Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Derivações localmente nilpotentes e os teoremas de Rentschler e Jung

Kelyane Barboza de Abreu

2014

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Derivações localmente nilpotentes e os teoremas de Rentschler e Jung

por

Kelyane Barboza de Abreu

sob orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro de 2014

João Pessoa-PB

A162d Abreu, Kelyane Barboza de.
Derivações localmente nilpotentes e os teoremas de Rentschler e Jung / Kelyane Barboza de Abreu.-- João Pessoa, 2014.
44f.
Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Derivações localmente nilpotentes. 3. Teorema de Rentschler. 4. Teorema de Jung.

UFPB/BC CDU: 51(43)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Derivações localmente nilpotentes e os teoremas de Rentschler e Jung

por

Kelyane Barboza de Abreu

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovado por:

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB

(Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis - UFPE

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza - UFPB

Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa - UFPB

(Suplente)

"Pessoas são como livros (...) não pare nas capas. Há muita riqueza escondida em capas não atraentes"

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, por ter sido o meu Sustento ao longo desses dois anos de Mestrado, me ajudando a perceber na Matemática Pura uma oportunidade para amar.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Crisante Abreu e Maria Cilene Abreu, por serem os pilares de todas as minhas conquistas, por terem me apoiado e ensinado o sentido do ser família.

Agradeço ao meu Professor e Orientador Cleto Miranda, pelo empenho, dedicação e ajuda necessária.

Agradeço ao Professor Aron Simis e ao Professor Fernando Xavier, por aceitarem participar como membros da banca examinadora, mesmo em meio aos seus tantos compromissos.

Agradeço a todos os meus amigos, que me ajudaram a crescer matematicamente e humanamente, pelas horas de ajuda, estudos, escuta, abraços. Por me ajudarem a perceber o tesouro que é ter amigos.

Por fim, agradeço a Capes - CnPq pela ajuda financeira que foi de grande incetivo e ajuda para todo esse tempo de curso.

Sumário

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é fornecer uma demonstração do bem-conhecido Teorema de Rentschler, que descreve a estrutura das derivações localmente nilpotentes sobre o anel de polinômios em duas variáveis (sobre um corpo de característica zero), a menos de conjugação por automorfismos "tame". Como aplicação central deste resultado, provamos o Teorema de Jung, sobre os geradores do grupo de automorfismos em duas variáveis. Finalmente, alguns exemplos são discutidos, ilustrando conexões com outros tópicos importantes.

Palavras-chave: Derivações localmente nilpotentes, teorema de Rentschler, teorema de Jung.

Abstract

The main goal of this work is to furnish a proof of the well-known Rentschler's Theorem, which describes the structure of the locally nilpotent derivations on the polynomial ring in two indeterminates (over a field of characteristic zero), up to conjugation by tame automorphisms. As a central application of this result, we prove Jung's Theorem, concerning the generators of the group of automorphisms in two variables. Finally, some examples are discussed, illustrating connections to other important topics.

Keywords: Locally nilpotent derivations, Rentschler's theorem, Jung's theorem.

Introdução

A principal meta deste trabalho é fornecer uma demonstração do bem-conhecido Teorema de Rentschler, que descreve a estrutura das derivações localmente nilpotentes sobre o anel de polinômios em duas variáveis (com coeficientes em um corpo de característica zero), a menos de conjugação por automorfismos planares *tame*.

Trata-se de um dentre os vários resultados importantes a respeito de derivações localmente nilpotentes (DLN's), que são de reconhecida importância para várias áreas da matemática, a exemplo da Geometria Algébrica.

Antes de alcançarmos o nosso objetivo principal, necessitaremos de vários conceitos e propriedades acerca das derivações localmente nilpotentes. Lembramos que uma derivação D de um anel A – comutativo e com 1, como sempre convencionaremos – é dita *localmente nilpotente* se para cada $f \in A$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ (dependendo de f) tal que $D^n(f) = 0$.

Como já mencionamos, o nosso objetivo nesta dissertação será apresentar uma prova do Teorema de Renschler, que pode ser enunciado precisamente como:

Teorema de Rentschler. Seja k um corpo de característica zero. Se $D \in DLN(k[x,y])$ não nulo, então existe $f \in k[x]$ e um automorfismo *tame* $\alpha \in GA_2(k)$ tal que $\alpha D \alpha^{-1} = f(x)\partial_y$.

Geometricamente, isto significa que toda $\mathbb{G}_a$-ação planar (que corresponde bijetivamente a uma DLN em duas variáveis) é conjugada, por um automorfismo *tame*, a uma ação triangular $t \cdot (x,y) = (x, y + tf(x))$.

Como principal aplicação do teorema de Rentschler, daremos uma demonstração do clássico teorema de Jung:

Teorema de Jung. O grupo $GA_2(k)$ de automorfismos algébricos de $k[x,y]$ é gerado por seus subgrupos triangular e linear (que são denotados por $BA_2(k)$ e $GL_2(k)$, respectivamente).

A seguir, descrevemos sucintamente o conteúdo de cada capítulo desta dissertação.

No **primeiro capítulo**, revisamos o conceito de derivação de um anel A com valores em um A-módulo qualquer, e vemos também algumas propriedades básicas sobre esta noção. Em seguida, explicitamos as definições de graduação e de filtração, e aproveitamos para relacioná-las com derivações.

Já no **segundo capítulo**, tornamos o nosso trabalho mais específico e voltamos nossa atenção para a classe especial formada pelas derivações localmente nilpotentes. Listaremos e provaremos alguns princípios que serão importantes para a demonstração do teorema de Rentschler que iremos tratar no próximo capítulo. Ainda neste capítulo, apresentaremos uma equivalência entre DLN's e certas ações algébricas em variedades algébricas, a qual, mesmo não tendo sido utilizada no nosso resultado principal, tem reconhecida relevância para o estudo das DLN's e suas relações com outros temas importantes.

Por fim, no **terceiro capítulo**, após algumas definições e observações preparatórias, iremos provar o importante Teorema de Rentschler já enunciado acima. Após apresentarmos a prova deste resultado crucial, daremos como principal aplicação uma demonstração do bem-conhecido Teorema de Jung, a respeito dos geradores do grupo de automorfismos planares. Em uma seção final, apresentaremos dois exemplos ilustrando algumas relações e "patologias" envolvendo derivações localmente nilpotentes e alguns outros tópicos importantes.

Além destes três capítulos, fornecemos um pequeno apêndice com alguns conceitos básicos em geometria algébrica.

Na elaboração desta dissertação, utilizamos como principal referência o excelente livro de Gene Freudenburg [F], bem como alguns artigos científicos e teses de doutorado escritos sobre o tema.

Capítulo 1

Preliminares sobre derivações

Em toda esta dissertação, o termo *anel* significará *anel comutativo e com elemento identidade 1*.

Neste primeiro capítulo, apresentamos o conceito de derivações de um anel A com valores em um A-módulo qualquer, e vemos também algumas propriedades básicas sobre esta noção. Em seguida, explicitamos as definições de graduação e de filtração, e aproveitamos para relacioná-las com derivações.

1.1 Definições básicas

Definição 1.1. Sejam A um anel e M um A-módulo. Uma *derivação de A em M* é uma aplicação $D : A \to M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $D(a + b) = D(a) + D(b)$;
2. $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ (*regra de Leibniz*),

para quaisquer a, $b \in A$.

Escrevemos $Der(A, M)$ para o conjunto de todas as derivações de A em M, e este, com as operações $D + D'$ e aD definidas naturalmente por $(D + D')(b) = D(b) + D'(b)$ e $(aD)(b) = aD(b)$ (com a, $b \in A$) torna-se um A-módulo.

Seja A uma k-álgebra (k anel) através de um homomorfismo estrutural $f : k \to A$. Dizemos que $D \in Der(A, M)$ é uma *k-derivação* ou *derivação sobre k* se $D \circ f \equiv 0$. Denotamos por $Der_k(A, M)$ o conjunto de todas as k-derivações, o qual é, claramente, um A-submódulo de $Der(A, M)$.

Observemos que, para qualquer $D \in Der(A, M)$, tem-se $D(1) = D(1.1) = D(1) + D(1)$, e assim $D(1) = 0$. Dessa forma, torna-se claro que $Der(A, M) = Der_{\mathbb{Z}}(A, M)$.

Dada $D \in Der_k(A, M)$, podemos considerar o núcleo $ker(D) = \{a \in A \mid D(a) = 0\}$ de D. Observe que $Im(f) \subseteq Ker(D)$.

No caso em que $M = A$, escrevemos simplesmente $Der(A) = Der(A, A)$ e $Der_k(A) = Der_k(A, A)$.

Vejamos agora alguns resultados básicos sobre derivações.

Observação 1.2. Dada $D \in Der(A)$, tem-se:

a $ker(D)$ é um subanel de A, chamado *anel de constantes de* D;

b Se $a \in A$ e $D, E \in Der(A)$, então, denotando $[D, E] = DE - ED$ (o chamado *colchete de Lie*), tem-se que $aD, D + E$ e $[D, E]$ também pertencem a $Der(A)$;

c $D(ab) = aD(b)$ para todos $a \in ker(D)$ e $b \in A$, ou seja, D é um endomorfismo $ker(D)$-linear de A;

d **Regra da potência:** Para quaisquer $a \in A$ e $n \geq 1$, tem-se $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$;

e **Regra de Leibniz generalizada:** Para quaisquer $a, b \in A$ e $m \geq 0$, tem-se

$$D^m(ab) = \sum_{i+j=m} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} D^i(a)D^j(b).$$

Observação 1.3. Sejam A um anel e $S \subset A$ um sistema multiplicativo. Cada $D \in Der(A)$ induz a derivação $D_S \in Der(A_S)$ dada por $D_S(t^{-1}a) = t^{-2}(tD(a) - aD(t))$ (*regra do quociente*). No caso em que A é um domínio de integridade e $S = A \backslash \{0\}$, tem-se que $K = A_S$ é o corpo de frações de A, e tomando um corpo L contendo A, podemos estender qualquer elemento de $Der(A, L)$ para um elemento de $Der(K, L)$.

Proposição 1.4. *Seja B um subanel de A, e seja $t \in A$ um elemento transcendente sobre B. Se $p(t) \in B[t] = A$ é dado por $p(t) = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i t^i$, com $a_i \in B$ para todo i, então*

$$p'(t) = \sum_{1 \leq i \leq m} i a_i t^{i-1},$$

com $p'(t) = (\frac{d}{dt})_B(p(t))$, onde $(\frac{d}{dt})_B \in Der_B(A)$ satisfaz $(\frac{d}{dt})_B(t) = 1$.

Demonstração: A prova segue de aplicações diretas das observações anteriores. ■

Vejamos o caso do anel de polinômios em n variáveis.

Exemplo 1.5. Considere A um anel e $A[t] = A[t_1, t_2, ..., t_n]$ o anel de polinômios em n indeterminadas sobre A. Tem-se que $Der_A(A[t])$ é um $A[t]$-módulo *livre*, de posto finito igual a n, gerado pelas derivadas parciais $\partial_{t_1}, ..., \partial_{t_n}$. Isto é,

$$Der_A(A[t]) = \bigoplus_{i=1}^{n} A[t]\partial_{t_i} \cong A[t]^n$$

Definição 1.6. Um ideal $I \subset A$ é um *ideal integral* (ou *diferencial*) para uma derivação D se $D(I) \subset I$. Além disso, dizemos que um elemento x é *integral* para D se o ideal principal $(x) \subset A$ é integral para D.

Proposição 1.7. *Seja $D \in Der(A)$. Tem-se:*

a *$D(A) \cap ker(D)$ é um ideal de $ker(D)$;*

b *Qualquer ideal de A gerado por elementos de $ker(D)$ é um ideal integral para D;*

c *Se $p(t) \in ker(D)[t]$, com $t \in A$ transcendente sobre $ker(D)$, então $D(p(t)) = p'(t)D(t)$* (**regra da cadeia**)*;*

d *Se A é um domínio, então $ker(D)$ é um subanel algebricamente fechado de A (isto é, o fecho inteiro de $ker(D)$ em A é o próprio $ker(D)$).*

Demonstração:

a Como $D : A \to A$ é um homomorfismo de $ker(D)$-módulos, temos que $ker(D)$ e $D(A)$ são $ker(D)$-submódulos de A. Logo, $ker(D) \cap D(A)$ é um $ker(D)$-submódulo de $ker(D)$, ou seja, um ideal de $ker(D)$.

b Considere um A-ideal $I = (x_1, x_2, ..., x_n)$, onde cada $x_i \in ker(D)$. Seja $b \in I$. Logo $b = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, com $a_i \in A$. Assim, $D(b) = D(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i D(a_i) \in I$. Logo, $D(I) \subset I$ e portanto I é um ideal integral para D.

c Considere $p(t) \in ker(D)[t]$ e escreva $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$. Com alguns cálculos, obtemos

$$D(p(t)) = D(a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n)$$

$$D(p(t)) = a_1 D(t) + ... + a_n D(t^n)$$

$$D(p(t)) = (a_1 + 2a_2 + ... + n a_n t^{n-1})D(t)$$

$$D(p(t)) = \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) D(t) = p'(t)D(t)$$

d Para mostrar que $ker(D)$ é um subanel algebricamente fechado de A, temos que verificar a igualdade $ker(D) = \overline{ker(D)}$. Claramente, basta provar que $\overline{ker(D)} \subset ker(D)$. Seja $s \in A$ um elemento algébrico sobre $ker(D)$ e seja $p(t) \in ker(D)[t]$ o polinômio de menor grau tal que $p(s) = 0$. Assim, aplicando a regra da cadeia e avaliando em s, obtemos $0 = D(0) = D(p(s)) = p'(s)D(s)$; sendo A um domínio, segue que $p'(s) = 0$ ou $D(s) = 0$. Mas a condição $p'(s) = 0$ contradiz a minimalidade de p, de modo que, necessariamente, $D(s) = 0$ e portanto $s \in ker(D)$, o que conclui a nossa demonstração.

■

1.2 Derivações homogêneas associadas a filtrações

Nesta parte, k denota um corpo de característica zero, e o anel A é um k-domínio *graduado*, no seguinte sentido:

Definição 1.8. Dizemos que A é ($\mathbb{Z}$-)*graduado* se pode ser escrito como uma soma direta $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$, onde $A_0 = k$ e cada A_i é um k-espaço vetorial satisfazendo $A_iA_j \subset A_{i+j}$ (multiplicação em A) para todos $i, j \in \mathbb{Z}$ (em geral, poderíamos tomar graduação sobre um semigrupo abeliano ordenado qualquer, mas para os nossos propósitos consideraremos apenas $\mathbb{Z}$ ou o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$). Cada elemento $a \in A$ pode, então, ser escrito de forma única como uma soma finita de elementos homogêneos:

$$a = \sum_{soma\ finita} a_i, \quad a_i \in A_i.$$

Se chamarmos por ω tal graduação de A, então os elementos dos espaços vetoriais A_i's são chamados **elementos ω-homogêneos** de A, e mais especificamente, se $f \in A_i$, então dizemos que o *ω-grau* de f é i.

Exemplo 1.9. Um exemplo de anel graduado é o anel de polinômios sobre k (em qualquer característica). Tem-se $k[x] = \bigoplus_{j\geq 0} k[x]_j$, onde $k[x]_j$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau total igual a j. Assim, $k[x]$ é um anel ($\mathbb{N}$-)graduado da maneira usual.

Um exemplo mais geral de anel graduado é o *anel graduado associado*, o qual veremos mais adiante.

Definição 1.10. Dizemos que uma derivação $D \in Der(A)$ é ω-**homogênea** se existe um inteiro fixado $d \in \mathbb{Z}$ tal que $D(A_i) \subset A_{i+d}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. O número d é chamado de ω-*grau* de D.

Observação 1.11. Note que se D é uma derivação ω-homogênea, e dado $f \in A$ escrito como $f = \sum_{soma\ finita} f_i$, com $f_i \in A_i$, então temos que $D(f) = 0$ se, e somente se, $D(f_i) = 0$ para cada i.

Agora, vamos supor que A admite uma $\mathbb{Z}$-*filtração*, ou seja, existe uma família $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de subconjuntos de A tal que:

1 Cada A_i é um espaço vetorial sobre k;

2 $A_j \subset A_i$ sempre que $j \leq i$;

3 $A = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i$;

4 $A_iA_j \subset A_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}$.

Além disso, tal filtração será dita *própria* se, além das propriedades acima, forem satisfeitas as duas condições abaixo:

5 $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} A_i = \{0\}$;

6 Se $a \in A_i \cap A_{i-1}^C$ e $b \in A_j \cap A_{j-1}^C$, então $ab \in A_{i+j} \cap A_{i+j-1}^C$ (onde "$\star^C$" denota o complementar de $\star$ em A).

Se A admite uma $\mathbb{Z}$-filtração própria, é possível construir um certo anel $\mathbb{Z}$-graduado de fundamental importância sob vários pontos de vista, denotado por $Gr(A)$, e obter uma derivação homogênea em $Der_k(Gr(A))$.

Assim, suponhamos que $A = \bigcup A_i$ seja uma $\mathbb{Z}$-filtração própria. Vamos definir a *álgebra graduada associada* $Gr(A)$ como a seguir. A estrutura k-aditiva em $Gr(A)$ é dada por

$$Gr(A) = \bigoplus_{i\in Z} \frac{A_i}{A_{i-1}}$$

onde cada A_i/A_{i-1} denota k-espaço vetorial quociente usual.

Considere, agora, elementos $a + A_{i-1} \in \dfrac{A_i}{A_{i-1}}$ e $b + A_{j-1} \in \dfrac{A_j}{A_{j-1}}$, com $a \in A_i$ e $b \in A_j$. O produto entre eles é dado através de

$$\frac{A_i}{A_{i-1}} \times \frac{A_j}{A_{j-1}} \to \frac{A_{i+j}}{A_{i+j-1}},$$

onde

$$(a + A_{i-1})(b + A_{j-1}) = ab + A_{i+j-1}.$$

Finalmente, por "colagem", podemos estender (usando a lei distributiva) e obter a multiplicação $Gr(A) \times Gr(A) \to Gr(A)$ em todo $Gr(A)$.

Note que, pela propriedade (6) de filtrações próprias, obtemos que $Gr(A)$ é um k-domínio comutativo. Pela propriedade (5), para cada elemento $a \in A \setminus \{0\}$ dado, o conjunto $\{i \in \mathbb{Z}; a \in A_i\}$ possui um elemento mínimo, que será denotado por $\iota(a)$. A aplicação natural $\rho : A \to Gr(A)$ é uma aplicação que leva cada $a \in A$, $a \neq 0$, na classe $a + A_i/A_{i-1}$, onde $i = \iota(a)$. Definimos $\rho(0) = 0$. Além disso, dado $a \in A$, fica claro que se $\rho(a) = 0$ então $a = 0$ (logo, ρ é injetiva).

Como A é um anel $\mathbb{Z}$-graduado, temos que A admite uma filtração em relação a qual A e $Gr(A)$ são canonicamente isomorfos via ρ. Em particular, se $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$, então uma $\mathbb{Z}$-filtração própria satisfatória é dada por $A_i = \bigoplus_{j\leq i} B_j$.

Como ilustração, retomando o exemplo anterior do anel de polinômios $A = k[x]$ (k corpo), temos que $A = \bigcup_j k[x]_j$ (com $k[x]_j$ os polinômios de grau maior ou igual que j) é uma $\mathbb{Z}$-filtração (põe-se $k[x]_j = 0$ se $j < 0$) e além disso, neste caso, $Gr(A) = \bigoplus_{j\geq 0} kx^j \simeq A$.

Definição 1.12. Suponha que $A = \bigcup_i A_i$ é uma $\mathbb{Z}$-filtração própria e considere $D \in Der_k(A)$. Dizemos que D *respeita a filtração* se existe um inteiro s tal que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, vale $D(A_i) \subset A_{i+s}$.

Seja $D \in Der_k(A)$ que respeita a filtração. Vamos definir uma função $gr(D) : Gr(A) \to Gr(A)$ da seguinte maneira. Se $D = 0$, então $gr(D)$ é a aplicação nula. Se $D \neq 0$, seja s o menor inteiro tal que $D(A_i) \subset A_{i+s}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Então, dado $i \in \mathbb{Z}$, defina

$$gr(D) : \frac{A_i}{A_{i-1}} \to \frac{A_{i+s}}{A_{i+s-1}}$$

por $gr(D)(a + A_{i-1}) = D(a) + A_{i+s-1}$.

Finalmente, por linearidade, estendemos esta aplicação a todo $Gr(A)$.

Observação 1.13. A aplicação $gr(D)$ é uma k-derivação homogênea de $Gr(A)$ (valendo $gr(D) = 0$ se, e somente se, $D = 0$). Além disso, tem-se $\rho(kerD) \subset ker(gr(D))$.

Demonstração: Por linearidade, basta considerar a aplicação $gr(D)$ em um grau qualquer, $gr(D) : \dfrac{A_i}{A_{i-1}} \to \dfrac{A_{i+s}}{A_{i+s-1}}$, onde $D(A_i) \subset A_{i+s}$. Assim, dados $a, b \in A_i$, segue-se que

$$\begin{aligned} gr(D)((a+A_{i-1})(b+A_{i-1})) &= gr(D)(ab+A_{2i-1}) \\ &= D(ab)+A_{2i+s-1} \\ &= aD(b)+A_{2i+s-1}+bD(a)+A_{2i+s-1} \\ &= (a+A_{i-1})(D(b)+A_{i+s-1})+(b+A_{i-1})(D(a)+A_{i+s-1}) \\ &= (a+A_{i-1})gr(D)(b+A_{i-1})+(b+A_{i-1})gr(D)(a+A_{i-1}). \end{aligned}$$

Dessa forma, $gr(D)$ é uma k-derivação homogênea de $Gr(A)$.

Por fim, note que, dado $a \in ker(D)$, temos $\rho(a) = a + \dfrac{A_i}{A_{i-1}}$, onde $i = min\{i \in \mathbb{Z}; a \in A_i\}$. Logo, $gr(D)(\rho(a)) = gr(D)(a + \dfrac{A_i}{A_{i-1}}) = D(a) + A_{i+s-1} = A_{i+s-1}$.

■

1.3 Função grau induzida por uma derivação

Antes de enunciarmos o próximo resultado, consideremos uma $D \in Der(A)$ e definamos

$$Nil(D) = \{b \in A \,|\, \exists\; n \in \mathbb{Z}_+ \; tal\; que\; D^n(b) = 0\},$$

isto é, o subconjunto de A formado pelos elementos onde D é nilpotente.

Definição 1.14. (*Função grau induzida por uma derivação*) Sejam $D \in Der(A)$ e $f \in Nil(D)$. Logo, $D^n f = 0$ para $n \gg 0$. Se $f \neq 0$, defina

$$\nu_D(f) = min\{n \in \mathbb{N} \,|\, D^{n+1} f = 0\}.$$

Além disso, para $f = 0$ definimos $\nu_D(0) = -\infty$.

Proposição 1.15. *Seja $D \in Der(A)$. Então:*

a $\nu_D(D(f)) = \nu_D(f) - 1$ *sempre que* $f \in Nil(D) \setminus ker(D)$;

b $Nil(D)$ *é uma subanel de* A;

c ν_D *é uma função grau em* $Nil(D)$.

Demonstração: Seja $f \in Nil(D)$, com $D(f) \neq 0$, e seja $m = \nu_D(f)$. Note que $D^{m+1}(f) = 0$ e assim $D^m(D(f)) = 0$, implicando que $D(f) \in Nil(D)$ e, agora, segue facilmente da definição de ν_D que $\nu_D(D(f)) = m - 1$.

Tomemos, além disso, $g \in Nil(D)$ e seja $n = \nu_D(g)$. Definindo $k = max\{m, n\}$, temos que $D^{k+1}(f + g) = D^{k+1}(f) + D^{k+1}(g) = 0$. Isso mostra que $Nil(D)$ é fechado para adição. Esta equação também implica que para todos $f, g \in Nil(D)$ tem-se $\nu_D(f + g) \leq max\{\nu_D(f), \nu_D(g)\}$. Usando a regra de Leibniz de ordem superior, temos ainda que

$$D^{m+n+1}(fg) = \sum_{i+j=m+n+1} \begin{pmatrix} m+n+1 \\ i \end{pmatrix} D^i(f)D^j(g).$$

Se $i + j = m + n + 1$, com i e j inteiros não-negativos, temos que ou $i > m$ ou $j > n$. Portanto $D^i(f)D^j(g) = 0$ e daí segue que $D^{m+n+1}(fg) = 0$. Dessa forma, $Nil(D)$ é fechado para o produto, mostrando que $Nil(D)$ é um subanel de A e portanto concluímos a demonstração da afirmação **(b)**.

Por fim, o mesmo raciocínio acima mostra que $\nu_D(fg) \leq m+n$ e além disso $D^{m+n}(fg) = \dfrac{(m+m)!}{m!n!}D^m(f)D^n(g) \neq 0$. Portanto $\nu_D(fg) = m+n$, e fica provado **(c)**, concluindo assim a demonstração da proposição. ■

Observe que, sendo $Nil(D)$ uma subálgebra de A, e ν_D uma função grau em $Nil(D)$, então supondo que $Nil(D) = A$ (em cujo caso D será dita *localmente nilpotente*), teremos que ν_D, também denotado por deg_D, induz uma $\mathbb{Z}$-filtração própria $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ que D respeita, onde $A_i = \{f \in A; \nu_D(f) \leq i\}$. Neste caso, $A_0 = ker(D)$ e cada elemento s de $A_1 \cap A_0^C$ é uma *fatia local*, no sentido de que $D(D(s)) = 0$ mas $D(s) \neq 0$.

Capítulo 2

Derivações localmente nilpotentes

Neste capítulo apresentaremos e estudaremos uma classe particular especial de derivações: as *derivações localmente nilpotentes* (DLN's). A partir da definição, listaremos e provaremos alguns princípios que serão importantes para a demonstração do teorema principal que iremos abordar no próximo capítulo. Ainda neste capítulo, apresentaremos uma equivalência entre DLN's e certas ações algébricas, a qual, mesmo não sendo utilizada no nosso resultado principal, tem reconhecida relevância para o estudo das DLN's e suas relações com outros temas importantes.

2.1 Princípios sobre as DLN's

Suporemos que A é um anel contendo $\mathbb{Q}$.

Definição 2.1. Uma derivação $D \in Der(A)$ é chamada de *derivação localmente finita* se para cada $f \in A$, o $\mathbb{Q}$-espaço vetorial gerado pelas imagens $\{D^n(f); n \geq 0\}$ tem dimensão finita. Equivalentemente, se existe um polinômio mônico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ (dependendo de f) tal que $p(D)(f) = 0$.

Definição 2.2. Uma derivação $D \in Der(A)$ é dita *localmente nilpotente* se para cada $f \in A$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ (dependendo de f) tal que $D^n(f) = 0$, isto é, se, e somente se, $Nil(D) = A$. Assim, podemos observar que as derivações localmente nilpotentes são casos especiais das derivações localmente finitas. Denotaremos por $DLN(A)$ o conjunto de todas as derivações $D \in Der(A)$ que são localmente nilpotentes.

Observação 2.3. Se B é um subanel de A, escrevemos $DLN_B(A) := Der_B(A) \cap DLN(A)$.

Exemplo 2.4. As derivações parciais de um anel de polinômios constituem exemplos clássicos de derivações localmente nilpotentes. Outro exemplo é a derivação $y\partial_x$ no anel $k[x, y]$.

Agora, vamos apresentar alguns resultados que envolvem as $DLN's$.

Princípio 2.5. *Suponha que* $D \in DLN(A)$.

a *$ker(D)$ é fatorialmente fechado em A (isto é, dados $f, g \in A \backslash \{0\}$ tais que $fg \in ker(D)$, tem-se necessariamente $f, g \in ker(D)$);*

b *$A^* \subset ker(D)$. Em particular, $DLN(A) = DLN_k(A)$;*

c *Se $D \neq 0$, então D admite uma fatia local $r \in A$;*

d *O grupo de automorfismos $Aut_k(A)$ age sobre $DLN(A)$ por conjugação.*

Demonstração:

a É claro que $ker(D) = \{f \in A; \nu_D(f) \leq 0\}$. Considere $f, g \neq 0$ elementos de A tais que $fg \in ker(D)$, ou seja, $\nu_D(fg) = 0$. Logo, $\nu_D(f) = -\nu_D(g)$, o que implica que $\nu_D(f) = \nu_D(g) = 0$, e portanto, $f, g \in ker(D)$.

b Se $y \in A^*$ então existe $y^{-1} \in A$ tal que $yy^{-1} = 1$. Como $1 \in ker(D)$ e $ker(D)$ é fatorialmente fechado (pelo item (a) acima), segue que $y^{-1} \in ker(D)$. Assim, $A^* = (ker(D))^* \subset ker(D)$. Finalmente, temos por hipótese $k \subset A^*$, logo $D|k = 0$, i.e., $D \in Der_k(A)$.

c Escolha $b \in A$ de modo que $D(b) \neq 0$ e seja $n = \nu_D(b) \geq 1$. Portanto, temos que $D^n(b) \neq 0$ e $D^{n+1}(b) = 0$. Agora, basta tomar $r = D^{n-1}(b)$, visto que $D(D(r)) = 0$ e $D(r) \neq 0$.

d Considere a aplicação $* : Aut_k(A) \times DLN(A) \to DLN(A)$, onde $\alpha * D = \alpha D \alpha^{-1}$. Segue-se que a aplicação $*$ é uma ação de $Aut_k(A)$ sobre $DLN(A)$. Para isto, basta observar que $(\alpha D \alpha^{-1})^n = \alpha D^n \alpha^{-1}$ para todo $n \geq 0$ e todo k-automorfismo α de A.

■

Corolário 2.6. *Se K é um corpo de característica zero, então $DLN(K) = \{0\}$.*

Princípio 2.7. *Seja S um subconjunto qualquer de A que gera A como uma k-álgebra e seja $D \in Der_k(A)$. Então*

$$D \in DLN(A) \Leftrightarrow S \subset Nil(D).$$

Demonstração: Como $A = k[S]$, este resultado segue facilmente do fato de que $Nil(D)$ é uma k-subálgebra de A, como já provamos anteriormente.

■

Suponha agora que A seja finitamente gerada sobre $ker(D)$, ou seja, $A = ker(D)[t_1, ..., t_n]$. Assim, o resultado acima implica que $D \in DLN(A)$ se, e somente se, existe um $N \in \mathbb{Z}$ tal que $D^N(t_i) = 0$, para cada i.

Princípio 2.8. *Suponha $D \in DLN(A)$, $D \neq 0$, e seja $p(t) \in ker(D)[t]$, com $t \in A$, tais que $t, p(t) \neq 0$. Então*

$$\nu_D(p(t)) = (deg(p))\nu_D(t).$$

Demonstração: Vamos supor que $\nu_D(t) \neq 0$ (o caso contrário é trivial). Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n \in ker(D)[t]$. Temos que, para qualquer índice a_i diferente de zero, $\nu_D(a_i t^i) = i\nu_D(t)$. Sendo assim, cada termo terá grau distinto e pela propriedade de função grau segundo a qual $\nu_D(f + g) = max\{\nu_D(f), \nu_D(g)\} \Leftrightarrow \nu_D(f) \neq \nu_D(g)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_D(p(t)) =& \nu_D(a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n) \\
=& max\{\nu_D(a_0), \nu_D(a_1) + \nu_D(t), ..., \nu_D(a_n) + \nu_D(t^n)\} \\
=& max\{\nu_D(t), \nu_D(t^2), ..., \nu_D(t^n)\} \\
=& max\{\nu_D(t), 2\nu_D(t), ..., n\nu_D(t)\} \\
=& (deg(p))\nu_D(t).
\end{aligned}$$

■

Princípio 2.9. *Sejam $D \in DLN(A)$ e $f_1, f_2, ..., f_n \in A$ $(n \geq 1)$ dados. Suponha que existe uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $D(f_i) \in (f_{\sigma(i)}) \subset A$ para cada i. Então, para cada órbita de σ, existe um i tal que $D(f_i) = 0$.*

Demonstração: Vamos supor por absurdo que $D(f_i) \neq 0$ para cada i. Escolha $a_i, a_2, ..., a_n \in A$ tal que $D(f_i) = a_i f_{\sigma(i)}$. Assim, temos que $\nu_D(f_i) \geq 1$ e $\nu_D(a_i) \geq 0$ para cada i. Assim, segue que

$$\nu_D(f_i) - 1 = \nu_D(D(f_i)) = \nu_D(a_i) + \nu_D(f_{\sigma(i)}) \geq \nu_D(f_{\sigma(i)}).$$

Portanto, somando sobre i, obtemos

$$\sum_{1\leq i\leq n} \nu_D(f_i) - n \geq \sum_{1\leq i\leq n} \nu_D(f_{\sigma(i)}).$$

Mas isso é um absurdo visto que os dois somatórios que aparecem são iguais. Logo, temos que $D(f_i) = 0$ para pelo menos um i. Agora, basta que apliquemos esse resultado para a decomposição de σ em ciclos disjuntos e provamos o nosso resultado.

■

Tomando $n = 1$ no Princípio acima, obtemos:

Corolário 2.10. *Se $D(f) \in (f)$ para $D \in DLN(A)$ e $f \in A$, então $D(f) = 0$.*

Princípio 2.11. *Seja A um domínio. Dados $D \in Der_k(A)$ e $f \in A$, $f \neq 0$, tem-se:*

$$fD \in DLN(A) \Leftrightarrow D \in DLN(A) \text{ e } f \in ker(D).$$

Demonstração: Vamos supor que $fD \in DLN(A)$, mas $Nil(D) \neq A$. Então, $D \neq 0$. Seja $N = \nu_{fD}(f) \geq 0$ e escolha $g \in A\backslash Nil(D)$. Então $g \neq 0$, $\nu_{fD}(g) \geq 0$ e $\nu_{fD}(D^n(g)) \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Portanto, por um lado, temos

$$\nu_{fD}(fD^n(g)) = \nu_{fD}((fD)(D^{n-1}(g))) = \nu_{fD}(D^{n-1}(g)) - 1.$$

Por outro lado, observamos que

$$\nu_{fD}(fD^n(g)) = \nu_{fD}(f) + \nu_{fD}(D^n(g)) = N + \nu_{fD}(D^n(g)).$$

Portanto,

$$\nu_{fD}(D^n(g)) = \nu_{fD}(D^{n-1}(g)) - (N+1) \textit{ para todo } n \geq 1.$$

Assim, sabendo que a última igualdade vale para todo $n \geq 1$, podemos aplicar o soma finita em ambos os lados. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_{fD}(D^i(g)) = \sum_{i=1}^{n} \nu_{fD}(D^{i-1}(g)) - n(N+1)$$
$$\nu_{fD}(D^n(g)) = \nu_{fD}(g) - n(N+1)$$

e tomando n muito grande, chegamos em uma contradição, visto que a função grau ν_{fD} não assume valores negativos. Dessa forma, $D \in DLN(A)$. Para mostrar que $f \in Ker(D)$, observamos o corolário 2.10. Como $(fD)(f) = f(D(f)) \in (f)$ e $(fD) \in DLN(A)$, tem-se $(fD)(f) = 0$. Assim, $f(D(f)) = 0 \Rightarrow f = 0$ ou $D(f) = 0 \Rightarrow D(f) = 0$.

Para provarmos a recíproca basta observarmos que $[(fD)^n] = (f^n D^n)$, que é provado usando o princípio de indução e o fato de $f \in Ker(D)$. Admitindo isso, concluímos a demonstração, pois se $D \in DLN(A)$ então para cada $g \in A$ existe n tal que $D^n(g) = 0$ e assim $(fD)^n(g) = f^n(D^n)(g) = 0$. ∎

Princípio 2.12. *Suponha que $B \subset A$ é um subanel, onde $A = B[t]$ e $t \in A$ é transcendente sobre B. Então:*

a $\dfrac{d}{dt} \in DLN_B(B[t])$;

b $ker\left(\dfrac{d}{dt}\right) = B$;

c $DLN_B(B[t]) = B \cdot \dfrac{d}{dt}$

Demonstração:

a O item **(a)** segue imediatamente da proposição 1.4, visto que cada vez que aplicamos a derivação $\dfrac{d}{dt}$ a um polinômio em A, o seu grau diminui (em 1 unidade). Sendo assim, dado um polinômio de grau n basta aplicarmos a derivação $n+1$ vezes e obtemos que $\dfrac{d}{dt} \in DLN(B[t])$. Temos ainda que $\dfrac{d}{dt}(B) = 0$, e assim, $\dfrac{d}{dt} \in DLN_B(B[t])$.

b A inclusão $B \subset ker\left(\dfrac{d}{dt}\right)$ segue por definição. Agora, seja $p(t) \in ker\left(\dfrac{d}{dt}\right)$. Vamos mostrar que $deg(p(t)) = 0$. Caso contrário, se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_k t^k$, onde $deg(p(t)) \geq 1$, então aplicando a derivada obtemos

$$a_1 + 2a_2 t + ... + k a_k t^{k-1} = 0.$$

No entanto a igualdade acima implica que t é raiz do polinômio $q(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + k a_k x^{k-1} \in ker\left(\dfrac{d}{dt}\right)[x]$. Como $ker\left(\dfrac{d}{dt}\right)$ é algebricamente fechado, temos que $t \in ker\left(\dfrac{d}{dt}\right)$, o que seria uma contradição. Portanto $deg(p(t)) = 0$ e assim, $ker\left(\dfrac{d}{dt}\right) = B$.

c Seja $D \in DLN_B(B[t])$ dado, tal que $D \neq 0$. Da proposição 1.7 temos que para qualquer $p(t) \in B[t]$, $D(p(t)) = p'(t)D(t)$. Como $p'(t) = \dfrac{d}{dt}(p(t))$, temos que $D = D(t)\dfrac{d}{dt}$. Como D e $\dfrac{d}{dt}$ são localmente nilpotentes, segue pelo princípio anterior que $D(t) \in ker\left(\dfrac{d}{dt}\right) = B$. Sendo assim, $D = D(t)\dfrac{d}{dt} \in B.\dfrac{d}{dt}$ e a nossa primeira inclusão está satisfeita. Para mostrarmos a recíproca, observemos que dado $f \cdot \dfrac{d}{dt} \in B \cdot \dfrac{d}{dt}$, e sendo $f \in B = ker\left(\dfrac{d}{dt}\right)$ e $\dfrac{d}{dt} \in DLN_B(B[t])$, então segue-se, ainda da proposição anterior, que $f.\dfrac{d}{dt} \in DLN_B(B[t])$.

∎

Para o próximo princípio precisamos da seguinte definição.

Definição 2.13. Dado $D \in DLN(A)$, a *função exponencial determinada por* D é $expD : A \to A$, onde

$$expD(f) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(f)$$

Princípio 2.14. *Suponha que* $D \in DLN(A)$.

a $expD \in Aut_k(A)$

b *Se* $[D, E] = 0$ *para* $E \in DLN(A)$, *então* $D + E \in DLN(A)$ *e* $exp(D + E) = (expD) \circ (expE)$.

c *O subgrupo de* $Aut_k(A)$ *gerado por* $\{expD; D \in DLN(A)\}$ *é normal.*

Demonstração: Note que $expD(f) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(f)$ é uma função aditiva, visto que cada função D^i é aditiva. Agora, vamos mostrar que $expD$ respeita a multiplicação. Suponha que $f, g \in A$ são elementos não nulos, onde $\nu_D(f) = m$ e $\nu_D(g) = n$. Então $D^i(f) = D^j(g) = 0$ para $i > m$ e $j > n$. Assim,

$$\begin{aligned}
(expD)(f)(expD)(g) &= \left(\sum_{0 \leq i \leq m} \frac{1}{i!} D^i(f)\right)\left(\sum_{0 \leq j \leq n} \frac{1}{j!} D^j(g)\right) \\
&= \sum_{0 \leq i+j \leq m+n} \frac{1}{i!j!} D^i(f) D^j(g) \\
&= \sum_{0 \leq i+j \leq m+n} \frac{1}{(i+j)!} \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} D^i(f) D^j(g) \\
&= \sum_{0 \leq t \leq m+n} \frac{1}{t!} \left(\sum_{i+j=t} \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} D^i(f) D^j(g)\right)
\end{aligned}$$

E da regra de Leibniz generalizada segue que

$$(expD)(f)(expD)(g) = \sum_{0 \leq t \leq m+n} \frac{1}{t!} D^t(fg)$$

$$(expD)(f)(expD)(g) = (expD)(fg).$$

Resta-nos provar que para todo $a \in k$ temos que $a(expD)(f) = (expD)(af)$ com $f \in A$. Mas esse fato é válido visto que $D \in DLN(A) = DLN_k(A)$. Logo, já temos que $expD$ é um homomorfismo de álgebras.

Seguindo, seja $f \in A$ dado e escolha $m \geq 0$ tal que $D^m(f) = E^m(f) = 0$. Tome $n = 2m$. Como $[D, E] = 0$ temos que D e E comutam e portanto

$$(D+E)^n(f) = \sum_{i+j=n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} D^i E^j(f).$$

Observe que para cada termo desta soma, ou $i \geq m$ ou $j \geq m$ e portanto temos que $D^i E^j(f) = E^j D^i(f) = 0$ para cada par i, j. Assim, $D + E \in DLN(A)$. Para mostrar que $exp(D + E) = (expD) \circ (expE)$ usaremos a expansão acima. De fato, se considerarmos $m + m$ o menor natural tal que $(D + E)^{m+m} = 0$, onde $D^m(f) = E^m(f) = 0$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
exp(D+E)(f) &= \sum_{0 \leq k < m+m} \frac{1}{k!}(D+E)^k(f) \\
&= \sum_{0 \leq k < m+m} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} D^i E^j(f) \\
&= \sum_{0 \leq k < m+m} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} D^i E^j(f) \right) \\
&= \sum_{0 \leq i+j < m+n} \frac{1}{(i+j)!} \begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix} D^i E^j(f) \\
&= \sum_{0 \leq i+j < m+n} \frac{1}{i!j!} D^i E^j(f) \\
&= \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{i!} \sum_{0 \leq j < m} \frac{1}{j!} D^i E^j(f) \\
&= \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{i!} D^i \left(\sum_{0 \leq j < m} \frac{1}{j!} E^j(f) \right) \\
&= expD \left(\sum_{0 \leq j < m} \frac{1}{j!} E^j(f) \right) \\
&= expD \circ expE.
\end{aligned}$$

e concluímos a igualdade, provando a letra **(b)**.

Além disso, pelo principio 2.11, vemos que $-D \in DLN(A)$. Pela afirmação **(b)** segue que $expD \circ exp(-D) = exp(-D) \circ expD = exp(0) = I$ e isso prova que $expD \in Aut_k(A)$.

Para provarmos a afirmação **(c)** basta observamos que, para qualquer $\alpha \in Aut_k(A)$, vale a seguinte igualdade:

$$\alpha(expD)\alpha^{-1} = exp(\alpha D\alpha^{-1}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha(expD)\alpha^{-1} &= \alpha(expD(\alpha^{-1}(f))) \\
&= \alpha(\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}D^i(\alpha^{-1}(f))) \\
&= \sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}\alpha(D^i(\alpha^{-1}(f))) \\
&= \sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}(\alpha D^i\alpha^{-1}))(f) \\
&= \sum_{i\geq 0}\frac{1}{i!}(\alpha D\alpha^{-1})^i(f) \\
&= exp(\alpha D\alpha^{-1})(f).
\end{aligned}$$

Como $\alpha D\alpha^{-1} \in DLN(A)$, nossa afirmação esta provada. ∎

Princípio 2.15. *Suponha que A seja um anel graduado $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ e seja $D \in DLN(A)$ dada. Suponha que, para inteiros $m \leq n$, D admite uma decomposição $D = \sum_{m\leq i\leq n} D_i$, onde $D_i \in Der_k(A)$ é homogênea de grau i relativo a esta graduação, e onde $D_m \neq 0$ e $D_n \neq 0$.*

a $D_m, D_n \in DLN(A)$;

b *Se $f \in Ker(D)$ e $f = \sum_{u\leq i\leq v} f_i$ para $f_i \in A_i$, então $f_u \in ker(D_m)$ e $f_v \in ker(D_n)$.*

Demonstração:

a Como $Nil(D) = A$, tome $f \in A$ um elemento homogêneo, tal que $D^t(f) = 0$. Por outro lado, observe que D^t é a soma de funções na forma $D_{i_1}D_{i_2}...D_{i_t}$, onde $m \leq i_j \leq n$ para cada j. Note que cada monômio é uma função homogênea sobre A e o somando de maior grau aparecendo em D^t é $(D_n)^t$. Dessa forma, o somando de maior grau de $D^t(f)$ é igual a $(D_n)^t(f)$ e desde que $D^t(f) = 0$, segue que $(D_n)^t(f) = 0$. Portanto, temos que $Nil(D_n)$ contém cada elemento homogêneo de A e sendo o $Nil(D)$ um subálgebra ele irá conter todas as combinações lineares desses elementos e assim obtemos que $Nil(D_n) = A$. Analogamente, o somando de menor grau de $D^t(f)$ é igual a $(D_m)^t(f)$, e assim $(D_m)^t(f) = 0$, o que implica que D_m é localmente nilpotente, provando o item **(a)**.

b Agora, temos que

$$D(f) = \sum_{m \leq i \leq n, u \leq j \leq v} D_i(f_j).$$

Note que cada termo $D_i(f_j)$ é homogêneo e o grau de $D_n(f_v)$ excede o de qualquer outro termo. Portanto $D_n(f_v) = 0$. Da mesma forma, o termo de menor grau é $D_m(f_u)$, que também tem de ser zero, concluindo portanto a demonstração.

■

2.2 Um aspecto algebro-geométrico das DLN's

Nesta seção vamos apresentar uma relação que existe entre as ações algébricas em variedades algébricas e as derivações localmente nilpotentes, que apesar de não ser algo fundamental para o objetivo principal desta dissertação, é um resultado de reconhecida relevância.

Sendo k um corpo algebricamente fechado, A um k-domínio afim e $X = Spec(A)$ a variedade afim correspondente, o nosso objetivo nessa seção é mostrar que existe uma bijeção entre $DLN(A)$ e o conjunto de todas as $\mathbb{G}_a$-ações algébricas sobre X, onde uma dada $D \in DLN(A)$ induz a $\mathbb{G}_a$-ação algébrica $exp(tD)$ sobre X $(t \in k)$, e uma dada $\mathbb{G}_a$-ação algébrica $\rho\colon \mathbb{G}_a \times X \to X$ induz a derivação $\rho'(0)$ (onde a derivada de ρ é com relação a $t \in \mathbb{G}_a$).

Seja $D \in DLN(A)$. Usando os princípios 2.11 e 2.14, obtemos um homomorfismo de grupos

$$\eta : (ker(D), +) \to Aut_k(A), \ \eta(f) = exp(fD).$$

Observe ainda que se $D \neq 0$, então η é injetiva. Podemos restringir nosso homomorfismo ao subgrupo $\mathbb{G}_a = (k, +)$, visto como um grupo algébrico, ou seja obtemos a representação algébrica

$$\eta : \mathbb{G}_a \hookrightarrow Aut_k(A), \qquad \eta(t) = exp(tD).$$

Da observação 4.9, supondo que $G = \mathbb{G}_a = (k, +)$, e $X = Spec(A)$ variedade afim, vamos provar que de fato existe uma ação algébrica de $\mathbb{G}_a = (k, +)$ sobre $X = Spec(A)$.

Como já temos que a aplicação

$$(k,+) \to Aut_k(A),\ t \mapsto exp(tD)$$

é um homomorfismo de grupos, ela induz um outro homomorfismo de grupos, dado por

$$(k,+) \to Aut_k(Spec(A)),\ t \mapsto Spec(exp(tD)).$$

Para obtermos a ação de $\mathbb{G}_a$ sobre $Spec(A)$, basta ver que a aplicação

$$\alpha : k \times Spec(A) \to Spec(A),\ (t,p) \mapsto Spec(exp(tD))(p),$$

onde $exp(tD)(p) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(p) t^i$, é um morfismo no sentido de geometria algébrica. Observe que $k \times Spec(A) = Spec(A[t])$ onde t é uma indeterminada. A derivação $D \in DLN(A)$ induz o homomorfismo de k-álgebras dado por $\xi : A \to A[t]$,

$$\xi(b) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{j!} D^j(b) t^j;$$

aplicando *Spec* temos que $Spec(\xi) = \alpha$, e assim, como um homomorfismo induz um morfismo via uma aplicação funtorial, segue que α é um morfismo e portanto, uma ação.

Se considerarmos $\rho : \mathbb{G}_a \times X \to X$ uma $\mathbb{G}_a$-ação algébrica sobre k, temos que ρ é um morfismo, onde $\rho(0,x) = x$ e $\rho(a+b,x) = \rho(a, \rho(b,x))$. Sendo assim, pela proposição 4.5, ρ induz o homomorfismo

$$\rho^* : A(X) \to \mathcal{O}(\mathbb{G}_a \times X),$$

dado por $\rho^*(f) = f \circ \rho$. Da proposição 4.4 podemos identificar

$$\mathcal{O}(\mathbb{G}_a \times X) = A(\mathbb{G}_a \times X) = A(k \times X) = A(\mathbb{A}^1 \times X) = k[t] \otimes_k A = A[t].$$

Logo ρ^* está definida em A com valores em $A[t]$. Agora, vamos definir $\delta : A \to A$ como sendo a composição

$$A \xrightarrow{\rho^*} A[t] \xrightarrow{\frac{d}{dt}} A[t] \xrightarrow{t=0} A,$$

ou seja $\delta = e \frac{d}{dt} \rho^*$, onde e é evaluação para $t = 0$.

Proposição 2.16. $\delta \in DLN(A)$.

Demonstração: Para verificarmos isso temos que primeiro mostrar que δ é uma derivação. Já temos que δ satisfaz a propriedade de aditividade, visto que é uma composição de homomorfismos de k-módulos. Para verificarmos a regra de Leibniz, observe que dado

$a \in A$ tal que $\rho^*(a) = P_a(t) \in A[t]$, temos que para cada $t_0 \in k, t_0 \cdot a = P_a(t_0)$. Em particular, $a = a \cdot 0 = P_a(0) = e\rho^*(a)$. Portanto, dados $a, b \in A$, temos

$$\delta(ab) = e\frac{d}{dt}(\rho^*(a)\rho^*(b)) = e\left(\rho^*(a)\frac{d}{dt}\rho^*(b) + \rho^*(b)\frac{d}{dt}\rho^*(a)\right) = a\delta(b) + b\delta(a),$$

satisfazendo a regra de Leibniz e portanto δ é uma derivação. Agora vamos verificar que δ é localmente nilpotente. Seja $f \in A$ e suponha que $\rho^*(f) = P_f(t) = \sum_{0\leq i\leq n} f_i t^i$ com $f_i \in A$. Para $s, t \in k$ temos que

$$(s+t)\cdot f = s\cdot(t.f) = \sum_{0\leq i\leq n}(s\cdot f_i)t^i,$$

e por outro lado, usando a fórmula de Taylor

$$(s+t)\cdot f = P_f(s+t) = \sum_{0\leq i\leq n}\frac{P_f^i(s)}{i!}t^i.$$

Igualando coeficientes, segue que $s.f_i = \frac{P_f^i(s)}{i!}$. Para provar o desejado vamos usar indução sobre o t-grau de $\rho^*(f)$. Se o grau é zero, então $\delta(f) = P_f'(0) = 0$ e portanto $f \in Nil(\delta)$. Assuma que $g \in Nil(\delta)$ onde o grau de $\rho^*(g)$ é menor que n. Observe que $\delta(f) = P_f'(0) = f_1$ e $deg\rho(f_1) = deg(s\cdot f_1) = degP_f'(s) = n-1$. Portanto $f_1 = \delta(f) \in Nil(\delta)$, o que implica que $f \in Nil(\delta)$. Supomos inicialmente que $deg\rho^*(f) = n$, no entanto se tivéssemos por exemplo que $deg\rho^*(f) = m$, concluiríamos da mesma forma. De fato, no caso $m < n$ poderíamos usar nossa hipótese de indução. Para $m > n$, bastaria aplicarmos δ $m-n$ vezes e chegaríamos ao desejado. Portanto, $\delta \in LND(A)$. ■

Capítulo 3

O teorema de Rentschler e aplicações

Neste capítulo, após algumas definições e observações preparatórias, iremos provar o importante Teorema de Rentschler:

Teorema de Rentschler. Seja k um corpo de característica zero. Se $D \in DLN(k[x, y])$, $D \neq 0$, então existe $h \in k[x]$ e um automorfismo tame $\alpha \in GA_2(k)$ tal que $\alpha D \alpha^{-1} = h(x)\partial_y$.

Após apresentarmos a prova deste resultado principal, daremos como principal aplicação uma demonstração do bem-conhecido Teorema de Jung, a respeito dos geradores do grupo de automorfismos planares.

3.1 O caso do anel de polinômios

Seja A um anel de polinômios em n indeterminadas sobre um corpo k. Qualquer subconjunto $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset A$ satisfazendo $A = k[t_1, t_2, ..., t_n]$ é dito um *sistema de variáveis* ou *sistema de coordenadas* de A. Um polinômio $f \in A$ é chamado uma *variável* ou *função-coordenada* para A se, e somente se, f pertence a algum sistema de variáveis de A. Denotamos por $k(t_1, ..., t_n)$ o corpo das funções racionais em n variáveis sobre k.

O grupo dos k-automorfismos algébricos de A é chamado o *grupo afim geral* ou *grupo de Cremona afim em dimensão* n e é denotado por $GA_n(k)$. Se $A = k[t_1, t_2, ..., t_n]$, então o grupo linear geral $GL_n(k)$, grupo das matrizes quadradas de ordem n, invertíveis, com entradas em k (ou equivalentemente o grupo dos automorfismos de k^n em k^n) pode ser visto como um subgrupo de $GA_n(k)$, formado pelos elementos que se restringem a uma transformação linear do k-subespaço vetorial

$$V = kt_1 \oplus kt_2 \oplus ... \oplus kt_n \subset A,$$

e como esse subespaço é isomorfo a k^n, podemos interpretar o grupo $GL_n(k)$ como sendo os automorfismos algébricos de V que sejam transformações lineares. Os elementos de $GL_n(k)$ são chamados de *automorfismos lineares* de A.

Dado um sistema de coordenadas $A = k[t_1, ..., t_n]$, um automorfismo $f \in GA_n(k)$ se escreve como $f = (f_1, ..., f_n)$, onde $f_i = f(t_i) \in A$. Os automorfismos *triangulares* são aqueles da forma $f = (f_1, ..., f_n)$, onde $f_i \in k[t_1, ..., t_i]$. Os automorfismos triangulares formam um subgrupo, denotado por $BA_n(k)$. No nosso caso, vamos trabalhar com polinômios de duas variáveis, e portanto os automorfismos triangulares são da forma $\alpha = (ax + b, cy + f(x))$, com $a, c \in k^*, b \in k, f(x) \in k[x]$. O subgrupo *tame* de $GA_n(k)$ é o subgrupo gerado por $GL_n(k)$ e $BA_n(k)$ e seus elementos são chamados de *automorfismos tame*.

3.1.1 Derivações do anel de polinômios

Para a graduação de anéis de polinômios, estaremos interessados em $\mathbb{Z}^m$-graduações, para algum $m \geq 1$. Seja $A = k[t_1, ..., t_n]$ e consideremos $I = \mathbb{Z}^m$ (para algum $m \geq 1$) e $J = \mathbb{Z}^n$. Dado uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear, $\alpha : J \to I$, defina a função deg_α sobre o conjunto dos monômios por $deg_\alpha(t_1^{e_1}...t_n^{e_n}) = \alpha(e_1, ..., e_n)$. Dado $i \in I$, seja A_i o k-espaço vetorial gerado pelos monômios μ com $deg_\alpha(\mu) = i$. No caso em que $I = \mathbb{Z}$ e $\alpha(e_1, ..., e_n) = \sum e_i$, então a graduação induzida é a chamada *graduação padrão* de A, relativa ao sistema de coordenadas $(t_1, ..., t_n)$. Se por exemplo $\alpha(e_1, ..., e_n) = e_1 \in \mathbb{Z}$, então A é graduado de acordo com o seu grau usual relativo a t_1.

Dado um sistema de variáveis sobre o anel de polinômios $A = k[t_1, ..., t_n]$, um conjunto natural de derivações sobre A são as derivadas parciais relativa ao sistema de variáveis. Assim, definimos $\partial_{t_i} \in Der_k(A)$ com a regra $\partial_{t_i}(t_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). Uma outra notação bastante usada para as derivações parciais é $\dfrac{\partial}{\partial_{t_i}}$, e se $f \in A$ então pode-se escrever f_{t_i} para denotar $\partial_{t_i}(f)$.

Observe que para cada i, a derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial_{t_i}}$ é localmente nilpotente desde que $A = B[t_i]$, com $B = k[t_1, ..., \widehat{t_i}, ..., t_n]$ e $\dfrac{\partial}{\partial_{t_i}}(B) = 0$. Note ainda que o significado de $\dfrac{\partial}{\partial_{t_i}}$ depende de todo o sistema de variáveis ao qual t_i pertence. Por exemplo, em dimensão 2, vale $k[x,y]=k[x,x+y]$ e no entanto note que $\dfrac{\partial}{\partial_x}(x+y)=1$ com relação ao sistema (x,y), e, por outro lado, $\dfrac{\partial}{\partial_x}(x+y)=0$ relativo ao sistema $(x,x+y)$. Em geral, diremos que $D\in DLN(A)$ é uma *derivada parcial* se, e somente se, existe um sistema de coordenadas $(t_1,...,t_n)$ em A relativo ao qual $D=\dfrac{\partial}{\partial_{t_1}}$.

É fácil verificar que, como um A-módulo, e fixado um sistema de coordenadas $t_1,...,t_n$, $Der_k(A)$ é finitamente e livremente gerado pelas derivadas parciais $\left\{\dfrac{\partial}{\partial_{t_1}},...,\dfrac{\partial}{\partial_{t_n}}\right\}$ (que, além disso, é uma base de derivações comutantes). Em particular, dada $D\in Der_k(A)$, vale:

$$D=\sum_{1\leq i\leq n}D(t_i)\frac{\partial}{\partial_{t_i}},$$

o que pode ser rapidamente verificado: escrevendo $D=\sum_{j=1}^{n}g_j\dfrac{\partial}{\partial_{t_j}}$ e avaliando em cada t_i, torna-se óbvio que $g_i=D(t_i)$.

Já vimos que dado um automorfismo α qualquer, quando conjugamos a uma derivação D, temos que $\alpha D\alpha^{-1}$ também é uma derivação. No entanto, é importante sabermos como se comporta essa nova derivação obtida pela ação. Assim, no caso dos anéis de polinômios, já temos que sendo $A=k[t_1,t_2,...,t_n]$, uma derivação $D\in Der(A)$ é da forma,

$$D=\sum_{i=1}^{n}g_i\frac{\partial}{\partial_{t_i}},$$

onde $g_i=D(t_i)$. Podemos escrever

$$\alpha D\alpha^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha(D(\alpha^{-1}(t_i)))\frac{\partial}{\partial_{t_i}},$$

e portanto

$$\alpha D\alpha^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha\left(\sum_{j=1}^{n}g_j\frac{\partial}{\partial_{t_j}}(\alpha^{-1}(t_i))\right)\frac{\partial}{\partial_{t_i}}.$$

Dada $D\in Der_k(A)$, definimos o *coposto* de D como sendo o maior inteiro i tal que existe um sistema parcial de variáveis $\{t_1,...,t_i\}$ de A contido em $ker(D)$, ou seja, é o máximo número de derivadas parciais de ordem j tais que $g_j=0$.

Agora, defina o *posto* de D como sendo $posto(D)=n-coposto(D)$. Note que, pela fórmula acima, o posto e o coposto são invariantes de D, no sentido de que estes valores não mudam após conjugação por um elemento de $GA_n(k)$. Dessa forma, o posto da derivação D é o menor número de derivadas parciais que são necessárias para expressá-la. Portanto, elementos de $Der_k(A)$ que tem o posto 1 são aqueles da forma $f\partial_{t_1}$ (com $f\in A$), com relação a algum sistema de coordenadas $(t_1,...,t_n)$ de A.

3.2 Os teoremas de Rentschler e Jung

Provaremos o nosso teorema principal considerando $A = k[x, y]$, onde k é um corpo de característica zero. Seja $D \in DLN(A)$, $D \neq 0$. Começamos observando a seguir algumas propriedades que são consequências de resultados já provados neste trabalho.

P1 $ker(D)$ é um subanel de A fatorialmente fechado. (2.5)

P2 Quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ determinam uma $\mathbb{Z}$-graduação ω sobre A via

$$deg_\omega(x^i y^j) = ai + bj.$$

Seja $f \in Ker(D)$ dado. Se $\overline{D}$ é o somando homogêneo de maior grau de D relativo a ω, e $\overline{f}$ é o somando homogêneo de maior grau de f, então $\overline{D} \in DLN(A)$ e $\overline{f} \in ker(\overline{D})$. (2.15)

P3 $LND_{k[x]}(A) = k[x].\partial_y$ (2.12)

P4 Se $D(f) \in (g)$ e $D(g) \in (f)$ para $f, g \in A$, então ou $D(f) = 0$ ou $D(g) = 0$. (2.9)

As propriedades acima seguem diretamente dos resultados destacados ao lado.

Vejamos agora dois lemas auxiliares.

Lema 3.1. *Sejam a, b inteiros positivos e coprimos definindo a graduação ω sobre $A = k[x, y]$ com $deg_\omega(x) = a$ e $deg_\omega(y) = b$. Então $f \in A$ é ω-homogênea se, e somente se, existe um polinômio homogêneo standard $g \in A$ tal que $f = x^i y^j g(x^b, y^a)$, para inteiros i, j com $0 \leq i < b$ e $0 \leq j < a$.*

Demonstração: A prova desse lema exige um certo conhecimento na Teoria de Invariantes e como iria fugir do nosso objetivo, algumas passagens foram assumidas diretamente.

Se $a = b = 1$, então simplesmente tomamos $g = f$. Vamos então assumir que $ab > 1$. Seja G o grupo cíclico $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b = \mathbb{Z}_{ab}$ (essa igualdade decorre do teorema chinês do resto) e suponha que G é gerado por t. Não é difícil verificarmos que G age em A através da operação

$$t \cdot (x, y) = (t^a x, t^b y).$$

Temos ainda que $A^G = k[x^b, y^a]$.

Vendo A como um A^G-módulo, podemos decompor A como soma direta de espaços semi-invariantes

$$A = \bigoplus_{0\leq i\leq b, 0\leq j\leq a} x^i y^j A^G,$$

onde o peso de um elemento de $x^i y^j A^G$ é $ai + bj$. Se $f \in A$ é ω-homogêneo, ele é um semi-invariante por esta G-ação, e portanto $f = x^i y^j g(x^b, y^a)$ para certos $i, j \geq 0$ e algum $g \in A$. Uma vez que f é ω-homogêneo, g deve ser homogêneo standard.

■

Lema 3.2. *Seja $p(x, y)$ um polinômio não-nulo, homogêneo de grau d em duas variáveis com coeficientes em um corpo algebricamente fechado K. Então $p(x, y)$ pode ser fatorado como produto de polinômios lineares,*

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^{d}(a_i x + b_i y),$$

para certos $a_i, b_i \in K$.

Demonstração: Escreva $p(x, y) = \sum_{r=0}^{d} a_r x^r y^{d-r} = y^d \sum_{r=0}^{d} a_r \left(\dfrac{x}{y}\right)^r$, com $a_i \in K$. Seja e o maior elemento entre $\{0, ..., d\}$ tal que $a_e \neq 0$. Logo $\sum_{r=0}^{d} a_r \left(\dfrac{x}{y}\right)^r$ é um polinômio com coeficientes em K de grau e em $\left(\dfrac{x}{y}\right)$, e então pode ser fatorado como

$$\sum_{r=0}^{d} a_r \left(\frac{x}{y}\right)^r = a_e \prod_{i=1}^{e}\left(\frac{x}{y} - \lambda_i\right),$$

$\lambda_i \in K$. Logo,

$$p(x, y) = a_e y^d \prod_{i=1}^{e}\left(\frac{x}{y} - \lambda_i\right) = a_e y^{d-e} \prod_{i=1}^{e}(x - \lambda_i y).$$

■

Vamos agora à prova do nosso principal teorema:

Teorema de Rentschler. Seja k um corpo de característica zero. Se $D \in DLN(k[x, y]) \setminus \{0\}$, então existe $h \in k[x]$ e um automorfismo *tame* $\alpha \in GA_2(k)$ tal que $\alpha D \alpha^{-1} = h(x)\partial_y$.

Demonstração: Considere $D \in DLN(k[x, y])$, com $D \neq 0$. Suponha primeiro que $D(x) \neq 0$ e $D(y) \neq 0$. Sendo assim, vamos escolher $f(x, y) \in k[x, y]$ onde $f \in ker(D)$ e $f \neq$ *constante*. Vamos assumir que $f \in (x, y)$ (ideal maximal), caso contrário, substituímos $f(x, y)$ por $f(x, y) - f(0, 0)$. Mostraremos que:

AFIRMAÇÃO: *Existe uma* $\mathbb{N}$*-graduação de* A*, em relação a qual o somando homogêneo de* f*, de maior grau, tem a forma* $\overline{f} = d(x + cy^r)^s$ *ou* $\overline{f} = d(y + cx^r)^s$*, com* $c, d \in k^*$*,* $r, s \in \mathbb{N}$.

Para provar isto escreva $f = p(x) + q(y) + xyF$ onde $p(x) \in xk[x]$, $q(y) \in yk[y]$ e $F \in A$. Se $p = 0$ ou $q = 0$ então ou $f \in yA$ ou $f \in xA$. Se $f \in yA$ segue que $f = yg(x, y)$ e assim, $D(yg(x, y)) = 0$ e pela propriedade P1 concluímos que $D(y) = 0$. Analogamente para $f \in xA$. Portanto chegamos em uma contradição para ambos os casos. Logo $p, q \neq 0$. Seja $m = deg\ p(x)$ e $n = deg\ q(y)$ onde $m, n \geq 1$. Tomando $e = mdc(m, n)$, vamos definir $a = \dfrac{n}{e}$ e $b = \dfrac{m}{e}$. Considere a graduação ω sobre $k[x, y]$ onde $deg_\omega(x) = a$ e $deg_\omega(y) = b$ tal que $deg_\omega(x^i y^j) = ai + bj$. Assim, $deg_\omega p(x) = am = bn = deg_\omega q(y)$ e daí segue que $deg_\omega f \geq am$, uma vez que o grau da soma é o máximo entre os graus de cada termo. Suponha que $\overline{f}, \overline{F}$ e $\overline{D}$ sejam o somando homogêneo de maior grau de f, F e D relativa a ω. Logo $\overline{f}, \overline{D} \neq 0$. Pela propriedade P2 $\overline{D} \in DLN(A)$ e $\overline{D}(\overline{f}) = 0$.

Se $deg_\omega f > am$ segue que $\overline{f} = xy\overline{F}$. Uma vez que $\overline{F} \neq 0$ temos de P1 que $\overline{D}(x) = \overline{D}(y) = 0$, contradição, pois $\overline{D} \neq 0$. Portanto, $deg_\omega f = am$, o que implica que $\overline{f} = ux^m + vy^n + xy\overline{F}$, com $u, v \in k$. Temos ainda que $u, v \neq 0$, visto que são os coeficientes de maior grau de p e q. Note que $\overline{D}(x) \neq 0$ e $\overline{D}(y) \neq 0$. De fato, se $\overline{D}(x) = 0$, então $\overline{D}(\overline{f} - ux^m) = 0$. Sendo assim, $y(vy^{n-1} + x\overline{F}) \in ker(D)$ e como $y \neq 0$ e $vy^{n-1} + x\overline{F} \neq 0$ temos que $y \in ker(\overline{D})$ o que implica que $\overline{D}(y) = 0$ e daí, $\overline{D} = 0$, contradição. Portanto, $\overline{D}(x) \neq 0$ e $\overline{D}(y) \neq 0$.

Observe que como $a = \dfrac{n}{e}, b = \dfrac{m}{e}$, com $e = mdc(m, n)$, segue que $(a, b) = \mathbb{Z}$ e aplicando o lema 3.1 na função $\overline{f}$ concluímos que $\overline{f} = g(x^b, y^a)$, onde g é uma função homogênea standard não-constante. Agora, denotemos K como sendo o fecho algébrico de k. Em $K[x, y]$, pelo lema 3.2, $g(x, y)$ fatora-se como produto de polinômios lineares e portanto $\overline{f}$ fatora-se como $\overline{f} = \prod_{i=1}^{e}(c_i x^b + d_i y^a)$ para algum $c_i, d_i \in K$. Note que se c_i ou d_i forem 0, então ou u ou v também será 0.

Seja δ a extensão de $\overline{D}$ para $K[x, y]$. Então δ é localmente nilpotente, uma vez que $\delta^t(x) = \overline{D}^t(x)$ e $\delta^t(y) = \overline{D}^t(y)$ para todo $t \geq 0$. Como $\overline{f} \in ker(\overline{D})$, segue pela propriedade P1 que $\delta(c_i x^b + d_i y^a) = 0$ para cada i. Se qualquer dois destes termos são linearmente independentes, então $\delta(x^b) = \delta(y^a) = 0$, o que implicaria que $\delta(x) = \delta(y) = 0$, uma contradição. Logo para cada i existe β_i tal que $c_i = \beta_i d_i$. Portanto, existe $c, d \in K^*$ com $d = d_1 d_2 ... d_e$ e $c = \beta_i$ para todo i, tal que $\overline{f} = d(cx^b + y^a)^e$. Uma vez que $\delta(cx^b + y^a) = 0$, segue que

$$cbx^{b-1}\delta(x) = -ay^{a-1}\delta(y) \Rightarrow c = -\frac{ay^{a-1}\delta(y)}{bx^{b-1}\delta(x)} \in k(x,y) \cap K = k.$$

Portanto, $cx^b + y^a \in A$ e assim $\overline{D}(cx^b + y^a) = 0$. Note que se $a > 1$ ou $b > 1$ segue que $\overline{D}(x) \in yA$ e $\overline{D}(y) \in xA$. Pela propriedade P4, ou $\overline{D}(x) = 0$ ou $\overline{D}(y) = 0$, uma contradição. Assim, ou $a = 1$ ou $b = 1$ e nossa afirmação fica provada.

Voltemos agora a prova do teorema. Suponha que $\overline{f} = d(y + cx^b)^e$, e defina um automorfismo triangular $\alpha = (x, y - cx^b)$, onde $\alpha(f) = f(x, y - cx^b) = p(x) + q(y - cx^b) + x(y - cx^b)F(x, y - cx^b)$. Assim, seja $D' = \alpha D \alpha^{-1}$. Note que D' é localmente nilpotente e o seu núcleo contém $\alpha(f)$, visto que $D'(\alpha(f)) = (\alpha D \alpha^{-1})(\alpha(f)) = \alpha(D(f)) = \alpha(0) = 0$, onde $\alpha(f) \in (x, y)$. Uma observação importante é que $deg_x \alpha(f) < deg_x f$, ao passo que, $deg_y \alpha(f) = deg_y f$. Da mesma forma se considerarmos $\overline{f} = d(x + cy^a)^e$, tomando $D' = \beta D \beta^{-1}$ com $\beta = (x - cy^a, y)$. Neste caso, $deg_y \beta(f) < deg_y f$ e $deg_x \alpha(f) = deg_x f$.

Agora, se $D'(x) \neq 0$ e $D'(y) \neq 0$, usamos o mesmo argumento anterior, agora aplicado na derivação D' e o polinômio $\alpha(f)$, a fim de reduzir o grau dos elementos do núcleo das derivações obtidas. Seguindo nesse processo o grau não pode continuar reduzindo indefinidamente, logo em algum momento do processo obteremos um automorfismo tame γ tal que $\gamma D \gamma^{-1}(x) = 0$ ou $\gamma D \gamma^{-1}(y) = 0$. Aplicando a transposição (y, x) em último caso, assumimos que γ é um automorfismo tame tal que $\gamma D \gamma^{-1}(x) = 0$.

Assim, segue da propriedade P3 que $\gamma D \gamma^{-1} \in DLN_{k[x]}(A) = k[x].\partial_y$, ou seja, existe $h(x) \in k[x]$, tal que $\gamma D \gamma^{-1} = h(x)\partial_y$, ficando provado o nosso teorema.

■

Agora, para $f \in k[x, y]$, considere a derivação $\Delta_f = f_x \partial_y - f_y \partial_x$.

Corolário 3.3. *Seja $D \in Der_k(k[x, y])$. Então $D \in DLN(k[x, y])$ se, e somente se, D é da forma $D = \Delta_f$, onde $f \in k[v]$ para alguma variável v de $k[x, y]$.*

Demonstração: Assuma que D é localmente nilpotente. Se $D = 0$, então tome $D = \Delta_0$. Se $D \neq 0$, então, pelo teorema de Rentschler, existe $g(x) \in k[x]$ e um automorfismo *tame* $\alpha \in GA_2(k)$ tal que $\alpha D \alpha^{-1} = g(x)\partial_y$. Tomando α de tal modo que $\alpha(x) = v$ e $\alpha(y) = u$, com (u, v) um novo sistema de variáveis, e sendo $k[x, y] = k[v, u]$, segue o isomorfismo ψ_α entre $Der_k(k[x, y])$ e $Der_k(k[v, u])$ de módulos induzido por α, onde

$$\psi_\alpha(f(x,y)\frac{\partial}{\partial_x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial_y}) = g(u,v)\frac{\partial}{\partial_u} + f(u,v)\frac{\partial}{\partial_v}.$$

Em particular, usando a igualdade obtida no teorema de Rentschler,

$$\overline{D} = \psi_\alpha(\alpha D\alpha^{-1}) = \psi_\alpha(g(x)\partial_y) = g(v)\partial_u.$$

Por abuso de notação, poremos $\overline{D} = D$.

Sendo assim, uma vez que (u, v) é um automorfismo de $k[x, y]$ segue que o determinante da sua matriz jacobiana é invertível, ou seja, existe $c \in k^*$ tal que

$$det\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right) = c.$$

Vamos assumir que $c = -1$, caso contrário, substitua v por $-c^{-1}v$. Assim, segue que

$$\Delta_v(v) = v_x v_y - v_y v_x = 0$$

$$\Delta_v(u) = v_x u_y - v_y u_x = 1.$$

Agora, tome $f(v) \in k[v]$ tal que $f'(v) = g(v)$. No sistema de variáveis $(u, v) = (\alpha(y), \alpha(x))$, podemos escrever, para um dado $p \in k[u, v]$,

$$\Delta_p = p_v\partial_u - p_u\partial_v.$$

Em particular $\Delta_v = \partial_u$. Por outro lado, como $f = f(v)$, temos:

$$\Delta_f = f_v\partial_u - f_u\partial_v = f'(v)\partial_u = f'(v)\Delta_v.$$

Dessa forma temos que $\Delta_f(u) = f'(v)\Delta_v(u) = f'(v)1 = g(v) = D(u)$ e $\Delta_f(v) = f'(v)\Delta_v(v) = 0 = D(v)$. Portanto $D = \Delta_f$.

Reciprocamente, se $f \in k[v]$ para alguma variável v, então existe, como acima, $u \in k[x, y]$ tal que $k[u, v] = k[x, y]$, e $\Delta_v(v) = 0$, $\Delta_v(u) = 1$, ou seja, $\Delta_v = \partial_u$. Uma vez que $\Delta_f = f'(v)\Delta_v = f'(v)\partial_u$ e $f'(v) \in ker(\Delta_v)$ segue do resultado 2.11 que Δ_f é localmente nilpotente.

■

Observação 3.4. Cada automorfismo (mudanças de coordenadas) de A define um par de derivações localmente nilpotentes de A, ou seja, as derivadas parciais com relação as novas funções coordenadas.

Como principal aplicação do teorema de Rentschler, que já provamos, daremos uma demonstração do seguinte resultado clássico:

Teorema de Jung. O grupo $GA_2(k)$ de automorfismos algébricos de $k[x,y]$ é gerado por seus subgrupos triangular e linear ($BA_2(k)$ e $GL_2(k)$), respectivamente).

Demonstração: Se $(F,G) \in GA_2(k)$, então $\partial_F \in DLN(A)$ e $ker(\partial_F) = k[G]$. Essa primeira afirmação será assumida, onde a sua justificativa encontra-se em Rentschler [R]. Pelo teorema de Rentschler, demonstrado anteriormente, existe um automorfismo *tame* $\varphi \in GA_2(k)$ tal que $\varphi^{-1}\partial_F\varphi = f(x)\partial_y$ para algum $f \in k[x]$. Além disso, uma vez que $\partial_F(F) = 1$ o ideal gerado pela imagem de ∂_F é $(1) = A$. Portanto, $A = fA$, o que implica que $f \in A^* = k^*$.

Note que $ker(\partial_y) = k[x]$. Por outro lado, $(\varphi^{-1}\partial_F\varphi)(\varphi^{-1}(G)) = f(x)\partial_y(\varphi^{-1}(G))$, ou seja, $0 = f(x)\partial_y(\varphi^{-1}(G))$. Logo, $\varphi^{-1}(G) \in ker[\partial_y]$ o que implica que $ker[\partial_y] = k[\varphi^{-1}(G)]$ e portanto, $k[x] = k[\varphi^{-1}(G)]$. Assim, $\varphi^{-1}(G) = ax + b$, o que implica que $G = a\varphi(x) + b$ para $a, b \in k$ e $a \neq 0$. Além disso, $f(x)\partial_y(\varphi^{-1}(F)) = \varphi^{-1}(\partial_F(F)) = \varphi^{-1}(1) = 1$ que implica que $\partial_y(\varphi^{-1}(F)) = f^{-1}$. Integrando a igualdade segue que $\varphi^{-1}(F) = f^{-1}y + g(x)$, ou ainda, $F = f^{-1}\varphi(y) + g(\varphi(x))$. Assim, nós temos que $(F,G) = (f^{-1}\varphi(y) + g(\varphi(x)), a\varphi(x) + b)$, que é a composição de φ com um automorfismo triangular. Logo (F,G) é *tame*.

■

3.3 Alguns exemplos

Nesta parte iremos apresentar dois exemplos ilustrando algumas relações e "patologias" envolvendo derivações localmente nilpotentes e outros tópicos importantes.

Exemplo 3.5. Tome $R = \mathbb{C}[t^2, t^3] \subset \mathbb{C}[t]$ e defina a R-derivação D sobre $R[x,y]$ por

$$D(x) = t^2 \qquad e \qquad D(y) = t^3.$$

Então é claro que $D \in DLN_R(R[x,y])$, mas o núcleo de D não é finitamente gerado sobre $\mathbb{C}$. Para vermos isso, note que D é a restrição de uma derivação de $\mathbb{C}[t,x,y]$ cujo núcleo é $\mathbb{C}[t,f]$, onde $f = y - tx$. Portanto,

$$ker(D) = \mathbb{C}[t,f] \cap R[x,y] = R[ft^2, f^2t^2, ...],$$

que não é finitamente gerado.

O seguinte exemplo encontra-se na referência [BD] e resolvemos colocá-lo a nível de curiosidade. No entanto, não entramos em detalhes, visto que abrange uma teoria que não foi mencionada no nosso trabalho.

Exemplo 3.6. Seja $R = \mathbb{C}[x,y,z]_{(x,y,z)}/(F)$, com $F = y^2z - x^3 + xz^2$, e onde $\mathbb{C}[x,y,z]_{(x,y,z)}$ denota localização no ideal maximal (x,y,z). Note que F define uma curva cúbica elíptica (não-singular) no plano projetivo. Os autores deste exemplo mostram que existe $D \in DLN_R(R[x,y])$ cujo núcleo é isomorfo à álgebra de Rees simbólica

$$\bigoplus_{n \geq 0} P^{(n)} t^n$$

de algum ideal primo $P \subset R$ de altura 1 para o qual nenhuma potência simbólica $P^{(n)}$ $(n \geq 1)$ é principal. Em particular, $ker(D)$ não é finitamente gerado sobre R.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Alguns resultados básicos em Geometria Algébrica

Considerando o espaço afim $\mathbb{A}^n$ sobre um corpo k algebricamente fechado de característica zero, vamos tomar uma família de polinômios $S \subset k[t_1, t_2, ..., t_n]$. O conjunto dos pontos de $\mathbb{A}^n$ que anulam todos os polinômios em S,

$$X = Z(S) = \{p \in \mathbb{A}^n; f(p) = 0, \ \forall f \in S\},$$

é chamado *conjunto algébrico afim.*

Dado um conjunto algébrico afim $X \subset \mathbb{A}^n$, podemos definir o seu *anel de coordenadas* como sendo o anel quociente

$$A(X) = \frac{k[t_1, t_2, ..., t_n]}{\mathcal{I}(X)},$$

onde $\mathcal{I}(X)$ é o ideal formado por todos os polinômios que se anulam em X, ou seja

$$\mathcal{I}(X) = \{f(t_1, t_2, ..., t_n) \in k[t_1, t_2, ..., t_n]; f(p) = 0, \ \forall \ p \in X\}.$$

Consideramos a *topologia de Zariski* em $\mathbb{A}^n$, cujos fechados são os conjuntos algébricos. Chamamos ainda de *variedade algébrica afim* os fechados e irredutíveis na topologia de Zariski. Uma *variedade quase-afim* é qualquer subconjunto aberto de uma variedade afim. Observe ainda as seguintes definições.

Definição 4.1. Seja X uma variedade quase-afim em $\mathbb{A}^n$. Dizemos que $f : X \to k$ é *regular em* $p \in X$ se existe uma vizinhança $p \in U \subset X$ e polinômios $g, h \in k[t_1, ..., t_n]$ tal que h é não nula em U e podemos escrever $f = \dfrac{g}{h}$ em U. Denotamos por $\mathcal{O}(Y)$ o conjuntos de todas as funções regulares em X.

Definição 4.2. Sejam X, Y duas variedades. Um *morfismo* $\phi : X \to Y$ é uma aplicação contínua, onde dado o conjunto aberto $V \subset Y$ e uma função regular $f : V \to k$ temos que $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to k$ é regular.

Definição 4.3. Se p é um ponto de X, podemos definir o *anel local de p em X*, denotado por $\mathcal{O}_p$, como sendo o anel dos germes das funções regulares sobre X próximo a p. Ou seja, um elemento de $\mathcal{O}_p$ é um par $< U, f >$, onde U é um subconjunto aberto de X contendo p e f é uma função regular sobre U.

A partir dessas definições apresentamos os dois resultados que seguem.

Proposição 4.4. *Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é uma variedade afim, então $\mathcal{O}(X) \cong A(X)$.*

Demonstração: Observe que podemos definir um homomorfismo injetor $\alpha : A(X) \to \mathcal{O}(X)$. De fato, vejamos que cada polinômio $f \in k[t_1, t_2, ..., t_n]$ define uma função regular sobre $\mathbb{A}^n$ e, portanto, sobre X. Sendo assim, dado o homomorfismo $A \to \mathcal{O}(X)$, ele tem como núcleo $\mathcal{I}(X)$ e assim temos que α é injetora. Por outro lado, sendo o ideal maximal de $A(X)$ correspondente a p o subconjunto

$$m_p = \{f \in A(X); f(p) = 0\}$$

temos a seguinte aplicação natural $\alpha_p : A(X)_{m_p} \to \mathcal{O}_p$ dada por $\alpha_p(\frac{g}{h}) = \frac{\alpha(g)}{h}$, que é injetiva pois α é injetiva, e sobrejetora por definição de função regular em p. Sendo assim $A(X)_{m_p} \cong \mathcal{O}_p$. Agora note que $\mathcal{O}(X) \subset \bigcap \mathcal{O}_p$. Portanto,

$$A(X) \subset \mathcal{O}(X) \subset \bigcap \mathcal{O}_p \subset \bigcap_{p \in X} A(Y)_{m_p} = A(X),$$

onde a última igualdade segue da proposição 4.6. ∎

Proposição 4.5. *Sejam X e Y variedades afins. Então, existe uma aplicação bijetora natural entre os conjuntos*

$$\alpha : Hom(X, Y) \rightleftarrows Hom(A(Y), \mathcal{O}(X)),$$

onde o Hom da esquerda são morfismos de variedades e o Hom da direita são homomorfismos de k-álgebras.

Demonstração: A prova desse teorema se encontra no livro do Hartshorne [H] na seção 1.3. ∎

Proposição 4.6. *Seja A um domínio de integridade. Então vale a seguinte igualdade*

$$A = \bigcap_{m \in Max(A)} A_m.$$

Demonstração: Considere a aplicação natural $\phi : A \to A_m$, onde $\phi(a) = \frac{a}{1}$. Note que ϕ é injetiva, pois se $\phi(a) = \frac{0}{1}$, segue que existe $u \notin m$ tal que $au = 0$ e sendo A um domínio temos que $a = 0$. Logo sendo a aplicação uma injetividade podemos considerar como sendo uma inclusão $A \subset m$, e sendo essa inclusão verdadeira para todo maximal, segue que $A \subset \bigcap_{m \in Max(A)} A_m$. Agora, considere $\frac{a}{b} \in K(A)$, corpo de frações de A, e tome $I = \{x \in A; x\frac{a}{b} \in A\}$. Observe que se $\frac{a}{b} \in A_P$, com P um primo qualquer, segue que I não está contido em P.

Em particular, $\frac{a}{b} \in A_m \Rightarrow I$ não está contido em m. Portanto $1 \in I$ e assim $\frac{a}{b} \in A$, o que prova a nossa igualdade. ∎

4.2 Ações de grupos

Nessa seção vamos dar a definição de ações de grupos e logo em seguida relacioná-la com a geometria algébrica.

Iniciamos com duas definições envolvendo ações de grupos.

Definição 4.7. Seja G um grupo qualquer e S um conjunto não vazio. Uma *ação de G sobre S* (à esquerda) é uma função $* : G \times S \to S$, onde $*(a, s) = a * s$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $e * s = s$;

2. $a * (b * s) = (ab) * s$.

onde, $a, b \in G, s \in S$ e e é o elemento neutro de G.

Definição 4.8. Dizemos que uma ação é *fiel* se dados dois elementos distintos $g, h \in G$, existe $s \in S$, tal que $g * s \neq h * s$. Por outro lado, dizemos que uma ação é *livre*, se dados $g, h \in G$ tais que existe $s \in S$ com $g * s = h * s$, tem-se $g = h$.

Observação 4.9. Seja X uma k-variedade afim e G um grupo algébrico (isto é, G é uma variedade algébrica munida de uma estrutura de grupo). Uma ação algébrica de G sobre X é um morfismo $\alpha : G \times X \to X$ que satisfaz:

1. $\alpha(0, x) = x \ \forall \ x \in X$;

2. $\alpha(t + s, x) = \alpha(t, \alpha(s, x))$.

Ou, equivalentemente, uma ação é um morfismo $\alpha : G \times X \to X$ com a propriedade de que induz um homomorfismo de grupos $\phi : k \to Aut_k(X), \ t \mapsto \alpha(t,\_\,)$.

Demonstração: Observe que sendo $\alpha : G \times X \to X$ um morfismo satisfazendo as propriedades acima, segue que $\phi(a + b) = \alpha(a + b,\_\,) = \alpha(a + b, x)$ com $x \in X$. Assim, $\phi(a+b) = \alpha(a, \alpha(b, x)) = \alpha(a, \phi(b)) = \phi(a) \circ \phi(b)$. Por outro lado, se ϕ é um homomorfismo de grupos note que de fato α satisfaz as propriedades de ação. Primeiramente, $\alpha(0, x) = \phi(0) = Id_x = x$ e além disso, $\alpha(a + b, x) = \phi(a + b) = \phi(a) \circ \phi(b) = \alpha(a, \phi(b)) = \alpha(a, \alpha(b, x))$. ■

Suponha agora que G seja um k-grupo algébrico e que G age algebricamente sobre a k-variedade afim X. Neste caso, X será chamada de uma *G-variedade* e o anel de invariantes para a ação é dado por

$$A^G = \{f \in A; \alpha(g, f) = f \ \textit{para todo} \ g \in G\}.$$

Um elemento $f \in A^G$ é chamado de *função invariante* para a ação. Por outro lado, $f \in A$ é chamado *semi-invariante* para a ação se existe uma função característica $\mathcal{X} : G \to k^*$ tal que $g * f = \mathcal{X}(g)f$ para todo $g \in G$. Neste caso, $\mathcal{X}$ é o *peso* do semi-invariante f. O conjunto dos pontos fixos para a ação é

$$X^G = \{x \in X; \alpha(g, x) = x \ \textit{para todo} \ g \in G\}.$$

Dizemos que a ação é *livre* quando o conjunto X^G for vazio. Para o nosso estudo, o interesse reside nas $\mathbb{G}_a$-ações, onde $\mathbb{G}_a$ denota o grupo aditivo $(k, +)$.

Referências Bibliográficas

[AM] ATIYAH, M. F., MACDONALD, I. G., *Introduction to Commutative Algebra.* Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusets, 1969.

[BD] BHATWADEKAR, S.M. e DUTTA A.K., *Kernel of Locally Nilpotent R-Derivations of $R[X, Y]$.* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 3303 - 3319.

[D] DAIGLE, D., *Locally nilpotent derivations.* Lecture notes for the "September School"of Algebraic Geometry Lukecin, Poland, September 2003

[F] FREUDENBURG, G. *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations.* Springer, USA, 2006.

[H] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry.* Springer. Univerty of California. Berkeley, California, 94720, USA.

[MN] MIRANDA NETO, C. B., *Notas de Aula de Álgebra Comutativa.* Paraíba, 2010.

[R] RENTSCHLER, R., Opérations du groupe additif sur le plan affine, C.R. Acad. Sc. Paris 267 (1968), 384 - 387.

[V] VELOSO, M. O., *Derivações Localmente Nilpotentes de certas K-álgebras Finitamente Geradas.* Tese de doutorado da UNICAMP, 2009.