{i\neq j}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1\wedge y_2\wedge ...\wedge y_j'\wedge ...\wedge \widehat{y_i}\wedge ...\wedge y_m=$$

$$[(-1)^{j+1}u(y_j)y_1\wedge y_2\wedge ...\wedge \widehat{y_j}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$\sum_{i\neq j}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1\wedge y_2\wedge ...\wedge y_j\wedge ...\wedge \widehat{y_i}\wedge ...\wedge y_m]+$$

$$a[(-1)^{j+1}u(y_j')y_1\wedge y_2\wedge ...\wedge \widehat{y_j}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$\sum_{i\neq j}(-1)^{i+1}u(y_i)y_1\wedge y_2\wedge ...\wedge y_j'\wedge ...\wedge \widehat{y_i}\wedge ...\wedge y_m]=$$

$$\varphi_m(y_1,...,y_j,...,y_m)+a\varphi_m(y_1,...,y_j',...,y_m)$$

Se $i\neq j$ e $y_i=y_j=z$, então:

$$\varphi_m(y_1,...,y_{i-1},z,y_{i+1},...,y_{j-1},z,y_{j+1},...,y_m)=$$

$$(-1)^{j+1}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge z\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge \widehat{y_j}\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$(-1)^{i+1}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge \widehat{y_i}\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge z\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$\sum_{k\neq i,j}(-1)^{k+1}u(y_k)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge z\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge z\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge \widehat{y_k}\wedge ...\wedge y_m=$$

$$(-1)^{j+1}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge z\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge \widehat{y_j}\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$(-1)^{i+1}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge \widehat{y_i}\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge z\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m=$$

$$(-1)^{j+1}(-1)^{j-i-1}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge \widehat{y_i}\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge z\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$(-1)^{i+1}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge \widehat{y_i}\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge z\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m=$$

$$(-1)^{i}u(z)y_1\wedge ...\wedge y_{i-1}\wedge \widehat{y_i}\wedge y_{i+1}\wedge ...\wedge y_{j-1}\wedge z\wedge y_{j+1}\wedge ...\wedge y_m+$$

$$(-1)^{i+1}u(z)y_1 \wedge ... \wedge y_{i-1} \wedge \widehat{y_i} \wedge y_{i+1} \wedge ... \wedge y_{j-1} \wedge z \wedge y_{j+1} \wedge ... \wedge y_m = 0$$

Assim sendo, para cada $m \geq 2$, podemos definir uma aplicação A-linear:

$$d_m : \bigwedge^m (A^{(I)}) \longrightarrow \bigwedge^{m-1} (A^{(I)})$$

tal que $d_m(y_1 \wedge y_2 \wedge .... \wedge y_m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1}u(y_i)y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge \widehat{y_i} \wedge ... \wedge y_m$.

Proposição 1.1.1. *O par* $(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i, \oplus d_n)$*, onde* $C_i = \bigwedge^i (A^{(I)})$*, se* $i \in \mathbb{N}$*,* $C_i = 0$*, se* $i \leq 0$ *e* $d_1 = u$*, define um complexo.*

Demonstração:

Sejam $m \geq 2$ *e* $x_1, x_2, ..., x_{m+1} \in A^{(I)}$*, temos que:*

$$d_m \circ d_{m+1}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{m+1}) = d_m(\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}u(x_i)x_1 \wedge ... \wedge \widehat{x_i} \wedge ... \wedge x_{m+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}u(x_i)d_m(x_1 \wedge ... \wedge \widehat{x_i} \wedge ... \wedge x_{m+1}) = R$$

Definindo $y_k = x_k$*, se* $k < i$ *e* $y_k = x_{k+1}$*, se* $k \geq i$*, temos:*

$$R = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}u(x_i)d_m(y_1 \wedge ... \wedge y_m) =$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}u(x_i) \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1}u(y_j)y_1 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{m} (-1)^{i+j}u(x_i)u(y_j)y_1 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_m +$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \geq i}}^{m} (-1)^{i+j}u(x_i)u(y_j)y_1 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_m$$

$$= \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{m} (-1)^{i+j}u(x_i)u(x_j)x_1 \wedge ... \wedge \widehat{x_j} \wedge ... \wedge \widehat{x_i} \wedge ... \wedge x_{m+1} +$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{m}(-1)^{i+j}u(x_i)u(x_{j+1})x_1\wedge...\wedge\widehat{x_i}\wedge...\wedge\widehat{x_{j+1}}\wedge...\wedge x_{m+1}=$$

$$\sum_{i=2}^{m+1}\sum_{\substack{j=1\\j<i}}^{m}(-1)^{i+j}u(x_i)u(x_j)x_1\wedge...\wedge\widehat{x_j}\wedge...\wedge\widehat{x_i}\wedge...\wedge x_{m+1}+$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=2\\j>i}}^{m+1}(-1)^{i+j-1}u(x_i)u(x_j)x_1\wedge...\wedge\widehat{x_i}\wedge...\wedge\widehat{x_j}\wedge...\wedge x_{m+1}=$$

$$\sum_{i=2}^{m+1}\sum_{\substack{j=1\\j<i}}^{m}(-1)^{i+j}u(x_i)u(x_j)x_1\wedge...\wedge\widehat{x_j}\wedge...\wedge\widehat{x_i}\wedge...\wedge x_{m+1}+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{i=2\\j<i}}^{m+1}(-1)^{i+j-1}u(x_i)u(x_j)x_1\wedge...\wedge\widehat{x_j}\wedge...\wedge\widehat{x_i}\wedge...\wedge x_{m+1}=0$$

Além do mais:

$$d_1\circ d_2(x_1\wedge x_2)=d_1(u(x_1)x_2-u(x_2)x_1)=u(x_1)d_1(x_2)-u(x_2)d_1(x_1)=$$

$$u(x_1)u(x_2)-u(x_2)u(x_1)=0$$

Q.E.D.

O complexo definido na proposição 1.1.1 é dito associado ao homomorfismo u e será denotado por K(u).

Definição 1.1.1. *Sejam I um conjunto, $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ uma forma linear e M um A-módulo. Ao complexo $K_*(u;M) = K(u)\otimes_A M$ chamamos de complexo de Koszul descendente, ou complexo descendente da álgebra exterior, associado à forma linear u e ao A-módulo M. Ao complexo $K^*(u;M) = Homgr_A(K(u),M)$ chamaremos de complexo de Koszul ascendente, ou complexo ascendente da álgebra exterior, associado à forma linear u e ao A-módulo M.*

Observe que dar uma forma linear $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ é equivalente a dar uma família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de elementos de A. De fato, basta tomar $x_i = u(e_i)$, onde $e_i \in A^{(I)}$, $i \in I$, é a base canônica. Assim sendo, falaremos do complexo de Koszul ascendente (resp. descendente) associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e ao A-módulo M como sendo o associado à forma linear u e ao A-módulo M e o denotaremos por $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I};M)$(resp. $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I};M)$). Observe também que $K_*(u;A)$ não passa de $K(u)$. No que segue, denotaremos $(K_*(u;M))_i$ (resp. $(K^*(u;M))^i$) por $K_i(u;M)$ (resp. $K^i(u;M)$).

Sejam $\varphi : K_0(u;M) = A \otimes_A M \longrightarrow M$ (resp. $\varphi' : K^0(u;M) = Hom_A(A,M) \longrightarrow M$) e $\psi : K_1(u;M) = A^{(I)} \otimes_A M \longrightarrow M^{(I)}$ (resp. $\psi' : K^1(u;M) = Hom_A(A^{(I)},M) \longrightarrow M^I$) os isomorfismos canônicos. Definiremos um complexo a partir do complexo de Koszul $K_*(u;M)$ (resp. $K^*(u;M)$), fazendo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{m+1}"] & K_m(u;M) \arrow[r, "d_m"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & K_1(u;M) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\psi"] & K_0(u;M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{m+1}"'] & K_m(u;M) \arrow[r, "d'_m"'] & \cdots \arrow[r, "d'_2"'] & M^{(I)} \arrow[r, "d'_1"'] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(resp.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K^0(u;M) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\varphi'"] & K^1(u;M) \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\psi'"] & \cdots \arrow[r, "d^{m-1}"] & K^m(u;M) \arrow[r, "d^m"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d''^0"'] & M^I \arrow[r, "d''^1"'] & \cdots \arrow[r, "d''^{m-1}"'] & K^m(u;M) \arrow[r, "d''^m"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

) onde os homomorfismos que não aparecem são as identidades, comutar. Com tal definição, tais complexos são claramente isomorfos. Os identificaremos a partir de tal isomorfismo.

Proposição 1.1.2. *Sejam I um conjunto, $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de A-módulos e $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ uma forma linear. Se $K_*(u;\bigoplus_{i\in I} M_i)$ (resp. $K_*(u;M_i)$) denota o complexo de koszul descendente associado à forma linear u e ao A-módulo $\bigoplus_{i\in I} M_i$ (resp. M_i), então existe um isomorfismo de complexos:*

$$K_*(u;\bigoplus_{i\in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} K_*(u;M_i)$$

Demonstração:

Segue direto da proposição B.3.2

Q.E.D.

Proposição 1.1.3. *Sejam I um conjunto, $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de A-módulos e $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ uma forma linear. Se $K^*(u;\prod_{i\in I} M_i)$ (resp. $K^*(u;M_i)$) denota o complexo de koszul ascendente associado à forma linear u e ao A-módulo $\prod_{i\in I} M_i$ (resp. M_i), então existe um isomorfismo de complexos:*

$$K^*(u;\prod_{i\in I} M_i) \simeq \prod_{i\in I} K^*(u;M_i)$$

Demonstração:

Segue direto da proposição B.4.1

Q.E.D.

Proposição 1.1.4. *Sejam I um conjunto e M, N A-módulos. Se $K_*(u; M)$ (resp. $K_*(u; N)$, $K_*(u; M \otimes_A N)$, $K_*(u; N \otimes_A M)$) denota o complexo de Koszul descendente associado à forma linear $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ e ao A-módulo M (resp. N, $M \otimes_A N$, $N \otimes_A M$), então existem isomorfismos de Complexos:*

$$K_*(u; M \otimes_A N) \simeq K_*(u; M) \otimes_A N \simeq K_*(u; N) \otimes_A M \simeq K_*(u; N \otimes_A M)$$

Demonstração:

Segue da proposição B.3.3, os isomorfismos de complexos:

$$K_*(u; M \otimes_A N) = K(u) \otimes_A (M \otimes_A N) \simeq (k(u) \otimes_A M) \otimes_A N = K_*(u; M) \otimes_A N$$

e

$$K_*(u; N \otimes_A M) = K(u) \otimes_A (N \otimes_A M) \simeq (k(u) \otimes_A N) \otimes_A M = K_*(u; N) \otimes_A M$$

E da proposição B.3.1 (observando que se $\varphi : C \longrightarrow C'$ é um isomorfismo de complexos, então $1_{C''} \otimes \varphi : C'' \otimes_A C \longrightarrow C'' \otimes_A C'$ é um isomorfismo de complexos, afirmação 4 do teorema B.3.1 e proposição B.3.1) o isomorfismo (de complexos):

$$K_*(u; N \otimes_A M) = K(u) \otimes_A (N \otimes_A M) \simeq K(u) \otimes_A (M \otimes_A N) = K_*(u; M \otimes_A N)$$

Q.E.D.

Proposição 1.1.5. *Sejam J um conjunto e $K_*(u; M)$ o complexo de koszul descendente associado à forma linear $u : A^{(J)} \longrightarrow A$ e ao A-módulo M. Se $K_*(u; M)$ é acíclico em grau positivo, ou seja, $H_p(K_*(u; M)) = 0$, $\forall p \geq 1$, então $(K_*(u; M), h)$, onde $h_0 : M \longrightarrow \frac{M}{IM}$ é o homomorfismo canônico e $I = im(u)$, é uma resolução à esquerda de $\frac{M}{IM}$.*

Demonstração:

Desde que $H_p(K_*(u; M)) = 0$, $\forall p \geq 1$, é suficiente demonstrar que $d_1'(M^{(J)}) = IM$. Se $y \in d_1(M^{(J)})$, então $y = d_1'(\{x_i\}_{i \in J})$, com $x_i \in M$ e a família $\{x_i\}_{i \in J}$ de suporte finito. Assim sendo, temos:

$$y = d_1' \circ \psi(\sum_{i\in J} e_i \otimes x_i) = \varphi \circ d_1(\sum_{i\in J} e_i \otimes x_i) = \sum_{i\in J} \varphi \circ d_1(e_i \otimes x_i) =$$

$$\sum_{i\in J} \varphi(u(e_i) \otimes_A x_i) = \sum_{i\in J} u(e_i)x_i \in IM$$

Seja $x \in M$, temos que $u(e_i)x = d_1'(j_i(x))$, onde $j_i : M \longrightarrow M^{(J)}$ é a injeção canônica e $\{e_i\}_{i\in J}$ a base canônica de $A^{(J)}$. Como a família $\{u(e_i)x\}_{(i,x)\in J\times M}$ gera o A-módulo IM e $u(A^{(J)})$ é um submódulo de M, segue que $IM \subseteq u(A^{(J)})$.

Q.E.D.

Proposição 1.1.6. *Sejam J um conjunto e $K^*(u; M)$ o complexo de koszul ascendente associado à forma linear $u : A^{(J)} \longrightarrow A$ e ao A-módulo M. Se $K^*(u; M)$ é acíclico em grau positivo, então $(K^*(u; M), h)$, onde $h_0 : Hom_A(\frac{A}{I}, M) \longrightarrow M$ é tal que $h_0(f) = f(\overline{1})$ e $I = im(u)$, é uma resolução à direita de $Hom_A(\frac{A}{I}, M)$.*

Demonstração:

Observe que h_0 é injetiva. De fato,

$$h_0(g) = 0 \Rightarrow g(\overline{1}) = 0 \Rightarrow ag(\overline{1}) = 0, \forall a \in A \Rightarrow g(\overline{a}) = 0, \forall a \in A \Rightarrow g = 0$$

Além do mais, se denotarmos por d a diferencial de $K^*(u; M)$, temos que:

$$d_0^{''} \circ h_0(g) = d_0^{''}(g(\overline{1})) = \{-u(e_i)g(\overline{1})\}_{i\in J} = \{-g(\overline{u(e_i)})\}_{i\in J} = 0$$

Se $y \in Ker(d_0)$, então

$$-\{u(e_i)y\}_{i\in J} = d_0^{''}(y) = 0 \Rightarrow u(e_i)y = 0, \forall i \in J \Rightarrow I \subseteq Ann(y)$$

Dessa forma, podemos definir a aplicação A-linear:

$\eta_y : \frac{A}{I} \longrightarrow M$ tal que $\eta_y(\overline{a}) = ay$. Assim sendo, temos que $y = h_0(\eta_y)$. O resto do resultado segue do fato de $H^p(K^*(u; M)) = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Q.E.D.

Proposição 1.1.7. *Sejam I um conjunto e $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ o complexo de Koszul descendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Se M é livre (resp. projetivo), então $K_p(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ é livre (resp. projetivo) para todo inteiro p. Em particular, $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ é livre (resp. projetivo).*

Demonstração:

Como $A^{(I)}$ *é livre (resp. projetivo), temos que* $\bigwedge^p(A^{(I)})$ *é livre (resp. projetivo) para todo* $p \in \mathbb{N}$ *e também o são* $K_p(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) = \bigwedge^p(A^{(I)}) \otimes_A M$, $\forall p \in \mathbb{N}$, *como produto tensorial de módulos livres (resp. projetivo). O fato de* $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ *ser livre (resp. projetivo), segue de tal A-módulo ser a soma direta de A-módulos livres (projetivos).*

Q.E.D.

Corolário 1.1.1. *Sob as hipóteses da proposição 1.1.5, se M é livre, então* $(K_*(u; M), h)$ *é uma resolução livre de* $\frac{M}{IM}$.

Demonstração:

Claro a partir das proposições 1.1.5 e 1.1.7.

Q.E.D.

Corolário 1.1.2. *Sob as hipóteses da proposição 1.1.5, se M é projetivo, então* $(K_*(u; M), h)$ *é uma resolução projetiva de* $\frac{M}{IM}$.

Demonstração:

Claro a partir das proposições 1.1.5 e 1.1.7.

Corolário 1.1.3. *Sejam I um conjunto e* $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *o complexo de Koszul associado à família* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *de elementos de A. Se* $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *é acíclico em grau positivo, então:*

$$H_p(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)) \simeq Tor_p^A(\frac{A}{I}, M)$$

onde $I =< \{x_\alpha\}_{\alpha\in I} >$, *para todo A-módulo M e para todo inteiro p.*

Demonstração:

O resultado segue do fato de $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \simeq K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; A)$, *como complexos, e do corolário anterior.*

Q.E.D.

Corolário 1.1.4. *Sejam I um conjunto e* $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *o complexo associado à família* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *de elementos de A. Se* $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *é acíclico em grau positivo, então:*

$$H^p(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)) \simeq Ext^p(\frac{A}{I}, M)$$

onde $I =< \{x_\alpha\}_{\alpha\in I} >$, *para todo A-módulo M e para todo inteiro p.*

Demonstração:

O resultado segue do fato de $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *ser uma resolução livre (e portanto projetiva) de* $\frac{A}{I}$ *e* $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) = Homgr_A(K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}), M)$.

Q.E.D.

Proposição 1.1.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $K^*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ o complexo de Koszul ascendente associado à sequência $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Se M é livre (resp. projetivo, plano), então $K^p(\{x_1, x_2, ..., x_n\}; M)$ é livre (resp. projetivo, plano) para todo inteiro p. Em particular, $K^*(\{x_1, x_2, ..., x_n\}; M)$ é livre (resp. projetivo, plano).*

Demonstração:

Como $K^p(\{x_1, x_2, ..., x_n\}; M) = Hom_A(\bigwedge^p(A^n), M)$, o resultado segue do fato de $\bigwedge^p(A^n)$ ser livre e finitamente gerado (proposições A.1.8 e A.3.3). Além do mais, $K^*(\{x_1, x_2, ..., x_n\}; M)$ é livre (resp. projetivo, plano) por ser soma direta de A-módulos livres (resp. projetivos, planos).

Q.E.D.

Proposição 1.1.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $K^*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ o complexo de Koszul ascendente associado à sequência $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Se M é injetivo, então $K^p(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ é injetivo para todo inteiro p. Além do mais, $K^*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ é injetivo.*

Demonstração:

Como A^n é livre e possui uma base finita, segue que $K_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge^p(A^n)$ é livre de base finita (caso $p < 0$ é trivialmente verdadeiro). Desde que M é injetivo, segue que:

$$K^p(x_1, x_2, ..., x_n; M) = Hom_A(K_p(x_1, x_2, ..., x_n), M)$$

é injetivo (corolário A.2.1). Além do mais, desde que A^n é gerado por n elementos, temos que $\bigwedge^r(A^n) = 0$, $\forall r > n$ e dessa forma:

$$K^r(x_1, x_2, ..., x_n; M) = Hom_A(\bigwedge^r(A^n), M) = 0, \forall r > n$$

Como:

$$K^s(x_1, x_2, ..., x_n; M) = 0, \forall s < 0$$

temos que:

$$K^*(x_1, x_2, ..., x_n; M) \simeq$$

$$K^1(x_1, x_2, ..., x_n; M) \times K^2(x_1, x_2, ..., x_n; M) \times ... \times K^m(x_1, x_2, ..., x_n; M)$$

para algum $m \leq n$. Assim sendo, o resultado segue do fato de $K^*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ ser isomorfo ao produto de módulos injetivos.

Q.E.D.

Proposição 1.1.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ o complexo de Koszul descendente associado à sequência $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Para todo inteiro p existe um isomorfismo de A-módulos:*

$$K_p(x_1, x_2, ..., x_n; M) \simeq Hom_A(K_p(x_1, x_2, ..., x_n), M)$$

Demonstração:

Seja $\{e_i\}_{i=1}^m$, onde $m = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, a base canônica de $\bigwedge^p(A^n)$. Defina a seguinte aplicação:

$$\varphi_p : Hom_A(\bigwedge^p(A^n), M) \longrightarrow \bigwedge^p(A^n) \otimes_A M$$

tal que $\varphi_p(f) = \sum_{i=1}^m e_i \otimes f(e_i)$. Claramente φ é A-linear. Da mesma forma, defina:

$$\psi_p : \bigwedge^p(A^n) \times M \longrightarrow Hom_A(\bigwedge^p(A^n), M)$$

tal que $\psi_p(\sum_{i=1}^m a_i e_i, x)(\sum_{j=1}^m b_j e_j) = \sum_{j=1}^m a_j b_j x$. Claramente vemos que ψ_p está bem definida e é A-bilinear. Dessa forma, podemos definir a aplicação A-linear:

$$\eta_p : \bigwedge^p(A^n) \otimes_A M \longrightarrow Hom_A(\bigwedge^p(A^n), M)$$

tal que $\eta_p((\sum_{i=1}^m a_i e_i \otimes x)(\sum_{j=1}^m b_j e_j) = \sum_{j=1}^m a_j b_j e_j$. Observe que:

$$\eta_p \circ \varphi_p(f)(\sum_{j=1}^m b_j e_j) =$$

$$\eta_p(e_i \otimes (\sum_{i=1}^m f(e_i)))(\sum_{j=1}^m b_j e_j) = \eta_p(\sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^m \delta_{ik} e_k) \otimes (f(e_i)))(\sum_{j=1}^m b_j e_j) =$$

$$\sum_{i=1}^m \eta_p((\sum_{k=1}^m \delta_{ik} e_k) \otimes (f(e_i)))(\sum_{j=1}^m b_j e_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_j \delta_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^m b_i f(e_i) = f(\sum_{i=1}^m b_i e_i)$$

onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Por outro lado:

$$\varphi_p \circ \eta_p(\sum_{i=1}^m a_i e_i \otimes x) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} e_j \otimes (\eta_p(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \otimes x)(e_j)) = \sum_{j=1}^{m} e_j \otimes (\eta_p(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \otimes x)(\sum_{k=1}^{m} \delta_{kj} e_k)) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} e_j \otimes (\sum_{k=1}^{m} a_k \delta_{kj} x) = \sum_{j=1}^{m} e_j \otimes (a_j x) = (\sum_{j=1}^{m} a_j e_j) \otimes x$$

Q.E.D.

Corolário 1.1.5. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ o complexo de Koszul descendente associado à sequência $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Se M é plano, então $K_p(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ é plano para todo inteiro p. Em particular, $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ é plano.*

Demonstração:

Temos que $K_p(x_1, x_2, ..., x_n)$ é livre para todo inteiro p. Como M é plano, segue que $K_p(x_1, x_2, ..., x_n; M) \simeq Hom_A(K_p(x_1, x_2, ..., x_n), M)$ é plano (proposição A.3.3). O fato de $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ ser plano, segue do fato de ser soma direta de A-módulos planos.

Q.E.D.

Corolário 1.1.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ o complexo de Koszul descendente associado à sequência $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Se M é injetivo, então $K_p(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ é injetivo para todo inteiro p. Além do mais, $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ é injetivo.*

Demonstração:

Como A^n é livre e possui uma base finita, segue que $K_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge^p(A^n)$ é livre de base finita (caso $p < 0$ é trivialmente verdadeiro). Desde que M é injetivo, segue que $K_p(x_1, x_2, ..., x_n; M) \simeq Hom_A(K_p(x_1, x_2, ..., x_n), M)$ é injetivo (corolário A.2.1). Além do mais, desde que A^n é gerado por n elementos, temos que $\bigwedge^r(A^n) = 0$, $\forall r > n$ e dessa forma $K_r(x_1, x_2, ..., x_n; M) = \bigwedge^r(A^n) \otimes_A M = 0$, $\forall r > n$. Como temos também, $K_s(x_1, x_2, ..., x_n; M) = 0$, $\forall s < 0$, temos que $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M) \simeq K_1(x_1, x_2, ..., x_n; M) \times K_2(x_1, x_2, ..., x_n; M) \times ... \times K_m(x_1, x_2, ..., x_n; M)$, para algum $m \leq n$. Assim sendo, o resultado segue do fato de $K_*(x_1, x_2, ..., x_n; M)$ ser isomorfo ao produto de módulos injetivos.

Q.E.D.

Proposição 1.1.11. *Sejam $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ e $v : A^{(J)} \longrightarrow A$ duas formas lineares. Se u e v são tais que $v(A^{(J)}) \subseteq u(A^{(I)})$, então existe um morfismo de complexos $\omega : K(v) \longrightarrow K(u)$.*

Demonstração:

Seja $H = u(A^{(I)})$. Desde que $v(A^{(J)}) \subseteq u(A^{(I)})$, temos a seguinte situação:

$$\begin{tikzcd} & A^{(J)} \arrow[d, "v"] & \\ A^{(I)} \arrow[r, "u"'] & H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Uma vez que $A^{(J)}$ *é projetivo, existe um homomorfismo* γ *que faz o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & A^{(J)} \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "v"] \\ A^{(I)} \arrow[r, "u"'] & A \end{tikzcd}$$

comutar. Seja $\omega : \bigwedge(A^{(J)}) \longrightarrow \bigwedge(A^{(I)})$ *a extensão de* γ. *Se* d *e* d' *denotam as diferenciais de* $K(u)$ *e* $K(v)$, *respectivamente, teremos:*

$$\omega_m \circ d_{m+1}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{m+1}) = \omega_m(\sum_{i=1}^{m+1} u(x_i)x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge \widehat{x_i} \wedge ... \wedge x_{m+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} u(x_i)\omega_m(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge \widehat{x_i} \wedge ... \wedge x_{m+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} u(x_i)(\gamma(x_1)) \wedge (\gamma(x_2)) \wedge ... \wedge (\gamma(x_{i-1})) \wedge \widehat{x_i} \wedge (\gamma(x_{i+1})) \wedge ... \wedge (\gamma(x_{m+1}))) =$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} v(\gamma(x_i))(\gamma(x_1)) \wedge (\gamma(x_2)) \wedge ... \wedge (\gamma(x_{i-1})) \wedge \widehat{x_i} \wedge (\gamma(x_{i+1})) \wedge ... \wedge (\gamma(x_{m+1}))) =$$

$$d'_{m+1}(\gamma(x_1)) \wedge (\gamma(x_2)) \wedge ... \wedge (\gamma(x_{m+1}))) = d'_{m+1} \circ \omega_{m+1}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{m+1})$$

Q.E.D.

Corolário 1.1.7. *Com as hipóteses da proposição, o morfismo* ω *define um isomorfismo de complexos entre* $k(u)$ *e* $k(v)$, *se, e somente se,* γ *é um isomorfismo.*

Demonstração:

Se ω *é um isomorfismo de complexos, então* ω_p *é um isomorfismo para todo inteiro* p. *Em particular,* $\omega_1 = \gamma$ *é um isomorfismo. Reciprocamente, temos que* ρ *a extensão de* γ^{-1} *é a inversa de* ω.

Q.E.D.

Corolário 1.1.8. *Sejam $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de elementos de A e $\sigma : I \longrightarrow I$ uma bijeção. Existe um isomorfismo de complexos:*

$$K(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}) \simeq K(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha \in I})$$

Demonstração:

De fato, o homomorfismo γ da proposição é dado pelo isomorfismo $e_\alpha \mapsto e_{\sigma(\alpha)}$, onde $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ denota a base canônica de $A^{(I)}$.

Q.E.D.

Corolário 1.1.9. *Sejam $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ e $v : A^{(J)} \longrightarrow A$ duas formas lineares. Se u e v são tais que $v(A^{(J)}) \subseteq u(A^{(I)})$, então existe um morfismo de complexos:*

$$\eta : K_*(v; M) \longrightarrow K_*(u; M)$$

Demonstração:

Pela proposição existe um morfismo de complexos $\omega : K(u) \longrightarrow K(v)$. Para cada inteiro p, seja $\eta_p = \omega_p \otimes 1_M$.

***Afirmação**: $\eta = \oplus \eta_p$ é um morfismo de complexos.*

Sejam D, D', d e d' as diferenciais de $K_*(u; M)$, $K_*(v; M)$, $K(u)$ e $K(v)$, respectivamente. Temos que:

$$(\omega_{p-1} \otimes 1_M) \circ D_p(x \otimes y) = (\omega_{p-1} \otimes 1_M)(d_p(x) \otimes y) = (\omega_{p-1} \circ d_p(x)) \otimes y =$$

$$(d'_p \circ \omega_p(x)) \otimes y = D'_p(\omega_p(x) \otimes y) = D'_p \circ (\omega_p \otimes 1_M)(x \otimes y)$$

Q.E.D.

Corolário 1.1.10. *Sejam M um A-módulo, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de elementos de A e $\sigma : I \longrightarrow I$ uma bijeção. Existe um isomorfismo de complexos:*

$$K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M) \simeq K_*(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha \in I}; M)$$

Demonstração:

Temos pelo corolário 1.1.8 que existe um isomorfismo de complexos:

$$\varphi : K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \longrightarrow K(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha\in I})$$

Do corolário anterior, sabemos que:

$$\varphi \otimes 1_M : K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) \longrightarrow K_*(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha\in I}; M)$$

é um morfismo de complexos. Mas tal aplicação é bijetiva, como produto tensorial de isomorfismos (de A-módulos).

Q.E.D.

Corolário 1.1.11. *Sejam* $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ *e* $v : A^{(J)} \longrightarrow A$ *duas formas lineares. Se* u *e* v *são tais que* $v(A^{(J)}) \subseteq u(A^{(I)})$, *então existe um morfismo de complexos:*

$$\beta : K^*(u; M) \longrightarrow K^*(v; M)$$

Demonstração:

Pela proposição existe um morfismo de complexos $\omega : K(u) \longrightarrow K(v)$. *Para cada inteiro* p, *seja* $\beta_p = Hom(\omega_p, 1_M)$.

Afirmação: $\beta = \oplus\beta_p$ *é um morfismo de complexos.*

Sejam D_*, D_{**}, d *e* d' *as diferenciais de* $K^*(v; M)$, $K^*(u; M)$, $K(u)$ *e* $K(v)$, *respectivamente. Temos que:*

$$Hom(\omega_{p+1}, 1_M) \circ D_*^p(f) = Hom(\omega_{p+1}, 1_M)((-1)^{p+1} f \circ d'_{p+1}) = (-1)^{p+1} f \circ d'_{p+1} \circ \omega_{p+1} =$$

$$(-1)^{p+1} f \circ \omega_p \circ d_{p+1} = D_{**}^p(f \circ \omega_p) = D_{**}^p \circ Hom(\omega_p, 1_M)(f)$$

Q.E.D.

Corolário 1.1.12. *Sejam* M *um A-módulo,* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *uma família de elementos de* A *e* $\sigma : I \longrightarrow I$ *uma bijeção. Existe um isomorfismo de complexos:*

$$K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) \simeq K^*(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha\in I}; M)$$

Demonstração:

Demonstração totalmente análoga a do corolário 1.1.10, observando que uma vez que:

$$\varphi : K(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}) \longrightarrow K(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha \in I})$$

é um isomorfismo, então:

$$Hom(\varphi, 1_M) : K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M) \longrightarrow K^*(\{x_{\sigma(\alpha)}\}_{\alpha \in I}; M)$$

também o é.

Q.E.D.

Lema 1.1.1. *Sejam $K(u)$ o complexo associado à forma linear $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ e d sua diferencial. Se $x \in K_p(u)$ e $y \in K_q(u)$, então:*

$$d_{p+q}(x \wedge y) = d_p(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge d_q(y)$$

Demonstração:

Se $p = 0$, então $x \in A$ (resp. $y \in A$). Dessa forma, $x \wedge z = xz$, $\forall z \in \bigwedge(A^{(I)})$. Assim sendo, temos:

$$d_{0+q}(x \wedge y) = d_q(xy) = (-1)^0 x d_q(y) = (-1)^0 x \wedge d_q(y) = d_0(x) \wedge y + (-1)^0 x \wedge d_q(y)$$

o caso $q = 0$ é totalmente análogo. Suponha que $p > 0$ e $q > 0$. Podemos escrever $x = \sum_{i \in R} a_i e_i$ e $y = \sum_{j \in K} b_j e'_j$, onde $\{e_i\}_{i \in R}$ e $\{e'_j\}_{j \in K}$ são as bases canônicas de $\bigwedge^p(A^{(I)})$ e $\bigwedge^q(A^{(I)})$, respectivamente. Assim sendo, temos por um lado:

$$d_{p+q}(x \wedge y) = d_{p+q}((\sum_{i \in R} a_i e_i) \wedge (\sum_{j \in K} b_j e'_j)) = \sum_{i \in R} \sum_{j \in K} b_j a_i d_{p+q}(e_i \wedge e'_j)$$

e por outro:

$$d_p(\sum_{i \in R} a_i e_i) \wedge (\sum_{j \in K} b_j e'_j) + (-1)^p (\sum_{i \in R} a_i e_i) \wedge d_q(\sum_{j \in K} b_j e'_j) =$$

$$\sum_{i \in R} \sum_{j \in K} b_j a_i [d_p(e_i) \wedge e'_j + (-1)^p e_i \wedge d_q(e'_j)]$$

Dessa forma, é suficiente demonstrar o resultado no caso em que $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p$ *e* $y = y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q$*, com* $x_i, y_j \in M$*. Assim sendo, defina* $z_i = x_i$*,* $1 \leq i \leq p$ *e* $z_{j+p} = y_j$*,* $1 \leq j \leq q$*. Temos que:*

$$d_{p+q}(x \wedge y) = d_{p+q}(z_1 \wedge z_2 \wedge ... \wedge z_{p+q}) = \sum_{i=1}^{p+q} (-1)^{i+1} u(z_i) z_1 \wedge z_2 \wedge ... \wedge \widehat{z_i} \wedge ... \wedge z_{p+q} =$$

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} u(z_i)(z_1 \wedge ... \wedge \widehat{z_i} \wedge ... \wedge z_p) \wedge (z_{p+1} \wedge ... \wedge z_{p+q}) +$$

$$\sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i+1} u(z_i)(z_1 \wedge ... \wedge z_p) \wedge (z_{p+1} \wedge ... \wedge \widehat{z_i} \wedge ... \wedge z_{p+q}) =$$

$$(\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} u(x_i) x_1 \wedge ... \wedge \widehat{x_i} \wedge ... \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge ... \wedge y_q) +$$

$$(x_1 \wedge ... \wedge x_p) \wedge (\sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i+1} u(y_{i-p}) y_1 \wedge ... \wedge \widehat{y_{i-p}} \wedge ... \wedge y_q) =$$

$$d_p(x) \wedge y + x \wedge (\sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+p+1} u(y_j) y_1 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_q) =$$

$$d_p(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge (\sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} u(y_j) y_1 \wedge ... \wedge \widehat{y_j} \wedge ... \wedge y_q) = d_p(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge d_q(y)$$

Q.E.D.

Lema 1.1.2. *Sejam* I *um conjunto,* $K(u)$ *o complexo associado à forma linear* $u : A^{(I)} \longrightarrow A$ *e* d *sua diferencial. Se* $x \in A^{(I)}$*, então:*

$$d(x \wedge y) + x \wedge d(y) = u(x)y$$

$\forall y \in K(u)$.

Demonstração:

Escrevamos $y = \sum_{p \in \mathbb{Z}} y_p$*, onde* $y_p \in K_p(u)$*. Por um lado, temos:*

$$d(x \wedge y) + x \wedge d(y) = d(x \wedge (\sum_{p \in \mathbb{Z}} y_p)) + x \wedge d(\sum_{p \in \mathbb{Z}} y_p) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} [d(x \wedge y_p) + x \wedge d(y_p)]$$

e por outro:

$$u(x)y = u(x)(\sum_{p\in\mathbb{Z}} y_p) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} u(x)y_p$$

Dessa forma, é suficiente demonstrar o resultado para $y \in K_p(u)$, $p \in \mathbb{N}$. *Assim sendo, temos:*

$$d(x\wedge y) + x\wedge d(y) = d_{p+1}(x\wedge y) + x\wedge d_p(y) = d_1(x)\wedge y + (-1)^1 x\wedge d_p(y) + x\wedge d_p(y) =$$

$$d_1(x)\wedge y = u(x)\wedge y = u(x)y$$

A segunda igualdade sendo derivada do lema anterior, enquanto que a última segue da definição do produto em $\bigwedge(A^{(I)})$.

Q.E.D.

Proposição 1.1.12. *Sejam I um conjunto e* $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ *o complexo de Koszul descendente associado a família* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *de elementos de A e ao A-módulo M. Se* $J = <\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}>$, *então:*

$$J + Ann(M) \subseteq Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$$

Demonstração:

Ann(M) anula $K_p(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \otimes_A M$ *para todo* $p \in \mathbb{Z}$. *Dessa forma, Ann(M) anula* $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$, *portanto anula* $Z(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M))$ *e a posteriori anula* $H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M))$.

Logo $Ann(M) \subseteq Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$.

Sejam $h = \sum_{j\in J} y_j \otimes z_j \in Z(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M))$, *d a diferencial de* $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *e D a de* $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$. *Lembrando que à família* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *está associada a uma forma linear* $u : A^{(I)} \longrightarrow A$, *tal que* $u(e_i) = x_i$, *onde* $\{e_i\}_{i\in I}$ *é a base canônica de* $A^{(I)}$, *de acordo com o lema 1.1.2, temos que:*

$$x_i h = \sum_{j\in J}(x_i y_j)\otimes z_j = \sum_{j\in J}(d(e_i\wedge y_j) + (e_i\wedge d(y_j)))\otimes z_j =$$

$$\sum_{j\in J} d(e_i\wedge y_j)\otimes z_j + \sum_{j\in J}(e_i\wedge d(y_j))\otimes z_j =$$

$$D(\sum_{j\in J}(e_i\wedge y_j)\otimes z_j) + \sum_{j\in J}(\epsilon_{e_i}\otimes 1_M)(d(y_j)\otimes z_j) =$$

$$D(\sum_{j\in J}(e_i \wedge y_j) \otimes z_j) + (\epsilon_{e_i} \otimes 1_M) \circ D(\sum_{j\in J} y_j \otimes z_j) =$$

$$D(\sum_{j\in J}(e_i \wedge y_j) \otimes z_j) + (\epsilon_{e_i} \otimes 1_M) \circ D(h) = D(\sum_{j\in J}(e_i \wedge y_j) \otimes z_j)$$

onde $\epsilon_{e_i} : K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \longrightarrow K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ é a homotetia com relação a e_i, ou seja, $\epsilon_{e_i}(y) = e_i \wedge y$. Dessa forma, $x_i \in Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$, $i \in J$ e portanto $J \subseteq Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$. Como $Ann(M), J \subseteq Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$, segue o resultado.

Q.E.D.

Corolário 1.1.13. *Sejam I um conjunto e $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ o complexo associado à família $\{\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\}$.Temos que*

$$J \subseteq Ann(H(K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})))$$

Demonstração:

O resultado segue do fato de $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \simeq K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; A)$, aplicando a proposição.

Q.E.D.

Proposição 1.1.13. *Sejam I um conjunto e $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ o complexo de Koszul ascendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de elementos de A e ao A-módulo M. Se $J =< \{x_\alpha\}_{\alpha\in I} >$, então:*

$$J + Ann(M) \subseteq Ann(H(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$$

Demonstração:

Temos que Ann(M) anula $Hom_A(K_p(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}), M)$ para todo inteiro p. Dessa forma, Ann(M) anula $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$, portanto anula $Z(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M))$ e a posteriori anula $H(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M))$.

Logo $Ann(M) \subseteq Ann(H(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$. Sejam $f \in Z(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M))$, d a diferencial de $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ e D' a de $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$. De acordo com o lema 1.1.2, temos que:

$$(x_i f)(y) = f(x_i y) = f(d(e_i \wedge y) + e_i \wedge d(y)) = f(d(e_i \wedge y)) + f(e_i \wedge d(y)) = f(e_i \wedge d(y)) =$$

$$f \circ \epsilon_{e_i} \circ d(y) = D'((-1)^{n+1} f \circ \epsilon_{e_i})(y) \Rightarrow x_i f = D'((-1)^{n+1} f \circ \epsilon_{e_i})$$

onde $\epsilon_{e_i} : K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \longrightarrow K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ é a homotetia com relação a e_i. Dessa forma, $x_i \in Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$, $i \in J$ e portanto $J \subseteq Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$. Como $Ann(M), J \subseteq Ann(H(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)))$, segue o resultado.

Q.E.D.

Teorema 1.1.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $K(x_1, x_2, ..., x_n)$ o complexo associado à sequência $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $K(x_i)$ o associado ao elemento x_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Existe um isomorfismo:*

$$K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A ... \otimes_A K(x_n) \simeq K(x_1, x_2, ..., x_n)$$

de complexos.

Demonstração:

O caso $n = 1$ é trivial. Suponha que $n = 2$ e sejam $\varphi : (K(x_1)) \otimes_A (K(x_2)) \longrightarrow K(x_1, x_2)$ o isomorfismo de A-módulos, tal que $\varphi(x \otimes y) = x \wedge y$ (proposição C.3.4), D, D^*, d e d' as diferenciais de $K(x_1) \otimes_A K(x_2)$, $K(x_1, x_2)$, $K(x_1)$ e $K(x_2)$, respectivamente. Se $z_i \in K_i(x_1)$ e $y_j \in K_j(x_2)$, então:

$$\varphi(z_i \otimes y_j) = z_i \wedge y_j \in K_{i+j}(x_1, x_2)$$

Segue por linearidade que φ é um isomorfismo de A-módulos graduados. Além do mais, se $i + j = p + 1$, temos:

$$\varphi_p \circ D_{p+1}(z_i \otimes y_j) = \varphi_p(d_i(z_i) \otimes y_j + (-1)^i z_i \otimes d'_j(y_j)) =$$

$$\varphi_p(d_i(z_i) \otimes y_j) + (-1)^i \varphi_p(z_i \otimes d'_j(y_j)) = D^*_i(z_i) \wedge y_j + (-1)^i z_i \wedge D^*_j(y_j) =$$

$$D^*_{p+1}(z_i \wedge y_j) = D^*_{p+1} \circ \varphi_{p+1}(z_i \otimes y_j)$$

O resultado segue por linearidade das aplicações consideradas. Para $n > 2$, temos os seguintes isomorfismos de complexos:

$$K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A ... \otimes_A K(x_n) \simeq$$

$$[K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A ... \otimes_A K(x_{n-1})] \otimes_A K(x_n) \simeq$$

$$K(x_1, ..., x_{n-1}) \otimes_A K(x_n) \simeq K(x_1, x_2, ..., x_n)$$

onde o penúltimo isomorfismo segue da hipótese de indução e o último define-se (e demonstra-se) de forma totalmente análoga ao caso $n = 2$.

Q.E.D.

Corolário 1.1.14. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $K(x_1, ..., x_n)$, $K(y_1, ..., y_m)$ os complexos associados às sequências $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$, respectivamente. Existe um isomorfismo:*

$$K(x_1, ..., x_n) \otimes_A K(y_1, ..., y_m) \simeq K(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$$

de complexos.

Demonstração:

Temos os seguintes isomorfismos de complexos:

$$K(x_1, ..., x_n) \otimes_A K(y_1, ..., y_m) \simeq$$

$$[K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A ... \otimes_A K(x_n)] \otimes_A [K(y_1) \otimes_A K(y_2) \otimes_A ... \otimes_A K(y_n)] \simeq$$

$$K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A ... \otimes_A K(x_n) \otimes_A K(y_1) \otimes_A K(y_2) \otimes_A ... \otimes_A K(y_n) \simeq$$

$$K(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$$

Q.E.D.

Corolário 1.1.15. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $K_*(x_1, ..., x_n; M)$, $K_*(y_1, ..., y_m; N)$ os complexos de Koszul descendentes associados às sequências $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ e aos A-módulos M e N, respectivamente. Existe um isomorfismo:*

$$K_*(x_1, ..., x_n; M) \otimes_A K_*(y_1, ..., y_m; N) \simeq K_*(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m; M \otimes_A N)$$

de complexos.

Demonstração:

O resultado segue dos isomorfismos de complexos (Apêndice B):

$$K_*(x_1, ..., x_n; M) \otimes_A K_*(y_1, ..., y_m; N) = [K(x_1, ..., x_n) \otimes_A M] \otimes_A [K(y_1, ..., y_m) \otimes_A N] \simeq$$

$$K(x_1, ..., x_n) \otimes_A [M \otimes_A K(y_1, ..., y_m)] \otimes_A N \simeq$$

$$K(x_1, ..., x_n) \otimes_A [K(y_1, ..., y_m) \otimes_A M] \otimes_A N \simeq$$

$$[K(x_1,...,x_n) \otimes_A K(y_1,...,y_m)] \otimes_A [M \otimes_A N] \simeq$$

$$K(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m) \otimes_A [M \otimes_A N] =$$

$$K_*(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m; M \otimes_A N)$$

Corolário 1.1.16. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $K_*(x_1,...,x_n; M)$, $K^*(y_1,...,y_m; N)$ os complexos de Koszul descendente e ascendente (respectivamente) associados às sequências $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ e $\{y_1,y_2,...,y_m\}$, respectivamente. Existe um isomorfismo:*

$$Homgr_A(K_*(x_1,...,x_n; M), K^*(y_1,...,y_m; N)) \simeq$$

$$K^*(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m; Hom_A(M,N))$$

de complexos.

Demonstração:

O resultado segue dos isomorfismos de complexos (Apêndice B):

$$Homgr_A(K_*(x_1,...,x_n; M), K^*(y_1,...,y_m; N)) =$$

$$Homgr_A(K(x_1,...,x_n) \otimes_A M; Homgr_A(K(y_1,...,y_m); N)) \simeq$$

$$Homgr_A((K(x_1,...,x_n) \otimes_A M) \otimes_A K(y_1,...,y_m); N) \simeq$$

$$Homgr_A((K(x_1,...,x_n) \otimes_A K(y_1,...,y_m)) \otimes_A M; N) \simeq$$

$$Homgr_A(K(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m); Hom(M,N)) =$$

$$K^*(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m; Hom_A(M,N))$$

Q.E.D.

Proposição 1.1.14. *Sejam A, B anéis, $\rho : A \longrightarrow B$ um homomorfismo não nulo, N um B-módulo e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de elementos de A. Se $K_A^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; N)$ denota o complexo (de A-módulos) de Koszul ascendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e $K_B^*(\{\rho(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}; N)$ denota o complexo (de B-módulos) de Koszul ascendente associado à família $\{\rho(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, então existe um isomorfismo:*

$$K_B^*(\{\rho(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}; N) \simeq K_A^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; N)$$

de $\mathbb{Z}$-complexos.

Demonstração:

Sejam $\psi : A^{(I)} \longrightarrow B^{(I)}$ *o homomorfismo de* $\mathbb{Z}$*-módulos tal que* $\psi(\{a_i\}_{i\in I}) = \{\rho(a_i)\}_{i\in I}$ *e* $\varphi : \bigwedge(A^{(I)}) \longrightarrow \bigwedge(B^{(I)})$ *o prolongamento de* ψ. *A aplicação* $Hom(\varphi, 1_N)$ *é claramente um morfismo de* $\mathbb{Z}$*-complexos. Se* $Hom(\varphi, 1_N)(f) = 0$, *então:*

$$f \circ \varphi = 0 \Rightarrow f \circ \varphi(e_i) = 0 \Rightarrow f(e_i') = 0, \forall i \in I \Rightarrow f = 0$$

onde $\{e_i\}_{i\in J}$ *(resp.* $\{e_i'\}_{i\in J}$*) é a base canônica de* $\bigwedge(A^{(I)})$ *(resp.* $\bigwedge(B^{(I)})$*).*

Observe que φ *é uma bijeção do conjunto* $\{e_i\}_{i\in J}$ *no conjunto* $\{e_i'\}_{i\in J}$ *tal que* $\psi(e_i) = e_i'$, $\forall i \in I$. *Sejam* $\eta : \{e_i'\}_{i\in J} \longrightarrow \{e_i\}_{i\in J}$ *a bijeção oposta e* $g \in Hom_A(\bigwedge(A^{(I)}), N)$. *Defina:*

$$\gamma : \bigwedge(B^{(I)}) \longrightarrow N$$

tal que $\gamma(\sum_{i\in J} b_i e_i') = \sum_{i\in J} b_i g \circ \eta(e_i') = \sum_{i\in J} b_i g(e_i)$. *Como* $\{e_i'\}_{i\in J}$ *é uma base do B-módulo* $\bigwedge(B^{(I)})$, *a aplicação* γ *está bem definida e claramente é B-linear. Além do mais, temos que:*

$$\gamma \circ \varphi(\sum_{i\in J} a_i e_i) = \gamma(\sum_{i\in J} \rho(a_i)\varphi(e_i)) = \sum_{i\in J} \rho(a_i) g \circ \eta(\varphi(e_i)) = \sum_{i\in J} a_i g(e_i) = g(\sum_{i\in J} a_i e_i)$$

onde a penúltima igualdade segue da estrutura de A-módulo de N, ou seja, $ax := \rho(a)x$. *E segue que* $g = Hom(\varphi, 1_N)(\gamma)$.

Q.E.D.

1.2 Conexão com teoria da profundidade

Proposição 1.2.1. *Seja:*

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

uma sequência exata. Se $K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_i)$ *denota o complexo de Koszul descendente associado à família* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *e ao A-módulo* M_i, *então existe uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_0) \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_n) \longrightarrow 0$$

de complexos e morfismos.

Demonstração:

Uma vez que $K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *é um A-módulo plano, temos que a sequência de A-módulos e homomorfismos:*

$$0 \longrightarrow K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \otimes_A M_0 \xrightarrow{1\otimes\varphi_0} K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \otimes_A M_1 \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \otimes_A M_2 \xrightarrow{1\otimes\varphi_2} \cdots$$

$$\longrightarrow \cdots \xrightarrow{1\otimes\varphi_{n-2}} K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \otimes_A M_{n-1} \xrightarrow{1\otimes\varphi_{n-1}} K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \otimes_A M_n \longrightarrow 0$$

é exata. O resultado segue do fato de $1 \otimes \varphi_i$ serem claramente morfismos de complexos.

Q.E.D.

Corolário 1.2.1. *Sejam M um A-módulo e $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ uma M-sequência. Se $M_i = \frac{M}{<a_1,a_2,...,a_i>M}$, $1 \leq i \leq n$ e $M_0 = M$, então temos uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_n) \longrightarrow 0$$

de morfismos e complexos.

Demonstração:

De fato, segue da proposição D.1.3 a existência de uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

Dessa forma, o resultado segue direto da proposição.

Q.E.D.

Corolário 1.2.2. *Com as hipóteses da proposição, suponha que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H_i(K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)) = 0$, $\forall i \geq n_0$, então $H_j(K(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_n)) = 0$, $\forall j > m + n_0$.*

Demonstração:

Temos que $\{a_1\}$ é uma sequência M-regular. Logo, temos uma sequência exata de complexos e morfismos:

$$0 \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_0) \longrightarrow K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_1) \longrightarrow 0$$

Do corolário B.1.1, segue a sequência exata de módulos e homomorfismos:

$$\cdots \longrightarrow H_{i+r+1}(K_*(M_1) \longrightarrow H_{i+r}(K_*(M)) \longrightarrow$$

$$H_{i+r}(K_*(M)) \longrightarrow H_{i+r}(K_*(M_1)) \longrightarrow H_{i+r-1}(K_*(M)) \longrightarrow \cdots$$

onde $K_*(M) = K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$. Dessa forma, temos que $H_{i+r}(K_*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_1)) = 0$, $\forall i \geq 1$. O resultado segue por indução, observando que $\{a_2, a_3, ..., a_n\}$ é uma M_1-sequência.

Q.E.D.

Corolário 1.2.3. *Com as hipóteses da proposição, temos que* $H_i(K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M)) = 0$, $\forall i \geq 1$.

Demonstração:

Como A^n *é gerado por* n *elementos, temos que* $\bigwedge^i(A^n) = 0$, $\forall i \geq n+1$. *Portanto,* $H_i(K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_n)) = 0$, $\forall i \geq n+1$. *Suponha que demonstramos que* $H_i(im(1 \otimes \varphi_j)) = 0$, $\forall i \geq j+2$ *e* $j < n$. *Considere a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow Ker(1 \otimes \varphi_j) \longrightarrow K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_j) \longrightarrow im(1 \otimes \varphi_j) \longrightarrow 0$$

de morfismos e complexos. Pelo corolário B.1.1 temos que:

$$H_i(Ker(1 \otimes \varphi_j)) \simeq H_i(K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_j)), \forall i \geq j+2$$

Mas $Ker(1 \otimes \varphi_j) = im(1 \otimes \varphi_{j-1})$. *Assim sendo, todo elemento de* $H_i(Ker(1 \otimes \varphi_j))$, $\forall i \in \mathbb{N}$, *é da forma* $a_j\overline{(1 \otimes \psi_j)(x)}$, *com* $x \in K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_{j-1})$ *e* $\psi_j : M_{j-1} \longrightarrow M_j$ *sendo o homomorfismo canônico. Assim sendo, temos pelo corolário B.1.1 que o homomorfismo:*

$$\eta : H_{j+1}(Ker(1 \otimes \varphi_{j+1})) \longrightarrow H_{j+1}(K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_j))$$

tal que $\eta(\overline{x}) = \widehat{x}$, *é injetivo. Mas,* $\overline{x} = a_j\overline{(1 \otimes \psi_j)(y)}$, *com* $y \in K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_{j-1})$. *Dessa forma, temos pela proposição 1.1.12 que* $\eta(\overline{x}) = 0$ *e portanto* $H_{j+1}(Ker(1 \otimes \varphi_j)) = 0$. *Novamente pelo corolário B.1.1, temos que o homomorfismo:*

$$\zeta : H_{j+1}(K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_j)) \longrightarrow H_{j+1}(im(1 \otimes \varphi_j))$$

tal que $\zeta(\overline{x}) = \overline{(1 \otimes \varphi_j)(x)} = a_{j+1}\overline{(1 \otimes \psi_{j+1})(x)} = \overline{(1 \otimes \psi_{j+1})(a_{j+1}x)} = \overline{(1 \otimes \psi_{j+1})}(\overline{a_{j+1}x})$. *Segue novamente da proposição 1.1.12 que* $\zeta(\overline{x}) = 0$ *e portanto* $H_{j+1}(K_*(a_1, a_2, ..., a_n; M_j)) = 0$. *O resultado segue por indução decrescente, levando-se em conta que* $Ker(1 \otimes \varphi_j) = im(1 \otimes \varphi_{j-1})$.

Q.E.D.

Proposição 1.2.2. *Sejam* M *um* A*-módulo e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma sequência de elementos de* A. *Se* $\{\gamma_n\}$ *é* M*-regular, então para todo* $m \in \mathbb{Z}$ *existe um isomorfismo:*

$$H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M})) \simeq H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))$$

Demonstração:

Desde A^n é livre temos que $\bigwedge^m(A^n)$ $(m \leq n)$ é livre e tem por base $\{e_J\}_{J\in\mathfrak{F}_m(n)}$, sendo $e_J = e_{\lambda_1^J} \wedge e_{\lambda_2^J} \wedge ... \wedge e_{\lambda_m^J}$, $J = \{\lambda_1^J < \lambda_2^J < ... < \lambda_m^J\}$ e $\mathfrak{F}_m(n) = \{J \subseteq \{1,2,...,n\}/\#J = m\}$ (proposição C.3.5). Se $m \leq n$, então defina os homomorfismos:

$$\varphi_m : \bigwedge^m(A^n) \longrightarrow \bigwedge^{m-1}(A^{n-1})$$

tal que:

$$\begin{cases} \varphi_m(e_J) &= e'_{J-\{n\}}, & se\ J \not\subseteq \{1,2,...,n-1\} \\ \varphi_m(e_J) &= 0, & se\ J \subseteq \{1,2,...,n-1\} \end{cases}$$

onde $\{e'_J\}_{J\in\mathfrak{F}_{m-1}(n-1)}$ denota a base canônica de $\bigwedge^{m-1}(A^{n-1})$ e

$$\psi_m = \varphi_m \otimes \eta : \bigwedge^m(A^n) \otimes_A M \longrightarrow \bigwedge^{m-1}(A^{n-1}) \otimes_A \frac{M}{\gamma_n M}$$

onde $\eta : M \longrightarrow \frac{M}{\gamma_n M}$ denota a aplicação canônica. A aplicação ψ_m é claramente sobrejetiva.

Afirmação 1: *A sequência:*

$$0 \longrightarrow \bigwedge^m(A^n) \otimes_A M \xrightarrow{\zeta_m} \bigwedge^m(A^n) \otimes_A M \xrightarrow{\psi_m} \bigwedge^{m-1}(A^{n-1}) \otimes_A \frac{M}{\gamma_n M} \longrightarrow 0$$

onde:

$$\zeta_m = \xi_m \otimes M : \bigwedge^m(A^n) \otimes_A M \longrightarrow \bigwedge^m(A^n) \otimes_A M$$

e $\xi_m : \bigwedge^m(A^n) \longrightarrow \bigwedge^m(A^n)$ é o homomorfismo tal que:

$$\begin{cases} \xi_m(e_J) &= \gamma_n e_J, & se\ J \not\subseteq \{1,2,...,n-1\} \\ \xi_m(e_J) &= e_J, & se\ J \subseteq \{1,2,...,n-1\} \end{cases}$$

é exata.

Claramente $\psi_m \circ \zeta_m = 0$. Se $\psi_m(\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J) = 0$, então:

$$\sum_{J\in\mathfrak{F}_{m-1}(n-1)} a_{J\cup\{n\}} e'_J \otimes \overline{x_{J\cup\{n\}}} = 0 \Rightarrow \{\overline{a_{J\cup\{n\}} x_{J\cup\{n\}}}\}_{J\in\mathfrak{F}_{m-1}(n-1)} = 0 \Rightarrow$$

$$a_{J\cup\{n\}}x_{J\cup\{n\}} = \gamma_n y_{J\cup\{n\}}, \forall J \in \mathfrak{F}_{m-1}(n-1)$$

onde acima utilizamos o isomorfismo canônico $\bigwedge^m(A^n)\otimes_A \frac{M}{\gamma_n M} \simeq [\frac{M}{\gamma_n M}]^{(\mathfrak{F}_{m-1}(n-1))}$. *Assim sendo, temos que:*

$$\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J e_J \otimes x_J + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J e_J \otimes x_J =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} e_J \otimes (\gamma_n y_J) + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J e_J \otimes x_J =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} (\gamma_n e_J) \otimes y_J + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J e_J \otimes x_J \in im(\zeta_m)$$

Além do mais, se $\zeta_m(\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J) = 0$, *então:*

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J(\gamma_n e_J) \otimes x_J + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J e_J \otimes x_J = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} j_J(\gamma_n a_J x_J) + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} j_J(a_J x_J) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma_n(a_J x_J) & = & 0, & se\ J \not\subseteq \{1,2,...,n-1\} \\ a_J x_J & = & 0, & se\ J \subseteq \{1,2,...,n-1\} \end{cases} \Rightarrow a_J x_J = 0, \forall J \in \mathfrak{F}_m(n) \Rightarrow$$

$$\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J = 0$$

Afirmação 2: *A sequência:*

$$0 \longrightarrow K_*(\gamma_1,...,\gamma_n;M) \xrightarrow{\zeta} K_*(\gamma_1,...,\gamma_{n-1},1;M) \xrightarrow{\psi} K_*(\gamma_1,...,\gamma_{n-1};\frac{M}{\gamma_n M})(-1) \longrightarrow 0$$

onde $\zeta = \oplus\zeta_m$ *(resp.* $\psi = \oplus\psi_m$*) e* $\zeta_m = 0$ *(resp.* $\psi_m = 0$*) se* $m < 0$ *ou* $m > n$, *é uma sequência exata de morfismos e complexos.*

De acordo com a afirmação 1 é suficiente demonstrar que ζ *(resp.* ψ*) é um morfismo. Denotemos por* d *(resp.* d', d''*) a diferencial de* $K_*(\gamma_1,...,\gamma_n;M)$ *(resp.* $K_*(\gamma_1,...,\gamma_{n-1},1;M)$, $K_*(\gamma_1,...,\gamma_{n-1};M)(-1)$*). Assim sendo, temos que:*

$$d_m \circ \zeta_m(\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J) = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J d_m((\gamma_n e_J) \otimes x_J) + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J d_m(e_J \otimes x_J) =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+1}\gamma_i\gamma_n a_J(e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}}\wedge ....\wedge e_{\lambda_m^J})\otimes x_J+$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}}(-1)^{m+1}\gamma_n 1 a_J(e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge e_{\lambda_{m-1}^J})\otimes x_J+$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\gamma_i a_J(e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}}\wedge ....\wedge e_{\lambda_m^J})\otimes x_J$$

e

$$\zeta_{m-1}\circ d'_m(\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J\otimes x_J) =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J\zeta_{m-1}\circ d'_m(e_J\otimes x_J)+\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J\zeta_{m-1}\circ d'_m(e_J\otimes x_J)=$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+1}\gamma_i a_J\zeta_{m-1}((e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}}\wedge ....\wedge e_{\lambda_m^J})\otimes x_J)+$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}}(-1)^{m+1}\gamma_n a_J\zeta_{m-1}((e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge e_{\lambda_{m-1}^J})\otimes x_J)+$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\gamma_i a_J\zeta_{m-1}((e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}}\wedge ....\wedge e_{\lambda_m^J})\otimes x_J)=$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+1}\gamma_n\gamma_i a_J((e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}}\wedge ....\wedge e_{\lambda_m^J})\otimes x_J)+$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}}(-1)^{m+1}\gamma_n 1 a_J((e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge e_{\lambda_{m-1}^J})\otimes x_J)+$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\gamma_i a_J((e_{\lambda_1^J}\wedge e_{\lambda_2^J}\wedge ...\wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}}\wedge ....\wedge e_{\lambda_m^J})\otimes x_J)$$

Temos ainda que:

$$d''_m \circ \psi_m(\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J) = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J d''_m(e'_{J-\{n\}} \otimes \overline{x_J}) =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1}\gamma_i a_J((e_{\lambda_1^J} \wedge e_{\lambda_2^J} \wedge ... \wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}} \wedge .... \wedge e_{\lambda_{m-1}^J}) \otimes \overline{x_J})$$

e

$$\psi_{m-1} \circ d'_m(\sum_{J\in\mathfrak{F}_m(n)} a_J e_J \otimes x_J) = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J \psi_{m-1} \circ d'_m(e_J \otimes x_J) +$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\notin J}} a_J \psi_{m-1} \circ d_m(e_J \otimes x_J) = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} a_J \psi_{m-1} \circ d_m(e_J \otimes x_J) =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1}\gamma_i a_J \psi_{m-1}((e_{\lambda_1^J} \wedge e_{\lambda_2^J} \wedge ... \wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}} \wedge .... \wedge e_{\lambda_{m-1}^J} \wedge e_n) \otimes x_J) +$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} (-1)^{m+1}\gamma_n a_J \psi_{m-1}((e_{\lambda_1^J} \wedge e_{\lambda_2^J} \wedge ... \wedge e_{\lambda_{m-1}^J}) \otimes x_J) =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1}\gamma_i a_J \psi_{m-1}((e_{\lambda_1^J} \wedge e_{\lambda_2^J} \wedge ... \wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}} \wedge .... \wedge e_{\lambda_{m-1}^J} \wedge e_n) \otimes x_J) =$$

$$\sum_{\substack{J\in\mathfrak{F}_m(n)\\ n\in J}} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1}\gamma_i a_J((e_{\lambda_1^J} \wedge e_{\lambda_2^J} \wedge ... \wedge \widehat{e_{\lambda_i^J}} \wedge .... \wedge e_{\lambda_{m-1}^J}) \otimes \overline{x_J})$$

Da afirmação 2 e do corolário B.1.1, segue a existência de uma sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, 1; M)) \longrightarrow H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \tfrac{M}{\gamma_n M})(-1)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{m-1}(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) \longrightarrow H_{m-1}(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, 1; M)) \longrightarrow \cdots$$

Da proposição 1.1.12 sabemos que:

$$A =< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, 1 >\subseteq Ann(H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, 1; M))), \forall m \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma, temos que $H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, 1; M)) = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ *e portanto:*

$$H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M})(-1)) \simeq H_{m-1}(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) \Rightarrow$$

$$H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M})) \simeq H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)), \forall m \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que $H_{m-1}(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M})) = H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M})(-1))$.

Q.E.D.

Corolário 1.2.4. *Sejam M um A-módulo noetheriano e $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ uma sequência de elementos de A contida no radical de Jacobson. Se $H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) = 0$, então $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é uma M-sequência.*

Demonstração:

Se $n = 1$, *então:*

$$(0 :_M x_1) = H_1(K_*(\gamma_1; M)) = 0$$

onde $(0 :_M \gamma_1)$ *é o núcleo da aplicação* $x \mapsto \gamma_1 x$.

Afirmação: *Se* $H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}; M)) = 0$, *então* $H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) = 0$.

De fato, do corolário 1.1.15 temos que:

$$K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}; M) \simeq K(\gamma_{n+1}) \otimes_A K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)$$

Desde que $K(\gamma_{n+1})$ *é o complexo tal que* $K_0(\gamma_{n+1}) = K_1(\gamma_{n+1}) = A$, $K_i(\gamma_{n+1}) = 0$, $\forall i \neq 0, 1$, *e sua diferencial é definida por* $d_1(a) = \gamma_{n+1} a$, *o complexo* $K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}; M)$ *se identifica ao complexo* (C, d') *tal que* $C_i = K_i(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M) \oplus K_{i-1}(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)$ *e* $d'_i(x, y) = (d_i(x) + \gamma_{n+1} y, -d_{i-1}(y))$, *onde* d *é a diferencial de* $K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)$. *Assim sendo, temos a seguinte sequência exata:*

$$0 \longrightarrow K_i(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M) \xrightarrow{j_i} C_i \xrightarrow{\pi_{i-1}} K_{i-1}(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M) \longrightarrow 0$$

onde j_i *é a i-esima injeção e* π_i *a i-esima projeção. Observe que:*

$$d'_i \circ j_i(x) = d'_i(x, 0) = (d_i(x), 0) = j_{i-1} \circ d_i(x)$$

e

$$-d_{i-1} \circ \pi_{i-1}(x,y) = -d_{i-1}(y) = \pi_{i-2}(d_i(x) + \gamma_{n+1}y, -d_{i-1}(y)) = \pi_{i-2} \circ d'_i(x,y)$$

Dessa forma, temos uma sequência exata de de complexos:

$$0 \longrightarrow K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M) \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\pi} K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)(-1) \longrightarrow 0$$

onde $j = \oplus j_i$ *e* $\pi = \oplus \pi_i$.

Pelo corolário B.1.1 temos uma sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H_2(C) \longrightarrow H_2(K_*(-1)) \xrightarrow{\Delta} H_1(K_*) \longrightarrow H_1(C) \longrightarrow \cdots$$

onde $K_* = K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)$.

Agora observe que Δ *é tal que:*

$$\overline{x} \mapsto x \mapsto (0,x) \mapsto (\gamma_{n+1}x, -d(x)) = (\gamma_{n+1}x, 0) \mapsto \gamma_{n+1}x \mapsto \gamma_{n+1}\overline{x}$$

Desde de que $H_1(C) = H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}; M)) = 0$, *segue que:*

$$H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) = \gamma_{n+1} H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))$$

Do lema de Nakayama concluímos que $H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) = 0$.

Da afirmação e da hipótese de indução, temos que $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é uma M-sequência. Dessa forma, segue da proposição (por indução) que:*

$$H_1(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}; M)) =$$

$$H_1(K_*(\gamma_{n+1}, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) \simeq H_1(\gamma_{n+1}; \frac{M}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

E o resultado segue da primeira parte do argumento.

Q.E.D.

Scholium 1.2.1. *Segue da afirmação do corolário anterior que se* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é uma sequência de elementos de A e M um A-módulo, então existe uma sequência exata:*

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(C) \longrightarrow H_i(K_*) \xrightarrow{\Delta} H_i(K_*) \longrightarrow H_i(C) \longrightarrow \cdots$$

onde $K_* = K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}; M)$, $C = K_*(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)$ *e* $\Delta(\bar{x}) = \gamma_n \bar{x}$.

Proposição 1.2.3. *Seja:*

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

uma sequência exata. Se $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_i)$ denota o complexo de Koszul ascendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e ao A-módulo M_i, então existe uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_0) \longrightarrow K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_n) \longrightarrow 0$$

de complexos e morfismos.

Demonstração:

Desde que $A^{(I)}$ é livre, segue que $\bigwedge(A^{(I)})$ é livre (e portanto projetivo). O resultado segue da proposição B.4.4.

Q.E.D.

Corolário 1.2.5. *Sejam M um A-módulo e $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ uma M-sequência. Se $M_0 = M$, $M_i = \frac{M}{<a_1,a_2,...,a_i>M}$, $1 \leq i \leq n$ e $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_i)$ denota o complexo de Koszul ascendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e ao A-módulo M_i, então existe uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) \longrightarrow K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M_n) \longrightarrow 0$$

de complexos e morfismos.

Demonstração:

De fato, o resultado segue da proposição D.1.3 e da anterior.

Q.E.D.

Lema 1.2.1. *Sejam M um A-módulo, $J \subseteq A$ um ideal. Se $K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)$ denota o complexo de Koszul ascendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e ao A-módulo M, então:*

$$prof(J; K^i(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M)) = prof(J; M), \forall i \geq 0$$

Demonstração:

Temos que $K^i(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) = Hom_A(\bigwedge^i(A^{(I)}), M)$. Mas sabemos pela proposição C.3.5 que $\bigwedge^i(A^I) \simeq A^{(\mathfrak{F}_i(I))}$, onde $\mathfrak{F}_i(I) = \{K \subseteq I / \#K = i\}$. Dessa forma, segue da proposição B.4.1 e do lema A.1.1 que $K^i(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}; M) \simeq M^{\mathfrak{F}_i(I)}$. O resultado segue da proposição D.1.5.

Q.E.D.

Teorema 1.2.1. *Sejam M um A-módulo, $J \subseteq A$ um ideal. Se $K^*(J;M)$ denota o complexo de Koszul ascendente associado à família $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, onde $J =< \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} >$, e ao A-módulo M, então:*

$$prof(J;M) = inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} / H^n(K^*(J;M)) \neq 0\}$$

Em particular tal inteiro independe da escolha da família geradora de J.

Demonstração:

Sejam $p = prof(J;M)$ e $q = inf\{n \in \mathbb{N}/H^n(K^*(J;M)) \neq 0\}$. Se p ou q é nulo, então o resultado é trivialmente verdadeiro, pois $Ext^0_A(\frac{A}{J}, M) = Hom_A(\frac{A}{J}, M) \simeq H^0(K^*(J;M))$ (lema D.1.4). É suficiente demonstrar o caso em que ambos são não nulos. Para todo $i < q$ temos que $H^i(K^*(J;M)) = 0$, portanto $Z^i(K^*(J;M)) = B^i(K^*(J;M))$. Dessa forma, podemos considerar a sequência exata de módulos e homomorfismos:

$$0 \longrightarrow B^i(K^*(J;M)) \xrightarrow{j_i} K^i(J;M) \xrightarrow{\delta_i} B^{i+1}(K^*(J;M)) \longrightarrow 0$$

onde o j_i é a injeção canônica e δ_i é o homomorfismo que tem por gráfico o mesmo da diferencial d_i de $K^*(J;M)$, $0 \leq i \leq q-1$. Pelo teorema B.4.3 temos uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow Hom_A(\tfrac{A}{J}, B^i) \longrightarrow Hom_A(\tfrac{A}{J}, K^i(J;M)) \longrightarrow Hom_A(\tfrac{A}{J}, B^{i+1}) \longrightarrow \tag{1.1}$$

$$\cdots \longrightarrow Ext^n_A(\tfrac{A}{J}, K^i(J;M)) \longrightarrow Ext^n_A(\tfrac{A}{J}, B^{i+1}) \longrightarrow Ext^{n+1}_A(\tfrac{A}{J}, B^i) \longrightarrow \cdots$$

onde os homomorfismos são como em tal teorema. Do lema 1.2.1 concluímos que $Ext^n_A(\frac{A}{J}, B^{i+1}) \simeq Ext^{n+1}_A(\frac{A}{J}, B^i)$, $\forall n \leq p-2$.

Afirmação: *$prof(J; Z^i(K^*(J;M))) > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

De fato, tal resultado segue da sequência exata:

$$0 \longrightarrow Z^i(K^*(J;M)) \longrightarrow K^i(J;M) \longrightarrow B^i(K^*(J;M)) \longrightarrow 0$$

e do fato de $prof(J; K^i(J;M)) > 0$ (Lema 1.2.1)

(Caso $q = \infty$, suponha que existe $r \in \mathbb{N}/H^r(K^*(J;M)) = 0$ e no que segue substitua q por r) Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow B^q(K^*(J;M)) \xrightarrow{j_q} Z^q(K^*(J;M)) \xrightarrow{\delta_q} H^q(K^*(J;M)) \longrightarrow 0$$

Do teorema B.4.3 temos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow Hom_A(\tfrac{A}{J}, B^q) \longrightarrow Hom_A(\tfrac{A}{J}, Z^q) \longrightarrow Hom_A(\tfrac{A}{J}, H^q) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow Ext^n_A(\tfrac{A}{J}, Z^q) \longrightarrow Ext^n_A(\tfrac{A}{J}, H^q) \longrightarrow Ext^{n+1}_A(\tfrac{A}{J}, B^q) \longrightarrow \cdots$$

Da afirmação e da sequência exata acima, segue que $prof(J; B^q) > 0$. *Como* $H^q \neq 0$ *e* $J \subseteq Ann(H_q)$, *concluímos (pelo lema D.1.4) que* $Hom_A(\frac{A}{J}, H_q) \neq 0$. *Dessa forma, segue pela sequência acima que* $Ext^1_A(\frac{A}{J}, B^q) \neq 0$, *ou seja,* $prof(J; B^q) = 1$. *Segue (por indução) da afirmação e dos isomorfismos* $Ext^n_A(\frac{A}{J}, B^{i+1}) \simeq Ext^{n+1}_A(\frac{A}{J}, B^i)$, $\forall n \leq p-2$, $\forall i \leq q-1$ *que* $prof(J; B^{q-i}) = i+1$, $0 \leq i < q$. *Da sequência 1.1, temos a sequência exata:*

$$Ext^{q-1}_A(\tfrac{A}{J}, B^1) \longrightarrow Ext^q_A(\tfrac{A}{J}, B^0) \longrightarrow Ext^q_A(\tfrac{A}{J}, M) \longrightarrow Ext^q_A(\tfrac{A}{J}, B^1)$$

Como $B^1 \simeq M$ *e* $prof(J; B^1) = q$ *(no caso* $q = \infty$, *concluímos que* $prof(\frac{A}{J}; M) = r < \infty$. *Absurdo!), segue o resultado.*

Q.E.D.

Corolário 1.2.6. *Sejam M, N A-módulos e* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma família de geradores do ideal* $J \subseteq A$. *Se o A-módulo N é livre, então:*

$$prof(J; M) = prof(J, M \otimes_A N)$$

Demonstração:

Como N é plano, segue da afirmação 3 do teorema B.3.1 o isomorfismo de A-módulos:

$$H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M)) \otimes_A N \simeq H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M \otimes_A N))$$

Se $H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M)) = 0$, *então claramente* $H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M \otimes_A N)) = 0$. *Além do mais, temos que:*

$$H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M \otimes_A N)) = 0 \Rightarrow H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M)) \otimes_A N = 0 \Rightarrow$$

$$H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M)) \otimes_A A^{(I')} = 0 \Rightarrow [H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M))]^{(I')} = 0 \Rightarrow$$

$$H^n(K^*(\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}; M)) = 0$$

onde $N \simeq A^{(I')}$. *O resultado segue da proposição.*

Q.E.D.

Teorema 1.2.2. *Sejam A, B anéis, $\rho : A \longrightarrow B$ um homomorfismo não nulo, N um A-módulo e $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família de geradores do ideal $J \subseteq A$. Se o A-módulo B é livre, então:*

$$prof_A(J;N) = prof_B(JB;N \otimes_A B)$$

Demonstração:

Do corolário 1.2.6, temos que $prof_A(J;N) = prof_A(J;N \otimes_A B)$. Seguem da proposição 1.1.14 os isomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$H^n(K^*_B(\{\rho(x_\alpha)\}_{\alpha\in I};N \otimes_A B)) \simeq H^n(K^*_A(\{x_\alpha\}_{\alpha\in I};N \otimes_A B))$$

Assim sendo, temos pelo teorema 1.2.1 que $prof_B(JB;N \otimes_A B) = prof_A(J;N \otimes_A B)$.

Corolário 1.2.7. *Sejam M um A-módulo $J \subseteq A$ um ideal e I um conjunto. Temos a seguinte igualdade:*

$$prof_A(J;M) = prof_{A[(X_i)_{i\in I}]}(JA[(X_i)_{i\in I}];M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}])$$

Demonstração:

Segue direto do teorema.

Q.E.D.

Proposição 1.2.4. *Sejam M um A-módulo e $J \subseteq A$ um ideal. Se J é finitamente gerado, então:*

$$prof_\infty(J;M) = prof(J;M)$$

Demonstração:

Do corolário 1.2.7 e da proposição D.1.7 segue que $prof_\infty(J;M) \leq prof(J;M)$. Suponha que $prof_\infty(J;M) < prof(J;M)$. Sejam I um conjunto e $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in I}]$ uma $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$-sequência tal que $n = prof_\infty(J;M)$ (como $prof_\infty(J;M) < prof(J;M)$, n não pode ser infinito). Se $M_n = \frac{M\otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n>M\otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]}$, então segue da proposição D.1.7 e corolário 1.2.7 que $prof_{A[(X_i)_{i\in I}]}(JA[(X_i)_{i\in I}];M_n) > 0$. Seja $\mathfrak{P}(I)$ o conjunto das partes de I e considere I contido em $\mathfrak{P}(I)$ pela aplicação $x \mapsto \{x\}$. Pelo corolário D.1.2, concluímos que $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$ é uma $M \otimes_{A'} A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$-sequência, onde $A' = A[(X_i)_{i\in I}]$. Além do mais, temos *pela proposição D.1.8 que existe um elemento* $\gamma_{n+1} \in JA[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$ *tal que a multiplicação por* γ_{n+1} *em* $M_n \otimes_{A'} A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$ *é injetiva. Mas da afirmação da proposição D.1.9 temos que:*

$$M_n \otimes_{A'} A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}] \simeq \frac{M \otimes_A A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n> M \otimes_A A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]}$$

como $A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$*-módulos. Dessa forma, segue que* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$ *é uma* $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in\mathfrak{P}(I)}]$*-sequência. O que, pela definição de* $prof_\infty(J; M)$*, é um absurdo!*

Q.E.D.

Corolário 1.2.8. *Sejam* M *um* A*-módulo e* $J \subseteq A$ *um ideal. Se* $\mathfrak{F}(J)$ *denota o conjunto dos ideais de* A *contidos em* J *que são finitamente gerados, então:*

$$prof_\infty(J; M) = sup\{prof(J'; M)/J' \in \mathfrak{F}(J)\}$$

Demonstração:

Suponha que $prof_\infty(J; M) < \infty$*. Sejam* I *um conjunto e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in I}]$ *uma* $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$*-sequência tal que* $n = prof_\infty(J; M)$*. Se* $\{a_{ij}\}_{j=1}^{r_i}$ *denota o conjunto dos coeficientes não nulos do polinômio* γ_i*, então* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\} \subseteq J'A[(X_i)_{i\in I}]$*, onde* $J' = \sum_{i=1}^{n} < \{a_{ij}\}_{j=1}^{r_i} >$*. Dessa forma, temos que* $prof_\infty(J; M) \le prof_\infty(J'; M)$*. Como* J' *é finitamente gerado, segue da proposição que:*

$$prof_\infty(J; M) \le prof(J'; M) \le sup\{prof(J'; M)/J' \in \mathfrak{F}(J)\}$$

Por outro lado, desde que $J' \subseteq J$ *para todo* $J' \in \mathfrak{F}(J)$*, temos pelo corolário D.1.2 que:*

$$prof(J'; M) = prof_\infty(J'; M) \le prof_\infty(J; M)$$

para todo $J' \in \mathfrak{F}(J)$*. Portanto:*

$$sup\{prof(J'; M)/J' \in \mathfrak{F}(J)\} \le prof_\infty(J; M)$$

Suponha agora que $prof_\infty(J; M) = \infty$*. Dessa forma, existe um conjunto* I *e uma sequência infinita* $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq JA[(X_i)_{i\in I}]$ *que é uma* $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$*-sequência. Para cada* $i \in \mathbb{N}$ *seja* $\{a_{ij}\}_{j=1}^{r_i}$ *o conjunto dos coeficientes não nulos do polinômio* γ_i*. Se* $J'_i = \sum_{i=1}^{s} < \{a_{ij}\}_{j=1}^{r_i} >$*, então* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i\} \subseteq J'_i A[(X_i)_{i\in I}]$ *e* $i \le prof_\infty(J'_i; M)$*. Como* J'_i *é finitamente gerado, segue da proposição que* $prof_\infty(J'_i; M) = prof(J'_i; M)$*. Assim sendo, temos que*

$$i \le prof(J'_i; M) \le sup\{prof(J'; M)/J' \in \mathfrak{F}(J)\}, \forall i \in \mathbb{N}$$

Portanto $sup\{prof(J'; M)/J' \in \mathfrak{F}(J)\} = \infty$*.*

Q.E.D.

Teorema 1.2.3. *Sejam M um A-módulo e $J \subseteq A$ um ideal. Temos a seguinte cadeia de desigualdades:*

$$prof^{\phi}(J;M) \leq ... \leq sup\{prof(J';M)/J' \in \mathfrak{F}(J)\} \leq inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}/H^n(K^*(J;M)) \neq 0\}$$

onde $prof^{\phi}(J;M)$ denota o comprimento da maior M-sequência formada por elementos de J, $\mathfrak{F}(J) = \{J' \subseteq J/\#J' < \infty\}$ e a reticência é "formada"pelos inteiros $prof^I(J;M)$ (definição D.1.3) que têm a a seguinte propriedade: Se $I' \subseteq I$, então $prof^{I'}(J;M) \leq prof^I(J;M)$.

Demonstração:

Esse teorema não passa da coleção dos resultados: Teorema 1.2.1, Corolários 1.2.7 e 1.2.8, Proposições D.1.9 e D.1.7 e Definição D.1.3

Q.E.D.

Corolário 1.2.9. *Sejam M um A-módulo e $J \subseteq A$ um ideal. Se A é noetheriano e M finitamente gerado, então todos os inteiros no teorema são iguais a $prof(J;M)$.*

Demonstração:

Tal resultado segue do teorema 1.2.1 e do teorema D.1.1.

Q.E.D.

1.3 Conexão com teoria de multiplicidade

Lema 1.3.1. *Seja A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Se $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, então $H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))$ tem comprimento finito para todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

Observe que cada $K_i(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$ é isomorfo a M^{n_i}, para algum $n_i \in \mathbb{N}$ e portanto $K_i(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$ é noetheriano.

Afirmação: *$\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

De fato, considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow M^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

A afirmação segue de tal sequência (por indução) aplicando-se o corolário D.2.4.

Da afirmação, segue que $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre cada* $K_i(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$. *Considerando a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow Z_i(K_*(\gamma_1, .., \gamma_n; M)) \longrightarrow K_i(\gamma_1, ..., \gamma_n; M) \longrightarrow B_{i-1}(K_*(\gamma_1, ..., \gamma_n; M)) \longrightarrow 0$$

vemos que $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre cada* $Z_i(K_*(\gamma_1, .., \gamma_n; M))$. *Agora, segue da sequência exata:*

$$0 \longrightarrow B_i(K_*(M)) \longrightarrow Z_i(K_*(M)) \longrightarrow H_i(K_*(M)) \longrightarrow 0$$

onde $H_i(K_*(M)) = H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$ *(resp.* $Z_i(K_*(M)) = Z_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$, $B_i(K_*(M)) = B_i(K_*(\gamma_1, \gamma_1, ..., \gamma_n; M)$ *), que* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre cada* $H_i(K_*(\gamma_1, ..., \gamma_n; M))$, *ou seja,*

$$l(\frac{H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))}) < \infty$$

Mas da proposição 1.1.12 sabemos que $< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) = 0$ *e portanto* $\frac{H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))} \simeq H_i(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))$.

Q.E.D.

Desde que $K_i(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = 0$, $\forall i < 0$ *e* $\forall i > n$, *segue do lema 1.3.1 que podemos definir a característica de Euler-Poincaré do módulo de homologia do complexo de Koszul descendente associado à família* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *e ao A-módulo M. A denotaremos por* $\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$.

Proposição 1.3.1. *A aplicação:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; .) : \mathfrak{C}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

onde $\mathfrak{C}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ *é a classe dos módulos finitamente gerados sobre o anel noetheriano A que tem* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *por sistema de multiplicidade e* $\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; .)(M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$, *é aditiva.*

Demonstração:

Seja:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata formada por elementos de $\mathfrak{C}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$. *Da proposição 1.2.1 sabemos que existe uma sequência exata de morfismos e complexos:*

$$0 \longrightarrow K_*(\gamma_1, ..., \gamma_n; M') \longrightarrow K_*(\gamma_1, ..., \gamma_n; M) \longrightarrow K_*(\gamma_1, ..., \gamma_n; M'') \longrightarrow 0$$

Do corolário B.1.1 segue a existência de uma sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M')) \longrightarrow H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M'')) \longrightarrow H_{m-1}(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M')) \longrightarrow \cdots$$

Agora, desde que $H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M')) = 0$ *(resp.* $H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) = 0$, $H_m(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M'')) = 0$*),* $\forall m < 0$ *e* $\forall m > n$*, temos pela proposição D.2.1 que:*

$$-\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^{3p}l(H_p(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M'))) + \sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^{3q}l(H_q(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))) -$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{3n}l(H_n(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M''))) = 0 \Rightarrow \sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^{p}l(H_p(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M'))) -$$

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^{q}l(H_q(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M))) + \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n}l(H_n(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M''))) = 0$$

Q.E.D.

Corolário 1.3.1. *Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *um sistema de multiplicidade sobre M. Se* $\gamma_n \in \sqrt{Ann(M)}$*, então:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = 0$$

Demonstração:

É suficiente demonstrar que se $\gamma_n^m M = 0$ *para algum inteiro* $m \in \mathbb{N}$*, então* $\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = 0$. *Faremos indução sobre m. Se* $m = 1$*, então:*

$$\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n> M} = \frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}> M}$$

Dessa forma, $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M. Desde que* $\gamma_n M = 0$*, temos que o complexo* $K(\gamma_n)$ *é a diferencial nula. E dessa forma, segue pela definição de produto* *tensorial de complexos e do teorema 1.1.1 (utilizando o isomorfismo $M \otimes_A A \simeq M$) que o complexo $K(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$ é isomorfo ao complexo (C, d') tal que:*

$$C_i = K_i(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M) \oplus K_{i-1}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M), d'(x, y) = (d(x), d(y))$$

onde d é a diferencial de $K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M)$. Assim sendo, temos que:

$$K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) \simeq [K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M)] \oplus [K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M)(-1)]$$

Da proposição B.1.2 segue:

$$H(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)) \simeq [H(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M))] \oplus [H(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M)(-1))] =$$

$$H([K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M)]) \oplus [H(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M))(-1)]$$

Agora, da sequência exata:

$$0 \longrightarrow H(K_*) \longrightarrow [H(K_*)] \oplus [H(K_*)(-1)] \longrightarrow H(K_*)(-1) \longrightarrow 0$$

onde $K_* = K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M)$, e da afirmação do corolário D.2.1, temos que:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = \chi(H(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M))) + \chi(H(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M))(-1)) =$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M) - \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M) = 0$$

Suponha que o resultado foi demonstrado para o inteiro $m \in \mathbb{N}$ e qualquer que seja o A-módulo N tal que $\gamma_n^m N = 0$ e $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre N. Suponha ainda que $\gamma_n^{m+1} M = 0$ e considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow \gamma_n M \longrightarrow M \longrightarrow \tfrac{M}{\gamma_n M} \longrightarrow 0$$

Desde que $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, segue do corolário D.2.4 que $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre $\gamma_n M$ e sobre $\frac{M}{\gamma_n M}$. Dessa forma, segue da proposição que:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \gamma_n M) + \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{M}{\gamma_n M})$$

Como $\gamma_n^m(\gamma_n M) = 0$ e $\gamma_n^m \frac{M}{\gamma_n M} = 0$, o resultado segue por indução.

Q.E.D.

Teorema 1.3.1 (Auslander-Buchsbaum)**.** *Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma sequência de elementos de A. Se* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M, então:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$$

onde $e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$ *denota o símbolo de multiplicidade do A-módulo M com relação à família* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *(definição D.2.4).*

Demonstração:

Suponha que $n = 1$*. Temos que* $K_*(\gamma_1; M)$ *é isomorfo ao complexo:*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_1} M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

onde d_1 *é a multiplicação por* γ_1 *em M. Dessa forma, temos que:*

$$\chi(\gamma_1; M) = l(H_0(K_*(\gamma_1; M))) - l(H_1(K_*(\gamma_1; M))) =$$

$$l(\frac{M}{\gamma_1 M}) - l((0 :_M \gamma_1)) = e(\gamma_1; M)$$

Suponha que demonstramos o resultado para qualquer sequência $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *de n elementos e qualquer A-módulo finitamente gerado N que tem* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *como sistema de multiplicidade. Seja* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}\}$ *um sistema de multiplicidade sobre M. Desde que M é noetheriano temos que existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $(0 :_M \gamma_{n+1}^m) = (0 :_M \gamma_{n+1}^{m_0})$*,* $\forall m \geq m_0$*. Considere a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_{n+1}^m) \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{(0 :_M \gamma_{n+1}^m)} \longrightarrow 0$$

$\forall m \geq m_0$*. Segue do corolário D.2.4 que* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre* $(0 :_M \gamma_{n+1}^m)$ *e sobre* $\frac{M}{(0 :_M \gamma_{n+1}^m)}$*. Dessa forma, segue da proposição 1.3.1 que:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; \frac{M}{(0 :_M \gamma_{n+1}^m)}) + \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; (0 :_M \gamma_{n+1}^m))$$

$\forall m \geq m_0$.

Agora, desde que $\gamma_{n+1}^m (0 :_M \gamma_{n+1}^m) = 0$*, temos pelo corolário 1.3.1, que:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; \frac{M}{(0 :_M \gamma_{n+1}^m)})$$

Observando que se $\gamma_{n+1}\overline{x} = 0 \in \frac{M}{(0:_M \gamma_{n+1}^m)}$, *então:*

$$\overline{\gamma_{n+1}x} = 0 \Rightarrow \gamma_n x \in (0 :_M \gamma_{n+1}^m) \Rightarrow \gamma_{n+1}^{m+1}x = 0 \Rightarrow x \in (0 :_M \gamma_{n+1}^{m+1}) = (0 :_M \gamma_{n+1}^m) \Rightarrow \overline{x} = 0$$

Dessa forma, segue da proposição 1.2.2 que:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; \frac{M}{(0 :_M \gamma_{n+1}^m)}) =$$

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p l(H_p(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; \frac{M}{(0 :_M \gamma_{n+1}^m)}))) =$$

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p l(H_p(K_*(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{F_m}{\gamma_{n+1}F_m})))$$

$$= \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{F_m}{\gamma_{n+1}F_m})$$

onde $F_m = \frac{M}{(0:_M \gamma_{n+1}^m)}$, *qualquer que seja o inteiro* $m \geq m_0$.

Da proposição D.2.12 sabemos que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{F_m}{\gamma_{n+1}F_m})$$

$\forall m \geq m_1$. *Se* m *é tal que* $m_0 \leq m$ *e* $m_1 \leq m$, *então:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{F_m}{\gamma_{n+1}F_m}) =$$

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{F_m}{\gamma_{n+1}F_m}) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n+1}; M)$$

Q.E.D.

Corolário 1.3.2. *Sejam* A *um anel noetheriano,* M *um* A*-módulo finitamente gerado e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *um sistema de multiplicidade sobre* M. *Se* $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ *é uma permutação, então:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, ..., \gamma_{\sigma(n)}; M)$$

Demonstração:

Segue direto do teorema aplicando-se o corolário 1.1.10.

Q.E.D.

Corolário 1.3.3. *Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *um sistema de multiplicidade sobre M. Para toda n-nupla* $(m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$*, temos que:*

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_n^{m_n}; M) = m_1 m_2 ... m_n \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$$

Demonstração:

Segue direto do corolário anterior aplicando-se o teorema e o corolário D.2.5.

Q.E.D.

Lema 1.3.2. *Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *um sistema de multiplicidade sobre M. Para toda n-nupla* $(m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$*, temos que:*

$$l(\frac{M}{< \gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_n^{m_n} > M}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; (0 :_{M_i} \gamma_{i+1}^{m_{i+1}})) \prod_{k=1}^{i} m_k$$

onde $M_i = \frac{M}{<\gamma_{i+2}^{m_{i+2}}, \gamma_{i+3}^{m_{i+3}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M}$, $(0 :_{M_n} \gamma_{n+1}^{m_{n+1}}) = M$.

Demonstração:

Do teorema 1.3.1 e do corolário 1.3.3 segue que:

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_n^{m_n}; M) = m_1 m_2 ... m_n \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$$

Suponha que demonstramos que:

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_j^{m_j}; \frac{M}{< \gamma_{j+1}^{m_{j+1}}, \gamma_{j+2}^{m_{j+2}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M}) =$$

$$\sum_{i=j}^{n} \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; (0 :_{M_j} \gamma_{i+1}^{m_{i+1}})) \prod_{k=1}^{i} m_k$$

$2 \leq j \leq n$. *Temos pelo teorema 1.3.1 e pelo corolário 1.3.3 que:*

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_{j-1}^{m_{j-1}}; \frac{M}{< \gamma_j^{m_j}, \gamma_{j+1}^{m_{j+1}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M}) -$$

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_{j-1}^{m_{j-1}}; (0 :_{M_{j-1}} \gamma_j^{m_j})) =$$

$$\sum_{i=j}^{n} \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; (0 :_{M_j} \gamma_{i+1}^{m_{i+1}}) \prod_{k=1}^{i} m_k \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_{j-1}^{m_{j-1}}; \frac{M}{< \gamma_j^{m_j}, \gamma_{j+1}^{m_{j+1}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M}) =$$

$$\sum_{i=j}^{n} \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; (0 :_{M_j} \gamma_{i+1}^{m_{i+1}}) \prod_{k=1}^{i} m_k +$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{j-1}; (0 :_{M_{j-1}} \gamma_j^{m_j})) \prod_{s=1}^{j-1} m_s \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_{j-1}^{m_{j-1}}; \frac{M}{< \gamma_j^{m_j}, \gamma_{j+1}^{m_{j+1}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M}) =$$

$$\sum_{i=j-1}^{n} \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; (0 :_{M_j} \gamma_{i+1}^{m_{i+1}}) \prod_{k=1}^{i} m_k$$

E assim, o resultado segue por indução decrescente.

Q.E.D.

Teorema 1.3.2 (Lech). *Sejam A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Se* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M, então:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = \lim_{m_j \to \infty} \frac{l(\frac{M}{<\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_j^{m_j}, ..., \gamma_n^{m_n} > M})}{m_1 m_2 ... m_j ... m_n}$$

$j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demonstração:

Suponha que $j = n$. Desde que M é noetheriano, temos que existe $m_n^0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(<\gamma_{i+2}^{m_{i+2}}, \gamma_{i+3}^{m_{i+3}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M : \gamma_{i+1}^{m_{i+1}}) = (<\gamma_{i+2}^{m_{i+2}}, \gamma_{i+3}^{m_{i+3}}, ..., \gamma_n^{m_n^0} > M : \gamma_{i+1}^{m_{i+1}})$$

$\forall m_n \geq m_n^0$ e $0 \leq i < n$ (notação como no lema 1.3.2). Assim sendo, $(<\gamma_{i+2}^{m_{i+2}}, \gamma_{i+3}^{m_{i+3}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M : \gamma_{i+1}^{m_{i+1}})$ independem de m_n para todo $m_n \geq m_n^0$ e $0 \leq i < n$. Como $(0 :_{M_i} \gamma_{i+1}^{m_{j+1}})$ é a imagem de $<\gamma_{i+2}^{m_{i+2}}, \gamma_{i+3}^{m_{i+3}}, ..., \gamma_n^{m_n} > M : \gamma_{i+1}^{m_{i+1}})$ em M_i, pela aplicação canônica, segue que os inteiros:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; 0 :_{M_i} \gamma_{i+1}^{m_{i+1}}))$$

independem de m_n para todo $m_n \geq m_n^0$ e $0 \leq i < n$. Segue do lema 1.3.2 que:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = \lim_{m_n \to \infty} \frac{l(\frac{M}{<\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_n^{m_n} > M})}{m_1 m_2 ... m_n}$$

. Para o caso geral, temos pelo corolário 1.1.10 que:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{j-1}, \gamma_n, \gamma_{j+1}, ..., \gamma_j; M) =$$

$$\lim_{m_j \to \infty} \frac{l(\frac{M}{<\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_{j-1}^{m_{j-1}}, \gamma_n^{m_n}, \gamma_{j+1}^{m_{j+1}}, ..., \gamma_{n-1}^{m_{n-1}}, \gamma_j^{m_j} > M})}{m_1 m_2 ... m_{j-1} m_n m_{j+1} ... m_{n-1} m_j} =$$

$$\lim_{m_j \to \infty} \frac{l(\frac{M}{<\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_n^{m_n} > M})}{m_1 m_2 ... m_j ... m_n}$$

$j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Q.E.D.

Corolário 1.3.4. *Sejam A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Se $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, então:*

$$0 \leq \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

Demonstração:

Desde que:

$$0 \leq \frac{l(\frac{M}{<\gamma_1^{m_1}, \gamma_2^{m_2}, ..., \gamma_n^{m_n} > M})}{m_1 m_2 ... m_j ... m_n}$$

para toda n-upla $(m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$*, segue diretamente do teorema que* $0 \leq \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$*.* *Agora observe que:*

$$\chi(\gamma_1; \frac{M}{<\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n > M}) = l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M}) - l((0 :_{M_1} \gamma_1)) \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1; \frac{M}{<\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n > M}) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

onde $M_1 = \frac{M}{<\gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n > M}$*. Suponha que demonstramos que:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; \frac{M}{<\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, ..., \gamma_n > M}) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

$1 \leq i < n$*. Assim sendo, temos que:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{i+1}; \frac{M}{<\gamma_{i+2}, \gamma_{i+3}, ..., \gamma_n > M}) =$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; \frac{M}{<\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, ..., \gamma_n > M}) - \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; (0 :_{M_{i+1}} \gamma_{i+1})) \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{i+1}; \frac{M}{<\gamma_{i+2}, \gamma_{i+3}, ..., \gamma_n > M}) \leq \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i; \frac{M}{<\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, ..., \gamma_n > M}) \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{i+1}; \frac{M}{<\gamma_{i+2}, \gamma_{i+3}, ..., \gamma_n > M}) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

onde $M_{i+1} = \frac{M}{<\gamma_{i+2}, \gamma_{i+3}, ..., \gamma_n > M}$*. Segue por indução que:*

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M}) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

Portanto, temos que:

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M}) - \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma_n)) \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) \leq \chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M}) \Rightarrow$$

$$\chi(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M})$$

Q.E.D.

Apêndice A

Generalidades Sobre A-módulos

A.1 Módulos Projetivos

Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ *uma família de A-módulos, define-se uma estrutura de A-módulo sobre o produto* $\prod_{i\in I} M_i$ *de maneira natural, ou seja, soma e produto por escalar feitos coordenada à coordenada. Quando todos os A-módulos* M_i *são iguais a um A-módulo M, denotaremos seu produto simplesmente por* M^I.

Proposição A.1.1. *Seja* $\{M_i\}_{i\in I}$ *uma família de A-módulos. Se N é um A-módulo e para cada i existe um homomorfismo* $f_i : N \longrightarrow M_i$*, então existe um único homomorfismo* $\prod f_i$*, tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\prod f_i"'] & M_i \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[ur, "pr_i"'] & \end{tikzcd}$$

onde pr_i *é a i-ésima projeção, é comutativo, para cada i.*

Demonstração:

Defina $\prod f_i$ *de tal forma que* $(\prod f_i)(x) = \{f_i(x)\}_{i\in I}$*. Claramente* $\prod f_i$ *satisfaz as condições desejadas. Seja g outro homomorfismo que faz tal diagrama comutar. Temos que:*

$$g(x) = \{y_i\}_{i\in I} \Rightarrow y_i = pr_i \circ g(x) = f_i(x) \Rightarrow g(x) = \{f_i(x)\}_{i\in I} = (\prod f_i)(x)$$

Q.E.D.

Corolário A.1.1. *Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ e $\{N_i\}_{i\in I}$ duas família de A-módulos, tendo o mesmo conjunto de índices. Se para cada i existe um homomorfismo $f_i : N_i \longrightarrow M_i$, então existe um único homomorfismo $\prod f_i$, tal que o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} N_i \arrow[r, "\prod f_i"] \arrow[d, "pr_i'"'] & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "pr_i"] \\ N_i \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Demonstração:

Basta tomar na proposição N como sendo $\prod\limits_{i\in I} N_i$ e "f_i como sendo $f_i \circ pr_i'$".

Q.E.D.

Corolário A.1.2. *A sequência:*

$$M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i''$$

é exata para cada $i \in I$, se, e somente se, a sequência:

$$\prod_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\prod f_i} \prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\prod g_i} \prod_{i\in I} M_i''$$

é exata.

Demonstração:

Temos que:

$$(\prod g_i) \circ (\prod f_i)(\{x_i\}_{i\in I}) = (\prod g_i)(\{f_i(x_i)\}_{i\in I}) = \{g_i \circ f_i(x_i)\}_{i\in I} = \{0\}_{i\in I} = 0$$

$$(\prod g_i)(\{y_i\}_{i\in I}) = 0 \Rightarrow \{g_i(y_i)\}_{i\in I} = 0 \Rightarrow g_i(y_i) = 0, \forall i \in I \Rightarrow$$

$$\forall i \in I, \exists x_i \in M_i'/f_i(x_i) = y_i \Rightarrow \{y_i\}_{i\in I} = \{f_i(x_i)\}_{i\in I} = (\prod f_i)(\{x_i\}_{i\in I})$$

Por outro lado, dado $x_i \in M_i'$, considere a família $\{y_j\}_{j\in I} \in \prod\limits_{j\in I} M_j'$, tal que $y_i = x_i$ e $y_j = 0$, se $j \neq i$. Assim sendo, temos:

$$(\prod g_j) \circ (\prod f_j)(\{y_j\}_{j \in I}) = 0 \Rightarrow \{g_j \circ f_j(y_j)\}_{j \in I} = 0 \Rightarrow$$

$$g_j \circ f_j(y_j) = 0, \forall j \in I \Rightarrow g_i \circ f_i(x_i) = 0$$

Se $x_i \in Ker(g_i)$ *e* $\{y_j\}_{j \in I} \in \prod_{j \in I} M_i$, *é tal que* $y_i = x_i$ *e* $y_j = 0$, *se* $j \neq i$, *então:*

$$(\prod g_j)(\{y_j\}_{j \in I}) = \{g_j(y_j)\}_{j \in I} = 0 \Rightarrow \{y_j\}_{j \in I} \in Ker(\prod g_i) = im(\prod f_i) \Rightarrow$$

$$\exists \{z_j\}_{j \in I} \in \prod_{j \in I} M'_i / \{y_j\}_{j \in I} = (\prod f_i)(\{z_j\}_{j \in I}) = \{f_j(z_j)\}_{j \in I} \Rightarrow$$

$$y_j = f_j(z_j), \forall j \in I \Rightarrow x_i = f_i(z_i)$$

Q.E.D.

Se $\{X_i\}_{i \in I}$ *é uma família de monóides, definimos o suporte da família* $\{y_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ *como sendo o conjunto* $Sup(\{y_i\}_{i \in I}) = \{i \in I / y_i \neq 0\}$. *Seja* $\{M_i\}_{i \in I}$ *uma família da A-módulos, definiremos a soma direta desses A-módulos como sendo o conjunto:*

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{\{x_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i / \# Sup(\{x_i\}_{i \in I}) < \infty\}$$

A soma direta de uma família de A-módulos é claramente um submódulo do produto dessa família. Para cada i definiremos o homomorfismo $j_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, *tal que* j_i *leva o elemento* $x_i \in M_i$ *na família que tem por elemento de índice i o próprio* x_i *e os demais elementos zero.* j_i *é claramente um homomorfismo injetivo e será dito canônico. Observe, que se* $y = \{y_i\}_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ *então podemos escrever* $y = \sum_{i \in I} j_i(y_i)$, *onde a soma é definida sobre o suporte de tal família, que é finito (se* $Sup(x_{i_{i \in I}}) = \phi$, *então defina* $\sum_{i \in I} x_i = 0$*). Quando todos os A-módulos* M_i *são iguais a um A-módulo M, denotamos sua soma direta simplesmente por* $M^{(I)}$.

Proposição A.1.2. *Seja* $\{M_i\}_{i \in I}$ *uma família de A-módulos. Se* N *é um A-módulo e para cada* $i \in I$ *existe um homomorfismo* $f_i : M_i \longrightarrow N$, *então existe um único homomorfismo* $\oplus f_i$, *tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "j_i"'] & N \\
\bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[ur, "\oplus f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração:

Defina $\oplus f_i$*, tal que* $\sum_{i\in I} j_i(x_i) \mapsto \sum_{i\in I} f_i(x_i)$*. Observe que tal função está bem definida, pois*

$$\sum_{i\in I} j_i(x_i) = \sum_{i\in I} j_i(y_i) \Rightarrow \{x_i\}_{i\in I} = \{y_i\}_{i\in I} \Rightarrow x_i = y_i, \forall i \in I \Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i), \forall i \in I \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I} f_i(x_i) = \sum_{i\in I} f_i(y_i) \Rightarrow (\oplus f_i)(\sum_{i\in I} j_i(x_i)) = (\oplus f_i)(\sum_{i\in I} j_i(y_i))$$

A função $\oplus f_i$ *claramente é um homomorfismo e faz tal diagrama comutar. Seja g outro homomorfismo que satisfaz as hipóteses, temos que:*

$$g(\sum_{i\in I} j_i(x_i)) = \sum_{i\in I} g \circ j_i(x_i) = \sum_{i\in I} f_i(x_i) = (\oplus f_i)(\sum_{i\in I} j_i(x_i))$$

Q.E.D.

Corolário A.1.3. *Sejam* $\{M_i\}_{i\in I}$ *e* $\{N_i\}_{i\in I}$ *duas família de A-módulos, tendo o mesmo conjunto de índices. Se para cada i existe um homomorfismo* $f_i : M_i \longrightarrow N_i$*, então existe um único homomorfismo* $\oplus f_i$*, tal que o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "j_i"'] & N_i \arrow[d, "j'_i"] \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\oplus f_i"'] & \bigoplus_{i\in I} N_i \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração:

Basta tomar na proposição A.1.2, N como sendo $\bigoplus_{i\in I} N_i$ *e "*f_i *como sendo* $j'_i \circ f_i$*".*

Q.E.D.

Corolário A.1.4. *Para cada* $i \in I$*, a sequência:*

$$M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M''_i$$

é exata, se, e somente se, a sequência:

$$\bigoplus_{i\in I} M'_i \xrightarrow{\oplus f_i} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\oplus g_i} \bigoplus_{i\in I} M''_i$$

é exata.

Demonstração:

Temos que:

$$(\oplus g_i)\circ(\oplus f_i)(\sum_{i\in I} j'_i(x_i)) = (\oplus g_i)(\sum_{i\in I} j_i\circ f_i(x_i)) = \sum_{i\in I} j''_i\circ g_i\circ f_i(x_i) = 0$$

$$(\oplus g_i)(\sum_{i\in I} j_i(x_i)) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} j''_i\circ g_i(x_i) = 0 \Rightarrow \{g_i(x_i)\}_{i\in I} = 0 \Rightarrow g_i(x_i) = 0, \forall i\in I \Rightarrow$$

$$\forall i\in Sup(\{x_i\}_{i\in I}), \exists z'_i\in M'_i / x_i = f_i(z'_i) \Rightarrow \sum_{i\in I} j_i(x_i) = \sum_{i\in I} j_i\circ f_i(z'_i) = (\oplus f_i)(\sum_{i\in I} j'_i(z'_i))$$

onde $z_i = 0$ *se* $i \notin Sup(\{x_i\}_{i\in I})$. *Reciprocamente:*

$$x_i\in M'_i \Rightarrow j'_i(x_i)\in \bigoplus_{i\in I} M'_i \Rightarrow (\oplus g_i)\circ(\oplus f_i)\circ j'_i(x_i) = 0 \Rightarrow$$

$$j''_i\circ g_i\circ f_i(x_i) = 0 \Rightarrow g_i\circ f_i(x_i) = 0$$

$$x_i\in Ker(g_i) \Rightarrow g_i(x_i) = 0 \Rightarrow j''_i\circ g_i(x_i) = 0 \Rightarrow (\oplus g_i)\circ j_i(x_i) = 0 \Rightarrow$$

$$j_i(x_i)\in Ker(\oplus g_i) = im(\oplus f_i) \Rightarrow \exists\{z_k\}_{k\in I}\in \bigoplus_{k\in I} M'_k / j_i(x_i) =$$

$$(\oplus f_k)(\{z_k\}_{k\in I}) = \{f_k(z_k)\}_{k\in I} \Rightarrow x_i = f_i(z_i)$$

Q.E.D.

Sejam M *um* A*-módulo e* $x\in M$, *a translação* $\varepsilon_x : A \longrightarrow M$, *tal que* $\varepsilon_x(a) = ax$, *define um homomorfismo entre A e M. Se* $\{x_i\}_{i\in I}$ *é uma família de elementos de M, a proposição A.1.2 garante a existência de um único homomorfismo* ε, *tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\varepsilon_{x_i}"] \arrow[d, "j_i"'] & M \\
A^{(I)} \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

onde para cada i, $A_i = A$, *é comutativo.*

Definição A.1.1. *Sejam M um A-módulo e $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos de M. A família $\{x_i\}_{i\in I}$ é dita livre, um conjunto de geradores de M, uma base de M, conforme o homomorfismo ε definido acima, seja injetivo, sobrejetivo, bijetivo, respectivamente. Um A-módulo que possui uma base é dito livre.*

Proposição A.1.3. *Sejam M um A-módulo e $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos de M. A família $\{x_i\}_{i\in I}$ é livre, se, e somente se, dada uma família $\{a_i\}_{i\in I}$ de elementos de A, de suporte finito, tal que $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$, temos $a_i = 0$, $\forall i \in I$.*

Demonstração:

Seja $\{a_i\}_{i\in I} \in A^{(I)}$, tal que $\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$. Temos que:

$$\sum_{i\in I} a_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_{x_i}(1) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i \varepsilon \circ j_i(1) = 0 \Rightarrow \varepsilon(\sum_{i\in I} a_i j_i(1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I} a_i j_i(1) = 0 \Rightarrow \{a_i\}_{i\in I} = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall i \in I$$

Reciprocamente, seja $\{a_i\}_{i\in I} \in A^{(I)}$, tal que $\varepsilon(\{a_i\}_{i\in I}) = 0$. Temos que:

$$\varepsilon(\{a_i\}_{i\in I}) = 0 \Rightarrow \varepsilon(\sum_{i\in I} a_i j_i(1)) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i \varepsilon(j_i(1)) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_{x_i}(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I} a_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall i \in I \Rightarrow \{a_i\}_{i\in I} = 0$$

Q.E.D.

Proposição A.1.4. *Sejam M um A-módulo e $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos de M. A família $\{x_i\}_{i\in I}$ é um conjunto de geradores do A-módulo M, se, e somente se, para cada $z \in M$, existe uma família $\{a_i\}_{i\in I}$ de elementos de A, de suporte finito (obviamente, tal família depende de z), tal que $z = \sum_{i\in I} a_i x_i$.*

Demonstração:

Suponha ε sobrejetivo, dado $z \in M$, temos:

$$\exists \{a_i\}_{i\in I} \in A^{(I)} / z = \varepsilon(\{a_i\}_{i\in I}) \Rightarrow z = \varepsilon(\sum_{i\in I} a_i j_i(1)) \Rightarrow$$

$$z = \sum_{i\in I} a_i \varepsilon(j_i(1)) \Rightarrow z = \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_{x_i}(1) \Rightarrow z = \sum_{i\in I} a_i x_i$$

Reciprocamente, se para todo z em M, temos $z = \sum_{i \in I} a_i x_i$ para alguma família $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de A, de suporte finito, então:

$$z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_{x_i}(1) \Rightarrow z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon \circ j_i(1) \Rightarrow z = \varepsilon(\sum_{i \in I} a_i j_i(1)) \Rightarrow z = \varepsilon(\{a_i\}_{i \in I})$$

Q.E.D.

Corolário A.1.5. *Se $\{M_i\}_{i \in I}$ é uma família de A-módulos livres, então sua soma direta $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é um A-módulo livre.*

Demonstração:

Seja $\{e_{ij}\}_{j \in J_i}$ uma base de M_i. Se $y \in \bigoplus_{i \in I} M_i$, então $y = \sum_{i \in I} j_i(x_i)$, com $x_i \in M_i$. Uma vez que $\{e_{ij}\}_{j \in J_i}$ é uma família de geradores de M_i, segue da proposição A.1.4 que existe uma família $\{a_{ij}\}_{j \in J_i}$ de elementos de A, de suporte finito, tal que $x_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij} e_{ij}$. Desde que a família $\{x_i\}_{i \in I}$ tem suporte finito, temos que a família $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$, onde $J = \bigcup_{i \in I} J_i$, tem suporte finito (para $k \notin Sup(\{x_i\}_{i \in I})$ escolha $\{a_{kj}\}_{j \in J_k}$ como sendo a família nula). Assim sendo, temos que $y = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} j_i(e_{ij})$, segue da proposição A.1.4 que a família $\{e_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ é uma família de geradores do A-módulo $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Seja $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$, onde $J = \bigcup_{i \in I} J_i$, uma família de suporte finito, tal que $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} e_{ij} = 0$. Temos que:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} j_i(e_{ij}) = \sum_{i \in I} (\sum_{j \in J} a_{ij}) j_i(e_{ij}) = 0 \Rightarrow \sum_{i \in I} a_{ij} e_{ij} = 0 \sum_{j \in J} a_{ij} e_{ij} = 0, \forall i \in I$$

Como a família $\{e_{ij}\}_{j \in J_i}$ é livre para todo i em I, segue da proposição A.1.3 que $a_{ij} = 0 \ \forall j \in J$, $\forall i \in I$. Segue da proposição A.1.3 que a família $\{e_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ é livre.

Q.E.D.

Proposição A.1.5. *Todo A-módulo é isomorfo a um quociente de um A-módulo livre.*

Demonstração:

Seja M um A-módulo. Desde que $x = 1.x$, $\forall x \in M$, segue da proposição anterior que a família $\{x\}_{x \in M}$ é um conjunto gerador de M. Dessa forma, a aplicação $\varepsilon : A^{(M)} \longrightarrow M$ é sobrejetiva. Pelo teorema do isomorfismo, segue que $M \simeq \frac{A^{(M)}}{Ker(\varepsilon)}$.

Q.E.D.

Sejam M e N A-módulos o conjunto $Hom(M,N)$ dos homomorfismo de M em N, tem uma estrutura de A-módulo canônica, a saber, se $f,g \in Hom(M,N)$ e $a \in A$, então f+g é o homomorfismo tal que $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(af)(x) = f(ax)$. Sejam M, M', N, N' A-módulos. Se $u : M \longrightarrow M'$ e $v : N' \longrightarrow N$ são homomorfismo, então a aplicação:

$$Hom(u,v) : Hom(M',N') \longrightarrow Hom(M,N)$$

tal que $Hom(u,v)(f) = v \circ f \circ u$ é claramente um homomorfismo. Além do mais, se $h : M'' \longrightarrow M$ e $r : N \longrightarrow N''$ são homomorfismos entre A-módulos, temos $Hom(h,r) \circ Hom(u,v) =$ $Hom(u \circ h, r \circ v)$.

Definição A.1.2. *Dado um A-módulo P, se para toda sequência:*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

exata, de A-módulos e homomorfismos, a sequência:

$$Hom(P,M') \xrightarrow{Hom(1_P,u)} Hom(P,M) \xrightarrow{Hom(1_P,v)} Hom(P,M'')$$

é exata, então dizemos que P é projetivo.

Lema A.1.1. *Se M é um A-módulo, então o A-módulo $Hom(A,M)$ se identifica com M.*

Demonstração:

A aplicação $\varphi : Hom(A,M) \longrightarrow M$, tal que $\varphi(f) = f(1)$ é um homomorfismo. De fato, $\varphi(f+ag) = (f+ag)(1) = f(1)+(ag)(1) = f(1)+g(a) = f(1)+ag(1) = \varphi(f)+a\varphi(g)$.

Temos ainda que:

$\varphi(f) = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow af(1) = 0,\ \forall a \in A \Rightarrow f(a) = 0,\ \forall a \in A \Rightarrow f = 0$.

Se $x \in M$, então $x = \varepsilon_x(1) \Rightarrow x = \varphi(\varepsilon_x)$. Onde $\varepsilon_x : A \longrightarrow M$ é a translação por x.

Q.E.D.

Proposição A.1.6. *O A-módulo A é projetivo.*

Demonstração:

Seja:

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Temos que:

$$Hom(1_A,v) \circ Hom(1_A,u)(f) = v \circ u \circ f = 0$$

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Hom(A,M') \arrow[r, "Hom(1_A,u)"] \arrow[d, "\varphi'"] & Hom(A,M) \arrow[r, "Hom(1_A,v)"] \arrow[d, "\varphi"] & Hom(A,M'') \arrow[d, "\varphi''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & M''
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismo verticais são dados pelo lema A.1.1, é comutativo.

De fato,

$$\varphi \circ Hom(1_A, u)(f) = \varphi(u \circ f) = u(f(1)) = u(\varphi'(f))$$

A segunda parte do diagrama demonstra-se de forma análoga. Seja $g \in Ker(Hom(1_A, v))$, *temos que:*

$$H(1_A, v)(g) = 0 \Rightarrow \varphi'' \circ H(1_A, v)(g) = 0 \Rightarrow v \circ \varphi(g) = 0 \Rightarrow \varphi(g) \in Ker(v) = im(u) \Rightarrow$$

$\exists x \in M'/\varphi(g) = u(x) \Rightarrow \varphi(g) = u(\varphi'(\varepsilon_x)) \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(Hom(1_A, u)(\varepsilon_x)) \Rightarrow g = Hom(1_A, u)(\varepsilon_x)$. *onde* $\varepsilon_x : A \longrightarrow M$ *é a translação por* x.

Q.E.D.

Lema A.1.2. *Sejam* $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *e* $\{N_\beta\}_{\beta \in J}$ *duas famílias de* A *módulos. Se para todos* $\alpha \in I$ *e* $\beta \in J$, $j_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ *e* $pr_\beta : \prod_{\beta \in J} N_\beta \longrightarrow N_\beta$, *são a injeção e a projeção canônicas, respectivamente, então o homomorfismo:*

$$\prod_{\alpha\beta} Hom(j_\alpha, pr_\beta) : Hom(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, \prod_\beta N_\beta) \longrightarrow \prod_{(\alpha,\beta) \in I \times J} Hom(M_\alpha, N_\beta)$$

é um isomorfismo.

Demonstração:

$$(\prod_{\alpha\beta} Hom(j_\alpha, pr_\beta))(f) = 0 \Rightarrow \{pr_\beta \circ f \circ j_\alpha\}_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow pr_\beta \circ f \circ j_\alpha = 0, \forall (\alpha, \beta) \in I \times J \Rightarrow$$

$$pr_\beta \circ f \circ j_\alpha(x_\alpha) = 0, \forall (\alpha, \beta) \in I \times J, \forall x_\alpha \in M_\alpha$$

$$f(\sum_\alpha j_\alpha(x_\alpha)) = \{y_\beta\}_{\beta \in B} \Rightarrow y_\beta = pr_\beta \circ f(\sum_\alpha j_\alpha(x_\alpha)) \Rightarrow y_\beta = \sum_\alpha pr_\beta \circ f(j_\alpha(x_\alpha)) = 0 \Rightarrow$$

$$f(\sum_{\alpha} j_\alpha(x_\alpha)) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Seja $\{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta} \in \prod_{\alpha\beta} Hom(M_\alpha, N_\beta)$*. Para cada* $\beta \in B$*, seja* $j'_\beta : N_\beta \longrightarrow \bigoplus_\beta N_\beta \hookrightarrow \prod_\beta N_\beta$ *a injeção canônica. Pela proposição A.1.2, existe um homomorfismo f, tal que, para todo* $\alpha \in I$ *o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "j'_\beta \circ f_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "j_\alpha"'] & \prod_\beta N_\beta \\ \bigoplus_\alpha M_\alpha \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim sendo, temos:

$$(\prod_{\alpha\beta} Hom(j_\alpha, pr_\beta))(f) = \{pr_\beta \circ f \circ j_\alpha\}_{\alpha\beta} = \{pr_\beta \circ j'_\beta \circ f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta} = \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}$$

Q.E.D.

Lema A.1.3. *Se o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "u"] & M \arrow[d, hook, "v"] \\ N' \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

de módulos e homomorfismos é comutativo, então $u(Ker(f)) = ker(g)$ *e* $v(im(f)) = im(g)$*.*

Demonstração:

$$y \in u(Ker(f)) \Leftrightarrow \exists x \in Ker(f)/y = u(x) \Rightarrow g(y) = g \circ u(x) \Rightarrow$$

$$g(y) = v \circ f(x) = v(0) = 0 \Rightarrow y \in Ker(g)$$

$$y \in Ker(g) \Rightarrow g(y) = 0 \Rightarrow g \circ u(x) = 0/y = u(x), x \in M' \Rightarrow$$

$$v \circ f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f) \Rightarrow y \in u(Ker(f))$$

$$y \in v(im(f)) \Rightarrow y = v(z)/z \in im(f) \Rightarrow y = v \circ f(x)/x \in M' \Rightarrow$$

$$y = g \circ u(x) \Rightarrow y \in im(g)$$

$$y \in im(g) \Rightarrow y = g(z)/z \in N' \Rightarrow y = g \circ u(x)/z = u(x), x \in M' \Rightarrow$$

$$y = v \circ f(x) \Rightarrow y \in v(im(f))$$

Q.E.D.

Scholium A.1.1. *Fica claro que se supusermos no lema anterior apenas u sobrejetivo, então teremos $u(Ker(f)) = Ker(g)$.*

Proposição A.1.7. *Seja $\{P_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos. $\bigoplus_{i \in I} P_i$ é um A-módulo projetivo se, e somente se, P_i é projetivo $\imath \in I$.*

Demonstração:

Seja

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Sabemos pelo corolário A.1.2 que a sequência:

$$Hom(P_i, M') \xrightarrow{Hom(1_{P_i}, u)} Hom(P_i, M) \xrightarrow{Hom(1_{P_i}, v)} Hom(P_i, M'')$$

é exata para cada i se, e somente se, a sequência:

$$\prod_{i \in I} Hom(P_i, M') \xrightarrow{\prod Hom(1_{P_i}, u)} \prod_{i \in I} Hom(P_i, M) \xrightarrow{\prod Hom(1_{P_i}, v)} \prod_{i \in I} Hom(P_i, M'')$$

é exata.

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Hom(\bigoplus_{i \in I} P_i, M') \arrow[r, "Hom(1_P, u)"] \arrow[d, "\prod Hom(j_i, 1_{M'})"'] & Hom(\bigoplus_{i \in I} P_i, M) \arrow[r, "Hom(1_P, v)"] \arrow[d, "\prod Hom(j_i, 1_M)"'] & Hom(\bigoplus_{i \in I} P_i, M'') \arrow[d, "\prod Hom(j_i, 1_{M''})"] \\
\prod_{i \in I} Hom(P_i, M') \arrow[r, "\prod Hom(1_{P_i}, u)"] & \prod_{i \in I} Hom(P_i, M) \arrow[r, "\prod Hom(1_{P_i}, v)"] & \prod_{i \in I} Hom(P_i, M'')
\end{tikzcd}$$

onde $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$, *é comutativo.*

De fato, temos:

$$(\prod Hom(1_{P_i}, u)) \circ (\prod Hom(j_i, 1_{M'}))(f) = (\prod Hom(1_{P_i}, u))(\{f \circ j_i\}_{i \in I}) =$$

$$\{Hom(1_{P_i}, u))(f \circ j_i)\}_{i \in I} = \{u \circ f \circ j_i\}_{i \in I} = (\prod Hom(j_i, 1_M))(u \circ f) =$$

$$(\prod Hom(j_i, 1_M)) \circ Hom(1_P, u)(f)$$

A comutatividade da segunda parte do diagrama se demonstra de forma análoga. A proposição segue dos lema A.1.2 e A.1.3 aplicados a tal diagrama.

Q.E.D.

Corolário A.1.6. *Todo A-módulo livre é projetivo.*

Demonstração:

Todo A-módulo livre é isomorfo a alguma soma direta do A-módulo projetivo A.

Q.E.D.

Proposição A.1.8. *Seja M um A-módulo livre com uma base finita, se o A-módulo N é livre (resp. projetivo), então o A-módulo* $Hom_A(M, N)$ *é livre (resp. projetivo).*

Demonstração:

Como M é livre com base fitita, temos que existe um conjunto I, tal que $\#I < \infty$ *e* $M \simeq A^{(I)}$*. Dessa forma, temos que:*

$$Hom_A(M, N) \simeq Hom(A^{(I)}, N) \simeq (Hom_A(A, N))^{(I)} \simeq N^{(I)}$$

Os dois últimos isomorfismos saindo dos lemas A.1.2 e A.1.1. O resultado segue do corolário A.1.5 (resp. da proposição A.1.7).

Q.E.D.

Proposição A.1.9. *Seja P um A-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

i) P é projetivo.

ii) Para toda sequência exata:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(P,M') \xrightarrow{Hom(1_P,u)} Hom(P,M) \xrightarrow{Hom(1_P,v)} Hom(P,M'') \longrightarrow 0$$

é exata.

iii) Seja $f : M \longrightarrow M''$ um homomorfismo sobrejetivo, para todo homomorfismo $g : P \longrightarrow M''$, existe um homomorfismo h, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo.

iv) Existem Q A-módulo e I conjunto, tais que $A^{(I)} \simeq P \oplus Q$.

Demonstração:

i) $\Rightarrow$ ii)

Desde que P é projetivo, é suficiente demonstrar que $Hom(1_P,u)$ é injetivo e que $Hom(1_P,v)$ é sobrejetivo.

$$Hom(1_P,u)(f) = 0 \Rightarrow u \circ f = 0 \Rightarrow u(f(x)) = 0, \forall x \in P \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in P \Rightarrow f = 0$$

Considere a sequência exata:

$$M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

Desde que P é projetivo, temos que a sequência:

$$Hom(P,M) \xrightarrow{Hom(1_P,v)} Hom(P,M'') \longrightarrow 0$$

é exata, e portanto $Hom(1_P,v)$ é sobrejetivo.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$

onde i é a injeção canônica. Por hipótese, temos que a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(P, Ker(f)) \xrightarrow{Hom(1_P, i)} Hom(P, M) \xrightarrow{Hom(1_P, f)} Hom(P, M'') \longrightarrow 0$$

é exata. Assim sendo, temos que $Hom(1_P, f)$ é sobrejetivo. Desde que, $g \in Hom(P, M'')$, temos que existe $h \in Hom(P, M)$ $/g = Hom(1_P, f)(h) \Rightarrow g = f \circ h$.

$iii) \Rightarrow iv)$

Sabemos que existe um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : A^{(P)} \longrightarrow P$. Por hipótese, existe um homomorfismo ψ, que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ A^{(P)} \arrow[r, "\varphi"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comutar. Seja $z \in A^{(P)}$, temos que:

$$\varphi(z) = t = \varphi \circ \psi(t) \Rightarrow \exists r \in Ker(\varphi)/z = \psi(t) + r$$

Assim sendo, temos que todo elemento de $A^{(P)}$ se escreve como uma soma de elementos de $Ker(\varphi)$ e de $im(\psi)$. Defina a função:

$$\eta : A^{(P)} \longrightarrow im(\psi) \oplus Ker(\varphi)$$

tal que $x+y \mapsto (x, y)$, sendo $y \in Ker(\varphi)$ e $x \in im(\psi)$. Observe que tal aplicação está bem definida, pois se $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, com $y_1, y_2 \in Ker(\varphi)$; $x_1, x_2 \in im(\psi)$ e $x_1 = \psi(t_1)$, $\psi(t_2) = x_2$, então temos:

$$x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \Rightarrow \psi(t_1 - t_2) = y_2 - y_1 \Rightarrow \varphi \circ \psi(t_1 - t_2) = 0 \Rightarrow t_1 - t_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \psi(t_1) = \psi(t_2) = x_2 \Rightarrow y_2 - y_1 = x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

Claramente η é um homomorfismo. $\eta(x + y) = 0 \Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x = y = x + y = 0$, logo η é injetiva. Se $(x, y) \in im(\psi) \oplus Ker(\varphi)$, então $(x, y) = \eta(x+y)$ e dessa forma η é um isomorfismo. A restrição φ' de φ a $im(\psi)$ define um isomorfismo sobre P, pois $\varphi' \circ \psi = \varphi \circ \psi = 1_P$ é o mesmo que dizer que ψ é injetiva, mas ela também é sobrejetiva sobre sua imagem, como a inversa é única, segue que $\varphi' = (\psi)^{-1}$. Assim sendo, a aplicação $\varphi' \oplus 1_{Ker(\varphi)}$ define, de acordo com o corolário

A.1.4, um isomorfismo de $im(\psi) \oplus Ker(\varphi)$ *em* $P \oplus Ker(\varphi)$*. Compondo* $\varphi' \oplus 1_{Ker(\varphi)}$ *com* η*, temos que* $A^{(P)} \simeq P \oplus Ker(\varphi)$*. Basta tomar* $Q = Ker(\varphi)$ *e* $I = P$*.*

iv) $\Rightarrow$ *i)*

Seja:

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata. Desde que todo A-módulo livre é projetivo, temos que a sequência:

$$Hom(P \oplus Q, M') \xrightarrow{Hom(1_{P\oplus Q},u)} Hom(P \oplus Q, M) \xrightarrow{Hom(1_{P\oplus Q},v)} Hom(P \oplus Q, M'')$$

é exata. Pela afirmação da proposição A.1.7, temos que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom(P \oplus Q, M') \arrow[r, "Hom(1,u)"] \arrow[d] & Hom(P \oplus Q, M) \arrow[r, "Hom(1,v)"] \arrow[d] & Hom(P \oplus Q, M'') \arrow[d] \\
Hom(P, M') \times Hom(Q, M') \arrow[r] & Hom(P, M) \times Hom(Q, M) \arrow[r] & Hom(P, M'') \times Hom(Q, M'')
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos que estão faltando são como em tal afirmação, é comutativo. Como a primeira linha desse diagrama é exata e os homomorfismos verticais são isomorfismos, segue do lema A.1.3 que a segunda linha é exata.

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Hom(P, M') \times Hom(Q, M') \arrow[r] \arrow[d, "pr_1'"'] & Hom(P, M) \times Hom(Q, M) \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & Hom(P, M'') \times Hom(Q, M'') \arrow[d, "pr_1''"] \\
Hom(P, M') \arrow[r, "Hom(1_P,u)"'] & Hom(P, M) \arrow[r, "Hom(1_P,v)"'] & Hom(P, M'')
\end{tikzcd}$$

onde pr_1 *é a primeira projeção e os homomorfismos na primeira linha são dados pelo diagrama acima, é comutativo.*

De fato,

$$pr_1 \circ (Hom(1_P, u) \times Hom(1_Q, u))(f, g) = p_1(Hom(1_P, u)(f), Hom(1_Q, u)(g)) =$$

$$pr_1(u \circ f, u \circ g) = u \circ f = Hom(1_P, u)(f) = Hom(1_P, u) \circ pr_1'((f, g))$$

A comutatividade da segunda parte se demonstra de for análoga. Seja $f \in Ker(Hom(1_P, v))$*, temos que:*

$$Hom(1_P, v)(f) = 0 \Rightarrow Hom(1_P, v) \circ pr_1(f, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$pr_1'' \circ (Hom(1_P, v) \times Hom(1_Q, v))((f, 0)) = 0$$

Agora observe que sendo $pr_2'' : Hom(P, M'') \times Hom(Q, M'') \longrightarrow Hom(Q, M'')$ *a segunda projeção canônica, temos:*

$$pr_2'' \circ (Hom(1_P, v) \times Hom(1_Q, v))((f, 0)) = Hom(1_Q, v)(0) = 0$$

Assim, temos que $(f, 0) \in Ker(Hom(1_P, v) \times Hom(1_Q, v)) = im(Hom(1_P, u) \times Hom(1_Q, u))$. *Dessa forma,*

$$\exists (g, h) \in Hom(P, M') \times Hom(Q, M') / (f, 0) =$$

$$(Hom(1_P, u) \times Hom(1_Q, u))(g, h) = (Hom(1_P, u)(g), Hom(1_Q, u)(h)) \Rightarrow f = Hom(1_P, u)(g)$$

Por outro lado, temos que $Hom(1_P, v) \circ Hom(1_P, u)(h) = v \circ u \circ h = 0$.

Q.E.D.

A.2 Módulos Injetivos

Definição A.2.1. *Seja E um A-módulo. Se para toda sequência exata:*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

de A-módulos e homomorfismos, a sequência:

$$Hom(M'', E) \xrightarrow{Hom(v, 1_E)} Hom(M, E) \xrightarrow{Hom(u, 1_E)} Hom(M', E)$$

é exata, então dizemos que E é um A-módulo injetivo.

Proposição A.2.1. *Seja* $\{E_i\}_{i \in I}$ *uma família de A-módulos. Cada* E_i *é injetivo se, e somente se,* $\prod_{i \in I} E_i$ *é injetivo.*

Demonstração:

Seja:

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata. Sabemos pelo corolário A.1.2 que a sequência:

$$Hom(M'', E_i) \xrightarrow{Hom(v, 1_{E_i})} Hom(M, E_i) \xrightarrow{Hom(u, 1_{E_i})} Hom(M', E_i)$$

é exata para cada i se, e somente se, a sequência:

$$\prod_{i \in I} Hom(M'', E_i) \xrightarrow{\prod Hom(v, 1_{E_i})} \prod_{i \in I} Hom(M, E_i) \xrightarrow{\prod Hom(u, 1_{E_i})} \prod_{i \in I} Hom(M', E_i)$$

é exata.

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in I} Hom(M'', E_i) \arrow[r, "\prod Hom(v, 1_{E_i})"] \arrow[d, "\varphi''"] & \prod_{i \in I} Hom(M, E_i) \arrow[r, "\prod Hom(u, 1_{E_i})"] \arrow[d, "\varphi"] & \prod_{i \in I} Hom(M', E_i) \arrow[d, "\varphi'"'] \\
Hom(M'', \prod_i E_i) \arrow[r, "Hom(v, 1_{(\prod E_i)})"] & Hom(M, \prod_i E_i) \arrow[r, "Hom(u, 1_{(\prod E_i)})"] & Hom(M', \prod_i E_i)
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são dados pela inversa do isomorfismo do lema A.1.2, é comutativo.

De fato,

$$(\prod Hom(u, 1_{E_i})) \circ \varphi^{-1}(f) = (\prod Hom(u, 1_{E_i})) \circ (\prod Hom(1_M, pr_i))(f) =$$

$$(\prod Hom(u, 1_{E_i}))(\{pr_i \circ f\}_{i \in I}) = \{Hom(u, 1_{E_i})(pr_i \circ f)\}_{i \in I} =$$

$$\{pr_i \circ f \circ u\}_{i \in I} = \{Hom(1_{M'}, pr_i)(f \circ u)\}_{i \in I} =$$

$$(\prod Hom(1_{M'}, pr_i))(\{f \circ u\}_{i \in I}) = (\prod Hom(1_{M'}, pr_i))(\{Hom(u, 1_{\prod E_i})(f)\}_{i \in I}) =$$

$$(\prod Hom(1_{M'}, pr_i)) \circ (\prod Hom(u, 1_{\prod E_i}))(f) = \varphi'^{-1} \circ (\prod Hom(u, 1_{\prod E_i}))(f)$$

A comutatividade da primeira parte do diagrama se demonstra de forma análoga. A conclusão da proposição segue do lema A.1.3 aplicado ao diagrama da afirmação.

Q.E.D.

Corolário A.2.1. *Seja M um A-módulo livre com base finita, se o A-módulo N é injetivo, então o A-módulo $Hom_A(M,N)$ é injetivo.*

Demonstração:

Como M é livre de base finita, temos que existe um inteiro n, tal que $M \simeq A^n$. Dessa forma, temos que:

$$Hom_A(M,N) \simeq Hom(A^n,N) \simeq (Hom_A(A,N))^n \simeq N^n$$

Os dois últimos isomorfismos saindo dos lemas A.1.2 e A.1.1. O resultado segue da proposição A.2.1.

Q.E.D.

Proposição A.2.2. *Seja E um A-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

i) E é injetivo.

ii) Para toda sequência exata

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(M'',E) \xrightarrow{Hom(v,1_E)} Hom(M,E) \xrightarrow{Hom(u,1_E)} Hom(M',E) \longrightarrow 0$$

é exata.

iii) Seja $f : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo injetivo. Para todo homomorfismo $g : M' \longrightarrow E$, existe um homomorfismo h, que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

comutativo.

Demonstração:

$i) \Rightarrow ii)$

Desde que E é injetivo, é suficiente demonstrar que $Hom(v,1_E)$ é injetivo e $Hom(u,1_E)$ é sobrejetivo. Seja $f \in Ker(Hom(v,1_E))$. Temos que:

$$Hom(v,1_E)(f) = 0 \Rightarrow f \circ v = 0 \Rightarrow f \circ v(x) = 0, \forall x \in M \Rightarrow f(y) = 0, \forall y \in M'' \Rightarrow f = 0$$

pois v é sobrejetivo. Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$$

Desde que E é injetivo, segue que a sequência:

$$Hom(M, E) \xrightarrow{Hom(u,1_E)} Hom(M', E) \longrightarrow 0$$

é exata, e portanto $Hom(u, 1_E)$ é sobrejetiva.

$ii) \Rightarrow iii)$

Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} Coker(f) \longrightarrow 0$$

a onde π é o homomorfismo canônico. Temos por hipótese, que a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(Coker(f), E) \xrightarrow{Hom(\pi,1_E)} Hom(M, E) \xrightarrow{Hom(f,1_E)} Hom(M', E) \longrightarrow 0$$

é exata, e portanto $Hom(f, 1_E)$ é sobrejetivo. Uma vez que $g \in Hom(M', E)$, temos que existe $h \in Hom(M, E)$ tal que $g = Hom(f, 1_E)(h) = h \circ f$.

$iii) \Rightarrow i)$

Seja:

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata. Temos que $Hom(u, 1_E) \circ Hom(v, 1_E)(f) = f \circ v \circ u = 0$. Seja $f \in Ker(Hom(u, 1_E))$. Temos que:

$$Hom(u, 1_E)(f) = 0 \Rightarrow f \circ u = 0 \Rightarrow Ker(v) = im(u) \subseteq Ker(f)$$

Dessa forma, podemos definir um homomorfismo $\bar{f}$ de tal forma que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & E \\ \frac{M}{Ker(v)} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

onde φ é o homomorfismo canônico, seja comutativo. Por hipótese, existe $h \in Hom(M'', E)$ que faz o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{M}{Ker(v)} \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & M'' \arrow[dl, "h"] \\
& E &
\end{tikzcd}
$$

onde $\bar{v}$ é o homomorfismo induzido por v, comutar. Assim sendo, temos:

$$Hom(v, 1_E)(h) = h \circ v = h \circ \overline{v} \circ \varphi = \overline{f} \circ \varphi = f$$

.

Q.E.D.

Corolário A.2.2. *Sejam $u : M' \longrightarrow M$ e $v : M' \longrightarrow E$ homomorfismos entre A-módulos, tais que $Ker(u) \subseteq Ker(v)$. Se E é injetivo, então existe um homomorfismo h, que faz o diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & M \arrow[dl, "h"] \\
E &
\end{tikzcd}
$$

comutar.

Demonstração:

Vide parte $iii) \Rightarrow i)$ da proposição acima.

Q.E.D.

Lema A.2.1. *O $\mathbb{Z}$ módulo $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ é injetivo.*

Demonstração:

Pela proposição A.2.2 iii, é suficiente demonstrar que sempre que definirmos um homomorfismo u de um submódulo M' de um $\mathbb{Z}$-módulo M em $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, podemos estender esse homomorfismo para o $\mathbb{Z}$-módulo todo. Seja P o conjunto dos pares (N,v), tais que $M' \subseteq N \subseteq M$ e v restrito a M' é igual a u. A relação $(N', v') \preceq (N, v) \Leftrightarrow N' \subseteq N$ e v restrito a N' é igual a v' é claramente uma relação de ordem parcial sobre P. Seja $\{(N_i, v_i)\}_{i\in I}$ uma cadeia de elementos de P. Defina sobre $N' = \bigcup_{i\in I} N_i$ a função v', tal que restrita a cada N_i é igual a v_i. Observe que v' está bem definida, pois $x, y \in N'$ e $x = y$ então $x \in N_i$ e $y \in N_j$ para algum $(i, j) \in I \times I$. Desde que $\{(N_i, v_i)\}_{i\in I}$ é uma cadeia, segue por exemplo que $(N_i, v_i) \preceq (N_j, v_j)$ e assim, v_j restrito a N_i é igual a v_i, como $y = x \in N_i$, temos que $v_j(y) = v_i(y) = v_i(x)$. Desde que $M' \subseteq N_i \subseteq M$, $\forall i \in I$, segue que $M' \subseteq N' \subseteq M$, como cada v_i estende u, temos que v' também estende u, e assim $(N', v') \in P$. Como $(M', u) \in P$ temos, pelo lema de Zorn, que P possui um elemento (N, v) maximal. Suponha que N é diferente de M e seja x um elemento que esteja em M e não esteja em N.

Afirmação:$N \cap \mathbb{Z}x = 0$

Se não, seja r *o menor inteiro positivo, tal que* $rx \in N$. *Se* $mx \in N$ *e* $m = rp + s$, *com* $0 \leq s < m$ *(lembre-se que* $mx \in N \Leftrightarrow -mx \in N$, *pois* N *é um grupo), então* $mx = (rp)x + sx = p(rx) + sx$ *e* $sx \in N$, *pela minimalidade de* r, *segue que* $s = 0$. *Defina a aplicação* $f : N + \mathbb{Z}x \longrightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, *por* $f(y+mx) = v(y)+\frac{mv(rx)}{r}$, *com* $y \in N$. *Observe que* f *está bem definida, pois* $y_1+m_1x = y_2+m_2x \Rightarrow (m_1 - m_2)x = y_2 - y_1 \in N$. *Pelo que foi argumentado acima, temos* $m_1 - m_2 = rp$, $p \in \mathbb{Z}$, *(se* $m_1 - m_2 < 0$ *faça o argumento com* $m_2 - m_1$*). Assim, temos*

$$v(y_2) - v(y_1) = v((m_1 - m_2)x) = v(p(rx)) = pv(rx) = pr\frac{v(rx)}{r} = (m_1 - m_2)\frac{v(rx)}{r} \Rightarrow$$

$$v(y_1) + m_1\frac{v(rx)}{r} = v(y_2) + m_2\frac{v(rx)}{r}$$

Dessa forma, f *estende* v *e portanto* u, *mas isso é absurdo pela maximalidade de* (N, v).

Seja $n\mathbb{Z}$ *o núcleo do homomorfismo* $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}x$, *tal que* $\varphi(1) = x$. *Defina a aplicação:*

$$g : N + \mathbb{Z}x \longrightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

tal que $g(y+mx) = v(y)+\overline{(\frac{m}{n})}$, *com* $y \in N$ *(se n=0, defina* g *por* $g(y+mx) = v(y)+\overline{m}$*). Observe que* g *está bem definida, pois*

$$y_1 + m_1x = y_2 + m_2x \Rightarrow y_1 - y_2 = (m_2 - m_1)x \Rightarrow y_1 - y_2 = (m_2 - m_1)x = 0 \Rightarrow$$

$$\exists p \in \mathbb{Z}/m_2 - m_1 = np \Rightarrow \frac{m_2}{n} - \frac{m_1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \overline{(\frac{m_1}{n})} = \overline{(\frac{m_2}{n})} \Rightarrow \overline{(\frac{m_1}{n})} + v(y_1) = \overline{(\frac{m_2}{n})} + v(y_2)$$

(resp.

$$y_1 - y_2 = (m_2 - m_1)x = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \overline{m_1} = \overline{m_2} \Rightarrow \overline{m_1} + v(y_1) = \overline{m_2} + v(y_2)$$

)

Dessa forma, g *estende* v *e portanto* u, *mas isso é absurdo pela maximalidade de* (N, v). *Assim sendo, temos* $N = M$.

Q.E.D.

Lema A.2.2. *Se* M *é um* A*-módulo e* F *é um* $\mathbb{Z}$*-módulo, então existe um isomorfismo:*

$$Hom_A(M, Hom_{\mathbb{Z}}(A, F)) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(M, F)$$

de $\mathbb{Z}$*-módulos.*

Demonstração:

Defina:

$$\varphi : Hom_A(M, Hom_{\mathbb{Z}}(A,F)) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M,F)$$

tal que $(\varphi(f))(x) = (f(x))(1)$. φ *é um homomorfismo, pois*

$$\varphi(f+g)(x) = ((f+g)(x))(1) = (f(x)+g(x))(1) =$$

$$f(x)(1) + g(x)(1) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\varphi(f)+\varphi(g))(x)$$

Observe que:

$$\varphi(f) = 0 \Rightarrow \varphi(f)(x) = 0, \forall x \in M \Rightarrow f(x)(1) = 0, \forall x \in M$$

Dessa forma, (lembrando que a estrutura de A-módulo de $Hom_{\mathbb{Z}}(A,F)$ *é tal que (ah)(x)=h(ax)) temos:*

$$f(x)(a) = (af(x))(1) = (f(ax))(1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in M \Rightarrow f = 0$$

e assim φ *é injetiva.*

Se $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(M,F)$, *então defina* $f : M \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(A,F)$, *tal que* $(f(x))(a) = h(ax)$. *Observe que para cada* x, $f(x)$ *é de fato um homomorfismo, pois* $f(x)(a+b) = h((a+b)x) = h(ax)+h(bx) = (f(x))(a)+(f(x))(b)$ *e* f *é um homomorfismo, pois* $(f(x+by))(a) = h(a(x+by)) = h(ax+(ab)y) = (f(x))(a) + (f(y))(ba) = (f(x))(a) + (bf(y))(a) = (f(x)+bf(y))(a)$.

Claramente, $\varphi(f) = h$ *e portanto* φ *é sobrejetivo.*

Q.E.D.

Proposição A.2.3. *O A-módulo* $Hom_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$ *é injetivo.*

Demonstração:

Seja:

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos.

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc}
Hom_{\mathbb{Z}}(M'', \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{Hom(v,1)} & Hom_{\mathbb{Z}}(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{Hom(u,1)} & Hom_{\mathbb{Z}}(M', \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \\
\downarrow \varphi'' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\
Hom_A(M'', Hom_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})) & \xrightarrow{Hom(v,1))} & Hom_A(M, Hom_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})) & \xrightarrow{Hom(u,1)} & Hom_A(M', H
\end{array}$$

onde $H = Hom_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}))$ *e os homomorfismos verticais são as inversas dos isomorfismos do lema A.2.2, é comutativo.*

De fato, temos que:

$$Hom(v, 1_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}}) \circ \varphi''^{-1}(f) = Hom(v, 1_{\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}})((f())(1)) = ((f())(1)) \circ v = ((f \circ v)())(1)$$

onde $(f())(1)$ *denota a aplicação* $x \mapsto (f(x))(1)$. *Por outro lado, temos:*

$$\varphi^{-1} \circ Hom(v, 1_{Hom_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})})(f) = \varphi^{-1}(f \circ v) = ((f \circ v)())(1)$$

A comutatividade da segunda parte do diagrama, se demonstra de forma análoga. Desde que $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *é um* $\mathbb{Z}$ *módulo injetivo, temos que a primeira linha do diagrama é uma sequência exata de* $\mathbb{Z}$*-módulos e homomorfismos. Aplicando o lema A.1.3 a tal diagrama, vemos que a segunda linha é uma sequência exata de* $\mathbb{Z}$*-módulos e homomorfismos, mas se tal sequência é exata como* $\mathbb{Z}$*-módulos, também é exata como* A*-módulos. Dessa forma, segue a proposição.*

Q.E.D.

Proposição A.2.4. *Todo* A*-módulo* M *é isomorfo a um submódulo de um* A*-módulo injetivo.*

Demonstração:

Pelas proposições A.2.1 e A.2.3, temos que $E_A^{Hom_A(M,E_A)}$, *onde* $E_A = Hom_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$, *é um* A*-módulo injetivo. Defina a função:*

$$e_M : M \longrightarrow E_A^{Hom_A(M,E_A)}$$

tal que $e_M(x) = \{\varphi(x)\}_{\varphi \in Hom_A(M,E_A)}$. e_M *é claramente um homomorfismo de* A*-módulos. Seja* $x \in M$, *tal que* $e_M(x) = 0$. *Isso que dizer que* $\varphi(x) = 0$, $\forall \varphi \in Hom_A(M, E_A)$. *Se* $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$, *então, pelo lema A.2.2, existe* $\varphi \in Hom_A(M, E_A)$, *tal que* $f(x) = (\varphi(x))(1) = 0$, *portanto,* x *anula todo elemento de* $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$.

Afirmação: *x=0.*

Caso contrário, seja $n\mathbb{Z}$ *o núcleo do homomorfismo* $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}x$, *tal que* $m \mapsto mx$. *Defina a função:*

$$\eta : \mathbb{Z}x \longrightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

tal que $mx \mapsto \overline{(\frac{m}{n})}$ *(se n=0, faça* $\eta(mx) = \overline{(\frac{m}{2})}$*).* η *está bem definida, pois* $m_1x = m_2x \Rightarrow (m_1 - m_2)x = 0 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}, / m_1 - m_2 = pn \Rightarrow \frac{m_1}{n} - \frac{m_2}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \overline{(\frac{m_1}{n})} = \overline{(\frac{m_2}{n})}$ *(resp.* $m_1x = m_2x \Rightarrow (m_1 - m_2)x = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{2} = \frac{m_2}{2} \Rightarrow \overline{(\frac{m_1}{2})} = \overline{(\frac{m_2}{2})}$*).* η *é claramente um homomorfismo de* $\mathbb{Z}$*-módulos e* $\eta(x) = \overline{(\frac{1}{n})} \neq 0$ *(resp.* $\eta(x) = \overline{(\frac{1}{2})} \neq 0$*), pois como* $x \neq 0$*, temos* $n \neq 1$*. Uma vez que* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *é um* $\mathbb{Z}$*-módulo injetivo, podemos estender* η *a um* $\mathbb{Z}$ *homomorfismo* η' *de* M *em* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$*. Assim sendo, temos* $\eta'(x) = \eta(x) \neq 0$*, o que é um absurdo, pois* x *anula todo* $\mathbb{Z}$ *homomorfismo de* M *em* $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$*.*

Q.E.D.

A.3 Módulos Planos

Definição A.3.1. *Dizemos que um A-módulo à esquerda P é plano, se para toda sequência exata:*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

de A-módulos à direita e homomorfismos, a sequência:

$$M' \otimes_A P \xrightarrow{u \otimes 1_P} M \otimes_A P \xrightarrow{v \otimes 1_P} M'' \otimes_A P$$

é exata.

Proposição A.3.1. *Seja P um A-módulo à esquerda. As seguintes condições são equivalentes:*

i) P é plano.

ii) Para toda sequência exata:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

de A-módulos à direita e homomorfismos, a sequência:

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A P \xrightarrow{u \otimes 1_P} M \otimes_A P \xrightarrow{v \otimes 1_P} M'' \otimes_A P \longrightarrow 0$$

é exata.

iii) Para todo homomorfismo injetivo $u : M' \longrightarrow M$ *de A-módulos à direita o homomorfismo* $u \otimes 1_P : M' \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A P$ *é injetivo.*

Demonstração:

i) $\Rightarrow$ *ii)*

Desde que P é plano, é suficiente demonstrar que $u \otimes 1_P$ *é injetiva e* $v \otimes 1_P$ *é sobrejetiva. Seja* $\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \in M'' \otimes_A P$*. Uma vez que v é sobrejetivo, temos que para cada i existe* $z_i \in M$ *tal que* $x_i = v(z_i)$*. Assim sendo, temos:*

$$\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i = \sum_{i \in I} v(z_i) \otimes y_i = \sum_{i \in I} (v \otimes 1_P)(z_i \otimes y_i) = (v \otimes 1_P)(\sum_{i \in I} z_i \otimes y_i)$$

.

Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$$

como P é plano, temos que a sequência:

$$0 \otimes_A P = 0 \longrightarrow M \otimes_A P \xrightarrow{u \otimes 1_P} M$$

é exata e portanto $u \otimes_A 1_P$ *é injetivo.*

$ii) \Rightarrow iii)$

Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{\pi} Coker(u) \longrightarrow 0$$

onde π *é o homomorfismo canônico. Por hipótese, temos que a sequência:*

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A P \xrightarrow{u \otimes 1_P} M \otimes_A P \xrightarrow{\pi \otimes 1_P} Coker(u) \otimes_A P \longrightarrow 0$$

é exata. Dessa forma, segue que $u \otimes 1_P$ *é injetivo.*

$iii) \Rightarrow i)$

Seja:

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

uma sequência exata de A-módulos à direita. Temos que $(v \otimes 1_P) \circ (u \otimes 1_P) = (v \circ u) \otimes 1_P = 0$.

Reciprocamente, considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow Ker(v) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{v'} im(v) \longrightarrow 0$$

onde i é a injeção canônica e v' *é o homomorfismo que tem por gráfico o mesmo de v. Temos que a sequência:*

$$Ker(v) \otimes_A P \xrightarrow{i \otimes 1_P} M \otimes_A P \xrightarrow{v' \otimes 1_P} im(v) \otimes_A P \longrightarrow 0$$

é exata (isso é verdade independentemente de hipótese sobre P). Concluímos pela hipótese que a sequência:

$$0 \longrightarrow Ker(v) \otimes_A P \xrightarrow{i \otimes 1_P} M \otimes_A P \xrightarrow{v' \otimes 1_P} im(v) \otimes_A P \longrightarrow 0$$

também é exata. Seja $z \in Ker(v \otimes 1_P)$, *temos* $(v \otimes 1_P)(z) = 0$. *Uma vez que, por hipótese,* $i' \otimes 1_P$, *sendo* $i' : im(v) \longrightarrow M''$ *a injeção canônica, é injetiva, segue que* $(v' \otimes 1_P)(z) = 0$. *Dessa forma,* $z \in im(i \otimes 1_P)$, *ou seja, existe uma família de elementos* $x_i \in Ker(v) = im(u)$, *tal que* $z = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$, *onde* $\{x_i \otimes y_i\}_{i \in I}$ *tem suporte finito. Assim sendo, para cada* i *existe* $t_i \in M'$, *tal que* $z = \sum_{i \in i} u(t_i) \otimes y_i = (u \otimes 1_P)(\sum_{i \in I} t_i \otimes y_i)$.

Q.E.D.

Corolário A.3.1. *O* A*-módulo* A *é plano.*

Demonstração:

De acordo com a condição iii) da proposição anterior, basta demonstrar que para todo homomorfismo injetivo $u : M' \longrightarrow M$, *de* A*-módulos à direita, o homomorfismo* $u \otimes 1_P : M' \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A P$ *é injetivo.*

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi'"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ M' \otimes_A A \arrow[r, "u \otimes 1_A"'] & M \otimes_A A \end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são dados pelos isomorfismos $x \mapsto x \otimes_A 1$, *é comutativo.*

$$(u \otimes 1_A) \circ \varphi'(x) = (u \otimes 1_A)(x \otimes_A 1) = (u(x)) \otimes 1 = \varphi(u(x))$$

A proposição segue do lema A.1.3 aplicado a afirmação acima.

Q.E.D.

Lema A.3.1. *Sejam* $\{M_i\}_{i \in I}$ *e* $\{N_k\}_{k \in K}$ *duas famílias de* A*-módulos. Existe um isomorfismo:*

$$\bigoplus_{(i,k) \in I \times K} (M_i \otimes_A N_k) \simeq (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{k \in K} N_k)$$

de A*-módulos.*

Demonstração:

Sejam $j_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ *e* $j'_k : N_k \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} N_k$ *as injeções canônicas. Temos que:*

$$j_i \otimes j'_k : M_i \otimes_A N_k \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{k \in K} N_k)$$

define um homomorfismo. Pela proposição A.1.2, existe um único homomorfismo

$$h : \bigoplus_{(i,k)\in I\times K} (M_i \otimes_A N_k) \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{k\in K} N_k)$$

tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_i \otimes_A N_k \arrow[r, "j_i \otimes j'_k"] \arrow[d, "j''_{ik}"'] & (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{k\in K} N_k) \\
\bigoplus_{(i,k)\in I\times K} (M_i \otimes_A N_k) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

onde j''_{ik} é a injeção canônica, é comutativo.

Defina a função:

$$f : (\bigoplus_{i\in I} M_i) \times (\bigoplus_{k\in K} N_k) \longrightarrow \bigoplus_{(i,k)\in I\times K} (M_i \otimes_A N_k)$$

tal que $f(\{x_i\}_{i\in I}, \{y_k\}_{k\in K}) = \{x_i \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K}$.

Afirmação: *f é A-bilinear.*

Demonstremos, por exemplo que f é A-linear na primeira coordenada.

$$f(\{x_i\}_{i\in I} + a\{x'_i\}_{i\in I}, \{y_k\}_{k\in K}) = f(\{x_i + ax'_i\}_{i\in I}, \{y_k\}_{k\in K}) = \{(x_i + ax'_i) \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K} =$$

$$\{x_i \otimes y_k + a(x'_i \otimes y_k)\}_{(i,k)\in I\times K} = \{x_i \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K} + a\{x'_i \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K} =$$

$$f(\{x_i\}_{i\in I}, \{y_k\}_{k\in K}) + af(\{x'_i\}_{i\in I}, \{y_k\}_{k\in K})$$

Pela propriedade universal do produto tensorial, podemos definir um homomorfismo g, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{i\in I} M_i) \times (\bigoplus_{k\in K} N_k) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \bigoplus_{(i,k)\in I\times K} (M_i \otimes_A N_k) \\
(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_A (\bigoplus_{k\in K} N_k) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

onde φ é o homomorfismo $(\{x_i\}_{i\in I}, \{y_k\}_{k\in K}) \mapsto \{x_i\}_{i\in I} \otimes \{y_k\}_{k\in K}$, seja comutativo. Observe que g e h são inversas uma da outra. De fato,

$$h \circ g(\{x_i\}_{i\in I} \otimes \{y_k\}_{k\in K}) = h(\{x_i \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K}) = \sum_{(i,k)\in I\times K} j_i(x_i) \otimes j'_k(y_k) =$$

$$(\sum_{i\in I} j_i(x_i)) \otimes (\sum_{k\in K} j'_k(y_k)) = \{x_i\}_{i\in I} \otimes \{y_k\}_{k\in K}$$

Por outro lado,

$$g \circ h(\{x_i \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K}) = g(\sum_{(i,k)\in I\times K} j_i(x_i) \otimes j'_k(y_k)) = \sum_{(i,k)\in I\times K} g(j_i(x_i) \otimes j'_k(y_k)) =$$

$$\sum_{(i,k)\in I\times K} j''_{ik}(x_i \otimes y_k) = \{x_i \otimes y_k\}_{(i,k)\in I\times K}$$

Q.E.D.

Proposição A.3.2. *Seja $\{P_i\}_{i\in I}$ uma família de A-módulos à esquerda. Para cada i, P_i é plano se, e somente se, $\bigoplus_{i\in I} P_i$ é plano.*

Demonstração:

Seja $u : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo injetivo de A-módulos à direita.

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}(M' \otimes_A P_i) \arrow[r, "\oplus(u\otimes 1_{P_i})"] \arrow[d, "\eta'"'] & \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_A P_i) \arrow[d, "\eta"] \\
M' \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} P_i) \arrow[r, "u\otimes 1_{(\oplus P_i)}"'] & M \otimes_A (\bigoplus_{i\in I} P_i)
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são dados pelas inversas dos isomorfismos $x \otimes \{y_i\}_{i\in I} \mapsto \{x \otimes y_i\}_{i\in I}$, é comutativo.

$$\eta^{-1} \circ (u \otimes 1_{(\oplus P_i)})(x \otimes \{y_i\}_{i\in I}) = \eta^{-1}(u(x) \otimes \{y_j\}_{i\in I}) =$$

$$\{u(x) \otimes y_i\}_{i\in I} = \{(u \otimes 1_{P_i})(x \otimes y_i)\}_{i\in I} = (\oplus(u \otimes 1_{P_i}))(\{x \otimes y_i\}_{i\in I}) =$$

$$(\oplus(u \otimes 1_{P_i})) \circ \eta'^{-1}(x \otimes \{y_i\}_{i \in I})$$

Pela proposição A.3.1, temos que para cada i o homomorfismo $u \otimes 1_{P_i}$ é injetivo. Segue do corolário A.1.4 que $\oplus(u \otimes 1_{P_i})$ é injetivo se, e somente se $u \otimes 1_{P_i}$ o é. Assim sendo, A proposição seque do lema A.1.3 aplicado ao diagrama da afirmação.

Q.E.D.

Proposição A.3.3. *Seja M um A-módulo livre com base finita, se o A-módulo N plano, então o A-módulo*
$Hom_A(M,N)$ é plano.

Demonstração:

Totalmente análoga a da proposição A.1.8.

Q.E.D.

Corolário A.3.2. *Todo A-módulo livre é plano.*

Demonstração:

De fato, todo A-módulo livre é isomorfo a uma soma direta do A-módulo plano A.

Q.E.D.

Corolário A.3.3. *Todo A-módulo projetivo é plano.*

Demonstração:

Sejam P um A-módulo projetivo e $u : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo injetivo de A-módulos à direita. Pela proposição A.1.9, temos que existe um conjunto I e um A-módulo Q, tal que $A^{(I)} \simeq P \oplus Q$. Pela afirmação da proposição A.3.2, temos que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes_A (P \oplus Q) \arrow[r, "u \otimes 1_{(P \oplus Q)}"] \arrow[d, "\eta'^{-1}"] & M \otimes_A (P \oplus Q) \arrow[d, "\eta^{-1}"] \\
(M' \otimes_A P) \oplus (M' \otimes_A Q) \arrow[r, "(u \otimes 1_P) \oplus (u \otimes 1_Q)"] & (M \otimes_A P) \oplus (M \otimes_A Q)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Do corolário anterior, temos que a primeira linha (vertical) desse diagrama é injetiva. Segue do lema A.1.3 que a segunda também é.

Afirmação: *O diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(M'\otimes_A P)\oplus(M'\otimes_A Q) \arrow[r, "(u\otimes 1_P)\oplus(u\otimes 1_Q)"] \arrow[d, "pr'_1"'] & (M\otimes_A P)\oplus(M\otimes_A Q) \arrow[d, "pr_1"] \\
M'\otimes_A P \arrow[r, "u\otimes 1_P"'] & M\otimes_A P
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são dados pelas projeções canônicas, é comutativo.
De fato,

$$(u\otimes 1_P)\circ pr'_1(x\otimes z, y\otimes_A t) = (u\otimes 1_P)(x\otimes_A z) = (u(x))\otimes z = pr_1((u(x))\otimes z,(u(y))\otimes t) =$$

$$pr_1\circ((u\otimes 1_P)\oplus(u\otimes 1_Q))(x\otimes z, y\otimes t)$$

A comutatividade de tal diagrama, segue por linearidade. O Resultado segue da proposição A.3.1, aplicando o scholium A.1.1 a tal diagrama.

Q.E.D.

A.4 Módulos Graduados

Definição A.4.1. *Sejam G um grupo e Δ um conjunto, uma graduação de tipo Δ sobre G, é uma família $\{G_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de subgrupos de G, tal que o homomorfismo $\oplus i_\delta : \bigoplus_{\delta\in\Delta} G_\delta \longrightarrow G$, definido pela proposição A.1.2 a partir das injeções canônicas $i_\delta : G_\delta \longrightarrow G$ (vendo G_δ e G como $\mathbb{Z}$-módulos), é bijetivo. Ao par $(G,\{G_\delta\}_{\delta\in\Delta})$, chamamos de grupo graduado de tipo Δ.*

Um elemento $x\in G_\delta$, será dito homogêneo de grau δ. No que segue, identificaremos $\bigoplus_{\delta\in\Delta} G_\delta$ e G por meio do isomorfismo $\oplus i_\delta$, observe que, com essa identificação, todo elemento de G pode ser escrito de forma única como soma de elementos homogêneos (de graus distintos). Por abuso de linguagem, quando nos referirmos ao grupo graduado $G=\bigoplus_{\delta\in\Delta} G_\delta$ (ou apenas G, se nenhuma confusão puder ser causada), estaremos nos referindo a $(G,\{G_\delta\}_{\delta\in\Delta})$.

Definição A.4.2. *Sejam Δ um monóide comutativo, A um anel e $\{A_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ uma graduação de tipo Δ sobre o grupo aditivo A. Dizemos que $\{A_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ é compatível com a estrutura de anel de A, se para todo $(\lambda,\mu)\in\Delta\times\Delta$, temos:*

$$A_\lambda A_\mu \subseteq A_{\lambda+\mu}$$

Ao par $(A,\{A_\delta\}_{\delta\in\Delta})$, formado por um anel A e uma graduação de tipo Δ, compatível com a estrutura de anel de A, chamamos de anel graduado de tipo Δ.

Proposição A.4.1. *Se* $A = \bigoplus_{\delta\in\Delta} A_\delta$ *é um anel graduado e todo elemento de* Δ *é regular, então* A_0*, onde 0 é o elemento neutro do monóide* Δ*, é um subanel de* A*.*

Demonstração:

Desde que A_0 *é um subgrupo de* A *e* $A_0A_0 \subseteq A_{0+0} = A_0$*, é suficiente demonstrar que* $1 \in A_0$*. Escrevamos* $1 = \sum_{\delta\in\Delta} e_\delta$*, tal que* $e_\delta \in A_\delta$*. Temos que:*

$$\sum_{\eta\in\Delta} e_\eta = 1 = 1.1 = \sum_{\mu\in\Delta} e_\mu \sum_{\delta\in\Delta} e_\delta = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{\mu\in\Delta} e_\delta e_\mu = \sum_{\eta\in\Delta}\Big(\sum_{\delta+\mu=\eta} e_\mu e_\delta\Big)$$

Desde que todo elemento de A *é escrito de modo único como soma de elementos homogêneos, temos que:*

$$e_\eta = \sum_{\mu+\delta=\eta} e_\mu e_\delta$$

para todo $\eta \in \Delta$*. Fazendo* $\eta = \delta$*, temos que* $\mu = 0$*, pois* μ *é regular. Dessa forma, segue que* $e_\delta = e_0 e_\delta$*,* $\forall \delta \in \Delta$*. Assim sendo, segue que:*

$$1 = \sum_{\delta\in\Delta} e_\delta = \sum_{\delta\in\Delta} e_0 e_\delta = e_0 \sum_{\delta\in\Delta} e_\delta = e_0.1 = e_0 \in A_0$$

Q.E.D.

Definição A.4.3. *Sejam* Δ *um monóide comutativo,* A *um anel (comutativo) graduado de tipo* Δ *e* M *um* A*-módulo à esquerda. Uma graduação* $\{M_\delta\}_{\delta\in\Delta}$*, de tipo* Δ *sobre o grupo aditivo* M *é dita compatível com a estrutura de* A*-módulo de* M*, se* $\forall(\lambda,\mu) \in \Delta\times\Delta$*, temos:*

$$A_\delta M_\mu \subseteq M_{\delta+\mu}$$

Ao par $(M, \{M_\delta\}_{\delta\in\Delta})$*, formado pelo* A*-módulo à esquerda* M *e por uma graduação compatível com a estrutura de* A*-módulo de* M*, chamamos de* A*-módulo à esquerda graduado.*

De maneira totalmente análoga se define um A*-módulo à direita graduado. Por abuso de linguagem, quando falarmos simplesmente de* A*-módulo graduado, estaremos nos referindo a* A*-módulo à esquerda graduado.*

Exemplo A.4.1. *Sejam* Δ *um monóide comutativo e* $A = \bigoplus_{\delta\in\Delta} A_\delta$ *um anel (comutativo) graduado. Se munirmos* A_0 *da graduação trivial, ou seja,* $A_0 = \bigoplus_{\delta\in\Delta} A'_\delta$*, tal que* $A'_0 = A_0$ *e* $A'_\delta = 0$*,* $\forall\delta \neq 0$*, então, de acordo com a proposição A.4.1,* A *é um* A_0*-módulo graduado.*

Definição A.4.4. *Sejam* $A = \bigoplus_{\delta\in\Delta} A_\delta$ *e* $A' = \bigoplus_{\mu\in\Delta} A'_\mu$ *dois anéis graduados sobre um monóide comutativo* Δ*. Um homomorfismo* h *entre esses dois anéis é dito graduado se* $h(A_\delta) \subseteq A'_\delta$*,* $\forall\delta \in$

Δ. *Se* $M = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ *e* $M' = \bigoplus_{\mu\in\Delta} M'_\mu$ *são* A*-módulos graduados, ambos de tipo* Δ*, então um homomorfismo* f *entre esses* A*-módulos é dito graduado de grau* $\delta \in \Delta$*, se para todo* $\mu \in \Delta$*, nós tivermos* $f(M_\mu) \subseteq M'_{\mu+\delta}$*.* f *é dito um isomorfismo entre esses dois* A*-módulos graduados se é um homomorfismo de grau zero, bijetivo.*

Proposição A.4.2. *Sejam* $M = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ *e* $M' = \bigoplus_{\mu\in\Delta} M'_\mu$ *dois módulos graduados sobre o anel graduado* $A = \bigoplus_{\lambda\in\Delta} A_\lambda$*. Se* $h : M' \longrightarrow M$ *é um isomorfismo entre esses* A*-módulos graduados, então para todo* $\delta \in \Delta$*, a restrição* h_δ *de* h *a* M'_δ *é um isomorfismo de grupos. Reciprocamente, se* h *é um homomorfismo de* A*-módulos, tal que sua restrição* h_δ *a* M'_δ *é um isomorfismo entre os grupos* M'_δ *e* M_δ*, para todo* $\delta \in \Delta$*, então* h *é um isomorfismo de* A*-módulos graduados.*

Demonstração:

Desde que $h_\delta(M'_\delta) = h(M'_\delta) \subseteq M_\delta$ *para todo* $\delta \in \Delta$ *e* h *é injetivo, é suficiente demonstrar que* $h_\delta(M'_\delta) = M_\delta$*,* $\forall \delta \in \Delta$*. Seja* $y_\delta \in M_\delta$*. Desde que* h *é bijetiva, temos que existe* $x = \sum_{\mu\in\Delta} x_\mu \in M'$*, tal que* $x_\mu \in M'_\mu$*,* $\forall \mu \in \Delta$ *e* $y_\delta = h(x) = h(\sum_{\mu\in\Delta} x_\mu) = \sum_{\mu\in\Delta} h(x_\mu)$*. Uma vez que* $h(x_\mu) \in M_\mu$*,* $\forall \mu \in \Delta$ *e cada elemento de* M *é escrito de maneira única como soma de elementos homogêneos, segue que* $y_\delta = h(x_\delta) = h_\delta(x_\delta)$*.*

Para demonstrar a recíproca, é suficiente demonstrar que h *é bijetiva. Seja* $h(\sum_{\mu\in\Delta} x_\mu) = h(\sum_{\delta\in\Delta} y_\delta)$*, temos que:*

$$\sum_{\mu\in\Delta} h(x_\mu) = \sum_{\delta\in\Delta} h(y_\delta) \Rightarrow \sum_{\mu\in\Delta} h_\mu(x_\mu) = \sum_{\delta\in\Delta} h_\delta(y_\delta) \Rightarrow h_\delta(x_\delta) = h_\delta(y_\delta), \forall \delta \in \Delta \Rightarrow$$

$$x_\delta = y_\delta, \forall \delta \in \Delta \Rightarrow \sum_{\mu\in\Delta} x_\mu = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta$$

Seja agora $y \in M$*. Escrevamos* $y = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta$*, onde* $y_\delta \in M_\delta$*,* $\forall \delta \in \Delta$*. Por hipótese, temos que para cada* δ*, existe* $x_\delta \in M'_\delta$*, tal que* $y_\delta = h_\delta(x_\delta)$ *(se* $\gamma \notin Sup(\{y_i\}_{\delta\in\Delta})$ *tome* $x_\gamma = 0$*). Assim sendo, temos que:*

$$y = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta = \sum_{\delta\in\Delta} h_\delta(x_\delta) = \sum_{\delta\in\Delta} h(x_\delta) = h(\sum_{\delta\in\Delta} x_\delta)$$

Q.E.D.

Observe que se A *possui a graduação trivial, então para todo* $\delta \in \Delta$*, temos que* $AM_\delta = A_0 M_\delta \subseteq M_{0+\delta} = M_\delta$ *e dessa forma, cada* M_δ *é um submódulo de* M*. Assim sendo, podemos trocar na proposição anterior, isomorfismo de grupos por isomorfismo de* A*-módulos.*

Sejam Δ um grupo comutativo e $M = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ um $A = \bigoplus_{\mu\in\Delta} A_\mu$ módulo graduado, de tipo Δ. Dado $\lambda \in \Delta$, construiremos um A-módulo graduado $M(\lambda)$, como segue:

$$M(\lambda) = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M'_\delta$$

tal que $M'_\delta = M_{\delta+\lambda}$. Observe que tal graduação é de fato compatível com a estrutura de A-módulo de M, pois $A_\mu M'_\delta = A_\mu M_{\delta+\lambda} \subseteq M_{\mu+\delta+\lambda} = M'_{\mu+\delta}$. No mais, $\{M'_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, é de fato uma graduação de tipo Δ, pois sendo Δ um grupo e fazendo $\mu = \delta+\lambda$, quando μ varia sobre Δ, δ assume todos os valores possíveis e vice versa. Assim sendo, temos $\bigoplus_{\delta\in\Delta} M'_\delta = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_{\delta+\lambda} = \bigoplus_{\mu\in\Delta} M_{(\mu-\lambda)+\lambda} = \bigoplus_{\mu\in\Delta} M_\mu = M$. A graduação $\{M'_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ é dita obtida da graduação $\{M_\mu\}_{\mu\in\Delta}$ por deslocamento de grau λ.

Sejam $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos homogêneos do A-módulo graduado M, sobre o grupo comutativo Δ e λ_i o grau de x_i, para cada $i \in I$. Para cada $(\delta, i) \in \Delta \times I$, defina o homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\eta_{i\delta} : A_{\delta-\lambda_i} \longrightarrow M_\delta$, tal que $\eta_{i\delta}(a_{\delta-\lambda_i}) = a_{\delta-\lambda_i} x_i$. Observe que $\eta_{i\delta}$ está bem definido, pois $A_{\delta-\lambda_i} M_{\lambda_i} \subseteq M_\delta$.

Pela proposição A.1.2, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulo η_δ, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_{\delta-\lambda_i} \arrow[r, "\eta_{i\delta}"] \arrow[d, "j_{\delta i}"'] & M_\delta \\
\bigoplus_{i\in I} A_{\delta-\lambda_i} \arrow[ur, "\eta_\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $j_{\delta i}$ é a injeção canônica, é comutativo. Pelo corolário A.1.3, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos η, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L_\delta \arrow[r, "\eta_\delta"] \arrow[d, "j_\delta"'] & M_\delta \arrow[d, "j'_\delta"] \\
\bigoplus_{\delta\in\Delta} L_\delta \arrow[r, "\eta"'] & \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são as injeções canônicas e $L_\delta = \bigoplus_{i\in I} A_{\delta-\lambda_i}$, é comutativo.

Proposição A.4.3. *A graduação $\{L_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ do A-módulo $L = \bigoplus_{\delta\in\Delta} L_\delta$ é compatível com sua estrutura de A-módulo e o homomorfismo η é um A-homomorfismo graduado de grau zero.*

Demonstração:

Sejam $a_\mu \in A_\mu$ *e* $y_\delta = \{x_{\delta-\lambda_i}\}_{i\in I} \in L_\delta$, *tal que* $x_{\delta-\lambda_i} \in A_{\delta-\lambda_i}$. *Temos que* $a_\mu y_\delta = a_\mu\{x_{\delta-\lambda_i}\}_{i\in I} = \{a_\mu x_{\delta-\lambda_i}\}_{i\in I}$. *Desde que A é um anel graduado, temos que* $a_\mu x_{\delta-\lambda_i} \in A_{\mu+\delta-\lambda_i}$, $\forall i \in I$. *Dessa forma, segue que* $a_\mu y_\delta \in \bigoplus_{i\in I} A_{\mu+\delta-\lambda_i} = L_{\mu+\delta}$.

$$\eta(a_\mu j_\delta(y_\delta)) = \eta(j_{\mu+\delta}(a_\mu y_\delta)) = j'_{\mu+\delta}\circ\eta_{\mu+\delta}(a_\mu y_\delta) = j'_{\mu+\delta}\circ\eta_{\mu+\delta}(a_\mu \sum_{i\in I} j_{\delta i}(x_{\delta-\lambda_i})) =$$

$$j'_{\mu+\delta}\circ\eta_{\mu+\delta}(\sum_{i\in I} a_\mu j_{\delta i}(x_{\delta-\lambda_i})) = \sum_{i\in I} j'_{\mu+\delta}\circ\eta_{\mu+\delta}(j_{\mu+\delta,i}(a_\mu x_{\delta-\lambda_i})) =$$

$$\sum_{i\in I} j'_{\mu+\delta}\circ\eta_{i,\mu+\delta}(a_\mu x_{\delta-\lambda_i}) = \sum_{i\in I} j'_{\mu+\delta}(a_\mu x_{\delta-\lambda_i} e_i) = \sum_{i\in I} a_\mu j'_\delta(x_{\delta-\lambda_i} e_i) =$$

$$a_\mu j'_\delta(\sum_{i\in I} x_{\delta-\lambda_i} e_i) = a_\mu j'_\delta(\sum_{i\in I} \eta_{i\delta}(x_{\delta-\lambda_i})) = a_\mu j'_\delta(\sum_{i\in I} \eta_\delta\circ j_{\delta i}(x_{\delta-\lambda_i})) =$$

$$a_\mu j'_\delta\circ\eta_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta i}(x_{\delta-\lambda_i})) = a_\mu \eta(j_\delta(y_\delta))$$

onde $\eta_{i\delta}(b_{\delta-\lambda_i}) = e_i$. *Como todo elemento de L pode ser escrito como soma de* $j_\delta(y_\delta)$, $\delta \in \Delta$ *e todo elemento de A como soma de* a_μ, $\mu \in \Delta$, *o fato de* η *ser A-linear, segue da* $\mathbb{Z}$*-linearidade das aplicações consideradas. Que* η *é graduada de grau zero, segue por construção.*

Q.E.D.

Definição A.4.5. *Seja M um A-módulo graduado. Dizemos que M é um A-módulo graduado livre, se para alguma família* $\{e_i\}_{i\in I}$ *de elementos homogêneos de M, o homomorfismo* η, *associado a essa família, é um isomorfismo de A-módulos graduados.*

Proposição A.4.4. *Um A-módulo graduado M sobre um grupo comutativo* Δ *é um A-módulo graduado livre se, e somente se, ele é um A-módulo livre com uma base formada por elementos homogêneos.*

Demonstração:

Sejam $\{e_i\}_{i\in I}$ *uma família de elementos homogêneos de M que faz o homomorfismo* η *bijetivo e* $\{a_i\}_{i\in I}$ *uma família de elementos de A de suporte finito, tal que* $\sum_{i\in I} a_i e_i = 0$. *Escrevamos para cada i,* $a_i = \sum_{\mu\in\Delta} a_{\mu,i}$, *onde* $a_{\mu,i} \in A_\mu$, $\forall \mu \in \Delta$. *Observe que fazendo* $\delta = \mu + \lambda_i$, *onde para cada i,* λ_i *é o grau de* e_i, *quando* μ *percorre* Δ, δ *assume todos os valores possíveis e vice versa, pois* Δ *é um grupo. Assim sendo, temos* $a_i = \sum_{\mu\in\Delta} a_{\mu,i} = \sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta-\lambda_i,i}$, *para cada* $i \in I$. *Dessa forma, temos:*

$$\sum_{i\in I}(\sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta-\lambda_i,i})e_i = 0 \Rightarrow \sum_{i\in I}\sum_{\delta\in\Delta}\eta_{i,\delta}(a_{\delta-\lambda_i,i}) = 0 \Rightarrow \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I}\eta_{i,\delta}(a_{\delta-\lambda_i,i}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{\delta\in\Delta}\eta_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})) = 0 \Rightarrow \eta_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})) = 0, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow$$

$$j'_\delta\circ\eta_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})) = 0, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow \eta(j_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i}))) = 0, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow$$

$$j_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})) = 0, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow \sum_{i\in I} j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})) = 0, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow$$

$$\{a_{\delta-\lambda_i,i}\}_{(i,\delta)\in I\times\Delta} = 0 \Rightarrow a_{\delta-\lambda_i,i} = 0, \forall i\in I, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow$$

$$a_{\mu,i} = 0, \forall(i,\mu)\in I\times\Delta \Rightarrow a_i = 0, \forall i\in I$$

Seja $y = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta \in M$*, com* $y_\delta \in M_\delta$*,* $\forall\delta\in\Delta$*. Desde que* η *é bijetivo, existe* $x = \sum_{\delta\in\Delta} j_\delta(x_\delta)$*, com* $x_\delta\in L_\delta$*,* $\forall\delta\in\Delta$*, tal que* $\sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(y_\delta) = \eta(x)$*. Assim sendo, temos:*

$$\sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(y_\delta) = \eta(\sum_{\delta\in\Delta} j_\delta(x_\delta)) = \sum_{\delta\in\Delta}\eta(j_\delta(x_\delta)) = \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta\circ\eta_\delta(x_\delta)$$

Escrevendo $x_\delta = \sum_{i\in I} j_{\delta i}(a_{\delta-\lambda_i})$*, temos:*

$$\sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(y_\delta) = \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta\circ\eta_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta i}(a_{\delta-\lambda_i})) = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I} j'_\delta\circ\eta_\delta(j_{\delta i}(a_{\delta-\lambda_i})) =$$

$$\sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I} j'_\delta\circ\eta_{i,\delta}(a_{\delta-\lambda_i}) = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I} j'_\delta(a_{\delta-\lambda_i}e_i) = \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(\sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i}e_i) \Rightarrow$$

$$j'_\delta(y_\delta) = j'_\delta(\sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i}e_i), \forall\delta\in\Delta \Rightarrow y_\delta = \sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i}e_i, \forall\delta\in\Delta \Rightarrow$$

$$y = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i}e_i \Rightarrow y = \sum_{i\in I}(\sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta-\lambda_i})e_i$$

Segue das proposições A.1.3 e A.1.4 que $\{e_i\}_{i\in I}$ *é uma base de M.*

Reciprocamente, seja $\{e_i\}_{i\in I}$ *uma base de M formada de elementos homogêneos. Seja* $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta} \in L$*, tal que* $\eta(\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}) = 0$*, temos que:*

$$\eta(\sum_{\delta\in\Delta} j_\delta(x_\delta)) = 0 \Rightarrow \sum_{\delta\in\Delta} \eta(j_\delta(x_\delta)) = 0 \Rightarrow \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta \circ \eta_\delta(x_\delta) = 0$$

Escrevendo $x_\delta = \sum_{i\in I} j_{\delta i}(a_{\delta-\lambda_i})$*, temos:*

$$\sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta \circ \eta_\delta(\sum_{i\in I} j_{\delta i}(a_{\delta-\lambda_i})) = 0 \Rightarrow \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(\sum_{i\in I} \eta_\delta \circ j_{\delta i}(a_{\delta-\lambda_i})) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(\sum_{i\in I} \eta_{i\delta}(a_{\delta-\lambda_i})) = 0 \Rightarrow \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(\sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i} e_i) = 0 \Rightarrow$$

$$j'_\delta(\sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i} e_i) = 0, \forall\delta \in \Delta \Rightarrow \sum_{i\in I} a_{\delta-\lambda_i} e_i = 0, \forall\delta \in \Delta \Rightarrow$$

$$a_{\delta-\lambda_i} = 0, \forall(i,\delta) \in I \times \Delta \Rightarrow x_\delta = 0, \forall\delta \in \Delta \Rightarrow \{x_\delta\}_{\delta\in\Delta} = 0$$

Seja $y = \sum_{\delta\in\Delta} j'_\delta(y_\delta) \in \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$*, temos que existe uma família* $\{a_i\}_{i\in I}$ *de elementos de A, de suporte finito, tal que* $\sum_{\delta\in\Delta} y_\delta = \sum_{i\in I} a_i e_i$*. Se para cada* $i \in I$*, nós escrevermos* $a_i = \sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta-\lambda_i,i}$*, com* $a_{\delta-\lambda_i,i} \in A_{\delta-\lambda_i}$*, então temos:*

$$\sum_{\delta\in\Delta} y_\delta = \sum_{i\in I}\sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta-\lambda_i,i} e_i = \sum_{i\in I}\sum_{\delta\in\Delta} \eta_{i\delta}(a_{\delta-\lambda_i,i}) = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I} \eta_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i}) \Rightarrow$$

$$y_\delta = \sum_{i\in I} \eta_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i}), \forall\delta \in \Delta \Rightarrow j'_\delta(y_\delta) = j'_\delta(\sum_{i\in I} \eta_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})), \forall\delta \in \Delta \Rightarrow$$

$$j'_\delta(y_\delta) = \sum_{i\in I} j'_\delta(\eta_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})), \forall\delta \in \Delta \Rightarrow j'_\delta(y_\delta) = \sum_{i\in I} \eta(j_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})), \forall\delta \in \Delta \Rightarrow$$

$$j'_\delta(y_\delta) = \eta(\sum_{i\in I} j_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})), \forall\delta \in \Delta \Rightarrow y = \sum_{\delta\in\Delta} \eta(\sum_{i\in I} j_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i})) \Rightarrow$$

$$y = \eta(\sum_{\delta\in\Delta}\sum_{i\in I} j_\delta \circ j_{\delta,i}(a_{\delta-\lambda_i,i}))$$

Q.E.D.

Definição A.4.6. *Sejam M um A-módulo graduado de tipo Δ, com graduação $\{M_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ e N um submódulo de M. Dizemos que N é um submódulo graduado de M se a família $\{N\cap M_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ define uma graduação sobre N.*

Proposição A.4.5. *Sejam $M = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ um A-módulo graduado e N um submódulo de M. As seguintes condições são equivalentes:*

i) N é um submódulo graduado de M.

ii) Toda componente homogênea de um elemento de N pertence a N.

iii) N é gerado por elementos homogêneos.

Demonstração:

$i) \Rightarrow ii)$

Seja $y \in N$ escrevamos $y = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta$, tal que $y_\delta \in M_\delta$. Desde que $N = \bigoplus_{\delta\in\Delta}(N\cap M_\delta)$, existe uma família $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de suporte finito, tal que $x_\delta \in N\cap M_\delta$, $\forall\delta\in\Delta$ e $y = \sum_{\delta\in\Delta} x_\delta$. Como todo elemento de M é escrito de maneira única como soma de elementos homogêneos, segue que $y_\delta = x_\delta \in N$, $\forall\delta\in\Delta$.

$ii) \Rightarrow iii)$

Seja $\{e_i\}_{i\in I}$ a família das componentes homogêneas dos elementos de N. Por hipótese, cada e_i pertence a N e claramente tal família gera N.

$iii) \Rightarrow i)$

Desde que $A_\mu(N\cap M_\delta) \subseteq N$, pois N é um submódulo e $A_\mu(N\cap M_\delta) \subseteq A_\mu M_\delta \subseteq M_{\mu+\delta}$, é suficiente demonstrar que $N = \bigoplus_{\delta\in\Delta}(N\cap M_\delta)$, ou seja, cada elemento de N se escreve de modo único como soma de elementos $x_\delta \in N\cap M_\delta$. Seja $y\in N$, por hipótese $y = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta$, com $y_\delta \in N$ homogêneo, ou seja, $y_\delta \in N\cap M_\delta$, $\forall\delta\in\Delta$. Seja agora $y = \sum_{\delta\in\Delta} x_\delta$, com $x_\delta \in N\cap M_\delta$. Desde que tanto os x_δ quanto os y_δ são elementos homogêneos de M e y se escreve como soma dos dois, segue que $x_\delta = y_\delta$, $\forall\delta\in\Delta$.

Q.E.D.

Sejam $M = \bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ um A-módulo graduado e N um submódulo graduado de M. Denote $N_\delta = N\cap M_\delta$. Pelo corolário A.1.4, temos que $\frac{M}{N} = \dfrac{\bigoplus_{\delta\in\Delta} M_\delta}{\bigoplus_{\delta\in\Delta} N_\delta} \simeq \bigoplus_{\delta\in\Delta}\dfrac{M_\delta}{N_\delta}$. Identificaremos esses dois módulos via esse isomorfismo. A graduação $\{\frac{M_\delta}{N_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ é compatível com a estrutura de A-módulo *de $\frac{M}{N}$. De fato, temos que $\frac{M_\delta}{N_\delta} = \frac{M_\delta}{N \cap M_\delta} \simeq \frac{N+M_\delta}{N}$. Sejam $a_\mu \in A_\mu$, $\overline{y + x_\delta} \in \frac{N+M_\delta}{N}$, com $y \in N$ e $x_\delta \in M_\delta$. Temos que $a_\mu(\overline{y + x_\delta}) = \overline{a_\mu y + a_\mu x_\delta}$, como $a_\mu y \in N$ e $a_\mu x_\delta \in M_{\delta+\mu}$, segue que $\overline{a_\mu y + a_\mu x_\delta} \in \frac{N+M_{\delta+\mu}}{N}$. Uma vez que o isomorfismo $\frac{M_\delta}{N \cap M_\delta} \simeq \frac{N+M_\delta}{N}$ associa classe em classe, segue o resultado.*

Definição A.4.7. *Sejam M um A módulo graduado e N um submódulo graduado de M. A graduação*
$\{\frac{M_\delta}{N_\delta}\}_{\delta \in \Delta}$ é chamada graduação quociente de M por N.

Proposição A.4.6. *Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo graduado de grau $\delta \in \Delta$ entre os A-módulos graduados M e N. Temos que:*

i) $Im(f)$ é um submódulo graduado de N.

ii) Se δ é regular, então $Ker(f)$ é um submódulo graduado de M.

Demonstração:

i)

Seja $\{e_i\}_{i \in I}$ a família dos elementos homogêneos de M. Desde que f é graduado, segue que $\{f(e_i)\}_{i \in I}$ é uma família de elementos homogêneos de N. Seja $y = f(x) \in im(f)$. Escrevamos x como soma de elementos homogêneos $x = \sum_{\mu \in \Delta} x_\mu$. Assim sendo, temos:

$$y = f(x) = f(\sum_{\mu \in \Delta} x_\mu) = \sum_{\mu \in \Delta} f(x_\mu)$$

Portanto, a família $\{f(e_i)\}_{i \in I}$ gera $im(f)$.

ii)

Seja $y \in Ker(f)$ e escrevamos $y = \sum_{\mu \in \Delta} y_\mu$, como soma de elementos homogêneos. Temos que:

$$0 = f(y) = f(\sum_{\mu \in \Delta} y_\mu) = \sum_{\mu \in \Delta} f(y_\mu)$$

Agora observe que $f(y_\mu)$ tem grau $\delta + \mu$, se $f(y_\eta)$ tem grau $\delta + \mu$, então $\delta + \mu = \delta + \eta \Rightarrow \mu = \eta$, pois δ é regular. Assim sendo, se $\mu \neq \eta$, então os graus de $f(y_\delta)$ e $f(y_\eta)$ são distintos, como todo elemento é escrito de maneira única como soma de elementos homogêneos (distintos), segue que $f(y_\mu) = 0$, $\forall \mu \in \Delta$. Dessa forma, segue que $y_\mu \in Ker(f)$, $\forall \mu \in \Delta$.

Q.E.D.

Segue da proposição acima que se o grau de f é zero, então $\frac{M}{Ker(f)}$ e $im(f)$ são dois A-módulos graduados isomorfos.

Apêndice B

Álgebra Homológica

B.1 Complexos de A-módulos

Definição B.1.1. *Um complexo à esquerda de A-módulos é um par (C,d), formado de um A-módulo à esquerda graduado de tipo* $\mathbb{Z}$ *e um endomorfismo de grau -1, tal que* $d \circ d = 0$. *O endomorfismo d é dito ser a diferencial do complexo (C,d).*

Por abuso de linguagem, quando nos referirmos ao complexo C de diferencial d estaremos falando sobre o complexo (C,d), em muitos casos omitiremos a diferencial d. De modo totalmente análogo se define um complexo à direita de A-módulos. Quando falarmos de um complexo (resp. módulo) sem nenhuma especificação, estaremos nos referindo a complexo (resp. módulo) à esquerda. No que se segue, a graduação do anel A será a trivial. Segue da definição que um complexo é equivalente a uma família $\{d_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de homomorfismos, entre módulos, tais que* $Im(d_n) \subseteq Ker(d_{n-1})$. *Tal família será representada por:*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

Exemplo B.1.1. *Se C é qualquer A-módulo graduado e d é o endomorfismo nulo, C é um complexo.*

Diremos que um complexo é livre, projetivo, injetivo, etc. se cada C_n *assim o for.*

Definição B.1.2. *Um morfismo entre dois complexos (C,d) e (C', d') é um um homomorfismo graduado* $u : C \longrightarrow C'$ *de grau zero, tal que* $d' \circ u = u \circ d$. *Se, além disso, u é um isomorfismo entre esses módulos graduados, diremos que u é um isomorfismo entre esses complexos.*

Observe que o conjunto $Mor(C;C')$, *dos morfismos de C em* C' *é um submódulo de* $Hom(C;C')$. *De fato, sejam* $f, g \in Mor(C;C')$ *e* $a \in A$, *temos que:*

$$d' \circ (f + ag) = d' \circ f + d' \circ ag = d' \circ f + ad' \circ g = f \circ d + ag \circ d = (f + ag) \circ d$$

como $0 \in Mor(C;C')$, segue o resultado.

Exemplo B.1.2. *Se C e C'são dois complexos cujas diferenciais são nulas, então todo homomorfismo de grau zero entre tais módulos é um morfismo entre esses complexos.*

Seja Z(C)=ker(d), como todo elemento de $\mathbb{Z}$ é regular, segue que Z(C) é um submódulo graduado de C, podemos pensar no complexo (Z(C),d), onde d é a restrição da primeira diferencial (que não passa do endomorfismo nulo). Os elementos de Z(C) serão chamados ciclos. Da mesma forma, podemos pensar nos complexos (B(C),d) e (H(C),$\bar{d}$), onde B(C)=Im(d), H(C)=$\frac{Z(C)}{B(C)}$ (levando-se em conta o fato que $B(C) \subseteq Z(C)$, pois $d \circ d = 0$) e d, $\bar{d}$ são respectivamente a restrição e a induzida por d (que novamente não passam da diferencial nula). Os complexos B(C) e H(C) são chamados, respectivamente, complexo de bordos e de homologia do complexo C. Observe que teremos $Z_n(C) = Ker(d_n)$, $B_n(C) = im(d_{n-1})$ e $H_n(C) = \frac{Ker(d_n)}{im(d_{n-1})}$.

Proposição B.1.1. *Um morfismo entre os complexos (C,d) e (C',d') induz três morfismos $B(u) : B(C) \longrightarrow B(C')$, $Z(u) : Z(C) \longrightarrow Z(C')$ e $H(u) : H(C) \longrightarrow H(C')$*

Demonstração:

$y \in B(C) \Rightarrow \exists x \in C \ /y = d(x) \Rightarrow u(y) = u \circ d(x) \Rightarrow u(y) = d' \circ u(x) \Rightarrow u(y) \in B(C')$

Defina B(u) como sendo o homomorfismo:

$$B(u) : B(C) \longrightarrow B(C')$$

que tem por gráfico o mesmo da restrição de u a B(C). Assim sendo, temos que:

$$y \in Z(C) \Rightarrow d(y) = 0 \Rightarrow u \circ d(y) = 0 \Rightarrow d' \circ u(y) = 0 \Rightarrow u(y) \in Z(C')$$

Defina Z(u) como sendo o homomorfismo:

$$Z(u) : Z(C) \longrightarrow Z(C')$$

que tem por gráfico o mesmo da restrição de u a Z(C).

Denotando $\varphi : Z(C) \longrightarrow H(C)$ e $\varphi' : Z(C') \longrightarrow H(C')$ como sendo os homomorfismos canônicos, temos:

$$\varphi(x) = \varphi(x) \Rightarrow x - y \in B(C) \Rightarrow Z(u)(x - y) = u(x - y) =$$

$$B(u)(x - y) \in B(C') \Rightarrow \varphi'(Z(u)(x)) = \varphi'(Z(u)(y))$$

Defina H(u) como sendo o homomorfismo induzido por Z(u).

Q.E.D.

Observe que se (C'', d'') é um terceiro complexo e $v : C' \longrightarrow C''$ é um morfismo de complexos, os morfismos induzidos satisfazem a seguinte relação:

$$B(v) \circ B(u) = B(v \circ u),\ Z(v) \circ Z(u) = Z(v \circ u)\ \text{e}\ H(v) \circ H(u) = H(v \circ u)$$

Além do mais, se considerarmos o morfismo identidade de C, teremos $B(1_C) = 1_{B(C)}$, $Z(1_C) = 1_{Z(C)}$ e $H(1_C) = 1_{H(C)}$. Assim sendo, se u é um isomorfismo de complexos, então os três homomorfismos induzidos são isomorfismos. Para ver isso, basta considerar $v = u^{-1}$.

Seja $\{(C_i, d_i)\}_{i\in I}$ uma família de complexos, definiremos o complexo produto,$\prod\limits_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I}$, da seguinte forma:

Para cada $i \in I$, temos $C_i = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_{i,n}$, faremos $\prod\limits_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}}(\prod\limits_{i\in I} C_{i,n})$, a diferencial será o homomorfismo:

$$\prod d_i : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\prod_{i\in I} C_{i,n}) \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\prod_{i\in I} C_{i,n})$$

tal que $\prod d_i(\{\{x_{i,n}\}_{i\in I}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{\{d_{i,n}(x_{i,n})\}_{i\in I}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $d_{i,n}$ é a restrição de d_i a $C_{i,n}$. Definiremos o complexo soma direta dessa família, como $\bigoplus\limits_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}}(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,n})$ a diferencial sendo o homomorfismo:

$$\bigoplus d_i : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i\in I} C_{i,n}) \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i\in I} C_{i,n})$$

tal que $\bigoplus d_i(\{\{x_{i,n}\}_{i\in I}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{\{d_{i,n}(x_{i,n})\}_{i\in I}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, observe que tal definição faz sentido, uma vez que existe apenas uma quantidade finita de pares (i,n) tais que $x_{i,n}$ é não nulo. Claramente esses dois módulos com as respectivas diferenciais são complexos.

Proposição B.1.2. *Seja $\{(C_i, d_i)\}_{i\in I}$ uma família de complexos, existem dois isomorfismos:*

$$\psi : H(\prod_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I}) \longrightarrow \prod_{i\in I}\{(H(C_i), 0)\}_{i\in I}\ \text{e}\ \varphi : \bigoplus_{i\in I}\{(H(C_i), 0\}_{i\in I} \longrightarrow H(\bigoplus_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I})$$

ditos canônicos.

Demonstração:

Seja

$$pr_{(i,n)} : \prod_{i\in I} C_{i,n} \longrightarrow C_{i,n}$$

a (i,n)-ésima projeção. Essa família de homomorfismos, nos permite definir o homomorfismo

$$(\bigoplus_{n} pr_{(i,n)}) : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\prod_{i\in I} C_{i,n}) \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_{i,n}$$

tal que $(\bigoplus\limits_{n} pr_{(i,n)})(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} pr_{(i,n)}(\{x_{i,n}\}_{i\in I}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_{i,n}$. onde acima, estamos identificando M_i com um submódulo de $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} M_i$ por meio da injeção canônica.

Afirmação:$(\bigoplus_n pr_{(i,n)})$ *é um morfismo de complexos.*

De fato

$$d_i \circ (\bigoplus_n pr_{(i,n)})(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I}) = d_i(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{i,n}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_i(x_{i,n}) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} pr_{(i,n)}(\{d_i(x_{i,n})\}_{i\in I}) = (\bigoplus_n pr_{(i,n)})(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{d_i(x_{i,n})\}_{i\in I}) =$$

$$(\bigoplus_n pr_{(i,n)})(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\prod_i d_i)\{(x_{i,n})\}_{i\in I}) = (\bigoplus_n pr_{(i,n)}) \circ (\prod_i d_i)(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{(x_{i,n})\}_{i\in I})$$

Isso nos permite definir:

$$\psi_i : H(\prod_{i\in I} C_{i,n}) \longrightarrow H(C_{i,n})$$

tal que $\psi_i = H(\bigoplus_n pr_{(i,n)})$. *Finalmente, definimos* ψ *como o homomorfismo, tal que* $\psi(x) = \{\psi_i(x)\}_{i\in I}$. *A sobrejetividade de* ψ*, segue da sobrejetividade dos* $pr_{(i,n)}$. *Sejam:*

$$\xi : \prod_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I} \longrightarrow H(\prod_{i\in I}\{(C_i, d_i)\}_{i\in I})$$

e

$$\eta_i : C_i \longrightarrow H(C_i)$$

os homomorfismos canônicos.

$$\psi(\xi(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I})) = 0 \Rightarrow \psi_i(\xi(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I})) = 0, \forall i \in I \Rightarrow$$

$$\eta_i((\bigoplus_n pr_{(i,n)})(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I})) = 0, \forall i \in I \Rightarrow \eta_i(\sum_{n\in\mathbb{Z}} pr_{(i,n)}(\{x_{i,n}\}_{i\in I})) = 0, \forall i \in I \Rightarrow$$

$$\eta_i(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{i,n}) = 0, \forall i \in I \Rightarrow \forall i \in I, \exists y_i \in C_i / \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{i,n} = d_i(y_i) \Rightarrow$$

$$\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{i,n}\}_{i\in I} = \{d_i(y_i)\}_{i\in I} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I} = (\prod_i d_i)(\{y_i\}_{i\in I}) \Rightarrow$$

$$\xi(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{x_{i,n}\}_{i\in I}) = 0$$

A demonstração para o caso da soma direta é análoga, e faz-se a partir da injeção canônica $j_{(i,n)} : C_{i,n} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} C_{i,n}$

Q.E.D.

Definição B.1.3. *Uma sequência* $C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C''$ *de morfismos e complexos é dita uma sequência exata, se tal sequência vista no sentido de módulos e homomorfismos é exata.*

Teorema B.1.1. *Dada uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \longrightarrow 0$$

de morfismos e complexos, existe um homomorfismo graduado:

$$\partial(u,v) : H(C'') \longrightarrow H(C)$$

de grau -1.

Demonstração:

Uma sequência dessa forma é equivalente ao seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d'_{n+2}"] & \vdots \arrow[d, "d_{n+2}"] & \vdots \arrow[d, "d''_{n+2}"] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n} \arrow[r, "u_{n}"] \arrow[d, "d'_{n}"] & C_{n} \arrow[r, "v_{n}"] \arrow[d, "d_{n}"] & C''_{n} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r, "v_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-2} \arrow[r, "u_{n-2}"] \arrow[d, "d'_{n-2}"] & C_{n-2} \arrow[r, "v_{n-2}"] \arrow[d, "d_{n-2}"] & C''_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n-2}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

comutativo, com as linhas exatas e as colunas formadas pelas diferenciais. Seja:

$$\bar{x} \in H_n(C'') \Rightarrow x \in Z_n(C'')$$

Desde que v_n *é sobrejetivo,* $\exists t \in C_n \ / x = v_n(t)$. *Seja* $h = d_n(t)$, *temos que:*

$$v_{n-1}(h) = v_{n-1} \circ d_n(t) = d''_n \circ v_n(t) = d''_n(x) = 0 \Rightarrow$$

$$h \in Ker(v_{n-1}) = im(u_{n-1}) \Rightarrow \exists s \in C'_{n-1} / h = u_{n-1}(s)$$

Observe ainda que:

$$u_{n-2} \circ d'_{n-1}(s) = d_{n-1} \circ u_{n-1}(s) = d_{n-1}(h) =$$

$$d_{n-1} \circ d_n(t) = 0 \Rightarrow d'_{n-1}(s) = 0 \Rightarrow s \in Z_{n-1}(C')$$

Definiremos a função:

$$\partial_n(u,v) : H_n(C'') \longrightarrow H_{n-1}(C')$$

tal que $\partial_n(u,v)(\bar{x}) = \widetilde{s}$, *onde* $\widetilde{s}$ *denota a classe de s. Da forma que* $\partial_n(u,v)$ *foi construída, foram feitas três escolhas arbitrárias, a saber, x na classe de x, t e s. Mostremos que* $\partial_n(u,v)$ *independe dessas escolhas. Seguiremos os três seguintes passos:*

- *Suporemos que uma vez escolhido um representante de* $\bar{x}$, $\widetilde{s}$ *independe da escolha de t e de s e demonstraremos que também independe da escolha desse representante de* $\bar{x}$.
- *Escolheremos um representante arbitrário de* $\bar{x}$, *suporemos que uma vez escolhido um t,* $\widetilde{s}$ *independe da escolha de s e demonstraremos que também independe da escolha de t. Por (1) segue que também independe da escolha do representante de* $\bar{x}$.
- *Escolheremos um representante arbitrário de* $\bar{x}$ *e um t arbitrário e mostraremos que* $\widetilde{s}$ *independe da escolha de s. Concluindo por (1) e (2) que* $\partial_n(u,v)$ *independe de qualquer escolha arbitrária.*

1. *Seja* $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x - y \in B_n(C'')$. *Se* $x = v_n(t_1)$ *e* $y = v_n(t_2)$ *então* $x - y = v_n(t_1 - t_2)$. *Por hipótese, podemos escolher o t relativo a x-y como sendo* $t_1 - t_2$ *(nesta primeira parte, manteremos a notação: sem índice relativo a x-y, índice 1 relativo a x e índice dois a y). Assim:*

   $$h = d_n(t) = d_n(t_1 - t_2) = d_n(t_1) - (t_2) = h_1 - h_2$$

   Se $h_1 = u_{n-1}(s_1)$ *e* $h_2 = u_{n-1}(s_2)$, *então:*

   $$h = h_1 - h_2 = u_{n-1}(s_1) - u_{n-1}(s_2) = u_{n-1}(s_1 - s_2)$$

   Novamente por hipótese, segue que $\widetilde{s} = (\widetilde{s_1 - s_2}) = \widetilde{s_1}$-$\widetilde{s_2}$.

   Por outro lado:

   $$x - y \in B_n(C'') \Rightarrow \exists r \in C''_{n+1} / x - y = d''_{n+1}(r)$$

   Como v_{n+1} *é sobrejetiva, segue que:*

   $$\exists a \in C_{n+1} / x - y = d''_{n+1} \circ v_{n+1}(a) \Rightarrow x - y = v_n \circ d_{n+1}(a)$$

Por hipótese, teremos $t = d_{n+1}(a)$. Assim:

$$h = d_n(t) = d_n \circ d_{n+1}(a) = 0 = u_{n-1}(0)$$

Novamente por hipótese, teremos $\widetilde{s} = \widetilde{0}$. Conclui-se então que $\widetilde{s_1} = \widetilde{s_2}$.

2. *Seja $\bar{x} \in H_n(C'')$. Escolha o representante $x \in Z_n(C'')$. Se $x = v_n(t_1) = v_n(t_2)$, então:*

$$t_1 - t_2 \in Ker(v_n) = im(u_n) \Rightarrow \exists a \in C'_n / t_1 - t_2 = u_n(a)$$

Se $h_1 = d_n(t_1)$ e $h_2 = d_n(t_2)$, então:

$$h_1 - h_2 = d_n(t_1 - t_2) = d_n \circ u_n(a) = u_{n-1} \circ d'_n(a)$$

onde $h_1 = u_{n-1}(s_1)$ e $h_2 = u_{n-1}(s_2)$. Dessa forma, temos que:

$$u_{n-1} \circ d'_n(a) = h_1 - h_2 = u_{n-1}(s_1 - s_2)$$

Da injetividade de u_{n-1}, segue que $s_1 - s_2 = d'_n(a)$ e portanto $\widetilde{s_1} = \widetilde{s_2}$.

3. *Seja $\bar{x} \in H_n(C'')$. Escolha o representante $x \in Z_n(C'')$. Escolha $t \in C_n$ $/x = v_n(t)$. Seja $h = d_n(t)$. Se $h = u_{n-1}(s_1) = u_{n-1}(s_2)$, então, de acordo com a injetividade de u_{n-1}, teremos $s_1 = s_2 \Rightarrow \widetilde{s_1} = \widetilde{s_2}$.*

***Afirmação**: $\partial_n(u,v)$ é um homomorfismo.*

De fato, observando que $\partial_n(u,v)(\overline{x+ay}) = \partial_n(u,v)(\bar{x} + a\bar{y})$ independe das escolhas feitas no meio do caminho e usando a notação de (1), temos:

$$x + ay = v_n(t_1) + av_n(t_2) = v_n(t_1 + at_2) \Rightarrow t = t_1 + at_2 \Rightarrow h = d_n(t) = d_n(t_1 + at_2) =$$

$$d_n(t_1) + ad_n(t_2) = h_1 + ah_2 \Rightarrow u_{n-1}(s) = h = h_1 + ah_2 = u_{n-1}(s_1) + au_{n-1}(s_2) =$$

$$u_{n-1}(s_1 + as_2) \Rightarrow \partial_n(u,v)(\overline{x+ay}) = \widetilde{s} = (\widetilde{s_1 + as_2}) = \widetilde{s_1} + a\widetilde{s_2} = \partial_n(u,v)(\bar{x}) + a\partial_n(u,v)(\bar{y})$$

Defina:

$$\partial(u,v) : H(C'') \longrightarrow H(C)$$

como o homomorfismo $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \partial_n(u,v)$, ou seja:

$$\partial(u,v)(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{x}_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \partial_n(u,v)(\bar{x}_n)$$

Q.E.D.

Corolário B.1.1. *Se*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos e morfismos, então a sequência:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C') \xrightarrow{H_n(u)} H_n(C) \xrightarrow{H_n(v)} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C') \xrightarrow{H_{n-1}(u)} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(v)} \cdots$$

de módulos e homomorfismos é exata.

Demonstração:

sejam $\varphi' : C' \longrightarrow H_n(C')$, $\varphi : C \longrightarrow H_n(C)$, $\varphi'' : C'' \longrightarrow H_n(C'')$, *os homomorfismos canônicos e* $\varphi'(x) \in H_n(C')$, *temos:*

$$H_n(v)(H_n(u)(\varphi'(x))) = H_n(v)(\varphi(u_n(x))) = \varphi''(v_n \circ u_n(x)) = \varphi''(0) = 0$$

Por outro lado:

$$\varphi(y) \in ker(H_n(v)) \Rightarrow H_n(v)(\varphi(y)) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi''(v_n(y)) = 0 \in H_n(C'') \Rightarrow \exists a \in C''_{n+1} / v_n(y) = d''_{n+1}(a)$$

Como v_{n+1} *é sobrejetiva, segue que:*

$$\exists b \in C_{n+1} / v_n(y) = d''_{n+1} \circ v_{n+1}(b) \Rightarrow v_n(y) = v_n \circ d_{n+1}(b) \Rightarrow$$

$$y - d_{n+1}(b) \in Ker(v_n) = im(u_n) \Rightarrow \exists c \in C'_n / y - d_{n+1}(b) = u_n(c)$$

Observe que, uma vez que $y \in Z_n(C)$, *temos:*

$$0 = d_n(y) - d_n \circ d_{n+1}(b) = d_n \circ u_n(c) \Rightarrow u_{n-1} \circ d'_n(c) = 0$$

Como u_{n-1} *é injetiva, segue que:*

$$d'_n(c) = 0 \Rightarrow c \in Z_n(C') \Rightarrow \varphi(y) = \varphi(u_n(c)) = H_n(u)(\varphi'(c))$$

Seja $\varphi(x) \in H_n(C)$, *temos que:*

$$\partial_n(u,v)(H_n(v)(\varphi(x))) = \partial_n(u,v)(\varphi''(v_n(x)))$$

Se escolhermos $v_n(x)$ *como representante de* $\varphi''(v_n(x))$, *podemos escolher* x *na imagem inversa de* v_n*(veja a construção de* $\partial_n(u,v)$ *no teorema anterior.). Uma vez que* $x \in Z_n(C)$, *segue que* $0 = d_n(x) = u_{n-1}(s)$. *Como* u_{n-1} *é injetiva, temos que s=0, logo:*

$$0 = \varphi'(0) = \varphi'(s) = \partial_n(u,v)(H_n(v)(\varphi(x)))$$

Seja $\varphi''(y) \in Ker(\partial_n(u,v))$, *procedamos igual ao teorema, fazendo* $y = v_n(t); h = d_n(t)$ *e* $h = u_{n-1}(s)$, *então teremos:*

$$\varphi'(s) = \varphi'(0) \in H_{n-1}(C') \Rightarrow \exists a \in C'_n / s = d'_n(a) \Rightarrow$$

$$d_n(t) = u_{n-1} \circ d'_n(a) \Rightarrow d_n(t) = d_n \circ u_n(a) \Rightarrow t - u_n(a) \in Z_n(C) \Rightarrow$$

$$H_n(v)(\varphi(t - u_n(a))) = \varphi''(v_n(t - u_n(a))) = \varphi''(v_n(t)) = \varphi''(y)$$

Seja $\varphi''(y) \in H_n(C'')$, *se* $v_n(t) = x$, $h = d_n(t)$ *e* $u_{n-1}(s) = h$ *(como no teorema), então:*

$$H_{n-1}(u)(\partial(u,v)(\varphi''(y))) = H_{n-1}(u)(\varphi'(s)) = \varphi(u_{n-1}(s)) = \varphi(h) = \varphi(d_n(t)) = 0$$

Sendo agora $\varphi'(x) \in ker(H_{n-1}(u))$, *temos então:*

$$H_{n-1}(u)(\varphi'(x)) = 0 \Rightarrow \varphi(u_{n-1}(x)) = 0 \Rightarrow \exists a \in C_n / u_{n-1}(x) = d_n(a)$$

Observe que:

$$d''_n \circ v_n(a) = v_{n-1} \circ d_n(a) = v_{n-1} \circ u_{n-1}(x) = 0$$

Dessa forma $v_n(a) \in Z_n(C'')$, *observando que se tomarmos* $y = v_n(a)$, *então* $h = d_n(a)$ *e* $u_{n-1}(x) = h$, *com* $x \in Z_{n-1}(C')$. *Pelo teorema, segue que* $\partial_n(u,v)(\varphi''(v_n(a))) = \varphi'(x)$.

Q.E.D.

B.2 Resoluções

Definição B.2.1. *Sejam (C,d) e (C',d') dois complexos. Dois morfismos f e g, são ditos homotopes, se existe um homomorfismo* $s : C \longrightarrow C'$ *de grau 1 tal que* $f - g = d' \circ s + s \circ d$.

Observe que a relação $f \sim g \Leftrightarrow f$ *e* g *são homotopes é uma relação de equivalência sobre o A-módulo Mor(C;C'). De fato, a reflexividade e a simetria são evidentes. Quanto a transitividade, sejam* $f \sim g$ *e* $g \sim h \Rightarrow f - g = d' \circ s + s \circ d$ *e* $g - h = d' \circ s_1 + s_1 \circ d$, *com* s *e* s_1 *homomorfismos de grau 1. Somando termo a termo essa equações, temos* $f - h = d' \circ (s + s_1) + (s + s_1) \circ d$, *como* $s + s_1$ *é de grau 1, segue o resultado.*

Proposição B.2.1. *Sejam (P,d) , (E,d') dois complexos e* $\{u_i : P_i \longrightarrow E_i\}_{n \geq i}$ *uma família de homomrfismos, definidos até um certo inteiro n, tais que* $d'_i \circ u_i = u_{i-1} \circ d_i$. *Se* P_j *são projetivos para* $j > n$ *e* $H_j(E) = 0$ *para* $j \geq n$, *então a família* $\{u_i\}_{n \geq i}$, *pode ser prolongada a um morfismo u entre os dois complexos. Se u' é outro morfismo que prolonga* $\{u_i\}_{n \geq i}$, *então u e u' são homotopes.*

Demonstração:

Temos a seguinte situação:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+3}"] & P_{n+2} \arrow[r, "d_{n+2}"] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "u_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "u_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+3}"] & E_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & E_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "d'_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Com P_j projetivo a partir de $n+1$, a sequência dos E_j exata até $n-1$ e o diagrama comutativo (obviamente até n).

Seja $y \in im(u_n \circ d_{n+1})$, temos então:

$$\exists x \in P_{n+1} / y = u_n \circ d_{n+1}(x) \Rightarrow d'_n(y) = d'_n \circ u_n \circ d_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$$d'_n(y) = u_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1}(x) = u_{n-1}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y \in Ker(d'_n) = im(d'_{n+1}) \Rightarrow im(u_n \circ d_{n+1}) \subseteq im(d'_{n+1})$$

Assim sendo, temos a seguinte situação:

$$\begin{tikzcd}
& P_{n+1} \arrow[d, "u_n \circ d_{n+1}"] & \\
E_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & im(d'_{n+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como P_{n+1} é projetivo, existe um homomorfismo:

$$u_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$$

que faz o diagrama acima comutar. A construção de u segue por indução.

Sejam u' outro morfismo que prolongue $\{u_i\}_{n \geq i}$ e $y \in im(u_{n+1} - u'_{n+1})$. Assim sendo, temos:

$$\exists x \in P_{n+1} / y = u_{n+1}(x) - u'_{n+1}(x) \Rightarrow d'_{n+1}(y) = d'_{n+1} \circ u_{n+1}(x) - d'_{n+1} \circ u'_{n+1}(x) \Rightarrow$$

$$d'_{n+1}(y) = u_n \circ d_{n+1}(x) - u_n \circ d_{n+1}(x) = 0 \Rightarrow im(u_{n+1} - u'_{n+1}) \subseteq Ker(d'_{n+1}) = im(d'_{n+2})$$

Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& P_{n+1} \arrow[d, "u_{n+1} - u'_{n+1}"] & \\
E_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"'] & im(d'_{n+2}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como P_{n+1} é projetivo, segue que existe um homomorfismo:

$$s_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow E_{n+2}$$

que faz o gráfico acima comutar. Defina $s_i = 0$, $\forall i \leqslant n$. Dessa forma, temos:

$$u_{n+1} - u'_{n+1} = d'_{n+2} \circ s_{n+1} = d'_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ d_{n+1}$$

Suponha que $r > 1$ e que construímos $r - 1$ homomorfismos:

$$s_i : P_{n+i} \longrightarrow E_{n+i+1}$$

$1 \leqslant i \leqslant r-1$, *tais que $u_{n+i} - u'_{n+i} = d'_{n+i+1} \circ s_{n+i} + s_{n+i-1} \circ d_{n+i}$. Esta situação é representada pelo seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+r+2}"] & P_{n+r+1} \arrow[r, "d_{n+r+1}"] \arrow[d, "h_{n+r+1}"] & P_{n+r} \arrow[r, "d_{n+r}"] \arrow[d, "h_{n+r}"] & P_{n+r-1} \arrow[r, "d_{n+r-1}"] \arrow[d, "h_{n+r-1}"] \arrow[dl, "s_{n+r-1}"'] & \cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] \arrow[dl, "s_{n+r-2}"'] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "h_{n+1}"] \arrow[dl, "s_{n+1}"'] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "0"'] & \cdots \arrow[dl, "0"'] \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+r+2}"'] & E_{n+r+1} \arrow[r, "d'_{n+r+1}"'] & E_{n+r} \arrow[r, "d'_{n+r}"'] & E_{n+r-1} \arrow[r, "d'_{n+r-1}"'] & \cdots \arrow[r, "d'_{n+2}"'] & E_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "d'_n"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Onde $h_i = u_i - u'_i$. Seja $y \in im(u_{n+r} - u'_{n+r} - s_{n+r-1} \circ d_{n+r})$, temos:

$$\exists x \in P_{n+r} / y = (u_{n+r} - u'_{n+r} - s_{n+r-1} \circ d_{n+r})(x) \Rightarrow$$

$$d'_{n+r}(y) = d'_{n+r} \circ u_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ u'_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ s_{n+r-1} \circ d_{n+r}(x) \Rightarrow d'_{n+r}(y) =$$

$$d'_{n+r} \circ u_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ u'_{n+r}(x) - (u_{n+r-1} - u'_{n+r-1} - s_{n+r-2} \circ d_{n+r-1}) \circ d_{n+r}(x) \Rightarrow$$

$$d'_{n+r}(y) = d'_{n+r} \circ u_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ u'_{n+r}(x) - u_{n+r-1} \circ d_{n+r}(x) +$$

$$u'_{n+r-1} \circ d_{n+r}(x) + s_{n+r-2} \circ d_{n+r-1} \circ d_{n+r}(x) \Rightarrow$$

$$d'_{n+r}(y) = d'_{n+r} \circ u_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ u'_{n+r}(x) - u_{n+r-1} \circ d_{n+r}(x) + u'_{n+r-1} \circ d_{n+r}(x) \Rightarrow$$

$$d'_{n+r}(y) = d'_{n+r} \circ u_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ u'_{n+r}(x) - d'_{n+r} \circ u_{n+r}(x) + d'_{n+r} \circ u'_{n+r}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$im(u_{n+r} - u'_{n+r} - s_{n+r-1} \circ d_{n+r}) \subseteq Ker(d'_{n+r}) = im(d'_{n+r+1})$$

Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P_{n+r} \arrow[d, "u_{n+r}-u'_{n+r}-s_{n+r-1}\circ d_{n+r}"] & \\ E_{n+r+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & im(d'_{n+r+1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A proposição segue do fato de P_{n+r} ser projetivo para $r \geq 1$.

Q.E.D.

No que segue, convencionaremos $C'^j = C'_{-j}$ e $d'^j = d'_{-j}$

Proposição B.2.2. *Sejam (P,d) , (E,d') dois complexos e $\{v^i : P^i \longrightarrow E^i\}_{n\geq i}$ uma família de homomorfismos, definidos até um certo inteiro n, tais que $d'^i \circ v^i = v^{i+1} \circ d^i$. Se E^j são injetivos para $j > n$ e $H_j(P) = 0$ para $j \geq n$, então a família $\{v^i\}_{n\geq i}$, pode ser prolongada a um morfismo v entre os dois complexos. Se v' é outro morfismo que prolonga $\{v^i\}_{n\geq i}$, então v e v' são homotopes.*

Demonstração:

A situação é a seguinte:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d^{n-2}"] & P^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "v^{n-1}"] & P^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "v^n"] & P^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & P^{n+2} \arrow[r, "d^{n+2}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d'^{n-2}"] & E^{n-1} \arrow[r, "d'^{n-1}"] & E^n \arrow[r, "d'^n"] & E^{n+1} \arrow[r, "d'^{n+1}"] & E^{n+2} \arrow[r, "d'^{n+2}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Com os E^j injetivos a partir de n+1, a sequência dos P^j exata a partir de n-1 e o diagrama comutativo. Desde que $Ker(d^n) = im(d^{n-1})$, temos pelo teorema do isomorfismo que existe um homomorfismo injetivo f^n, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} P^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & P^{n+1} \\ Coker(d^{n-1}) \arrow[ur, "f^n"'] & \end{tikzcd}$$

onde φ^n é o homomorfismo canônico. Observe que:

$$\varphi^n(x) = \varphi^n(y) \Rightarrow \varphi^n(x-y) = 0 \Rightarrow \exists z \in P^{n-1}/x - y = d^{n-1}(z) \Rightarrow$$

$$d'^n \circ v^n(x-y) = d'^n \circ v^n \circ d^{n-1}(z) \Rightarrow$$

$$d'^n \circ v^n(x-y) = d'^n \circ d'^{n-1} \circ v^{n-1}(z) = 0 \Rightarrow d'^n \circ v^n(x) = d'^n \circ v^n(y)$$

Dessa forma, aplicação $\varphi^n(x) \mapsto d'^n \circ v^n(x)$, define um homomorfismo g^n, tal que o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} P^n \arrow[r, "d'^n \circ v^n"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & E^{n+1} \\ Coker(d^{n-1}) \arrow[ur, "g^n"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Desde que E^{n+1} é injetivo, existe um homomorfismo v^{n+1}, tal que o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Coker(d^{n-1}) \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "g^n"'] & P^{n+1} \arrow[dl, "v^{n+1}"] \\ & E^{n+1} & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim sendo, temos que:

$$v^{n+1} \circ d^n = v^{n+1} \circ f^n \circ \varphi^n = g^n \circ \varphi^n = d'^n \circ v^n$$

A construção de v segue por indução. Seja v' outro morfismo que prolongue $\{v^i\}_{n \geq i}$. Observe que:

$$\varphi^{n+1}(x) = \varphi^{n+1}(y) \Rightarrow \varphi^{n+1}(x-y) = 0 \Rightarrow \exists z \in P^n / x - y = d^n(z) \Rightarrow$$

$$(v^{n+1} - v'^{n+1})(x-y) = (v^{n+1} - v'^{n+1}) \circ d^n(z) \Rightarrow (v^{n+1} - v'^{n+1})(x-y) =$$

$$v^{n+1} \circ d^n(z) - v'^{n+1} \circ d^n(z) = d'^n \circ v^n(z) - d'^n \circ v^n(z) = 0 \Rightarrow$$

$$(v^{n+1} - v'^{n+1})(x) = (v^{n+1} - v'^{n+1})(y)$$

Dessa forma, podemos definir o homomorfismo g'^{n+1}, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} P^{n+1} \arrow[r, "v^{n+1} - v'^{n+1}"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"'] & E^{n+1} \\ Coker(d^n) \arrow[ur, "g'^{n+1}"'] & \end{tikzcd}$$

seja comutativo. Uma vez que E^{n+1} é injetivo, existe um homomorfismo s^{n+1}, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Coker(d^n) \arrow[r, "f^{n+1}"] \arrow[d, "g'^{n+1}"'] & P^{n+2} \arrow[dl, "s^{n+1}"] \\ & E^{n+1} & \end{tikzcd}$$

onde f^{i+n} é construído tal qual f^n, $\forall i > 0$, é comutativo. Assim sendo, temos que:

$$v^{n+1} - v'^{n+1} = g'^{n+1} \circ \varphi^{n+1} = s^{n+1} \circ f^{n+1} \circ \varphi^{n+1} = s^{n+1} \circ d^{n+1} = s^{n+1} \circ d^{n+1} + d'^n \circ 0$$

Defina:

$$s^i : P^{i+1} \longrightarrow E^i$$

como $s^i = 0$, $\forall i \leq n$. *Suponha que* $r > 1$ *e que construímos* $r-1$ *homomorfismos:*

$$s^{n+i} : P^{n+i+1} \longrightarrow E^{n+i}$$

$1 \leqslant i \leqslant r-1$, *tais que* $v^{n+i} - {v'}^{n+i} = d'^{n+i-1} \circ s^{n+i-1} + s^{n+i} \circ d^{n+i}$. *Esta situação é representada pelo seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & P^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "0"'] & P^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "h^{n+1}"] \arrow[dl, "0"'] & \cdots \arrow[r, "d^{n+r-2}"] \arrow[dl, "s^{n+1}"'] & P^{n+r-1} \arrow[r, "d^{n+r-1}"] \arrow[d, "h^{n+r-1}"] \arrow[dl, "s^{n+r-2}"'] & P^{n+r} \arrow[r, "d^{n+r}"] \arrow[d, "h^{n+r}"] \arrow[dl, "s^{n+r-1}"'] & P^{n+r+1} \arrow[r, "d^{n+r+1}"] \arrow[d, "h^{n+r+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'^{n-1}"'] & E^n \arrow[r, "d'^n"'] & E^{n+1} \arrow[r, "d'^{n+1}"'] & \cdots \arrow[r, "d'^{n+r-2}"'] & E^{n+r-1} \arrow[r, "d'^{n+r-1}"'] & E^{n+r} \arrow[r, "d'^{n+r}"'] & E^{n+r+1} \arrow[r, "d'^{n+r+1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $h^i = v^i - v'^i$. *Observe que:*

$$\varphi^{n+r}(x) = \varphi^{n+r}(y) \Rightarrow \varphi^{n+r}(x-y) = 0 \Rightarrow \exists z \in P^{n+r-1} / x - y = d^{n+r-1}(z) \Rightarrow$$

$$(h^{n+r} - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1})(x-y) = (h^{n+r} - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1}) \circ d^{n+r-1}(z) =$$

$$h^{n+r} \circ d^{n+r-1}(z) - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1} \circ d^{n+r-1}(z) =$$

$$d'^{n+r-1} \circ h^{n+r-1}(z) - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1} \circ d^{n+r-1}(z) =$$

$$d'^{n+r-1} \circ (h^{n+r-1} - s^{n+r-1} \circ d^{n+r-1})(z) = d'^{n+r-1} \circ d'^{n+r-2} \circ s^{n+r-2}(z) = 0 \Rightarrow$$

$$(h^{n+r} - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1})(x) = (h^{n+r} - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1})(y)$$

Dessa forma, podemos definir o homomorfismo g'^{n+r}, *de tal forma que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
P^{n+r} \arrow[r, "t^{n+r}"] \arrow[d, "\varphi^{n+r}"'] & E^{n+r} \\
Coker(d^{n+r-1}) \arrow[ur, "{g'}^{n+r}"']
\end{tikzcd}$$

onde $t^{n+r} = h^{n+r} - d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1}$, *é comutativo. Desde que* E^{n+r} *é injetivo, segue que existe um homomorfismo* s^{n+r}, *tal que o diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Coker(d^{n+r-1}) \arrow[r, "f^{n+r}"] \arrow[d, "{g'}^{n+r}"'] & P^{n+r+1} \arrow[dl, "s^{n+r}"] \\
& E^{n+r} &
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Dessa forma, temos:

$$h^{n+r} = g'^{n+r} \circ \varphi^{n+r} + d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1} =$$

$$s^{n+r} \circ f^{n+r} \circ \varphi^{n+r} + d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1} = s^{n+r} \circ d^{n+r} + d'^{n+r-1} \circ s^{n+r-1}$$

E o resultado segue por indução.

Q.E.D.

Definição B.2.2. *Dado um A-módulo M, chamamos de resolução à esquerda de M, a um par (P,u), consistindo de um complexos P e um morfismo $u : P \longrightarrow M$ tais que $P_i = 0, \forall i < 0$ e o homomorfismo induzido $H(u) : H(P) \longrightarrow H(M)$ é um isomorfismo. Em tal caso u será dito um homologismo.*

Na definição acima, devemos entender o A-módulo M como o complexo C a diferencial nula, tal que $C_0 = M$ e $C_i = 0, \forall i \neq 0$. De maneira totalmente análoga se define uma resolução à direita de M. Deve-se tomar o cuidado de diferenciar resoluções à esquerda (resp. à direita) de complexos à esquerda (resp. à direita). Uma resolução será dita injetiva, projetiva, plana , livre, etc. se P o for. Dar uma resolução à esquerda de M, é equivalente a dar uma sequência exata:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0 \tag{B.1}$$

De fato, dizer que $H(P) \xrightarrow{H(u)} H(M)$ *é um isomorfismo é equivalente a dizer que:*

$$H_n(P) \xrightarrow{H_n(u)} H_n(M)$$

é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, o que equivale a dizer que $H_n(P) = 0, \forall n \neq 0$ e $H_0(P) \simeq H_0(M) = M$, que por sua vez quer dizer que $im(d_{n+1}) = ker(d_n), \forall n \neq 0$ e existe a seguinte sequência de homomorfismos:

$$Ker(d_0) = P_0 \longrightarrow H_0(P) \longrightarrow H_0(M) \longrightarrow M$$

tal que $x \mapsto \bar{x} \mapsto \widetilde{u_0(x)} \mapsto u_0(x)$. Como os dois últimos homomorfismos são isomorfismos e o primeiro é sobre, segue que a composição é sobre e seu núcleo é o núcleo da primeira, ou seja,

$im(d_1)$. Reciprocamente, dizer que B.1 é exata, equivale a dizer que $im(d_{i+1}) = ker(d_i), \forall i > 0$ e o homomorfismo:

$$f : \frac{P_0}{ker(u_0)} \longrightarrow H_0(M) \simeq M$$

tal que $\bar{x} \mapsto \widetilde{u_0(x)}$ é um isomorfismo, o que implica $H_i(P) = 0, \forall i \neq 0$ e o homomorfismo:

$$H_0(u) : H_0(P) \longrightarrow H_0(M)$$

é um isomorfismo. Dessa forma, segue que:

$$H(u) : H(P) \longrightarrow H(M)$$

é um isomorfismo.

Analogamente demonstra-se que dar uma resolução à direita de M, $v : M \longrightarrow E$ (denotaremos dessa forma uma resolução (E,v) à direita de M e da mesma forma $u : P \longrightarrow M$, para uma resolução à esquerda) é equivalente a dar uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v^0} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} E^{n-1} \xrightarrow{dn-1} E^n \xrightarrow{dn} \cdots \qquad \text{(B.2)}$$

Teorema B.2.1. *Seja M um A-módulo, existe uma resolução à esquerda de M livre.*

Demonstração:

Pela observação acima, basta construir uma sequência exata:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

tal que os L_i sejam livres. Procedamos por indução sobre i. Sabemos que existe uma sequência exata da seguinte forma (proposição A.1.5):

$$0 \longrightarrow Ker(u_0) \xrightarrow{i_0} A^{(M)} \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

Fazendo $L_0 = A^{(M)}$, temos que a sequência:

$$L_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

é exata e L_0 é livre. Suponha que construimos uma sequência exata:

$$L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

Tal que os L_i são livres. Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow Ker(d_{n+1}) \xrightarrow{i_{n+1}} A^{(Ker(d_n))} \xrightarrow{d'_n} Ker(d_n) \longrightarrow 0$$

Defina $L_{n+1} = A^{(Ker(d_n))}$ e $d_{n+1} = i_n \circ d'_n$, onde $i_n : Ker(d_n) \longrightarrow L_n$ é a injeção canônica (para n=0 faça $d_0 = u_0$). Desde que d'_n é sobrejetivo, segue que $im(d_{n+1}) = Ker(d_n)$. Assim sendo, temos uma sequência exata:

$$L_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{u_0} M \longrightarrow 0$$

onde os L_i são livres. Segue por indução que existe a sequência requerida.

Q.E.D.

Desde que todo A-módulo livre é plano e projetivo, segue do teorema B.2.1 que dado um A-módulo M existem resoluções à esquerda de M planas e projetivas. Observe que se A é noetheriano e M finitamente gerado, podemos pegar no teorema B.2.1 $L_0 = A^{(k)}$ e $L_{n+1} = A^{(r_n)}, n > 0$, onde k e r_n são a cardinalidade de um conjunto finito de geradores de M e de $Ker(d_n)$, respectivamente. Dessa forma, se A é noetheriano e M finitamente gerado, então existe uma resolução à esquerda de M, $u : L \longrightarrow M$, tal que os L_i são livres e finitamente gerados.

Definição B.2.3. *Dado um A-módulo M, a resolução do teorema B.2.1 é chamada a resolução livre canônica de M. E é denotada por $(L(M), p_M)$.*

Proposição B.2.3. *Seja $u : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo de A-módulos. Existe um único (a menos de homotopismo) morfismo de complexos $L(u) : L(M') \longrightarrow L(M)$, tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} L(M') \arrow[r, "p_{M'}"] \arrow[d, "L(u)"'] & M' \arrow[d, "u"] \\ L(M) \arrow[r, "p_M"] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração:

Desde que $L(M')$ e $L(M)$ são resoluções de M' e de M, respectivamente, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d'_2"] & L_1(M') \arrow[r, "d'_1"] & L_0(M') \arrow[r, "p_{M'0}"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d_2"] & L_1(M) \arrow[r, "d_1"] & L_0(M) \arrow[r, "p_{M0}"] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

com as duas linhas exatas. Pela proposição B.2.1, existe uma família de homomorfismos $\{L_n(u)\}_{n \geq 0}$, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d'_2"] & L_1(M') \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "L_1(u)"] & L_0(M') \arrow[r, "p_{M'0}"] \arrow[d, "L_0(u)"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d_2"] & L_1(M) \arrow[r, "d_1"] & L_0(M) \arrow[r, "p_{M0}"] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim sendo, o homomorfismo $L(u) = \{L_n(u)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $L_n(u) = 0$, $\forall n < 0$, é um morfismo entre os complexos $L(M')$ e $L(M)$. Seja $x_n \in L_n(M')$. Se $n \neq 0$, então:

$$p_{M'}(x_n) = 0 \Rightarrow u \circ p_{M'}(x_n) = 0$$

e

$$p_M \circ L(u)(x_n) = 0$$

pois $L(u)$ é graduado de grau zero. Se $n = 0$, segue do diagrama acima que:

$$p_M \circ L(u)(x_0) = p_{M0} \circ L_0(u)(x_0) = u \circ p_{M'0}(x_0) = u \circ p_{M'}(x_0)$$

O resultado segue por linearidade das aplicações consideradas.

Q.E.D.

Teorema B.2.2. *Seja M um A-módulo, existe uma resolução à direita de M injetiva.*

Demonstração:

Basta demonstrar que existe uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v^0} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} E^{n-1} \xrightarrow{dn-1} E^n \xrightarrow{dn} \cdots$$

tal que os E^n são injetivos. Sabemos que existe uma sequência exata (proposição A.2.4):

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v^0} I_A^{Hom_A(M;I_A)} \xrightarrow{\pi^0} Coker(v_0) \longrightarrow 0$$

onde $I_A = Hom_{\mathbb{Z}}(A; \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$. Defina $E^0 = I_A^{Hom_A(M;I_A)}$. Assim, temos uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v_0} E^0$$

com E^0 injetivo. Suponha que construimos uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v^0} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n$$

tal que os E^i são injetivos. Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow Coker(d^{n-1}) \xrightarrow{d'^n} I_A^{H_{n+1}} \xrightarrow{\pi^{n+1}} Coker(d'^n) \longrightarrow 0$$

Onde $H_{n+1} = Hom_A(Coker(d_{n-1}); I_A)$. Defina $E^{n+1} = I_A^{Hom_A(Coker(d_{n-1});I_A)}$ e $d^n = d'^n \circ \pi^n$, onde $\pi^n : E^n \longrightarrow Coker(d^{n-1})$ (para n=0 faça $d^{-1} = v^0$). Desde que d'_n é injetivo, segue que $Ker(d^n) = Ker(\pi^n) = im(d^{n-1})$. Logo, temos uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v^0} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1}$$

tal que os E^i são injetivos. O teorema segue por indução.

Q.E.D.

Definição B.2.4. *Dado um A-módulo M, chamamos de resolução injetiva canônica de M a resolução do teorema B.2.2. E a denotaremos por $(I(M), e_M)$.*

Proposição B.2.4. *Seja $v : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo de A-módulos. Existe um único (a menos de homotopismo) morfismo de complexos, $I(v) : I(M') \longrightarrow I(M)$, tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "e_{M'}"] \arrow[d, "v"'] & I(M') \arrow[d, "I(v)"] \\ M \arrow[r, "e_M"] & I(M) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração:

Desde que $I(M')$ e $I(M)$ são resoluções de M' e de M, respectivamente, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r, "e_{M'}"] \arrow[d, "v"] & I^0(M') \arrow[r, "d'^0"] & I^1(M') \arrow[r, "d^1"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_M"] & I^0(M) \arrow[r, "d^0"] & I^1(M) \arrow[r, "d^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

com as duas linhas exatas. Pela proposição B.2.2, existe uma família de homomorfismos $\{I^n(v)\}_{n>0}$, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r, "e_{M'}"] \arrow[d, "v"] & I^0(M') \arrow[r, "d'^0"] \arrow[d, "I^0(v)"] & I^1(M') \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "I^1(v)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "e_M"] & I^0(M) \arrow[r, "d^0"] & I^1(M) \arrow[r, "d^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim sendo, o homomorfismo $I(v) = \{I^n(v)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $I^n(v) = 0$, $\forall n < 0$, é um morfismo entre os complexos $I(M')$ e $I(M)$. Seja $y \in M'$, segue do diagrama acima que:

$$e_M \circ v(y) = I^0(v) \circ e_{M'}(y) = I(v) \circ e_{M'}(y)$$

Q.E.D.

B.3 Produto de Torção

Sejam $C = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ *um complexo à direita e* $C' = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C'_j$ *um complexos à esquerda de A-módulos. Considere o produto tensorial* $T = C\otimes_A C'$ *entre esses dois A-módulos. Dos isomorfismos canônicos:*

$$T = C\otimes_A C' = (\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i)\otimes_A (\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C'_j) \simeq \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} (C_i\otimes_A C'_j) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i+j=n}(C_i\otimes_A C'_j))$$

tais que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\otimes\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto \{x_i\otimes y_j\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mapsto \{\{x_i\otimes y_j\}_{i+j=n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, segue que podemos definir uma estrutura de A-módulo graduado sobre T, onde os elementos homogêneos de grau n são os que pertencem a* $\bigoplus_{i+j=n}(C_i\otimes C'_j)$*. Sejam* $d = \{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *e* $d' = \{d'_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *as diferenciais de C e C', respectivamente. Desde que cada* d_i *(resp.* d'_i*) é A-linear, segue que está bem determinada a aplicação A-linear:*

$$d_i\otimes 1'_C : C_i\otimes C'_j \longrightarrow C_{i-1}\otimes C'_j \hookrightarrow \bigoplus_{r+s=n-1}(C_r\otimes C'_s)$$

(resp. $(-1)^i 1_C\otimes d'_j : C_i\otimes C'_j \longrightarrow C_i\otimes C'_{j-1} \hookrightarrow \bigoplus_{r+s=n-1}(C_r\otimes C'_s)$*) onde estamos considerando* $i+j=n$*. Assim sendo, a aplicação A-linear:*

$$D_n : \bigoplus_{i+j=n}(C_i\otimes C'_j) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1}(C_i\otimes C'_j)$$

tal que $D_n(x_i\otimes y_j) = d_i(x_i)\otimes y_j + (-1)^i x_i\otimes d'_j(y_j)$*, está bem definida (proposição A.1.2). Dessa forma, podemos definir a aplicação A-linear:*

$$D : T \longrightarrow T$$

de grau -1, tal que $D(\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n(z_n)$.

Afirmação: $D\circ D = 0$.

Por linearidade é suficiente demonstrar o caso em que $z\in T$ *é da forma* $z = x_i\otimes y_j$*, com* $x_i\in C_i$, $y_j\in C'_j$ *e* $i+j=n$*. Assim sendo, temos:*

$$D\circ D(z) = D(D_n(x_i\otimes y_j)) = D(d_i(x_i)\otimes y_j + (-1)^i x_i\otimes d'_j(y_j)) =$$

$$D(d_i(x_i)\otimes y_j) + (-1)^i D(x_i\otimes d'_j(y_j)) = D_{n-1}(d_i(x_i)\otimes y_j) + (-1)^i D_{n-1}(x_i\otimes d'_j(y_j)) =$$

$$[(d_{i-1} \circ d_i(x_i)) \otimes y_j + (-1)^{i-1} d_i(x_i) \otimes d'_j(y_j)] +$$

$$(-1)^i [d_i(x_i) \otimes d'_j(y_j) + (-1)^i x_i \otimes (d'_{j-1} \circ d'_j(y_j))] =$$

$$(-1)^{i-1} d_i(x_i) \otimes d'_j(y_j) + (-1)^i d_i(x_i) \otimes d'_j(y_j) = 0$$

Definição B.3.1. *O complexo à esquerda (T,D) é chamado complexo produto tensorial dos complexos C e C'.*

Sejam $C = \{C_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ um complexo à direita e $C' = \{C'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ um complexo à esquerda de A-módulos, de diferenciais $d = \{d_i\}$ e $d' = \{d'_i\}$, respectivamente. Podemos considerar C como um complexo à esquerda (resp. C' como um complexo à direita), simplesmente definindo para C (resp. para C') a estrutura $ax := xa$ (resp. $x'a := ax'$), com $a \in A$ e $x \in C$ (resp. $x' \in C'$), feita essa observação, não distinguiremos mais A-módulo à esquerda de A-módulo à direita. Assim sendo, para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ onde $i + j = n$, $n \in \mathbb{Z}$, considere o isomorfismo (entre A-módulos) canônico:

$$\varphi_{ij} : C_i \otimes C'_j \longrightarrow C'_j \otimes C_i$$

tal que $\varphi_{ij}(x_i \otimes y_j) = y_j \otimes x_i$. Ele induz o isomorfismo entre os mesmos A-módulos $\psi_{ij} = (-1)^{ij} \varphi_{ij}$, que por sua vez induz o isomorfismo (entre A-módulos):

$$\varphi_n : \bigoplus_{i+j=n} (C_i \otimes C'_j) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} (C'_j \otimes C_i)$$

tal que $\varphi_n = \oplus \psi_{ij}$(com $(\oplus \psi_{ij})(\sum_{i+j=n} x_i \otimes y_j) = \sum_{i+j=n} \psi_{ij}(x_i \otimes y_j))$. E, finalmente, este último isomorfismo induz o isomorfismo (entre A-módulos graduados) $\varphi = \oplus \varphi_n$ de C em C'.

Proposição B.3.1. *O isomorfismo φ é um isomorfismo de complexos.*

Demonstração:

Por linearidade consideraremos apenas o caso em que $z \in C$ é da forma $z = x_i \otimes y_j$, com $x_i \in C_i$, $y_j \in C'_j$ e $i + j = n \in \mathbb{Z}$. Sejam D e D' as diferenciais de $C \otimes C'$ e $C' \otimes C$, respectivamente. Temos que:

$$D' \circ \varphi(z) = D' \circ \varphi(x_i \otimes y_j) = D'(\varphi_n(x_i \otimes y_j)) =$$

$$D'(\psi_{ij}(x_i \otimes y_j)) = D'((-1)^{ij} \varphi_{ij}(x_i \otimes y_j)) = D'((-1)^{ij} y_j \otimes x_i) =$$

$$(-1)^{ij}D'(y_j \otimes x_i) = (-1)^{ij}(d'_j(y_j) \otimes x_i + (-1)^j y_j \otimes d_i(x_i))$$

Por outro lado:

$$\varphi \circ D(z) = \varphi(D(x_i \otimes y_j)) =$$

$$\varphi(d_i(x_i) \otimes y_j + (-1)^i x_i \otimes d'_j(y_j)) = \varphi(d_i(x_i) \otimes y_j) + (-1)^i \varphi(x_i \otimes d'_j(y_j)) =$$

$$(-1)^{j(i-1)} y_j \otimes d_i(x_i) + (-1)^i(-1)^{i(j-1)} d'_j(y_j) \otimes x_i = (-1)^{ij}(d'_j(y_j) \otimes x_i + (-1)^j y_j \otimes d_i(x_i))$$

Q.E.D.

Proposição B.3.2. *Sejam $\{(C_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ e $\{(C'_\beta, d'_\beta)\}_{\beta \in J}$ duas famílias de complexos. O isomorfismo canônico:*

$$\varphi : (\bigoplus_\alpha C_\alpha) \otimes_A (\bigoplus_\beta C'_\beta) \longrightarrow \bigoplus_{(\alpha,\beta)} (C_\alpha \otimes_A C'_\beta)$$

tal que $\{x_\alpha\}_\alpha \otimes_A \{y_\beta\}_\beta \mapsto \{x_\alpha \otimes_A y_\beta\}_{(\alpha,\beta)}$, é um isomorfismo de complexos.

Demonstração:

Seja $x \otimes_A y$ um elemento homogênio de grau n em $(\bigoplus_\alpha C_\alpha) \otimes_A (\bigoplus_\beta C'_\beta)$, isso significa que x é um elemento homogênio de grau i em $\bigoplus_\alpha C_\alpha$ e y homogênio de grau j em $\bigoplus_\beta C'_\beta$ tal que $i + j = n$. Isso significa que $x = \{x_\alpha\}_\alpha$ e $y = \{y_\beta\}_\beta$ tal que cada x_α (resp. y_β) é de grau i (resp. j) em C_α (resp. C'_β). Dessa forma, $x_\alpha \otimes_A y_\beta$ tem grau $i + j = n$ em $C_\alpha \otimes_A C'_\beta$, para todo par (α, β), o que implica que $\{x_\alpha \otimes_A y_\beta\}_{(\alpha,\beta)}$ tem grau n em $\bigoplus_{(\alpha,\beta)} (C_\alpha \otimes_A C'_\beta)$. Por conseguinte, φ é um homomorfismo de grau 0.

Sejam D e $D_{\alpha\beta}$ as diferenciais de $(\bigoplus_\alpha C_\alpha) \otimes_A (\bigoplus_\beta C'_\beta)$ e $C_\alpha \otimes_A C'_\beta$, respectivamente. Considere $x \otimes_A y$ como acima. Temos que:

$$(\bigoplus D_{\alpha,\beta}) \circ \varphi(x \otimes_A y) = (\bigoplus D_{\alpha,\beta}) \circ \varphi(\{x_\alpha\}_\alpha \otimes_A \{y_\beta\}_\beta) = (\bigoplus D_{\alpha,\beta})(\{x_\alpha \otimes_A y_\beta\}_{(\alpha,\beta)}) =$$

$$\{D_{\alpha,\beta}(x_\alpha \otimes_A y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)} = \{d_{\alpha i}(x_\alpha) \otimes_A y_\beta + (-i)^i x_\alpha \otimes_A d'_{\beta j}(y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)} =$$

$$\{d_{\alpha i}(x_\alpha) \otimes_A y_\beta\}_{(\alpha,\beta)} + (-i)^i \{x_\alpha \otimes_A d'_{\beta j}(y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)}$$

Por outro lado, temos:

$$\varphi \circ D(x \otimes_A y) = \varphi \circ D(\{x_\alpha\}_\alpha \otimes_A \{y_\beta\}_\beta) =$$

$$\varphi(((\oplus d_\alpha)(\{x_\alpha\}_\alpha)) \otimes_A \{y_\beta\}_\beta + (-1)^i \{x_\alpha\}_\alpha \otimes_A ((\oplus d'_\beta)(\{y_\beta\}_\beta))) =$$

$$\varphi(\{d_\alpha(x_\alpha)\}_\alpha \otimes_A \{y_\beta\}_\beta) + (-1)^i \varphi(\{x_\alpha\}_\alpha \otimes_A \{d'_\beta(y_\beta)\}_\beta)) = \{d_\alpha(x_\alpha) \otimes_A y_\beta\}_{(\alpha,\beta)} +$$

$$(-1)^i \{x_\alpha \otimes_A d'_\beta(y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)} = \{d_{\alpha i}(x_\alpha) \otimes_A y_\beta\}_{(\alpha,\beta)} + (-1)^i \{x_\alpha \otimes_A d'_{\beta j}(y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)}$$

O resultado segue por linearidade das aplicações consideradas.

Q.E.D.

Proposição B.3.3. *Sejam (C, d), (C', d') e (C'', d'') três complexos. O isomorfismo canônico:*

$$(C \otimes_A C') \otimes_A C'' \simeq C \otimes_A (C' \otimes_A C'')$$

é um isomorfismo de complexos.

Demonstração:

Sejam $x_r \in C_r$, $x'_s \in C'_s$ e $x''_h \in C''_h$ e φ tal isomorfismo, temos que:

$$\varphi((x_r \otimes x'_s) \otimes x''_h) = x_r \otimes (x'_s \otimes x''_h)$$

Da linearidade de φ, segue que:

$$\varphi(((C \otimes_A C') \otimes_A C'')_{r+s+h}) \subseteq (C \otimes_A (C' \otimes_A C''))_{r+s+h}$$

$\forall (r, s, h) \in \mathbb{Z}^3$. Por tanto, φ é um homomorfismo graduado de grau zero. Além do mais, se D, D^*, D' e D'' denotam as diferenciais de $(C \otimes_A C') \otimes_A C''$, $C \otimes_A (C' \otimes_A C'')$, $C \otimes_A C'$ e $C' \otimes_A C''$, respectivamente, então por um lado teremos:

$$\varphi_p \circ D_{p+1}((x_r \otimes x'_s) \otimes x''_h) = \varphi_p(D'_{r+s}(x_r \otimes x'_s) \otimes x''_h + (-1)^{r+s}(x_r \otimes x'_s) \otimes d''_h(x''_h)) =$$

$$\varphi_p((d_r(x_r) \otimes x'_s + (-1)^r x_r \otimes d'_s(x'_s)) \otimes x''_h) + (-1)^{r+s} \varphi_p((x_r \otimes x'_s) \otimes d''_h(x''_h)) =$$

$$\varphi_p((d_r(x_r) \otimes x'_s) \otimes x''_h) + (-1)^r \varphi_p((x_r \otimes d'_s(x'_s)) \otimes x''_h) + (-1)^{r+s} \varphi_p((x_r \otimes x'_s) \otimes d''_h(x''_h)) =$$

$$d_r(x_r) \otimes (x'_s \otimes x''_h) + (-1)^r x_r \otimes (d'_s(x'_s) \otimes x''_h) + (-1)^{r+s} x_r \otimes (x'_s \otimes d''_h(x''_h))$$

e por outro:

$$D^*_{p+1} \circ \varphi_{p+1}((x_r \otimes x'_s) \otimes x''_h) = D^*_{p+1}(x_r \otimes (x'_s \otimes x''_h)) =$$

$$d_r(x_r) \otimes (x'_s \otimes x''_h) + (-1)^r x_r \otimes D''_{s+h}(x'_s \otimes x''_h) =$$

$$d_r(x_r) \otimes (x'_s \otimes x''_h) + (-1)^r x_r \otimes (d'_s(x'_s) \otimes x''_h + (-1)^s x'_s \otimes d''_h(x''_h)) =$$

$$d_r(x_r) \otimes (x'_s \otimes x''_h) + (-1)^r x_r \otimes (d'_s(x'_s) \otimes x''_h) + (-1)^{r+s} x_r \otimes (x'_s \otimes d''_h(x''_h))$$

O resultado segue por linearidade das aplicações consideradas.

Q.E.D.

Teorema B.3.1. *Sejam M um A-módulo e (R,f) uma resolução de M. Se P é um complexo plano, tal que* $P_i = 0, \forall i < 0$, *então* $f \otimes_A 1_P : R \otimes_A P \longrightarrow M \otimes_A P$ *é um homologismo.*

Demonstração:

Considere a sequência exata de A-módulos:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} R \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0 \tag{B.3}$$

Afirmação 1*: Se* $d = \{d_i\}$ *é a diferencial de R, então (Ker(f),e),onde e é a restrição de d, define um complexo.*

De fato, desde que $\mathbb{Z}$ *é um grupo, segue que Ker(f) é um submódulo graduado, ou seja,* $Ker(f) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (R_i \cap Ker(f))$. *Se* $x \in R_i \cap Ker(f)$, *então* $f \circ e_i(x) = f \circ d_i(x) = 0 \circ f(x) = 0$, *pois f é um morfismo. Logo* $e_i(x) \in R_{i-1} \cap Ker(f)$. *O fato de* $e \circ e = 0$, *segue de* $d \circ d = 0$.

Como e é a restrição de d, segue que o homomorfismo i é um morfismo de complexos e portanto a sequência B.3 é uma sequência exata de complexos. Dessa forma, pelo corolário B.1.1 temos a seguinte sequência exata:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(Ker(f)) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(R) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(M) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(Ker(f)) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

Como (R,f) é uma resolução, segue que $H_n(Ker(f)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. *Observe que, sendo D a diferencial de* $Ker(f) \otimes_A P$, *temos que:*

$$D((Ker(f))_{n-i} \otimes_A P_i) \subseteq (Ker(f))_{(n-1)-i} \otimes_A P_i) \oplus (Ker(f))_{n-i} \otimes_A P_{i-1}), \forall (n,i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Lembrando que estamos considerando $Ker(f)_i \otimes_A P_j$ *como um submódulo de* $\bigoplus_{i+j=n} Ker(f)_i \otimes_A P_j$ *por meio da injeção canônica. Dessa forma, D induz o complexo:*

$$\cdots \xrightarrow{D^r_{n+1}} T^r_n \xrightarrow{D^r_n} T^r_{n-1} \xrightarrow{D^r_{n-1}} T^r_{n-2} \xrightarrow{D^r_{n-2}} \cdots$$

onde $T^r_n = \bigoplus_{i=0}^{r}((Ker(f))_{n-i} \otimes_A P_i), r \in \mathbb{N}$ *(observe que* $(Ker(f))_i = 0$ *se* i *é negativo) e* D^r_n *é a restrição de* D *a* T^r_n*. Considere agora, a sequência exata de* A*-módulos:*

$$0 \longrightarrow T^{r-1} \xrightarrow{i_r} T^r \xrightarrow{\pi_r} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}((Ker(f))_{n-r} \otimes_A P_r) \longrightarrow 0$$

onde i_r *e* π_r *são a injeção e a projeção canônica, respectivamente.*

Afirmação 2*:* i_r *e* π_r *são morfismos de complexos.*

Por linearidade, é suficiente considerarmos apenas o caso em que $x_{n-i} \in Ker(f))_{n-i}$ *e* $y_i \in P_i$*,* $0 \leqslant i \leqslant r-1$*. Demonstremos primeiro o caso de* i_r*. Assim sendo, temos:*

$$D^r \circ i_r(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r-1}) =$$

$$D(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r}) = \{e_{n-i}(x_{n-i}) \otimes y_i + (-1)^{n-i} x_{n-i} \otimes d'_i(y_i)\}_{i=0}^{r}$$

sendo o elemento de índice r, à direita e à esquerda da última igualdade, nulo e $d' = \{d'_i\}$ *a diferencial de* P*. Por outro lado temos:*

$$i_r \circ D^r(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r-1}) = i_r(D(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r-1})) =$$

$$i_r(\{e_{n-i}(x_{n-i}) \otimes y_i + (-1)^{n-i} x_{n-i} \otimes_A d'_i(y_i)\}_{i=0}^{r-1}) =$$

$$\{e_{n-i}(x_{n-i}) \otimes y_i + (-1)^{n-i} x_{n-i} \otimes d'_i(y_i)\}_{i=0}^{r}$$

sendo o elemento de índice r, à direita da última igualdade, nulo.

Seja agora $\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r} \in T^r_n$*, temos que:*

$$[\bigoplus_n (e_{n-r} \otimes 1_{P_r})] \circ \pi_r(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r}) =$$

$$[\bigoplus_n (e_{n-r} \otimes 1_{P_r})] \circ \pi_{rn}(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r}) = (e_{n-r} \otimes 1_{P_r})(x_{n-r} \otimes y_r) = e_{n-r}(x_{n-r}) \otimes y_r$$

e

$$\pi_r \circ D^r(\{x_{n-i} \otimes y_i\}_{i=0}^{r}) = \pi_r(\{e_{n-i}(x_{n-i}) \otimes y_i + (-1)^{n-i} x_{n-i} \otimes d'_i(y_i)\}_{i=0}^{r}) =$$

$$\pi_r(\{e_{n-i}(x_{n-i})\otimes y_i\}_{i=0}^r)+(-1)^{n-i}\pi_r(\{x_{n-i}\otimes d'_i(y_i)\}_{i=0}^r)=$$

$$\pi_r(\{e_{n-i}(x_{n-i})\otimes y_i\}_{i=0}^r)+(-1)^{n-i}\pi_r(\{x_{(n-1)-(i-1)}\otimes d'_i(y_i)\}_{i=0}^r)=$$

$$\pi_r(\{e_{n-i}(x_{n-i})\otimes y_i\}_{i=0}^r)=e_{n-r}(x_{n-r})\otimes y_r$$

pois $\{x_{n-1-(i-1)}\otimes d_i(y_i)\}_{i=0}^r\in T_n^{r-1}$. *Pelo corolário B.1.1 temos a seguinte sequência exata:*

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(T^{r-1})\xrightarrow{H_n(i_r)}H_n(T^r)\xrightarrow{H_n(\pi_r)}H_n(K_r)\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(T^{r-1})\xrightarrow{H_{n-1}(i_r)}\cdots \tag{B.4}$$

onde $K_r=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(Ker(f))_{n-r}\otimes_A P_r)=[Ker(f)(-r)]\otimes_A P_r$.

Afirmação 3: *Se (C,d) é um complexo de A-módulos e P é um A-módulo plano, então* $H(C)\otimes_A P\simeq H(C\otimes_A P)$, *como A-módulos graduados.*

De fato, considere a seguinte sequência exata:

$$0\longrightarrow B_n(C)\longrightarrow Z_n(C)\longrightarrow H_n(C)\longrightarrow 0$$

Como P é plano, segue que a seguinte sequência:

$$0\longrightarrow B_n(C)\otimes_A P\longrightarrow Z_n(C)\otimes_A P\longrightarrow H_n(C)\otimes_A P\longrightarrow 0$$

é exata. Dessa forma, segue que $\frac{Z_n(C)\otimes_A P}{B_n(C)\otimes_A P}\simeq H_n(C)\otimes_A P$. *Das sequências exatas:*

$$0\longrightarrow Z_n(C)\xrightarrow{j_n}C_n\xrightarrow{d_n}C_{n-1}$$

e

$$0\longrightarrow B_n(C)\xrightarrow{j'_n}C_n(C)$$

Seguem as sequências:

$$0\longrightarrow Z_n(C)\otimes_A P\xrightarrow{j_n\otimes_A 1_P}C_n\otimes_A P\xrightarrow{d_n\otimes_A 1_P}C_{n-1}\otimes_A P \tag{B.5}$$

e

$$0\longrightarrow B_n(C)\otimes_A P\xrightarrow{j'_n\otimes_A 1_P}C_n(C)\otimes_A P \tag{B.6}$$

também exatas. De B.5, segue que $j_n\otimes_A 1_P$ *é um isomorfismo entre* $Z_n(C)\otimes_A P$ *e* $Z_n(C\otimes_A P)$. *De B.6, segue que podemos identificar* $B_n(C)\otimes_A P$ *com um submódulo de* $C_n\otimes_A P$ *por meio de* $j'_n\otimes_A 1_P$. *Assim sendo, temos:*

$$y \in B_n(C) \otimes_A P \Leftrightarrow y = \sum_i x_i \otimes_A y_i / x_i \in B_n(C), y_i \in P_i \Leftrightarrow$$

$$y = \sum_i d_{n+1}(t_i) \otimes_A y_i / t_i \in C_{n+1} \Leftrightarrow y = (d_{n+1} \otimes_A 1_P)(\sum_i t_i \otimes_A y_i) \Leftrightarrow y \in B_n(C \otimes_A P)$$

Dessa forma, segue que $j'_n \otimes_A 1_P$ é um isomorfismo entre $B_n(C) \otimes_A P$ e $B_n(C \otimes_A p)$. Observe que $j'_n \otimes_A 1_P$ é a restrição de $j_n \otimes_A 1_E$ a $B_n(C) \otimes_A P$, visto como submódulo de $Z_n(C) \otimes_A P$ (isto é de fundamental importância para a conclusão). Assim sendo, temos:

$$H_n(C \otimes_A P) = \frac{Z_n(C \otimes_A P)}{B_n(C \otimes_A P)} \simeq \frac{Z_n(C) \otimes_A P}{B_n(C) \otimes_A P} \simeq H_n(C) \otimes_A P$$

Como P_i é plano para todo i inteiro, segue da sequência B.4, da afirmação 3 e do fato de $H(ker(f)) = 0$, que $H(T^r) \simeq H(T^{r-1})$. Disso, segue por indução que:

$$H(T^r) \simeq H(T^0) = H((Ker(f) \otimes_A P_0))$$

Concluímos da afirmação 3 e do fato de $H(ker(f)) = 0$ que $H(T^r) = 0$, $\forall r \in \mathbb{Z}$. Seja $n \in \mathbb{Z}$, temos a seguinte sequência exata:

$$\bigoplus_{i=0}^{n+1}((Ker(f))_{n+1-i} \otimes_A P_i) \xrightarrow{D^{n+1}_{n+1}} \bigoplus_{i=0}^{n+1}((Ker(f))_{n-i} \otimes_A P_i) \xrightarrow{D^{n+1}_{n}} \bigoplus_{i=0}^{n+1}((Ker(f))_{(n-1)-i} \otimes_A P_i) \tag{B.7}$$

Observando que:

$(Ker(f))_{n-(n+1)} \otimes_A P_{n+1} = (Ker(f))_{-1} \otimes_A P_{n+1} = 0$

$(Ker(f))_{(n-1)-(n+1)} \otimes_A P_{n+1} = (Ker(f))_{-2} \otimes_A P_{n+1} = 0$

$(Ker(f))_{(n-1)-n} \otimes_A P_n = (Ker(f))_{-1} \otimes_A P_n = 0$

e que D^{n+1}_{n+1} (resp. D^{n+1}_n) é a restrição de D a $\bigoplus_{i=0}^{n+1}((Ker(f))_{n+1-i} \otimes_A P_i) = Ker(f) \otimes_A P$ (resp. a $\bigoplus_{i=0}^{n+1}((Ker(f))_{n-i} \otimes_A P_i) = \bigoplus_{i=0}^{n}((Ker(f))_{n-i} \otimes_A P_i) = (Ker(f) \otimes_A P)_n$), vemos que $im(D^{n+1}_{n+1}) = im(D_{n+1})$ e $Ker(D^{n+1}_n) = Ker(D_n)$. Como a sequência B.7 é exata, temos que:

$$B_n(Ker(f) \otimes_A P) = im(D_{n+1}) = Ker(D_n) = Z_n(Ker(f) \otimes_A P), \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma, temos $H(Ker(f) \otimes_A P) = 0$. Da sequência B.3 e do fato de P ser plano, temos a seguinte sequência exata de A-módulos:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \otimes_A P \xrightarrow{i \otimes_A 1_P} R \otimes_A P \xrightarrow{f \otimes_A 1_P} M \otimes_A P \longrightarrow 0 \tag{B.8}$$

***Afirmação4**: Se $u : (C, d_C) \longrightarrow (C', d_{C'})$ é um morfismo de complexos, então $u \otimes_A 1_P : C \otimes_A P \longrightarrow C' \otimes_A P$ é um morfismo de complexos para qualquer complexos à esquerda (P, d_P).*

Por linearidade, é suficiente demonstrar a afirmação para o caso em que $x_i \in C_i$ e $y_j \in P_j$, $i + j = n \in \mathbb{Z}$. Assim sendo, temos:

$$D' \circ (u \otimes_A 1_P)(x_i \otimes_A y_j) = D'(u(x_i) \otimes_A y_j) =$$

$$(d_{C'} \circ u(x_i)) \otimes_A y_j + (-1)^i u(x_i) \otimes_A d_P(y_j) = (u \circ d_C(x_i)) \otimes_A y_j + (-1)^i u(x_i) \otimes_A d_P(y_j)$$

D' sendo a diferencial de $C' \otimes_A P$. Temos ainda:

$$(u \otimes_A 1_P)(D(x_i \otimes_A y_j)) = (u \otimes_A 1_P)(d_C(x_i) \otimes_A y_j + (-1)^i x_i \otimes_A d_P(y_j)) =$$

$$(u \otimes_A 1_P)(d_C(x_i) \otimes_A y_j) + (-1)^i (u \otimes_A 1_P)(x_i \otimes_A d_P(y_j)) =$$

$$(u \circ d_C(x_i)) \otimes_A y_j + (-1)^i u(x_i) \otimes_A d_P(y_j)$$

D sendo a diferencial de $C \otimes_A P$.

Da observação feita após a afirmação 1 e da afirmação 4, segue que a sequência B.8 é uma sequência exata de complexos. Logo, temos a seguinte sequência exata de A-módulo:

$$\cdots \longrightarrow H_n(Ker(f) \otimes_A P) \longrightarrow H_n(R \otimes_A P) \longrightarrow H_n(M \otimes_A P) \longrightarrow \cdots \tag{B.9}$$

A conclusão do teorema segue da sequência B.9 e do fato de $H(Ker(f) \otimes_A P) = 0$.

Q.E.D.

Definição B.3.2. *Sejam M um A-módulo, N um A-módulo e $(L(M), p_M)$, $(L(N), p_N)$ as resolução projetivas canônicas de M e N, respectivamente. Chamamos de produto de torção de M por N ao A-módulo:*

$$Tor^A(M, N) = H(L(M) \otimes_A L(N))$$

Ao A-módulo $Tor_n^A(M, N) = H_n(L(M) \otimes_A L(N))$ chamamos de n-ésimo módulo de torção de M por N. Fica claro que $Tor^A(M, N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Tor_n^A(M, N)$.

Lema B.3.1. *Sejam:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{u} M'' \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g} N \xrightarrow{v} N'' \longrightarrow 0$$

duas sequências exatas de A-módulos e homomorfismos. O homomorfismo:

$$u \otimes v : M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N''$$

é sobrejetivo e tem por núcleo o submódulo $im(f \otimes 1_N) + im(1_M \otimes g)$*, soma das imagens dos homomrfismos* $f \otimes 1_N : M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ *e* $1_M \otimes g : M \otimes N' \longrightarrow M \otimes N$*.*

Demonstração:

Seja $z = \sum_k x_k \otimes y_k \in M'' \otimes N''$*. Desde que u e v são sobrejetivas, podemos escrever para cada k,* $x_k = u(t_k)$ *e* $y_k = v(q_k)$*, com* $t_k \in M$ *e* $q_k \in N$*. Assim sendo, temos:*

$$z = \sum_k x_k \otimes y_k = \sum_k u(t_k) \otimes v(q_k) = \sum_k (u \otimes v)(t_k \otimes q_k) = (u \otimes v)(\sum_k t_k \otimes q_k)$$

Dessa forma, segue a sobrejetividade. Seja agora $z \in im(f \otimes 1_N) + im(1_M \otimes g)$*, podemos escrever:*

$$z = (f \otimes 1_N)(\sum_k t_k \otimes h_k) + (1_M \otimes g)(\sum_r q_r \otimes p_r) = \sum_k f(t_k) \otimes h_k + \sum_r q_r \otimes g(p_r)$$

com $t_k \in M'$*,* $h_k \in N$*,*$q_r \in M$ *e* $p_r \in N'$*. Daí segue que:*

$$(u \otimes v)(z) = (u \otimes v)(\sum_k f(t_k) \otimes h_k + \sum_r q_r \otimes g(p_r)) =$$

$$\sum_k (u \otimes v)(f(t_k) \otimes h_k) + \sum_r (u \otimes v)(q_r \otimes g(p_r)) =$$

$$\sum_k (u \circ f)(t_k) \otimes v(h_k) + \sum_r u(q_r) \otimes (v \circ g(p_r)) = 0$$

Uma vez que as sequências da hipótese são exatas, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes N' \arrow[r, "f \otimes_A 1_{N'}"] \arrow[d, "1_{M'} \otimes g"] & M \otimes N' \arrow[r, "u \otimes_A 1_{N'}"] \arrow[d, "1_M \otimes g"] & M'' \otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''} \otimes_A g"] & 0 \\
M' \otimes N \arrow[r, "f \otimes_A 1_N"] \arrow[d, "1_{M'} \otimes v"] & M \otimes N \arrow[r, "u \otimes_A 1_N"] \arrow[d, "1_M \otimes v"] & M'' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''} \otimes_A v"] & 0 \\
M' \otimes N'' \arrow[r, "f \otimes 1_{N''}"] \arrow[d] & M \otimes N'' \arrow[r, "u \otimes 1_{N''}"] \arrow[d] & M'' \otimes N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

comutativo, cujas linhas e colunas são exatas. Seja $z \in Ker(u \otimes v)$, temos que:

$$(u \otimes v)(z) = 0 \Rightarrow (u \otimes 1_{N''}) \circ (1_M \otimes v)(z) = 0 \Rightarrow$$

$$(1_M \otimes v)(z) \in Ker(u \otimes 1_{N''}) = im(f \otimes 1_{N''})$$

Dessa forma, existe $a \in M' \otimes N''$ tal que $(1_M \otimes v)(z) = (f \otimes 1_{N''})(a)$. Uma vez que $1_{M'} \otimes v$ é sobrejetivo, existe $b \in M' \otimes N$ tal que $a = (1_{M'} \otimes v)(b)$. Assim sendo, temos:

$$(1_M \otimes v)(z) = (f \otimes_A 1_{N''}) \circ (1_{M'} \otimes_A v)(b) = (f \otimes_A v)(b) \Rightarrow$$

$$(1_M \otimes_A v)(z) - (f \otimes_A v)(b) = 0 \Rightarrow (1_M \otimes_A v)(z - (f \otimes_A 1_N)(b)) = 0 \Rightarrow$$

$$z - (f \otimes_A 1_N)(b) \in Ker(1_M \otimes_A v) = im(1_M \otimes_A g) \Rightarrow$$

$$\exists c \in M \otimes_A N'/z - (f \otimes_A 1_N)(b) = (1_M \otimes_A g)(c) \Rightarrow$$

$$z = (f \otimes_A 1_N)(b) + (1_M \otimes_A g)(c) \in im(f \otimes 1_N) + im(1_M \otimes g)$$

Q.E.D.

Proposição B.3.4. *$Tor_n^A(M, N) = 0, \forall n < 0$ e $Tor_0^A(M, N)$ é isomorfo (como A-módulos) a $M \otimes_A N$.*

Demonstração:

A primeira afirmação é trivial, uma vez que $i + j = n < 0 \Rightarrow i < 0$ ou $j < 0$. Assim, se $L_i(M) = 0$ ou $L_j(N) = 0$, então:

$$L_i(M) \otimes_A L_j(N) = 0 \Rightarrow \bigoplus_{i+j=n} (L_i(M) \otimes_A L_j(N)) = 0 \Rightarrow$$

$$Tor_n^A(M, N) = H_n(L(M) \otimes_A L(N)) = 0$$

Quanto a segunda, observe que $Z_0(L(M)) = L_0(M)$ e $Z_0(L(N)) = L_0(N)$, dessa forma temos duas sequências exatas:

$$0 \longrightarrow B_0(L(M)) \xrightarrow{i_0} L_0(M) \xrightarrow{\pi_0} H_0(L(M)) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow B_0(L(N)) \xrightarrow{i'_0} L_0(N) \xrightarrow{\pi'_0} H_0(L(N)) \longrightarrow 0$$

Pelo lema B.3.1, segue que o homomorfismo:

$$\pi_0 \otimes_A \pi'_0 : L_0(M) \otimes_A L_0(N) \longrightarrow H_0(L(M)) \otimes_A H_0(L(N))$$

é sobrejetivo e tem por núcleo $im(B_0(L(M)) \otimes_A L_0(N)) + im(L_0(M) \otimes_A B_0(L(N)))$. *Seja* $z \in im(B_0(L(M)) \otimes_A L_0(N)) + im(L_0(M) \otimes_A B_0(L(N)))$, *temos que* z *pode ser escrito:* $z = \sum_k x_k \otimes_A y_k + \sum_r p_r \otimes_A q_r$, *com* $x_k \in B_0(L(M)), y_k \in L_0(N), p_r \in L_0(M)$ *e* $q_r \in B_0(L(N))$. *Assim sendo, temos:*

$$z = \sum_k x_k \otimes_A y_k + \sum_r p_r \otimes_A q_r = \sum_k d_1(t_k) \otimes_A y_k + \sum_r p_r \otimes_A d'_1(l_r) =$$

$$\sum_k D_1(t_k \otimes_A y_k) - \sum_r D_1(p_r \otimes_A l_r) = D_1(\sum_k t_k \otimes_A y_k - \sum_r p_r \otimes_A l_r)$$

onde D *é a diferencial de* $L(M) \otimes_A L(N)$. *Observando que sendo* $(L(M) \otimes_A L(M))_1 = \bigoplus_{i+j=1} (L_i(M) \otimes_A L_j(N))$, *teremos os seguintes casos:* $(i > 1, j < 0)$, $(j > 1, i < 0)$, $(i = 1, j = 0)$ *e* $(j = 1, i = 0)$, *no primeiro caso teremos* $L_j(N) = 0$ *e então* $L_i(M) \otimes_A L_j(N) = 0$, *no segundo* $L_i(M) = 0$ *e dessa forma* $L_i(M) \otimes_A L_j(N) = 0$. *Assim,*
$D_1 = \oplus(d_i \otimes_A 1_{L(N)} + (-1)^i 1_{L(M)} \otimes_A d'_j)$ *pode ser visto como:*

$$(d_1 \otimes_A 1_{L(N)} - 1_{L(M)} \otimes_A d'_0) \oplus (d_0 \otimes_A 1_{L(N)} + 1_{L(M)} \otimes_A d'_1)$$

Como d_0 *e* d'_0 *são identicamente nulas, segue que* D_1 *pode ser visto como:*

$$(d_1 \otimes_A 1_{L(N)}) \oplus (1_{L(M)} \otimes_A d'_1)$$

Seja agora $z \in im(D_1)$, *pelo que foi discutido acima, temos:*

$$z = (d_1 \otimes_A 1_{L(N)}) \oplus (1_{L(M)} \otimes_A d'_1)(\sum_k t_k \otimes_A y_k + \sum_r p_r \otimes_A l_r)$$

com $\sum_k t_k \otimes_A y_k \in L_1(M) \otimes_A L_0(N)$ *e* $\sum_r p_r \otimes_A l_r \in L_0(M) \otimes_A L_1(N)$. *Dessa forma:*

$$z = \sum_k d_1(t_k) \otimes_A y_k + \sum_r p_r \otimes_A d'_1(l_r) \in im(B_0(L(M)) \otimes_A L_0(N)) + im(L_0(M) \otimes_A B_0(L(N)))$$

O que nos dá:

$$im(B_0(L(M)) \otimes_A L_0(N)) + im(L_0(M) \otimes_A B_0(L(N))) = B_0(L(M) \otimes_A L(N))$$

Como $(L(M)\otimes_A L(M))_0 = \bigoplus_{i+j=0} (L_i(M)\otimes_A L_j(N))$, *teremos os seguintes casos,* $(i>0, j<0)$, $(j>0, i<0)$ *e* $(i=0, j=0)$,*no primeiro caso teremos* $L_j(N)=0$ *e então* $L_i(M)\otimes_A L_j(N)=0$, *no segundo* $L_i(M)=0$ *e dessa forma* $L_i(M)\otimes_A L_j(N)=0$. *Assim,* $(L(M)\otimes_A L(M))_0$ *pode ser identificado com* $L_0(M)\otimes_A L_0(N)$ *e* D_0 *com* $d_0\otimes_A 1_{L(N)} + 1_{L(M)}\otimes_A d_0'$, *como* d_0 *e* d_0' *são identicamente nulas segue que* D_0 *também é. Assim sendo, temos que:*

$$Tor_0^A(M,N) = H_0(L(M)\otimes_A L(N)) = \frac{Z_0(L(M)\otimes_A L(N))}{B_0(L(M)\otimes_A L(N))} =$$

$$\frac{L_0(M)\otimes_A L_0(N)}{im(B_0(L(M))\otimes_A L_0(N)) + im(L_0(M)\otimes_A B_0(L(N)))} \simeq H_0(L(M))\otimes_A H_0(L(N))$$

Como $L(M)$ *(resp.* $L(N)$*) são resoluções, segue que* $H_0(L(M))\simeq M$ *(resp.* $H_0(L(N))\simeq N$*). E dessa forma,* $H_0(L(M))\otimes_A H_0(L(N))\simeq M\otimes_A N$. *compondo esse último isomorfismo com o de cima, segue o resultado.*

Q.E.D.

No que segue, identificaremos $Tor_0^A(M,N)$ *com* $M\otimes_A N$, *por meio do isomorfismo da proposição B.3.4, que não passa da aplicação* $\overline{x\otimes_A y}\mapsto (p_M(x))\otimes_A (p_N(y))$.

Corolário B.3.1. *Sejam* P_M *uma resolução de* M *e* R_N *uma resolução de* N. *Se* P_M *ou* R_N *é plana, então existe um isomorfismo:*

$$Tor^A(M,N)\simeq H(P_M\otimes_A R_N)$$

Demonstração:

Observando que $L(M)$ *e* $L(N)$ *são planos, temos a seguinte cadeia de isomorfismos:*

$$Tor^A(M,N) = H(L(M)\otimes_A L(N)) \simeq H(M\otimes_A L(N)) \simeq H(P_M\otimes_A L(N)) \simeq$$

$$H(L(N)\otimes_A P_M) \simeq H(N\otimes_A P_M) \simeq H(R_N\otimes_A P_M) \simeq H(P_M\otimes_A R_N)$$

se P_M *for plano, ou:*

$$Tor^A(M,N) = H(L(M)\otimes_A L(N)) \simeq H(L(N)\otimes_A L(M)) \simeq H(N\otimes_A L(M)) \simeq$$

$$H(R_N\otimes_A L(M)) \simeq H(L(M)\otimes_A R_N) \simeq H(M\otimes_A R_N) \simeq H(P_M\otimes_A R_N)$$

caso R_N *seja plano.*

Q.E.D.

Proposição B.3.5. *Sejam M e N A-módulos. Temos que:*

$$Tor^A(M,N) \simeq Tor^A(N,M)$$

Demonstração:

A proposição segue direto da proposição B.3.1 e da observação à proposição B.1.1.

Q.E.D.

Proposição B.3.6. *Sejam M, N A-módulos e* $(L(M), p_M)$, $(L(N), p_N)$ *as resoluções canônicas livres de M e N, respectivamente. Temos que* $p_M \otimes_A 1_{L(N)}$ *(resp.* $1_{L(M)} \otimes_A p_N$*) induz um isomorfismo:*

$$Tor^A(M,N) \simeq H(M \otimes_A L(N))$$

(resp. $Tor^A(M,N) \simeq H(L(M) \otimes_A N)$*).*

Demonstração:

A primeira afirmação segue direto do teorema B.3.1. Quanto a segunda, basta observar que o homomorfismo induzido por $1_{L(M)} \otimes_A p_N$ *é a composta dos isomorfismos:*

$$Tor^A(M,N) \simeq Tor^A(N,M) = H(L(N) \otimes_A L(M)) \simeq$$

$$H(N \otimes_A L(M)) \simeq H(L(M) \otimes_A N)$$

Onde o primeiro isomorfismo, segue da proposição B.3.5, o segundo da primeira parte da proposição e o terceiro da proposição B.3.1 e da observação à proposição B.1.1.

Q.E.D.

Corolário B.3.2. *sejam M e N A-módulos. Temos que:*

$$Ann(M) + Ann(N) \subseteq Ann(Tor^A(N,M))$$

Demonstração:

Sejam $(L(N), d_N)$ *e* $(L(M), d_M)$ *as resoluções canônicas livres de N e M, respectivamente. Se* $\overline{x \otimes y} \in H(L(N) \otimes_A M)$, *com* $x \in L(N)$, $y \in M$ *e* $a \in Ann(M)$, *então* $\overline{a(x \otimes y)} = \overline{x \otimes (ay)} = 0$. *Se* $\widehat{t \otimes z} \in H(N \otimes_A L(M))$, *com* $t \in N$, $z \in L(M)$ *e* $b \in Ann(N)$, *então* $b\widehat{(t \otimes z)} = \widehat{(bt) \otimes z} = 0$. *Como* $H(L(N) \otimes_A M) \simeq Ext_A(N,M) \simeq H(N \otimes_A L(M))$, *segue que* $Ann(M), Ann(N) \subseteq Ann(Tor^A(N,M))$.

Corolário B.3.3. *Sejam M e N um A-módulos. Se M ou N é plano, então $Tor_n^A(M,N) = 0$, $\forall n > 0$.*

Demonstração:

Considere M (resp. N) como complexo à diferencial nula e seja (P_M, f_M) (resp. (P_N, f_N)) a resolução de M (resp. N), tal que $P_M = M$ (resp. $P_N = N$) e f_M (resp. f_N) restrito a $P_{M0} = M$ (resp. $P_{N0} = N$) é a identidade. Se M é plano, então P_M é plana. Se N é plano, então P_N é plana. Assim sendo, teremos que P_M ou P_N é plana. Pelo corolário B.3.1, temos que $Tor^A(M,N) \simeq H(P_M \otimes_A P_N)$. Mas $H_n(P_M \otimes_A P_N) = 0$, $\forall n \neq 0$.

Q.E.D.

Corolário B.3.4. *Sejam $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{N_\beta\}_{\beta \in B}$ duas famílias de A-módulos. Existe um isomorfismo:*

$$\bigoplus_{(\alpha,\beta)} Tor^A(M_\alpha, N_\beta) \simeq Tor^A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \bigoplus_\beta N_\beta)$$

Demonstração:

O isomorfismo requerido segue da composição dos isomorfismos:

$$\bigoplus_{(\alpha,\beta)} Tor^A(M_\alpha, N_\beta) \simeq \bigoplus_\beta (\bigoplus_\alpha Tor^A(M_\alpha, N_\beta)) = \bigoplus_\beta (\bigoplus_\alpha H(L(M_\alpha) \otimes_A L(N_\beta))) \simeq$$

$$\bigoplus_\beta (\bigoplus_\alpha H(M_\alpha \otimes_A L(N_\beta))) \simeq \bigoplus_\beta H(\bigoplus_\alpha (M_\alpha \otimes_A L(N_\beta))) \simeq \bigoplus_\beta H((\bigoplus_\alpha M_\alpha) \otimes_A L(N_\beta)) \simeq$$

$$\bigoplus_\beta H(L(\bigoplus_\alpha M_\alpha) \otimes_A L(N_\beta)) \simeq \bigoplus_\beta H(L(N_\beta) \otimes_A L(\bigoplus_\alpha M_\alpha)) \simeq \bigoplus_\beta H(N_\beta \otimes_A L(\bigoplus_\alpha M_\alpha)) \simeq$$

$$H(\bigoplus_\beta (N_\beta \otimes_A L(\bigoplus_\alpha M_\alpha))) \simeq H((\bigoplus_\beta N_\beta) \otimes_A L(\bigoplus_\alpha M_\alpha)) \simeq H(L(\bigoplus_\beta N_\beta) \otimes_A L(\bigoplus_\alpha M_\alpha)) \simeq$$

$$H(L(\bigoplus_\alpha M_\alpha) \otimes_A L(\bigoplus_\beta N_\beta)) = Tor^A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \bigoplus_\beta N_\beta)$$

Que são canônicos ou extensões a soma direta de isomorfismos já considerados.

Q.E.D.

Teorema B.3.2. *Seja:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de módulos e homomorfismos. Para todo A-módulo à esquerda N, existe uma família de homomorfismos que torna a sequência:

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^A(M',N) \longrightarrow Tor_n^A(M,N) \longrightarrow Tor_n^A(M'',N) \longrightarrow Tor_{n-1}^A(M',N) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^A(M'',N) \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{u\otimes_A 1_N} M \otimes_A N \xrightarrow{v\otimes_A 1_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exata.

Demonstração:

Desde que $L(N)$ é plano, temos a seguinte sequência exata (de módulos e homomorfismos):

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A L(N) \xrightarrow{u\otimes_A 1} M \otimes_A L(N) \xrightarrow{v\otimes_A 1} M'' \otimes_A L(N) \longrightarrow 0$$

Da afirmação 4 do teorema B.3.1 sabemos que tal sequência é uma sequência exata de morfismos complexos. Assim sendo, temos pelo corolário B.1.1, a seguinte sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H_n(M \otimes_A L(N)) \longrightarrow H_n(M'' \otimes_A L(N)) \longrightarrow H_{n-1}(M' \otimes_A L(N)) \longrightarrow \cdots$$

Defina a família de homomorfismos, de tal forma que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(M \otimes_A L(N)) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(M'' \otimes_A L(N)) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(M' \otimes_A L(N)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Tor_n^A(M,N) \arrow[r] & Tor_n^A(M'',N) \arrow[r] & Tor_{n-1}^A(M',N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

seja exato. Sendo a primeira linha como na sequência acima e as colunas as inversas dos isomorfismos definidos na proposição B.3.6. Segue do lema A.1.3 que a segunda linha de tal diagrama é exata. Temos agora que mostrar que, com a identificação $Tor_0^A(M',N) = M' \otimes_A N$ (resp. $Tor_0^A(M,N) = M \otimes_A N$), o homomorfismo definido acima entre $M' \otimes_A N$ e $M \otimes_A N$ é $u \otimes_A 1_N$.

Sejam η tal homomorfismos,

$$\varphi : Tor_0^A(M',N) \longrightarrow Tor_0^A(M,N)$$

o homomorfismo definido acima (sem a identificação) e $\overline{x \otimes_A y} \in Tor_0^A(M',N)$. Temos que:

$$\varphi(\overline{x \otimes_A y}) = (H(p_M \otimes_A 1_N))^{-1} \circ H(u \otimes_A 1_N) \circ ((H(p_{M'} \otimes_A 1_N))^{-1})^{-1}(\overline{x \otimes_A y}) =$$

$$(H(p_M \otimes_A 1_N))^{-1} \circ H(u \otimes_A 1_N) \circ H(p_{M'} \otimes_A 1_N)(\overline{x \otimes_A y}) =$$

$$(H(p_M \otimes_A 1_N))^{-1} \circ H(u \otimes_A 1_N)(\overline{p_{M'}(x) \otimes_A y}) = (H(p_M \otimes_A 1_N))^{-1}(\overline{(u \circ p_{M'})(x) \otimes_A y}) =$$

$$(H(p_M \otimes_A 1_N))^{-1}(\overline{(p_M \circ L(u))(x) \otimes_A y}) =$$

$$(H(p_M \otimes_A 1_N))^{-1} \circ H(p_M \otimes_A 1_N)(\overline{(L(u)(x)) \otimes_A y}) = \overline{(L(u)(x)) \otimes_A y}$$

onde $L(u)$ é como na proposição B.2.3. Assim sendo, temos que:

$$\eta(p_{M'}(x) \otimes_A p_N(y)) = \beta \circ \varphi(\overline{x \otimes_A y}) = \beta(\overline{(L(u)(x)) \otimes_A y}) =$$

$$(p_M \circ L(u)(x)) \otimes_A p_N(y) = (u \circ p_{M'}(x)) \otimes_A p_N(y) = (u \otimes_A 1_N)(p_{M'}(x) \otimes_A p_N(y))$$

sendo β o isomorfismo que identifica $Tor_0^A(M,N)$ e $M \otimes_A N$. Segue por linearidade que $\varphi = u \otimes_A 1_N$. O caso $v \otimes_A 1_N$ é totalmente análogo.

Q.E.D.

Corolário B.3.5. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de módulos e homomorfismos. Para todo A-módulo M, existe uma família de homomorfismos que torna a sequência:

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^A(M,N') \longrightarrow Tor_n^A(M,N) \longrightarrow Tor_n^A(M,N'') \longrightarrow Tor_{n-1}^A(M,N') \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^A(M,N') \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1_M \otimes_A u} M \otimes_A N \xrightarrow{1_M \otimes_A v} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

exata.

Demonstração:

Temos, pelo teorema, que existe uma sequência:

$$\cdots \longrightarrow Tor_n^A(N',M) \longrightarrow Tor_n^A(N,M) \longrightarrow Tor_n^A(N'',M) \longrightarrow Tor_{n-1}^A(N',M) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow Tor_1^A(N'',M) \longrightarrow N' \otimes_A M \xrightarrow{u \otimes_A 1_M} N \otimes_A M \xrightarrow{v \otimes_A 1_M} N'' \otimes_A M \longrightarrow 0$$

exata. O corolário segue da proposição B.3.5 e do lema A.1.3, observando que o isomorfismo da proposição B.3.5, restrito (por exemplo) a $N' \otimes_A M$, não passa da aplicação $x \otimes_A y \mapsto y \otimes_A x$.

Q.E.D.

Corolário B.3.6. *Sejam M e N A-módulos. Se $Tor_1^A(M,N) = 0$, então para toda sequência exata:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M'' \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

de A-módulos e homomorfismos, a sequência

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{u\otimes_A 1_N} M'' \otimes_A N \xrightarrow{v\otimes_A 1_N} M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

é exata. E para toda sequência exata:

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N' \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$$

de A-módulos e homomorfismo a sequência:

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1_M\otimes_A u} M \otimes_A N' \xrightarrow{1_M\otimes_A v} M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração:

Segue direto do teorema B.3.2 e do corolário B.3.5.

Q.E.D.

Corolário B.3.7. *Seja N um A-módulo. Se $Tor_1^A(M,N) = 0$, para todo A-módulo M, então N é plano.*

Demonstração:

Consequência imediata do corolário B.3.6.

Q.E.D.

Corolário B.3.8. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Se R_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, é plano, então para todo A-módulo P, temos:

$$Tor_{n+m}^A(P,M) \simeq Tor_m^A(P,N)$$

$\forall m \geqslant 1$.

Demonstração:

Façamos indução sobre n. Supondo $n = 1$, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Do corolário B.3.5, segue que a sequência:

$$\cdots \longrightarrow Tor^A_{m+1}(P,R_1) \longrightarrow Tor^A_{m+1}(P,M) \longrightarrow Tor^A_m(P,N) \longrightarrow Tor^A_m(P,R_1) \longrightarrow \tag{B.10}$$

$$\cdots \longrightarrow Tor^A_1(P,M) \longrightarrow P\otimes_A N \xrightarrow{1_P\otimes_A u} P\otimes_A R_1 \xrightarrow{1_P\otimes_A v} P\otimes_A M \longrightarrow 0$$

também é exata. Onde os homomorfismos que não aparecem no diagrama acima, são dados por tal corolário. Como R_1 é plano, segue do corolário B.3.3, que $Tor^A_m(P,R_1)=0$, $\forall m>0$. Concluímos da sequência B.10 que $Tor^A_{m+1}(P,M)\simeq Tor^A_m(P,N)$, $\forall m\geqslant 1$. Suponha que o resultado é válido para $n\geq 1$, e seja:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata, tal que R_i é plano para todo i, $1\leqslant i\leqslant n+1$. "Quebremos"tal sequência nas duas seguintes:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_{n+1} \longrightarrow im(f_{n+1}) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow im(f_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

que são também exatas. Da primeira dessa duas sequências e da parte inicial do argumento, temos que $Tor^A_m(P,N)\simeq Tor^A_{m+1}(P,im(f_{n+1}))$, $\forall P$ e $\forall m\geq 1$. Da segunda e da hipótese de indução, concluímos que $Tor^A_{m+n+1}(P,M)\simeq Tor^A_{m+1}(P,im(f_{n+1}))$, $\forall P$ e $\forall m\geq 1$. Compondo esses dois isomorfismos, segue o resultado.

Q.E.D.

Corolário B.3.9. *Sob a hipótese do corolário precedente. Se M é plano, então N também é.*

Demonstração:

Pelo corolário B.3.3, temos que $Tor^A_{n+1}(P,M)=0$, $\forall P$. Concluímos do corolário anterior que $Tor^A_1(P,N)=0$, $\forall P$. Assim sendo, o resultado segue do corolário B.3.7.

Q.E.D.

Corolário B.3.10. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Se N' e N'' são planos, N também é.

Demonstração:

Pelo corolário B.3.5, para todo A-módulo M, existe uma sequência exata:

$$Tor_1^A(M,N') \longrightarrow Tor_1^A(M,N) \longrightarrow Tor_1^A(M,N'')$$

Desde que N' e N'' são planos, temos pelo corolário B.3.3 que $Tor_1^A(M,N') = Tor_1^A(M,N'') = 0$. Assim sendo, concluímos que $Tor_1^A(M,N) = 0$, $\forall M$. O resultado, então, segue do corolário B.3.7.

Q.E.D.

Proposição B.3.7. *Sejam A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Para todo A-módulo N, finitamente gerado e para todo inteiro n o A-módulo $Tor_n^A(M,N)$ é noetheriano.*

Demonstração:

Pela observação feita ao teorema B.2.1, existe uma resolução:

$$\cdots \xrightarrow{d_2} R_1 \xrightarrow{d_1} R_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

de M, tal que cada R_i, $i \geq 0$, é livre e finitamente gerado. Desde que N é finitamente gerado, segue que $R_n \otimes_A N$ é finitamente gerado para todo $n \in \mathbb{Z}$. Consequentemente $H_n(R \otimes_A N)$ é finitamente gerado, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Uma vez que o par formado por N e a identidade é uma resolução para N, segue do corolário B.3.1, que $Tor_n^A(M,N) \simeq H_n(R \otimes_A N)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, $Tor_n^A(M,N)$ é finitamente gerado $\forall n \in \mathbb{Z}$. Como A é noetheriano, segue o resultado.

Q.E.D.

B.4 Módulo de Extensão

Sejam (C,d) e (C',d') dois complexos. Seja $Homgr_A^n(C,C')$ o submódulo dos homomorfismos graduados de grau $-n$. Se escrevermos $C = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ e $C' = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C'_j$, teremos o seguinte isomorfismo:

$$Homgr_A^n(C,C') \simeq \prod_{i+j=n} (Hom(C_i, C'^j))$$

tal que $f \mapsto \{f_i^j\}_{i+j=n}$, sendo f_i^j a restrição de f à C_i. Lembrando que estamos convencionando $C'^j = C'_{-j}$ e $d'^j = d'_{-j}$. Identificaremos esses dois módulos por meio desse isomorfismo. Fixados $i,j,n \in \mathbb{Z}$, tal que $i+j=n$, temos os seguintes homomorfismos:

$$\prod_{r+s=n-1} (Hom(C_r, C'^s)) \xrightarrow{pr_{(i-1,j)}} Hom(C_{i-1}, C'^j) \longrightarrow Hom(C_i, C'^j)$$

(resp. $\prod_{r+s=n-1}(Hom(C_r, C'^s)) \xrightarrow{pr_{(i,j-1)}} Hom(C_i, C'^{j-1}) \longrightarrow Hom(C_i, C'^j)$ *)*

Onde $pr_{(r,s)}$ *é a projeção canônica e o segundo homomorfismo é dado por* $f \mapsto (-1)^n f \circ d_i$ *(resp.* $g \mapsto d'^j \circ g$*). Esses homomorfismos induzem o seguinte:*

$$\prod_{r+s=n-1}(Hom(C_r, C'^s)) \longrightarrow Hom(C_i, C'^j)$$

tal que $\{f_s^r\}_{r+s=n-1} \mapsto d'^j \circ f_i^{j-1} + (-1)^n f_{i-1}^j \circ d_i$*. Que por sua vez induz:*

$$\prod_{r+s=n-1}(Hom(C_r, C'^s)) \xrightarrow{D'^{n-1}} \prod_{i+j=n}(Hom(C_i, C'^j))$$

tal que $D'^{n-1}(\{f_s^r\}_{r+s=n-1}) = \{d'^j \circ f_i^{j-1} + (-1)^n f_{i-1}^j \circ d_i\}_{i+j=n}$*.*

Afirmação: $D'^n \circ D'^{n-1} = 0$*.*

De fato,

$$D^n \circ D^{n-1}(\{f_s^r\}_{r+s=n-1}) = D^n(\{d'^j \circ f_i^{j-1} + (-1)^n f_{i-1}^j \circ d_i\}_{i+j=n}) =$$

$$D^n(\{d'^j \circ f_i^{j-1}\}_{i+j=n}) + (-1)^n D^n(\{f_{i-1}^j \circ d_i\}_{i+j=n}) = \{d'^t \circ d'^{t-1} \circ f_z^{t-2} +$$

$$(-1)^{n+1} d'^t \circ f_{z-1}^{t-1} \circ d_z\}_{t+z=n+1} + (-1)^n \{d'^t \circ f_{z-1}^{t-1} \circ d_z + (-1)^{n+1} f_{z-2}^t \circ d_{z-1} \circ d_z\}_{t+z=n+1} =$$

$$(-1)^{n+1}\{d'^t \circ f_{z-1}^{t-1} \circ d_z\}_{t+z=n+1} + (-1)^n \{d'^t \circ f_{z-1}^{t-1} \circ d_z\}_{t+z=n+1} = 0$$

Observe que com a identificação $Homgr_A^n(C, C') \simeq \prod_{i+k=n}(Hom(C, C'))$*,* D^n *se identifica a aplicação* $f \mapsto d' \circ f + (-1)^{n+1} f \circ d$*, uma vez que temos as identificações* $d' \circ f \leftrightarrow \{d'^k \circ f_i^k\}_{i+k=n}$ *e* $f \circ d \leftrightarrow \{f_i^k \circ d_i\}_{k+i=n}$*.*

Definição B.4.1. *O complexo* $(Homgr_A(C, C'), D')$*, tal que* $Homgr_A(C, C') = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Homgr_A^n(C, C')$ *e* $D' = \oplus D^n$*, é chamado de complexo de homomorfismos de* C *em* C'*.*

Sejam $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *e* $\{N_\beta\}_{\beta \in J}$ *duas famílias de* A*-módulos. Se* $M_\alpha = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{\alpha i}$*,* $N_\beta = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} N_{\beta k}$ *e* $j_{\alpha i} : M_{\alpha i} \longrightarrow \bigoplus_\alpha M_\alpha$*,* $pr_\beta^k : \prod_\beta N_\beta \longrightarrow N_\beta^k$ *denotam a injeção e a projeção canônicas, respectivamente, então* $f_i^k \mapsto pr_\beta^k \circ f_i^k \circ j_{\alpha i}$ *é um homomorfismo de* $Hom(\bigoplus_\alpha M_{\alpha i}, \prod_\beta N_\beta^k)$ *em* $Hom(M_{\alpha i}, N_\beta^k)$*. Assim sendo, ele induz o homomorfismo* $\{f_i^k\}_{i+k=n} \mapsto \{pr_\beta^k \circ f_i^k \circ j_{\alpha i}\}_{i+k=n}$ *de* $\prod_{i+k=n}(Hom(\bigoplus_\alpha M_{\alpha i}, \prod_\beta N_\beta^k))$ *em* $\prod_{i+k=n}(Hom(M_{\alpha i}, N_\beta^k))$*. Esse por sua vez induz*

$\varphi^n : Homgr^n_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \prod_\beta N_\beta) = \prod_{i+k=n}(Hom(\bigoplus_\alpha M_{\alpha i}, \prod_\beta N^k_\beta)) \longrightarrow \prod_{\alpha\beta}(\prod_{i+k=n}(Hom(M_{\alpha i}, N^k_\beta))) = \prod_{\alpha\beta}(Homgr^n_A(M_\alpha, N_\beta))$, *tal que* $\varphi^n(\{f^k_i\}_{i+k=n}) = \{\{pr^k_\beta \circ f^k_i \circ j_{\alpha i}\}_{i+k=n}\}_{\alpha\beta}$. *Finalmente, podemos definir o homomorfismo graduado de grau zero,* $\oplus\varphi^n$ *de* $Homgr_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \prod_\beta N_\beta)$ *em* $\prod_{\alpha\beta}(Homgr_A(M_\alpha, N_\beta))$.

Proposição B.4.1. *O homomorfismo* $\oplus\varphi^n$*, definido acima é um isomorfismo de complexos.*

Demonstração:

Dizer que $\{\{pr^k_\beta \circ f^k_i \circ j_{\alpha i}\}_{i+j=n}\}_{\alpha\beta} = 0$ *é o mesmo que dizer que:*

$$pr^k_\beta \circ f^k_i \circ j_{\alpha i} = 0, \forall\alpha \in I, \forall\beta \in J, \forall k, i/k+i=n$$

Se $\sum_\alpha a_{\alpha i} j_{\alpha i}(x_{\alpha i}) \in \bigoplus_\alpha M_{\alpha i}$*, então:*

$$\{y^k_\beta\}_\beta = f^k_i(\sum_\alpha a_{\alpha i} j_{\alpha i}(x_{\alpha i})) = \sum_\alpha a_{\alpha i} f^k_i(j_{\alpha i}(x_{\alpha i})) \Rightarrow$$

$$y^k_\beta = \sum_\alpha a_{\alpha i} pr^k_\beta \circ f^k_i(j_{\alpha i}(x_{\alpha i})) = 0 \Rightarrow 0 = \{y^k_\beta\}_\beta = f^k_i(\sum_\alpha a_{\alpha i} j_{\alpha i}(x_{\alpha i})) \Rightarrow$$

$$f^k_i = 0 \Rightarrow \{f^k_i\}_{i+k=n} = 0$$

Logo, φ^n *é injetiva* $\forall n \in \mathbb{Z}$ *e por conseguinte,* $\oplus\varphi^n$ *é injetiva. Seja, agora,* $h^{\beta k}_{\alpha i} \in Hom(M_{\alpha i}, N^k_\beta)$ $/i+k=n$. *Se* $j'^k_\beta : N^k_\beta \longrightarrow \bigoplus_\beta N^k_\beta$ *denota a injeção canônica, então considere o homomorfismo:* $\oplus_\alpha(\prod_\beta h^{\beta k}_{\alpha i}) = f^k_i$ *de em* $\bigoplus_\beta N^k_\beta \hookrightarrow \prod_\beta N^k_\beta$*. Temos que:*

$$pr^k_\beta \circ f^k_i \circ j_{\alpha i}(x_{\alpha i}) = pr^k_\beta \circ (\oplus_\alpha(\prod_\beta h^{\beta k}_{\alpha i})) \circ j_{\alpha i}(x_{\alpha i}) = \prod_\beta h^{\beta k}_{\alpha i}(x_{\alpha i}) = pr^k_\beta\{h^{\beta k}_{\alpha i}(x_{\alpha i})\}_{\beta \in J} = h^{\beta k}_{\alpha i}(x_{\alpha i})$$

Assim sendo, se $h = \{\{h^{\beta k}_{\alpha i}\}_{i+j=n}\}_{\alpha\beta} \in \prod_{\alpha\beta} Homgr^n_A(M_\alpha, N_\beta)$*, então* $h = \varphi^n(\{f^k_i\}_{i+k=n})$*, onde os* f^k_i *são como acima. Disso resulta que* φ^n *é sobrejetiva* $\forall n \in \mathbb{Z}$*. Consequentemente,* $\oplus\varphi^n$ *é sobrejetiva.*

Sejam D' *e* $D'_{\alpha\beta}$ *as diferenciais de* $Homgr_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \prod_\beta N_\beta)$ *e* $Homgr_A(M_\alpha, N_\beta)$*, respectivamente. Temos que:*

$$(\prod_{\alpha\beta} D'^n_{\alpha\beta}) \circ \varphi^n(\{f^k_i\}_{i+k=n}) = (\prod_{\alpha\beta} D'^n_{\alpha\beta})(\{\{pr^k_\beta \circ f^k_i \circ j_{\alpha i}\}_{i+k=n}\}_{\alpha\beta}) =$$

$$\{D'^n_{\alpha\beta}(\{pr^k_\beta \circ f^k_i \circ j_{\alpha i}\}_{i+k=n})\}_{\alpha\beta} = \{\{d'^k_\beta \circ (pr^{k-1}_\beta \circ f^{k-1}_i \circ j_{\alpha i}) +$$

$$(-1)^{n+1}(pr^k_\beta \circ f^k_{i-1} \circ j_{\alpha,i-1}) \circ d_{\alpha i}\}_{i+k=n+1}\}_{\alpha\beta}$$

Por outro lado:

$$\varphi^{n+1} \circ D'^n(\{f^k_i\}_{i+k=n}) = \varphi^{n+1}(\{((\prod_\beta d'^k_\beta) \circ f^{k-1}_i + (-1)^{n+1} f^k_{i-1} \circ (\oplus_\alpha d_{\alpha i}))\}_{i+k=n+1}) =$$

$$\varphi^{n+1}(\{(\prod_\beta d'^k_\beta) \circ f^{k-1}_i\}_{i+k=n+1}) + (-1)^{n+1}\varphi^{n+1}(\{f^k_{i-1} \circ (\oplus_\alpha d_{\alpha i})\}_{i+k=n+1}) =$$

$$\{\{pr^k_\beta \circ (\prod_\beta d'^k_\beta) \circ f^{k-1}_i \circ j_{\alpha i}\}_{i+k=n+1}\}_{\alpha\beta} + (-1)^{n+1}\{\{pr^k_\beta \circ f^k_{i-1} \circ (\oplus_\alpha d_{\alpha i}) \circ j_{\alpha,i-1}\}_{i+k=n+1}\}_{\alpha\beta} =$$

$$\{\{d'^k_\beta \circ (pr^{k-1}_\beta \circ f^{k-1}_i \circ j_{\alpha i}) + (-1)^{n+1}(pr^k_\beta \circ f^k_{i-1} \circ j_{\alpha,i-1}) \circ d_{\alpha i}\}_{i+k=n}\}_{\alpha\beta}$$

Q.E.D.

Lema B.4.1. *Sejam M, N e P A-módulos. Existe um isomorfismo:*

$$Hom(M \otimes_A N; P) \simeq Hom(M; Hom(N; P))$$

Demonstração:

Para cada $f \in Hom(M \otimes_A N; P)$ existe um único homomorfismo g que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta"'] & P \\ M \otimes_A N \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

onde η é a aplicação canônica, comutar. Considere a aplicação:

$$\varphi : Hom(M \otimes_A N; P) \longrightarrow Hom(M; Hom(N; P))$$

tal que $\varphi(f)(x)(y) = g(x, y)$, onde g é como acima. Da mesma forma, para cada $h \in Hom(M; Hom(N; P))$ podemos definir a aplicação:

$$\theta : M \times N \longrightarrow P$$

tal que $\theta(x,y) = h(x)(y)$. Uma vez que θ é claramente A-bilinear, podemos definir o único homomorfismo ξ, que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\eta"'] & P \\ M \otimes_A N \arrow[ur, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

comutar. Assim sendo, considere a aplicação:

$$\psi : Hom(M; Hom(N;P)) \longrightarrow Hom(M \otimes_A N; P)$$

tal que $\psi(h) = \xi$, onde ξ é como acima. Observe que:

$$\varphi \circ \psi(h)(x)(y) = \psi(h)(x \otimes y) = h(x)(y) \Rightarrow \varphi \circ \psi(h)(x) = h(x) \Rightarrow \varphi \circ \psi(h) = h$$

e

$$\psi \circ \varphi(f)(x \otimes y) = \varphi(f)(x)(y) = f(x \otimes y) \Rightarrow \psi \circ \varphi(f) = f$$

Q.E.D.

Proposição B.4.2. *Sejam (C,d), (C',d') e (C'',d'') complexos. Existe um isomorfismo de complexos:*

$$Homgr_A(C \otimes_A C'; C'') \simeq Homgr_A(C; Homgr_A(C'; C''))$$

Demonstração:

Segue do lema B.4.1 que para cada terna de inteiros (p,q,r) existe um isomorfismo de A-módulos:

$$Hom(C_p \otimes_A C'_q; C''^r) \simeq Hom(C_p; Hom(C'_q; C''^r))$$

Do corolário A.1.2 e da proposição B.4.1, temos os seguintes isomorfismos de A-módulos:

$$\prod_{p+q=m} Hom(C_p \otimes_A C'_q; C''^r) \simeq \prod_{p+q=m} Hom(C_p; Hom(C'_q; C''^r)) \Rightarrow$$

$$Hom(\bigoplus_{p+q=m} [C_p \otimes_A C'_q]; C''^r) \simeq \prod_{p+q=m} Hom(C_p; Hom(C'_q; C''^r)) \Rightarrow$$

$$\prod_{m+r=n} Hom([C\otimes_A C']_m; C^{''r}) \simeq \prod_{m+r=n}[\prod_{p+q=m} Hom(C_p; Hom(C'_q; C^{''r}))] \Rightarrow$$

$$\prod_{m+r=n} Hom([C\otimes_A C']_m; C^{''r}) \simeq \prod_{m+p=n}[\prod_{q+r=m} Hom(C_p; Hom(C'_q; C^{''r}))] \Rightarrow$$

$$\prod_{m+r=n} Hom([C\otimes_A C']_m; C^{''r}) \simeq \prod_{m+p=n} Hom(C_p; \prod_{q+r=m} Hom(C'_q; C^{''r})) \Rightarrow$$

$$Homgr^n_A(C\otimes_A C'; C'') \simeq Homgr^n_A(C; Homgr_A(C'; C''))$$

Se φ_n *é tal isomorfismo, então podemos definir o isomorfismo de A-módulos:*

$$\oplus\varphi_n : Homgr_A(C\otimes_A C'; C'') \longrightarrow Homgr_A(C; Homgr_A(C'; C''))$$

Sejam D, D', D'' *e* D^* *as diferencias de* $Homgr_A(C\otimes_A C'; C'')$, $Homgr_A(C; Homgr_A(C'; C''))$, $C\otimes_A C'$ *e* $Homgr_A(C'; C'')$, *respectivamente. Se* $x_i \in C_i$ *e* $y_j \in C'_j$, *então:*

$$D^n \circ \varphi_n(f)(x_i)(y_j) = D^* \circ \varphi_n(f)(x_i)(y_j) + (-1)^{n+1} \circ \varphi_n(f) \circ d(x_i)(y_j) =$$

$$d^{''} \circ \varphi_n(f)(x_i)(y_j) + (-1)^{n-i+1}\varphi_n(f)(x_i) \circ d'(y_j) + (-1)^{n+1}\varphi_n(f) \circ d(x_i)(y_j) =$$

$$d^{''n} \circ f(x_i \otimes y_j) + (-1)^{n-i+1} f(x_i \otimes d'_j(y_j)) + (-1)^{n+1} f(d_i(x_i) \otimes y_j)$$

e

$$\varphi_{n+1} \circ D^n(f)(x_i)(y_j) = \varphi_{n+1}(d^{''} \circ f + (-1)^{n+1} f \circ D'')(x_i)(y_j) =$$

$$[d^{''} \circ f + (-1)^{n+1} f \circ D''](x_i \otimes y_j) = d^{''} \circ f(x_i \otimes y_j) + (-1)^{n+1} f \circ D''(x_i \otimes y_j) =$$

$$= d^{''n} \circ f(x_i \otimes y_j) + (-1)^{n+1} f \circ (d_i(x_i) \otimes y_j) + (-1)^{n-i+1} f \circ (x_i \otimes d'_j(y_j))$$

Q.E.D.

Proposição B.4.3. *Seja* (C, d) *um complexo. Existe um isomorfismo:*

$$Homgr_A(A; C) \simeq C$$

de complexos.

Demonstração:

Considere, para cada n, o isomorfismo canônico:

$$\varphi_n : Hom_A(A; C^n) \longrightarrow C^n$$

Tais isomorfismo induzem o seguinte:

$$\oplus\varphi_n : Homgr_A(A; C) \longrightarrow C$$

Observe que:

$$d^n \circ \varphi_{n+1}(f) = d^n(f(1)) = (d^n \circ f)(1) = \varphi_n \circ D^n(f)$$

onde D é a diferencial de $Homgr_A(A; C)$.

Q.E.D.

Proposição B.4.4. *Seja:*

$$C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C''$$

uma sequência exata de morfismos e complexos. Se P é um complexo projetivo e I é um complexo injetivo, então as duas sequências:

$$Homgr_A(P, C') \xrightarrow{\overline{u}} Homgr_A(P, C) \xrightarrow{\overline{v}} Homgr_A(P, C'')$$

e

$$Homgr_A(C'', I) \xrightarrow{\widetilde{v}} Homgr_A(C, I) \xrightarrow{\widetilde{u}} Homgr_A(C', I)$$

de morfismos e complexos, onde $\overline{u}(f) = u \circ f$ (resp. $\overline{v}(g) = v \circ g$) e $\widetilde{v}(h) = h \circ v$ (resp. $\widetilde{u}(s) = s \circ u$), são exatas.

Demonstração:

sejam $j'_i : C'_i \longrightarrow C'$, $j_i : C_i \longrightarrow C$ e $j''_i : C''_i \longrightarrow C''$ as injeções canônicas e u_i (resp. v_i) a restrição de u a C'_i (resp. de v a C_i).

Afirmação 1: *Para cada i a sequência:*

$$C'_i \xrightarrow{u_i} C_i \xrightarrow{v_i} C''_i$$

é exata.

De fato, temos que o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} C'_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "j'_i"] & C_i \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "j_i"] & C''_i \arrow[d, "j''_i"] \\ C' \arrow[r, "u"] & C \arrow[r, "v"] & C'' \end{tikzcd}$$

é comutativo e tem a segunda linha exata. Assim sendo, temos:

$$y_i = u_i(x_i) \Rightarrow j_i(y_i) = j_i \circ u_i(x_i) \Rightarrow j_i(y_i) = u \circ j'_i(x_i) \Rightarrow$$

$$v \circ j_i(y_i) = 0 \Rightarrow j_i \circ v_i(y_i) = 0 \Rightarrow v_i(y_i) = 0$$

$$v_i(y_i) = 0 \Rightarrow j''_i \circ v_i(y_i) = 0 \Rightarrow v \circ j_i(y_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\exists z \in C'/j_i(y_i) = u(z) \Rightarrow j_i(y_i) = u(\sum_{i\in\mathbb{Z}} j'_i(z_i))/z = \sum_{i\in\mathbb{Z}} j'_i(z_i), z_k \in C'_k \Rightarrow$$

$$j_i(y_i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u \circ j'_i(z_i) \Rightarrow j_i(y_i) = u \circ j'_i(z_i) \Rightarrow j_i(y_i) = j_i \circ u_i(y_i) \Rightarrow y_i = u_i(x_i)$$

Fixados $i, n \in \mathbb{Z}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, tal que $i + k = n$, temos que as sequências:

$$Hom(P_k, C'^i) \xrightarrow{\overline{u^i}} Hom(P_k, C^i) \xrightarrow{\overline{v^i}} Hom(P_k, C''^i)$$

e

$$Hom(C''_i, I^k) \xrightarrow{\widetilde{v_i}} Hom(C_i, I^k) \xrightarrow{\widetilde{u_i}} Hom(C'_i, I^k)$$

são exatas, desde que P é projetivo e I é injetivo. Sendo $\overline{u^i}(f_k^i) = u^i \circ f_k^i$ (resp. $\overline{v^i}(g_k^i) = v^i \circ g_k^i$) e $\widetilde{v_i}(h_i^k) = h_i^k \circ v_i$ (resp. $\widetilde{u_i}(s_i^k) = s_i^k \circ u_i$). Dessa forma, elas definem as seguintes sequências exatas de módulos e homomorfismos:

$$\prod_{k+i=n} (Hom(P_k, C'^i)) \xrightarrow{\Pi \overline{u^i}} \prod_{k+i=n} (Hom(P_k, C^i)) \xrightarrow{\Pi \overline{v^i}} \prod_{k+i=n} (Hom(P_k, C''^i))$$

e

$$\prod_{k+i=n} (Hom(C''_i, I^k)) \xrightarrow{\Pi \widetilde{v_i}} \prod_{k+i=n} (Hom(C_i, I^k)) \xrightarrow{\Pi \widetilde{u_i}} \prod_{k+i=n} (Hom(C'_i, I^k))$$

Afirmação 2: *Os seguintes diagramas:*

$$\begin{array}{ccc}
Homgr^n_A(P,C') & \xrightarrow{\quad \overline{u} \quad} & Homgr^n_A(P,C) \\
\Big\downarrow \varphi^n & & \Big\downarrow \phi^n \\
\prod\limits_{i+k=n}(Hom(P_k,C'^i)) & \xrightarrow{\prod \overline{u_i}} & \prod\limits_{i+k=n}(Hom(P_k,C^i))
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
Homgr^n_A(C'',I) & \xrightarrow{\quad \widetilde{v} \quad} & Homgr^n_A(C,I) \\
\Big\downarrow \varphi'^n & & \Big\downarrow \phi'^n \\
\prod\limits_{i+k=n}(Hom(C'_i,I^k)) & \xrightarrow{\prod \widetilde{v_i}} & \prod\limits_{i+k=n}(Hom(C_i,I^k))
\end{array}$$

onde os homomorfismos verticais são os que identificam tais módulos, são comutativos.

Demonstraremos apenas o primeiro, o segundo, sendo demonstrado de forma totalmente análoga.

$$\varphi^n \circ \overline{u}(f) = \varphi^n(u \circ f) = \{(u \circ f)^i_k\}_{i+k=n} = \{u^i \circ f^i_k\}_{i+k=n}$$

Sendo $(u \circ f)^i_k : P_k \longrightarrow C^i$ *(resp.* f^i_k*) o homomorfismo que tem por gráfico a restrição do gráfico de* $u \circ f$ *(resp. f) a* P_k*. Observe que, desde que f tem grau -n e u tem grau zero, temos que* $u \circ f$ *tem grau -n e portanto,* $(u \circ f)^i_k(P_k) \subseteq C^i$*.*

$$(\prod \overline{u^i}) \circ \phi^n(f) = (\prod \overline{u^i})(\{f^i_k\}_{i+k=n}) = \{\overline{u^i}(f^i_k)\}_{i+k=n} = \{u^i \circ f^i_k\}_{i+k=n}$$

Que as sequências são exatas, segue do lema A.1.3. Falta demonstrarmos que os homomorfismos são morfismos. Demonstraremos, por exemplo, o caso $\bar{u}$*, os demais sendo análogos. Sejam* D' *e* D'' *as diferencias de* $Homgr^n_A(P,C')$ *e* $Homgr^n_A(P,C)$*, respectivamente. Temos que:*

$$\bar{u} \circ D'^n(f) = \bar{u}(d_{C'} \circ f + (-1)^{n+1} f \circ d_P) = u \circ d_{C'} \circ f + (-1)^{n+1} u \circ f \circ d_P$$

e

$$D''^n \circ \bar{u}(f) = D''^n(u \circ f) = d_C \circ u \circ f + (-1)^{n+1} u \circ f \circ d_P = u \circ d_{C'} \circ f + (-1)^{n+1} u \circ f \circ d_P$$

Q.E.D.

Teorema B.4.1. *Sejam M um A-módulo e (R,f) uma resolução (à direita ou à esquerda) de M. Se P é um complexo projetivo e I um complexo injetivo, tais que* $P_i = 0$, $\forall i < 0$ *e* $I^k = 0$, $\forall k < 0$*, então* $\bar{f}$ *e* $\widetilde{f}$*, as duas como na proposição anterior, são homologismos.*

Demonstração:

Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} R \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

de morfismos e complexos (vide afirmação 1 do teorema B.3.1). Pela proposição anterior, temos que as sequências de complexos e morfismos:

$$0 \longrightarrow Homgr_A(P, Ker(f)) \xrightarrow{\bar{i}} Homgr_A(P, R) \xrightarrow{\bar{f}} Homgr_A(P, M) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow Homgr_A(M, I) \xrightarrow{\widetilde{f}} Homgr_A(R, I) \xrightarrow{\widetilde{i}} Homgr_A(Ker(f), I) \longrightarrow 0$$

são exatas. Pelo corolário B.1.1, existem duas sequências exatas:

$$\cdots \xrightarrow{H^n(\bar{i})} H^n(\widehat{H}(P, R)) \xrightarrow{H^n(\bar{f})} H^n(\widehat{H}(P, M)) \xrightarrow{\partial^n(\bar{i}, \bar{f})} H^{n+1}(\widehat{H}(P, Ker(f))) \xrightarrow{H^{n+1}(\bar{i})} \cdots$$

e

$$\cdots \xrightarrow{H^n(\widetilde{f})} H^n(\widehat{H}(R, I)) \xrightarrow{H^n(\widetilde{i})} H^n(\widehat{H}(Ker(f), I)) \xrightarrow{\partial^n(\widetilde{f}, \widetilde{i})} H^{n+1}(\widehat{H}(M, I)) \xrightarrow{H^{n+1}(\widetilde{f})} \cdots$$

onde $\widehat{H}(C, C') = Homgr_A(C, C')$. *Dessa forma, é suficiente demonstrar que* $H(Homgr_A(P, Ker(f))) = 0$ *e* $H(Homgr_A(Ker(f), I)) = 0$.

Sejam $g \in Z^n(Homgr_A(P, Ker(f)))$ *e* D' *a diferencial de* $Homgr_A(P, Ker(f))$, *temos que:*

$$D'(g) = 0 \Rightarrow d_{Ker(f)} \circ g + (-1)^{n+1} g \circ d_P = 0 \Rightarrow d_{Ker(f)} \circ g = g \circ ((-1)^n d_P)$$

Agora observe que $(P', (-1)^n d_P)$ *é um complexo, onde* $P' = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} P'_m$ *e* $P'_m = P_{m+n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, *que tem por módulos de bordos, ciclos e homologia os mesmos de* (P, d_P). *Dessa forma,* g *é um morfismo de* $(Ker(f), d_{Ker(f)})$ *em* $(P', (-1)^n d_P)$. *Desde* $P_i = 0$, $\forall i < 0$, *temos que* $g_i = 0$, $\forall i < 0$, *onde* $g = \{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $g_i \in Hom(P_i, Ker(f)^{n-i})$. *Assim,* g *é um morfismo que prolonga o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P'_m \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P'_{-n} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Ker(f)_m \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Ker(f)_{-n} \arrow[r] & Ker(f)_{-n-1} \arrow[r] & Ker(f)_{-n-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Desde que $H(Ker(f)) = 0$ *(vide afirmação 1 do teorema B.3.1) e o morfismo identicamente nulo claramente prolonga tal diagrama, segue da proposição B.2.1 que existe um homomorfismo:*

$$h : P' = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} P'_m \longrightarrow Ker(f) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} Ker(f)_m$$

de grau 1, tal que $g = d_{Ker(f)} \circ h + h \circ ((-1)^n d_P) = d_{Ker(f)} \circ h + (-1)^n h \circ d_P$. *Agora, dizer que* h *é um homomorfismo de grau 1 entre* $P' = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} P'_m$ *e* $Ker(f) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} Ker(f)_m$, *é o mesmo que dizer que* h *é de grau 1-n entre* $P = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} P_m$ *e* $Ker(f) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} Ker(f)_m$. *Assim sendo,* $g = D'(h)$ *e portanto* $H(Homgr_A(P, Ker(f))) = 0$.

Sejam $h \in Z^n(Homgr_A(Ker(f), I))$ *e* D^{***} *a diferencial de* $Homgr_A(Ker(f), I)$, *temos que:*

$$D^{***}(h) = 0 \Rightarrow d_I \circ h + (-1)^{n+1} h \circ d_{Ker(f)} = 0 \Rightarrow ((-1)^n d_I) \circ h = h \circ d_{Ker(f)}$$

Observe que $(I', (-1)^n d_I)$, *onde* $I' = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} I'^m$ *e* $I'^m = I^{m+n}$, *é um complexo, que tem por módulos de bordo, ciclos e homologia o mesmo de* (I, d_I) *(deslocados por grau -n). Assim sendo,* h *é um morfismo entre os complexos* $Ker(f)$ *e* I'. *Desde que* $I^i = 0$, $\forall i < 0$, *temos que* $h^i = 0$, $\forall i < 0$, *onde* $h = \{h_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $h_i \in Hom(Ker(f)_i, I^{n-i})$. *Assim,* h *prolonga o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Ker(f)^{-n-2} \arrow[r] \arrow[d] & Ker(f)^{-n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Ker(f)^{-n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Ker(f)^m \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I'^{-n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I'^m \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Desde que o morfismo nulo também prolonga tal diagrama, segue da proposição B.2.2 que existe um homomorfismo:

$$s : Ker(f) \longrightarrow I'$$

de grau -1 (visto nas graduações $I' = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} I'^m$, $Ker(f) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} Ker(f)^m$ *e grau 1 visto nas graduações* $I' = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} I'_m$, $Ker(f) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} Ker(f)_m$*), tal que* $h = ((-1)^n d_I) \circ s + s \circ d_{ker(f)}$. *Dizer que* s *é de grau -1 entre* $Ker(f) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} Ker(f)^m$ *e* $I' = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} I'^m$ *é equivalente a dizer que* $s \in Homgr_A^{n-1}(Ker(f), I)$, *o que implica que* $h = D^{***}((-1)^n s)$ *e portanto* $H(Homgr_A^n(Ker(f), I)) = 0$.

Q.E.D.

Corolário B.4.1. *Sejam* P_M *uma resolução de* M *e* R_N *uma resolução de* N. *Se* P_M *é projetiva ou* R_N *é injetiva, então:*

$$Ext_A(M, N) \simeq H(Homgr_A(P_M, R_N))$$

Demonstração:

Observando que $L(M)$ é projetivo e $I(N)$ é injetivo, temos a seguinte cadeia de isomorfismos:

$$Ext_A(M,N) = H(Homgr_A(L(M), I(N))) \simeq H(Homgr_A(L(M), N)) \simeq$$

$$H(Homgr_A(L(M), R_N)) \simeq H(Homgr_A(M, R_N)) \simeq H(Homgr_A(P_M, R_N))$$

se R_N for injetivo, ou:

$$Ext_A(M,N) = H(Homgr_A(L(M), I(N))) \simeq H(Homgr_A(M, I(N))) \simeq$$

$$H(Homgr_A(P_M, I(N))) \simeq H(Homgr_A(P_M, N)) \simeq H(Homgr_A(P_M, R_N))$$

se P_M for projetivo.

Q.E.D.

Definição B.4.2. *Sejam M e N dois A-módulos, $(L(M), p_M)$ a resolução livre canônica de M e $(I(N), e_N)$ a resolução injetiva canônica de N. Chamamos de módulo de extensão de N por M ao A-módulo:*

$$Ext_A(M,N) = H(Homgr_A(L(M), I(N)))$$

Ao A-módulo $Ext^n_A(M,N) = H_n(Homgr(L(M); I(N)))$ chamamos de n-ésimo módulo de extensão de N por M. Fica claro que $Ext_A(M,N) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Ext^n_A(M,N)$.

Proposição B.4.5. *$Ext^n_A(M,N) = 0$, $\forall n < 0$ e $Ext^0_A(M,N)$ é isomorfo (como A-módulos) a $Hom(M,N)$.*

Demonstração:

Seja $f \in Homgr^n_A(L(M), I(N))$, com $n < 0$. Isso significa que $f(L_m(M)) \subset I^{n-m}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Se $m \geq 0$, então $n - m < 0$. Dessa forma, $f(L_m(M)) = 0$, uma vez que $I^s(N) = 0$, $\forall s < 0$. Se $m < 0$, então $f(L_m(M)) = 0$, uma vez que $L_r(M) = 0$, $\forall r < 0$. Assim sendo, temos $Homgr^n_A(L(M), I(N)) = 0$ e com maior razão $Ext^n_A(M,N) = 0$.

Seja:

$$f \in Z^0(Homgr_A(L(M), I(N))) \simeq H^0(Homgr_A(L(M), I(N)))$$

pois $B^0(Homgr_A(L(M), I(N))) = 0$. Temos que $D'(f) = 0$, onde D' é a diferencial de $Homgr_A(L(M), I(N))$. Dessa forma, segue que:

$$d_{I(N)} \circ f - f \circ d_{L(M)} = 0 \Rightarrow d_{I(N)} \circ f = f \circ d_{L(M)}$$

Assim sendo, segue que f é um morfismo entre $L(M)$ e $I(N)$. Pela proposição B.1.1, temos que:

$$f(B_0(L(M))) \subseteq B^0(I(N)) = 0 \Rightarrow Ker(p_M) \subseteq Ker(f)$$

Assim, podemos definir o (único) homomorfismo f', tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} L(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_M"'] & I(N) \\ M \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo (corolário A.2.2). f sendo um morfismo, temos também que $f(Z_0(L(M))) \subseteq Z_0(I(N))$, mas $Z_0(L(M)) = L_0(M)$, $Z_0(I(N)) = im(e_N)$ e $f'(M) = f(L_0(M))$. Dessa forma, temos $f'(M) \subseteq im(e_N)$ e assim podemos definir o (único) homomorfismo f^*, tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f^*"'] & I(N) \\ N \arrow[ur, "e_N"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo (Lembrando que $N \simeq e_N(N)$). A aplicação $f \mapsto f^*$ é claramente um homomorfismo. Observe que:

$$f^* = 0 \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = 0$$

logo o homomorfismo $f \mapsto f^*$ é injetivo. Seja g um homomorfismo de M em N. Defina $f = e_N \circ g \circ p_M$ de $L(M)$ em $I(N)$. Observe que:

$$d_{I(N)} \circ f = (d_{I(N)} \circ e_N) \circ g \circ p_M = 0 \circ g \circ p_M = 0$$

e

$$f \circ d_{L(M)} = e_N \circ g \circ (p_{L(M)} \circ d_{L(M)}) = e_N \circ g \circ 0 = 0$$

Dessa forma, $f \in Z_0(Homgr_A(M, N))$. Assim sendo, temos que f' é tal que:

$$f' \circ p_M = f = e_N \circ g \circ p_M$$

Como p_M é sobrejetivo, segue que $f' = e_N \circ g$. Temos ainda, que f^* é tal que:

$$e_N \circ f^* = f' = e_N \circ g$$

como e_N é injetiva, segue que $f^* = g$. Dessa forma, o homomorfismo $\widehat{f} \mapsto f^*$, onde $\widehat{f}$ é a classe de f, é um isomorfismo.

Q.E.D.

No que segue, identificaremos $Ext^0_A(M,N)$ *com* $Hom(M,N)$*, por meio do isomorfismo da proposição anterior, que não passa do homomorfismo* $\widehat{f} \mapsto f^*$*, tal que* $f = e_N \circ f^* \circ p_M$*.*

Proposição B.4.6. *Sejam M, N A-módulos,* $(L(M), p_M)$ *a resolução livre canônica de M e* $(I(N), e_N)$ *a resolução injetiva canônica de N. A aplicação:*

$$\widetilde{p_M} : Homgr_A(M, I(N)) \longrightarrow Homgr_A(L(M), I(N))$$

(resp. $\overline{e_N} : Homgr_A(L(M), N) \longrightarrow Homgr_A(L(M), I(N))$*), tal que* $f \mapsto f \circ p_M$ *(resp.* $h \mapsto e_N \circ h$*), induz um isomorfismo de* $H(Homgr_A(M, I(N)))$ *(resp.* $H(Homgr_A(L(M), N))$*) em* $Ext_A(M,N)$*.*

Demonstração:

Segue direto do teorema B.4.1.

Q.E.D.

Corolário B.4.2. *Sejam M e N A-módulos. temos que:*

$$Ann(M) + Ann(N) \subseteq Ann(Ext_A(N,M))$$

Demonstração:

Sejam $(L(N), d_L)$ *e* $(I(M), d_I)$ *as resoluções canônicas projetiva e injetiva (respectivamente) de N e M, respectivamente. Se* $\overline{f} \in H(Homgr_A(L(N), M))$ *e* $a \in Ann(M)$*, então* $a(\overline{f}) = \overline{af} = 0$*. Se* $\widehat{g} \in H(Homgr_A(N, I(M)))$ *e* $b \in Ann(N)$*, então* $b(\widehat{g}) = \widehat{bg} = 0$*. Como*

$$H(Homgr_A(L(N), M)) \simeq Ext_A(N,M) \simeq H(Homgr_A(N, I(M)))$$

segue que $Ann(M), Ann(N) \subseteq Ann(Ext_A(N,M))$*.*

Q.E.D.

Corolário B.4.3. *Sejam M e N A-módulos. Se M é projetivo ou N é injetivo, então:*

$$Ext^n_A(M,N) = 0$$

$\forall n > 0$.

Demonstração:

Considere M (resp. N) como complexo à diferencial nula e seja (P_M, f_M) *(resp.* (R_N, f_N)*) a resolução de M (resp. N), tal que* $P_M = M$ *(resp.* $R_N = N$*) e* f_M *(resp.* f_N*) restrito a* $P_{M0} = M$ *(resp.* $P_{N0} = N$*) é a identidade. Se M é projetivo ou N é injetivo, segue que* P_M *é projetiva ou* R_N *é injetiva. Pelo corolário anterior, segue que* $Ext_A(M,N) \simeq H(Homgr_A(M,N))$*, mas* $H(Homgr_A(P_M, R_N)) = 0$*,* $\forall n \neq 0$*.*

Q.E.D.

Corolário B.4.4. *Sejam* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *e* $\{C'_\beta\}_{\beta\in B}$ *duas famílias de A-módulos. Existe um isomorfismo:*

$$\prod_{\alpha\beta} Ext_A(M_\alpha, N_\beta) \simeq Ext_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \prod_\beta N_\beta)$$

Demonstração:

O isomorfismo requerido segue da composição dos isomorfismos:

$$\prod_{\alpha\beta} Ext_A(M_\alpha, N_\beta) \simeq \prod_\alpha(\prod_\beta Ext_A(M_\alpha, N_\beta)) \simeq \prod_\alpha(\prod_\beta H(Homgr_A(L(M_\alpha), N_\beta))) \simeq$$

$$\prod_\alpha(H(\prod_\beta Homgr_A(L(M_\alpha), N_\beta))) \simeq \prod_\alpha(H(Homgr_A(L(M_\alpha), \prod_\beta N_\beta))) \simeq$$

$$\prod_\alpha Ext_A(M_\alpha, \prod_\beta N_\beta) \simeq \prod_\alpha(H(Homgr_A(M_\alpha, I(\prod_\beta N_\beta)))) \simeq$$

$$H(\prod_\alpha Homgr_A(M_\alpha, I(\prod_\beta N_\beta))) \simeq H(Homgr_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, I(\prod_\beta N_\beta)))$$

$$\simeq Ext_A(\bigoplus_\alpha M_\alpha, \prod_\beta N_\beta)$$

Que são canônicos ou extensões a produto de isomorfismos já considerado.

Q.E.D.

Teorema B.4.2. *Seja:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de módulos e homomorfismos. Para todo A-módulo N, existe uma família de homomorfismos que torna a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{\bar{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} Hom(M', N) \longrightarrow Ext^1_A(M'', N) \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow Ext^n_A(M'', N) \longrightarrow Ext^n_A(M, N) \longrightarrow Ext^n_A(M', N) \longrightarrow Ext^{n+1}_A(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

exata.

Demonstração:

Desde que $I(N)$ é injetivo, segue da proposição B.4.4 que a sequência de morfismos e complexos:

$$0 \longrightarrow Homgr_A(M'', I(N)) \longrightarrow Homgr_A(M, I(N)) \longrightarrow Homgr_A(M', I(N)) \longrightarrow 0$$

é exata.

Dessa forma, segue do corolário B.1.1, a existência da sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H^n(\widehat{H}(M, I(N))) \longrightarrow H^n(\widehat{H}(M', I(N))) \longrightarrow H^{n+1}(\widehat{H}(M'', I(N))) \longrightarrow \cdots$$

onde $\widehat{H}(C, C') = Homgr_A(C, C')$. Assim sendo, defina a família de homomorfismos, de tal forma que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(\widehat{H}(M, I(N))) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(\widehat{H}(M', I(N))) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(\widehat{H}(M'', I(N))) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Ext^n_A(M, N) \arrow[r] & Ext^n_A(M', N) \arrow[r] & Ext^{n+1}_A(M'', N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde as linhas verticais são dadas pelos isomorfismos definidos na proposição B.4.6, seja comutativo. Como a primeira linha do diagrama acima é exata, segue do lema A.1.3 que a segunda também é.

Falta demonstrar que com a identificação $Ext^0_A(M'', N) = Hom(M'', N)$ (resp. $Ext^0_A(M, N) = Hom(M, N)$), o homomorfismo definido acima entre $Hom(M'', N)$ e $Hom(M, N)$ é $\widetilde{v}$.

Sejam ψ tal homomorfismo e $g \in Hom(M'', N)$. Temos que $\exists f \in Z(Homgr_A(L(M''), I(N)))$ $/g = (f)^*$. Seja η o homomorfismo que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H^0(Homgr_A(M'', I(N))) \arrow[r, "H(\widetilde{v})"] \arrow[d, "H(\widetilde{p_{M''}})"'] & H^0(Homgr_A(M, I(N))) \arrow[d, "H(\widetilde{p_M})"] \\
Ext^0_A(M'', N) \arrow[r, "\eta"'] & Ext^0_A(M, N)
\end{tikzcd}$$

comutar. Temos que:

$$\eta(\widehat{f}) = H(\widetilde{p_M}) \circ H(\widetilde{v}) \circ (H(\widetilde{p_{M''}}))^{-1}(\widehat{f})$$

onde $\widehat{f}$ denota a classe de f. Pela proposição B.2.3, existe um morfismo de complexos L(v), tal que:

$$v \circ p_M = p_{M''} \circ L(v)$$

Afirmação:\ *O seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Homgr_A(M'', I(N))) \arrow[r, "\widetilde{v}"] \arrow[d, "\widetilde{p_{M''}}"'] & Homgr_A(M, I(N)) \arrow[d, "\widetilde{p_M}"] \\
Homgr_A(L(M''), I(N)) \arrow[r, "\widetilde{L(v)}"'] & Homgr_A(L(M), I(N))
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

De fato, temos que:

$$\widetilde{p_M} \circ \widetilde{v}(h) = h \circ v \circ p_M = h \circ p_{M''} \circ L(v) = \widetilde{L(v)} \circ \widetilde{p_{M''}}(h)$$

Dessa forma, temos que:

$$H(\widetilde{p_M} \circ \widetilde{v}) = H(\widetilde{L(v)} \circ \widetilde{p_{M''}}) \Rightarrow H(\widetilde{p_M}) \circ H(\widetilde{v}) = H(\widetilde{L(v)}) \circ H(\widetilde{p_{M''}}) \Rightarrow$$

$$H(\widetilde{L(v)}) = H(\widetilde{p_M}) \circ H(\widetilde{v}) \circ (H(\widetilde{p_{M''}}))^{-1}$$

Assim sendo, temos que:

$$\eta(\widehat{f}) = H(\widetilde{L(v)})(\widehat{f}) = \widehat{f \circ L(v)}$$

Por construção, ψ é o homomorfismo que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Ext_A^0(M'', N) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & Ext_A^0(M, N) \arrow[d] \\ Hom(M'', N) \arrow[r, "\psi"] & Hom(M, N) \end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são dados por $\widehat{f} \mapsto f^*$, f^* como na proposição B.4.5, comutar. Temos que:

$$\psi(g) = \psi(\widehat{f^*}) = (\eta(f))^* = (f \circ L(v))^*$$

Observe que:

$$e_N \circ g \circ v \circ p_M = e_N \circ g \circ p_{M''} \circ L(v) = f \circ L(v) = e_N \circ (f \circ L(v))^* \circ p_M$$

Da sobrejetividade de p_M e da injetividade de e_N, segue que:

$$\psi(g) = (f \circ L(v))^* = g \circ v = \widetilde{v}(g) \Rightarrow \psi = \widetilde{v}$$

O caso $\widetilde{u}$ é totalmente análogo.

Q.E.D.

Teorema B.4.3. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de módulos e homomorfismos. Para todo A-módulo M, existe uma família de homomorfismos que torna a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(M,N') \xrightarrow{\bar{u}} Hom(M,N) \xrightarrow{\bar{v}} Hom(M,N'') \longrightarrow Ext^1_A(M,N') \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow Ext^n_A(M,N') \longrightarrow Ext^n_A(M,N) \longrightarrow Ext^n_A(M,N'') \longrightarrow Ext^{n+1}_A(M,N') \longrightarrow \cdots$$

exata.

Demonstração:

Desde que $L(M)$ é projetivo, segue da proposição B.4.4 que a sequência de morfismos e complexos:

$$0 \longrightarrow Homgr_A(L(M),N') \longrightarrow Homgr_A(L(M),N) \longrightarrow Homgr_A(L(M),N'') \longrightarrow 0$$

é exata.

Dessa forma, segue do corolário B.1.1, a existência da sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H^n(\widehat{H}(L(M),N)) \longrightarrow H^n(\widehat{H}(L(M),N'')) \longrightarrow H^{n+1}(\widehat{H}(L(M),N')) \longrightarrow \cdots$$

onde $\widehat{H}(C,C') = Homgr_A(C,C')$. Assim sendo, defina a família de homomorfismos, de tal forma que o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^n(\widehat{H}(L(M),N)) & \longrightarrow & H^n(\widehat{H}(L(M),N'')) & \longrightarrow & H^{n+1}(\widehat{H}(L(M),N')) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & Ext^n_A(M,N) & \longrightarrow & Ext^n_A(M,N'') & \longrightarrow & Ext^{n+1}_A(M,N') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

onde as linhas verticais são dadas pelos isomorfismos definidos na proposição B.4.6, seja comutativo. Como a primeira linha do diagrama acima é exata, segue do lema A.1.3 que a segunda também é. Falta demonstrar que com a identificação $Ext^0_A(M,N') = Hom(M,N')$ (resp. $Ext^0_A(M,N) = Hom(M,N)$), o homomorfismo definido acima entre $Hom(M,N')$ e $Hom(M,N)$ é $\bar{u}$.

Sejam ψ tal homomorfismo e $g \in Hom(M,N')$. Temos que $\exists f \in Z(Homgr_A(L(M),I(N')))$ $/g = (f)^*$. Seja η o homomorfismo que faz o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(Homgr_A(L(M),N')) & \xrightarrow{H(\bar{u})} & H^0(Homgr_A(L(M),N)) \\
{\scriptstyle H(\overline{e_{N'}})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(\overline{e_N})} \\
Ext^0_A(M,N') & \xrightarrow[\eta]{} & Ext^0_A(M,N)
\end{array}$$

comutar. Temos que:

$$\eta(\widehat{f}) = H(\overline{e_N}) \circ H(\overline{u}) \circ (H(\overline{e_{N'}}))^{-1}(\widehat{f})$$

onde $\widehat{f}$ denota a classe de f. Pela proposição B.2.4, existe um morfismo de complexos I(u), tal que:

$$e_N \circ u = I(u) \circ e_{N'}$$

Afirmação: *O seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Homgr_A(L(M),N')) \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "\overline{e_{N'}}"'] & Homgr_A(L(M),N) \arrow[d, "\overline{e_N}"] \\
Homgr_A(L(M),I(N')) \arrow[r, "\overline{I(u)}"'] & Homgr_A(L(M),I(N))
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

De fato, temos que:

$$\overline{e_N} \circ \overline{u}(r) = e_N \circ u \circ r = I(u) \circ e_{N'} \circ r = \overline{I(u)} \circ \overline{e_{N'}}(r)$$

Dessa forma, segue que

$$H(\overline{e_N}) \circ H(\overline{u}) = H(\overline{e_N} \circ \overline{u}) = H(\overline{I(u)} \circ \overline{e_{N'}}) = H(\overline{I(u)}) \circ H(\overline{e_{N'}}) \Rightarrow$$

$$H(\overline{I(u)}) = H(\overline{e_N}) \circ H(\overline{u}) \circ (H(\overline{e_{N'}}))^{-1}$$

Assim sendo, temos que:

$$\eta(\widehat{f}) = H(\overline{I(u)})(\widehat{f}) = \widehat{I(u) \circ f}$$

Por construção, ψ é o homomorfismo que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Ext^0_A(M,N') \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & Ext^0_A(M,N) \arrow[d] \\
Hom(M,N') \arrow[r, "\psi"] & Hom(M,N)
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são dados por $\widehat{f} \mapsto f^*$, com f^* como na proposição B.4.5, comutativo. Assim sendo, temos que:

$$\psi(g) = \psi(f^*) = (\eta(\widehat{f}))^* = (I(u) \circ f)^*$$

Agora observe que:

$$e_N \circ u \circ g \circ p_M = I(u) \circ e_{N'} \circ g \circ p_M = I(u) \circ f = e_N \circ (I(u) \circ f)^* \circ p_M$$

Da sobrejetividade de p_M e da injetividade de e_N, segue que:

$$\psi(g) = (I(u) \circ f)^* = u \circ g = \overline{u}(g) \Rightarrow \psi = \overline{u}$$

O caso $\overline{v}$ é totalmente análogo.

Q.E.D.

Corolário B.4.5. *Sejam M e N A-módulos. Se $Ext_A^1(M,N) = 0$, então para toda sequência exata:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M'' \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

de A-módulos e homomorfismos, a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(M,N) \xrightarrow{\widetilde{v}} Hom(M',N) \xrightarrow{\widetilde{u}} Hom(M'',N) \longrightarrow 0$$

é exata. E para toda sequência exata:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} N'' \xrightarrow{v} N' \longrightarrow 0$$

de A-módulos e homomorfismos, a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(M,N) \xrightarrow{\bar{u}} Hom(M,N'') \xrightarrow{\bar{v}} Hom(M,N') \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração:

Consequência direta dos teoremas B.4.2 e B.4.3.

Q.E.D.

Corolário B.4.6. *Seja M um A-módulo. Se $Ext_A^1(M,N) = 0$ para todo A-módulo N, então M é projetivo.*

Demonstração:

Imediato a partir do corolário B.4.5.

Q.E.D.

Corolário B.4.7. *Seja N um A-módulo. Se $Ext_A^1(M,N) = 0$ para todo A-módulo M, então N é injetivo.*

Demonstração:

Imediato a partir do corolário B.4.5.

Q.E.D.

Corolário B.4.8. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Se R_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, é injetivo (resp. projetivo), então para todo A-módulo P, temos:

$$Ext_A^m(P, M) \simeq Ext_A^{m+n}(P, N)$$

(resp. $Ext_A^m(N, P) \simeq Ext_A^{m+n}(M, P)$), $\forall m \geqslant 1$.

Demonstração:

Façamos indução sobre n. Supondo $n = 1$, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

do teorema B.4.3 (resp. teorema B.4.2), segue que a sequência:

$$0 \longrightarrow Hom(P, N) \longrightarrow Hom(P, R_1) \longrightarrow Hom(P, M) \longrightarrow Ext_A^1(P, N) \longrightarrow \text{(B.11)}$$

$$\cdots \longrightarrow Ext_A^m(P, R_1) \longrightarrow Ext_A^m(P, M) \longrightarrow Ext_A^{m+1}(P, N) \longrightarrow Ext_A^{m+1}(P, R_1) \longrightarrow \cdots$$

(resp.

$$0 \longrightarrow Hom(M, P) \longrightarrow Hom(R_1, P) \longrightarrow Hom(N, P) \longrightarrow Ext_A^1(M, P) \longrightarrow \text{(B.12)}$$

$$\cdots \longrightarrow Ext_A^m(R_1, P) \longrightarrow Ext_A^m(N, P) \longrightarrow Ext_A^{m+1}(M, P) \longrightarrow Ext_A^{m+1}(R_1, P) \longrightarrow \cdots$$

) também é exata. Onde os homomorfismos que não aparecem no diagrama acima, são dados por tal teorema. Como R_1 é injetivo (resp. projetivo), segue do corolário B.4.3, que $Ext_A^m(P, R_1) = 0$ (resp. $Ext_A^m(R_1, P) = 0$), $\forall m > 0$. Concluímos da sequência B.11 (resp.sequência B.12) que $Ext_A^m(P, M) \simeq Ext_A^{m+1}(P, N)$ (resp. $Ext_A^m(N, P) \simeq Ext_A^{m+1}(M, P)$), $\forall m \geq 1$. Suponha que o resultado é válido para $n > 1$, e seja:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata, tal que R_i é injetivo (resp. projetivo) para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. "Quebremos"tal sequência nas duas seguintes:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_{n+1} \longrightarrow im(f_{n+1}) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow im(f_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1}} R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

que são também exatas. Da primeira dessa duas sequências e da parte inicial do argumento, temos que $Ext_A^{m+n+1}(P,N) \simeq Ext_A^{m+n}(P, im(f_{n+1}))$ *(resp.* $Ext_A^m(N,P) \simeq Ext_A^{m+1}(im(f_{n+1}),P)$*),* $\forall P$ *e* $\forall m \geq 1$*. Da segunda e da hipótese de indução, concluímos que* $Ext_A^m(P,M) \simeq Ext_A^{m+n}(P, im(f_{n+1}))$ *(resp.* $Ext_A^{m+1+n}(M,P) \simeq Ext_A^{m+1}(im(f_{n+1}),P)$*),* $\forall P$ *e* $\forall m \geq 1$*. Compondo esses dois isomorfismos, segue o resultado.*

Q.E.D.

Corolário B.4.9. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Suponha que cada R_i*,* $1 \leqslant i \leqslant n$*, é injetivo. Se N é injetivo, então M também é.*

Demonstração:

Se N é injetivo, segue do corolário B.4.3 que $Ext_A^{n+1}(P,N) = 0$*,* $\forall P$*. Assim sendo, temos pelo corolário B.4.8 que* $Ext_A^1(P,M) = 0$*. O resultado segue do corolário B.4.7.*

Q.E.D.

Corolário B.4.10. *Seja:*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Suponha que cada R_i*,* $1 \leqslant i \leqslant n$*, é projetivo. Se M é projetivo,então N também é.*

Demonstração:

Se M é projetivo, segue do corolário B.4.3 que $Ext_A^{n+1}(M,P) = 0$*,* $\forall P$*. Assim sendo, temos pelo corolário B.4.8 que* $Ext_A^1(N,P) = 0$*. O resultado segue do corolário B.4.6.*

Q.E.D.

Proposição B.4.7. *Sejam A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Para todo A-módulo N, finitamente gerado os A-módulos* $Ext_A^n(M,N)$ *são noetherianos.*

Demonstração:

Pela observação feita ao teorema B.2.1, existe uma resolução:

$$\cdots \xrightarrow{d_2} R_1 \xrightarrow{d_1} R_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

de M, tal que cada R_i*,* $i \geq 0$*, é livre e finitamente gerado. Pelo corolário B.4.1 temos que* $Ext_A^n(M,N) \simeq H^n(Homgr_A(R,N))$*, onde estamos considerando* $(N, 1_N)$ *uma resolução de N.*

Afirmação: *$Hom(R_n, N)$ é finitamente gerado para todo n.*

De fato, sejam $\{e_{in}\}_{i=1}^{r}$ uma base de R_n e $\{x_j\}_{j=1}^{s}$ um sistema de geradores de N. Defina o homomorfismo:

$$f_{ij}^n : R_n \longrightarrow N$$

tal que $f_{ij}^n(\sum_{i=1}^{r} a_{in}e_{in}) = a_{in}x_j$. Observe que f_{ij}^n está bem definida, pois:

$$\sum_{i=1}^{r} a_{in}e_{in} = \sum_{i=1}^{r} b_{in}e_{in} \Rightarrow a_{in} = b_{in}, \forall i \Rightarrow a_{in}x_j = b_{in}x_j$$

claramente os f_{ij}^n's são homomorfismos. Seja agora, $f^n \in Hom(R_n, N)$. Temos que:

$$f^n(\sum_{i=1}^{r} a_{in}e_{in}) = \sum_{i=1}^{r} a_{in}f^n(e_{in})$$

Se $f^n(e_{in}) = \sum_{j=1}^{s} b_{ij}^n x_j$, então:

$$f^n(\sum_{i=1}^{r} a_{in}e_{in}) = \sum_{i,j} b_{ij}^n a_{in}x_j = \sum_{i,j} b_{ij}^n f_{ij}^n(\sum_{i=1}^{r} a_{in}e_{in}) \Rightarrow f^n = \sum_{i,j} b_{ij}^n f_{ij}^n$$

Desde que, $Homgr_A^n(R, N) \simeq Hom(R_n, N)$, segue que $Homgr_A^n(R, N)$ é finitamente gerado e com maior razão $H^n(Homgr_A(R, N))$. Assim sendo, $Ext_A^n(M, N)$ é finitamente gerado. Como A é noetheriano, segue o resultado.

Q.E.D.

Apêndice C

Álgebra Exterior

C.1 Álgebras

Definição C.1.1. *Sejam M um A-módulo e $f : M \times M \longrightarrow M$ uma aplicação A-bilinear, ou seja, A-linear em cada coordenada. Ao par (M, f) chamamos de A-álgebra.*

No que segue, denotaremos $f(x, y)$ simplesmente por $x.y$(com ponto para diferenciar pela multiplicação por escalar) e diremos que tal elemento é a multiplicação de x por y. Uma A-álgebra é associativa, comutativa ou unitária, conforme sua multiplicação for comutativa, associativa, ou possuir um elemento neutro, respectivamente.

Exemplo C.1.1. *Se A e B são dois anéis comutativos e f um homomorfismo entre eles, então se definirmos $ab = f(a)b$, $a \in A$, $b \in B$ e por multiplicação a própria do anel B, teremos sobre B uma estrutura de A-álgebra associativa, comutativa e unitária. Reciprocamente, dada uma A-álgebra B, associativa, comutativa e unitária a aplicação $a \mapsto a1_B$, define um homomorfismo entre os anéis A e B.*

Proposição C.1.1. *Sejam E uma A-álgebra e $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de geradores do A-módulo E. Temos que:*

i) E é uma A-álgebra associativa, se, e somente se, $x_i.(x_j.x_k) = (x_i.x_j).x_k$, $\forall (i, j, k) \in I \times I \times I$.

ii) E é uma A-álgebra comutativa, se, e somente se, $x_i.x_j = x_j.x_i$, $\forall (i, j) \in I \times I$.

iii) E é uma A-álgebra unitária, se, e somente se, $\exists e \in E$, tal que $e.x_i = x_i.e = x_i$, $\forall i \in I$.

Demonstração:

Desde que a ida das três afirmações são triviais, demonstraremos apenas a volta. Sejam $y, z, t \in E$ e escrevamos $t = \sum_{i\in I} a_i x_i$,$y = \sum_{j\in I} b_j x_j$ e $z = \sum_{k\in I} c_k x_k$, $a_i, b_j, c_k \in A$. Temos que:

i)

$$t.(y.z) = t.(y.(\sum_{k\in I} c_k x_k)) = t.(\sum_{k\in I} c_k y.x_k) = \sum_{k\in I} c_k t.(y.x_k) = \sum_{k\in I} c_k t.((\sum_{j\in I} b_j x_j).x_k) =$$

$$\sum_{k\in I} c_k t.(\sum_{j\in I} b_j x_j.x_k) = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I} c_k b_j t.(x_j.x_k) = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I} c_k b_j (\sum_{i\in I} a_i x_i).(x_j.x_k) =$$

$$\sum_{k\in I}\sum_{j\in I}\sum_{i\in I} c_k b_j a_i x_i.(x_j.x_k) = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I}\sum_{i\in I} c_k b_j a_i (x_i.x_j).x_k = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I} c_k b_j (\sum_{i\in I} a_i x_i.x_j).x_k =$$

$$\sum_{k\in I}\sum_{j\in I} c_k b_j ((\sum_{i\in I} a_i x_i).x_j).x_k = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I} c_k b_j (t.x_j).x_k = \sum_{k\in I} c_k (\sum_{j\in I} b_j t.x_j).x_k =$$

$$\sum_{k\in I} c_k (t.(\sum_{j\in I} b_j x_j)).x_k = \sum_{k\in I} c_k (t.y).x_k = (t.y).(\sum_{k\in I} c_k x_k) = (t.y).z$$

Onde acima, utilizamos fortemente a bilinearidade do produto.

ii)

$$y.z = (\sum_{j\in I} b_j x_j).z = \sum_{j\in I} b_j x_j.z = \sum_{j\in I} b_j x_j.(\sum_{k\in I} c_k x_k) = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} b_j c_k x_j.x_k =$$

$$\sum_{j\in I}\sum_{k\in I} b_j c_k x_k.x_j = \sum_{j\in I} b_j (\sum_{k\in I} c_k x_k).x_j = \sum_{j\in I} b_j z.x_j = z.(\sum_{j\in I} b_j x_j) = z.y$$

iii)

$$e.y = e.(\sum_{j\in I} b_j x_j) = \sum_{j\in I} b_j e.x_j = \sum_{j\in I} b_j x_j = y$$

e

$$y.e = (\sum_{j\in I} b_j x_j).e = \sum_{j\in I} b_j x_j.e = \sum_{j\in I} b_j x_j = y$$

Q.E.D.

Exemplo C.1.2. *Sejam M e N A-álgebras, definiremos uma estrutura de A-álgebra sobre o produto tensorial de M por N. Para isso defina a aplicação:*

$$\eta : M \times N \longrightarrow \mathfrak{L}^2(M, N; M \otimes_A N)$$

tal que $\eta(x,y)(t,z) = (x.t) \otimes (y.z)$, *onde estamos denotando por* $\mathfrak{L}^n(H_1, ..., H_n; R)$ *o módulo das aplicações n-lineares de* $H_1 \times ... \times H_n$ *em* R, *sendo* $H_1, ..., H_n, R$ *A-módulos. Claramente* η *está bem definida e é A-bilinear. Portanto, podemos definir uma aplicação A-linear:*

$$\psi : M \otimes_A N \longrightarrow \mathfrak{L}^2(M, N; M \otimes_A N)$$

tal que $\psi(x \otimes y)(t,z) = (x.t) \otimes (y.z)$. *Uma vez que* $\psi(x \otimes y)$ *é A-bilinear* $\forall x \in M$ *e* $\forall y \in N$, *podemos definir para todo* $x \otimes y \in M \otimes_A N$ *uma aplicação A-linear* $\varphi(x \otimes y)$ *que faz o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\psi(x\otimes y)"] \arrow[d, "\zeta"'] & M \otimes_A N \\ M \otimes_A N \arrow[ur, "\varphi(x\otimes y)"'] & \end{tikzcd}$$

onde ζ *é a aplicação canônica, comutar. Assim sendo, podemos definir a aplicação:*

$$\beta : (M \otimes_A N) \times (M \otimes_A N) \longrightarrow M \otimes_A N$$

tal que $\beta(x \otimes y, t \otimes z) = \varphi(x \otimes y)(t \otimes z) = (x.t) \otimes (y.z)$. β *é A-bilinear, pois a linearidade da primeira coordenada segue do fato de* ψ *ser A-linear e do diagrama acima, enquanto a linearidade da segunda segue do fato de* $\varphi(x \otimes y)$ *ser A-linear para todo* $x \otimes y \in M \otimes_A N$ *e da linearidade da primeira coordenada. Se* $M_1, ..., M_n$ *são A-álgebras, definiremos uma estrutura de A-álgebra sobre seu produto tensorial* $M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$, *como segue:*

Defina por indução a estrutura de A-álgebra em $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n$ *e então defina sobre* $M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ *(resp.* $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A (M_3 \otimes_A M_4) \otimes_A ... (M_{n-1} \otimes_A M_n)$, $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \otimes_A M_4 \otimes_A ... M_{n-1} \otimes_A M_n$, *etc.) a estrutura de A-álgebra que torna o isomorfismo de A-módulos* $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n \simeq M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ *(resp.* $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n \simeq (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A (M_3 \otimes_A M_4) \otimes_A ... (M_{n-1} \otimes_A M_n)$, $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n \simeq (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \otimes_A M_4 \otimes_A ... M_{n-1} \otimes_A M_n$, *etc.) em isomorfismo de A-álgebras, tal estrutura é dada por* $(x_1 \otimes ... \otimes x_n).(y_1 \otimes ... \otimes y_n) = (x_1.y_1) \otimes ... \otimes (x_n.y_n)$. *A A-álgebra* $M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ *(resp.* $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A (M_3 \otimes_A M_4) \otimes_A ... (M_{n-1} \otimes_A M_n)$, $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \otimes_A M_4 \otimes_A ... M_{n-1} \otimes_A M_n$, *etc.) é chamada produto tensorial das A-álgebras* $M_1, M_2, ..., M_n$. *Se cada uma das A-álgebras* $M_1, M_2, ..., M_n$ *é associativa (resp. comutativa, unitária) então seu produto tensorial* $M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ *é (claramente) uma A-álgebra associativa (resp. comutativa, unitária).*

Definição C.1.2. *Sejam* E *uma A-álgebra e* $E' \subseteq E$ *um submódulo. Se* E' *é fechado sobre a multiplicação de* E, *então a restrição do produto de* E *a* $E' \times E'$, *junto com a estrutura de A-módulo de* E' *definem uma estrutura de A-álgebra sobre* E' *e dessa forma, dizemos que* E' *é uma subálgebra de* E.

É fácil ver que a intersecção de subálgebras de E é uma subálgebra de E. Assim sendo, a intersecção das subálgebras de E que contém um determinado subconjunto $Y \subseteq E$ é claramente a menor subálgebra de E que contém Y e esta é dita ser gerada por Y.

Definição C.1.3. *Seja E'' um submódulo da A-álgebra E, tal que $\forall (x,y) \in E'' \times E$, temos $yx \in E''$ (resp. $xy \in E''$) dizemos que E'' é um ideal à esquerda (resp. à direita) de E. Se E'' é um ideal à esquerda e à direita de E, então dizemos que E'' é um ideal bilateral de E.*

Observe que se a A-álgebra E é comutativa, então as três noções coincidem. Além do mais, se $\{a_\alpha\}_{\alpha \in H}$ é uma família de ideais à esquerda (resp. à direita, bilaterais) da A-álgebra E, então $\bigcap\limits_{\alpha \in H} a_\alpha$ é um ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) de E. Tomando a família $\{a_\alpha\}_{\alpha \in H}$ como sendo a família dos ideais à esquerda (resp. à direita, bilateral) de E que contém um determinado subconjunto $Y \subseteq E$, fica claro que $\bigcap\limits_{\alpha \in H} a_\alpha$ é o menor ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) que contém Y e dizemos que $\bigcap\limits_{\alpha \in H} a_\alpha$ é o ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) de E gerado por Y.

Proposição C.1.2. *Sejam E uma A-álgebra e a um ideal bilateral de E. O A-módulo $\frac{E}{a}$ admite uma estrutura canônica de A-álgebra .*

Demonstração:

Sejam $x \equiv x' mod(a)$ e $y \equiv y' mod(a)$. Temos que:

$$x - x' \in a \Rightarrow (x - x').y \in a \Rightarrow x.y - x'.y \in a$$

Por outro lado,

$$y - y' \in a \Rightarrow x'.(y - y') \in a \Rightarrow x'.y - x'y' \in a$$

Dessa forma, temos:

$$x.y - x'.y' = x.y + x'.y - x'.y - x'.y' = (x.y - x'.y) + (x'.y - x'.y') \in a \Rightarrow x.y \equiv x'.y' mod(a)$$

Q.E.D.

Definição C.1.4. *Sejam E e F duas A-álgebras e $h : E \longrightarrow F$ um homomorfismo de A-módulos. Dizemos que h é um homomorfismo de A-álgebras se para todo $(x,y) \in E$, temos:*

$$h(x.y) = h(x).h(y)$$

h é dito um isomorfismo de A-álgebras se, além disso, é bijetivo. Se E e F são unitárias, h é dito um homomorfismo de A-álgebras unitárias se for um homomorfismo de A-álgebras e $h(e_E) = e_F$, onde e_E e e_F denotam as identidades de E e F, respectivamente.

Proposição C.1.3. *Seja $h : E \longrightarrow F$ um homomorfismo de A-álgebras. Temos que:*

i) im(h) é uma subálgebra de F.

ii) $Ker(h) = h^{-1}(0)$ é um ideal bilateral de E.

iii) h induz um isomorfismo $\bar{h} : \frac{E}{Ker(h)} \longrightarrow im(E)$ de A-álgebras.

Demonstração:

i)

Desde que im(h) é um submódulo de F, é suficiente demonstrar que é fechado pelo produto. Sejam $y, z \in im(h)$, temos que existem $x, t \in E$, tais que $y = h(x)$ e $z = h(t)$. Dessa forma, segue que $yz \in h(x).h(t) = h(x.t) \in im(h)$.

ii)

Sejam $x \in Ker(h)$ e $y \in E$. Temos que $f(xy) = f(x).f(y) = 0.f(y) = 0$, pois $0.z = (0+0).z = 0.z + 0.z \Rightarrow 0.z = 0$ e $f(y.x) = f(y).f(x) = f(y).0 = 0$ (analogamente, se demonstra que em uma A-álgebra $z.0 = 0$, para todo z).

iii)

Considerando $\bar{h}$ como sendo o homomorfismo induzido por h no sentido de A-módulos, é suficiente demonstrar que $\bar{h}$ é um homomorfismo de A-álgebras. Se $\bar{x}, \bar{y} \in \frac{E}{Ker(h)}$, então:

$$\bar{h}(\bar{x}.\bar{y}) = \bar{h}(\overline{x.y}) = h(x.y) = h(x).h(y) = \bar{h}(\bar{x}).\bar{h}(\bar{y})$$

Q.E.D.

Proposição C.1.4. *Seja E um A-módulo livre, que tenha uma base indexada num conjunto I. Dar uma estrutura de A-álgebra a E é equivalente a dar uma família $\{\gamma_k^{ij}\}_{(i,j,k)\in I^3}$ de elementos de A, tal que a família $\{\gamma_k^{ij}\}_{k\in I}$ tem suporte finito para todo par (i, j) em $I \times I$.*

Demonstração:

Suponha que definimos uma estrutura de A-álgebra sobre E. Seja $\{e_i\}_{i\in I}$ uma base de E. Para cada par $(i, j) \in I \times I$, escrevamos $e_i.e_j = \sum_{k\in K} \gamma_k^{ij} e_k$. Claramente a família $\{\gamma_k^{ij}\}_{(i,j,k)\in I^3}$ satisfaz as hipóteses. Reciprocamente, sejam $y, z \in E$. Escrevamos $y = \sum_{i\in I} a_i e_i$ e $z = \sum_{j\in I} b_j e_j$. Defina $y.z = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i b_j \gamma_k^{ij} e_k$. Observe que tal função está bem definida, pois se $y' = \sum_{i\in I} a'_i e_i = y$ e $z' = \sum_{j\in I} b'_j e_j = z$, então:

$$\sum_{i\in I} a_i e_i = \sum_{i\in I} a'_i e_i \Rightarrow a_i = a'_i, \forall \in I$$

e

$$\sum_{j\in I} b_j e_j = \sum_{j\in I} b'_j e_j \Rightarrow b_j = b'_j, \forall j \in I$$

Dessa forma, temos que:

$$a_i b_j \gamma_k^{ij} = a_i' b_j' \gamma_k^{ij}, \forall (i,j,k) \in I^3 \Rightarrow y.z = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i b_j \gamma_k^{ij} e_k = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i' b_j' \gamma_k^{ij} e_k = y'.z'$$

Mostremos, por exemplo, que tal aplicação é A-linear na segunda coordenada. Sejam $z' = \sum_{j\in I} b_j' e_j$ *e* $c \in A$. *Temos que*

$$y.(z+cz') = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i(b_j + cb_j')\gamma_k^{ij} e_k = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i b_j \gamma_k^{ij} e_k + \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} c a_i b_j' \gamma_k^{ij} e_k =$$

$$\sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i b_j \gamma_k^{ij} e_k + c\sum_{k\in I}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} a_i b_j' \gamma_k^{ij} e_k = y.z + cy.z'$$

Q.E.D.

Proposição C.1.5. *Sejam E uma A-módulo livre e* $\{\gamma_k^{ij}\}_{(i,j,k)\in I^3}$ *uma família de elementos de A, que define uma estrutura de A-álgebra sobre E. Temos que:*

i) A A-álgebra E é associativa, se, e somente se, para cada terna $(i,j,s) \in I^3$, *verifica-se a igualdade* $\sum_{k\in I}\sum_{r\in I} \gamma_r^{ik}\gamma_k^{js} = \sum_{k\in I}\sum_{r\in I} \gamma_k^{ij}\gamma_r^{ks}$.

ii) A A-álgebra E é comutativa, se, e somente se, para cada terna $(i,j,k) \in I^3$, *verifica-se a igualdade* $\gamma_k^{ij} = \gamma_k^{ji}$.

iii) A A-álgebra E é unitária, se, e somente se, existe uma família $\{a_i\}_{i\in I}$ *de elementos de A, de suporte finito, tal que para cada par* $(j,k) \in I^2$ *seguem as igualdades:*

$$\sum_{i\in I} a_i \gamma_k^{ij} = \delta_{jk}$$

e

$$\sum_{i\in I} a_i \gamma_k^{ji} = \delta_{jk}$$

onde $\delta_{ii} = 1$ *e* $\delta_{ij} = 0$, *se* $i \neq j$.

Demonstração:

Seja $\{e_i\}_{i\in I}$ *uma base de E. Temos que* $e_i = \sum_{k\in I} \delta_{ik} e_k$, $\forall i \in I$. *Pela proposição C.1.4, temos que* $e_i.e_j = \sum_{k\in I}\sum_{s\in I}\sum_{r\in I} \delta_{is}\delta_{jr}\gamma_k^{rs} e_k = \sum_{k\in K} \gamma_k^{ij} e_k$. *Assim sendo, temos:*

i)

$$(e_i.e_j).e_s = (\sum_{k\in K}\gamma_k^{ij}e_k).e_s = \sum_{k\in K}\gamma_k^{ij}e_k.e_s = \sum_{k\in I}\sum_{r\in I}\gamma_k^{ij}\gamma_r^{ks}e_r$$

e

$$e_i.(e_j.e_s) = e_i.(\sum_{k\in I}\gamma_k^{js}e_k) = \sum_{k\in I}\gamma_k^{js}e_i.e_k = \sum_{k\in I}\sum_{r\in I}\gamma_r^{ik}\gamma_k^{js}e_r$$

Pela proposição C.1.1, temos que E é associativa, se, e somente se, $(e_i.e_j).e_s = e_i.(e_j.e_s)$, $\forall(i,j,s)\in I^3$, *ou seja,* $\sum_{k\in I}\sum_{r\in I}\gamma_r^{ik}\gamma_k^{js} = \sum_{k\in I}\sum_{r\in I}\gamma_k^{ij}\gamma_r^{ks}$, $\forall(i,j,s)\in I^3$.

ii) Segue direto da proposição C.1.1, observando que $e_i.e_j = \sum_{k\in K}\gamma_k^{ij}e_k$, $\forall(i,j)\in I\times I$.

iii) Pela proposição C.1.1, existe $e\in E$, *tal que* $e.e_j = e_j.e = e_j$, $\forall j\in I$. *Escrevamos* $e = \sum_{i\in I}a_ie_i$. *Temos que:*

$$e.e_j = e_j \Rightarrow (\sum_{i\in I}a_ie_i).e_j = e_j \Rightarrow \sum_{i\in I}a_ie_i.e_j = e_j \Rightarrow \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}a_i\gamma_k^{ij}e_k = \sum_{k\in I}\delta_{jk}e_k \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I}a_i\gamma_k^{ij} = \delta_{jk}, \forall(j,k)\in I\times I$$

$$e_j.e = e_j \Rightarrow e_j.(\sum_{i\in I}a_ie_i) = e_j \Rightarrow \sum_{i\in I}a_ie_j.e_i = e_j \Rightarrow \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}a_i\gamma_k^{ji}e_k = \sum_{k\in I}\delta_{jk}e_k \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I}a_i\gamma_k^{ji} = \delta_{jk}, \forall(j,k)\in I\times I$$

Reciprocamente, seja $\{a_i\}_{i\in I}$ *como na hipótese. Defina* $e = \sum_{i\in I}a_ie_i$. *Temos que:*

$$e.e_j = (\sum_{i\in I}a_ie_i).e_j = \sum_{i\in I}a_ie_i.e_j = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}a_i\gamma_k^{ij}e_k = \sum_{k\in I}\delta_{jk}e_k = e_j$$

$$e_j.e = e_j.(\sum_{i\in I}a_ie_i) = \sum_{i\in I}a_ie_j.e_i = \sum_{k\in I}\sum_{i\in I}a_i\gamma_k^{ji}e_k = \sum_{k\in I}\delta_{jk}e_k = e_j$$

O resultado segue da proposição C.1.1.

Q.E.D.

Sejam I um conjunto, $\mathbb{N}^{(I)} = \{f \in \mathbb{N}^I / \#Sup(f) = \#Sup(\{f(i)\}_{i\in I}) < \infty\}$ e A uma anel (comutativo). Para cada $(f,g,h) \in \mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)}$, defina $\gamma_h^{fg} = \delta_{h,f+g} \in A$, onde $\delta_{ff} = 1$ e $\delta_{fg} = 0$, se $f \neq g$. Pela proposição C.1.4, $\{\gamma_h^{fg}\}_{(j,g,h)\in[\mathbb{N}^{(I)}]^3}$ define uma estrutura de A-álgebra sobre $A^{(\mathbb{N}^{(I)})}$, essa estrutura atua da seguinte forma $X^f.X^g = X^{f+g}$, onde $X^f = j_f(1)$, sendo $j_f : A \longrightarrow A^{(\mathbb{N}^{(I)})}$ a injeção canônica. No que segue, denotaremos por $A[(X_i)_{i\in I}]$ à A-álgebra definida pelo A-módulo $A^{(\mathbb{N}^{(I)})}$ e o produto acima, a chamaremos álgebra polinomial em $\#I$ indeterminadas. Os elementos X^f da base de $A[(X_i)_{i\in I}]$ serão ditos monômios.

Proposição C.1.6. *Sejam A um anel e $A[(X_i)_{i\in I}]$ a A-álgebra polinomial em $\#I$ indeterminadas. $A[(X_i)_{i\in I}]$ é uma A-álgebra associativa, comutativa e unitária.*

Demonstração:

Temos que

$$X^f.(X^g.X^h) = X^f.X^{g+h} = X^{f+(g+h)} = X^{(f+g)+h} = X^{f+g}.X^h = (X^f.X^g).X^h$$

$$X^f.X^g = X^{f+g} = X^{g+f} = X^g.X^f$$

Se 0 denota a aplicação identicamente nula, então:

$$X^0.X^f = X^{0+f} = X^f$$

e

$$X^f.X^0 = X^{f+0} = X^f$$

O resultado segue da proposição C.1.1.

Q.E.D.

Desde que X^0 é um elemento livre, existe um isomorfismo entre os A-módulos A e AX^0, tal que $a \mapsto aX^0$. Com o produto definido sobre $A[(X_i)_{i\in I}]$, fica claro que este é também um isomorfismo de anéis. No que segue, identificaremos A com AX^0 por meio do isomorfismo acima. Seja $i \in I$, defina $h_i : I \longrightarrow \mathbb{N}$, tal que $h_i(i) = 1$ e $h_i(j) = 0$, se $i \neq j$. Se $f \in \mathbb{N}^{(I)}$, observe que $f = \sum_{i\in I} f(i)h_i$. Dessa forma, temos que $X^f = X^{(\sum_{i\in I} f(i)h_i)} = \prod_{i\in I} X^{f(i)h_i}$, onde o produto (resp. a soma) é calculado sobre o suporte de f. Assim sendo, todo monômio é escrito como produto dos *monômios $X_i = X^{h_i}$. Assim sendo, se $p((X_i)_{i\in I}) \in A[(X_i)_{i\in I}]$, então $p((X_i)_{i\in I}) = \sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} a_f X^f = \sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} a_f \prod_{i\in I} X_i^{f(i)}$, com $a_f \in A$.*

Sejam E uma A-álgebra associativa, comutativa e unitária e $e \in E$. Desde que E é um A-módulo, segue que existe um homomorfismo φ entre o A-módulo $A^{(\mathbb{N})}$ e E, tal que $j_n(1) \mapsto e^n$, sendo $j_n : A \longrightarrow A^{(\mathbb{N})}$ a n-ésima injeção canônica. Considere a estrutura de A-álgebra sobre $A^{(\mathbb{N})}$ dada por $\gamma_k^{nm} = \delta_{k,n+m} \in A$, onde $\delta_{kk} = 1$ e $\delta_{jk} = 0$, se $j \neq k$. Com essa estrutura de A-álgebra, $A^{(\mathbb{N})}$ é denotado por $A[X]$ e $j_n(1)$ por X^n. Assim sendo, φ é um homomorfismo de A-álgebras. De fato,

$$\varphi((\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n).(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m X^m)) = \varphi(\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_n b_m X^n.X^m) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_n b_m \varphi(X^n.X^m) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_n b_m \varphi(X^{n+m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} a_n b_m e^{n+m} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^n).(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m e^m) =$$

$$\varphi(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n).\varphi(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m X^m)$$

O homomorfismo φ é dito ser associado ao elemento e.

Proposição C.1.7. *Sejam E uma A-álgebra associativa, comutativa e unitária e $\{e_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos de E. Se $\varphi_i : A[X] \longrightarrow E$ denota o homomorfismo de A-álgebra associado ao elemento e_i e $\psi_i : A[X] \longrightarrow A[(X_i)_{i\in I}]$ o associado a X_i, então existe um único homomorfismo de A-álgebras η, que faz o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A[X] \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & E \\ A[(X_i)_{i\in I}] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

comutativo.

Demonstração:

Considere a família $\{\prod_{i\in I} e_i^{f(i)}\}_{f\in\mathbb{N}^{(I)}}$. Observe que como E é associativo, comutativo e unitário, tal família está bem definida. Uma vez que E é um A-módulo, segue que existe um homomorfismo η entre os A-módulos $A^{(\mathbb{N}^{(I)})}$ e E, tal que $\eta(X^f) = \prod_{i\in I} e_i^{f(i)}$. Se $f, g \in \mathbb{N}^{(I)}$, então:

$$\eta(X^f.X^g) = \eta(X^{f+g}) = \prod_{i\in I} e_i^{(f+g)(i)} = \prod_{i\in I} e_i^{f(i)+g(i)} = (\prod_{i\in I} e_i^{f(i)}).(\prod_{i\in I} e_i^{g(i)}) = \eta(X^f).\eta(X^g)$$

A penúltima igualdade seguindo do fato do produto de E ser comutativo e associativo. O fato de η ser um homomorfismo de A-álgebras, segue de sua A-linearidade. Temos ainda que:

$$\eta \circ \psi_i(X) = \eta(X_i) = \prod_{i \in I} e_i^{h_i(i)} = e_i = \varphi_i(X)$$

onde $h_i : I \longrightarrow \mathbb{N}$ é a função tal que $h_i(i) = 1$ e $h_i(j) = 0$, se $i \neq j$. O resultado segue da A-linearidade das aplicações consideradas. Seja η' outro homomorfismo de A-álgebras que faz tal diagrama comutar. Temos que:

$$\eta'(X_i) = \eta' \circ \psi_i(X) = \varphi_i(X) = \eta \circ \psi_i(X) = \eta(X_i)$$

Como todo elemento de $A[(X_i)_{i \in I}]$ é uma combinação linear de produtos dos X_i's com coeficientes de A, segue o resultado.

Q.E.D.

Corolário C.1.1. *Sejam I, J conjuntos. As A-álgebras $(A[(X_i)_{i \in I}])[(X_j)_{j \in J}]$ e $A[(X_i)_{i \in I \cup J}]$, onde a união $I \cup J$ é disjunta (se não é o caso, basta trocar I por $I \times \{1\}$ e J por $J \times \{2\}$), são isomorfas.*

Demonstração:

Seja:

$$(A[(X_i)_{i \in I}])[X] \xrightarrow{\varphi_j} A[(X_i)_{i \in I \cup J}]$$

o homomorfismo associado ao elemento X_j, com $j \in J$. Pela proposição C.1.7 existe um homomorfismo de A-álgebras η tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A[(X_i)_{i \in I}])[X] \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "\psi_j"'] & A[(X_i)_{i \in I \cup J}] \\
(A[(X_i)_{i \in I}])[(X_j)_{j \in J}] \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

onde ψ_j é o homomorfismo de A-álgebras associados a X_j, é comutativo. Sejam $f \in \mathbb{N}^{(I \cup J)}$, f_1 a restrição de f a I e f_2 a restrição de f a J. Temos que $X^f = \eta(X^{f_1}.X^{f_2})$, como $\{X^f\}_{f \in \mathbb{N}^{(I \cup J)}}$ geram o A-módulo $A[(X_i)_{i \in I \cup J}]$, segue que η é sobrejetivo. Além do mais, se $\eta(\sum_{g \in \mathbb{N}^{(J)}} (\sum_{f \in \mathbb{N}^{(I)}} b_{fg} X^f).X^g) = 0$, então:

$$\sum_{g\in\mathbb{N}^{(J)}}\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{fg}\eta(X^f.X^g)=0 \Rightarrow \sum_{h\in\mathbb{N}^{(I\cup J)}} b_h X^h = 0 \Rightarrow b_h = 0, \forall h\in\mathbb{N}^{(I\cup J)} \Rightarrow$$

$$b_{fg}=0, \forall (f,g)\in\mathbb{N}^{(I)}\times\mathbb{N}^{(J)} \Rightarrow \sum_{g\in\mathbb{N}^{(J)}}(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{fg}X^f).X^g = 0$$

onde h é a única aplicação de $I\cup J$ em $\mathbb{N}$ tal que h restrito a I é f e h restrito a J é g e $b_h = b_{fg}$.

Q.E.D.

Corolário C.1.2. *Toda A-álgebra associativa, comutativa e unitária é isomorfa ao quociente de alguma álgebra polinomial.*

Demonstração:

Basta considerar na proposição C.1.7 a família $\{x\}_{x\in E}$ e observar que o homomorfismo η é sobrejetivo.

Q.E.D.

Definição C.1.5. *Sejam E uma A-álgebra associativa, comutativa e unitária e $\{e_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos de E. Se o homomorfismo η da proposição C.1.7 é sobrejetivo, dizemos que a família $\{e_i\}_{i\in I}$ é uma família geradora da A-álgebra E e ao ideal bilateral $Ker(\eta)$ chamamos ideal dos relatores de E. Se o homomorfismo η é injetivo, então dizemos que a família $\{e_i\}_{i\in I}$ é algebricamente independente.*

Definição C.1.6. *Sejam Δ um monóide comutativo e E uma A-álgebra que com sua estrutura de A-módulo é um A-módulo graduado sobre um anel graduado $A=\bigoplus_{\delta\in\Delta} A_\delta$. Se $\{E_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ é a graduação do A-módulo E, então dizemos que tal graduação é compatível com a estrutura de A-álgebra de E se para todo par $(\delta,\lambda)\in\Delta\times\Delta$, temos:*

$$E_\delta.E_\lambda \subseteq E_{\delta+\lambda}$$

Ao par $(E,\{E_\delta\}_{\delta\in\Delta})$ (ou simplesmente E, se nenhuma confusão puder ser causada) chamamos de A-álgebra graduada. Diremos que uma A-álgebra unitária E é uma A-álgebra graduada unitária, se E é uma A-álgebra graduada e seu elemento neutro (da multiplicação) é de grau zero.

Exemplo C.1.3. *Sejam I um conjunto e A um anel comutativo. A A-álgebra polinomial $A[(X_i)_{i\in I}]$ em $\#I$ indeterminadas, com a graduação $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $E_n =< \{X^f \in A[(X_i)_{i\in I}]/\sum_{i\in I} f(i) = n\} >$ (o símbolo $< a >$ denotará o submódulo gerado pelo conjunto a), é uma A-álgebra graduada unitária.*

Proposição C.1.8. *Sejam E uma A-álgebra graduada de tipo Δ e F uma subálgebra de E que é um submódulo graduado. A graduação $\{F \cap E_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ é compatível com a estrutura de A-álgebra de F.*

Demonstração:

Sejam $x_\delta \in F \cap E_\delta$, $y_\mu \in F \cap E_\mu$. Desde que F é uma subálgebra de E, segue que $x_\delta.y_\mu \in F$. Além do mais, uma vez que E é uma A-álgebra graduada, temos que $x_\delta.y_\mu \in E_{\delta+\mu}$.

Q.E.D.

Definição C.1.7. *Sejam E uma A-álgebra graduada e F como na proposição C.1.8, então dizemos que F é uma subálgebra graduada de E.*

Proposição C.1.9. *Seja E uma A-álgebra graduada, com graduação $\{E_\delta\}_{\delta\in\Delta}$. Um submódulo graduado $a = \bigoplus_{\delta\in\Delta} a_\delta$ de E é um ideal à esquerda (resp. à direita) se, e somente se, $E_\delta.a_\mu \subseteq a_{\delta+\mu}$ (resp. $a_\mu.E_\delta \subseteq a_{\delta+\mu}$), $\forall(\delta,\mu) \in \Delta \times \Delta$.*

Demonstração:

Sejam $y_\delta \in E_\delta$ e $x_\mu \in a_\mu \subseteq a$. Desde que a é um ideal à esquerda (resp. à direita) de E, segue que $y_\delta.x_\mu \in a$ (resp. $x_\mu.y_\delta \in a$). Como $y_\delta.x_\mu$ (resp. $x_\mu.y_\delta$) é homogêneo de grau $\delta+\mu$, segue que $y_\delta.x_\mu \in a_{\delta+\mu}$ (resp. $x_\mu.y_\delta \in a_{\delta+\mu}$).

Reciprocamente, seja $y \in E$ e $x \in a$. Decomponhamos x e y em soma de elementos homogêneos, $x = \sum_{\mu\in\Delta} x_\mu$ e $y = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta$. Temos que $y.x = (\sum_{\delta\in\Delta} y_\delta).x = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta.x = \sum_{\delta\in\Delta} y_\delta.(\sum_{\mu\in\Delta} x_\mu) = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{\mu\in\Delta} y_\delta.x_\mu$ (resp. $x.y = x.(\sum_{\delta\in\Delta} y_\delta) = \sum_{\delta\in\Delta} x.y_\delta = \sum_{\delta\in\Delta}(\sum_{\mu\in\Delta} x_\mu).y_\delta = \sum_{\delta\in\Delta}\sum_{\mu\in\Delta} x_\mu.y_\delta$). Por hipótese, temos que $y_\delta.x_\mu \in a_{\delta+\mu} \subseteq a$ (resp. $x_\mu.y_\delta \in a_{\delta+\mu} \subseteq a$), pois toda componente homogênea de um elemento de a está em a. Como a é um submódulo de E, segue o resultado.

Q.E.D.

Definição C.1.8. *Seja E uma A-álgebra graduada. Se a é um submódulo graduado de E que é também um ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) de E, dizemos que a é um ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) graduado da A-álgebra E.*

Proposição C.1.10. *Sejam E uma A-álgebra graduada e $H = \{h_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos homogêneos. O ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) gerado por H é um ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) graduado de E .*

Demonstração:

Seja B o ideal à esquerda (resp. à direita) de E gerado por H. Considere C como sendo o conjunto dos elementos homogêneos de B e N o submódulo de E gerado por C. Temos que

$H \subseteq N \subseteq B$, uma vez que B é um submódulo. Desde que N é gerado por elementos homogêneos, ele é um submódulo graduado do A-módulo E. Portanto, podemos escrever $N = \bigoplus_{\delta\in\Delta} N_\delta$, onde $N_\delta = N \cap E_\delta$. Sejam $x_\mu \in E_\mu$ (E_μ sendo o conjunto dos elementos homogêneos de grau $\mu \in \Delta$) e $y_\eta \in N_\eta$. Dizer que $y_\eta \in N_\eta$ é o mesmo que dizer que y_η é um elemento homogêneo de E, de grau η e pertencente a B (vide definição de N). Assim sendo, $x_\mu.y_\eta$ (resp. $y_\eta.x_\delta$) é um elemento homogêneo de E, de grau $\mu+\eta$ e pertencente a B, pois B é um ideal à esquerda (resp. à direita) de E. Dessa forma, $x_\mu.y_\eta$ (resp. $y_\eta.x_\delta$) pertence a $N_{\eta+\mu}$. Pela proposição C.1.9, concluímos que N é um ideal graduado à esquerda (resp. à direita) de E. Da minimalidade de B, segue que B=N. O caso do ideal bilateral, segue das definições, utilizando os casos precedentes.

Q.E.D.

Proposição C.1.11. *Seja E uma A-álgebra graduada e I um ideal bilateral graduado de E. O A-módulo $\frac{E}{I}$ possui uma estrutura canônica de A-álgebra graduada .*

Demonstração:

Desde que I é bilateral, segue da proposição C.1.2, que $\frac{E}{I}$ tem uma estrutura canônica de A-álgebra. Como I é um submódulo graduado de E, temos que $\frac{E}{I}$ é um A-módulo graduado cuja graduação é dada por $\{\frac{E_\delta}{I_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ (aqui estamos identificando esses A-módulos com sua imagem em $\frac{E}{I}$ via o isomorfismo canônico $\frac{E}{I} \simeq \bigoplus_{\delta\in\Delta} \frac{E_\delta}{I_\delta}$ de A-módulos). É suficiente demonstrar que tal graduação é compatível com a estrutura de A-álgebra de $\frac{E}{I}$, ou seja, $\frac{E_\delta}{I_\delta}.\frac{E_\mu}{I_\mu} \subseteq \frac{E_{\delta+\mu}}{I_{\delta+\mu}}$, $\forall(\delta,\mu) \in \Delta\times\Delta$. Seja:

$$\varphi : \frac{E}{I} \longrightarrow \bigoplus_{\delta\in\Delta} \frac{E_\delta}{I_\delta}$$

tal isomorfismo canônico. Se $h_\delta \in \varphi^{-1}(\frac{E_\delta}{I_\delta})$, então $h_\delta = \varphi^{-1}(\eta_\delta(x_\delta))$, para algum $x_\delta \in E_\delta$, sendo $\eta_\delta : E_\delta \longrightarrow \frac{E_\delta}{I_\delta}$ o homomorfismo canônico. Mas $\varphi^{-1}(\eta_\delta(x_\delta)) = \psi(x_\delta)$, onde $\psi : E \longrightarrow \frac{E}{I}$ é o homomorfismo canônico. Assim sendo, temos que:

$$h_\delta.h_\mu = \varphi^{-1}(\eta_\delta(x_\delta)).\varphi^{-1}(\eta_\mu(x_\mu)) =$$

$$\psi(x_\delta).\psi(x_\mu) = \psi(x_\delta.x_\mu) = \varphi^{-1}(\eta_{\delta+\mu}(x_\delta.x_\mu)) \in \varphi^{-1}(\frac{E_{\delta+\mu}}{I_{\delta+\mu}})$$

Q.E.D.

Definição C.1.9. *Sejam E e E' duas A-álgebras graduadas e $u : E \longrightarrow E'$ um homomorfismo de A-álgebras. Dizemos que u é um homomorfismo entre essa duas A-álgebras graduadas se u é um homomorfismo graduado de grau zero, entre os dois A-módulos graduados.*

Proposição C.1.12. *Se $u : E \longrightarrow E'$ é um homomorfismo de A-álgebras graduadas, então:*

i) $im(u)$ é uma subálgebra graduada de E'.

ii) $Ker(u)$ é um ideal bilateral graduado de E.

Demonstração:

Segue direto das definições.

Q.E.D.

C.2 Álgebra Tensorial

Seja M um A-módulo. Defina os A-módulos $T^n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, como segue:

$$T^0(M) = A$$

$$T^1(M) = M$$

$$\vdots$$

$$T^{n+1}(M) = T^n(M) \otimes_A M$$

Seja:

$$\varphi_n : T^n(M) \longrightarrow \underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{n-vezes}$$

o isomorfismo "associativo", se $n \geq 3$ e a identidade, se $n = 0$, $n = 1$ ou $n = 2$. Da mesma forma, para cada par (p,q) tal que $p \geq 1$ e $q \geq 1$, considere:

$$\psi_{pq} : (\underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{p-vezes}) \otimes_A (\underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{q-vezes}) \longrightarrow \underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{p+q-vezes}$$

como sendo o isomorfismo "associativo", se $p \geq 2$, $q \geq 1$ ou $q \geq 2$, $p \geq 1$ e a identidade se $p = q = 1$.

Para cada par (p,q), com $p, q \geq 1$, defina h_{pq}, de tal forma que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T^p(M) \otimes_A T^q(M) \arrow[r, "h_{pq}"] \arrow[d, "\varphi_p \otimes \varphi_q"'] & T^{p+q}(M) \arrow[d, "\varphi_{p+q}"] \\
(\underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{p-vezes}) \otimes_A (\underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{q-vezes}) \arrow[r, "\psi_{pq}"'] & (\underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{p+q-vezes})
\end{tikzcd}$$

seja comutativo. Por fim, defina:

$$h_{0n} : T^0(M) \otimes_A T^n(M) \longrightarrow T^n(M)$$

e

$$h_{n0} : T^n(M) \otimes_A T^0(M) \longrightarrow T^n(M)$$

como sendo os isomorfismos, tais que $h_{0n}(a \otimes x) = ax = h_{n0}(x \otimes a)$.

Se para cada par $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\eta_{pq} : T^p(M) \times T^q(M) \longrightarrow T^p(M) \otimes_A T^q(M)$$

denota a aplicação canônica, então existe uma aplicação A-bilinear π_{pq}*, que faz o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} T^p(M) \times T^q(M) \arrow[r, "\pi_{pq}"] \arrow[d, "\eta_{pq}"'] & T^{p+q}(M) \\ T^p(M) \otimes_A T^q(M) \arrow[ur, "h_{pq}"'] & \end{tikzcd}$$

comutar.

Denote $T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n(M)$ *e defina:*

$$. : T(M) \times T(M) \longrightarrow T(M)$$

de tal forma que $(\sum_{p \in \mathbb{N}} x_p).(\sum_{q \in \mathbb{N}} y_q) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} \pi_{pq}(x_p, y_q)$*, onde* $x_n, y_n \in T^n(M)$ *(aqui estamos identificando* $T^n(M)$ *com sua imagem pela aplicação canônica em T(M)). Como cada elemento de T(M) é escrito de maneira única como soma de elementos dos* $T^n(M)$*, segue que . está bem definida. No mais, . é A-bilinear. De fato, demonstremos, por exemplo, a linearidade da primeira coordenada:*

$$(\sum_{p \in \mathbb{N}} x_p + a \sum_{p \in \mathbb{N}} x'_p).(\sum_{q \in \mathbb{N}} y_q) = (\sum_{p \in \mathbb{N}} (x_p + a x'_p)).(\sum_{q \in \mathbb{N}} y_q) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{q \in \mathbb{N}} \pi_{pq}(x_p + a x'_p, y_q) =$$

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{q \in \mathbb{N}} (\pi_{pq}(x_p, y_q) + a \pi_{pq}(x'_p, y_q)) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{q \in \mathbb{N}} \pi_{pq}(x_p, y_q) + a(\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{q \in \mathbb{N}} \pi_{pq}(x'_p, y_q)) =$$

$$(\sum_{p \in \mathbb{N}} x_p).(\sum_{q \in \mathbb{N}} y_q) + a(\sum_{p \in \mathbb{N}} x'_p).(\sum_{q \in \mathbb{N}} y_q)$$

Definição C.2.1. *Seja M um A-módulo, A-álgebra definida por (T(M),.) é chamada álgebra tensorial associada a M.*

Proposição C.2.1. *Seja M um A-módulo, a A-álgebra T(M) é associativa, unitária e graduada.*

Demonstração:

Considerando A com a graduação trivial, temos que T(M) é um A-módulo graduado. Além do mais, por construção, segue que $T^p(M).T^q(M) \subseteq T^{p+q}(M)$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}$. *Portanto T(M) é uma A-álgebra graduada. Desde que* $1 \in A$ *é de grau zero em T(M), para mostrarmos que também é o elemento neutro de T(M) é suficiente, de acordo com a proposição C.1.1, mostrarmos que* $1.x = x.1 = x$ *para todo elemento homogêneo. Mas isso segue da definição do produto por um elemento de* $T^0(M)$.

Pela proposição C.1.1, é suficiente demonstrar a associatividade para os elementos homogêneos. Sejam $x_n = ((y_1 \otimes y_2) \otimes ...) \otimes y_n$, $x'_m = ((z_1 \otimes z_2) \otimes ...) \otimes z_m$ *e* $x''_p = ((t_1 \otimes t_2) \otimes ...) \otimes t_p$, *com* $(y_i, z_j, t_k) \in M^3$, $\forall (i,j,k) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\} \times \{1,...,p\}$.

Caso

$(n, m, p \geq 1)$

$$x_n.x'_m = \pi_{nm}(x_n, x'_m) = h_{nm}(x_n \otimes x'_m) = \varphi^{-1}_{n+m} \circ \psi_{nm} \circ (\varphi_n \otimes \varphi_m)(x_n \otimes x'_m) =$$

$$\varphi^{-1}_{n+m}(y_1 \otimes y_2 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes z_2 \otimes ... \otimes z_m) = u_{n+m}$$

$$(x_n.x'_m).x''_p = u_{n+m}.x''_p = h_{n+m,p}(u_{n+m} \otimes x''_p) =$$

$$\varphi^{-1}_{n+m+p} \circ \psi_{n+m,p} \circ (\varphi_{n+m} \otimes \varphi_p)(u_{n+m} \otimes x''_p) =$$

$$\varphi^{-1}_{n+m+p} \circ \psi_{n+m,p}([y_1 \otimes y_2 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes z_2 \otimes ... \otimes z_m] \otimes [t_1 \otimes t_2 \otimes ... \otimes t_p]) =$$

$$\varphi^{-1}_{n+m+p}(y_1 \otimes y_2 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes z_2 \otimes ... \otimes z_m \otimes t_1 \otimes t_2 \otimes ... \otimes t_p)$$

$$x'_m.x''_p = \pi_{mp}(x'_m, x''_p) = h_{mp}(x'_m \otimes x''_p) = \varphi^{-1}_{m+p} \circ \psi_{mp} \circ (\varphi_m \otimes \varphi_p)(x'_m \otimes x''_p) =$$

$$\varphi^{-1}_{m+p}(z_1 \otimes z_2 \otimes ... \otimes z_m \otimes t_1 \otimes t_2 \otimes ... \otimes t_p) = u'_{m+p}$$

$$x_n.(x'_m.x''_p) = x_n.u'_{m+p} = h_{n,m+p}(x_n \otimes u'_{m+p}) =$$

$$\varphi_{n+m+p}^{-1} \circ \psi_{n,m+p} \circ (\varphi_n \otimes \varphi_{m+p})(x_n \otimes u'_{m+p}) =$$

$$\varphi_{n+m+p}^{-1} \circ \psi_{n,m+p}([y_1 \otimes y_2 \otimes ... \otimes y_n] \otimes [z_1 \otimes z_2 \otimes ... \otimes z_m \otimes t_1 \otimes t_2 \otimes ... \otimes t_p]) =$$

$$\varphi_{n+m+p}^{-1}(y_1 \otimes y_2 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes z_2 \otimes ... \otimes z_m \otimes t_1 \otimes t_2 \otimes ... \otimes t_p)$$

Caso

(n=0)

Temos que $x_n \in A$, *dessa forma* $(x_n.x'_m).x_p = (x_n x'_m).x''_p = x_n(x'_m.x''_p) = x_n.(x'_m.x''_p)$

Caso

(m=0)

Temos que $x'_m \in A$, *dessa forma*

$$(x_n.x'_m).x_p = (x_m x'_n).x''_p = x_m(x'_n.x''_p) = x_n.(x'_m x''_p) = x_n.(x'_m.x''_p)$$

Caso

(p=0)

Temos que $x''_p \in A$, *dessa forma*

$$(x_n.x'_m).x''_p = x''_p(x_n.x'_m) = x_n.(x''_p x'_m) = x_n.(x'_m.x''_p)$$

Q.E.D.

Corolário C.2.1. *Todo grupo comutativo G está contido, a menos de isomorfismo, em um anel graduado.*

Demonstração:

Basta ver G como um $\mathbb{Z}$-módulo e utilizar a proposição.

Q.E.D.

Proposição C.2.2. *Sejam M e N dois A-módulos. Se $f : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo entre esses A-módulos, então existe um único homomorfismo de A-algebras graduadas $T(f) : T(M) \longrightarrow T(N)$, que prolonga f.*

Demonstração:

Defina:

$$T^0(f) : T^0(M) \longrightarrow T^0(N)$$

como sendo a identidade.

$$T^1(f) : T^1(M) \longrightarrow T^1(N)$$

de tal forma que $T^1(f)(x) = f(x)$*. E para cada* $n \geq 1$*:*

$$T^{n+1}(f) : T^{n+1}(M) \longrightarrow T^{n+1}(N)$$

de tal forma que $T^{n+1}(f) = T^n(f) \otimes f$*.*

Agora faça $T(f) = \oplus T^n(f)$*. Falta demonstrar que* $T(f)$ *é um homomorfismo de A-algebras. Uma vez que T(f) é por construção um homomorfismo de A-módulos, é suficiente demonstrar que* $T(f)(x_p.x'_q) = (T(f)(x_p)).(T(f)(x'_q))$*,* $\forall p, q \geq 1$*. Observe que todo elemento* $x_p \in T^p(M)$ *é da forma* $x_p = y_1.y_2...y_p$*, com* $y_1, ..., y_p \in M$ *(aqui estamos utilizando a associatividade de .). Demonstremos que:*

$$T^p(f)(x_p) = f(y_1).f(y_2)...f(y_n)$$

Se p=1 não há o que fazer. Suponha que para $p > 1$ *a afirmação é verdadeira. Assim sendo, temos que:*

$$T^{p+1}(f)(y_1.y_2....y_p.y_{p+1}) = T^p(f)(y_1.y_2....y_p) \otimes f(y_{p+1}) = T^p(f)(y_1.y_2...y_p).f(y_{p+1}) =$$

$$[f(y_1).f(y_2)...f(y_p)].f(y_{p+1}) = f(y_1).f(y_2)...f(y_p).f(y_{p+1})$$

Se $x'_q = z_1.z_2...z_q$*, teremos que:*

$$T(f)(x_p.x'_q) = T(y_1.y_2...y_p.z_1.z_2...z_q) = T^{p+q}(f)(y_1.y_2...y_p.z_1.z_2...z_q) =$$

$$f(y_1).f(y_2)...f(y_p).f(z_1).f(z_2)...f(z_q) = [f(y_1).f(y_2)...f(y_p)].[f(z_1).f(z_2)...f(z_q)] =$$

$$T^p(f)(y_1.y_2...y_p).T^q(f)(z_1.z_2...z_q) = T^p(f)(x_p).T^q(f)(x'_q) = T(f)(x_p).T(f)(x'_q)$$

Se g é outro homomorfismo de A-algebras que prolonga f, então $\forall p \geq 1$ *temos:*

$$g(x_p) = g(y_1.y_2...y_p) = g(y_1).g(y_2)...g(y_p) = f(y_1).f(y_2)...f(y_p) = T^p(f)(x_p) = T(f)(x_p)$$

e se p=0, então $g(x_p) = x_p g(1_M) = x_p.1_N = T(f)(x_p)$*. Uma vez que* $T(f)$ *e g são dois homomorfismo de A-módulos que são idênticos em um conjunto de geradores, temos* $g = T(f)$*.*

Q.E.D.

Lema C.2.1. *Sejam M e N dois A-módulos livres de bases $\{e_i\}_{i\in I}$ e $\{e'_j\}_{j\in J}$, respectivamente. O A-módulo $M\otimes_A N$ é livre e tem por base $\{e_i\otimes_A e'_j\}_{(i,j)\in I\times J}$.*

Demonstração:

Desde que $M=\bigoplus_{i\in I} Ae_i$ *e* $N=\bigoplus_{j\in J} Ae'_j$, *temos que:*

$$M\otimes_A N=(\bigoplus_{i\in I} Ae_i)\otimes(\bigoplus_{j\in J} Ae'_j)\simeq\bigoplus_{(i,j)\in I\times J}(Ae_i)\otimes(Ae'_j)=\bigoplus_{(i,j)\in I\times J}A(e_i\otimes e'_j)$$

E dessa forma é suficiente demonstrar que para cada par $(i,j)\in I\times J$, *o elemento* $e_i\otimes e'_j\in\bigoplus_{(i,j)\in I\times J}A(e_i\otimes e'_j)$ *é livre.*

Agora observe que a aplicação:

$$\varphi: Ae_i\times Ae'_j\longrightarrow Ae_i$$

definida por $\varphi(ae_i,be'_j)=abe_i$, *é uma aplicação A-bilinear. Portanto, podemos definir uma aplicação A-linear:*

$$\psi:(Ae_i)\otimes_A(Ae'_j)\longrightarrow Ae_i$$

dada por $\psi((ae_i)\otimes(be'_j))=abe_i$. *O homomorfismo ψ é um isomorfismo, tendo por inversa a aplicação:*

$$\eta: Ae_i\longrightarrow(Ae_i)\otimes_A(Ae'_j)$$

definida por $\eta(ae_i)=(ae_i)\otimes e'_j$

Assim sendo, temos que:

$$a(e_i\otimes e_j)=0\Rightarrow(ae_i)\otimes e_j=0\Rightarrow\psi((ae_i)\otimes e_j)=0\Rightarrow ae_i=0\Rightarrow a=0$$

Q.E.D.

Proposição C.2.3. *Seja M um A-módulo livre, tendo por base $\{e_i\}_{i\in I}$. O A-módulo $T(M)$ é livre e tem por base* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\{e_{\mu_1}.e_{\mu_2}...e_{\mu_n}\}_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in I^n}\}$, *sendo* $e_\phi=1$.

Demonstração:

Demonstremos por indução que $T^n(M)$ é livre e tem por base $\{e_{\mu_1}.e_{\mu_2}...e_{\mu_n}\}_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in I^n}$.

Se $n=0$ ou $n=1$, não tem o que se demonstrar. Suponha que o resultado foi demonstrado para $n\geq 1$. Desde que $T^{n+1}(M)=T^n(M)\otimes_A M$, temos pelo lema anterior que o conjunto

$$\{(e_{\mu_1}.e_{\mu_2}...e_{\mu_n})\otimes e_{\mu_{n+1}}\}_{((\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n),\mu_{n+1})\in I^n\times I}=\{e_{\mu_1}.e_{\mu_2}...e_{\mu_n}.e_{\mu_{n+1}}\}_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\mu_{n+1})\in I^{n+1}}$$

é uma base de $T^{n+1}(M)$. O resultado segue do fato de $T(M)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}T^n(M)$.

Q.E.D.

Proposição C.2.4. *Seja M um A-módulo projetivo. O A-módulo T(M) é projetivo.*

Demonstração:

Primeiro demonstraremos que se P_1 e P_2 são A-módulos projetivos, então $P_1 \otimes_A P_2$ é um A-módulo projetivo.

Dizer que P_1 e P_2 são projetivos, significa dizer que existem dois A-módulos P_1' e P_2', tais que $P_1 \oplus P_1'$ e $P_2 \oplus P_2'$ são livres. Desde que:

$$(P_1 \oplus P_1') \otimes_A (P_2 \oplus P_2') \simeq (P_1 \otimes_A P_2) \oplus [(P_1 \otimes_A P_2') \oplus (P_1' \otimes_A P_2) \oplus (P_1' \otimes_A P_2')]$$

Temos que, Aplicando o lema C.2.1 a $(P_1 \oplus P_1') \otimes_A (P_2 \oplus P_2')$, $P_1 \otimes_A P_2$ é projetivo.

Agora mostremos por indução que $T^n(M)$ é projetivo. Se $n = 0$ ou $n = 1$, não há o que demonstrar. Suponha que demonstramos o resultado para $n \geq 1$. Assim sendo, $T^n(M)$ é projetivo e dessa forma também o é $T^{n+1}(M) = T^n(M) \otimes_A M$. O resultado segue do fato de $T(M)$ ser a soma direta de A-módulos projetivos.

Q.E.D.

Proposição C.2.5. *Se M é um A-módulo plano, então T(M) é um A-módulo plano.*

Demonstração:

Demonstremos primeiro que se P e Q são A-módulos planos, então $P \otimes_A Q$ é um A-módulo plano. Seja:

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

uma sequência exata de A-módulos e homomorfismo. Desde que P é plano, temos que a sequência:

$$M' \otimes_A P \xrightarrow{f \otimes 1_P} M \otimes_A P \xrightarrow{g \otimes 1_P} M'' \otimes_A P$$

é exata. Do fato de Q ser plano, segue que a sequência:

$$(M' \otimes_A P) \otimes_A Q \xrightarrow{(f \otimes 1_P) \otimes 1_Q} (M \otimes_A P) \otimes_A Q \xrightarrow{(g \otimes 1_P) \otimes 1_Q} (M'' \otimes_A P) \otimes_A Q$$

é exata. Observando que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(M' \otimes_A P) \otimes_A Q \arrow[r, "(f \otimes 1_P) \otimes 1_Q"] \arrow[d] & (M \otimes_A P) \otimes_A Q \arrow[r, "(g \otimes 1_P) \otimes 1_Q"] \arrow[d] & (M'' \otimes_A P) \otimes_A Q \arrow[d] \\
M' \otimes_A (P \otimes_A Q) \arrow[r, "f \otimes (1_P \otimes 1_Q)"'] & M \otimes_A (P \otimes_A Q) \arrow[r, "g \otimes (1_P \otimes 1_Q)"'] & M'' \otimes_A (P \otimes_A Q)
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismo verticais são os isomorfismos "associativos", é comutativo e que $1_P \otimes 1_Q = 1_{P\otimes_A Q}$*, temos que a sequência:*

$$M' \otimes_A (P \otimes_A Q) \xrightarrow{f\otimes 1_{P\otimes_A Q}} M \otimes_A (P \otimes_A Q) \xrightarrow{g\otimes 1_{P\otimes_A Q}} M'' \otimes_A (P \otimes_A Q)$$

é exata e portanto $P \otimes_A Q$ *é plano. O restante da demonstração se faz como no caso projetivo.*

Q.E.D.

C.3 Álgebra Exterior

Seja M um A-módulo e considere a família $H = \{x^2\}_{x\in M}$ *de elementos de T(M). Desde que todo elemento de H é homogêneo, segue da proposição C.1.10 que o ideal bilateral I gerado por H é um ideal graduado. Assim sendo, temos pela proposição C.1.11 que o A-módulo* $\frac{T(M)}{I}$ *é uma A-álgebra graduada de tipo* $\mathbb{N}$.

Definição C.3.1. *Seja M um A-módulo e I como acima. A A-álgebra* $\frac{T(M)}{I}$ *é chamada A-álgebra exterior associada a M e é denotada por* $\bigwedge(M)$.

O produto de $\bigwedge(M)$ *será denotado por* $\wedge$*. Observe que como* $\bigwedge(M)$ *é o quociente de uma A-álgebra associativa e unitária ela preserva essas propriedades. Desde que* $I^1 = I^0 = 0$*, segue que* $\frac{T^0(M)}{I^0} \simeq A$ *e* $\frac{T^1(M)}{I^1} \simeq M$*, faremos tais identificações. No que segue, denotaremos* $\frac{T^n(M)}{I^n}$ *por* $\bigwedge^n(M)$*, dessa forma teremos* $\bigwedge(M) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}}(\bigwedge\limits^{n}(M))$.

Proposição C.3.1. *Para qualquer* $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \in \bigwedge^n(M)$*,* $n \geq 2$ *e para qualquer permutação* σ *de* $\{1, 2, ..., n\}$*, temos que:*

$$x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)} = \epsilon_\sigma x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$$

onde ϵ_σ *denota o sinal da permutação* σ.

Demonstração:

Sejam $x, y \in M$*. Uma vez que, pela definição de I,* $z \wedge z = 0$*,* $\forall z \in M$*, temos que:*

$$0 = (x + y) \wedge (x + y) = (x + y) \wedge x + (x + y) \wedge y = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y =$$

$$x \wedge y + y \wedge x \Rightarrow x \wedge y = -y \wedge x$$

Suponha que para $n \geq 1$ *e qualquer família* $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ *com* $m \leq n$ *elementos, temos:*

$$x \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_m \wedge y = -(y \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_m \wedge x)$$

Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ *uma família de elementos de M. Temos que:*

$$x \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge x_{n+1} \wedge y =$$

$$x \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge (x_{n+1} \wedge y) = x \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge (-(y \wedge x_{n+1})) =$$

$$-(x \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge (y \wedge x_{n+1})) = -((x \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge y) \wedge x_{n+1}) =$$

$$-(-(y \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge x) \wedge x_{n+1}) = y \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge (x \wedge x_{n+1}) =$$

$$y \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge (-(x_{n+1} \wedge x)) = -(y \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n \wedge x_{n+1} \wedge x)$$

Se σ *é uma transposição, então existem* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ *tais que* $i < j$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ *e* $\sigma(k) = k$, $\forall k \neq i, j$. *Assim sendo, temos:*

$$x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(i-1)} \wedge x_{\sigma(i)} \wedge x_{\sigma(i+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(j-1)} \wedge x_{\sigma(j)} \wedge x_{\sigma(j+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)} =$$

$$x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge x_j \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_{j-1} \wedge x_i \wedge x_{j+1} \wedge ... \wedge x_n =$$

$$x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge (x_j \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_{j-1} \wedge x_i) \wedge x_{j+1} \wedge ... \wedge x_n =$$

$$x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge (-(x_i \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_{j-1} \wedge x_j)) \wedge x_{j+1} \wedge ... \wedge x_n =$$

$$-(x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge x_i \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_{j-1} \wedge x_j \wedge x_{j+1} \wedge ... \wedge x_n) =$$

$$\epsilon_\sigma(x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge x_i \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_{j-1} \wedge x_j \wedge x_{j+1} \wedge ... \wedge x_n)$$

Suponha que $m \geq 1$ *e que para a composição de* m *transposições* $\tau_m \circ ... \circ \tau_1$, *temos:*

$$x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(1)} \wedge x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(2)} \wedge ... \wedge x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(n)} = \epsilon_{\tau_m} \epsilon_{\tau_{m-1}} ... \epsilon_{\tau_1}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$$

Considerando as transposições $\{\tau_1, ..., \tau_{m+1}\}$ *e fazendo* $z_i = x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(i)}$*, temos:*

$$x_{\tau_{m+1} \circ \tau_m \circ ... \circ \tau_1(1)} \wedge x_{\tau_{m+1} \circ \tau_m \circ ... \circ \tau_1(2)} \wedge ... \wedge x_{\tau_{m+1} \circ \tau_m \circ ... \circ \tau_1(n)} =$$

$$z_{\tau_{m+1}(1)} \wedge z_{\tau_{m+1}(2)} \wedge ... \wedge z_{\tau_{m+1}(n)} = \epsilon_{\tau_{m+1}}(z_1 \wedge z_2 \wedge ... \wedge z_n) =$$

$$\epsilon_{\tau_{m+1}}(x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(1)} \wedge x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(2)} \wedge ... \wedge x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(n)}) =$$

$$\epsilon_{\tau_{m+1}}(\epsilon_{\tau_m} \epsilon_{\tau_{m-1}} ... \epsilon_{\tau_1}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)) = (\epsilon_{\tau_{m+1}} \epsilon_{\tau_m} \epsilon_{\tau_{m-1}} ... \epsilon_{\tau_1})(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$$

Finalmente, seja σ *uma permutação. Decomponha-a no produto de transposições* $\sigma = \tau_m \circ ... \circ \tau_1$*, temos que:*

$$x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)} = x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(1)} \wedge x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(2)} \wedge ... \wedge x_{\tau_m \circ ... \circ \tau_1(n)} =$$

$$\epsilon_{\tau_m} \epsilon_{\tau_{m-1}} ... \epsilon_{\tau_1}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) = \epsilon_\sigma(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$$

Q.E.D.

Corolário C.3.1. *Seja* $\{x_1, ..., x_n\}$ *uma sequência de elementos de um A-módulo M. Suponha que existam dois indices* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$*,* $n \geq 2$*, tais que* $x_i = x_j = y$*, então:*

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n = 0 \in \bigwedge(M)$$

Demonstração:

Se $n = 2$*, não há o que demonstrar, suponha* $n > 2$ *e defina a permutação:*

$$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$$

de tal forma que $\sigma(k) = k$*, se* $k \neq j, i+1$*;* $\sigma(i+1) = j$ *e* $\sigma(j) = i+1$ *(se* $i = n$*, defina* $\sigma(j) = i-1$ *e* $\sigma(i-1) = j$*). Assim sendo, temos:*

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n = x_{\sigma \circ \sigma(1)} \wedge x_{\sigma \circ \sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma \circ \sigma(n)} = \epsilon_\sigma(x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}) =$$

$$\epsilon_\sigma(x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge (y \wedge y) \wedge x_{i+2} \wedge ... \wedge x_n) = 0$$

O caso em que $j = n$ *é análogo.*

Q.E.D.

Corolário C.3.2. *Seja M um A-módulo com uma família de geradores dada por $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Para todo $m > n$, temos $\bigwedge^m(M) = 0$.*

Demonstração:

Sejam $y_1, y_2, ..., y_m \in M$. Escrevamos $y_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{ji_j} x_{i_j}$. Assim sendo, temos:

$$y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_m = (\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} x_{i_1}) \wedge (\sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} x_{i_2}) \wedge ... \wedge (\sum_{i_m=1}^{n} a_{mi_m} x_{i_m}) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} ... \sum_{i_m=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{mi_m} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_m}$$

Desde que $m > n$ e $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$, segue que existem j, k distintos, tais que $i_j = i_k$, qualquer que seja a m-upla $(i_1, i_2, ..., i_m) \in I_n^m$, onde $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Assim sendo, segue pelo corolário anterior que $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_m} = 0$, qualquer que seja a m-upla $(i_1, i_2, ..., i_m) \in I_n^m$. Dessa forma, $y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_m = 0$ e portanto $\bigwedge^m(M) = 0$.

Q.E.D.

Proposição C.3.2. *Seja M um A-módulo. Se $x \in \bigwedge^n(M)$ e $y \in \bigwedge^m(M)$, $n, m \geq 1$, então:*

$$x \wedge y = (-1)^{nm} y \wedge x$$

Demonstração:

O resultado segue da proposição C.3.1 se n=m=1. Suponha que n=1 e que para todo elemento de $y \in \bigwedge^h(M)$ temos $x \wedge y = (-1)^h y \wedge x$, com $x \in M$ e $m \geq h \geq 1$. Sejam $y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge y_{m+1} \in \bigwedge^{m+1}(M)$ e $x \in M$. Temos que:

$$x \wedge (y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge y_{m+1}) =$$

$$(x \wedge y_1 \wedge ... \wedge y_m) \wedge y_{m+1} = ((-1)^m (y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge x)) \wedge y_{m+1} =$$

$$(-1)^m (y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge (x \wedge y_{m+1})) = (-1)^m (y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge (-1(y_{m+1} \wedge x))) =$$

$$(-1)^m (-1)(y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge y_{m+1} \wedge x) = (-1)^{m+1} y_1 \wedge ... \wedge y_m \wedge y_{m+1} \wedge x$$

Suponha agora que para todo elemento $x \in \bigwedge^h(M)$, $n \geq h \geq 1$ e todo elemento $y \in \bigwedge^m(M)$, temos $x \wedge y = (-1)^{hm} y \wedge x$, qualquer que seja $m \geq 1$. Sejam $x_{n+1} \wedge x_n \wedge ... \wedge x_1 \in \bigwedge^{n+1}(M)$ e $y \in \bigwedge^m(M)$, temos que:

$$(x_{n+1} \wedge x_n \wedge ... \wedge x_1) \wedge y =$$

$$x_{n+1} \wedge ((x_n \wedge ... \wedge x_1) \wedge y) = x_{n+1} \wedge ((-1)^{nm}(y \wedge (x_n \wedge ... \wedge x_1))) =$$

$$(-1)^{nm}(x_{n+1} \wedge y) \wedge (x_n \wedge ... \wedge x_1) = (-1)^{nm}((-1)^m(y \wedge x_{n+1})) \wedge (x_n \wedge ... \wedge x_1) =$$

$$(-1)^{nm}(-1)^m(y \wedge (x_{n+1} \wedge x_n \wedge ... \wedge x_1)) = (-1)^{(n+1)m}(y \wedge (x_{n+1} \wedge x_n \wedge ... \wedge x_1))$$

Q.E.D.

Observe que a proposição C.3.2 não passa de um caso particular da proposição C.3.1.

Definição C.3.2. *Uma A-álgebra graduada de tipo $\mathbb{N}$, que satisfaz a hipótese da proposição C.3.2 é dita ser anti-comutativa.*

Exemplo C.3.1. *Sejam M e N duas A-álgebras anti-comutativas. Definiremos uma estrutura de A-álgebra anti-comutativa sobre seu produto tensorial. Para isso, considere $M \otimes_A N$ com sua graduação derivada das graduações de M e N, ou seja, a graduação tal que $M \otimes_A N \simeq \bigoplus_{\delta \in \mathbb{N}} (\bigoplus_{i+j=\delta} M_i \otimes_A N_j)$ é um isomorfismo de A-módulos graduados, sendo $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{N_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ as graduações de M e N, respectivamente. Para $x_i \in M_i$, $x'_r \in M_r$, $y_j \in N_j$ e $y'_s \in N_s$ defina:*

$$(x_i \otimes y_j) * (x'_r \otimes y'_s) = (-1)^{jr}(x_i \otimes y_j).(x'_r \otimes y'_s)$$

onde $(x_i \otimes y_j).(x'_r \otimes y'_s)$ é o produto entre esses elementos no produto tensorial das A-álgebras M e N (exemplo C.1.2). Se $x_\delta = \sum_{i+j=\delta} x_i \otimes y_j$ e $y_\gamma = \sum_{r+s=\gamma} x'_r \otimes y'_s$, defina:

$$x_\delta * y_\gamma = \sum_{i+j=\delta} \sum_{r+s=\gamma} (x_i \otimes y_j) * (x'_r \otimes y'_s)$$

Finalmente, se $x = \sum_{\delta \in \Delta} x_\delta$ e $y = \sum_{\gamma \in \Delta} y_\gamma$, com x_δ e y_γ homogêneos, defina:

$$x * y = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\gamma \in \Delta} x_\delta * y_\gamma$$

$*$ é claramente A-bilinear. Além do mais, temos:

$$(x_i \otimes y_j) * (x'_r \otimes y'_s) = (-1)^{jr}(x_i \otimes y_j).(x'_r \otimes y'_s) = (-1)^{jr}(x_i.x'_r) \otimes (y_j.y'_s) =$$

$$(-1)^{jr}((-1)^{ir}x'_r.x_i) \otimes ((-1)^{sj}y'_s.y_j) = (-1)^{jr+sj+ir}(x'_r.x_i) \otimes (y'_s.y_j) =$$

$$(-1)^{(i+j)(s+r)+is}(x'_r.x_i) \otimes (y'_s.y_j) = (-1)^{(i+j)(s+r)}(x'_r \otimes y'_s) * (x_i \otimes y_j)$$

E dessa forma:

$$x_\delta * y_\gamma = \sum_{i+j=\delta} \sum_{r+s=\gamma} (x_i \otimes y_j) * (x'_r \otimes y'_s) =$$

$$\sum_{i+j=\delta} \sum_{r+s=\gamma} (-1)^{(i+j)(s+r)}(x'_r \otimes y'_s) * (x_i \otimes y_j) =$$

$$\sum_{i+j=\delta} \sum_{r+s=\gamma} (-1)^{\delta\gamma}(x'_r \otimes y'_s) * (x_i \otimes y_j) =$$

$$(-1)^{\delta\gamma} \sum_{i+j=\delta} \sum_{r+s=\gamma} (x'_r \otimes y'_s) * (x_i \otimes y_j) = (-1)^{\delta\gamma} y_\gamma * x_\delta$$

Defina por indução a estrutura de A-álgebra anti-comutativa em $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n$ e então defina sobre $M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ (resp. $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A (M_3 \otimes_A M_4) \otimes_A ...(M_{n-1} \otimes_A M_n)$, $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \otimes_A M_4 \otimes_A ...M_{n-1} \otimes_A M_n$, etc.) a estrutura de A-álgebra que torna o isomorfismo de A-módulos $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n \simeq M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ (resp. $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n \simeq (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A (M_3 \otimes_A M_4) \otimes_A ...(M_{n-1} \otimes_A M_n)$, $((M_i \otimes_A M_2) \otimes_A ... \otimes_A M_{n-1}) \otimes_A M_n \simeq (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \otimes_A M_4 \otimes_A ...M_{n-1} \otimes_A M_n$, etc.) em isomorfismo de A-álgebras. A A-álgebra $M_1 \otimes_A ... \otimes_A M_n$ (resp. $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A (M_3 \otimes_A M_4) \otimes_A ...(M_{n-1} \otimes_A M_n)$, $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \otimes_A M_4 \otimes_A ...M_{n-1} \otimes_A M_n$, etc.) é chamada produto anti-tensorial das A-álgebras $M_1, M_2, ..., M_n$.

Definição C.3.3. *Sejam M e N A-módulos. Uma aplicação n-linear $f : M^n \longrightarrow N$ $(n \geq 2)$ é dita alternada se para toda sequência $\{x_1, ..., x_n\}$ de n elementos de M, tal que $x_i = x_j$ para algum par de elementos distintos (i, j), temos $f(x_1, ..., x_n) = 0$.*

Proposição C.3.3. *Sejam M e N A-módulos. Para toda aplicação $f : M^n \longrightarrow N$ n-linear alternada, existe um único homomorfismo de A-módulos f^*, que faz o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_n"'] & N \\ \bigwedge^n(M) \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

onde η_n é a aplicação canônica, comutar.

Demonstração:

Desde que f é n-linear, existe uma única aplicação linear f, que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & N \\ T^n(M) \arrow[ur, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

onde φ_n é a aplicação canônica, comutar. Agora, para todo elemento de $T^n(M)$ da forma $x_1...x_{j-1}.x.x.x_{j+2}...x_n$, temos que:

$$\widehat{f}(x_1...x_{j-1}.x.x.x_{j+2}...x_n) = f(x_1, ..., x_{j-1}, x, x, x_{j+2}, ..., x_n) = 0$$

Dessa forma, podemos definir um homomorfismo de A-módulos f^*, de tal forma que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} T^n(M) \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\psi_n"'] & N \\ \bigwedge^n(M) \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

onde ψ_n é a aplicação canônica, é comutativo. Assim sendo, temos:

$$f^* \circ \eta_n = f^* \circ \psi_n \circ \varphi_n = \widehat{f} \circ \varphi_n = f$$

Se g é um homomorfismo de A-módulos que faz o diagrama da hipótese comutar, temos que

$$g(x_1 \wedge ... \wedge x_n) = f(x_1, ..., x_n) = f^*(x_1 \wedge ... \wedge x_n) \Rightarrow g = f^*$$

Q.E.D.

Corolário C.3.3. *Sejam M, N A-módulos, $g : M^n \longrightarrow N$ uma aplicação n-linear alternada e $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M^n$. Para qualquer permutação σ de $\{1, 2, ..., n\}$, temos*

$$g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \epsilon_\sigma g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

onde ϵ_σ é o sinal da permutação σ.

Demonstração:

Com as mesmas notações da proposição, temos:

$$g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = g^*(x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}) = g^*(\epsilon_\sigma(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)) =$$

$$\epsilon_\sigma g^*(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) = \epsilon_\sigma g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Q.E.D.

Corolário C.3.4. *Sejam M e N A-módulos e $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo. Existe um único homomorfismo de A-álgebras graduadas $\wedge(f) : \bigwedge(M) \longrightarrow \bigwedge(N)$, que prolonga f.*

Demonstração:

Sejam $\eta_n : N^n \longrightarrow \bigwedge^n(N)$ a aplicação canônica e $g_n : M^n \longrightarrow N^n$ a aplicação $(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$. A aplicação $\psi_n = \eta_n \circ g_n$ é claramente n-linear alternada. Assim sendo, podemos definir um homomorfismo de A-módulos $\wedge^n(f)$, que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & \bigwedge^n(N) \\
\bigwedge^n(M) \arrow[ur, "\wedge^n(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

onde φ_n é a aplicação canônica, comutar. Defina $\wedge^0(f) = 1_A$ e $\wedge^1(f) = f$ e $\wedge(f) = \oplus \wedge^n (f)$.

***Afirmação**: $\wedge(f)$ é um homomorfismo de A-álgebras.*

Desde que $\wedge(f)$ é um homomorfismo de A-módulos, é suficiente demonstrar que:

$$\wedge(f)((x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n).(y_{n+1} \wedge y_{n+2} \wedge ... \wedge y_{n+m})) =$$

$$(\wedge(f))(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n).(\wedge(f))(y_{n+1} \wedge y_{n+2} \wedge ... \wedge y_{n+m})$$

para $m, n \geq 1$ e $x_i, y_j \in M$. Em assim sendo, temos:

$$\wedge(f)((x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n).(y_{n+1} \wedge y_{n+2} \wedge ... \wedge y_{n+m})) =$$

$$\wedge(f)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \wedge y_{n+1} \wedge y_{n+2} \wedge ... \wedge y_{n+m}) =$$

$$\wedge^{n+m}(f)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n \wedge y_{n+1} \wedge y_{n+2} \wedge ... \wedge y_{n+m}) =$$

$$\eta_{n+m} \circ g_{n+m}(x_1, x_2, ..., x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m}) =$$

$$f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge ... \wedge f(x_n) \wedge f(y_{n+1}) \wedge f(y_{n+2}) \wedge ... \wedge f(y_{n+m}) =$$

$$[f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge ... \wedge f(x_n)].[f(y_{n+1}) \wedge f(y_{n+2}) \wedge ... \wedge f(y_{n+m})] =$$

$$[\eta_n \circ g_n(x_1, x_2, ..., x_n)].[\eta_m \circ g_m(y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m})] =$$

$$[\wedge^n(f)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)].[\wedge^m(f)(y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m})] =$$

$$[\wedge(f)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)].[\wedge(f)(y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m})]$$

Se $g : \bigwedge(M) \longrightarrow \bigwedge(N)$ é um homomorfismo de A-álgebras que prolonga f, então teremos:

$$g(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) = g(x_1) \wedge g(x_2) \wedge ... \wedge g(x_n) = f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge ... \wedge f(x_n) =$$

$$\wedge(f)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$$

para todo $n > 0$ e toda sequência de n elementos pertencentes a M. Como os elementos $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ e 1, $n > 0$, $x_i \in M$ geram $\bigwedge(M)$ e g, $\wedge(f)$ são homomorfismos de A-módulos, segue que $g = \wedge(f)$.

Q.E.D.

Observe que se $g : N \longrightarrow P$ é outro homomorfismo de A-módulos, temos $\wedge(g \circ f) = \wedge(g) \circ \wedge(f)$. De fato, tal igualdade segue da unicidade de $\wedge(g \circ f)$.

Proposição C.3.4. *Sejam M e N A-módulos. Se munirmos $(\bigwedge(M)) \otimes_A (\bigwedge(N))$, com a estrutura anti-tensorial (exemplo C.3.1), então existe um isomorfismo:*

$$(\bigwedge(M)) \otimes_A (\bigwedge(N)) \simeq \bigwedge(M \oplus N)$$

de A-álgebras.

Demonstração:

Seja $j_i : H_i \longrightarrow M \oplus N$, onde $i \in \{1, 2\}$, $H_1 = M$ e $H_2 = N$, a injeção canônica. Pelo corolário C.3.4 podemos definir homomorfismos de A-álgebras:

$$\wedge(j_i) : \bigwedge(H_i) \longrightarrow \bigwedge(M \oplus N)$$

que prolongam j_i. Assim sendo, podemos definir uma aplicação:

$$\psi : (\bigwedge(M)) \times (\bigwedge(N)) \longrightarrow \bigwedge(M \oplus N)$$

tal que $\psi(x, y) = (\wedge(j_1)(x)) \wedge (\wedge(j_2)(y))$. Como ψ é claramente A-bilinear, podemos definir uma aplicação A-linear:

$$\varphi : (\bigwedge(M)) \otimes_A (\bigwedge(N)) \longrightarrow \bigwedge(M \oplus N)$$

tal que $\varphi((x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) \otimes (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_p)) = j_1(x_1) \wedge j_1(x_2) \wedge ... \wedge j_1(x_p) \wedge j_2(y_1) \wedge j_2(y_2) \wedge ... \wedge j_2(y_p)$, com $x_j \in M$ e $y_i \in N$.

Afirmação 1: *φ é um homomorfismo de A-álgebras unitárias.*

Por linearidade é suficiente demonstrar que $\varphi((x \otimes y).(x' \otimes y')) = \varphi(x \otimes y).\varphi(x' \otimes y')$, $\forall x, x' \in \bigwedge(M)$ e $\forall y, y' \in \bigwedge(N)$. Novamente por linearidade é suficiente demonstrar o caso em que $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p$, $x' = x'_1 \wedge x'_2 \wedge ... \wedge x'_r$, $y' = y'_1 \wedge y'_2 \wedge ... \wedge y'_s$ e $y = y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q$, com $x_i \in M$ e $y_j \in N$. Assim sendo, temos:

$$\varphi((x \otimes y).(x' \otimes y')) = \varphi((-1)^{rq}(x.x') \otimes (y.y')) =$$

$$(-1)^{rq}\varphi((x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p \wedge x'_1 \wedge x'_2 \wedge ... \wedge x'_r) \otimes (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q \wedge y'_1 \wedge y'_2 \wedge ... \wedge y'_s)) =$$

$$(-1)^{rq}x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p \wedge x'_1 \wedge x'_2 \wedge ... \wedge x'_r \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q \wedge y'_1 \wedge y'_2 \wedge ... \wedge y'_s =$$

$$(-1)^{rq}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) \wedge (x'_1 \wedge x'_2 \wedge ... \wedge x'_r) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q) \wedge (y'_1 \wedge y'_2 \wedge ... \wedge y'_s) =$$

$$(-1)^{rq}(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) \wedge [(-1)^{rq}(y_1 \wedge ... \wedge y_q) \wedge (x'_1 \wedge ... \wedge x'_r)] \wedge (y'_1 \wedge y'_2 \wedge ... \wedge y'_s) =$$

$$[(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q)] \wedge [(x'_1 \wedge x'_2 \wedge ... \wedge x'_r) \wedge (y'_1 \wedge y'_2 \wedge ... \wedge y'_s)] =$$

$$(\varphi(x \otimes y)) \wedge (\varphi(x' \otimes y')) = \varphi(x \otimes y).\varphi(x' \otimes y')$$

onde estamos identificando M e N com um submódulo de $M \oplus N$ por meio da aplicação canônica. Além do mais, $\varphi(1 \otimes 1) = 1 \wedge 1 = 1.1 = 1$. Definiremos a inversa de φ como segue. Para $p = 0$ defina:

$$\xi_0 : A \longrightarrow \bigwedge(M) \otimes_A \bigwedge(N)$$

tal que $\xi_0(a) = 1 \otimes a$. Para $p = 1$ defina:

$$\xi_1 : M \oplus N \longrightarrow \bigwedge(M) \otimes_A \bigwedge(N)$$

tal que $\xi_1(x) = (pr_1(x)) \otimes 1 + 1 \otimes (pr_2(x))$, onde $pr_1 : M \oplus N \longrightarrow M$ e $pr_2 : M \oplus N \longrightarrow N$ são as projeções canônicas. ξ_1 claramente está bem definida e é A-linear.

Para $p > 1$ defina:

$$\widehat{\xi_p} : (M \oplus N)^p \longrightarrow \bigwedge(M) \otimes_A \bigwedge(N)$$

tal que $\widehat{\xi_p}(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}) = \xi_1(x_1).\xi_1(x_2)...\xi_p(x_p)$. Segue da linearidade de ξ_1 que $\widehat{\xi_p}$ é p-linear. Além do mais, se $x_i = x_j = y$ para $i \neq j$, teremos:

$$\widehat{\xi_p}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_p) =$$

$$\xi_1(x_1)...\xi_1(x_{i-1}).\xi_1(y).\xi_1(x_{i+1})...\xi_1(x_{j-1}).\xi_1(y).\xi_1(x_{j+1})...\xi_1(x_p) =$$

$$(-1)^{j-1}\xi_1(x_1)...\xi_1(x_{i-1}).[\xi_1(y)]^2.\xi_1(x_{i+1})...\xi_1(x_{j-1}).\xi_1(x_{j+1})...\xi_1(x_p) = 0$$

Pois se $y = (y_1, y_2)$, com $y_1 \in M$ e $y_2 \in N$, então:

$$[\xi_1(y)]^2 = [y_1 \otimes 1 + 1 \otimes y_2]^2 = (y_1)^2 \otimes 1 + y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1 + 1 \otimes (y_2)^2 =$$

$$y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1 = y_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes y_2 = 0$$

Lembrado que em $\bigwedge(M)$ (resp. $\bigwedge(N)$) $z^2 = 0$ para todo $z \in M$ (resp. $z \in N$) e que $(\bigwedge(M)) \otimes_A (\bigwedge(N))$ é anti-comutativa. Sendo assim, podemos definir uma aplicação A-linear:

$$\xi_p : \bigwedge^p(M \oplus N) \longrightarrow \bigwedge(M) \otimes_A \bigwedge(N)$$

tal que $\xi_p(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) = \xi_1(x_1).\xi_1(x_2)...\xi_1(x_p)$

Uma vez definidos os ξ_p*, defina:*

$$\xi : \bigwedge(M \oplus N) \longrightarrow \bigwedge(M) \otimes_A \bigwedge(N)$$

tal que $\xi = \oplus\xi_p$*. Segue por construção que* ξ *é um homomorfismo de A-álgebras.*

Afirmação 2: ξ *é a inversa de* φ*.*

De fato, temos que:

$$\varphi \circ \xi_1(x) = \varphi((pr_1(x)) \otimes 1 + 1 \otimes (pr_2(x))) = \varphi((pr_1(x)) \otimes 1) + \varphi(1 \otimes (pr_2(x))) =$$

$$(j_1 \circ pr_1(x)) \wedge 1 + 1 \wedge (j_2 \circ pr_2(x)) = j_1 \circ pr_1(x) + j_2 \circ pr_2(x) = x$$

$$\varphi \circ \xi(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) = \varphi(\xi_1(x_1).\xi_1(x_2)...\xi_1(x_p)) = \varphi(\xi_1(x_1)).\varphi(\xi_1(x_2))...\varphi(\xi_1(x_p)) =$$

$$x_1.x_2...x_p = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p$$

E também:

$$\xi \circ \varphi([x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p] \otimes [y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q]) =$$

$$\xi(j_1(x_1) \wedge j_1(x_2) \wedge ... \wedge j_1(x_p) \wedge j_2(y_1) \wedge j_2(y_2) \wedge ...j_2(y_q)) =$$

$$\xi_1 \circ j_1(x_1) \wedge \xi_1 \circ j_1(x_2) \wedge ... \wedge \xi_1 \circ j_1(x_p) \wedge \xi_1 \circ j_2(y_1) \wedge \xi_1 \circ j_2(y_2) \wedge ...\xi_1 \circ j_2(y_q) =$$

$$[(x_1 \otimes 1).(x_2 \otimes 1)...(x_p \otimes 1)].[(1 \otimes y_1).(1 \otimes y_2)...(1 \otimes y_q)] =$$

$$[(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) \otimes 1].[1 \otimes (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q)] = [x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p] \otimes [y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_q]$$

O resultado segue da linearidade das aplicações consideradas.

Q.E.D.

Corolário C.3.5. *Seja* $\{M_i\}_{i=1}^n$ *uma família de A-módulos. Se munirmos:*

$$\bigwedge(M_1) \otimes_A \bigwedge(M_2) \otimes_A ... \otimes_A \bigwedge(M_n)$$

com a estrutura anti-tensorial, então existe um isomorfismo :

$$\bigwedge(M_1) \otimes_A \bigwedge(M_2) \otimes_A ... \otimes_A \bigwedge(M_n) \simeq \bigwedge(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$$

de A-álgebras.

Demonstração:

O resultado segue por indução, a partir dos isomorfismos de A-álgebras:

$$\bigwedge(M_1) \otimes_A \bigwedge(M_2) \otimes_A ... \otimes_A \bigwedge(M_n) \simeq$$

$$(\bigwedge(M_1) \otimes_A \bigwedge(M_2) \otimes_A ... \otimes_A \bigwedge(M_{n-1})) \otimes_A \bigwedge(M_n) \simeq$$

$$(\bigwedge(\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i)) \otimes_A \bigwedge(M_n) \simeq \bigwedge((\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i) \oplus M_n) \simeq \bigwedge(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$$

Q.E.D.

Lema C.3.1. *Sejam M, N A-módulos,* $g : M^n \longrightarrow N$ *uma aplicação n-linear e* $G = \{x_i\}_{i \in I}$ *uma família de geradores de M. Se para toda sequência* $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *de n elementos de G, tal que* $y_k = y_j$ *para algum par de elementos distintos (k,j), tivermos* $g(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ *e para qualquer sequência* $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ *de elementos de G tivermos* $g(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, ..., z_{\tau(n)}) = -g(z_1, z_2, ..., z_n)$, *qualquer que seja a transposição* τ *de* $\{1, 2, ..., n\}$, *então g é alternada .*

Demonstração:

Da definição de aplicação n-linear alternada e do corolário C.3.3, vemos que é suficiente demonstrar que para todo $l \in \{1, 2, ..., n-2\}$ *e toda sequência* $\{w_1, ..., w_l, w_{l+3}, ..., w_n\}$ *de* $n-2$ *elementos de M, temos* $g(w_1, ..., w_l, z, z, w_{l+3}, ..., w_n) = 0$, $\forall z \in M$. *Escrevendo* $w_s = \sum_{i_s \in I} a_{s,i_s} x_i$, *temos que*

$$g(w_1, ..., w_l, z, z, w_{l+3}, ..., w_n) = \sum a_{1,i_1} ... a_{l,i_l} a_{l+3,i_{l+3}} ... a_{n,i_n} g(x_{i_1}, ..., x_{i_l}, z, z, x_{i_{l+3}}, ..., x_{i_n})$$

onde a soma acima é calculada sobre o produto dos suportes das famílias $\{a_{si_s}\}_{i_s \in I}$, $s \in \{1, 2, ..., n\} - \{l+1, l+2\}$. *Dessa forma, é suficiente demonstrar que para todo* $l \in \{1, 2, ..., n-2\}$ *(fixo) e toda sequência* $\{w_1, ..., w_l, w_{l+3}, ..., w_n\}$ *(fixa) de* $n-2$ *elementos de G, temos*

$g(w_1,...,w_l,z,z,w_{l+3},...,w_n) = 0$, $\forall z \in M$. Assim sendo, é suficiente demonstrar o caso $n = 2$. Escrevendo $z = \sum_{i\in I} b_i x_i$, temos:

$$g(z,z) = g(\sum_{i\in I} b_i x_i, \sum_{j\in I} b_j x_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} b_i b_j g(x_i,x_j) = \sum_{i<j} b_i b_j g(x_i,x_j) + \sum_{i\in I} b_i b_i g(x_i,x_i) +$$

$$\sum_{j<i} b_i b_j g(x_i,x_j) = \sum_{i<j} b_i b_j g(x_i,x_j) + \sum_{j<i} b_i b_j g(x_i,x_j) = \sum_{i<j} b_i b_j g(x_i,x_j) - \sum_{j<i} b_i b_j g(x_j,x_i) =$$

$$\sum_{i<j} b_i b_j g(x_i,x_j) - \sum_{i<j} b_j b_i g(x_i,x_j) = \sum_{i<j} (b_i b_j - b_j b_i) g(x_i,x_j) = 0$$

Q.E.D.

Lema C.3.2. *Sejam M,N A-módulos, $f : M^n \longrightarrow N$, $g : M^n \longrightarrow N$ aplicações n-lineares e $\{x_i\}_{i\in I}$ uma família de geradores de M. Se $f(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_n}) = g(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_n})$, $\forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in I^n$, então $f = g$.*

Demonstração:

Seja $(y_1,...,y_n) \in M^n$ e escrevamos $y_j = \sum_{i_j\in I} a_{ji_j} x_{i_j}$. Temos que:

$$f(y_1,...,y_n) = f(\sum_{i_1\in I} a_{1i_1} x_{i_1}, ..., \sum_{i_n\in I} a_{ni_n} x_{i_n}) = \sum_{i_1\in I} ... \sum_{i_n\in I} a_{1i_1}...a_{ni_n} f(x_{i_1},...,x_{i_n}) =$$

$$\sum_{i_1\in I} ... \sum_{i_n\in I} a_{1i_1}...a_{ni_n} g(x_{i_1},...,x_{i_n}) = g(\sum_{i_1\in I} a_{1i_1} x_{i_1}, ..., \sum_{i_n\in I} a_{ni_n} x_{i_n}) = g(y_1,...,y_n)$$

Q.E.D.

Proposição C.3.5. *Seja M um A-módulo livre com base $\{e_i\}_{i\in I}$. Para todo $n \in N$, $\bigwedge^n(M)$ é livre. Além do mais, se $\leq$ é uma ordem sobre I, então a base de $\bigwedge^n(M)$ é dada por:*

$$\{e_{\lambda_1} \wedge e_{\lambda_2} \wedge ... \wedge e_{\lambda_n}\}_{\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n, (\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in I^n}$$

Demonstração:

Sejam $\mathfrak{F}_n(I) = \{H \subseteq I / \#H = n\}$ e $J, K \subseteq I$. Defina $\delta_{JK} = 1$ se J=K, $\delta_{JK} = 0$, se $J \neq K$. Desde que M é livre, temos que $T^n(M)$ é livre. Logo, podemos definir uma aplicação A-linear:

$$\eta_n : T^n(M) \longrightarrow A^{(\mathfrak{F}_n(I))}$$

tal que $\eta_n(e_{\lambda_1}.e_{\lambda_2}...e_{\lambda_n}) = \sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HJ}\epsilon_\sigma e_J$, onde $J = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, $\{e_J\}_{J\in\mathfrak{F}_n(I)}$ é a base canônica de $A^{(\mathfrak{F}_n(I))}$ e ϵ_σ é o sinal da (única) permutação σ de $\{1,2,...,n\}$, tal que $\lambda_{\sigma(1)} < \lambda_{\sigma(2)} <$

... < $\lambda_{\sigma(n)}$ (se existirem indices $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ distintos, tais que $\lambda_i = \lambda_j$, então considere σ como sendo a permutação do maior subconjunto $\{1, 2, ..., m\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\lambda_s \neq \lambda_r$, $\forall s, r \in \{1, 2, ..., m\}$ e $\lambda_{\sigma(1)} < \lambda_{\sigma(2)} < ... < \lambda_{\sigma(m)}$. No que segue essa condição ficará implícita).

Se $\psi_n : M^n \longrightarrow T^n(M)$ denota a aplicação (n-linear) canônica, então $\varphi_n = \eta_n \circ \psi_n$ é n-linear, uma vez que a composição de uma linear e uma n-linear é claramente n-linear. Agora observe que se existem $i, j \in \{1, 2..., n\}$, distintos, tais que $\lambda_i = \lambda_j$, então $\#J < n$ e dessa forma, $\delta_{HJ} = 0$, $\forall H \in \mathfrak{F}_n(I)$, ou seja, $\varphi_n(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, ..., e_{\lambda_n}) = 0$. Seja τ uma transposição de $\{1, 2, ..., n\}$, temos que a (única) permutação θ de $\{1, 2, ..., n\}$, tal que $\lambda_{\theta\circ\tau(1)} \leq \lambda_{\theta\circ\tau(2)} \leq ... \leq \lambda_{\theta\circ\tau(n)}$ é dada por $\theta = \sigma \circ \tau^{-1}$. Assim sendo, temos:

$$\varphi_n(e_{\lambda_{\tau(1)}}, e_{\lambda_{\tau(2)}}, ..., e_{\lambda_{\tau(n)}}) = \sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HJ}\epsilon_\theta e_J = \sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HJ}\epsilon_{\sigma\circ\tau^{-1}} e_J =$$

$$\sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HJ}\epsilon_\sigma\epsilon_{\tau^{-1}} e_J = -\sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HJ}\epsilon_\sigma e_J = -\varphi_n(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, ..., e_{\lambda_n})$$

Segue do lema C.3.1 que φ_n é n-linear alternada. Sejam N um A-módulo e $f : M^n \longrightarrow N$ uma aplicação n-linear alternada. Desde que $A^{(\mathfrak{F}_n(I))}$ é um A-módulo livre, podemos definir uma aplicação A-linear:

$$\widehat{f} : A^{(\mathfrak{F}_n(I))} \longrightarrow N$$

tal que $\widehat{f}(e_J) = f(e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, ..., e_{\lambda_n})$, sendo $J = \{\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n\}$. Agora, observe que:

$$\widehat{f} \circ \varphi_n(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, ..., e_{\mu_n}) = \widehat{f}(\sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HK}\epsilon_\sigma e_K) = \sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HK}\epsilon_\sigma \widehat{f}(e_K)$$

onde $K = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$ e σ é a (única) permutação de $\{1, 2, ..., n\}$ tal que $\mu_{\sigma(1)} < \mu_{\sigma(2)} < ... < \mu_{\sigma(n)}$. Se $\mu_i = \mu_j$ para $i \neq j$, então $\#K < n$ e $\delta_{HK} = 0$, $\forall H \in \mathfrak{F}_n(I)$. Dessa forma

$$\widehat{f} \circ \varphi_n(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, ..., e_{\mu_n}) = 0 = f(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, ..., e_{\mu_n})$$

Se $\mu_i \neq \mu_j$ para todo i, j distintos, então $\sum_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} \delta_{HK} = 1$. Assim sendo, temos:

$$\widehat{f} \circ \varphi_n(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, ..., e_{\mu_n}) = \epsilon_\sigma \widehat{f}(e_K) = \epsilon_\sigma f(e_{\mu_{\sigma(1)}}, e_{\mu_{\sigma(2)}}, ..., e_{\mu_{\sigma(n)}}) =$$

$$\epsilon_{\sigma^{-1}} f(e_{\mu_{\sigma(1)}}, e_{\mu_{\sigma(2)}}, ..., e_{\mu_{\sigma(n)}}) = f(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, ..., e_{\mu_n})$$

A última igualdade seguindo do corolário C.3.3. Segue do lema C.3.2 que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & N \\ A^{(\mathfrak{F}_n(I))} \arrow[ur, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além do mais, se $g : A^{(\mathfrak{F}_n(I))} \longrightarrow N$ *é uma aplicação A-linear que faz tal diagrama comutar, temos que:*

$$g(\sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J e_J) = \sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J g(e_J) = \sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J g(\varphi_n(e_{\lambda_1^J}, e_{\lambda_2^J}, ..., e_{\lambda_n^J})) =$$

$$\sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J f(e_{\lambda_1^J}, e_{\lambda_2^J}, ..., e_{\lambda_n^J}) = \sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J \widehat{f}(\varphi_n(e_{\lambda_1^J}, e_{\lambda_2^J}, ..., e_{\lambda_n^J})) =$$

$$\sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J \widehat{f}(e_J) = \widehat{f}(\sum_{J\in\mathfrak{F}_n(I)} a_J e_J)$$

onde $J = \{\lambda_1^J < \lambda_2^J < ... < \lambda_n^J\}$*. Dessa forma,* $\widehat{f}$ *é a única aplicação A-linear que faz tal diagrama comutar. Desde que* $(\bigwedge^n(M), \gamma_n)$*, onde* $\gamma_n : M^n \longrightarrow \bigwedge^n(M)$ *é a aplicação canônica, também satisfaz a mesma propriedade universal (proposição C.3.3) segue que* $\widehat{\gamma_n} : A^{(\mathfrak{F}_n(I))} \longrightarrow \bigwedge^n(M)$ *é um isomorfismo. Assim sendo, temos que a base de* $\bigwedge^n(M)$ *é dada por:*

$$\{\widehat{\gamma_n}(e_H)\}_{H\in\mathfrak{F}_n(I)} = \{\widehat{\gamma_n} \circ \varphi_n(e_{\lambda_1^J}, e_{\lambda_2^J}, ..., e_{\lambda_n^J})\}_{J=\{\lambda_1^J<\lambda_2^J<...<\lambda_n^J\}, J\in\mathfrak{F}_n(I)} =$$

$$\{\gamma_n(e_{\lambda_1^J}, e_{\lambda_2^J}, ..., e_{\lambda_n^J})\}_{J=\{\lambda_1^J<\lambda_2^J<...<\lambda_n^J\}, J\in\mathfrak{F}_n(I)} =$$

$$\{e_{\lambda_1} \wedge e_{\lambda_2} \wedge ... \wedge e_{\lambda_n}\}_{\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n, (\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in I^n}$$

Q.E.D.

Corolário C.3.6. *Seja M um A-módulo livre com base finita* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$*. O A-módulo* $\bigwedge^k(M)$*,* $0 \leq k \leq n$*, é livre e tem dimensão dada por* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Demonstração:

Pela proposição e sua demonstração, vemos que $\bigwedge^k(M)$ *é livre e tem dimensão igual a cardinalidade do conjunto dos subconjuntos de* $\{1, 2, ..., n\}$ *que tem cardinalidade k, ou seja,* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Q.E.D.

Corolário C.3.7. *Se P é um A-módulo projetivo, então $\bigwedge^n(M)$ é um A-módulo projetivo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração:

Desde que P é projetivo, existe um A-módulo M e um conjunto I, tais que $A^{(I)} \simeq M \oplus P$, identificaremos esses A-módulos por meio desse isomorfismo. Seja $f : M \oplus P \longrightarrow P$ a projeção canônica. Uma vez que P é projetivo, existe um homomorfismo g que faz o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
A^{(I)} \arrow[r, "f"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comutar. Segue do corolário C.3.4 que existem homomorfismos de A-álgebras graduadas, $\wedge(f) : \bigwedge(A^{(I)}) \longrightarrow \bigwedge(P)$, $\wedge(g) : \bigwedge(P) \longrightarrow \bigwedge(A^{(I)})$ e $\wedge(f \circ g) : \bigwedge(P) \longrightarrow \bigwedge(P)$, que prolongam f, g e $f \circ g = 1_P$, respectivamente. Da observação feita ao corolário C.3.4 e da unicidade de tais prolongamentos, temos que:

$$\wedge(f) \circ \wedge(g) = \wedge(f \circ g) = \wedge(1_P) = 1_{\wedge(P)}$$

Uma vez que tais prolongamentos são homomorfismos de A-álgebras graduadas, segue que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\wedge^n(f) \circ \wedge^n(g) = 1_{\wedge^n(P)}$$

Se $y \in \bigwedge^n(A^{(I)})$, temos:

$$\wedge^n(f)(y) = 1_{\wedge^n(P)} \circ \wedge^n(f)(y) = \wedge^n(f) \circ \wedge^n(g) \circ \wedge^n(f)(y) \Rightarrow$$

$$\exists z \in Ker(\wedge^n(f))/y = z + \wedge^n(g) \circ \wedge^n(f)(y) \Rightarrow \bigwedge^n(A^{(I)}) = Ker(\wedge^n(f)) + \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P))$$

Além do mais, se $x \in Ker(\wedge^n(f)) \cap \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P))$, então:

$$\exists z \in \bigwedge^n(P)/x = \wedge^n(g)(z) e \wedge^n(f)(x) = 0 \Rightarrow \wedge^n(f) \circ \wedge^n(g)(z) = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow$$

$$x = \wedge^n(g)(z) = 0$$

Assim sendo, podemos definir um homomorfismo de A-módulos:

$$\psi_n : \bigwedge^n(A^{(I)}) \longrightarrow Ker(\wedge^n(f)) \oplus \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P))$$

de tal forma que se $x \in Ker(\wedge^n(f))$ *e* $y \in \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P))$, *então* $\psi_n(x+y) = (x,y)$. *Observe que* ψ_n *está bem definida. De fato, se* $x, x' \in Ker(\wedge^n(f))$ *e* $y, y' \in \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P))$ *são tais que* $x + y = x' + y'$, *então* $x - x' = y - y' = 0 \in Ker(\wedge^n(f)) \cap \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P)) \Rightarrow (x,y) = (x', y')$. ψ_n *é de fato um isomorfismo, cuja inversa é dada por* $(x,y) \mapsto x+y$, *que claramente está bem definida. Como* $\wedge^n(f) \circ \wedge^n(g) = 1_{\wedge^n(P)}$, *temos que* $\wedge^n(g)$ *é injetiva, logo* $\wedge^n(g)(\bigwedge^n(P)) \simeq \bigwedge^n(P)$. *Assim sendo, temos:*

$$\bigwedge^n(A^{(I)}) \simeq Ker(\wedge^n(f)) \oplus \wedge^n(g)(\bigwedge^n(P)) \simeq Ker(\wedge^n(f)) \oplus \bigwedge^n(P)$$

Segue da proposição que $\bigwedge^n(A^{(I)})$ *é livre, portanto* $\bigwedge^n(P)$ *é projetivo.*

Q.E.D.

Apêndice D

Sequências Regulares e Símbolo de Multiplicidade

D.1 Sequências Regulares e Profundidade

D.1.1 Sequências Regulares

Definição D.1.1. *Sejam M um A-módulo e* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *um sequência de elementos de A. A sequência* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *é dita M-regular, ou uma M-sequência, se a multiplicação com relação à* a_i *em* $\frac{M}{<a_1,a_2,...,a_{i-1}>M}$ *é injetiva e* $\frac{M}{<a_1,a_2,...,a_n>M} \neq 0$.

Exemplo D.1.1. *A sequência* $\{a\}$ *é uma sequência M-regular, se, e somente se, a não é um divisor de zero em M, ou seja, se* $x \in M$ *e* $ax = 0$*, então* $x = 0$.

Proposição D.1.1. *Sejam* $\{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m\}$ *um sequência de elementos de A e M um A-módulo. Se* $M' = \frac{M}{<a_1,a_2,...,a_n>M}$*, então a sequência* $\{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m\}$ *é M-regular, se, e somente se,* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *é M-regular e* $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ *é* M'*-regular.*

Demonstração:

Sejam $I_j =< a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_j >$ *e* $K_j =< b_1, b_2, ..., b_j >$, $0 \leq j \leq m$ *(*$K_0 = 0$, $I_0 =< a_1, a_2, ..., a_n >$*). O homomorfismo composto dos homomorfismos canônicos:*

$$M \longrightarrow M' \longrightarrow \frac{M'}{K_jM'}$$

é sobrejetivo e tem por núcleo I_jM*. Dessa forma, temos um isomorfismo* $\frac{M}{I_jM} \simeq \frac{M'}{K_jM'}$*. Portanto, a multiplicação por* b_{j+1} *é injetiva em* $\frac{M}{I_jM}$*, se, e somente se, o é em* $\frac{M'}{K_jM'}$*. Assim sendo, segue o resultado.*

Q.E.D.

Proposição D.1.2. *Sejam $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ uma sequência de elementos de A, $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ uma sequência de elementos de $\mathbb{N}^*$ e M um A-módulo. A sequência $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ é M-regular, se, e somente se, a sequência $\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_k^{n_k}\}$ é M-regular.*

Demonstração:

Sejam $\alpha, \beta \in A$.

Afirmação 1: *As multiplicações com relação a α e com relação a β em M são injetivas, se, e somente se, a multiplicação com relação a $\alpha\beta$ em M é injetiva.*

De fato, se $(\alpha\beta)x = 0$, então:

$$\alpha(\beta x) = 0 \Rightarrow \beta x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Reciprocamente, se $\alpha x = 0$, então:

$$\beta(\alpha x) = 0 \Rightarrow (\beta\alpha)x = 0 \Rightarrow (\alpha\beta)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

e analogamente, segue que $\beta x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Afirmação 2: *A multiplicação com relação a α em M é injetiva, se, e somente se, a multiplicação com relação a α^n em M é injetiva.*

De fato, segue da afirmação 1 que a multiplicação com relação a α e a α^{n-1} em M são injetivas se, e somente se, a multiplicação com relação a $\alpha\alpha^{n-1} = \alpha^n$ em M é injetiva. O resultado segue por indução.

Afirmação 3: *Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$. As multiplicações com relação a α e com relação a β em M são injetivas, se, e somente se, a multiplicação com relação a $\alpha^n\beta^m$ em M é injetiva.*

De fato, da afirmação 2 temos que a multiplicação como relação a α (resp. β)em M é injetivas, se, e somente se, a multiplicação com relação a α^n (resp. β^m) em M é injetiva e da afirmação 1 temos que A multiplicação como relação a α^n e com relação a β^m em M são injetivas se, e somente se, a multiplicação com relação a $\alpha^n\beta^m$ em M é injetiva.

Afirmação 4: *Sejam $\alpha, \beta \in A$. Se a multiplicação com relação a α em M é injetiva, então a multiplicação com relação a β em $\frac{M}{\alpha M}$ é injetiva, se, e somente se, o é em $\frac{M}{\alpha^n M}$.*

Suponha $n > 1$. Se $\beta\overline{y} = 0$ em $\frac{M}{\alpha^n M}$, então:

$$\beta y = \alpha^n z_1 \subseteq \alpha M \Rightarrow \beta\widehat{y} = 0 \in \frac{M}{\alpha M} \Rightarrow \widehat{y} = 0 \Rightarrow y = \alpha x_1$$

Suponha que demonstramos que $y = \alpha^j x_j$, com $1 \leq j \leq n-1$. Dessa forma, temos:

$$\beta\overline{\alpha^j x_j} = 0 \Rightarrow (\beta\alpha^j)x_j = \alpha^n z_{j+1} \Rightarrow \beta x_j = \alpha^{n-j} z_{j+1} \Rightarrow \beta\widehat{x_j} = 0 \Rightarrow$$

$$\widehat{x_j} = 0 \Rightarrow x_j = \alpha x_{j+1} \Rightarrow y = \alpha^{j+1} x_{j+1}$$

Segue por indução que $y = \alpha^n x_n$, para algum $x_n \in M$, e portanto $\overline{y} = 0$. Reciprocamente, seja $\beta\widehat{y} = 0$, temos que:

$$\beta y = \alpha z \Rightarrow \beta(\alpha^{n-1} y) = \alpha^n z \Rightarrow \beta(\overline{\alpha^{n-1} y}) = 0 \Rightarrow \overline{\alpha^{n-1} y} = 0 \Rightarrow \alpha^{n-1} y = \alpha^n x$$

Da afirmação 2, segue que $y = \alpha x$ e portanto $\widehat{y} = 0$.

Se $k = 1$, então o resultado segue da afirmação 2. Suponha que $k > 1$ e sejam $\{a_1, ..., a_k, a_{k+1}\}$, $\{b_1, ..., b_k, b_{k+1}\}$ duas sequências de elementos de A, $\{n_1, ..., n_k, n_{k+1}\}$, $\{m_1, m_2, ..., m_k, m_{k+1}\}$ duas sequências de elementos de $\mathbb{N}^*$ e M um A-módulo. Temos pela afirmação 4 que a multiplicação por a_{k+1} em $\frac{M}{<a_1, a_2, ..., a_k> M} \simeq \frac{M'}{a_1 M'}$, com $M' =< a_2, a_3, ..., a_k > M$, é injetiva, se, e somente se, o é em $\frac{M'}{a_1^{n_1} M'} \simeq \frac{M}{<a_1^{n_1}, a_2, ..., a_k> M}$. Da hipótese de indução, concluímos que a multiplicação por a_{k+1} em $\frac{M}{<a_1^{n_1}, a_2, ..., a_k> M} \simeq \frac{M''}{<a_2, a_3, ..., a_k> M''}$, onde $M'' = a_1^{n_1} M$, é injetiva, se, e somente se, o é em $\frac{M''}{<a_2^{n_2}, a_3^{n_3}, ..., a_k^{n_k}> M''} \simeq \frac{M}{<a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_k^{n_k}> M}$. Segue por indução que $\{a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}\}$ é M-regular, se, e somente se, $\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_k^{n_k}, a_{k+1}\}$ é M-regular (o passo $k = 1$ não passa da afirmação 4). Da afirmação 2, temos que $\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_k^{n_k}, a_{k+1}\}$ é M-regular, se, e somente se, $\{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_k^{n_k}, a_{k+1}^{n_{k+1}}\}$ é M-regular. Observe ainda que $< a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, ..., a_k^{n_k} > M \subseteq\ < a_1, a_2, ..., a_k > M \neq M$.

Q.E.D.

Proposição D.1.3. *Sejam $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ uma sequência de elementos de A e M um A-módulo. A sequência $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é M-regular, se, e somente se, a sequência:*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi_0} M_0 \xrightarrow{\varphi_1} M_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} M_n \longrightarrow 0 \tag{D.1}$$

onde $M_i = \frac{M}{<a_1, a_2, ..., a_i> M}$ ($M_0 = M$) e $\varphi_{i+1} : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ é tal que $\varphi_{i+1}(\widehat{x}) = a_{i+2}\overline{x}$ ($\overline{x}$ e $\widehat{x}$ denotam as classes de x em M_{i+1} e M_i, respectivamente) ($\varphi_0(x) = a_1 x$, $\varphi_n(x) = \overline{x} \in M_n$), é exata e $M_n \neq 0$.

Demonstração:

Se a sequência $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é M regular, segue que φ_0 é injetiva, pois tal função não passa da multiplicação por a_1 em M. Além do mais, temos:

$$\varphi_{i+1}(x) = 0 \Leftrightarrow a_{i+2}\overline{x} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0 \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{i+1} a_j z_j \Leftrightarrow \overline{x} = a_{i+1}\overline{z_{i+1}} \Leftrightarrow \overline{x} = \varphi_i(\widehat{z_{i+1}})$$

sendo $\overline{x}$ a classe de x em M_{i+1} e $\widehat{z_{i+1}}$ a classe de z_{i+1} em M_i.

Reciprocamente, se a sequência D.1 é exata, temos que a_1 é injetiva em M e também:

$$a_i\overline{x} = 0 \Rightarrow \varphi_{i-1}(\widehat{x}) = 0 \Rightarrow \widehat{x} = \varphi_{i-2}(\widetilde{z}) = a_{i-1}\widehat{z}/z \in < a_1, a_2, ..., a_{i-2} > M \Rightarrow \overline{x} = 0$$

onde $\overline{x}$ denota a classe de x em M_{i-1}, $\widehat{x}$ denota a classe de x em M_{i-2} e $\widetilde{z}$ denota a classe de z em M_{i-3}.

Q.E.D.

Proposição D.1.4. *Sejam M um A-módulo e $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ uma M-sequência. Se M é Noetheriano e cada a_i, $1 \leq i \leq n$, pertence ao radical de Jacobson, então $\{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)}\}$ é uma M-sequência, para qualquer permutação $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$.*

Demonstração:

Faremos indução sobre n. O caso $n = 1$ é trivial. Suponha que o resultado é válido para $n \geq 1$. Se τ é uma transposição de $\{1, 2, ..., n, n+1\}$, então existem $i, j \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$, tais que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$, $\forall k \neq i, j$. Se $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, então segue por hipótese de indução que $\{a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, ..., a_{\tau(n)}\}$ é uma M-sequência. Além do mais, temos que:

$$a_{n+1}\overline{x} = 0 \in \frac{M}{< a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, ..., a_{\tau(n)} > M} = \frac{M}{< a_1, a_2, ..., a_n > M} \Rightarrow \overline{x} = 0$$

Logo, $\{a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, ..., a_{\tau(n)}, a_{\tau(n+1)}\}$ é M-regular. Se $i = n+1$, então podemos ver τ como a composição das seguintes transposições:

$$\gamma : j \mapsto n$$

$$\eta : n \mapsto n+1$$

$$\zeta : j \mapsto n$$

Segue do caso "$i, j \in \{1, 2, ..., n\}$" que $\{a_{\gamma(1)}, a_{\gamma(2)}, ..., a_{\gamma(n)}, a_{\gamma(n+1)}\}$ é uma M-sequência.

Afirmação 1: *Sejam α e β pertencentes ao radical de Jacobson. Se $\{\alpha, \beta\}$ é uma M-sequência, então $\{\beta, \alpha\}$ é uma M-sequência.*

Se $\alpha\overline{x} = 0 \in \frac{M}{\beta M}$, então:

$$\alpha x = \beta y \Rightarrow \beta\widehat{y} = 0 \in \frac{M}{\alpha M} \Rightarrow \widehat{y} = 0 \Rightarrow y = \alpha z \Rightarrow \alpha x = \alpha(\beta z) \Rightarrow x = \beta z \Rightarrow \overline{x} = 0$$

Seja $(0 :_M \beta) = \{x \in M/\beta x = 0\}$. Claramente, $(0 :_M \beta)$ é um submódulo de M e $< \alpha > (0 :_M \beta) \subseteq (0 :_M \beta)$. Além do mais, temos:

$$x \in (0 :_M \beta) \Rightarrow \beta x = 0 \Rightarrow \beta\overline{x} = 0 \in \frac{M}{\alpha M} \Rightarrow \overline{x} = 0 \Rightarrow x = \alpha y \Rightarrow \alpha(\beta y) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta y = 0 \Rightarrow y \in (0 :_M \beta) \Rightarrow x = \alpha y \in < \alpha > (0 :_M \beta)$$

Portanto, $< \alpha > (0 :_M \beta) = (0 :_M \beta)$. Segue do lema de Nakayama que $(0 :_M \beta) = 0$. E dessa forma, a multiplicação por β é injetiva em M.

Afirmação 2: *$\{a_{\eta\circ\gamma(1)}, a_{\eta\circ\gamma(2)}, ..., a_{\eta\circ\gamma(n)}, a_{\eta\circ\gamma(n+1)}\}$ é uma M-sequência.*

Pela proposição D.1.1 é suficiente demonstrar que $\{a_{\eta\circ\gamma(n)}, a_{\eta\circ\gamma(n+1)}\} = \{a_{n+1}, a_j\}$ é $M' = \frac{M}{<a_{\eta\circ\gamma(1)}, a_{\eta\circ\gamma(2)}, ..., a_{\eta\circ\gamma(n-1)}>M}$ regular. Mas isso segue da afirmação 1 (trocando M por M') e do fato de $\eta(k) = k$, $\forall k < n$.

Assim sendo, segue do caso "$i, j \in \{1, 2, ..., n\}$" que:

$$\{a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, ..., a_{\tau(n)}, a_{\tau(n+1)}\} = \{a_{\zeta\circ\eta\circ\gamma(1)}, a_{\zeta\circ\eta\circ\gamma(2)}, ..., a_{\zeta\circ\eta\circ\gamma(n)}, a_{\zeta\circ\eta\circ\gamma(n+1)}\}$$

é M-regular. Dessa forma, temos por indução que $\{a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, ..., a_{\tau(n)}\}$ é M-regular para qualquer transposição $\tau : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$. Como $\sigma = \tau_m \circ \tau_{m-1} \circ ... \circ \tau_1$, com os τ_i transposições, o resultado segue por indução sobre m.

Q.E.D.

D.1.2 Profundidade de um A-módulo relativo a um ideal

Definição D.1.2. *Sejam M um A-módulo e $J \subseteq A$ um ideal. Chamamos de profundidade de M com relação a J e denotamos por $prof(J; M)$ ao "inteiro":*

$$prof(J; M) = inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}/Ext^n_A(\frac{A}{J}, M) \neq 0\}$$

Proposição D.1.5. *Sejam $J \subseteq A$ um ideal e $\{M_i\}_{i\in I}$ um família de A-módulos. Se $M = \prod_{i\in I} M_i$, então temos a seguinte igualdade:*

$$prof(J;M) = inf\{prof(J;M_i)/i \in I\}$$

Demonstração:

Pelo corolário B.4.4 temos que $Ext^n_A(J;M) \simeq \prod_{i\in I} Ext^n_A(J;M_i)$. Se $n < prof(J;M)$, então:

$$\prod_{i\in I} Ext^n_A(J;M_i) = 0 \Rightarrow Ext^n_A(J;M_i) = 0, \quad \forall i \in I, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma, $prof(J;M) \leq inf\{prof(J;M_i)/i \in I\}$. Se $m < inf\{prof(J;M_i)/i \in I\}$, então:

$$Ext^m_A(J;M_i) = 0, \quad \forall i \in I \Rightarrow \prod_{i\in I} Ext^m_A(J;M_i) = 0 \Rightarrow Ext^m_A(J;M) = 0$$

Assim sendo, temos $inf\{prof(J;M_i)/i \in I\} \leq prof(J;M)$.

Q.E.D.

Lema D.1.1. *Sejam N,M A-módulos e J um ideal. Se $J \subseteq Ann(N)$, então $Ext^n_A(N;M) = 0$, $\forall n < prof(J;M)$.*

Demonstração:

Sabemos que N tem uma estrutura canônica de $\frac{A}{J}$-módulo. Temos pela proposição A.1.5 que existe uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow (\tfrac{A}{J})^{(I)} \longrightarrow N \longrightarrow 0 \tag{D.2}$$

onde H é um $\frac{A}{J}$-módulo e I é um conjunto. Segue do corolário B.4.4 que $Ext^m_A((\frac{A}{J})^{(I)};M) \simeq [Ext^m_A(\frac{A}{J};M)]^I$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Assim sendo, temos que $Ext^m_A(\frac{A}{J}^{(I)};M) = 0$ se $m < prof(J;M)$. Da sequência exata de $\frac{A}{J}$-módulos (D.2), que pela estrutura de $\frac{A}{J}$-módulo de tais módulos também é uma sequência exata de A-módulos, e do teorema B.4.2 concluímos que $Ext^{m-1}_A(H;M) \simeq Ext^m(N;M)$. O resultado segue por indução, lembrando que $Ext^{-1}_A(H;M) = 0$ e que $J \subseteq Ann(M)$.

Q.E.D.

Proposição D.1.6. *Sejam M um A-módulo e $J' \subseteq J \subseteq A$ ideais. Temos que:*

$$prof(J';M) \leq prof(J;M)$$

Demonstração:

Desde que $J' \subseteq J = Ann(\frac{A}{J})$, *temos pelo lema D.1.1 que* $Ext^n_A(\frac{A}{J}; M) = 0$, $\forall n < prof(J', M)$. *Assim sendo, segue-se o resultado.*

Q.E.D.

Proposição D.1.7. *Sejam* M *um* A*-módulo,* $J \subseteq A$ *um ideal e* $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq J$ *uma* M*-sequência. Se* $M_i = \frac{M}{<a_1,a_2,...,a_i>M}$, *então:*

$$prof(J, M) = prof(J; M_n) + n$$

Demonstração:

Observe que $prof(J; M_0) = prof(J; M)$, *onde* $M_0 = M$. *Suponha que demonstramos que* $prof(J; M_i) = prof(J; M) - i$, $0 \leq i \leq n-1$. *Considere a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow 0$$

onde φ_i *é a multiplicação por* a_{i+1} *em* M_i *e* $\varphi_{i+1} : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ *é a aplicação canônica. Pelo teorema B.4.3, temos as sequências exatas:*

$$Ext^r_A(\tfrac{A}{J}, M_i) \longrightarrow Ext^r_A(\tfrac{A}{J}, M_{i+1}) \longrightarrow Ext^{r+1}_A(\tfrac{A}{J}, M_i)$$

$r \in \mathbb{Z}$. *Se* $r \leq prof(J; M) - i - 2$, *então temos por hipótese que* $Ext^r_A(\frac{A}{J}, M_i) = 0 = Ext^{r+1}_A(\frac{A}{J}, M_i)$ *e portanto* $Ext^r_A(\frac{A}{J}, M_{i+1}) = 0$. *Assim sendo, temos que* $prof(J; M_{i+1}) \geq prof(J; M) - i - 1$. *Considere a sequência exata:*

$$Ext^{s-1}_A(\tfrac{A}{J}, M_{i+1}) \longrightarrow Ext^s_A(\tfrac{A}{J}, M_i) \xrightarrow{\eta_i} Ext^s_A(\tfrac{A}{J}, M_i)$$

onde $s = prof(J; M) - i$ *e* $\eta_s(\overline{f}) = \overline{a_{i+1}f}$ *(teorema B.4.3). Como* $a_{i+1} \in J = Ann(\frac{A}{J})$, *segue do corolário B.4.2 que* $\eta_r(\overline{f}) = 0$. *Se* $prof(J; M_{i+1}) > prof(J; M) - i - 1$, *então* $Ext^{s-1}_A(\frac{A}{J}, M_{i+1}) = 0$. *Dessa forma,* η_i *é injetivo e teríamos* $Ext^s_A(\frac{A}{J}, M_i) = 0$. *O que contradiz a hipótese de indução. Logo,* $prof(J; M_{i+1}) = prof(J; M) - i - 1$. *O resultado segue por indução.*

Q.E.D.

Lema D.1.2. *Sejam* M *um* A*-módulo e* $\mathfrak{Z}(M) = \{a \in A / ax = 0$ *para algum* $0 \neq x \in M\}$. *Se* A *é Noetheriano e* M *finitamente gerado, então existe uma família finita* $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ *de ideais primos de* A*, tais que* $\mathfrak{Z}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. *Além do mais, para cada* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $\exists x_i \in M$ *tal que* $P_i = Ann(x_i)$.

Demonstração:

Afirmação 1: $\mathfrak{Z}(M) = \bigcup_{0 \neq x \in M} Ann(x)$

Evidente!

Afirmação 2: *Os elementos maximais (com relação à inclusão) do conjunto* $B = \{Ann(x)/0 \neq x \in M\}$ *são primos.*

Seja $Ann(x)$ *maximal em* B. *Se* $ab \in Ann(x)$ *e* $b \notin Ann(x)$, *então:*

$$abx = 0, bx \neq 0 \Rightarrow a \in Ann(bx) \in B$$

Além do mais, temos:

$$d \in Ann(x) \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow d(bx) = 0 \Rightarrow d \in Ann(bx) \Rightarrow Ann(x) \subseteq Ann(bx)$$

Da maximalidade de Ann(x) segue que $Ann(x) = Ann(bx)$ *e portanto* $a \in Ann(x)$.

A existência de elementos maximais em B está garantida pelo fato de A ser Noetheriano. Seja N o submódulo de M gerado pelos elementos $x \in M$, *tais que* $Ann(x)$ *é maximal em B. Uma vez que M é Noetheriano (A é Noetheriano e M finitamente gerado) segue que existem* $x_1, x_2, ..., x_n \in M$, *tais que* $N =< x_1, x_2, ..., x_n >$. *Se* $x \in M$ *é tal que* $Ann(x)$ *é maximal em B, então* $x \in N$ *e portanto* $\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \subseteq Ann(N) \subseteq Ann(x)$. *Pela afirmação 2, temos que* $Ann(x)$ *é primo, portanto* $\exists i \in \{1, 2, ..., n\}$ *tal que* $Ann(x_i) \subseteq Ann(x)$. *Da maximalidade de* $Ann(x_i)$, *segue que* $Ann(x_i) = Ann(x)$. *Portanto, os únicos elementos maximais de B são* $\{Ann(x_1), Ann(x_2), ..., Ann(x_n)\}$. *Da afirmação 1 e da maximalidade dos* $Ann(x_i)$, *segue que* $\mathfrak{Z}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} Ann(x_i)$. *O resultado segue da afirmação 2.*

Q.E.D.

Lema D.1.3. *Sejam A Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e* $J \subseteq A$ *um ideal. O submódulo* $N = \{x \in M/J \subseteq Ann(x)\}$ *é nulo, se, e somente se,* $\exists \gamma \in J$ *tal que a multiplicação com relação a* γ *em M é injetiva.*

Demonstração:

Suponha que para qualquer $\gamma \in J$, *existe* $0 \neq x_\gamma \in M$ *tal que* $\gamma x_\gamma = 0$. *Em assim sendo, temos que* $\gamma \in Ann(x_\gamma)$ *e portanto* $J \subseteq \bigcup_{0 \neq x \in M} Ann(x)$. *Pelo lema D.1.2, temos que existem* $x_1, x_2, ..., x_n \in M - \{0\}$, *tais que* $Ann(x_i)$ *são primos e* $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ann(x_i)$. *Como os* $Ann(x_i)$ *são primos,* $\exists i \in \{1, 2, ..., n\}$ *tal que* $J \subseteq Ann(x_i)$. *Absurdo, pois N é nulo. A recíproca é evidente.*

Q.E.D.

Lema D.1.4. *Sejam M um A-módulo, $J \subseteq A$ um ideal. Temos que:*

$$Hom_A(\frac{A}{J}, M) \simeq \{x \in M / J \subseteq Ann(x)\}$$

Demonstração:

Defina:

$$\varphi : Hom_A(\frac{A}{J}, M) \longrightarrow \{x \in M / J \subseteq Ann(x)\}$$

tal que $\varphi(f) = f(\overline{1})$. Se $a \in J$, então $af(\overline{1}) = f(a\overline{1}) = f(\overline{a}) = f(0) = 0$. Logo, φ está bem definida e é claramente um homomorfismo. Se $\varphi(f) = 0$, então:

$$f(\overline{1}) = 0 \Rightarrow af(\overline{1}) = 0, \forall a \in A \Rightarrow f(\overline{a}) = 0, \forall a \in A \Rightarrow f = 0$$

Se $y \in \{x \in M / J \subseteq Ann(x)\}$, então defina $f : A \longrightarrow M$, tal que $f(a) = ay$. Se $b \in J$, então:

$$by = 0 \Rightarrow f(b) = 0 \Rightarrow b \in Ker(f) \Rightarrow J \subseteq Ker(f)$$

Dessa forma, podemos definir o homomorfismo $g : \frac{A}{J} \longrightarrow M$, tal que $g(\overline{a}) = ay$. Claramente $\varphi(g) = y$.

Q.E.D.

Teorema D.1.1. *Sejam M um A-módulo $J \subseteq A$ um ideal e $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq J$ uma M-sequência. Se A é Noetheriano, M finitamente gerado e $prof(J; M) > n$, então $\exists a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_s \in J$, com $s = prof(J; M)$, tais que $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_s\}$ é uma M-sequência.*

Demonstração:

Seja $M_n = \frac{M}{<a_1, a_2, ..., a_n> M}$. Da proposição D.1.7, sabemos que $prof(J; M_n) = prof(J; M) - n > 0$. Dessa forma, temos que $Hom_A(\frac{A}{J}, M) = 0$. Segue dos lemas D.1.3 e D.1.4 que existe $a_{n+1} \in J$ tal que a multiplicação com relação a a_{n+1} em M_n é injetiva, ou seja, $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$ é uma M-sequência. O resultado segue por indução.

Q.E.D.

Corolário D.1.1. *Sejam M um A-módulo e $J \subseteq A$ um ideal. Se A é Noetheriano e M é finitamente gerado, então todas as M-sequências maximais formadas por elementos de J tem o mesmo comprimento (O comprimento de uma sequência $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é definido como a cardinalidade do conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$) e tal comprimento é dado pelo "inteiro"$prof(J; M)$.*

Demonstração:

Segue direto do teorema e da proposição D.1.7.

Q.E.D.

Lema D.1.5. *Sejam M um A-módulo I um conjunto e $p((X_i)_{i\in I}) \in A[(X_i)_{i\in I}]$. Se a multiplicação com relação a $p((X_i)_{i\in I})$ em $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$ não é injetiva, então $\exists m \in M$ tal que $m \otimes p((X_i)_{i\in I}) = 0$.*

Demonstração:

Desde que $A[(X_i)_{i\in I}] = A^{(\mathbb{N}^{(I)})}$, temos um isomorfismo de A-módulos:

$$\varphi : M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}] \longrightarrow M^{(\mathbb{N}^{(I)})}$$

tal que $\varphi(m \otimes \prod_{i\in I} X_i^{f(i)}) = j_f(m)$, onde $j_f : M \longrightarrow M^{(\mathbb{N}^{(I)})}$ é a injeção canônica. Se $0 \neq \sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f \in M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$ (observe que todo elemento de $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$ é dessa forma) é tal que $p((X_i)_{i\in I})(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f) = 0$ e $\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f$ tem a menor quantidade de coeficientes não nulos possível, então:

$$(\sum_{g\in\mathbb{N}^{(I)}} a_g X^g)(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f) = \sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} \sum_{g\in\mathbb{N}^{(I)}} a_g(m_f \otimes X^{f+g}) \sum_{h\in\mathbb{N}^{(I)}} (\sum_{f+g=h} a_g m_f) \otimes X^h = 0 \Rightarrow$$

$$(\sum_{f+g=h} a_g m_f) \otimes X^h = 0, \forall h \in \mathbb{N}^{(I)} \tag{D.3}$$

onde $p((X_i)_{i\in I}) = \sum_{g\in\mathbb{N}^{(I)}} a_g X^g$. Considere sobre $\mathbb{N}^{(I)}$ a ordem lexicográfica, ou seja, se $f \neq g$, então $f < g \Leftrightarrow f(i) < g(i)$, onde $f(i) = inf\{f(j)/f(j) \neq g(j)\}$. Se n (resp. s) é o maior entre os "g's"(resp. "f's") tais que $a_g \neq 0$ (resp. $m_f \neq 0$), então $(\sum_{f+g=n+s} a_g m_f) \otimes X^{n+s} = (a_n m_s) \otimes X^{n+s} = 0$. Sendo φ como na proposição D.1.9, temos que:

$$\varphi((a_n m_s) \otimes X^{n+s}) = 0 \Rightarrow j_{n+s}(a_n m_s) = 0 \Rightarrow a_n m_s = 0$$

Disso segue que a quantidade de coeficientes não nulos de $a_n(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f)$ é estritamente menor que a de $\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f$. Além do mais, desde que:

$$p((X_i)_{i\in I})(a_n(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f)) = a_n(p((X_i)_{i\in I})(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f)) = 0$$

temos da minimalidade dos coeficientes não nulos de $\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f$ *que* $a_n(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f) = 0$. *Suponha que demonstramos que* $a_{n-r}(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f) = 0$, *onde* $n-r$ *é o* $(r+1)^o$*-esimo maior (Por exemplo, com a ordem canônica de* $\mathbb{N}$ *o elemento 3 é o segundo maior do subconjunto* $\{1,2,3,4\}$*) dos "f's"tais que* $a_f \neq 0$ *(por abuso de linguagem e por simplicidade, faremos a função n-r se comportar como um número natural o que facilitará no raciocínio indutivo). Segue da igualdade D.3 que:*

$$(\sum_{g+f=n-r-1+s} a_g m_f) \otimes X^{n-r-1+s} = (a_{n-r-1} m_s) \otimes X^{n-r-1+s} = 0$$

Segue por raciocínio totalmente análogo ao caso a_n *que* $a_{n-r-1}(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f) = 0$. *Assim sendo, segue por indução que* $a_h(\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} m_f \otimes X^f) = 0$, $\forall h \in \mathbb{N}^{(I)}$. *Dessa forma, temos que:*

$$\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} (a_h m_f) \otimes X^f = 0 \Rightarrow (a_h m_s) \otimes X^s = 0 \Rightarrow \varphi((a_h m_s) \otimes X^s) = 0 \Rightarrow$$

$$j_s(a_h m_s) = 0 \Rightarrow a_h m_s = 0, \forall h \in \mathbb{N} \Rightarrow m_s \otimes p((X_i)_{i\in I}) = \sum_{g\in\mathbb{N}^{(I)}} (a_g m_s) \otimes X^g = 0$$

Q.E.D.

Proposição D.1.8. *Sejam* M *um* A*-módulo,* I *um conjunto e* $0 \neq J \subseteq A$ *um ideal finitamente gerado. Se* $prof(J;M) > 0$, *então existe* $\gamma \in JA[(X_i)_{i\in I}]$ *tal que a multiplicação por* γ *em* $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$ *é injetiva.*

Demonstração:

Suponha que todo elemento de $JA[(X_i)_{i\in I}]$ *anula algum elemento não nulo de* $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$. *Seja* $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ *um conjunto de geradores de J. Defina o polinômio* $p((X_i)_{i\in I}) = \sum_{j=0}^{n} a_j X_\delta^j \in JA[(X_i)_{i\in I}]$, *com* $\delta \in I$. *Temos que existe um elemento não nulo* $r \in M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$ *tal que* $p((X_i)_{i\in I})r = 0$. *Segue do lema D.1.5 que existe um elemento* $m \in M$ *tal que* $m \otimes p((X_i)_{i\in I}) = 0$. *Se* φ *é como na proposição D.1.5, então:*

$$\varphi(m \otimes p((X_i)_{i\in I})) = 0 \Rightarrow \{a_i m\}_{i\in\mathbb{N}} = 0 \Rightarrow a_i m = 0, 0 \leq i \leq n \Rightarrow J \subseteq Ann(m)$$

Mas de acordo com o lema D.1.4 isso é absurdo!

Q.E.D.

Proposição D.1.9. *Sejam M um A-módulo $J \subseteq A$ um ideal e $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq J$ uma M-sequência. Se I é um conjunto, então a sequência $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in I}]$ é uma $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$-sequência.*

Demonstração:

Seja $a_1(\sum_{j\in J} m_j \otimes p_j((X_i)_{i\in I})) = 0$, *com* $m_j \in M$ *e* $p_j((X_i)_{i\in I}) = \sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{jf}X^f \in A[(X_i)_{i\in I}]$. *Assim sendo, temos que:*

$$\varphi(a_1(\sum_{j\in J} m_j \otimes p_j((X_i)_{i\in I}))) = 0 \Rightarrow a_1\varphi(\sum_{j\in J} m_j \otimes (\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{jf}X^f)) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{jf}a_1\varphi(m_j \otimes X^f) = 0 \Rightarrow \sum_{j\in J}\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{jf}a_1 j_f(m_j) = 0 \Rightarrow$$

$$\{a_1\sum_{j\in J} b_{jf}m_j\}_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} = 0 \Rightarrow a_1\sum_{j\in J} b_{jf}m_j = 0, \forall f \in \mathbb{N}^{(I)} \Rightarrow \sum_{j\in J} b_{jf}m_j = 0, \forall f \in \mathbb{N}^{(I)}$$

Dessa forma, temos que:

$$\sum_{j\in J} m_j \otimes p_j((X_i)_{i\in I} = \sum_{j\in J} m_j \otimes (\sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}} b_{jf}X^f) = \sum_{f\in\mathbb{N}^{(I)}}(\sum_{j\in J} b_{jf}m_j) \otimes X^f) = 0$$

***Afirmação**: Para todo ideal $H \subseteq A$, os $A[(X_i)_{i\in I}]$-módulos $\frac{M}{HM} \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$ e $\frac{M\otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]}{H(M\otimes_A A[(X_i)_{i\in I}])}$ são isomorfos.*

Da sequência exata de A-módulos:

$$0 \longrightarrow HM \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\psi} \frac{M}{HM} \longrightarrow 0$$

onde i e ψ são a injeção e a projeção canônicas, e do fato de $A[(X_i)_{i\in I}]$ ser uma A-módulo livre, temos a sequência exata de A-módulos:

$$0 \longrightarrow (HM) \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}] \xrightarrow{i\otimes 1} M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}] \xrightarrow{\psi\otimes_A 1} \frac{M}{HM} \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}] \longrightarrow 0 \qquad \text{(D.4)}$$

Se $p((X_i)_{i\in I}), q((X_i)_{i\in I}) \in A[(X_i)_{i\in I}]$ e $m \in M$, então:

$$(i \otimes 1)(q((X_i)_{i\in I})(m \otimes p((X_i)_{i\in I}))) = (i \otimes 1)(m \otimes (q((X_i)_{i\in I})p((X_i)_{i\in I}))) =$$

$$i(m) \otimes (q((X_i)_{i\in I})p((X_i)_{i\in I})) = q((X_i)_{i\in I})i(m) \otimes p((X_i)_{i\in I}) = q((X_i)_{i\in I}(i \otimes 1)(m \otimes p((X_i)_{i\in I})))$$

Dessa forma, $i \otimes 1$ é uma homomorfismo de $A[(X_i)_{i\in I}]$-módulos. Analogamente, se demonstra que $\psi \otimes 1$ é um homomorfismo de $A[(X_i)_{i\in I}]$-módulos. Portanto, a sequência D.4 é uma sequência exata de $A[(X_i)_{i\in I}]$-módulos. Além do mais, é claro que $(HM) \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}] = H(M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}])$.

O resultado segue por indução, considerando na afirmação $H =< a_1, a_2, ..., a_{n-1} >$ e aplicando a parte $n = 1$.

Q.E.D.

Corolário D.1.2. *Sejam M um A-módulo I' um conjunto, $J \subseteq A$ um ideal e $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in I'}]$ uma $M\otimes_A A[(X_i)_{i\in I'}]$-sequência. Se I é um conjunto tal que $I' \subseteq I$, então a sequência $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq JA[(X_i)_{i\in I}]$ é uma $M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$-sequência.*

Demonstração:

Pela proposição D.1.9 temos que $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq (JA[(X_j)_{j\in I'}])A[(X_i)_{i\in I}] = JA[(X_i)_{i\in I}]$ é uma $(M \otimes_A A[(X_j)_{j\in I'}]) \otimes_{A[(X_j)_{j\in I'}]} A[(X_i)_{i\in I}]$-sequência. Considere os isomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$(M \otimes_A A[(X_j)_{j\in I'}]) \otimes_{A[(X_j)_{j\in I'}]} A[(X_i)_{i\in I}] \simeq M \otimes_A (A[(X_j)_{j\in I'}] \otimes_{A[(X_j)_{j\in I'}]} A[(X_i)_{i\in I}]) \simeq$$

$$M \otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$$

Se $m \in M$, $(p((X_j)_{j\in I'}) \in A[(X_j)_{j\in I'}]$ e $q((X_i)_{i\in I}), r((X_i)_{i\in I}) \in A[(X_i)_{i\in I}]$, então:

$$r((X_i)_{i\in I})((m \otimes p((X_j)_{j\in I'})) \otimes q((X_i)_{i\in I})) = (m \otimes p((X_j)_{j\in I'})) \otimes (r((X_i)_{i\in I})q((X_i)_{i\in I})) \mapsto$$

$$m \otimes (p((X_j)_{j\in I'}) \otimes (r((X_i)_{i\in I})q((X_i)_{i\in I}))) \mapsto m \otimes (r((X_i)_{i\in I})p((X_j)_{j\in I'})q((X_i)_{i\in I})) =$$

$$r((X_i)_{i\in I})(m \otimes (p((X_j)_{j\in I'})q((X_i)_{i\in I})))$$

E dessa forma, o isomorfismo composto é um isomorfismo de $A[(X_i)_{i\in I}]$-módulos.

Q.E.D.

Definição D.1.3. *Sejam M um A-módulo e $J \subseteq A$ um ideal. Para cada conjunto I defina o "inteiro"$prof^I(J; M)$ como sendo o supremo dos "inteiros"$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que existe uma $M\otimes_A A[(X_i)_{i\in I}]$-sequência formada por elementos de $JA[(X_i)_{i\in I}]$ de comprimento n. Ao "inteiro":*

$$prof_\infty(J, M) = sup\{prof^I(J; M)/I \text{ é um conjunto}\}$$

chamamos de profundidade polinomial de M com relação a J.

D.2 Característica de Euler-Poincaré e Símbolo de multiplicidade

D.2.1 Aplicações Aditivas

Definição D.2.1. *Seja $\mathfrak{C}$ uma subclasse da classe dos A-módulos e Δ um monóide comutativo. Dizemos que uma aplicação $\chi : \mathfrak{C} \longrightarrow \Delta$ é aditiva, se para toda sequência exata:*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

tal que $M', M, M'' \in \mathfrak{C}$, temos que $\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'')$.

Exemplo D.2.1. *Seja $\mathfrak{C}$ a classe dos A-módulos e $l : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a aplicação comprimento (lembrando que o comprimento de um A-módulo é definido como o supremo dos comprimentos de suas séries de composição). Temos que l é uma aplicação aditiva.*

Proposição D.2.1. *Sejam $\mathfrak{C}$ a classe dos A-módulos e $\chi : \mathfrak{C} \longrightarrow \Delta$ uma aplicação aditiva. Se*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de A-módulos, então:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \chi(M_i) = 0$$

Demonstração:

O caso $n = 1$ é trivial. Suponha que $n > 1$ e que para qualquer sequência exata:

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{n-1} \longrightarrow 0$$

de comprimento $n-1$ o resultado é válido. Fazendo $N_i = M_i$, $1 \leq i \leq n-2$ e $N_{n-1} = im(\varphi_{n-2})$, então temos que:

$$\sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \chi(M_i) + (-1)^{n-1} \chi(im(\varphi_{n-2})) = 0$$

Considerando a sequência exata:

$$0 \longrightarrow im(\varphi_{n-2}) \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

vemos que:

$$\chi(M_{n-1}) = \chi(im(\varphi_{n-2})) + \chi(M_n) \Rightarrow$$

$$(-1)^{n-1}\chi(M_{n-1}) + (-1)^n\chi(M_n) = (-1)^{n-1}\chi(im(\varphi_{n-2}))$$

Dessa forma, segue-se o resultado.

Q.E.D.

Proposição D.2.2. *Sejam M um A-módulo, $\mathfrak{C}$ a classe dos A-módulos e $\chi : \mathfrak{C} \longrightarrow \Delta$ uma aplicação aditiva. Se $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n = M$ é uma série de composição de M, então:*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{n} \chi(\frac{M_i}{M_{i-1}})$$

Demonstração:

O caso $n = 1$ é trivial. Suponha que demonstramos que o resultado é válido para qualquer A-módulo N e para qualquer série de composição de N, $0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_n = N$, de comprimento $n-1$. Seja $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_{n+1} = M$ uma série de composição de M de comprimento n. Considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M \longrightarrow \tfrac{M_{n+1}}{M_n} \longrightarrow 0$$

Temos, por definição, que $\chi(M) = \chi(M_n) + \chi(\frac{M_{n+1}}{M_n})$. Mas, por hipótese de indução, temos que $\chi(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \chi(\frac{M_i}{M_{i-1}})$. Dessa forma, segue o resultado.

Q.E.D.

D.2.2 Característica de Euler-Poincaré

Definição D.2.2. *Sejam $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M_p$ um módulo graduado de tipo $\mathbb{Z}$ sobre o anel graduado A, $\mathfrak{C}$ a classe dos A-módulos e $l : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a aplicação comprimento. Se M é limitado (ou seja, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $p \leq q$ tais que $M_r = 0$ e $M_s = 0$, $\forall r \leq p$, $\forall s \geq q$) e $M_p \in l^{-1}(\mathbb{N})$, $\forall p \in \mathbb{Z}$ (os A-módulos M_p são ditos de comprimento finito), então definimos a característica de Euler-Poincaré como sendo o inteiro:*

$$\chi(M) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p l(M_p)$$

Proposição D.2.3. *Seja $\mathfrak{C}$ a classe dos A-módulos onde é possível definir a característica de Euler-Poincaré. A aplicação:*

$$\chi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{N}$$

tal que M é aplicado em sua característica de Euler-Poincaré, é uma aplicação aditiva.

Demonstração:

Seja:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de elementos de $\mathfrak{C}$. *Por restrição podemos construir, para cada* $p \in \mathbb{Z}$, *a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow M'_p \xrightarrow{\psi_p} M_p \xrightarrow{\varphi_p} M''_p \longrightarrow 0$$

Uma vez que a aplicação l *é aditiva, temos que:*

$$\chi(M) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p l(M_p) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p[l(M'_p) + l(M''_p)] =$$

$$[\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p l(M'_p)] + [\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p l(M''_p)] = \chi(M') + \chi(M'')$$

Q.E.D.

Corolário D.2.1. *Seja* C *um complexo. Se a característica de Euler-Poincaré está definida para* C, *então ela está definida para* $Z(C)$, $B(C)$ *e* $H(C)$. *Além do mais, temos que:*

$$\chi(C) = \chi(H(C))$$

Demonstração:

Como C *é limitado, segue claramente que* $Z(C)$, $B(C)$ *e* $H(C)$ *são limitados. Das sequências exatas:*

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow B_n(C) \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$$

e do fato de l *ser uma aplicação aditiva, vemos, por indução, que* $Z_n(C)$, $B_n(C)$ *e* $H_n(C)$ *são de comprimento finito para todo* n *em* $\mathbb{Z}$.

Das sequências exatas:

$$0 \longrightarrow Z(C) \longrightarrow C \longrightarrow B(C)(-1) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow B(C) \longrightarrow Z(C) \longrightarrow H(C) \longrightarrow 0$$

tiramos que:

$$\chi(C) = \chi(Z(C)) + \chi(B(C)(-1))$$

e

$$\chi(H(C)) = \chi(Z(C)) - \chi(B(C))$$

O resultado segue da seguinte afirmação:

Afirmação: *Para todo inteiro n e todo complexo C' tal que a característica de Euler-Poincaré pode ser definida, temos que* $\chi(C'(n)) = (-1)^n \chi(C')$.

Claramente a característica de Euler-Poincaré pode ser definida para $C'(n)$. *Além do mais, temos que:*

$$\chi(C'(n)) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p l((C'(n))_p) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p l(C_{p+n}) = (-1)^n (\sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^{p+n} l(C_{p+n})) =$$

$$(-1)^n (\sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q l(C'_q)) = (-1)^n \chi(C')$$

Q.E.D.

D.2.3 Sistema de Multiplicidade

Definição D.2.3. *Sejam M um A-módulo e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma família de elementos de A. Dizemos que* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M se o A-módulo* $\frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n> M}$ *é de comprimento finito.*

Proposição D.2.4. *Sejam* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma família de elementos de A e*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata.

i) Se $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, então também é sobre M''.

ii) Se $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M' e sobre M'', então também é sobre M.

Demonstração:

Defina as aplicações:

$$\overline{\varphi} : \frac{M'}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M'} \longrightarrow \frac{M}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M}$$

tal que $\overline{\varphi}(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)}$ e

$$\overline{\psi} : \frac{M}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M} \longrightarrow \frac{M''}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M''}$$

tal que $\overline{\psi}(\overline{x}) = \overline{\psi(x)}$.

Da sequência exata:

$$0 \longrightarrow Ker(\overline{\psi}) \longrightarrow \frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n>M} \longrightarrow \frac{M''}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n>M''} \longrightarrow 0$$

e do fato de l (aplicação comprimento) ser uma aplicação aditiva, segue da proposição D.2.1 que:

$$l(\frac{M}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M}) = l(Ker(\overline{\psi})) + l(\frac{M''}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n > M''})$$

Assim sendo, segue-se i)

Afirmação: *A sequência:*

$$0 \longrightarrow Ker(\overline{\varphi}) \longrightarrow \frac{M'}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n>M'} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \frac{M}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n>M} \xrightarrow{\overline{\psi}} \frac{M''}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n>M''} \longrightarrow 0$$

é exata.

De fato, temos que $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = \overline{\psi \circ \varphi} = 0$. Além do mais, se $\overline{\psi}(\overline{x}) = 0$, então:

$$\overline{\psi(x)} = 0 \Rightarrow \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \psi(z_i) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i + \varphi(t) \Rightarrow \overline{x} = \overline{\varphi(t)} = \overline{\varphi}(\overline{t})$$

A sobrejetividade de $\overline{\psi}$ segue da sobrejetividade de ψ. Novamente pela aditividade de l, segue da proposição D.2.1 que:

$$-l(Ker(\overline{\varphi}))+l(\frac{M'}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> M'})-$$

$$l(\frac{M}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> M})+l(\frac{M''}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> M''})=0$$

$$\Rightarrow l(\frac{M'}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> M'})+l(\frac{M''}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> M''})=l(Ker(\overline{\varphi}))+l(\frac{M}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> M})$$

Dessa forma, segue ii).

Q.E.D.

Proposição D.2.5. *Sejam M um A-módulo e γ um elemento de A. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:*

$$l(\frac{M}{\gamma^n M}) \leq nl(\frac{M}{\gamma M})$$

onde l é a aplicação comprimento.

Demonstração:

Considere a série de composição sobre M:

$$0 \subseteq \gamma^n M \subseteq \gamma^{n-1} M \subseteq ... \subseteq \gamma M \subseteq M$$

Da proposição D.2.2 segue que:

$$l(M)=\sum_{i=1}^{n} l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M})+l(\gamma^n M) \Rightarrow l(M)-l(\gamma^n M)=\sum_{i=1}^{n} l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M}) \Rightarrow$$

$$l(\frac{M}{\gamma^n M})=\sum_{i=1}^{n} l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M})$$

Considere a aplicação:

$$\psi_i : M \longrightarrow \frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M}$$

tal que $\psi_i(x)=\overline{\gamma^{i-1}x}$. Claramente ψ_i é A-linear e sobrejetiva. Além do mais, o núcleo de ψ_i é dado por:

$$Ker(\psi_i)=\{x \in M / \overline{\gamma^{i-1}x=0}\}$$

$$= \{x \in M / \gamma^{i-1}x = \gamma^i y, y \in M\} = \{x \in M / \gamma^{i-1}(x - \gamma y) = 0, y \in M\} =$$

$$\{x \in M / x - \gamma y \in (0 :_M \gamma^{i-1})\} = (0 :_M \gamma^{i-1}) + \gamma M$$

Onde $(0 :_M \gamma^{i-1})$ *denota o núcleo da aplicação* $M \longrightarrow \gamma M$, *tal que* $x \mapsto \gamma x$. *Dessa forma, temos um isomorfismo:*

$$\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M} \simeq \frac{M}{(0 :_M \gamma^{i-1}) + \gamma M}$$

E assim temos que $l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M}) = l(\frac{M}{(0:_M \gamma^{i-1}) + \gamma M})$. *Como* $\gamma M \subseteq (0 :_M \gamma^{i-1}) + \gamma M$, *existe uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow Ker(\eta) \longrightarrow \frac{M}{\gamma M} \xrightarrow{\eta} \frac{M}{(0:_M \gamma^{i-1}) + \gamma M} \longrightarrow 0$$

onde η *leva classe em classe. Assim sendo, temos que:*

$$l(\frac{M}{\gamma M}) = l(Ker(\eta)) + l(\frac{M}{(0 :_M \gamma^{i-1}) + \gamma M}) \Rightarrow l(\frac{M}{\gamma M}) = l(Ker(\eta)) + l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M}) \Rightarrow$$

$$l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M}) \leq l(\frac{M}{\gamma M}) \Rightarrow l(\frac{M}{\gamma^n M}) = \sum_{i=1}^{n} l(\frac{\gamma^{i-1}M}{\gamma^i M}) \leq nl(\frac{M}{\gamma M})$$

Q.E.D.

Corolário D.2.2. *Sejam* M *um* A*-módulo e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s\}$ *uma família de elementos de* A, *com* $s \geq 1$. *Para todo* $(n_1, n_2, ..., n_s) \in \mathbb{N}^s$, *temos que:*

$$l(\frac{M}{< \gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s} > M}) \leq n_1 n_2 ... n_s l(\frac{M}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s > M})$$

onde l *é a aplicação comprimento.*

Demonstração:

Faremos indução sobre s. *O caso* $s = 1$ *nada mais é do que a proposição. Suponha que demonstramos que para toda sequência* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s\}$ *de* s *elementos de* A *e toda* s*-upla* $(n_1, n_2, ..., n_s) \in \mathbb{N}^s$, *temos que:*

$$l(\frac{N}{< \gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s} > N}) \leq n_1 n_2 ... n_s l(\frac{N}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s > N})$$

qualquer que seja o A*-módulo* N.

Seja $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s, \gamma_{s+1}\}$ uma família de $s+1$ elementos de A e $(n_1, n_2, ..., n_s, n_{s+1}) \in \mathbb{N}^{s+1}$ uma $s+1$-upla. Considere o isomorfismo:

$$\frac{M}{< \gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}, \gamma_{s+1}^{n_{s+1}} > M} \simeq \frac{M'}{< \gamma_{s+1}^{n_{s+1}} > M'}$$

onde $M' = \frac{M}{<\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s} > M}$. Da proposição e da hipótese de indução segue que:

$$l(\frac{M}{< \gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}, \gamma_{s+1}^{n_{s+1}} > M}) = l(\frac{M'}{< \gamma_{s+1}^{n_{s+1}} > M'}) \leq n_{s+1} l(\frac{M'}{< \gamma_{s+1} > M'}) =$$

$$n_{s+1} l(\frac{M}{< \gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}, \gamma_{s+1} > M}) = n_{s+1} l(\frac{M''}{< \gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s} > M''}) \leq$$

$$n_1 n_2 ... n_{s+1} l(\frac{M''}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s > M''}) = n_1 n_2 ... n_s n_{s+1} l(\frac{M}{< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s, \gamma_{s+1} > M})$$

onde $M'' = \frac{M}{<\gamma_{s+1}>M}$.

Q.E.D.

Corolário D.2.3. *Sejam M um A-módulo e $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s\}$ uma família de elementos de A, com $s \geq 1$. Se $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, então $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, ..., \gamma_s^{n_s}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, qualquer que seja $(n_1, n_2, ..., n_s) \in \mathbb{N}^s$.*

Demonstração:

Segue direto do corolário D.2.2.

Q.E.D.

Lema D.2.1. *Sejam I um ideal de A e $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de submódulos do A-módulo M.*

i) O A-módulo $B = \sum_{n \in \mathbb{N}} I^n X^n$ ($I^0 = A$) é uma subálgebra graduada de $A[X]$.

ii) Se $I^n M_m \subseteq M_{m+n}$, $\forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então $\sum_{n \in \mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n \subseteq M \otimes_A A[X]$ tem uma estrutura canônica de B-módulo graduado.

Demonstração:

Sejam $a_n \in I^n$ e $b_n \in I^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, temos que:

$$(a_n X^n).(b_m X^m) = a_n b_m X^{n+m} \in I^{n+m} X^{n+m}$$

e $1 \in AX^0 = I^0 X^0$. Dessa forma, i) segue por bilinearidade do produto em $A[X]$. Além do mais, se $y_m \in M_m$, então:

$$(a_nX^n)(y_m \otimes X^m) = y_m \otimes (a_nX^{n+m}) =$$

$$(a_ny_m) \otimes X^{n+m} \in (I^nM_m) \otimes X^{n+m} \subseteq M_{n+m} \otimes X^{n+m}$$

Novamente, ii) segue por bilinearidade da estrutura de $A[X]$-módulo de $M \otimes_A A[X]$.

Q.E.D.

Lema D.2.2. *Sejam $I \subseteq A$ um ideal e $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cadeia decrescente de submódulos do A-módulo noetheriano M, tal que $I^mM_n \subseteq M_{n+m}$. Para que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M_{n+n_0} = I^nM_{n_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é necessário e suficiente que $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n \subseteq M \otimes_A A[X]$ seja finitamente gerado sobre $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$.*

Demonstração:

Desde que M é um A-módulo noethriano, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe uma família finita $\{e_{ij}\}_{j=1}^{l(i)}$ de geradores do A-módulo M_i. Se $n \geq n_0$ então:

$$e_{nj} \in I^{n-n_0}M_{n_0} \Rightarrow e_{nj} = \sum_{k=1}^{m} a_{knj}e'_{knj}, \{a_{knj}\}_{k=1}^{m(k,n,j)} \subseteq I^{n-n_0}, \{e'_{knj}\}_{k=1}^{m(k,n,j)} \subseteq M_{n_0}$$

Como M_{n_0} é gerado (como A-módulo) por $\{e_{n_0j}\}_{j=1}^{l(n_0)}$, temos que:

$$e'_{knj} = \sum_{h=1}^{l(n_0)} b_{hnj}e_{n_0h} \Rightarrow e_{nj} = \sum_{h=1}^{l(n_0)} (\sum_{k=1}^{m} b_{hnj}a_{knj})e_{n_0h}$$

Dessa forma, para $n \geq n_0$ M_n pode ser gerado por $\{e_{n_0h}\}_{h=1}^{l(n_0)}$ com coeficientes em I^{n-n_0}. Seja $y \in M_n$, com $n \geq n_0$. Se $y = \sum_{h=1}^{l(n_0)} a_he_{n_0h}$, com $a_h \in I^{n-n_0}$, então:

$$y \otimes X^n = (\sum_{h=1}^{l(n_0)} a_he_{n_0h}) \otimes X^n = \sum_{h=1}^{l(n_0)} a_h(e_{n_0h} \otimes X^n) = \sum_{h=1}^{l(n_0)} a_hX^{n-n_0}(e_{n_0h} \otimes X^{n_0})$$

Dessa forma, segue por linearidade que o $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$-módulo $\sum_{n\geq n_0} M_n \otimes_A X^n$ é gerado por $\{e_{n_0h} \otimes X^{n_0}\}_{h=1}^{l(n_0)}$. Seja agora $z \in M_n$, com $0 \leq n \leq n_0$. Se $z = \sum_{j=1}^{l(n)} b_je_{nj}$, com $b_j \in A = I^0$, então:

$$z \otimes X^n = (\sum_{j=1}^{l(n)} b_je_{nj}) \otimes X^n = \sum_{j=1}^{l(n)} b_jX^0(e_{nj} \otimes X^n)$$

Segue por linearidade que o $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$*-módulo* $\sum_{n\leq n_0} M_n \otimes_A X^n$ *é gerado por* $\bigcup_{n=1}^{n_0}\{e_{nj}\otimes X^n\}_{j=1}^{l(n)}$.
Concluímos então que o $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$*-módulo* $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n$ *é gerado por* $\bigcup_{n=1}^{n_0}\{e_{nj}\otimes X^n\}_{j=1}^{l(n)}$.

Reciprocamente, sejam $\{e_j \otimes X^j\}_{j=1}^{n_0}$ *uma família de geradores do* $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$*-módulo* $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n$ *e* $y \in M_n$*, com* $n \geq n_0$ *e* $e_j \in M_j$*. Temos que:*

$$y\otimes X^n = \sum_{j=1}^{n_0}(\sum_{i\in\mathbb{N}}(a_{ij}X^i))(e_j\otimes X^j) = \sum_{i\in\mathbb{N}}(\sum_{j=1}^{n_0} a_{ij}e_j)\otimes X^{i+j})$$

onde $a_{ij} \in I^i$ *e a família* $\{a_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *tem suporte finito para todo* $j \in \{1, 2, ..., n_0\}$*. Considere o isomorfismo canônico de A-módulos:*

$$\varphi : M \otimes_A A[X] \longrightarrow M^{(\mathbb{N})}$$

Temos que:

$$\varphi(y\otimes X^n) = \varphi(\sum_{i\in\mathbb{N}}(\sum_{k=1}^{n_0} a_{ik}e_k)\otimes X^{i+k}) \Rightarrow j_n(y) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n_0} j_{i+k}(a_{ik}e_k) \Rightarrow$$

$$j_n(y) = \sum_{k=1}^{n_0} j_n(a_{n-k,k}e_k) \Rightarrow y = \sum_{k=1}^{n_0} a_{n-k,k}e_k \in \sum_{k=1}^{n_0} I^{n-k}M_k$$

Como $M_i \subseteq M_{n_0}$ *e* $I^{n-i} \subseteq I^{n-n_0}$, $1 \leq i \leq n_0$*, temos que* $I^{n-i}M_i \subseteq I^{n-n_0}M_{n_0}$, $1 \leq i \leq n_0$ *e portanto* $\sum_{k=1}^{n_0} I^{n-k}M_k \subseteq I^{n-n_0}M_{n_0}$*. Dessa forma, temos que* $I^{n-n_0}M_{n_0} = M_n$.

Q.E.D.

Lema D.2.3 (Artin-Rees)**.** *Sejam M um A-módulo finitamente gerado,* $N \subseteq M$ *um submódulo e* $I \subseteq A$ *um ideal. Se A é noetheriano, então existe um inteiro* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$I^{n-n_0}((I^{n_0}M)\cap N) = (I^nM)\cap N$$

qualquer que seja $n \geq n_0$.

Demonstração:

Observe que $I^m(I^nM) = I^{m+n}M$*. Além do mais, como M é noetheriano, segue do lema D.2.2 que* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(I^nM)\otimes_A X^n \subseteq M\otimes_A A[X]$ *é finitamente gerado sobre* $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$*. Desde que* AX^n *é um A-módulo livre para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que a aplicação A-linear:*

$$i_n \otimes 1 : ((I^nM) \cap N) \otimes_A X^n \longrightarrow (I^nM) \otimes_A X^n$$

onde $i_n : I^nN \longrightarrow I^nM$ é a injeção canônica, é injetiva.

Afirmação 1: *Seja $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de sub-módulos de M. Existe um isomorfismo de A-módulos:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

Sejam $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \otimes X^n = 0 \in \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n$ e

$$\varphi : M \otimes_A A[X] \longrightarrow M^{(\mathbb{N})}$$

o isomorfismo, de A-módulos, canônico. Temos que:

$$\varphi(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \otimes X^n) = 0 \Rightarrow \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0 \in M^{(\mathbb{N})} \Rightarrow y_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{y_n\}_{n\in} = 0 \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

Dessa forma, podemos definir a aplicação:

$$\psi : \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

tal que $\psi(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \otimes X^n) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ψ é claramente A-linear e é bijetiva, pois a aplicação:

$$\eta : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n \longrightarrow: \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n \otimes_A X^n$$

tal que $\eta(\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \otimes X^n$ claramente está bem definida e é a inversa de ψ.

Segue da afirmação 1 que podemos definir uma aplicação A-linear injetiva:

$$\oplus(i_n \otimes 1) : \sum_{n\in\mathbb{N}} ((I^nM) \cap N) \otimes_A X^n \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} (I^nM) \otimes_A X^n$$

tal que $\oplus(i_n \otimes 1)(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \otimes X^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} i_n(y_n) \otimes X^n$. Claramente $\oplus(i_n \otimes 1)$ é $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$-linear. Dessa forma, segue que o $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$-módulo $\sum_{n\in\mathbb{N}} ((I^nM) \cap N) \otimes_A X^n$ é isomorfo a um submódulo do $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$-módulo $\sum_{n\in\mathbb{N}} (I^nM) \otimes_A X^n$.

Afirmação 2: *O anel* $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$ *é noetheriano.*

Como A é noetheriano, temos que I é finitamente gerado, digamos $I =< b_1, b_2, ..., b_n >$*. Defina a aplicação:*

$$\xi : A[X_1, X_2, ..., X_n] \longrightarrow \sum_{r\in\mathbb{N}} I^r X^r$$

tal que $\xi(\sum_{f\in\mathbb{N}^{\{1,...,n\}}} a_f X^f) = \sum_{r\in\mathbb{N}}(\sum_{f(1)+...+f(n)=r} a_f b_1^{f(1)}...b_n^{f(n)})X^r$*. Como* $\{X^f\}_{f\in\mathbb{N}^{\{1,2,...,n\}}}$ *é uma base do A-módulo* $A[X_1, X_2, ..., X_n]$*, segue que* ξ *está bem definida. Claramente* ξ *é um homomorfismo de A-álgebras. Se* $y \in I^n$*, para algum* $n \geq 1$*, então existe um polinômio homogêneo de grau n (os elementos homogêneos de grau* $s \in \mathbb{N}$ *de* $A[X_1, X_2, ..., X_n]$ *são pertencentes ao submódulo* $H_s =< \{X^f / \sum_{i=1}^{n} f(i) = s\} >$ *)* $p(X_1, X_2, ..., X_n)$ *tal que* $y = p(b_1, b_2, ..., b_n)$*. Assim sendo, temos que* ξ *é sobrejetiva. Dessa forma, segue pelo teorema da base de Hilbert que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$ *é noetheriano.*

Como o $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$*-módulo* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(I^n M) \otimes_A X^n$ *é finitamente gerado e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} I^n X^n$ *é noetheriano, temos que* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(I^n M) \otimes_A X^n$ *é noetheriano e dessa forma seu submódulo* $\sum_{n\in\mathbb{N}}((I^n M) \cap N) \otimes_A X^n$ *é finitamente gerado. Uma vez que claramente* $I^m((I^n M) \cap N) \subseteq (I^{n+m} M) \cap N$*, temos que o resultado segue do lema D.2.2.*

Q.E.D.

Proposição D.2.6. *Sejam M um módulo finitamente gerado sobre o anel noetheriano A,* $N \subseteq M$ *um submódulo e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma família de elementos de A. Se* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M, então também o é sobre N.*

Demonstração:

Do lema de Artin-Rees (lema D.2.3) sabemos que existe um inteiro $m \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$(I^{m+1} M) \cap N = I((I^m M) \cap N) \subseteq IN$$

onde $I =< \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n >$*. Dessa forma, temos a seguinte sequência exata:*

$$0 \longrightarrow Ker(\eta) \longrightarrow \frac{N}{(I^{m+1}M)\cap N} \xrightarrow{\eta} \frac{N}{IN} \longrightarrow 0$$

onde η *leva classe em classe. Assim sendo, temos que:*

$$l(\frac{N}{(I^{m+1}M)\cap N}) = l(Ker(\eta)) + l(\frac{N}{IN}) \Rightarrow l(\frac{N}{IN}) \leq l(\frac{N}{(I^{m+1}M)\cap N})$$

Do isomorfismo $\frac{N}{(I^{m+1}M)\cap N} \simeq \frac{(I^{m+1}M)+N}{I^{m+1}M}$ *e da sequência exata:*

$$0 \longrightarrow \frac{(I^{m+1}M)+N}{I^{m+1}M} \longrightarrow \frac{M}{I^{m+1}M} \longrightarrow \frac{M}{(I^{m+1}M)+N} \longrightarrow 0$$

vemos que:

$$l(\frac{M}{I^{m+1}M}) = l(\frac{N}{(I^{m+1}M)\cap N}) + l(\frac{M}{(I^{m+1}M)+N}) \Rightarrow l(\frac{N}{(I^{m+1}M)\cap N}) \leq l(\frac{M}{I^{m+1}M})$$

Desde que $<\gamma_1^{m+1}, \gamma_2^{m+1}, ..., \gamma_n^{m+1}> \subseteq I^{m+1}$, *existe uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow Ker(\rho) \longrightarrow \frac{M}{<\gamma_1^{m+1}, \gamma_2^{m+1}, ..., \gamma_n^{m+1}>M} \xrightarrow{\rho} \frac{M}{I^{m+1}M} \longrightarrow 0$$

onde ρ *leva classe em classe. Dessa forma, temos que:*

$$l(\frac{M}{<\gamma_1^{m+1}, \gamma_2^{m+1}, ..., \gamma_n^{m+1}>M}) = l(Ker(\rho)) + l(\frac{M}{I^{m+1}M}) \Rightarrow$$

$$l(\frac{M}{I^{m+1}M}) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1^{m+1}, \gamma_2^{m+1}, ..., \gamma_n^{m+1}>M})$$

Concluímos então que:

$$l(\frac{N}{<\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n>N}) \leq l(\frac{M}{<\gamma_1^{m+1}, \gamma_2^{m+1}, ..., \gamma_n^{m+1}>M})$$

O resultado segue do corolário D.2.3.

Q.E.D.

Corolário D.2.4. *Sejam A um anel noetheriano,* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma família de elementos de A e*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata. Se M é finitamente gerado, então $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M se, e somente se, o é sobre* M' *e sobre* M''.

Demonstração:

De fato, o resultado segue das proposições D.2.4 e D.2.6.

Q.E.D.

Proposição D.2.7. *Sejam* $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i,\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$, $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$ *duas famílias de elementos do anel noetheriano A e M um A-módulo. Se* $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i,\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$ *ou* $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M e M é finitamente gerado, então* $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M.*

Demonstração:

Desde que $\frac{M}{<\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i,\gamma_{i+1},...,\gamma_n>M} \simeq \frac{M'}{<\gamma_i>M'}$ *(resp.* $\frac{M}{<\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n>M} \simeq \frac{M'}{<\gamma_i'>M'}$, $\frac{M}{<\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n>M} \simeq \frac{M'}{<\gamma_i\gamma_i'>M'}$*) onde* $M' = \frac{M}{<\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_{i+1},...,\gamma_n>M}$*, vemos que* $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i,\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$ *(resp.* $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$, $\{\gamma_1,...,\gamma_{i-1},\gamma_i\gamma_i',\gamma_{i+1},...,\gamma_n\}$*) é um sistema de multiplicidade sobre M, se, e somente se,* $\{\gamma_i\}$ *(resp.* $\{\gamma_i'\}$, $\{\gamma_i\gamma_i'\}$*) é um sistema de multiplicidade sobre* M'*. Dessa forma, é suficiente demonstrar o caso* $i = n = 1$.

Suponha por exemplo que $\{\gamma\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M e considere a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow \frac{\gamma'\gamma M}{\gamma M} \longrightarrow \frac{M}{\gamma M} \longrightarrow \frac{M}{\gamma'\gamma M} \longrightarrow 0$$

Temos que:

$$l(\frac{M}{\gamma M}) = l(\frac{M}{\gamma'\gamma M}) + l(\frac{\gamma'\gamma M}{\gamma M}) \Rightarrow l(\frac{M}{\gamma M}) - l(\frac{\gamma'\gamma M}{\gamma M}) = l(\frac{M}{\gamma'\gamma M})$$

Por hipótese, $l(\frac{M}{\gamma M}) < \infty$ *e pela proposição D.2.6,* $l(\frac{\gamma'\gamma M}{\gamma M}) < \infty$*. Dessa forma, segue-se o resultado.*

Q.E.D.

D.2.4 Símbolo de Multiplicidade

Sejam A um anel noetheriano e $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$ *um sistema de multiplicidade sobre o A-módulo finitamente gerado M, com* $n \geq 1$*. Sabemos que* $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M se, e somente se,* $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1}\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre* $\frac{M}{\gamma_n M}$*. Por outro lado, desde que* $<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n> (0:_M \gamma_n) =<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1}> (0:_M \gamma_n)$*, temos a seguinte sequência exata:*

$$0 \longrightarrow <\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1}> (0:_M \gamma_n) \longrightarrow (0:_M \gamma_n) \longrightarrow \frac{(0:_M \gamma_n)}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n>(0:_M \gamma_n)} \longrightarrow 0$$

Dessa forma, temos que $\frac{(0:_M\gamma_n)}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n>(0:_M\gamma_n)} \simeq \frac{(0:_M\gamma_n)}{<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1}>(0:_M\gamma_n)}$. *Segue da proposição D.2.6 que* $<\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1}>$ *é um sistema de multiplicidade sobre* $(0:_M\gamma_n)$. *Isso nos permite definir indutivamente uma aplicação:*

$$e(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;.) : \mathfrak{C}(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

onde $\mathfrak{C}(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$ *é a classe dos módulos finitamente gerados sobre o anel noetheriano* A *que tem* $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$ *por sistema de multiplicidade, como segue:*

$$e(\gamma_1;M) = l(\frac{M}{\gamma_1 M}) - l((0:_M\gamma_1))$$

$$e(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;M) = e(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1};\frac{M}{\gamma_n M}) - e(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{n-1};(0:_M\gamma_n))$$

onde l *é a aplicação comprimento.*

Definição D.2.4. *Sejam* A *um anel noetheriano,* M *um* A*-módulo finitamente gerado e* $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$ *um sistema de multiplicidade sobre* M*. Ao inteiro* $e(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;M)$ *chamamos de símbolo de multiplicidade do* A*-módulo* M *com relação à família* $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$.

Lema D.2.4. *Seja:*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A*-módulos. Para todo* $\gamma \in A$*, existe uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow (0:_{M'}\gamma) \longrightarrow (0:_M\gamma) \longrightarrow (0:_{M''}\gamma) \longrightarrow \frac{M'}{\gamma M'} \longrightarrow \frac{M}{\gamma M} \longrightarrow \frac{M''}{\gamma M''} \longrightarrow 0$$

Demonstração:

Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos verticais são as multiplicações por γ*, enquanto os horizontais são os homomorfismos originais. Claramente tal diagrama é comutativo. Segue do lema da serpente a existência de tal sequência exata.*

Q.E.D.

Proposição D.2.8. *Seja* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ *uma família de elementos do anel noetheriano A. A aplicação:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; .) : \mathfrak{C}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que $M \mapsto e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M)$*, é uma aplicação aditiva.*

Demonstração:

Suponha que $n = 1$*. Desde que a aplicação comprimento* l *é aditiva, segue do lema D.2.4 e da proposição D.2.1 que:*

$$-l((0 :_{M'} \gamma)) + l((0 :_M \gamma)) - l((0 :_{M''} \gamma)) + l(\frac{M'}{\gamma M'}) - l(\frac{M}{\gamma M}) + l(\frac{M''}{\gamma M''}) = 0 \Rightarrow$$

$$l(\frac{M}{\gamma M}) - l((0 :_M \gamma)) = [l(\frac{M'}{\gamma M'}) - l((0 :_{M'} \gamma))] + [l(\frac{M''}{\gamma M''}) - l((0 :_{M''} \gamma))] \Rightarrow$$

$$e(\gamma; M) = e(\gamma; M') + e(\gamma; M'')$$

O caso $n > 1$ *segue diretamente por indução, trocando na demonstração do caso* $n = 1$*,* l *por* $e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; .)$ *e* γ *por* γ_n*.*

Q.E.D.

Proposição D.2.9. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre o anel noetheriano A. Se* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n\}$ *e* $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma'_n\}$ *são sistemas de multiplicidade sobre M, então:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n\gamma'_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M) + e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma'_n; M)$$

Demonstração:

Temos pela proposição D.2.7 que $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n\gamma'_n\}$ *é um sistema de multiplicidade sobre M, logo* $e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n\gamma'_n; M)$ *está bem definido. Considere a sequência exata:*

$$0 \longrightarrow \frac{\gamma M}{\gamma\gamma' M} \longrightarrow \frac{M}{\gamma\gamma' M} \longrightarrow \frac{M}{\gamma M} \longrightarrow 0$$

Temos que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma\gamma' M}) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{\gamma M}{\gamma\gamma' M}) + e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma M})$$

Observe que o epimorfismo composto:

$$M \longrightarrow \gamma M \longrightarrow \frac{\gamma M}{\gamma\gamma' M}$$

tal que $x \mapsto \gamma x \mapsto \overline{\gamma x}$, *tem por núcleo:*

$$\{x \in M / \overline{\gamma x} = 0\} = \{x \in M / \gamma x = \gamma\gamma' y, y \in M\} = \{x \in M / \gamma(x - \gamma' y) = 0, y \in M\} =$$

$$\{x \in M / x - \gamma' y \in (0 :_M \gamma), y \in M\} = (0 :_M \gamma) + \gamma' M$$

Dessa forma, temos os seguintes isomorfismo:

$$\frac{\gamma M}{\gamma\gamma' M} \simeq \frac{M}{(0 :_M \gamma) + \gamma' M} \simeq \frac{\frac{M}{\gamma' M}}{\frac{(0 :_M \gamma) + \gamma' M}{\gamma' M}}$$

E assim temos que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{\gamma M}{\gamma\gamma' M}) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma' M}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{(0 :_M \gamma) + \gamma' M}{\gamma' M})$$

Mas sabemos que:

$$\frac{(0 :_M \gamma) + \gamma' M}{\gamma' M} \simeq \frac{(0 :_M \gamma)}{(0 :_M \gamma) \cap \gamma' M}$$

Agora observando que:

$$(0 :_M \gamma) \cap \gamma' M = \{\gamma' x \in M / \gamma\gamma' x = 0\} = \gamma'(0 :_M \gamma\gamma')$$

Teremos:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{(0 :_M \gamma) + \gamma' M}{\gamma' M}) =$$

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma)) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \gamma'(0 :_M \gamma\gamma'))$$

Considerando o homomorfismo:

$$\varphi : M \longrightarrow M$$

tal que $\varphi(x) = \gamma' x$, vemos que sua restrição:

$$\varphi' : (0 :_M \gamma\gamma') \longrightarrow \gamma'(0 :_M \gamma\gamma')$$

tem por núcleo $(0 :_M \gamma') \cap (0 :_M \gamma\gamma') = (0 :_M \gamma')$, pois $(0 :_M \gamma') \subseteq (0 :_M \gamma\gamma')$.

Dessa forma, temos que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \gamma'(0 :_M \gamma\gamma')) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma\gamma')) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma'))$$

Concluímos então que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma\gamma' M}) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma M}) + e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma' M}) -$$

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma)) + e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma\gamma')) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma')) \Rightarrow$$

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma\gamma' M}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma\gamma')) =$$

$$[e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma M}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma))] +$$

$$[e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma' M}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma'))]$$

Q.E.D.

Corolário D.2.5. *Seja M um módulo finitamente gerado sobre o anel noetheriano A. Se $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n\}$ é um sistema de multiplicidade sobre M, então:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n^m; M) = me(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, \gamma_n; M)$$

qualquer que seja o inteiro $m \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração:

Segue direto da proposição por argumento indutivo.

Q.E.D.

Proposição D.2.10. *Sejam M um módulo finitamente gerado e $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ um sistema de multiplicidade sobre M formado por elementos do anel noetheriano A. Se $\{\gamma_n, \gamma_{n-1}, ..., \gamma_i\}$, $0 \leq i \leq n$, é M-regular, então:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{i-1}; \frac{M}{< \gamma_i, \gamma_{i+1}, ..., \gamma_n > M})$$

onde estamos considerando $e(\phi; M) = l(M)$.

Demonstração:

Como a multiplicação por $\{\gamma_n\}$ em M é injetiva, temos que $(0 :_M \gamma_n) = 0$. Dessa forma, segue que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n M}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; 0)$$

Agora da sequência exata:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Concluímos que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; 0) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; 0) + e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; 0) \Rightarrow e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; 0) = 0$$

Como $\{\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, ..., \gamma_i\}$ é $\frac{M}{\gamma_n M}$-regular (proposição D.1.1), o resultado segue por indução.

Q.E.D.

Proposição D.2.11. *Sejam M um módulo finitamente gerado e $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ um sistema de multiplicidade sobre M formado por elementos do anel noetheriano A. Se $\gamma_n \in \sqrt{Ann(M)}$, então:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = 0$$

Demonstração:

Desde que $\gamma_n \in \sqrt{Ann(M)}$, temos que $\exists m \geq 1$ tal que $\gamma_n^m M = 0$. Dessa forma, segue que $(0 :_M \gamma_n^m) = M$ e então:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n^m; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{\gamma_n^m M}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; (0 :_M \gamma_n^m)) =$$

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{M}{0}) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M) =$$

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M) - e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; M) = 0 \Rightarrow$$

$$me(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n^m; M) = 0 \Rightarrow e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = 0$$

Q.E.D.

Proposição D.2.12. *Sejam M um módulo finitamente gerado e $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ um sistema de multiplicidade sobre M formado por elementos do anel noetheriano A. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}; \frac{F_m}{\gamma_n F_m})$$

$\forall m \geq m_0$, onde $F_m = \frac{M}{(0 :_M \gamma_n^m)}$.

Demonstração:

Observe que temos a seguinte cadeia de submódulos de M:

$$(0 :_M \gamma_n) \subseteq (0 :_M \gamma_n^2) \subseteq (0 :_M \gamma_n^3) \subseteq ...$$

Uma vez que M é noetheriano, temos que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(0 :_M \gamma_n^{m_0}) = (0 :_M \gamma_n^m)$, $\forall m \geq m_0$. Seja $m \geq m_0$ e considere a sequência exata:

$$0 \longrightarrow (0 :_M \gamma_n^m) \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{(0 :_M \gamma_n^m)} \longrightarrow 0$$

De tal sequência vemos que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; M) = e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; \frac{M}{(0 :_M \gamma_n^m)}) + e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; (0 :_M \gamma_n^m))$$

Agora, desde que $\gamma_n \in \sqrt{Ann((0 :_M \gamma_n^m))}$, segue da proposição D.2.11 que:

$$e(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n; (0 :_M \gamma_n^m)) = 0$$

Além do mais, se $\gamma_n \overline{x} = 0 \in \frac{M}{(0 :_M \gamma_n^m)}$, então:

$$\overline{\gamma_n x} = 0 \Rightarrow \gamma_n x \in (0 :_M \gamma_n^m) \Rightarrow \gamma_n^{m+1} x = 0 \Rightarrow x \in (0 :_M \gamma_n^{m+1}) = (0 :_M \gamma_n^m) \Rightarrow \overline{x} = 0$$

Dessa forma, o resultado segue da proposição D.2.10.

Q.E.D.

Bibliografia

[1] *M. Atiyah e I. MacDonald, Introduction to Comutative Algebra, Adison-Wesley, Massachusetts, 1969.*

[2] *N. Bourbaki, Algebra, chap. 1-3, Springer-Verlage, Berlin, 1990.*

[3] *N. Bourbaki, Algèbre, chap. 10, Springer-Verlage, Berlin, 2007.*

[4] *N. Bourbaki, Commutative Algebra, chap. 1-7, Springer-Verlage, Berlin, 1991.*

[5] *N. Bourbaki, Algèbre Commutative, chap. 10, Springer-Verlage, Berlin, 2007.*

[6] *W. Bruns e J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, 1997.*

[7] *S. Lang, Algebra, Springer-verlag, New york, 2002.*

[8] *D. Northcott, Finite Free Resolutions, Cambridge University Press, Londres, 1976.*

[9] *D. Northcott, Lessons on Rings, modules and Multiplicities, Cambridge University Press, Londres, 1968.*

[10] *J.P. Serre, Algèbre locale, Multiplicités, Springer Lectures Notes 11, 1965.*

[11] *A. Simis, Álgebra Comutativa, Notas de Aula, UFPE.*

Índice

Álgebra

anti-comutativa, 169

exterior, 165

polinômial, 152

tensorial, 160

Álgebras, 145

associativas, 145

comutativas, 145

graduadas, 155

homomorfismos entre, 148

produto anti-tensorial de, 170

produto tensorial de, 146

quocientes, 157

unitárias, 145

Aplicação

alternada, 170

aditiva, 196

Característica de Euler-Poincaré, 197

Complexos

de homomorfismos, 123

de módulos, 84

diferencial de , 84

homotopismo entre, 92

injetivos, 84

livres, 84

morfismo entre, 84

nulos, 84

planos, 84

produto de, 86

produto tensorial entre, 104

projetivos, 84

sequência exata de, 88

soma direta de, 86

Família

algebricamente independente, 155

geradora de um módulo, 51

geradora de uma álgebra, 155

livre, 51

suporte de uma, 48

Graduação

de um anel, 75

de um grupo, 75

de um módulo, 76

de uma álgebra, 155

deslocamento de uma, 78

quociente, 83

trivial, 76

Graduado

anel, 75

grupo, 75

homomorfismo, 76

homomorfismo(de álgebras), 157

submódulo, 82

Homologismo, 98

Ideal

à direita de uma álgebra, 148

à direita graduado de uma álgebra, 156

à esquerda de uma álgebra, 148
à esquerda graduado de uma álgebra, 156
bilateral de uma álgebra, 148
bilateral graduado de uma álgebra, 156
de relatores de uma álgebra, 155

Koszul
característica de Euler-Poincaré do módulo de homologia do complexo de, 37
complexos de, 4
morfismo entre complexos de, 11
produto tensorial entre complexos de, 19

Lema de Artin-Rees, 205

Módulos
base de, 51
de bordos de um complexo, 85
de ciclos de um complexo, 85
de extensão, 133
de homologia de um complexo, 85
graduados, 76
graduados livres, 79
injetivos, 61
livres, 51
planos, 69
produto de, 46
projetivos, 53
soma direta de, 48
Monômio, 152

Produto de torção, 111
Profundidade
de um módulo relativo à um ideal, 187
polinomial, 195

Resolução
à direita de um módulo, 98
à esquerda de um módulo, 98
injetiva, 98
injetiva canônica, 102
livre, 98
livre canônica, 100
plana, 98
projetiva, 98

Símbolo de multiplicidade de um módulo, 210
Sequência M-regular, 183
Sistema de multiplicidade sobre um módulo, 199
Subálgebra, 147
graduada, 156

Teorema
Lech, 43
Auslander-Buchsbaum, 40