Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Multiplicidade de soluções para sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

por

Alciônio Saldanha de Oliveira

Campina Grande - PB
Abril/2014

Multiplicidade de soluções para sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

por

Alciônio Saldanha de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Abril/2014

O48m Oliveira, Alciônio Saldanha de.
Multiplicidade de soluções para sistemas do tipo Schrödinger-Poisson / Alciônio Saldanha de Oliveira.— Campina Grande, 2014.
81f.
Orientador: Marco Aurelio Soares Souto
Tese (Doutorado) – UFPB-UFCG
1. Matemática. 2. Métodos variacionais. 3. Crescimento crítico. 4. Concentração de compacidade.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado

Prof. Dr. Minbo Yang

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Abril/2014

Agradecimentos

Aos meus pais Agenor e Vanda pelo amor, formação moral e o esforço para me proporcionar a melhor educação possível.

À minha esposa Miriam, meus filhos Adriano e Angelo, pelo amor, força, compreensão e paciência durante esta jornada.

Aos amigos do doutorado. Em especial ao Lindomberg e ao Marcelo pelo companheirismo e generosidade nessa longa jornada pelo reino das $EDP's$.

A todos os professores que contribuíram de forma direta e indireta para nossa formação. Em especial ao professores Antônio Brandão, Claudianor, Everaldo, Henrique, João Marcos, Marco Aurélio e Lizandro Challapa.

Ao professor Claudianor, por todo o incentivo, os ótimos cursos proferidos e, principalmente pelo exemplo dedicação à profissão, nos inspirando a dar o nosso melhor como profissionais.

A todos os professores e funcionários do DME (UAMAT), pelo apoio e torcida recebidos.

Aos professores Claudianor, Marcelo Furtado, Francisco Júlio e Minbo Yang, membros da banca examinadora pela gentileza de participar desse trabalho, julgando e contribuindo para o seu aprimoramento.

Por fim um agradecimento especial ao meu orientador, professor Marco Aurélio, pela confiança, amizade e infinita paciência com minhas dificuldades. Seus ensinamentos nos cursos proferidos, no trabalho de orientação do trabalho final foram cruciais para o sucesso da nossa jornada. A orientação de um aluno de doutorado, mais que um dever de ofício, é um ato de doação.

“Só sabemos com exatidão quando sabemos pouco; à medida que vamos adquirindo conhecimento, instala-se a dúvida.”

Johann Goethe

Dedicatória

Aos meus pais Agenor e Vanda, aos meus irmãos, à minha esposa Miriam, aos meus filhos Adriano e Angelo.

Notação e terminologia

Neste texto usaremos as seguintes notações:

$B_r(x)$: Bola aberta de centro x e raio r.

$\text{supp}u$: Suporte da função u.

$L^p(\Omega)$: Espaço da funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$.

$L^p_{loc}(\Omega)$: Espaço da funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_K |u|^p dx < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, $1 \leq p < \infty$.

$H^1(\mathbb{R}^3)$: Espaço de Sobolev das funções em $L^2(\mathbb{R}^3)$ cujas derivadas fracas de primeira ordem estão em $L^2(\mathbb{R}^3)$.

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$: Espaço das funções $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tais que $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

$C_0^\infty(\Omega)$: Espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\text{supp}u \subset\subset \Omega$.

H' : Dual topológico do espaço vetorial normado H.

$o_n(1)$: Sequência de números reais convergindo para 0 quando $n \to \infty$.

$(PS)_c$: Sequência Palais-Smale no nível c.

$(\cdot,\cdot)$: Produto escalar em um espaço de Hilbert H.

$|\cdot|_{p,\Omega}$: Norma do espaço $L^p(\Omega)$. Caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, usaremos a notação $|\cdot|_p$.

$\|\cdot\|$: Norma usual do espaço $H^1(\mathbb{R}^3)$.

$\|\cdot\|_{1,2}$: Norma do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

$X \hookrightarrow Y$: Imersão contínua de X em Y.

$X \underset{\text{comp}}{\hookrightarrow} Y$: Imersão compacta de X em Y.

$\rightharpoonup, \to$: Convergências fraca e forte, respectivamente.

q. t. p. : Quase todo ponto, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula.

$|A|$: Medida de Lebesgue do conjunto A.

$C, C_1, \cdots$: Constantes oriundas das imersões contínuas de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$, $s \in [2, 2^*]$.

Resumo

Neste trabalho, usaremos o Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland, o Princípio de Concentração de Compacidade, o Método de Brezis & Nirenberga, o Método de Penalização e propriedades envolvendo Variedades de Nehari para obter resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de sistemas elípticos (também conhecidos como sistemas do tipo Schrödinger-Poisson)

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u = r(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde $r : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que possui crescimento crítico.

Palavras-chave: Métodos Variacionais; Crescimento Crítico; Concentração de Compacidade.

Abstract

In this work, we will use the Mountain Pass Theorem, Ekeland's Variational Principle, the Concentration-Compactness Principle, the Brezis & Nirenberg Method, Penalization Method and some properties involving Nehari manifolds to obtain existence and multiplicity of solutions for the following class of elliptic systems.

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u = r(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $r : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function that has critical growth.

Keywords: Variational Methods; Critical Growth; Concentration-Compactness.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentaremos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o sistema de equações não-lineares

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \phi u = r(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

conhecido na literatura como sistema do tipo Schrödinger-Poisson.

Mais especificamente estudaremos os sistemas:

$$(SP) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u + \phi u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)u^5, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u > 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

e

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u + \phi u = \beta u^q + u^5, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u > 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

onde f, g, V e Z são funções contínuas que satisfazem hipóteses que serão detalhadas nos capítulos subsequentes.

Sistemas do tipo $(*)$ são utilizados em vários campos da física tais como Mecânica Quântica e teoria de semicondutores . Eles são obtidos quando olhamos para a existência de ondas estacionárias para a equação não-linear de Schrödinger, interagindo com um campo eletrostático ϕ.

Para mais detalhes sobre os aspectos físicos de $(*)$ citamos os artigos [41], [42] e suas referências.

Como veremos no Lema 1.2.1, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, existe uma única $\phi := \phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, solução da equação de Poisson

$$-\Delta\phi = u^2, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Podemos então, via substituição, transformar o problema $(*)$ na equação de Schrödinger

$$(**) \qquad -\Delta u + V(x)u + \phi_u u = r(x,u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

O termo ϕ_u, também conhecido na literatura como termo não-local, possui diversas propriedades que serão utilizadas ao longo de todo trabalho e cuja demonstração será apresentada no Apêndice A.

Uma solução fraca para a equação $(**)$ é, por definição, uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla v + V(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uvdx = \int_{\mathbb{R}^3} r(x,u)vdx, \quad \text{para toda} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad (1)$$

Associado à equação $(**)$ temos o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} R(x,u)dx$$

onde $R(x,s) = \int_0^s r(x,t)dx$.

Podemos mostrar que $(u,\phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução de $(*)$ se e somente se $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é ponto crítico do funcional I e $\phi = \phi_u$.

Dizemos $(u,\phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução *ground state* do problema $(*)$ se, e somente se, u é uma solução *ground state* do problema de Schrödinger associado ao funcional I. Lembramos que $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é chamada de solução *ground state* da equação $(**)$ quando u é solução de $(**)$ e minimiza o funcional energia I dentre todas as possíveis soluções não triviais.

O problema $(*)$ vem sendo estudado por muitos autores, explorando as questões de existência e não existência de soluções, multiplicidade de soluções, soluções do tipo ground state, radiais e não radiais, concentração de soluções dentre outras questões.

O primeiro resultado sobre a existência de solução ground state para o problema $(*)$ foi, ao nosso conhecimento, obtido por Azzollini & Pomponio em [2] quando $p(x,u) = |u|^{p-1}u$, $2 < p < 5$ e $V(x)$ uma constante positiva. Zhao & Zhao em [26], assumindo um elenco de hipóteses sobre as funções coeficientes f e g, provaram a existência de solução positiva para o sistema $(*)$ quando $3 \leq p < 6$ e, de solução radial, no caso em que $2 < p < 4$.

Resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas também foram estudados por Gaetano em [36] para o sistema $(*)$, nos casos em que $p(x, u) = |u|^{p-2}u$, $1 < p < 2^* - 1$ e $\mathbb{R}^N$ é substituído po um domínio limitado Ω. A multiplicidade de soluções foi obtida utilizando resultados envolvendo categoria de Lusternik-Schnirelman.

Em [6] Cao & Noussair, explorando o número de pontos de máximo da função coeficiente Q, provaram a existência e multiplicidade de soluções positivas e nodais para a equação $-\Delta u + \lambda u = Q(x)|u|^{p-2}u, \quad 2 < p < 2^* - 1$. Em [40] T. F. Wu, também explorando a forma do gráfico da função coeficiente provou a multiplicidade de soluções positivas para uma equação semilinear com crescimento subcrítico. Em [21, 20] Lin, usando técnicas semelhantes provou a existência e multiplicidade de soluções positivas para uma equação e um sistema (com não-linearidade crítica) respectivamente.

Em [16] Cerami & Vaira provaram que o sistema de Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u + u + K(x)\phi u = a(x)|u|^{p-2}u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = K(x)u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

possui uma solução positiva de energia mínima, quando $3 < p < 5$ e as funções K e a, satisfazem as hipóteses $\quad 0 \leq K(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty > 0$, $\alpha(x) := a(x) - a_\infty \in L^{\frac{6}{5-p}}(\mathbb{R}^3)$ e $\alpha(x) > 0$ em um conjunto de medida positiva.

Alves, Souto & Soares em [5], usando o Teorema do Passo da Montanha, conseguiram soluções do tipo ground state para o sistema $(*)$ quando $p(x, u) = f(u)$, V periódico ou assintoticamente periódico e, f satisfazendo uma condição mais fraca que a de Ambrosetti-Rabinowitz.

Em [43] Ding & Tanaka, inspirados por [27] e [12], demonstraram, para λ suficientemente grande, a existência e multiplicidade de soluções positivas do tipo multi-bump para a equação de Schrödinger

$$-\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = u^q, \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{2}$$

onde $1 < q < 2^*$, V e Z funções contínuas e a função positiva V tem a propriedade que $\Omega = \text{int}V^{-1}(0)$ é um domínio aberto composto de k componente conexas $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$.

Em [4], Alves, Filho e Souto completaram o estudo feito em [43] no sentido que a não-linearidade tem um crescimento crítico da forma $p(x,u) = \beta u^p + u^{2^*-1}$.

Mais recentemente outro autores estudaram a existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump. Citamos em particular os trabalhos de Li, Peng e Weng [14] e Wang, Xu, Zhang e Chen [25]. Nesses dois trabalhos a não-linearidade é não-autônoma mais ainda com crescimento subcrítico.

Uma pertubação do termo crítico nos problemas (SP) e (P_λ) se faz necessária pois D'Aprile & Mugnai em [37] provaram que quando $p(x,u) = u^5$ e $V(x) \equiv V_0 > 0$ o sistema $(*)$ não possui solução diferente da trivial. Azzollini & Pomponio em [2] provaram, utilizando uma identidade do tipo Pohozaev, o mesmo resultado para o caso em que o potencial V é não constante.

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1, inspirados nas ideias de Lin [20], estudamos os efeitos do coeficiente $f(x)$ da não linearidade crítica no sistema de Schrödinger-Poisson, (SP), no que diz respeito a existência e multiplicidade de soluções. As funções coeficientes f e g satisfazem um conjunto de hipóteses que serão detalhadas posteriormente. Dois teoremas são apresentados nesse capítulo.

No primeiro teorema provamos que, para cada $\lambda > 0$ fixado, o sistema (SP) possui uma solução positiva de energia mínima. No segundo teorema provamos que existe um número $\Lambda > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$, o sistema (SP) possui pelo menos k soluções distintas e positivas, onde k é o número de máximo relativos isolados da função coeficiente f.

Por conta da perda de compacidade nas imersões de Sobolev usamos o método de Brezis e Nirenberg para determinar os níveis de energia do funcional associado ao problema (SP) para os quais vale a condição de Palais-Smale. A variedade de Nehari do funcional energia associado ao (SP) também desempenha um papel importante nesse processo.

Para a obtenção resultado de multiplicidade de soluções nós introduzimos uma função baricentro $Q : H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ e a partir dela, definimos k vizinhanças na variedade de Nehari associada ao funcional energia. Em seguida, a partir de cada sequência minimizante sobre essas vizinhanças nós construímos, via Princípio Variacional de Ekeland, sequências de Palais-Smale em níveis de energia para os quais vale a condição de Palais-Smale para o funcional energia associado, demonstrando portanto, a existência de pelo menos k soluções positivas.

No capítulo 2, inspirados em Del Pino & Felmer [27] e, explorando a geometria do potencial V, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o sistema (P_λ). Esses resultados são conseguidos sob as seguintes hipóteses:
- $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$ e $Z \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
- Existem constantes positivas M_0 e M_1 tais que

$$V(x) + Z(x) \geq M_0 \quad \text{e} \quad |Z(x)| \leq M_1 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

- $\text{int}V^{-1}(0) := \Omega$ é um domínio aberto com fronteira suave composto de k componentes conexas $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ onde

$$\text{dist}(\Omega_i, \Omega_j) > 0, \quad i \neq j.$$

Nosso resultado de multiplicidade de soluções não inclui soluções do tipo multi-bumps como no caso da equação de Schrödinger. Aqui o caráter não local dificulta a construção de soluções com mais de um ponto de máximo local.

Mais recentemente em [44] Jiang & Zhou estudaram um problema semelhante no caso em que a não linearidade é do tipo potência homogênea subcrítica.

O método consiste em associar um problema auxiliar ao problema original, provar a existência de soluções para o problema auxiliar e, através de uma estimativa na norma L^∞ concluir que essas soluções são, na verdade, soluções do problema original. Nesse processo foi importante os resultados apresentados no Lema **??**, que é uma adaptação, para o problema (A_λ) da Proposição 2.2 em [24].

No Apêndice A apresentamos a demonstração das propriedades do termo não local ϕ_u relacionadas no Lema 1.2.1 e finalmente, no Apêndice B, destacamos os resultados gerais que foram utilizados ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Existência e Multiplicidade de Soluções positivas para um sistema do tipo Schrödinger-Poisson com crescimento crítico

1.1 Introdução

Neste Capítulo, vamos estabelecer resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o sistema

$$(SP) \qquad \begin{cases} .0, -\Delta u + u + \phi u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)u^5, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u > 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$, $4 < p < 6$ e $f; g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e positivas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(H_1) $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0$,

(H_2) Existem k pontos $a^1, a^2, ..., a^k \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$f(a^j) = \max_{x\in\mathbb{R}^3} f(x) \equiv 1, \quad j \in \{1, 2, ..., k\}$$

e para algum $\sigma > 3$,

$$f(x) - f(a^j) = O(|x - a^j|^\sigma) \quad \text{quando} \quad x \to a^j,$$

(H_3) $\limsup_{|x|\to\infty} f(x) < 1.$

Sistemas do tipo (SP) são conhecidos na literatura como sistemas de Schrödinger-Poisson. Esses sistemas foram primeiro estudados por Benci e Fortunato [41] e são modelos físicos na Mecânica Quântica e na teoria de semicondutores. A primeira equação de (SP) é do tipo Schrödinger não-linear estacionária e a segunda equação é do tipo Poisson.

A multiplicidade de soluções para (SP) está relacionada ao número de máximos isolados que a função coeficiente f possui e os resultados serão obtidos via métodos variacionais.

Nossos principais resultados neste capítulos são os seguintes teoremas:

Teorema 1.1.1 *Suponha que as funções f e g satisfazem (H_1), (H_2) e (H_3) para $k = 1$. Então para cada $\lambda > 0$, o problema (SP) possui uma solução positiva de energia mínima.*

Teorema 1.1.2 *Suponha que as funções f e g satisfazem (H_1) - (H_3). Então existe um número $\Lambda > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \Lambda$, o problema (SP) possui ao menos k soluções distintas e positivas.*

1.2 Resultados preliminares

O sistema (SP) pode ser transformado numa equação de Schrödinger com um termo não local. De fato, usando o Teorema de Lax-Milgran, dado $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe uma única $\phi = \phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ solução da equação

$$-\Delta\phi = u^2, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Esta solução, ϕ_u, define uma aplicação $\Phi : H^1(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ dada por $\Phi(u) = \phi_u$ que goza das propriedades citadas no lema abaixo e cuja demonstração será apresentada no Apêndice A.

Lema 1.2.1

(i) Existe $C > 0$ tal que $\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|^2$ e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq C||u||^4 \quad \textit{para todo} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^3);$$

(ii) $\phi_u \geq 0$, *para todo* $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$;

(iii) $\phi_{tu} = t^2\phi_u$, *para todo* $t > 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$;

(iv) *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *in* $H^1(\mathbb{R}^3)$, *então* $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ *in* $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx.$$

(v) *se* $u_n \rightharpoonup u$ *in* $H^1(\mathbb{R}^3)$, *então*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n-u)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1), \\ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1), \\ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u u_n dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1). \end{aligned}$$

(vi) $\phi_{|u|} = \phi_u$.

Com as propriedades do Lema 1.2.1 o sistema (SP) pode ser transformado na equação de Schrödinger abaixo:

$$-\Delta u + u + \phi_u u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)u^5, u \in H^1(\mathbb{R}^3). \tag{1.1}$$

Associado a equação (1.1) temos o funcional energia $I_\lambda : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)(u)^6 dx.$$

É bem conhecido que o funcional $I_\lambda \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$, com derivada dada por

$$I'_\lambda(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^{p-1} v dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^5 v dx$$

Assim, $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução fraca do sistema (SP) se, e somente se, $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é ponto crítico do funcional I_λ e $\phi = \phi_u$.

Observe que, se u é ponto crítico do funcional I_λ então

$$0 = I'_\lambda(u)(u^-) = \|u^-\| + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u (u^-)^2 dx \geq \|u^-\|^2,$$

implicando que $u^- = 0$. Portanto pontos críticos de I_λ são soluções positivas de (SP).

A parte do funcional I_λ que contém o termo ϕ_u é homogêneo de grau quatro, isto é:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{tu}(tu)^2 dx = t^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx, \text{ para todo } \quad t > 0 \quad \text{e} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Definição 1.2.2 *Seja X um espaço de Hilbert e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. A variedade de Nehari associada ao funcional I é definida por*

$$\mathcal{N} := \{u \in X \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\}.$$

Um ponto crítico $u \neq 0$ de I é dito uma solução ground state ou solução de energia mínima se

$$I(u) = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u).$$

No que segue, como os pontos de máximos $a^1, \cdots, a^k$ da função f são distintos, iremos fixar $\rho_0 > 0$ de modo que

$$\overline{B_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset \quad \text{para todo} \quad i,j \in \{1,\cdots,k\} \quad \text{com} \quad i \neq j.$$

Para estudar as propriedades do funcional energia I_λ vamos introduzir inicialmente os funcionais $I_0; I_1 : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definidos como

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^6 dx,$$

e

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx.$$

De agora em diante denotaremos por $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_0$ e $\mathcal{N}_1$ as variedades de Nehari associadas aos funcionais I_λ, I_0 e I_1 respectivamente.

Observação 1.2.3 *$\mathcal{N}_\lambda$ é uma variedade de classe C^1 e de codimensão 1.*

De fato. Considere o funcional $\Psi_\lambda : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definido por $\Psi_\lambda(u) = I'_\lambda(u)u$. Então, para $u \in \mathcal{M}_\lambda$,

$$\begin{aligned}\Psi'_\lambda(u)u &= \Psi'_\lambda(u)u - 4\Psi_\lambda(u)\\ &= -2\|u\|^2 + \lambda(4-p)\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx - 2\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^6 dx < 0.\end{aligned}$$

A desigualdade acima implica que $\mathcal{N}_\lambda = \Psi_\lambda^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ é uma variedade de classe C^1 e de codimensão 1.

Observação 1.2.4 *Existe $r_0 > 0$ tal que*

$$\|u\| > r_0 \quad \textit{para todo} \quad u \in \mathcal{N}_\lambda.$$

Para verificar a observação acima basta ver que se $u \in \mathcal{N}_\lambda$ então

$$\|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u^6 dx.$$

Assim, usando a positividade do termo não-local ϕ_u e as imersões contínuas de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [2, 2^*]$, obtemos

$$1 \leq C_1 \|g\|_\infty \|u\|^{p-2} + C_2 \|u\|^4.$$

Portanto a afirmação segue diretamente da desigualdade acima.

Lema 1.2.5 *O funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}_\lambda$.*

Demonstração. Se $u \in \mathcal{N}_\lambda$ então usando a positividade do termo não-local e o fato que $4 < p < 6$ temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{p} I'_\lambda(u) u \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) \|u\|^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{p}) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + (\frac{1}{p} - \frac{1}{6}) \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u^6 dx \\ &\geq \frac{p-2}{2p} \|u\|^2 > 0, \end{aligned}$$

o que prova o lema. ■

O lema acima é também válido para os funcionais I_0 e I_1 e a demonstração é similar. Portanto podemos definir os números

$$\theta_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u), \quad \theta_0 = \inf_{u \in \mathcal{N}_0} I_0(u) \quad \text{e} \quad \theta_1 = \inf_{u \in \mathcal{N}_1} I_1(u).$$

A estimativa obtida na demonstração do Lema 1.2.5 juntamente com a Observação 1.2.4 garante que $\theta_\lambda > 0$ (valendo o mesmo para θ_0 e θ_1). O lema seguinte mostra que o funcional I_λ satisfaz a geometria do passo da montanha (com resultados semelhantes para os funcionais I_0 e I_1).

Lema 1.2.6 *Suponha (H_1), (H_2) e $4 < p < 6$. Então, fixado $\lambda > 0$, o funcional I_λ verifica as seguintes condições:*

(i) Existem $\rho, d_0 > 0$ tais que

$$I_\lambda(u) \geq d_0, \quad \textit{para} \quad \|u\| = \rho,$$

(ii) Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I_\lambda(e) < 0$.

Demonstração.

(i) Por (H_1) e (H_2) temos que $f(x) \leq 1$ e $g(x) \leq M := \|g\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Usando as imersões contínuas de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$, $s \in [2,6]$ temos:

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^6 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{p}M\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{p}MC_1\|u\|^p - \frac{1}{6}C_2\|u\|^6, \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Escolhendo $\rho > 0$ de modo que $\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{p}MC_1\rho^{p-2} - \frac{1}{6}C_2\rho^4 = \frac{1}{4}$ obtemos da desigualdade acima que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{4}\rho^2 := d_0 > 0 \quad \text{para} \quad \|u\| = \rho.$$

(ii) Fixada $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ e usando as propriedades do termo não-local temos

$$I_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^6 dx.$$

Visto que $4 < p < 6$, concluímos que $\lim_{t\to\infty} I_\lambda(tu) = -\infty$. Portanto, para $t > 0$ suficientemente grande, $e = tu$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I_\lambda(e) < 0$. ■

Lema 1.2.7 *Seja $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda$ satisfazendo $I_\lambda(u_0) = \min_{u\in\mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u) = \theta_\lambda$. Então u_0 é uma solução de (SP).*

Demonstração. Vimos na Observação 1.2.3 acima $\Psi'_\lambda(u)u < 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Como u_0 minimiza I_λ em $\mathcal{N}_\lambda$ segue do Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver [31]) que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $I'_\lambda(u_0) = \mu\Psi'_\lambda(u_0) \in (H^1(\mathbb{R}^3))'$. Portanto

$$0 = I'_\lambda(u_0)u_0 = \mu\Psi'_\lambda(u_0)u_0,$$

donde se conclui que $\mu = 0$ provando que $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda$ é ponto crítico de I_λ. ■

Lema 1.2.8 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$, existe um único número positivo $t = t_u$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda$ e*

$$I_\lambda(t_u u) = \max_{t\geq 0} I_\lambda(tu).$$

Demonstração. Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$ fixado, considere a função $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = I_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^6 dx.$$

De maneira análoga a demonstração do Lema 1.2.6 concluímos que $h(0) = 0$, $h(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\lim_{t \to \infty} h(t) = -\infty$. Assim, h possui um valor máximo positivo atingido em algum $t_u = t(u) > 0$. Portanto

$$0 = h'(t_u) = I'_\lambda(t_u u)u = \frac{1}{t_u} I'_\lambda(t_u u)(t_u u)$$

e podemos então concluir que $t_u u \in \mathcal{N}_\lambda$. A unicidade de t_u segue do seguinte fato. A equação $I'_\lambda(tu)(tu) = 0$ é equivalente a

$$\frac{1}{t^{p-2}}\|u\|^2 + \frac{1}{t^{p-4}}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx + t^{6-p}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u^6 dx.$$

Como $4 < p < 6$, o lado esquerdo da igualdade acima é uma função decrescente em $t \in (0, \infty)$ e o lado direito é uma função crescente em $t \in (0, \infty)$ concluindo-se portanto que a igualdade só pode ocorrer em um único $t > 0$. ∎

Observação 1.2.9 *O Lema 1.2.6 também é válido para os funcionais I_0 e I_1 e a demonstração é feita de maneira análoga.*

Como o funcional I_λ possui a geometria do passo da montanha (ver Lema 1.2.6) é fácil verificar que o nível do passo da montanha, c_λ, associado ao funcional I_λ é positivo. Além disso, $\theta_\lambda = c_\lambda > 0$ (ver Teorema 4.2, [30]). De modo análogo temos também que θ_0 e θ_1 são positivos.

Definição 1.2.10 *Dizemos que $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I_λ no nível $c \in \mathbb{R}$, ou simplesmente uma sequência $(PS)_c$, quando*

$$\lim_{n \to \infty} I_\lambda(u_n) = c \quad e \quad \lim_{n \to \infty} I'_\lambda(u_n) = 0.$$

Além disso, se toda sequência $(PS)_c$ admite uma subsequência que converge forte em $H^1(\mathbb{R}^3)$ então dizemos que o funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Como a variedade de Nehari é um espaço métrico completo, a aplicação do princípio variacional de Ekeland nos dá o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida pois as idéias são semelhantes as utilizadas na demonstração do Lema 1.3.9.

Lema 1.2.11 *Existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ que é $(PS)_{\theta_\lambda}$ para o funcional I_λ.*

Lema 1.2.12 *Se $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_λ. Então, para n suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} c + 1 + \|u_n\| &\geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{p} I'_\lambda(u_n)u_n \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|u_n\|^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{p}) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx + (\frac{1}{p} - \frac{1}{6}) \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u_n^6 dx \\ &\geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

pois $4 < p < 6$ e a parte do termo não-local é positiva. Segue então da desigualdade acima que $(\|u_n\|)$ é limitada. ■

Lema 1.2.13 *Seja S a melhor constante da imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Se $c \in (0, \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}})$ então toda sequência $(PS)_c$ associada a I_λ admite uma subsequência que converge forte em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e, consequentemente, I_λ é um funcional $(PS)_c$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.12 $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é limitada. Segue então da reflexividade de $H^1(\mathbb{R}^3)$ que, passando a uma subsequência se necessário,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \tag{1.2}$$

e, usando os teoremas de imersão de Sobolev temos,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^s_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad \text{para} \quad 1 \leq s < 6. \tag{1.3}$$

Pelo Lema 1.2.1(iv) temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1). \tag{1.4}$$

Afirmação: Dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx = o_n(1); \quad 2 < p < 6 \tag{1.5}$$

De fato, por $(H1)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $g(x) < \varepsilon$ para todo $|x| > R$. Então,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx - &\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx \Big| \\ &\leq \int_{B_R^C(0)} g(x)\big||u_n|^p - |u|^p\big| dx + \int_{B_R(0)} g(x)\big||u_n|^p - |u|^p\big| dx \\ &\leq C\epsilon + \|g\|_\infty \int_{B_R(0)} \big||u_n|^p - |u|^p\big| dx. \end{aligned}$$

onde $C = 2\sup_n\{|u_n|_p^p, |u|_p^p\}$. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima e usando 1.3 obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx\right| \leq C\epsilon \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário concluímos a prova de (1.5).

Usando (1.2) obtemos

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u\|^2 + o_n(1) \tag{1.6}$$

A aplicação do Lema de Brezis-Lieb à sequência $(f^{\frac{1}{6}}(x)u_n)$ implica em

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n|^6 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^6 dx + o_n(1). \tag{1.7}$$

De (1.4) - (1.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx &= I'_\lambda(u_n)u_n - I'_\lambda(u)u \\
&+ \lambda\left(\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx\right) \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n|^6 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^6 dx\right) + o_n(1) \\
&= I'_\lambda(u_n)u_n - I'_\lambda(u)u + \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

É um cálculo padrão mostrar que o limite fraco, u, é ponto crítico do funcional I_λ. Assim, concluímos da igualdade acima que

$$\|u_n - u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx + o_n(1). \tag{1.8}$$

Por outro lado, procedendo de forma análoga a obtenção de (1.7) temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_n - u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx \\
&= I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u) + \frac{\lambda}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx\right) + o_n(1) \\
&= I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u) + o_n(1)
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n - u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx \qquad (1.9)\\
= c - I_\lambda(u) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{p} I'_\lambda(u)u \\ &= \frac{p-2}{2p}\|u\|^2 + \frac{p-4}{4p}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2 dx + \frac{6-p}{6p}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^6 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Podemos assumir que

$$\begin{aligned} &\|u_n - u\|^2 \to a \geq 0, \\ &\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx \to l \geq 0 \quad \text{e} \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n-u)}(u_n - u)^2 dx \to b \geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (1.8) obtemos que $l = a + b$ e portanto $l \geq a$.

Supondo $a > 0$, segue da definição da constante S e de (H_3) que

$$\|u_n - u\|^2 \geq S\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_n - u|^6 dx\right)^{\frac{1}{3}} \geq S\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n - u|^6 dx\right)^{\frac{1}{3}}.$$

A desigualdade acima implica, no limite, que $a \geq S l^{\frac{1}{3}} \geq S a^{\frac{1}{3}}$, donde $a \geq S^{\frac{3}{2}}$.

Usando (1.9) e o fato que $I_\lambda(u) \geq 0$ obtemos

$$c \geq c - I_\lambda(u) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{6}l = \frac{1}{3}a + \frac{1}{12}b \geq \frac{1}{3}a \geq \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

que é uma contradição pois, por hipotese, $c < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$. Portanto $a = 0$ e a demonstração está concluida. ■

O próximo resultado estabelece que, fixado $\lambda > 0$, θ_λ pertence ao intervalo onde vale a condição de Palais-Smale para o funcional I_λ.

Seja S a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_{2^*}^2}.$$

Para $N = 3$, a constante S é realizada pela função de Talenti, U, dada por

$$U(x) := \frac{3^{\frac{1}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Além disso temos que $|\nabla U|_2^2 = |U|_6^6 = S^{\frac{3}{2}}$. Considere as funções $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ com $0 \leq \eta_i \leq 1$, $|\nabla \eta_i| \leq \frac{3}{\rho_0}$ e tal que:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_{\rho_0/2}(a^i) \\ 0, & \text{se} \quad x \in B^c_{\rho_0}(a^i). \end{cases}$$

Para cada $i \in \{1,2,...,k\}$ defina a função $u_\varepsilon^i(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\eta_i(x)U(\frac{x-a^i}{\varepsilon})$. Faremos uso dos seguintes fatos sobre as funções u_ε^i (para uma demonstração ver [18], [29], [30]).

$$\begin{cases} |u_\varepsilon^i|_6^2 = |U|_6^2 + O(\varepsilon), \\ |\nabla u_\varepsilon^i|_2^2 = |\nabla U|_2^2 + O(\varepsilon), \\ |u_\varepsilon^i|_s^s = O(\varepsilon^{\frac{s}{2}}), \quad s \in [2,3) \end{cases} \tag{1.10}$$

quando $\varepsilon \to 0^+$.

Tomando $0 < \varepsilon < \frac{\rho_0}{2}$ temos, para cada $1 \leq i \leq k$, que

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon^i|_p^p &\geq \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)} |u_\varepsilon^i|^p dx = \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(0)} \left|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \left|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx + \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \left|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^p dx \\ &\geq \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{(3\varepsilon^2)^{p/4}}{(2\varepsilon^2)^{p/2}} dx + \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \frac{(3\varepsilon^2)^{p/4}}{(2|x|^2)^{p/2}} dx \\ &= C\varepsilon^\theta + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $\theta = 3 - \frac{p}{2} > 0$. Usando (H_3), como $\sigma > 3$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} f(x)(u_\varepsilon^i(x))^6 dx\right)^{\frac{1}{3}} = |u_\varepsilon|_6^2 + O(\varepsilon) = |U|_6^2 + O(\varepsilon), \quad 1 \leq i \leq k. \tag{1.12}$$

Lema 1.2.14 *Existe* $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \dfrac{\rho_0}{2}\})$ *tal que para* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sup_{t\geq 0} I_\lambda(tu_\varepsilon^i) < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} \text{ para cada } 1 \leq i \leq k.$$

Além disso,

$0 < \theta_\lambda < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$.

Demonstração. A demonstração deste lema será realizada em vários passos.

Passo I: Vamos primeiro mostrar que

$$\sup_{t\geq 0} I_0(tu_\varepsilon^i) \leq \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon). \tag{1.13}$$

Considere a função $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = I_0(tu_\varepsilon^i) = \frac{1}{2}A_\varepsilon t^2 - \frac{1}{6}B_\varepsilon t^6 + \frac{1}{4}C_\varepsilon t^4$$

onde

$$A_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon^i|_2^2 + |u_\varepsilon^i|_2^2, \quad B_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)(u_\varepsilon^i)^6 dx \quad \text{e} \quad C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_\varepsilon^i}(u_\varepsilon^i)^2 dx.$$

Um cálculo simples mostra que dados $a, b > 0$,

$$\max_{t \geq 0} \left(\frac{a}{2} t^2 - \frac{b}{6} t^6 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

De modo análogo a demonstração do Lema 1.2.6, a função h atinge o máximo em algum $t_\varepsilon > 0$ e além disso, $h(t_\varepsilon) > 0$. Afirmamos que existe $T > 0$, independente de ε, tal que $t_\varepsilon \leq T$. De fato. Primeiro observe que, usando (1.10) e (1.12), A_ε, B_ε e C_ε são uniformemente limitados e portanto

$$h(t_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} A_1 t_\varepsilon^2 - \frac{1}{6} B_1 t_\varepsilon^6 + \frac{1}{4} C_1 t_\varepsilon^4$$

Se a afirmação não é verdadeira existe uma sequência $(t_{\varepsilon_n}) \subset (0, \infty)$ com $t_{\varepsilon_n} \to \infty$ e, pela desigualdade acima, $h(t_{\varepsilon_n}) < 0$ para n grande, que é uma contradição.

Assim,

$$h(t) \leq h(t_\varepsilon) = \frac{1}{2} A_\varepsilon t_\varepsilon^2 - \frac{1}{6} B_\varepsilon t_\varepsilon^6 + \frac{1}{4} C_\varepsilon t_\varepsilon^4 \leq \frac{1}{3} \left(\frac{A_\varepsilon}{(B_\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} C_\varepsilon T^4$$

Usando as propriedades do termo não-local temos

$$C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_\varepsilon} (u_\varepsilon)^2 dx \leq C_1 |u_\varepsilon|_{\frac{12}{5}}^4.$$

Logo, a desigualdade acima juntamente com (1.10) (para $s = \frac{12}{5}$) implicam que $C_\varepsilon = O(\varepsilon)$, donde se conclui que

$$h(t) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{A_\varepsilon}{(B_\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon).$$

Segue então de (1.10) que

$$h(t) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{\|\nabla U\|_2^2 + O(\varepsilon)}{\|U\|_6^2 + O(\varepsilon)} \right)^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon) \leq \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon)$$

e fica assim demonstrada (1.13).

Passo II: Observe primeiro que, por (1.10), as funções u_ε^i são uniformemente limitadas. Logo, pela continuidade do funcional J_λ, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} I_\lambda(t u_\epsilon^i) < \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{\rho_0}{2}\}.$$

Quando $t \geq t_0$, segue de (1.11), (1.13) e da definição de I_λ, obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu_\epsilon^i) &= I_0(tu_\epsilon^i) - \frac{\lambda}{p}t^p \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_\epsilon^i|^p dx \\ &\leq \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon) - \frac{\lambda}{p}t_0^p \int_{B_{\rho_0/2}(a^i)} g(x)|u_\epsilon^i|^p dx \\ &\leq \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon) - \frac{\lambda}{p}t_0^p m_i C\epsilon^\theta \leq \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + O(\epsilon) - \frac{\lambda}{p}t_0^p mC\epsilon^\theta \end{aligned}$$

onde $m_i = \inf\limits_{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)} g > 0$ e $m = \min\limits_{1 \leq i \leq k}\{m_i\} > 0$. Agora, $\theta = 3 - \frac{p}{2}$ e $4 < p < 6$ o que implica em $0 < \theta < 1$. Logo podemos escolher $\varepsilon_0 < \min\{1, \frac{\rho_0}{2}\}$ tal que

$$O(\varepsilon) - \frac{\lambda}{p}t_0^p mC\varepsilon^\theta < 0 \quad \text{para todo} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Daí,

$$\sup_{t \geq t_0} I(tu_\varepsilon^i) < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

e portanto temos que

$$\sup_{t \geq 0} I(tu_\varepsilon^i) < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, k\} \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Passo III: Usando o Lema 1.2.6, dados $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe $t_\varepsilon^i > 0$ tal que $t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i \in \mathcal{N}_\lambda$. Segue então, da definição de θ_λ que

$$0 < \theta_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u) \leq I_\lambda(t_\epsilon^i u_\epsilon^i) = \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu_\epsilon^i) < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

completando assim a demonstração do Lema.

■

Demonstração do Teorema 1.1.1

Pelo Lema 1.2.11, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\lambda$ que é $(PS)_{\theta_\lambda}$ para o funcional I_λ, isto é,

$$I_\lambda(u_n) \to \theta_\lambda, \quad I'_\lambda(u_n)u_n = 0 \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_n) \to 0.$$

Como $\theta_\lambda \in \left(0, \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}\right)$, segue do Lema 1.2.13 que existem $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e uma subsequência de (u_n) (ainda denominada de (u_n)) tal que $u_n \to u_\lambda$ forte em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Daí u_λ é uma solução fraca não nula de (SP), com $I_\lambda(u_\lambda) = \theta_\lambda$ e $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$. Como $I_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(|u|_\lambda)$ e $|u|_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ podemos assumir que $u_\lambda \geq 0$. Pelo princípio do máximo segue que $u_\lambda > 0$ e portanto uma solução positiva ground state para o sistema (SP).

1.3 Existência de multiplas soluções positivas

Nesta seção demonstraremos que o problema (SP) possui ao menos k soluções positivas. A estratégia usada consiste em usar a *função baricentro* definida abaixo para construir k vizinhanças em $\mathcal{N}_\lambda$ e, em cada vizinhança, uma sequência de Palais-Smale fortemente convergente e assim distinguir as diversas soluções.

Escolha $r_0 > 0$ de modo que $\cup_{i=1}^{k}\overline{B_{\rho_0}(a^i)} \subset B_{r_0}(0)$ e defina $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como

$$\chi(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad |x| \leq r_0 \\ \frac{r_0 x}{|x|}, & \text{se} \quad |x| > r_0. \end{cases}$$

Definição 1.3.1 *A função baricentro, $Q : H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ é definida por*

$$Q(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)|u|^6 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dx}.$$

É fácil verificar que a função baricentro é contínua e homogênea de grau zero, isto é, $Q(tu) = Q(u)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$.

No que segue considere os conjuntos, $\mathbf{K} = \{a^1, a^2, ..., a^k\}$ constituido de pontos de máximos globais da função f e, $\mathbf{K}_{\frac{\rho_0}{2}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)}$.

Usando o Lema 1.2.8, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ existe $t_\varepsilon^i > 0$ tal que $t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i \in \mathcal{N}_\lambda$. Temos então, o seguinte resultado.

Lema 1.3.2 *Existe $\varepsilon^0 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ temos $Q(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) \in B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i) \subset \mathbf{K}_{\frac{\rho_0}{2}}$.*

Demonstração. Usando a homogeneidade de Q e a mudança de variáveis $z = (x - a^i)/\varepsilon$ obtemos

$$\begin{aligned} Q(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) &= Q(u_\varepsilon^i) \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\eta_i(x)U(\frac{x-a^i}{\varepsilon})|^6 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} |\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\eta_i(x)U(\frac{x-a^i}{\varepsilon})|^6 dx} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\varepsilon z + a^i)|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\eta_i(\varepsilon z + a^i)U(z)|^6 dz}{\int_{\mathbb{R}^3} |\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\eta_i(\varepsilon z + a^i)U(z)|^6 dz} \end{aligned}$$

Segue então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que $Q(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) \to a^i$ quando $\varepsilon \to 0^+$. Logo, podemos escolher $\varepsilon^0 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que $|Q(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) - a^i| < \frac{\rho_0}{2}$. Daí temos que $Q(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) \in B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^i)$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$. ∎

No que segue, para a obtenção de múltiplas soluções para o sistema (SP) será importante estudar os números θ_0 e θ_1. Os dois lemas seguintes nos dão tais informações.

Lema 1.3.3 $\theta_1 = \dfrac{1}{3}S^{3/2}$.

Demonstração. Usando a mesma argumentação apresentada na primeira parte da demonstração do Lema 1.2.14 temos que

$$\sup_{t\geq 0} I_1(tu_\varepsilon^i) \leq \frac{1}{3}S^{3/2} + O(\varepsilon), \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Usando a observação 1.2.9, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe $s_i > 0$ tal que $s_i u_\varepsilon^i \in \mathcal{N}_1$. Segue então da definição de θ_1 que

$$0 < \theta_1 \leq I_1(s_i u_\varepsilon^i) \leq \sup_{t\geq 0} I_1(tu_\varepsilon^i) \leq \frac{1}{3}S^{3/2} + O(\varepsilon).$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na desigualdade acima obtemos que $\theta_1 \leq \frac{1}{3}S^{3/2}$. Para provar a outra desigualdade considere $(u_n) \subset \mathcal{N}_1$ uma sequência minimizante para θ_1, isto é, $J_1'(u_n)u_n = 0$ e $J_1(u_n) \to \theta_1$. Então temos

$$\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx. \tag{1.14}$$

e

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx + o_n(1). \tag{1.15}$$

Assumindo que $\|u_n\|^2 \to a$, $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx \to b$ e $\int_{\mathbb{R}^3} u_n^6 dx \to l$ e tomando o limite quando $n \to \infty$ em (1.14) e (1.15) obtemos

$$l = a + b \quad \text{e} \quad \theta_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{6}l.$$

As equações acima implicam que $\theta_1 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{12}b \geq \frac{1}{3}a$ e como $a \geq Sl^{\frac{1}{3}}$ (ver demonstração do Lema 1.2.13) e $l \geq a$ temos que $a \geq S^{\frac{3}{2}}$. Assim $\theta_1 \geq \frac{1}{3}a \geq \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$ o que completa a demonstração. ■

Lema 1.3.4 $\theta_0 = \dfrac{1}{3}S^{3/2}$.

Demonstração. Observando que $I_1(u) \leq I_0(u)$ para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e, dado $u \in \mathcal{N}_0$ existe $s > 0$ tal que $su \in \mathcal{N}_1$ temos

$$\theta_1 \leq I_1(su) \leq I_0(su) = \sup_{t\geq 0} I_0(tu) = I_0(u).$$

Daí, $\theta_1 \le I_0(u)$ para todo $u \in \mathcal{N}_0$ e portanto $\theta_1 \le \theta_0$. Usando o lema anterior e o primeiro passo da demonstração do Lema 1.1.12 temos

$$\sup_{t\ge 0} I_0(tu_\varepsilon^i) \le \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon) = \theta_1 + O(\varepsilon).$$

Seja $s > 0$ tal $su_\varepsilon^i \in \mathcal{N}_0$. Então,

$$\theta_0 \le I_0(su_\varepsilon^i) = \sup_{t\ge 0} I_0(tu_\varepsilon^i) \le \theta_1 + O(\varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ na desigualdade acima obtemos que $\theta_0 \le \theta_1$ e portanto $\theta_0 = \theta_1$. $\blacksquare$

No restante deste capítulo denotaremos simplesmente por θ o valor $\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$.

Lema 1.3.5 *Existe $\delta_0 > 0$ tal que se $u \in \mathcal{N}_0$ e $I_0(u) \le \theta + \delta_0$ então $Q(u) \in \mathbf{K}_{\rho_0/2}$.*

Demonstração. Supondo por contradição que tal fato não acontece, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_0$ tal que

$$I_0(u_n) = \theta + o_n(1) \quad \text{e} \quad Q(u_n) \notin \mathbf{K}_{\rho_0/2} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Seja $s_n > 0$ tal $s_n u_n \in \mathcal{N}_1$. Então,

$$0 < \theta \le I_1(s_n u_n) \le I_0(s_n u_n) \le \sup_{t\ge 0} I_0(tu_n) = I_0(u_n) = \theta + o_n(1).$$

Portanto, usando o Princípio Variacional de Ekeland, existe uma sequência $(PS)_\theta$, (U_n), para o funcional I_1 com $\|U_n - s_n u_n\| = o_n(1)$. Assim, para n grande,

$$\frac{1}{2}\|U_n\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{U_n} U_n^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} U_n^6 dx = \theta + o_n(1) \tag{1.16}$$

e

$$\|U_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{U_n} U_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} U_n^6 dx = o_n(1). \tag{1.17}$$

Combinando (1.16) e (1.17) obtemos

$$\theta + o_n(1) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} U_n^6 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{U_n} U_n^2 dx \le \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} U_n^6 dx. \tag{1.18}$$

Podemos então concluir, de (1.18), que $\int_{\mathbb{R}^3} U_n^6 dx \nrightarrow 0$. Usando (1.16), (1.17) e procedendo de forma análoga a demonstração do Lema 1.3.3 temos

$$\|U_n\|^2 \to S^{\frac{3}{2}}, \int_{\mathbb{R}^3} |U_n|^6 dx \to S^{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{U_n} U_n^2 dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.19}$$

Segue então da definição de S e dos dois primeiros limites acima que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U_n|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} U_n^6 dx\right)^{\frac{1}{3}}} \to S \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Podemos então usar o Teorema 1.41 [30] para garantir a existência uma sequência $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ tal que $(v_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ definida por $v_n(x) = \lambda_n^{1/2} U_n(\lambda_n x + y_n)$ converge forte (a menos de uma subsequência) para uma $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ que realiza a constante de Sobolev S.

Observe que v é não-trivial pois

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^6 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |U_n|^6 dx = S^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Afirmação 1: Podemos escolher (λ_n) de modo que $\lambda_n \to 0$. De fato, se $\lambda_n \nrightarrow 0$, existe $\lambda_0 > 0$ e alguma subsequência, ainda denominada por (λ_n), tal que $\lambda_n \geq \lambda_0$ para todo n e então,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n(x)|^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^3} |U_n(\lambda_n x + y_n)|^2 dx = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{\mathbb{R}^3} |U_n(z)|^2 dz \leq \frac{C}{\lambda_0^2}. \tag{1.20}$$

Como $v_n(x) \to v(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^3$, usando o Lema de Fatou em (1.20) obtemos que $\int_{\mathbb{R}^3} |v(x)|^2 dx \leq \frac{C}{\lambda_0^2}$ que é uma contradição pois, quando $N = 3$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v(x)|^2 dx = C \int_0^\infty \frac{r^2}{1+r^2} dr = \infty.$$

Afirmação 2: Podemos assumir que a sequência (y_n) é limitada. De fato, uma vez que $I_0(s_n u_n) = \theta + o_n(1)$ e $\|U_n - s_n u_n\| = o_n(1)$ segue da continuidade de I_0 e dos limites em (1.19) que

$$\begin{aligned} S^{3/2} &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|U_n(x)|^6 dx + o_n(1) \qquad (1.21)\\ &= \frac{1}{\lambda_n^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \left| v_n(\frac{x - y_n}{\lambda_n}) \right|^6 dx + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\lambda_n z + y_n)|v_n(z)|^6 dz + o_n(1). \end{aligned}$$

Se $y_n \to +\infty$, usando (H_3) e o Lema de Fatou para em (1.21) tem-se

$$S^{3/2} < \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |v_n(z)|^6 dz = S^{3/2},$$

que é uma contradição. Logo existe $r_0 > 0$ tal que $\{y_n\} \subset \overline{B_{r_0}(0)}$ e, a menos de subsequência, existe $y_0 \in \overline{B_{r_0}(0)}$ tal $y_n \to y_0$. Assim, de (1.21) e do Teorema da Convergência Dominada temos

$$S^{\frac{3}{2}} = f(y_0) S^{\frac{3}{2}}$$

e portanto $y_0 \in \mathbf{K}$. Uma vez que

$$v_n \to v \quad \text{em} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad \|U_n - s_n u_n\| = o_n(1)$$

segue das propriedades da função Q e da mudança de variáveis $x = \lambda_n z + y_n$ que

$$\begin{aligned} Q(u_n) &= Q(s_n u_n) = Q(U_n) + o_n(1) \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(x)|U_n(x)|^6 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} |U_n(x)|^6 dx} + o_n(1) \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\lambda_n z + y_n)|v_n(z)|^6 dz}{\int_{\mathbb{R}^3} |v_n(z)|^6 dz} + o_n(1). \end{aligned}$$

Portanto $Q(u_n) \to y_0 \in \mathbf{K}_{\rho_0/2}$ quando $n \to \infty$, que é uma contradição. ∎

Lema 1.3.6 *Seja $\delta_0 > 0$ como no lema anterior. Se $u \in \mathcal{N}_\lambda$ e $I_\lambda(u) \leq \theta + \frac{\delta_0}{2}$ então existe $\Lambda > 0$ tal que*

$$Q(u) \in \mathbf{K}_{\rho_0/2} \quad \textit{para todo} \quad \lambda \in (0, \Lambda).$$

Demonstração. De modo análogo ao Lema 1.1.7 existe $s > 0$ tal que $su \in \mathcal{N}_0$ e além disso podemos verificar que

$$s = \left(\frac{b}{2c} + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} \right)^2 + \frac{a}{c} \right)^{1/2} \right)^{1/2}$$

onde, $a = \|u\|^2$, $b = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx$ e $c = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(x) u^6 dx$.

Afirmação: Existem $\Lambda_* > 0$ e $d > 0$ (independente de u) tal que $s \leq d$ para todo $\lambda \in (0, \Lambda_*)$. Para demonstrar esta afirmação iremos primeiro obter estimativas para a, b e c. Usando a hipótese do Lema e o fato que $4 < p < 6$ temos

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\delta_0}{2} \geq I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{p} I'_\lambda(u)u \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{6} \right) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^3} f(x) u^6 dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|u\|^2 \end{aligned}$$

Daí,

$$a = \|u\|^2 \leq c_1 := \frac{2p}{p-2} \left(\theta_0 + \frac{\delta_0}{2} \right). \tag{1.22}$$

Lembrando que existe $\rho > 0$ tal que $\rho \leq \theta_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u)$ temos

$$\begin{aligned}
\rho \leq \theta_\lambda \leq I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{6} I'_\lambda(u) \\
&= \frac{1}{3}\|u\|^2 + \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + \lambda \frac{p-6}{6p}\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx \\
&\leq \frac{1}{3}\|u\|^2 + \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim

$$\|u\|^2 \geq 3\rho - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx. \tag{1.23}$$

Como $u \in \mathcal{N}_\lambda$, segue de (1.21), (1.22) e da imersão de Sobolev $L^p(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^3)$ que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^6 dx &= \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx \\
&\geq 3\rho + \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx \\
&\geq 3\rho - \lambda \|g\|_\infty C \|u\|^p \\
&\geq 3\rho - \lambda \|g\|_\infty C c_1^{p/2}
\end{aligned}$$

Podemos então escolher $\Lambda_* > 0$ tal que

$$c = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^6 dx \geq c_2 > 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda \in (0, \Lambda_*). \tag{1.24}$$

Pelo Lema 1.2.1(i) temos que

$$b = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq C\|u\|^4 \leq c_3 := C c_1^2 \tag{1.25}$$

Segue então de (1.21), (1.23), (1.24) e da expressão de s que existe $d > 0$, independente de u, tal que $s \leq d$ para todo $0 < \lambda < \Lambda_*$, demonstrando que a afirmação ocorre. Usando novamente a hipótese do Lema e a afirmação acima temos

$$\begin{aligned}
\theta + \frac{\delta_0}{2} \geq I_\lambda(u) = \sup_{t \geq 0} I_\lambda(tu) &\geq I_\lambda(su) \\
&= I_0(su) - \lambda \frac{s^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u|^p dx \\
&\geq I_0(su) - \lambda \frac{d^p}{p}\|g\|_\infty C c_1^{p/2}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\Lambda \leq \Lambda_*$ de modo que $\lambda \frac{d^p}{p}\|g\|_\infty C c_1^{p/2} \leq \frac{\delta_0}{2}$ temos, pela desigualdade acima que $I_0(su) \leq \delta_0$ para todo $0 < \lambda < \Lambda$. Portanto, pelo Lema 1.3.5, temos que

$$Q(u) = Q(su) \in \mathbf{K}_{\rho_0/2} \quad \text{para todo} \quad \lambda \in (0, \Lambda).$$

■

No que segue, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ defina as vizinhanças em $\mathcal{N}_\lambda$,

$$O_\lambda^i = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : |Q(u) - a^i| < \rho_0\}$$

e suas fronteiras

$$\partial O_\lambda^i = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : |Q(u) - a^i| = \rho_0\},$$

Considere também os números

$$\beta_\lambda^i = \inf_{u \in O_\lambda^i} I_\lambda(u) \qquad \text{e} \qquad \widehat{\beta_\lambda^i} = \inf_{u \in \partial O_\lambda^i} I_\lambda(u).$$

Os próximos lemas são importante na obtenção de sequências de Palais-Smale nos níveis β_λ^i para o funcional J_λ via aplicação do Princípio Variacional de Ekeland. O segundo é uma versão do Lema 2.4 [15] e o terceiro segue as ideias da demonstração do Teorema 2.1 [9].

Lema 1.3.7 *Dados $\lambda \in (0, \Lambda)$ e $i \in \{1, 2, ..., k\}$ temos*

$$\beta_\lambda^i = \inf_{u \in O_\lambda^i \cup \partial O_\lambda^i} J_\lambda(u) \tag{1.26}$$

e

$$\beta_\lambda^i < \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}}. \tag{1.27}$$

Demonstração. Primeiro demonstraremos (1.27). Pelo Lema 1.3.2, existe $\varepsilon^0 > 0$ tal que $Q(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) \in \mathbf{K}_{\rho_0/2}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$. Segue então da definição de $\mathbf{K}_{\rho_0/2}$ que $t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i \in O_\lambda^i$. Usando o Lema 1.2.14 e a definição de β_λ^i obtemos

$$\beta_\lambda^i = \inf_{u \in O_\lambda^i} I_\lambda(u) \leq I_\lambda(t_\varepsilon^i u_\varepsilon^i) \leq \sup_{t \geq 0} I_\lambda(t u_\varepsilon^i) < \frac{1}{3} S^{3/2}$$

para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ o que demonstra (1.27). Para demonstrar (1.26) é suficiente verificar que $\widehat{\beta_\lambda^i} > \beta_\lambda^i$. Para isto afirmamos que

$$\widehat{\beta_\lambda^i} \geq \frac{1}{3} S^{3/2} + \delta_0/2 \quad \text{para todo} \quad \lambda \in (0, \Lambda). \tag{1.28}$$

onde δ_0 e Λ são dados no Lema 1.3.6. De fato, se (1.28) não ocorre, segue da definição de $\widehat{\beta_\lambda^i}$ que existe $u \in \partial O_\lambda^i$ tal que $I_\lambda(u) < \frac{1}{3} S^{3/2} + \delta_0/2$. Pelo Lema 1.3.6 temos que $Q(u) \in \mathbf{K}_{\rho_0/2}$ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ e portanto

$$Q(u) \in \overline{B_{\frac{\rho_0}{2}}(a^j)} \quad \text{para algum} \quad j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Se $j = i$ temos $u \in O^i_\lambda$ que é uma contradição. Se $j \neq i$ então

$$|a^j - a^i| = |a^j - Q(u) + Q(u) - a^i| \leq |Q(u) - a^i| + |Q(u) - a^j| \leq \frac{3}{2}\rho_0$$

que é também uma contradição pois, pela forma como ρ_0 foi escolhido, temos $|a^j - a^i| > 2\rho_0$. Portanto (1.28) ocorre. Segue então de (1.27) e (1.28) que, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ e $\lambda \in (0, \Lambda)$

$$\widehat{\beta^i_\lambda} \geq \frac{1}{3}S^{3/2} + \delta_0/2 > \frac{1}{3}S^{3/2} > \beta^i_\lambda$$

o que completa a demonstração. ∎

Lema 1.3.8 *Para cada $u \in O^i_\lambda$ existem $\eta > 0$ e um funcional de classe C^1*

$$\ell : B_\eta(0) \subset H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^+$$

com as seguintes propriedades:

$$\ell(0) = 1, \quad \ell(v)(u - v) \in O^i_\lambda \quad \textit{para todo} \quad v \in B_\eta(0),$$

$$\ell'(0)\varphi = \frac{\Psi'_\lambda(u)\varphi}{\Psi'_\lambda(u)u} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^3)$$

onde Ψ_λ é o funcional definido na observação 1.1.2.

Demonstração. Fixado $u \in O^i_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$ considere a função $F : H^1(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(v, t) = \Psi_\lambda(t(u - v)).$$

Pelas propriedades do funcional Ψ_λ temos que F é de classe C^1 e $F(0, 1) = \Psi_\lambda(u) = 0$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t}F(v, t) = \Psi'_\lambda(t(u - v))(u - v) \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}F(0, 1) = \Psi'_\lambda(u)u < 0.$$

Segue então, do Teorema da Função Implícita aplicado ao ponto $(0, 1)$, que existem $\eta > 0$ e um funcional $\ell : B_\eta(0) \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 tal que , para $v \in B_\eta(0)$, $t = \ell(v)$, com

$$\ell(0) = 1 \quad \text{e} \quad F(v, \ell(v)) = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in B_\eta(0).$$

As propriedades do funcional ℓ citadas no lema seguem então da continuidade da função baricentro e da aplicação da regra da cadeia à equação $F(v, \ell(v)) = 0$. ∎

Lema 1.3.9 *Para cada $i \in \{1,2,...,k\}$ existe uma sequência $(u_n^i) \subset O_\lambda^i$ de Palais-Smale no nível β_λ^i para o funcional J_λ.*

Demonstração. Com a finalidade de simplificar a notação façamos as seguintes identificações:

$$\beta_\lambda^i := \beta, \quad \widehat{\beta}_\lambda^i := \widehat{\beta} \quad \text{e} \quad O_\lambda^i := O.$$

Já vimos que na demonstração do Lema1.3.7 que $\beta < \widehat{\beta}$. Daí,

$$\beta = \inf_{u \in O \cup \partial O} I_\lambda(u).$$

Considere $(u_n) \subset \overline{O}$ uma sequência minimizante para β. Usando o Princípio Variacional de Ekeland, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) satisfazendo

$$\begin{aligned} &\beta \le I_\lambda(u_n) \le \beta + \frac{1}{n}, \\ &I_\lambda(u) \le I_\lambda(w) + \frac{1}{n}\|w-u\| \quad \text{para todo} \quad w \in \overline{O}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Como $\beta < \widehat{\beta}$ podemos assumir que $u_n \in O$ para n grande. Aplicando o Lema 1.3.8 com $u = u_n$, existem $\eta_n > 0$ e um funcional $\ell_n : B_{\eta_n}(0) \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\ell_n(0) = 1, \quad \ell_n(v)(u_n - v) \in O \quad \text{para todo} \quad v \in B_{\eta_n}(0)$$

e

$$\ell_n'(0)\varphi = \frac{\Psi_\lambda'(u_n)\varphi}{\Psi_\lambda'(u_n)u_n} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Dado $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ com $\|v\| = 1$ tome $v_\sigma = \sigma v$ com $0 < \sigma < \eta_n$. Temos então que

$$v_\sigma \in B_{\eta_n}(0) \quad \text{e} \quad w_{\sigma,n} := \ell_n(v_\sigma)(u_n - v_\sigma) \in O$$

e assim, de (1.29), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\|w_{\sigma,n} - u_n\| \ge I_\lambda(u_n) - I_\lambda(w_{\sigma,n}) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} I_\lambda(tu_n + (1-t)w_{\sigma,n})dt \\ &= \int_0^1 I_\lambda'(tu_n + (1-t)w_{\sigma,n})(u_n - w_{\sigma,n})dt. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Seja

$$\begin{aligned} A :&= I_\lambda(u_n) - I_\lambda(w_{\sigma,n}) - I_\lambda'(u_n)(u_n - w_{\sigma,n}) \\ &= \int_0^1 \left(I_\lambda'(tu_n + (1-t)w_{\sigma,n}) - I_\lambda'(u_n)\right)(u_n - w_{\sigma,n})dt. \end{aligned}$$

Observando que $w_{\sigma,n} \to u_n$ e $tu_n + (1-t)w_{\sigma,n} \to u_n$ quando $\sigma \to 0$, segue da continuidade de I'_λ que

$$\frac{|A|}{\|w_{\sigma,n} - u_n\|} \leq \sup_{t\in[0,1]} \|I'_\lambda(tu_n + (1-t)w_{\sigma,n}) - I'_\lambda(u_n)\| \to 0.$$

Escolhendo σ suficientemente pequeno tal que $|A| \leq \frac{1}{n}\|w_{\sigma,n} - u_n\|$ temos, por (1.30), que

$$\frac{2}{n}\|w_{\sigma,n} - u_n\| \geq I'_\lambda(u_n)(u_n - w_{\sigma,n}). \tag{1.31}$$

Como $u_n - w_{\sigma,n} = \sigma\ell_n(v_\sigma)v + (1-\ell_n(v_\sigma))u_n$ e $\ell_n(0) = 1$, (1.31) implica que

$$\begin{aligned} \ell_n(v_\sigma)I'_\lambda(u_n)v &\leq \frac{2}{n}\|\frac{1}{\sigma}(\ell_n(0) - \ell_n(v_\sigma))u_n + \ell_n(v_\sigma)v\| \\ &\leq \frac{2}{n}\left(\frac{(\ell_n(0) - \ell_n(v_\sigma)}{\|v_\sigma\|}\|v\|\|u_n\| + \ell_n(v_\sigma)\|v\|\right). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Tomando o limite quando $\sigma \to 0+$ em (1.32) e observando que $(\|u_n\|)$ é limitada obtemos

$$\frac{|I'_\lambda(u_n)v|}{\|v\|} \leq \frac{2}{n}\left(1 + C\|\ell'_n(0)\|\right) \tag{1.33}$$

Para estimar $\|\ell'_n(0)\|$ recordemos primeiro que existe $d_0 > 0$ tal que $\|u\| \geq d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda$ e portanto

$$\Psi'_\lambda(u_n)u_n = -2\|u_n\|^2 + \lambda(4-p)\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^p dx - 2\int_{\mathbb{R}^3} f(x)u_n^6 dx \leq -2(d_0)^2. \tag{1.34}$$

Dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$|\Psi'_\lambda(u_n)(\varphi)| \leq 2|(u_n,\varphi)| + p\lambda\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^{p-1}|\varphi|dx + 6\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n|^5|\varphi|dx + 4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}|u_n||\varphi|dx.$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e a limitação de $(\|u_n\|)$ temos

$$|(u_n,\varphi)| \leq \|u_n\|\|\varphi\| \leq C\|\varphi\|. \tag{1.35}$$

Usando a desigualdade de Hölder, as propriedades do termo não-local e as imersões de Sobolev obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(x)|u_n|^{p-1}|\varphi|dx \leq \|g\|_\infty |u_n|_{\frac{6}{7-p}}|\varphi|_{\frac{6}{p-1}} \leq C\|\varphi\|. \tag{1.36}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}|u_n||\varphi|dx &\leq |\phi_{u_n}|_6|u_n|_{12/5}|\varphi|_{12/5} \leq C\|\phi_{u_n}\|_{1,2}\|u_n\|\|\varphi\| \\ &\leq C\|u_n\|^3\|\varphi\| \leq C\|\varphi\|. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Assim, de (1.34) - (1.37), obtemos que

$$|\ell_n'(0)\phi| = \left|\frac{\Psi_\lambda'(u_n)\phi}{\Psi_\lambda'(u_n)u_n}\right| \leq \frac{C}{2(d_0)^2}\|\varphi\|$$

e portanto $\|\ell_n'(0)\|$ é uniformemente limitada em n. Segue então da desigualdade (1.33) que $\|I_\lambda(u_n)\| = o_n(1)$, o que completa a demonstração do lema. ■

Demonstração do Teorema 1.1.2

Pelo Lema 1.3.9, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe uma sequência de Palais-Smale, $(u_n^i) \subset O_\lambda^i$, associada ao funcional I_λ . Usando (1.27) e o Lema 1.2.13 podemos concluir que, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$ e $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe $u^i \in \mathcal{N}_\lambda$ que é ponto crítico para o funcional I_λ. Como $I_\lambda(|u^i|) = I_\lambda(u^i)$ podemos assumir sem perda de generalidade que u^i é não negativa e pelo princípio do máximo fraco temos então que cada u^i é positiva. Para garantir que as k soluções obtidas acima são distintas duas a duas observe que se $i \neq j$ então $Q(u^i) \neq Q(u^j)$ pois $Q(u^i) \in \overline{B_{\rho_0}(a^i)}$, $Q(u^j) \in \overline{B_{\rho_0}(a^j)}$ e $\overline{B_{\rho_0}(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}(a^j)} = \emptyset$ para $i \neq j$. Portanto $u^i \neq u^j$ e o sistema (SP) possui pelo menos k soluções positivas distintas.

Capítulo 2

Multiplicidade soluções positivas, via geometria do potencial, para um sistema do tipo Schrödinger-Poisson com crescimento crítico

2.1 Introdução

Neste capítulo, explorando a geometria do potencial V, provaremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para o sistema do tipo Schrödinger-Poisson

$$
(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u + \phi u = \beta u^q + u^5, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}
$$

onde $\lambda \in [1, \infty)$, $\beta > 0$, $q \in (3, 5)$ e, $V, Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(V_1) $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $\Omega := \text{int}V^{-1}(0) \neq \emptyset$ é um domínio aberto, limitado, com fronteira suave, $V^{-1}(0) = \overline{\Omega}$ e Ω pode ser decomposto em k componentes conexas $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$, tais que $\text{dist}(\Omega_i, \Omega_j) > 0$ para $i \neq j$;

(V_2) Existe $M_0 > 0$ tal que

$$V(x) + Z(x) \geq M_0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

(Z) Existe $M_1 > 0$ tal que

$$|Z(x)| \leq M_1 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Em [43], motivados por [27] e [12], Ding e Tanaka consideraram a equação de Schrödinger

$$-\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = |u|^{p-1}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

com $p \in (1, 2^* - 1)$ e provaram a existência de pelo menos $2^k - 1$ soluções positivas do tipo multi-bump com pequenas modificações nas hipóteses sobre V e Z apresentadas acima. Em [4] Alves, Filho e Souto completaram o estudo feito por Ding e Tanaka [43] no sentido que a não linearidade na equação de Schrödinger envolve o expoente crítico.

Em [44], Jiang & Zhou estudaram o sistema abaixo onde g é positiva, limitada e $\Omega_0 := g^{-1}(\{0\})$ tem interior não vazio.

$$\begin{cases} -\Delta u + (1 + \mu g(x))u + \lambda \phi u = |u|^{p-1}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, \quad \lim\limits_{|x| \to \infty} \phi(x) = 0. \end{cases}$$

Neste trabalho os autores provaram o seguinte resultado: para cada $\mu > 0$ grande, o problema acima possui uma solução u_λ com a seguinte propriedade:

Existe $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ com $\widetilde{u}(x) = 0$ q.t.p. em $x \in \Omega_0^c$ e $\widetilde{u}(x) \neq 0$ em Ω_0 tal que, passando à uma subsequência,

$$u_\mu \to \widetilde{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{quando} \quad \mu \to \infty.$$

e $\widetilde{u}$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \frac{\lambda}{4\pi}\left(u^2 * \frac{1}{|x|}\right)u = |u|^{p-1}u \quad , \quad \text{em } \Omega_0, \\ u(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Neste capítulo exploramos a geometria do potencial V para conseguir resultados de existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema (P_λ).

O teorema seguinte é o nosso principal resultado neste capítulo.

Teorema 2.1.1 *Suponha que V e Z satisfazem (V_1), (V_2), (Z) e $q \in (3,5)$. Então para qualquer componente conexa U de Ω, existem $\beta_* > 0$ e $\lambda_* = \lambda_*(\beta_*) > 0$ tais que para todo $\beta > \beta_*$ e $\lambda > \lambda_*$, o problema (P_λ) possui uma solução positiva u_λ. Além disso, a família de soluções, $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$, possui as seguintes propriedades: para qualquer sequência $\lambda_n \to \infty$, podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge fortemente em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para uma função u que satisfaz $u(x) = 0$ para $x \notin U$ e sua restrição, $u|_U$, é uma solução positiva para o problema*

$$(P_U) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Z(x)u + \phi u = \beta u^q + u^5, & \text{em} \quad U, \\ -\Delta \phi = (\widetilde{u})^2, \quad \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), & \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial U \end{cases}$$

onde $\widetilde{u}$ é a extensão de u em todo $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\widetilde{u}(x) = u(x) \qquad \text{se} \quad x \in U, \qquad \widetilde{u}(x) = 0 \qquad \text{se} \quad x \in U^c.$$

Observação 2.1.2 *Chamaremos o sistema (P_U) de problema limite de (P_λ) quando $\lambda \to \infty$.*

Como consequência imediata do teorema acima nós temos o seguinte resultado.

Corolário 2.1.3 *Sob as hipóteses do Teorema 2.1.1, existem $\beta_* > 0$ e $\lambda_* = \lambda_*(\beta_*) > 0$ tais que, para $\lambda > \lambda_*$, o problema (P_λ) possui ao menos k soluções positivas.*

2.2 Preliminares

Neste capítulo, fixado $\lambda \geq 1$, trabalharemos com o espaço de funções $(\mathcal{H}_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ definido por

$$\mathcal{H}_\lambda = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx < \infty\},$$

munido da norma

$$\|u\|_\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2 dx \right)^{1/2}$$

e do produto interno

$$(u,v)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))uv dx.$$

Para cada aberto $\Theta \subset \mathbb{R}^3$ também definimos os espaços

$$\mathcal{H}_\lambda(\Theta) = \{u \in H^1(\Theta) : \int_\Theta (\lambda V(x) + Z(x))u^2 dx < \infty\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\lambda,\Theta} = \left(\int_{\Theta} [|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2]dx \right)^{1/2}.$$

Usando as hipóteses (V_1), (V_2) e (Z) é fácil verificar que os espaços $(\mathcal{H}_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ e $(\mathcal{H}_\lambda(\Theta), \|\cdot\|_{\lambda,\Theta})$ são espaços de Hilbert, valendo as imersões contínuas $\mathcal{H}_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{H}_\lambda(\Theta) \hookrightarrow H^1(\Theta)$.

Observe que para cada $\lambda \geq 1$ temos, por (V_2), que

$$\|u\|^2_{\lambda,\Theta} \geq M_0 |u|^2_{2,\Theta}$$

onde $|\cdot|_{s,U}$ é a norma usual do espaço $L^s(U)$.

Em vista da desigualdade acima temos o seguinte lema.

Lema 2.2.1 *Dado $\delta_0 \in (0,1)$ existe $\nu_0 \in (0,1)$ tal que, para qualquer aberto $\Theta \subset \mathbb{R}^3$,*

$$\delta_0 \|u\|^2_{\lambda,\Theta} \leq \|u\|^2_{\lambda,\Theta} - \nu_0 |u|^2_{2,\Theta}, \quad \textit{para todo} \quad u \in \mathcal{H}_\lambda(\Theta) \quad e \quad \lambda \geq 1. \tag{2.1}$$

Demonstração. A equação (2.1) é equivalente a dizer que $\|u\|^2_{\lambda,\Theta} \geq \frac{\nu_0}{1-\delta_0}|u|^2_{2,\Theta}$. Assim, fixado $\delta_0 \in (0,1)$, basta tomar $\nu_0 = \frac{1-\delta_0}{M_0}$ que o resultado segue direto do fato que $\|u\|^2_{\lambda,\Theta} \geq M_0|u|^2_{2,\Theta}$. ∎

Observe, pela demonstração do Lema acima que se $\delta_0 \approx 1$ então $\nu_0 \approx 0$.

Tendo em vista o crescimento crítico da não-linearidade do problema (P_λ), o próximo lema, que é uma consequência imediata do Lema de concentração-compacidade (ver [29], pag. 45), será de extrema importância nos nossos estudos.

Lema 2.2.2 *Seja $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência limitada satisfazendo:*

$$v_n \rightharpoonup v \quad em \quad L^{2^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$|v_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu,$$

$$|\nabla v_n|^2 \rightharpoonup \mu,$$

onde ν e μ são medidas finitas não negativas. Então existem, uma sequência de pontos $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ e uma sequência numérica $(\nu_n) \subset [0,\infty)$ tais que

$$\nu \equiv |v|^{2^*} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \delta_{x_i},$$

com

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{2/2^*} < \infty \quad e \quad \mu(\{x_i\}) \geq S\nu_i^{2/2^*} \quad \textit{para todo} \quad i \in \mathbb{N},$$

onde δ_{x_i} é a medida de Dirac concentrada em x_i.

Procedendo de forma análoga ao capítulo 1, soluções fracas não-negativas do problema (P_λ) são pontos críticos do funcional $I_\lambda : \mathcal{H}_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+(\lambda V(x)+Z(x)))dx+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx-\frac{\beta}{q+1}\int_{\mathbb{R}^3}(u_+)^{q+1}dx-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}(u_+)^6dx$$

onde $u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$.

2.3 O problema auxiliar (A_λ)

Nesta seção, inspirado nos argumentos de del Pino & Felmer [27], faremos uma modificação na não-linearidade do problema com a finalidade de obter um problema auxiliar a (P_λ).

Como estamos interessados em soluções positivas considere as funções $h; H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(s) = \begin{cases} \beta s^q + s^5, & \text{se} \quad s \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad s < 0, \end{cases}$$

e

$$H(s) = \int_0^s h(r)dr.$$

Como $\dfrac{h(s)}{s}$ é crescente em $(0,\infty)$, $\displaystyle\lim_{s\to 0+}\frac{h(s)}{s} = 0$ e $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{h(s)}{s} = \infty$ segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $a > 0$ tal $h(a)/a = \nu_0$, onde $\nu_0 > 0$ é a constante dada no Lema 2.2.1.

Considere as funções $f; F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s < 0, \\ h(s), & \text{se} \quad s \in [0, a], \\ \nu_0 s, & \text{se} \quad s \geq a, \end{cases}$$

e

$$F(s) = \int_0^s f(r)dr.$$

Como $h(s)/s$ é crescente em $(0, \infty)$ é fácil ver que $f(s) = \min\{\nu_0 s, h(s)\}$ para $s > 0$.

No que segue fixaremos as seguintes notações:

Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, seja Ω_j' um aberto limitado, com fronteira suave satisfazendo

$$\overline{\Omega_j} \subset \Omega_j' \quad \text{e} \quad \overline{\Omega_j'} \cap \overline{\Omega_l'} = \emptyset \quad \text{para todo} \quad j \neq l.$$

No que segue, com a finalidade de simplificar a notação denotaremos por U qualquer uma das componentes $\Omega_1, \cdots \Omega_k$ e por U' qualquer um dos abertos $\Omega_1', \cdots, \Omega_k'$. Considere também a função característica do conjunto U' definida por

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in U', \\ 0, & \text{se} \quad x \notin U' \end{cases}$$

Com as notações acima definimos as funções $g; G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,s) = \chi_U(x)h(s) + (1 - \chi_U(x))f(s)$$

e

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,r)dx = \chi_U(x)H(s) + (1 - \chi_U(x))F(s).$$

Observe, pelas definições de h e f, que $g(x,s)$ é não negativa e valem as seguintes desigualdades que serão bastante úteis ao longo deste capítulo.

$$H(s) - \frac{1}{q+1}h(s)s \leq 0, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

$$F(s) - \frac{1}{q+1}f(s)s \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\nu_0 s^2, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

e

$$g(x,s) \leq h(s) \quad \text{e} \quad g(x,s)s \leq \nu_0 s^2 \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Considere agora o funcional $J_\lambda : \mathcal{H}_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} [|\nabla u|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u^2]dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)dx. \tag{2.5}$$

Sob as hipóteses (V_1), (V_2), (Z) e a definição de g, verifica-se que $J_\lambda \in C^1(\mathcal{H}_\lambda, \mathbb{R})$ e seus pontos críticos são soluções fracas não-negativas do problema auxiliar

$$(A_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u + \phi u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Os problemas (A_λ) e (P_λ) estão relacionados no seguinte sentido: se u_λ é uma solução não-negativa do problema (A_λ) satisfazendo

$$u_\lambda(x) \leq a \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus U'$$

então u_λ é também solução de (P_λ).

Observação 2.3.1 *Como o nosso funcional energia possui um termo não-local*

$$J_\lambda(v_i+v_j)-(J_\lambda(v_i)+J_\lambda(v_j))=\frac{1}{4}\int_{\Omega_j}\phi_{v_i}v_j^2dx+\frac{1}{4}\int_{\Omega_i}\phi_{v_j}v_i^2dx>0$$

para todos $v_i,v_j\in\mathcal{H}_\lambda$ com $suppv_i\cap suppv_j=\emptyset$, dificultando a construção de soluções multibumps para o nosso problema.

2.3.1 A geometria do passo da montanha

Tal como no capítulo anterior, uma sequência $(u_n)\subset\mathcal{H}_\lambda$ é dita uma sequência de Palais-Smale no nível $c\in\mathbb{R}$, ou simplesmente uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_λ, quando

$$J_\lambda(u_n)\to c \quad \text{e} \quad J_\lambda'(u_n)\to 0\in(\mathcal{H}_\lambda)'. \tag{2.6}$$

Se além disso qualquer sequência $(PS)_c$, $(u_n)\subset\mathcal{H}_\lambda$, possui uma subsequência que converge forte em $\mathcal{H}_\lambda$ dizemos que J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Lema 2.3.2 *Seja $(u_n)\subset\mathcal{H}_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ do funcional J_λ. Então (u_n) é limitada em $(u_n)\subset\mathcal{H}_\lambda$ e em $H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração. Usando (2.6) temos que, para n grande

$$J_\lambda(u_n)-\frac{1}{q+1}J_\lambda'(u_n)u_n\le c+1+\|u_n\|_\lambda. \tag{2.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}J_\lambda(u_n)-\frac{1}{q+1}J_\lambda'(u_n)u_n&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\|u_n\|_\lambda^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx \\ -\int_{\mathbb{R}^3}(G(x,u_n)-\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n)dx&\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\|u_n\|_\lambda^2 \\ -\int_{U'}(G(x,u_n)-\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n)dx&-\int_{\mathbb{R}^3\setminus U'}(G(x,u_n)-\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n)dx\end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando (2.2) e (2.3) temos que

$$\int_{U'}(G(x,u_n)-\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n)dx=\int_{U'}(H(u_n)-\frac{1}{q+1}h(u_n)u_n)dx\le 0 \tag{2.9}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3\setminus U'}(G(x,u_n)-\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n)dx&=\int_{\mathbb{R}^3\setminus U'}(F(u_n)-\frac{1}{q+1}f(u_n)u_n)dx \\ &\le\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\nu_0|u_n|_2^2.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, de (2.7) - (2.10) segue que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\left(\|u_n\|_\lambda^2-\nu_0|u_n|_2^2\right)\leq c+1+\|u_n\|_\lambda. \tag{2.11}$$

Combinando (2.11) e o Lema 2.2.1 temos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\delta_0\|u_n\|_\lambda^2\leq c+1+\|u_n\|_\lambda$$

o que implica na limitação da sequência (u_n). ■

Fixado $j\in\{1,2,...,k\}$ considere o funcional $I_j: H_0^1(\Omega_j)\to\mathbb{R}$, dado por

$$I_j(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_j}(|\nabla u|^2+Z(x)u^2)dx+\frac{1}{4}\int_{\Omega_j}\phi_u u^2dx-\int_{\Omega_j}H(u)dx. \tag{2.12}$$

Observe que os pontos críticos de I_j são soluções fracas do problema

$$\begin{cases} -\Delta u+Z(x)u+\phi_{\widetilde{u}}u=\beta u^q+u^5 & \text{in} \quad \Omega_j,\\ u>0 & \text{in} \quad \Omega_j,\\ u=0 & \text{in} \quad \partial\Omega_j, \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $\widetilde{u}$ é tal que $\widetilde{u}(x)=u(x)\quad \text{se} \quad x\in\Omega_j$ e $\widetilde{u}(x)=0\quad \text{se}\quad x\notin\Omega_j$.

Procedendo de forma análoga ao capítulo anterior, verifica-se que I_j possui a geometria do passo da montanha. Considere o nível do passo da montanha, c_j, dado por

$$c_j=\inf_{\gamma\in\Gamma_j}\max_{t\in[0,1]}I_j(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma_j=\left\{\gamma\in C\left([0,1],H_0^1(\Omega_j)\right):\gamma(0)=0\quad \text{e}\quad I_j(\gamma(1))<0\right\}.$$

Além disso, usando que $h(s)/s^3$ é crescente em $(0,\infty)$ e [30, Lema 4.1], podemos caracterizar o nível do passo da montanha, c_j, associado ao funcional I_j como

$$0<c_j=\inf_{u\in H_0^1(\Omega_j)\setminus\{0\}}\max_{t\geq 0}I_j(tu).$$

Ainda mais, fixada uma função não-negativa $v_j\in H_0^1(\Omega_j)\setminus\{0\}$, existe um único $t_{\beta,j}>0$ tal que

$$\max_{t\geq 0}I_j(tv_j)=I_j(t_{\beta,j}v_j).$$

Lema 2.3.3 *Existe $\beta_* > 0$ tal que, para todo $\beta \geq \beta_*$, temos*

$$c_j \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{S^{\frac{3}{2}}}{2}\right) \quad \textit{para todo} \quad j \in \{1, 2, ..., k\},$$

onde S é a melhor constante de Sobolev na imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração. Pelos comentários anteriores a este lema temos que

$$c_j \leq I(t_{\beta,j}v_j) \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, 2, ..., k\} \tag{2.14}$$

onde $t_{\beta,j} > 0$ é tal que $\max\limits_{t\geq 0} I_j(tv_j) = I_j(t_{\beta,j}v_j)$. O número $t_{\beta,j}$ é caracterizado pela equação $I_j'(t_{\beta,j}v_j)v_j = 0$, ou seja,

$$\int_{\Omega_j}(|\nabla v_j|^2 + Z(x)v_j^2)dx + t_{\beta,j}^2\int_{\Omega_j}\phi_{v_j}{v_j}^2dx = \beta t_{\beta,j}^{q-1}\int_{\Omega_j}v_j^{q+1}dx + t_{\beta,j}^4\int_{\Omega_j}v_j^6dx. \tag{2.15}$$

Para simplificar a notação sejam a_j, b_j, c_j e d_j (todas positivas) as integrais que aparecem em (2.15) respectivamente. Segue de (2.15) que $a_j + b_jt_{\beta,j}^2 \geq d_jt_{\beta,j}^4$ e portanto existe $M > 0$ tal que

$$t_{\beta,j} \leq M \quad \text{para todo} \quad \beta > 0 \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Usando novamente (2.15) e a limitação de $t_{\beta,j}$ obtemos

$$a_j \leq \beta c_jt_{\beta,j}^{q-1} + d_jt_{\beta,j}^4 \leq a_j + b_jM^2$$

e portanto $\beta c_jt_{\beta,j}^{q-1} + d_jt_{\beta,j}^4$ é limitado para todo $\beta > 0$. No entanto, este fato só acontece se

$$\lim_{\beta\to\infty} t_{\beta,j} = 0.$$

Usando então a continuidade de I_j e (2.14) existe $\beta_j^* > 0$ tal que

$$c_j < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{S^{\frac{3}{2}}}{2}, \quad \text{para todo} \quad \beta \geq \beta_j^*. \tag{2.16}$$

Para concluir a demonstração do lema basta tomarmos $\beta_* = \max\limits_{1\leq j\leq k}\beta_j^*$. ∎

Lema 2.3.4 *J_λ satisfaz a geometria do passo da montanha.*

Demonstração. Pela definição da função f temos que $F(s) \leq \frac{1}{2}\nu_0 s^2$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^3\setminus U} F(u)dx - \int_U H(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\nu_0|u|_2^2 - \frac{\beta}{q+1}|u|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{6}|u|_6^6. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ para $s \in [2,6]$, existem constantes positivas C_1, C_2 e C_3 tais que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}(1-\nu_0 C_1)\|u\|_\lambda^2 - \frac{\beta C_2}{q+1}\|u\|_\lambda^{q+1} - \frac{1}{6}C_3\|u\|_\lambda^6.$$

Escolhendo $\nu_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que $1 - \nu_0 C_1 > 0$ e lembrando que $q+1 \in (4,6)$, a desigualdade acima implica que existem $r > 0$ e $\alpha > 0$ tais que se $\|u\|_\lambda = r$, então

$$J_\lambda(u) \geq \alpha.$$

Por outro lado, fixando $v \in C_0^\infty(U)$ não-negativa, para $t \geq 0$ temos

$$J_\lambda(tv) = \frac{1}{2}t^2\|v\|_\lambda^2 + \frac{1}{4}t^4\int_{\mathbb{R}^3} \phi_v v^2 dx - \frac{\beta}{q+1}t^{q+1}\int_{\mathbb{R}^3} |v|^{q+1}dx - \frac{1}{6}t^6\int_{\mathbb{R}^3} |v|^6 dx,$$

e portanto

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tv) = -\infty.$$

O limite acima implica que podemos escolher $\bar{t} > 0$ tal que $\bar{t} > \frac{r}{\|v\|_\lambda}$ e $J_\lambda(\bar{t}v) < 0$, mostrando a geometria do passo da montanha. ∎

Fixado $\lambda \geq 1$ seja c_λ o nível minimax do passo da montanha do funcional J_λ dado por

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma_\lambda = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)\right) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad J_\lambda(\gamma(1)) < 0\right\}.$$

Lema 2.3.5 *Fixado $\lambda \geq 1$, existe $\beta_* > 0$ tal que para todo $\beta \geq \beta_*$ temos*

$$c_\lambda \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{S^{\frac{3}{2}}}{2}\right).$$

Demonstração. Como $H_0^1(\Omega_j) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ e $J_\lambda(\gamma(1)) = I_j(\gamma(1))$ para $\gamma \in \Gamma_j$, temos que $\Gamma_j \subset \Gamma_\lambda$. Assim,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma_j} \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(\gamma(t)) = \inf_{\gamma\in\Gamma_j} \max_{t\in[0,1]} I_j(\gamma(t)) = c_j,$$

ou seja $c_\lambda \leq c_j$. Portanto, pelo Lema 2.3.3 temos

$$0 < c_\lambda \leq c_j \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \frac{S^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

■

2.3.2 A condição de Palais-Smale

Proposição 2.3.6 *Para cada* $\lambda \geq 1$ *e* $c \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{3}{2}}\right)$ *o funcional* J_λ *satisfaz a condição* $(PS)_c$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{H}_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_λ. Pelo Lema 2.3.2 temos que (u_n) é limitada em $\mathcal{H}_\lambda$. Usando a reflexividade de $\mathcal{H}_\lambda$ podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_\lambda \quad \text{e} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \tag{2.17}$$

para alguma $u \in \mathcal{H}_\lambda$. Além disso,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^r_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad \text{para} \quad r \in [1,6) \tag{2.18}$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q. t. p. em} \quad \mathbb{R}^3. \tag{2.19}$$

Usando o fato que $\mathcal{H}_\lambda$ é uniformemente convexo (pois é Hilbert) a demonstração se completa se mostrarmos que, a menos de subsequência, $\|u_n\|_\lambda \to \|u\|_\lambda$. Este fato será demonstrado em várias etapas.

1ª Parte: Dado $\epsilon > 0$ *existe* $R > 0$ *tal que*

$$\int_{|x|>R} [|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_n^2]dx \leq \epsilon/2 \quad \textit{para} \quad n \quad \textit{grande.} \tag{2.20}$$

Para demonstrar (2.20) escolha $R > 0$ de modo que $U' \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e considere uma função $\eta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$ tal que, $|\nabla \eta_R| \leq \frac{3}{R}$ com $\eta_R(x) = 1$ em $|x| > R$ e $\eta_R(x) = 0$ em $|x| < \frac{R}{2}$. Como $w_n := \eta_R u_n$ é limitada em $\mathcal{H}_\lambda$ temos

$$o_n(1) = J'_\lambda(u_n)w_n = \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_n^2\right) \eta_R dx \tag{2.21}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \eta_R dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 \eta_R dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n) u_n \eta_R dx.$$

Observe que, se $x \in U' \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$,

$$sg(x,s)\eta_R(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}$$

e se $x \notin U'$,

$$sg(x,s)\eta_R(x) = sf(s)\eta_R(x) \leq \nu_0 s^2 \eta_R(x) \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Usando (2.21), a positividade do termo não-local e a observação acima temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_n^2)\eta_R dx \leqq \nu_0 \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 \eta_R dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \eta_R dx + o_n(1). \tag{2.22}$$

Além disso, usando as desigualdades de Holder, Cauchy-Schwarz, a definição da função η_R e a limitação de (u_n), temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \eta_R dx \right| \leq \frac{C}{R}.$$

Combinando (2.22), a desigualdade acima e o Lema 2.2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{C}{R} + o_n(1) &\geq \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x) - \nu_0)u_n^2)\eta_R dx \qquad (2.23) \\ &\geq \int_{|x|>R} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x) - \nu_0)u_n^2)\eta_R dx \\ &= \int_{|x|>R} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x) - \nu_0)u_n^2) dx \\ &\geq \delta_0 \int_{|x|>R} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_n^2) dx. \end{aligned}$$

A conclusão da demonstração de (2.20) segue então de (2.23) tomando n e R suficientemente grandes.

2ª Parte: A sequência $(\nu_n) \subset [0, \infty)$ obtida da aplicação do Lema 2.2.2 à sequência (u_n) satisfaz

$$\nu_n = 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para começar, afirmamos que a sequência (ν_n) é finita. De fato, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, temos, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$J'_\lambda(u_n)\varphi = o_n(1).$$

Fixemos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$ tal que

$$\varphi|_{B_1(0)} \equiv 1, \quad \varphi|_{B_2^c(0)} \equiv 0 \quad \text{e} \quad |\nabla \varphi| \leq 2.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ arbitrário defina $\varphi_\epsilon(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\epsilon})$ onde $(x_j) \subset \mathbb{R}^3$ é a sequência do pontos distintos dada no Lema 2.2.2. Observe que a função φ_ϵ satisfaz

$$\varphi_\epsilon|_{B_\epsilon(x_j)} \equiv 1, \quad \varphi_\epsilon|_{B^c_{2\epsilon}(x_j)} \equiv 0 \quad \text{e} \quad |\nabla \varphi_\epsilon| \leq 2/\epsilon.$$

Como φ_ϵ é limitada em $\mathcal{H}_\lambda$ e (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ do funcional J_λ temos

$$\begin{aligned}\int_B |\nabla u_n|^2 \varphi_\epsilon dx + \int_B u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon dx + \int_B (\lambda V(x) + Z(x)) u_n^2 \varphi_\epsilon dx \\ + \int_B \phi_{u_n} u_n^2 \varphi_\epsilon dx = \int_B g(x, u_n) u_n \varphi_\epsilon dx + o_n(1)\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde $B := B_{2\epsilon}(x_j)$.

Observando que

$$\int_B (\lambda V(x) + Z(x)) u_n^2 \varphi_\epsilon dx + \int_B \phi_{u_n} u_n^2 \varphi_\epsilon dx \geq 0$$

pois todas os integrandos envolvidos são positivos e,

$$g(x,s)s \leq sh(s) = \beta s^{q+1} + s^6 \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+,$$

segue de (2.24) que

$$\int_B |\nabla u_n|^2 \varphi_\epsilon dx \leq \beta \int_B u_n^{q+1} \varphi_\epsilon dx + \int_B u_n^6 \varphi_\epsilon dx - \int_B u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon dx + o_n(1). \tag{2.25}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Holder e a limitação de (u_n) temos

$$-\int_B u_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon dx \leq \frac{2C}{\epsilon} |u_n|_{2,B}$$

e assim podemos reescrever (2.25) como

$$\int_B |\nabla u_n|^2 \varphi_\epsilon dx \leq \beta \int_B u_n^{q+1} \varphi_\epsilon dx + \int_B u_n^6 \varphi_\epsilon dx + \frac{2C}{\epsilon} |u_n|_{2,B} + o_n(1). \tag{2.26}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (2.26) e usando o Lema 2.2.2 obtemos

$$\int_B \varphi_\epsilon d\mu \leq \int_B \varphi_\epsilon d\nu + \beta \int_B u^{q+1} \varphi_\epsilon dx + \frac{2C}{\epsilon} |u|_{2,B}.$$

Novamente, pela desigualdade de Hölder temos que

$$|u|_{2,B} \leq |B|^{1/3} |u|_{6,B} = C_1 \epsilon |u|_{6,B}.$$

e portanto

$$\int_B \varphi_\epsilon d\mu \leq \int_B \varphi_\epsilon d\nu + \beta \int_B u^{q+1} \varphi_\epsilon dx + \widetilde{C} |u|_{6,B}. \tag{2.27}$$

Como

$$\varphi_\epsilon(x) \to \chi_{\{x_j\}}(x) \quad \text{q.t.p. em B, quando} \quad \epsilon \to 0,$$

onde $\chi_{\{x_j\}}$ é a função característica do conjunto $\{x_j\}$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue que

$$\int_B \varphi_\epsilon d\mu \to \mu(\{x_j\}) = \mu_j, \quad \int_B \varphi_\epsilon d\nu \to \nu(\{x_j\}) = \nu_j \quad \text{e} \quad \int_B u^{q+1}\varphi_\epsilon dx \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$. Passando o limite em (2.27) quando $\epsilon \to 0$ e usando os limites acima obtemos

$$\mu(\{x_j\}) \leq \nu_j \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

O Lema 2.2.2 também nos dá que

$$\mu(\{x_j\}) \geq S\nu_j^{1/3}, \quad \text{para todo} \quad j.$$

Logo, se $\nu_j > 0$ temos de (2.28) que $\nu_j \geq S^{3/2}$, donde se conclui a afirmação, pois de outra forma teríamos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{1/3} = \infty$$

que é uma contradição com o Lema 2.2.2.

Para provar que $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ usamos novamente que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para obter

$$\begin{aligned} o_n(1) + c = J_\lambda(u_n) - \frac{1}{q+1}J'_\lambda(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2 dx \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2 dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}[\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)]dx. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Usando (2.2), (2.3), (V_2) e o Lema 1.2.1(ii) obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)&\int_{\mathbb{R}^3}(\lambda V(x) + Z(x))u_n^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}[\frac{1}{q+1}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)M_0\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2 dx - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\nu_0\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2 dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)(M_0 - \nu_0)\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2 dx \geq 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Assim, por (2.29) e (2.30), temos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2dx \leq c+o_n(1)$$

e portanto, fazendo $n\to\infty$,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\mu(\{x_j\}) \leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}d\mu \leq c \quad \text{para todo} \quad j\in\mathbb{N}. \tag{2.31}$$

A desigualdade (2.31) implica que $\nu_j=0$ para todo $j\in\mathbb{N}$, pois caso exista algum j_0 tal que $\nu_{j_0}>0$, obtemos, de (2.28) e (2.31) que

$$c \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)\mu(\{x_{j_0}\}) \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)S\nu_{j_0}^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)S^{\frac{3}{2}}$$

que é uma contradição. Assim $\nu_j=0$ para todo $j\in\mathbb{N}$ e portanto, pelo Lema 2.2.2 temos que

$$|u_n|^6 \rightharpoonup |u|^6 \quad \text{em} \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^3).$$

Como consequência do fato acima, obtemos, da definição de convergência fraca em medida e da aplicação do *Lema de Brezis-Lieb* que

$$u_n\to u \quad \text{em} \quad L^6_{loc}(\mathbb{R}^3).$$

3ª Parte: Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_n)u_ndx \to \int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)udx. \tag{2.32}$$

Com efeito, como $u_n\to L^r_{loc}(\mathbb{R}^3),\quad r\in[1,6]$, usando o crescimento de $g(x,s)$ e o *Teorema da Convergência Dominada* temos que

$$\int_{B_R(0)}g(x,u_n)u_ndx \to \int_{B_R(0)}g(x,u)udx \tag{2.33}$$

para qualquer $R>0$.

Dado $\epsilon>0$ existe $R>0$ tal que

$$|u|_{2,B^c_R(0)} \leq \frac{\epsilon}{2\nu_0}.$$

Escolhendo $R>0$ de modo que $U'\subset B_R(0)$, usando (V_2), (2.20) e o fato que $g(x,s)s\leq \nu_0s^2$ para $x\notin U'$ e $s\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{B^c_R(0)}g(x,u_n)u_ndx-\int_{B^c_R(0)}g(x,u)udx\right| &\leq \int_{B^c_R(0)}\nu_0u_n^2dx+\nu_0\int_{B^c_R(0)}u^2dx\\ &\leq \int_{B^c_R(0)}[|\nabla u_n|^2+(\lambda V(x)+Z(x))u_n^2]dx+\nu_0|u|_{2,B^c_R(0)}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}+\nu_0\frac{\epsilon}{2\nu_0}=\epsilon.\end{aligned}$$

Da desigualdade acima temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{B_R^c(0)} g(x,u_n)u_n dx - \int_{B_R^c(0)} g(x,u)udx\right| \leq \epsilon$$

e como ϵ é arbitrário segue que

$$\int_{B_R^c(0)} g(x,u_n)u_n dx \to \int_{B_R^c(0)} g(x,u)udx. \tag{2.34}$$

Assim o limite em (2.32) segue de (2.33) e (2.34).

3ª Parte: Conclusão:

No que segue, usaremos o fato bem conhecido que o limite fraco, u, da sequência (u_n) é ponto crítico do funcional J_λ. Portanto $J'_\lambda(u)u = 0$, ou ainda,

$$\|u\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)udx. \tag{2.35}$$

Como (u_n) é uma sequência de Palais-Smale temos também que

$$\|u_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{2.36}$$

Aplicando $\liminf$ em (2.36), usando as propriedades do termo não local e (2.35) obtemos que $\liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_\lambda^2 = \|u\|_\lambda^2$, garantindo que $\|u\|_\lambda^2$ é um ponto de aderência para a sequência $(\|u_n\|_\lambda^2)$, donde se conclui que, a menos de subsequência $\|u_n\|_\lambda^2 \to \|u\|_\lambda^2$ e este fato junto com $u_n \rightharpoonup u$ implicam em $u_n \to u$ forte em $\mathcal{H}_\lambda$ e em $H^1(\mathbb{R}^3)$. ■

Teorema 2.3.7 *Existe $\beta_* > 0$ tal que para todo $\beta \geq \beta_*$ e $\lambda \geq 1$ o problema (A_λ) possui uma solução positiva .*

Demonstração. Consequência imediata do Lema 2.3.5, da Proposição 2.3.6 juntamente com o Teorema do Passo da Montanha aplicado ao funcional J_λ. ■

Observação 2.3.8 *Os lemas 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 e a Proposição 2.3.6 são válidos para os funcionais I_j, $1 \leq j \leq k$. Portanto vale o Teorema 2.3.7 para o problema limite (2.13).*

2.4 A condição $(PS)_{\infty,c}$

A seguir estudaremos o comportamento de um tipo de sequência, importante na demonstração do principal resultado deste capítulo e também para distinguir as soluções.

Definição 2.4.1 *Dizemos que $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma sequência $(PS)_{\infty,c}$ se existe uma sequência $(\lambda_n) \subset [1,\infty)$ com $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ verificando*

$$u_n \in \mathcal{H}_{\lambda_n}, \quad \lim_{n\to\infty} J_{\lambda_n}(u_n) = c \quad e \quad J'_{\lambda_n}(u_n) \to 0.$$

Proposição 2.4.2 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência $(PS)_{\infty,c}$ com $c \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{3}{2}}\right)$. Então, a menos de subsequência, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Além disso:

(i) $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0$ *e, em consequência disto,* $u_n \to u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^3)$*;*

(ii) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^3 \setminus U$ *e* $u_{|U}$ *é uma solução não-negativa do problema* (P_U)*;*

(iii) a sequência (u_n) também satisfaz:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \lambda_n V(x) u_n^2 dx \to 0, \tag{2.37}$$

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n, \mathbb{R}^3\setminus U} \to 0, \tag{2.38}$$

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n, U'} \to \int_U \left(|\nabla u|^2 + Z(x)u^2\right) dx, \tag{2.39}$$

$$J_{\lambda_n}(u_n) \to I_U(u) \tag{2.40}$$

onde,

$$I_U(u) = \int_U \left(|\nabla u|^2 + Z(x)u^2\right) dx + \frac{1}{4}\int_U \phi_u u^2 dx - \int_U \left(\frac{\beta}{q+1} u_+^{q+1} + \frac{1}{6} u_+^6\right) dx.$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{\infty,c}$ com $c \in \left(0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{3}{2}}\right)$. Usando o mesmo raciocínio apresentado na demonstração do Lema 2.3.2, temos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Além disso, pelos teoremas de imersão temos,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^s_{loc}(\mathbb{R}^3), \quad s \in [1,6),$$

e também

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q. t. p. em} \quad \mathbb{R}^3.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina o conjunto

$$V_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : V(x) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Usando (Z) e a definição de V_m temos,

$$\begin{aligned} \int_{V_m} u_n^2 dx &\leq \frac{m}{\lambda_n} \int_{V_m} \lambda_n V(x) u_n^2 dx \leq \frac{m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\lambda_n V(x) + (Z(x) + |Z(x)|) \right) u_n^2 dx \\ &\leq \frac{m}{\lambda_n} \left(\|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |Z(x)| u_n^2 dx \right) \leq \frac{m}{\lambda_n} \left(\|u_n\|_{\lambda_n}^2 + M_1 |u_n|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}_{\lambda_n} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ a desigualdade acima implica que

$$\int_{V_m} u_n^2 dx \leq \frac{m}{\lambda_n} (1 + C_1 M_1) \|u_n\|_{\lambda_n}^2 = \frac{C_m}{\lambda_n} \|u_n\|_{\lambda_n}^2.$$

Assim, do *Lema de Fatou* e da limitação da sequência $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ obtemos

$$\int_{V_m} u^2 dx = 0 \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N},$$

implicando que $u \equiv 0$ em V_m e, consequentemente em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$. Com este fato podemos demonstrar $(i) - (iv)$.

(i) Observe que

$$\begin{aligned} J'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u) - J'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_{u_n} u_n - \phi_u u)(u_n - u) dx}_{A_n} \\ - \int_{U'} (h(u_n) - h(u))(u_n - u) dx - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U'} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) dx \end{aligned} \tag{2.41}$$

Usando as propriedades do termo não-local (Lemma 1.2.1) podemos observar que

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u u_n - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n - u} (u_n - u)^2 dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Se mostrarmos que

$$\lim_{n \to \infty} J'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u) = \lim_{n \to \infty} J'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{U'}(h(u_n)-h(u))(u_n-u)dx = 0$$

então (i) segue de (2.41), (2.42), e da aplicação do Lema 2.2.1.

De fato, como $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3\backslash U'$, $f(0)=0$ e $f(s)s \leq \nu_0 s^2$ para todo $s \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3\backslash U'}(f(u_n)-f(u))(u_n-u)dx \leq \nu_0\int_{\mathbb{R}^3\backslash U'}|u_n-u|^2dx \leq \nu_0|u_n-u|_2^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \|u_n-u\|_{\lambda_n}^2 + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n-u}(u_n-u)^2dx - \int_{\mathbb{R}^3\backslash U'}(f(u_n)-f(u))(u_n-u)dx \\ &\geq \|u_n-u\|_{\lambda_n}^2 - \nu_0|u_n-u|_2^2 \geq \delta_0\|u_n-u\|_{\lambda_n}^2. \end{aligned}$$

A desigualdade acima claramente implica que

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{\lambda_n}^2 = 0$$

Usando argumentos análogos à demonstração da Proposição 2.3.6 temos que $u_n \to u$ em $L^6_{loc}(\mathbb{R}^3)$ de assim temos que

$$\int_{U'}(h(u_n)-h(u))(u_n-u)dx = o_n(1).$$

Usando que $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ é limitada temos

$$\left|J'_{\lambda_n}(u_n)(u_n-u)\right| \leq \|J'_{\lambda_n}(u_n)\|(\|u_n\|_{\lambda_n}+\|u\|_{\lambda_n}) \to 0.$$

Por fim, para demonstrar que $J'_{\lambda_n}(u)(u_n-u)\to 0$ basta observar que

$$\begin{aligned} J'_{\lambda_n}(u)(u_n-u) &= \int_{U'}\left(\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)+Z(x)u(u_n-u)\right)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u(u_n-u)dx - \int_{U'}h(u)(u_n-u)dx \end{aligned}$$

e valem

$$\int_{U'}\left(\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)+Z(x)u(u_n-u)\right)dx \to 0,$$

pois $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e a aplicação

$$v \to \int_{U'}\left(\nabla u\cdot\nabla v + Z(x)uv\right)dx$$

define um funcional linear contínuo em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso, pelas propriedades do termo não-local ϕ_u temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u(u_n - u)dx \to 0.$$

Isto completa a demonstração de (i).

(ii) Como $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ temos que $u \in H^1_0(\Omega)$ e portanto $u|_U \in H^1_0(U)$. Usando que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad J'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \to 0 \quad \text{para toda} \quad \varphi \in C_0^\infty(U),$$

obtemos que

$$\int_U (\nabla u \cdot \nabla \varphi + Z(x)u\varphi)\, dx + \int_U \phi_u u\varphi dx - \int_U g(x,u)\varphi dx = 0. \tag{2.43}$$

Como $g(x,u) = h(u)$ em U, (2.43) nos diz que $u|_U$ é solução do problema (P_j) para o caso em que $U = \Omega_j$.

Por outro lado, se $i \neq j$, tomando $\varphi = u|_{\Omega_i}$ em (2.43) obtemos

$$\int_{\Omega_i} \left(|\nabla u|^2 + Z(x)u^2\right) dx + \int_{\Omega_i} \phi_u u^2 dx - \int_{\Omega_i} f(u)dx = 0.$$

Daí, pela positividade de ϕ_u temos,

$$\|u\|_{\lambda,\Omega_i} \le \int_{\Omega_i} f(u)dx \le \nu_0 \int_{\Omega_i} u^2 dx.$$

e, consequentemente,

$$\|u\|^2_{\lambda,\Omega_i} - \nu_0 |u|^2_{2,\Omega_i} \le 0.$$

Assim, pelo Lema 2.2.1 obtemos,

$$\delta_0 \|u\|^2_{\lambda,\Omega_i} \le \|u\|^2_{\lambda,\Omega_i} - \nu_0 |u|^2_{2,\Omega_i} \le 0,$$

provando que $u|_{\Omega_i} = 0$ para $i \neq j$ e, consequentemente, $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_j$.

(iii) Para demonstrar (2.37) observe que $V \equiv 0$ em U e $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus U$. Assim, usando (Z) e a imersão $\mathcal{H}_{\lambda_n} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \lambda_n V(x) u_n^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U} \lambda_n V(x) u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U} \lambda_n V(x) |u_n - u|^2 dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla (u_n - u)|^2 + (\lambda_n V(x) + Z(x) + |Z(x)|)|u_n - u|^2\right) dz \\
&= \|u_n - u\|^2_{\lambda_n} + \int_{\mathbb{R}^3} |Z(x)|(u_n - u)^2 dx \\
&\le \|u_n - u\|^2_{\lambda_n} + M_1 |u_n - u|_2^2 \\
&\le (1 + CM_1)\, \|u_n - u\|^2_{\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Portanto usando (i) e a desigualdade acima, o limite (2.37) segue.

Para demonstrar (2.38) basta usar novamente (i) na desigualdade abaixo

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2_{\lambda_n,\mathbb{R}^3\setminus U} &= \|u_n-u\|^2_{\lambda_n,\mathbb{R}^3\setminus U}\\ &\leq \|u_n-u\|^2_{\lambda_n}.\end{aligned}$$

Para provar (2.39) observe primeiro que $u\equiv 0$ fora de U e $V\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Logo

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n,U'} = \int_U \left(|\nabla u_n|^2 + Z(x)u_n^2\right)dx + \|u_n-u\|^2_{\lambda_n,U'\setminus U}$$

Assim, (2.39) segue diretamente da igualdade acima e de (i). Para provar (2.40) observe primeiro que

$$\begin{aligned}J_{\lambda_n}(u_n) = &\int_{U'}(|\nabla u_n|^2+(\lambda_n V(x)+Z(x))u_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus U'}(|\nabla u_n|^2+(\lambda_n V(x)+Z(x))u_n^2dx\\ &+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_ndx - \int_{\mathbb{R}^3}G(x,u_n)dx.\end{aligned}$$

Usando agora os itens anteriores, as propriedades de ϕ_u e a definição de G temos

$$\int_{U'}(|\nabla u_n|^2+(\lambda_n V(x)+Z(x))u_n^2dx \to \int_U(|\nabla u|^2+Z(x)u^2)dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\ U'}(|\nabla u_n|^2+(\lambda_n V(x)+Z(x))u_n^2dx \to 0,$$

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_ndx \to \frac{1}{4}\int_U\phi_u udx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u_n)dx \to \int_U(\frac{\beta}{q+1}(u_+)^{q+1}+(u+)^6)dx$$

Portanto, os três limites acima implicam que

$$J_{\lambda_n}(u_n)\to I_U(u).$$

■

2.5 A limitação das soluções do problema (A_λ)

Nesta seção, estudaremos a limitação das soluções de (A_λ) fora de U', com a finalidade de mostrar que soluções de (A_λ), no caso em que λ é suficientemente grande, são na verdade soluções de (P_λ). Para isto, adaptaremos argumentos encontrados em Chabrowski & Szulkin [24] e um manuscrito de autoria de Xiang-Dong Fang & Zhi-Qing Han.

Proposição 2.5.1 *Seja (u_λ) uma família de soluções positivas do problema auxiliar (A_λ) tal que*

$$\sup_{\lambda\geq 1}\{J_\lambda(u_\lambda)\} < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1}\right)S^{3/2}.$$

Então existe $\lambda^*\geq 1$ tal que

$$|u_\lambda|_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus U'}\leq a, \quad \textit{para todo} \quad \lambda\geq\lambda^*.$$

Portanto, u_λ é solução do problema (P_λ), para $\lambda\geq\lambda^*$.

Antes de provar a proposição acima precisamos de dois resultados. O lema abaixo é uma versão de [19, Teorema 2.3] (ver também [4, Proposição 3.8]).

Lema 2.5.2 *Sejam $b:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}_+$ uma função mensurável e $g:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ uma função satisfazendo a seguinte propriedade: para cada $v\in H^1(\mathbb{R}^3)$ não negativa, existe uma função $h\in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$g(x,v(x))\leq (C_g+h(x))v(x), \quad \textit{para todo} \quad x\in\mathbb{R}^N,$$

onde $C_g>0$. Se $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca da equação

$$-\Delta v+b(x)v=g(x,v) \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

então $v\in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $2\leq p<\infty$. Mais ainda, existe uma constante $C_p=C(p,C_g,h)>0$ tal que

$$|v|_p\leq C_p\|v\|.$$

Além disso, se (v_k), (b_k) e (h_k) satisfazem as hipóteses acima e $h_k\to h$ em $L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, a sequência $C_{p,k}=C(p,C_g,h_k)$ é limitada.

Lema 2.5.3 *Sejam $h\in L^q(\mathbb{R}^N)$ não negativa onde $q>\frac{N}{2}$, $b:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^+$ mensurável e $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta v+b(x)v=g(x,v), \quad \textit{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{2.44}$$

onde $g:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ satisfaz

$$g\,(x,v(x))\leq h(x)v(x) \quad \textit{para todo} \quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Então dado $x_0\in\mathbb{R}^3$ existe $\rho>0$ tal que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} v(x)\leq M\left(\int_{B_{2\rho}(x_0)}|v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}, \tag{2.45}$$

onde $M = M(q, h, \rho) > 0$. *Em particular temos que*

$$|v|_\infty \leq M\|v\|.$$

Mais ainda, se v_k, b_k *e* h_k *satisfazem as hipóteses acima e* $(|h_k|_q)$ *é limitada, então as constantes* $M_k = M(q, |h|_k, \rho)$ *em (2.45) (substituindo* v *por* v_k*) são limitadas em* k.

Demonstração.

Seja $\phi(x) = \eta(x)^2 v(x) v_L(x)$, onde $v_L(x) = \min\{|v(x)|^{\beta-1}, L\}$, $\beta > 1$ e $L > 0$ são constantes e $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N, [0,1])$ é uma função com suporte compacto. Um cálculo simples nos dá que

$$\nabla\phi = 2\eta v v_L \nabla\eta + \eta^2 v_L \nabla v + \chi_{\{|v|^{\beta-1}<L\}}(\beta-1) v|v|^{\beta-2}\eta^2\nabla(|v|).$$

e

$$\nabla\phi\cdot\nabla v = \eta^2 v_L|\nabla v|^2 + 2\eta v v_L\nabla\eta\cdot\nabla v + \chi_{\{|v|^{\beta-1}<L\}}(\beta-1)\eta^2 v|v|^{\beta-2}\nabla v\cdot\nabla(|v|) \tag{2.46}$$

onde χ_A denota a função característica do conjunto A. Observando que $\nabla(|v|) = \frac{v}{|v|}\nabla v$ obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\{|v|^{\beta-1}<L\}}(\beta-1)\eta^2 v|v|^{\beta-2}\nabla v\cdot\nabla(|v|)dx \geq 0.$$

Usando ϕ como função teste na equação (2.44) segue de (2.46) e da observação acima que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\eta^2 v_L|\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} 2\eta v v_L\nabla\eta\cdot\nabla v dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h|v|^2\eta^2 v_L dx. \tag{2.47}$$

Como $v_L \geq 0$ e

$$\frac{1}{2}|\nabla v|^2\eta^2 \leq |\nabla v|^2\eta^2 + 2\eta v\nabla\eta\cdot\nabla v + 2v^2|\nabla\eta|^2$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\eta^2 v_L dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\eta^2 v_L dx + 2\int_{\mathbb{R}^N}\eta v v_L\nabla\eta\cdot\nabla v dx\\ + 2\int_{\mathbb{R}^N} v^2 v_L|\nabla\eta|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim, por (2.47) obtemos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\eta^2 v_L dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h|v|^2\eta^2 v_L dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} v^2 v_L|\nabla\eta|^2 dx. \tag{2.48}$$

Fazendo $L \to \infty$ em (2.48) obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\eta^2|v|^{\beta-1}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h|v|^{\beta+1}\eta^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\beta+1}|\nabla\eta|^2 dx$$

e, usando a substituição $w := |v|^{\frac{\beta+1}{2}}$, reescrevemos a desigualdade acima como

$$\frac{2}{(\beta+1)^2}\int_{\mathbb{R}^N} \eta^2|\nabla w|^2 dx \leq 2\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla\eta|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} hw^2\eta^2 dx. \tag{2.49}$$

Agora, usando (2.49) e a desigualdade abaixo

$$|\nabla(\eta w)|^2 \leq 2\eta^2|\nabla w|^2 + 2w^2|\nabla\eta|^2$$

obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\eta w)|^2 dx \leq (\beta+1)^2 &\int_{\mathbb{R}^N} hw^2\eta^2 dx \\ &+ 2((\beta+1)^2+1)\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla\eta|^2 dx.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Segue então, das desigualdades de Sobolev e Hölder, combinadas com (2.50) que

$$\begin{aligned}S\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\eta w)^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{N}} &\leq (\beta+1)^2|h|_q\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\eta w)^{2q_1 dx}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &+ 2((\beta+1)^2+1)\int_{\mathbb{R}^N} w^2|\nabla\eta|^2 dx\end{aligned} \tag{2.51}$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = 1$.

No que segue, fixe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e considere mais especificamente, $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\eta(x) \equiv 1$ em $B_{r_1}(x_0)$, $\eta(x) \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_{r_2}(x_0)$, $|\nabla\eta(x)| \leq \frac{2}{r_2 - r_1}$, $0 < r_1 < r_2$, $r_2 - r_1 \leq 1$. Assim, (2.51) pode ser reescrita na forma

$$\left(\int_{B_{r_1}(x_0)} |w|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C(\beta+1)\left(\int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^{2q_1 dx}\right)^{\frac{1}{2q_1}} + C_1\frac{(\beta+1)}{(r_2-r_1)}\left(\int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder e o fato que $r_2 - r_1 \leq 1$ obtemos que

$$\left(\int_{B_{r_1}(x_0)} |w|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C_3\frac{(\beta+1)}{(r_2-r_1)}\left(\int_{B_{r_2}(x_0)} |w|^{2q_1} dx\right)^{\frac{1}{2q_1}}$$

e daí, voltando a função v pela equação $w := |v|^{\frac{\beta+1}{2}}$ obtemos

$$\left(\int_{B_{r_1}(x_0)} |v|^{2^*\frac{\beta+1}{2}} dx\right)^{\frac{2}{2^*(\beta+1)}} \leq \left(C_3\frac{(\beta+1)}{(r_2-r_1)}\right)^{\frac{2}{(\beta+1)}}\left(\int_{B_{r_2}(x_0)} |v|^{q_1(\beta+1)} dx\right)^{\frac{1}{q_1(\beta+1)}}. \tag{2.52}$$

Como $q > \frac{N}{2}$ temos que $\sigma := \frac{2^*}{2}q_1 > 1$. Assim, tomando $\beta + 1 = 2\sigma$ em (2.51) obtemos

$$\left(\int_{B_{r_1}(x_0)} |v|^{2^*\sigma} dx\right)^{\frac{1}{2^*\sigma}} \leq \left(\frac{C_3 2\sigma}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_{B_{r_2}(x_0)} |v|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Para iterar a desigualdade (2.51), faça $s_m = \rho(1 + 2^{-m})$, $r_1 = s_m$, $r_2 = s_{m-1}$ e substitua $\beta + 1$ por $2\sigma^m$, $m = 1, 2, \cdots$. Daí temos

$$\left(\int_{B_{s_m}(x_0)} |v|^{2^*\sigma^m} dx\right)^{\frac{1}{2^*\sigma^m}} \leq \left(\frac{2C_3}{\rho}\right)^{\frac{1}{\sigma^m}} 2^{\frac{m}{\sigma^m}} (\sigma)^{\frac{m}{\sigma^m}} \left(\int_{B_{s_{m-1}}(x_0)} |v|^{2^*\sigma^{m-1}} dx\right)^{\frac{1}{2^*\sigma^{m-1}}}$$

Por indução sobre m obtemos que

$$\left(\int_{B_{s_m}(x_0)} |v|^{2^*\sigma^m} dx\right)^{\frac{1}{2^*\sigma^m}} \leq \left(\frac{2C_3}{\rho}\right)^{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma^j}} (2\sigma)^{\sum_{j=1}^m \frac{j}{\sigma^j}} \left(\int_{B_{s_0}(x_0)} |v|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}$$

para cada $m > 1$. Como $s_0 = 2\rho$, $s_m \to \rho$ e $\sigma > 1$, concluímos, da desigualdade acima que existe uma constante constantes $M > 0$ (que depende de ρ) tal que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} |v(x)| \leq M \left(\int_{B_{2\rho}(x_0)} |v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \tag{2.53}$$

Por fim, observe que se a sequência $(|h_k|_q)$ é limitada, segue de (2.51) que quando tivermos v_k no lugar de v em (2.53), as constantes $M_k = M(q, |h|_k, \rho)$ podem ser tomadas uniformemente limitadas em k. ∎

Demonstração da Proposição 2.5.1

Seja $(\lambda_n) \subset [1, \infty)$ uma sequência qualquer com $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Denote por $u_n(x) := u_{\lambda_n}(x)$ a solução positiva de (A_λ), obtida pela aplicação do Teorema 2.3.7, para $\lambda = \lambda_n$. Segue das hipóteses que (u_n) é uma sequência $(PS)_\infty$ e portanto, pela Proposição 2.4.2, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, com $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus U$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Com a finalidade de usar o Lema 2.5.3 (com $N = 3$ e $2^* = 6$) mostraremos que g satisfaz a condição de crescimento requerida. Para tal, usando (2.4) temos a seguinte estimativa:

$$g(x, s) \leq h(s) = \beta s^q + s^5 \leq \beta s + (\beta + 1)s^5 \quad \text{para todo} \quad (x, s) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty).$$

Assim, $g(x, u_n(x)) \leq (\beta + h_n(x))u_n(x)$, onde $h_n(x) = (\beta + 1)u_n^4(x)$. Observe que $h_n \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ e $h_n \to h := (\beta + 1)u^4$ em $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ pois $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^N)$.

As conclusões acima implicam que as hipóteses do Lema 2.5.2 são satisfeitas pela equação (A_{λ_n}) e portanto $u_n \in L^r(\mathbb{R}^3)$ para todo $2 \leq r < \infty$.

Podemos reescrever (A_{λ_n}) como

$$-\Delta u_n + (\lambda_n V(x) + Z(x) - \nu_0 + \phi_{u_n})u_n = g(x, u_n) - \nu_0 u_n := \widetilde{g}(x, u_n).$$

Usando (2.4), temos que $\widetilde{g}(x, t) = g(x, t) - \nu_0 t \leq h(t) - \nu_0 t = \beta t^q + t^5 - \nu_0 t$. Como $3 < q < 5$, existe $C > 0$ tal que $\widetilde{g}(x, t) \leq Ct^5$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Assim,

$$\widetilde{g}(x, u_n) \leq C|u_n|^5 = h_n(x)|u_n|$$

onde $h_n(x) := C|u_n(x)|^4$. Observe que $h_n \in L^q(\mathbb{R}^3)$ com $q > \frac{3}{2}$ desde que $q = \frac{r}{4}$ e $r > 6$. Além disso, usando o Lema 2.5.2 e o fato que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ temos que a sequência $(|h_n|_k)$ é limitada em n.

Segue então da observação anterior e de (V_2), que estamos nas hipóteses do Lema 2.5.3. Assim dado qualquer $x \in \mathbb{R}^3 \setminus U'$ e escolhendo $\rho > 0$ tal que $2\rho < \text{dist}(U', \partial\Omega)$ temos, por (2.45) (substituindo v por u_n), que

$$\sup_{B(x,\rho)} |u_n(x)| \leq M \left(\int_{B(x_0, 2\rho)} |u_n|^6 \right)^{\frac{1}{6}} \leq M\|u_n\|_{H^1(U^c)}$$

Como $u_n \to 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus U)$ a desigualdade acima implica que existe $n_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n(x) \leq a, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus U' \quad \text{e} \quad n \geq n_*.$$

Finalmente, como a sequência $(\lambda_n) \subset [1, \infty)$ foi tomada arbitrariamente, segue o resultado.

2.6 Demonstração do Teorema Principal

Demonstração do Teorema 2.1.1 Para $\beta_* > 0$ fixado no Lema 2.3.3 seja u_λ a solução do problema (A_λ) dada pelo Teorema 2.3.7. Como, para todo $\beta \geq \beta_*$

$$\sup_{\lambda \geq 1} \{J_\lambda(u_\lambda)\} = \sup_{\lambda \geq 1} \{c_\lambda\} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{3}{2}},$$

podemos usar a Proposição 2.5.1 para garantir que existe $\lambda_* = \lambda_*(\beta_*) \geq 1$ tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_*$, u_λ é solução do problema original (P_λ).

Para demonstrar a segunda parte do teorema considere uma sequência $(\lambda_n) \subset [\lambda_*, \infty)$ tal que $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e considere $u_n := u_{\lambda_n}$ a solução de (P_λ) para $\lambda = \lambda_n$. Como

$$J_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \frac{S^{\frac{3}{2}}}{2} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

podemos assumir que, a menos de subsequência, $J_{\lambda_n}(u_n) \to c \in (0, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) S^{\frac{3}{2}}$ quando $n \to \infty$, donde, (u_n) é uma sequência $(PS)_\infty$ nas hipóteses da Proposição 2.4.2. Assim, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus U$ e $u_{|U}$ é uma solução de energia mínima para o problema

$$(P_U) \qquad \begin{cases} -\Delta u + Z(x)u + \phi u = \beta u^q + u^5, & \text{em} \quad U, \\ -\Delta \phi = (\widetilde{u})^2, \quad \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), & \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial U \end{cases}$$

■

Apêndices

Apêndice A

Propriedades do termo não-local

Neste apêndice, apresentamos as principais propriedades do termo não local ϕ_u e damos uma demonstração do Lema 1.1.1.

Dada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi = u^2, & \text{em} \quad \mathbb{R}^3, \\ \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{A.1}$$

também conhecido como equação de Poisson. Uma aplicação direta do Teorema de Lax-Milgram garante que, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, existe uma única $\phi = \phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, solução de (A.1). O termo ϕ_u é tambem chamado de termo não local.

Para cada $u, v \in L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)$ dados, considere o funcional linear $h : D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definido por

$$h(w) = \int_{\mathbb{R}^3} wuv dx$$

Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, h está bem definido e, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$|h(w)| \leq |w|_6 |u|_{\frac{12}{5}} |v|_{\frac{12}{5}} \leq C\|w\|_{1,2} |u|_{\frac{12}{5}} |v|_{\frac{12}{5}},$$

donde se conclue que h é contínuo e $\|h\| \leq C|u|_{\frac{12}{5}}|v|_{\frac{12}{5}}$. Segue então, do Teorema de Riesz que existe um único $\psi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi \cdot \nabla w dx = \int_{\mathbb{R}^3} wuv dx \quad \text{para todo} \quad w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{A.2}$$

e, além disso, $\|\psi\|_{1,2} = \|h\|$. Veja que $\psi = \psi_{u,v}$ é solução fraca da equação de Poisson $-\Delta\psi = uv \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3$. Podemos então definir a aplicação

$$B : L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3) \times L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{A.3}$$
$$(u,v) \to B(u,v) = \psi_{u,v}.$$

Observe que B é bilinear, simétrica e vale

$$\|B(u,v)\|_{1,2} = \|\psi\|_{1,2} = \|h\| \leq C|u|_{\frac{12}{5}}|v|_{\frac{12}{5}} \tag{A.4}$$

e portanto B é contínua. Usando a aplicação B podemos definir a forma quadri-linear $a : \left(L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)\right)^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v,u_1,v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} u_1 v_1 B(u,v)dx.$$

Observe que a aplicação, a, é limitada e possui as seguintes propriedades de simetria

(S1) $a(u,v,u_1,v_1) = a(v,u,v_1.u_1)$,

(S2) $a(u,v,u_1,v_1) = a(u_1,v_1,u,v)$, isto é

$$\int_{\mathbb{R}^3} uv\psi_{u_1,v_1}dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi_{u,v}\cdot\nabla\psi_{u_1,v_1} = \int_{\mathbb{R}^3} u_1v_1\psi_{u,v}dx.$$

Podemos agora, usando as propriedades da aplicação B, interpretar o termo não local com sendo a aplicação

$$\phi : L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{A.5}$$
$$u \to \phi(u) = \phi_u := B(u,u).$$

Desse modo, $\phi_u = \psi_{u,u}$ e, como B é bilinear e contínua, temos as seguintes propriedades:

(i) ϕ_u é de classe C^∞ e $\phi'(u)v = 2B(u,v)$,

(ii) para cada $u,v,w \in L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} vw\phi_u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi_{v,w}\cdot\nabla\phi_u dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^2\psi_{v,w}dx$$

Considere agora o funcional $J : L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ definido por $J(u) = \frac{1}{4}a(u,u,u,u)$. Segue então, da definição de a e das propriedades (S1)-(S2) que J é de classe C^∞ e:

$$J(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \quad \text{e} \quad J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv dx.$$

Demonstração do Lema 1.1.1

(i) Usando a definição de ϕ_u e (A.4) temos que

$$\|\phi\|_{1,2} = \|B(u,u)\|_{1,2} \leq C|u|^2_{\frac{12}{5}}.$$

Além disso, como ϕ_u é solução fraca de (A.1), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 dx = \|\phi_u\|^2_{1,2} \leq \|\phi_u\|_6 |u|_{\frac{12}{5}} |u|_{\frac{12}{5}} \leq C|u|^4_{\frac{12}{5}}.$$

(ii) O ítem (ii) é uma consequência imediata do princípio do máximo.

(iii) $\phi_{tu} = B(tu,tu) = t^2 B(u,u) = t^2 \phi_u$.

(iv) Seja $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e tome $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Segue da definição de ϕ_u e da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\phi_{u_n} - \phi_u) \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^3} (u_n^2 - u^2) v dx &= \int_{\text{supp}(v)} (u_n^2 - u^2) v dx \qquad (A.6) \\ &\leq \|v\|_\infty \left(\int_{\text{supp}(v)} (u_n - u)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\text{supp}(v)} (u_n + u)^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como (u_n) é limitada e $u_n \to u$ em $L^2(\text{supp}(v))$, fazendo $n \to \infty$ em (A.6) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\phi_{u_n} - \phi_u) \cdot \nabla v dx \to 0 \quad \text{para toda} \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Por densidade, concluimos que $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Segue também da convergência acima que $\|\phi_u\|^2_{1,2} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\phi_{u_n}\|^2_{1,2}$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx.$$

(v) Fixado $\epsilon > 0$ considere $M_\epsilon > 0$ e uma função de corte $\eta_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$ satisfazendo

$$\eta_\epsilon \equiv 1 \quad \text{em} \quad |x| \leq M_\epsilon \quad \text{e} \quad \eta_\epsilon \equiv 0 \quad \text{em} \quad |x| \geq 2M_\epsilon$$

de modo que $w = u\eta_\epsilon$ satisfaz $|w - u|_{\frac{12}{5}} < \epsilon$ e $|w(x)| \leq |u(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ existe $K > 0$ tal que $|u_n - u|_{\frac{12}{5}} \leq K$ e $|u_n|_{\frac{12}{5}} \leq K$.

Pelas propriedades da aplicação a temos:

$$\begin{aligned} a(u_n, u_n, u_n, u) - a(u_n, u_n, u, u) &= a(u_n, u_n, u_n - u, u) \qquad (A.7) \\ &= a(u_n, u_n, u_n - u, u - w) + a(u_n, u_n, u_n - u, w); \end{aligned}$$

$$|a(u_n, u_n, u_n - u, u - w)| \leq |u_n|^2_{\frac{12}{5}} |u_n - u|_{\frac{12}{5}} |w - u|_{\frac{12}{5}} \leq K^3 \epsilon \tag{A.8}$$

e

$$\begin{aligned} |a(u_n, u_n, u_n - u, w)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} |u_n - u||w| dx \\ &= \int_{supt(w)} \phi_{u_n} |u_n - u||w| dx \\ &\leq |u_n|_{\frac{12}{5}} |w|_{\frac{12}{5}} |u_n - u|_{L^{\frac{12}{5}}(B_{2M_\epsilon}(0))}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Usando, (A.7), (A.8) e (A.9) obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} |a(u_n, u_n, u_n, u) - a(u_n, u_n, u, u)| \leq 2K^3 \epsilon \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0.$$

e daí segue que

$$\lim_{n\to\infty} (a(u_n, u_n, u_n, u) - a(u_n, u_n, u, u)) = 0. \tag{A.10}$$

Assim, da definição de a e da convergência fraca $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ obtemos,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx.$$

De modo análogo ao caso acima mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty} a(u_n, u_n, u, u) = \lim_{n\to\infty} a(u_n, u, u_n, u) = a(u, u, u, u). \tag{A.11}$$

Usando as propriedades (S1) e (S2) temos:

$$\begin{aligned} a(u_n - u, u_n - u, u_n - u, u_n - u) &= a(u_n, u_n, u_n, u_n) + a(u, u, u, u) \\ &- 4a(u_n, u_n, u_n, u) - 4a(u, u, u, u_n) \\ &+ 2a(u_n, u)n, u, u) + 4a(u_n, u, u_n, u). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Agora, (A.10) e (A.11) implicam que

$$\begin{aligned} &a(u, u, u, u) - 4a(u_n, u_n, u_n, u) - 4a(u, u, u, u_n) \\ &\quad + 2a(u_n, u)n, u, u) + 4a(u_n, u, u_n, u) = -a(u, u, u, u) + o_n(1). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Portanto, de (A.12) e (A.13) segue que

$$a(u_n - u, u_n - u, u_n - u, u_n - u) = a(u_n, u_n, u_n, u_n) - a(u, u, u, u) + o_n(1)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{(u_n - u)} (u_n - u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx + o_n(1).$$

(vi) m

Apêndice B

Resultados gerais

B.1 Resultados de convergência

Lema B.1 (Lema de Brezis-Lieb, 1º versão) *Seja* $(u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, *uma sequência limitada em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *e tal que* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

REFERÊNCIA: Kavian [31], pag. 10.

Lema B.2 (Lema de Brezis-Lieb, 2º versão) *Seja* $(u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, *uma sequência limitada em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *e tal que* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$. *Então* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$, *ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} uv dx$$

para toda $v \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

REFERÊNCIA: Kavian [31], pag. 11.

Lema B.3 (Lema de Fatou) *Seja* (u_n) *uma sequência de funções mensuráveis e positivas. Então*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} u_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)dx.$$

REFERÊNCIA: Kavian [31], pag. 09

Teorema B.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ *uma sequência de funções que satisfaz* *(i)* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω,

(ii) existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* n, $|u_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Então $u \in L^1(\Omega)$ *e* $|u_n - u|_1 \to 0$.

REFERÊNCIA: Brezis [17], pag. 42.

Teorema B.5 *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* (u_n) *uma sequência limitada em* E. *Então existe uma subsequência* (u_{n_j}) *que converge fraco para alguma* $u \in E$.

REFERÊNCIA: Brezis, [17], Teorema 3.18, pag. 69.

B.2 Teorema do Passo da Montanha

Teorema B.1 (Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale) *Seja* E *um espaço de Banach e* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, *com* $I(0) = 0$ *satisfazendo:*

i) existem $\alpha, \rho > 0$ *tais que*

$$I(u) \geq \alpha \quad \textit{para todo} \quad \|u\| = \rho,$$

ii) existe $e \in E$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e* $I(e) < 0$. *Então existe uma sequência* $(u_n) \subset E$ *tal que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0 \in E'$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

REFERÊNCIA: Willem, [30], Teorema 1.15, pag. 12.

Teorema B.2 (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz) *Sob as hipóteses do* **Teorema B.1**, *se* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$, *então* c *é um valor crítico de* I.

REFERÊNCIA: Willem, [30], Teorema 1.17, pag. 13.

B.3 Princípio de concentração-compacidade de Lions

Lema B.1 (Segundo lema de concentração de compacidade) *Seja (u_n) uma sequência limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^3),$$

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$$

onde $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e, ν e μ são medidas finitas não-negativas em $\mathbb{R}^3$. Então

(i) Existe um conjunto contável J, uma família $\{x_j, j \in J\}$de pontos distintos do $\mathbb{R}^3$ e uma família $\{\nu_j, j \in J\}$ de números não-negativos tais que

$$\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}.$$

onde δ_x é a medida de Dirac concentrada em x.

(ii) a medida μ verifica

$$\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

para alguma família $\{\mu_j; j \in J\}$, $\mu_j > 0$ satisfazendo

$$\mu_j \geq S(\nu_j)^{2/2^*}.$$

Em particular

$$\sum_{j \in J} (\nu_j)^{2/2^*} < \infty.$$

REFERÊNCIA: Struwe [29], pág. 42.

B.4 Multiplicadores de Lagrange

Teorema B.1 (Teorema dos multiplicadores de Lagrange) *Sejam X um espaço de Banach, $J, \Psi : X \to \mathbb{R}$ funcionais de classe C^1 e*

$$M = \{u \in X : \Psi(u) = 1\},$$

com $\Psi'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$. Se J é limitado inferiormente em M e existe $u_0 \in M$ verificando

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u)$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (chamado de multiplicador de Lagrange) tal que

$$J'(u_0) = \lambda \Psi'(u_0).$$

REFERÊNCIA: Kavian [31], Proposição 14.3, pag. 55.

x

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, D. Ruiz, Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson problem, Commun. Contemp. Math., **10**, (2008), 391–404.

[2] A. Azzollini, A. Pomponio, Ground state solutions for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations, J. Math. Appl., **14**, (2008), 90–108.

[3] C. O. Alves, A. El Hamidi, Nehari Manifolds and existence of positive solutions to a class of quasilinear problems, Non. Analysis, **60**, (2005), 611–624.

[4] C. O. Alves, D. C. Morais Filho, M. A. S. Souto. . Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in $\mathbb{R}^N$, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **52** (2009), 1–21.

[5] C. O. Alves, M. A. S. Souto, S. H. M. Soares, Schrödinger-Poisson equations without Ambrosetti-Rabinowitz condition, J. of Math. Anal. and Appl., **77**, (2011), 584–592.

[6] D. Cao, E. S. Noussair, Multiplicity of positive and nodal solutions for nonlinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$., Ann. Inst. H. Poincaré Sec. C, 13, **5**, (1996), 567–588.

[7] D. G. Costa, An invitation to variational methods in differential equations, Birkhäuser, (2006).

[8] D. M. Cao, H. S. Zhou, Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **126**, (1996), 443–463.

[9] D. M. Cao, H. S. Zhou, Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Proc. Soc. Roy. Edinburgh Sect A, **126**, (1996), 443–463.

[10] D. Ruiz, The Schrödinger-Poisson equation under the efect of a nolinear local term, J. Funct. Analysis, **237**, (2006), 655–674.

[11] D. Ruiz, The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term, J. Funct. Analysis, **237**, (2006), 655–674.

[12] E. Séré, Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems, Math. Z, **209**, (1992), 27–42.

[13] F. Zhao, L. Zhao, Positive solutions for the nonlinear Schrödinger-Poisson equations with the critical exponent, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and Appl., **70** (2009), 2150–2164.

[14] G. Li, S. Peng, C. Weng, Multi-bump solutions for the nonlinear Schrödinger-Poisson sistem, J. Math. Phys., **52**, (2011), 1377-1399.

[15] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic involving critical Sobolev exponent, Ann. Inst. H. Poincaré **Sec. 9**, (1992), 281–304.

[16] G. Cerami, G. Vaira, Positive solutions for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems, J. Diff. Equations, **248**, (2010), 521–543.

[17] H. Brézis, Functional Analysis, Soboles Spaces and Partial Differential Equations, Springer, (2011).

[18] H. Brézis, L. Niremberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math., **36**, (1983), 437–477.

[19] H. Brezis, T. Kato, Remarks on the Schrödinger operator with regular complex potentials, J. Math. Pures Appl., **58**, (1979), 137–151.

[20] H. L. Lin, Multiple positive solutions for semilinear systems, J. Math. Anal. Appl., **391**, (2012), 107–118.

[21] H. L. Lin, Positive solutions for nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, Non. Anal., **75**, (2012), 2660–2671.

[22] High energy for the superlinear Schrödinger-Maxwell equations, Nonlinear Anal., **71**, (2009), 4927–4934.

[23] J. A. Garcia, I. P. Alonzo, Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent with a nonsymmetric term, Trans. Am. Math. Soc., **2**, (1991), 877–985.

[24] J. Chabrowski, A. Szulkin, On the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent and magnetic field, Topol. Methods Nonlinear Anal. **25**(1) (2005), 219–237.

[25] J. Wang, J. Xu, F. Zhang, X. Chen, Existence of multi-bump solutions for a semilinear Schrödinger-Poisson system, Nonlinearity, **26**, (2013), 1377–1399.

[26] L. Zhao, F. Zhao, Positive solutions for Schrödinger-Poisson equations with a critical exponent, Non. Analysis, **70**, (2009), 2150–2164.

[27] M. del Pino, P. L. Felmer, Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Cal. Var. PDE, **4**, (1996), 121–137.

[28] M. del Pino, P. L. Felmer, Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Calc. Var. PDEs, **4**, (1996), 121–137.

[29] M. Struwe, Variational Methods, Springer, (1996).

[30] M. Willem, Minimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, (1996).

[31] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, (1993).

[32] P. L. Lions, La méthode de concentration-compacité en calculs des variations (ITCP, Trieste, 1988).

[33] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limite case, I, Rev. Mat. Ibero. , **1**, (1985), 46–20.

[34] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limite case, II, Rev. Mat. Ibero. , **1**, (1985), 145–201.

[35] S. Gaetano, Multiple positive solutions far a Schrödinger-Poisson-Slater system, J. Math. Anal. Appl., **365**, (2010), 288-299.

[36] S. Gaetano, Multiple Positive solutions for a Schrödinger-Poisson-Slater system, J. Math. Anal. Appl., **365**, (2010), 288–299.

[37] T. D'Aprile, D. Mugnai, Non-existence results for the coupled Klein-Gordon-Maxwell equations, Adv. Nonlinear Stud., **4**, (2004), 307–322.

[38] T. D'Aprile, D. Mugnai, Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations, Proc. Roy. Edinburgh Sect. A, **134**, (2004), 893–906.

[39] T. D'Aprile, D. Mugnai, Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell equations, Proc. Roy. Edinburgh Sect. A, **134**, (2004), 893–906.

[40] T. F. Wu, Multiplicity of positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$., Proc. Roy.. Soc. Edinburgh Sect.A, **138**, (2008b), 647–670.

[41] V. Benci, D. Fortunato, An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations, Top. Meth. Nonlinear Anal., **11**, (1998), 283–293.

[42] V. Benci, D. Fortunato, Solitary waves in abelian gauge theories, Adv. Nonlinear Stud., **8**, (2008), nº 2, 327–352.

[43] Y. Ding, K. Tanaka. Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation, A polynomial characterization of Hilbert spaces, Collectanea Mathematica, **112** (2003), 109–135.

[44] Y. Jiang, H.S. Zhou, Schrödinger-Poisson system with steep potential well, J. Diff. Equations, **251**, (2011), 582–608.