Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Soluções Positivas para uma Classe de Equações Elípticas Semilineares

Enieze Cardoso de Pontes

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre Soluções Positivas para uma Classe de Equações Elípticas Semilineares

por

Enieze Cardoso de Pontes

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2014

P814s Pontes, Enieze Cardoso de.

Sobre Soluções Positivas para uma Classe de Equações Elípticas Semilineares / Enieze Cardoso de Pontes. - João Pessoa, 2014.

86f.

Orientador: Uberlandio Batista Severo.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Equações elípticas semilineares. 3. Método variacional. 4. Teorema do Passo da Montanha. 5. Espaços de Banach Ordenados.

CCEN/BC CDU: 51(043)

Sobre Soluções Positivas para uma Classe de Equações Elípticas Semilineares

por

Enieze Cardoso de Pontes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 25 de Fevereiro de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto – UFCG
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Examinador Interno)

Ao meu pai e aos futuros alunos de mestrado que utilizarão os conhecimentos aqui apresentados

Agradecimentos

A Deus, Amado de minh'alma, por sua misericórdia e providência manifestadas ao longo desse curso de mestrado, que me sustentaram para seguir em frente.

Ao meu pai Jorge Felipe de Pontes, sua esposa Lúcia de Fátima e minha irmã Élida Cardoso de Pontes, por todo o apoio e compreensão diante da renúncia de minha presença junto a eles em favor da confecção desse trabalho.

Ao professor Uberlandio Batista Severo, por sua generosidade em me ensinar Matemática e por sua dedicação constante a vencer junto comigo cada obstáculo que se colocava, desde a disciplina de Cálculo I, passando pela Iniciação Científica, até a conclusão desse mestrado.

Aos demais professores dessa instituição, em especial aos que me ensinaram nas disciplinas no decorrer do curso.

Aos meus amigos que estavam comigo desde a graduação e permaneceram no mestrado, em especial Kelyane Abreu e Tuanny Maciel, a todos que fizeram parte do Projeto Milenium, aos que passei a conhecer no mestrado e aos atuais doutorandos dessa instituição pelos momentos compartilhados.

Ao meu namorado Arthur Aires, por seu gratuito amor de doação que gera em mim gratidão, desejo de ser melhor, e por seu constante apoio diante das dificuldades ocorridas nesse curso de mestrado.

A CAPES pelo incentivo financeiro que tornou possível minha formação acadêmica.

Resumo

Neste trabalho, estudamos existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas semilineares em um domínio limitado suave, com condição de fronteira de Dirichlet, tanto com termos não-lineares mudando de sinal, quanto com termos com pequenas perturbações. A fim de obtermos solução positiva, no primeiro caso, usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para Espaços de Banach Ordenados. No segundo caso, o termo principal está sob condições que garantem a aplicação do Teorema do Passo da Montanha usual e o termo de perturbação não requer nenhuma hipótese.

Palavras-chave: Equações elípticas semilineares, método variacional, Teorema do Passo da Montanha, espaços de Banach Ordenados.

Abstract

In this work, we study the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic equations in a smooth bounded domain, with Dirichlet boundary condition and non-linear terms changing sign as well as with small perturbations. In order to obtain the positive solution, in the first case we use a version of the Mountain Pass Theorem in Ordered Banach spaces. In the second case, the main term is under assumptions that guarantee the application of the usual Mountain Pass Theorem and the perturbation term does not require any hypothesis.

Keywords: Semilinear elliptic equations, variational method, Mountain Pass Theorem, Ordered Banach space.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas na dissertação.

- Ω denota um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$;

- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω;

- C, C_1, C_2, ... denotam constantes positivas, possivelmente deferentes;

- $\square$ denota o final de uma demonstração;

- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;

- $supp(u)$ denota o suporte da função u;

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;

- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função u;

- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, em que $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 \; ; \; |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas de suporte compacto;

- $C^k(\Omega)$, com $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;

- $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;

- Para $1 \leq p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists g_1, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{1/p};$$

- $W_0^{1,2}(\Omega)$ denota o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma de $W^{1,p}(\Omega)$

- $H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$

- Para $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p < \infty$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \; ; \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ para todo } i = 1, \ldots, N \right\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Introdução

Neste trabalho, primeiramente estudamos questões relacionadas à existência de soluções estritamente positiva para equações elípticas semilineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que o termo não-linear é contínuo sobre $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ e pode mudar de sinal, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e $N \geq 1$.

Usando o método variacional, pode-se associar ao problema (1) um funcional de classe C^1 para o qual pontos críticos correspondem a soluções do respectivo problema. Quando o funcional associado possui a geometria do Passo da Montanha, o usual Teorema do Passo da Montanha devido à Ambrosetti-Rabinowitz (ver [1]) garante a existência de uma solução não-trivial para o problema (1). Além disso, se $f(x,0) = 0$, então estendendo a aplicação convenientemente e aplicando o Princípio do Máximo Forte é possível garantir a existência de solução estritamente positiva.

Quando $f(x,s)$ é ímpar com respeito a s, o método da variedade de Nehari encontrada em Willen (ver [8]) também é válido para obter uma solução positiva. Uma outra abordagem, usada por Liu e Sun (ver [14]) é usar um espaço invariante de fluxo descendente. Entretanto, neste trabalho, os estudos sobre solução positiva do problema (1) seguem o artigo [11] de Kajikiya como referência. Em tal artigo, Kajikiya prova a existência de solução positiva quando $f(x,0) \neq 0$ ou $f(x,s)$ não é ímpar. Para isso, ele estabelece uma nova versão do Teorema do Passo da Montanha, aplicada sobre espaços de Banach Ordenados, também definidos por ele.

Num segundo momento, também considerando Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e $N \geq 1$, estudamos questões relacionadas à existência de solução positiva para equações elípticas semilineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \lambda g(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

em que as aplicações $f(x,s)$ e $g(x,s)$ são contínuas sobre $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, f é dito termo principal e tem uma estrutura do Passo da Montanha, g é dito termo de perturbação e é livre de condições, e ainda, $|\lambda|$ é suficientemente pequeno.

Nesse caso, usamos outra referência de Kajikiya (ver [12]), na qual o termo principal está sob hipóteses que garantem $f(x,0) = 0$ em Ω, o que torna possível estender a aplicação $f \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ com $f(x,s) = 0$ para $s < 0$, e ainda garantem a geometria do passo da Montanha do funcional associado a (2), com a extensão de f, quando $\lambda = 0$. Então, aplica-se o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz para provar a existência de uma solução não-trivial e, em seguida, o Princípio do Máximo de Hopf para demonstrar que a solução é positiva. Além disso, quando $|\lambda|$ é suficientemente pequeno, a solução existente para (2) quando $\lambda = 0$ torna-se também solução de (2) quando $\lambda \neq 0$, sem que se coloque hipóteses adicionais sobre o termo de perturbação. Se o termo de perturbação for não-negativo, prova-se ainda a existência de pelo menos duas soluções positivas.

Assim sendo, nosso trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice, onde os dois primeiros capítulos são baseados no artigo [11] e o terceiro capítulo é baseado no artigo [12].

No *Capítulo* 1, apresentamos o Teorema do Passo da Montanha usual, as definições de Espaços de Banach Ordenados e de Espaços de Riesz-Banach, exemplificamos e analisamos a possível continuidade da aplicação $u \longmapsto |u|$ definida sobre um espaço Riesz-Banach. Além disso, apresentamos uma demonstração do Lema de Deformação e do Teorema do Passo da Montanha para Espaços de Banach Ordenados, o qual é aplicado em espaços de Riesz-Banach em que a aplicação $u \longmapsto |u|$ é contínua. O conhecimento de tais resultados nos dá suporte para a demonstração de existência de solução positiva nos capítulos seguintes.

O *Capítulo* 2 é dedicado a duas aplicações do Teorema do Passo da Montanha para espaços de Banach Ordenados em equações elípticas semilineares com termo não-linear mudando de sinal. Na primeira delas, não se exige que o termo não-linear satisfaça $h(x,0) = 0$, não sendo necessário fazer uma extensão ímpar do termo não linear. Na segunda, o termo não-linear satisfaz $h(x,0) = 0$ e a extensão é definida de forma a ser ímpar.

No *Capítulo* 3, aplicamos o usual Teorema do Passo da montanha na demonstração da existência de solução positiva de uma equação elíptica semilinear quando não há termo de perturbação. Em seguida, considera-se uma perturbação suficientemente pequena (isto é, com λ suficientemente pequeno) de forma que a solução positiva encontrada inicialmente permaneça sendo solução do problema, mesmo sem a adição de hipóteses sobre o termo de perturbação.

Finalmente, o *Apêndice A* é dedicado aos enunciados de alguns resultados básicos que serão utilizados ao longo dos capítulos.

Capítulo 1

Teorema do Passo da Montanha em espaços de Banach Ordenados

Neste capítulo, vamos apresentar alguns resultados que serão essenciais para o restante do trabalho. Partimos do usual Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz (ver [1], [10]) , que é aplicado em espaços de Banach e fornece solução não-trivial, pelo método variacional, para equações elípticas semilineares cujo termo não linear possui a geometria do Passo da Montanha. Em seguida, apresentaremos as definições de espaço de Banach Ordenado e espaço Riesz-Banach, sobre os quais é possível demonstrar uma nova versão do Teorema do Passo da Montanha devida à Kajikyia [11]. Este fornecerá uma solução não-trivial e não-negativa para o nosso problema, e aqui denomina-se Teorema do Passo da Montanha em Espaços de Banach Ordenados.

Definição 1.1. *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e E um espaço de Banach. Um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a Condição de Palais-Smale no nível c, chamada de condição $(PS)_c$, quando toda sequência $\{u_n\}$ em E que satisfaz*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

possuir uma subsequência convergente. Além disso, se I satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, então diz-se que I satisfaz a Condição de Palais-Smale, chamada de condição (PS).

Teorema 1.1 (Teorema do Passo da Montanha, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973)**.** *Sejam E um espaço de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de Classe C^1, $e \in E$ e $r > 0$ tais que*

$$\|e\| > r \text{ e } b := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) = 0 \geq I(e). \tag{1.1}$$

Se

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\},$$

e I satisfaz a condição $(PS)_c$, então o funcional I possui um ponto crítico $u \in E$ tal que $I'(u) = 0$ e $I(u) = c \geq b > I(0) = 0$.

Demonstração. ver [1]. □

A condição dada em (1.1), denomina-se geometria do Passo da Montanha, cuja intuição geométrica está representada na figura abaixo. Além disso, o número c é dito nível do Passo da Montanha.

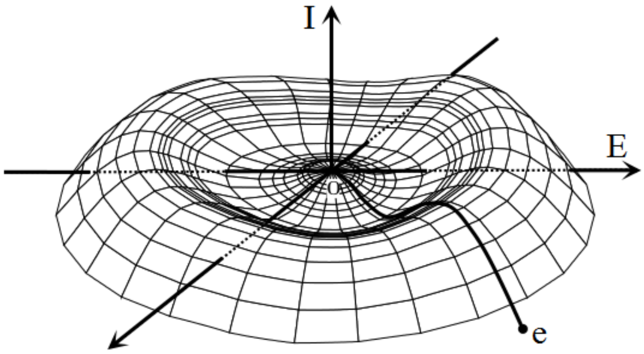

Figura 1.1: Geometria do Passo da Montanha. Fonte: Struwe [7] p.109 (modificada).

Observe que na versão acima impomos $I(0) = 0$ na geometria do Passo da Montanha. Assim, em funcionais que não satisfazem essa hipótese não se pode garantir, via Teorema do Passo da Montanha, a existência de uma solução não-trivial. Esse fato justifica a não utilização do Teorema do Passo da Montanha na primeira aplicação do Capítulo 2.

1.1 Definição e exemplos de Espaços de Banach Ordenados

Sobre um espaço de Banach real, pode-se definir uma ordem parcial, originando assim um Espaço de Banach Ordenado. Nessa seção, definiremos tais espaços e daremos alguns exemplos, baseando-nos no artigo [11].

Definição 1.2. *Um conjunto E é dito um espaço de Banach Ordenado se satisfaz as seguintes condições:*
(i) $(E, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado;
(ii) $(E, \|.\|)$ é um espaço de Banach real;
(iii) Sejam $u, v, w \in E$. Se $u \preceq v$ então $u + w \preceq v + w$ e $\lambda u \preceq \lambda v$ para todo $\lambda \in [0, \infty)$;
(iv) $E^+ := \{u \in E : 0 \preceq u\}$ é um subconjunto fechado de E chamado de cone positivo.

Um exemplo simples de espaço de Banach Ordenado é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da ordem e norma usuais. Adiante, daremos exemplos mais complexos desse tipo de espaço.

Por hora, chamamos a atenção para o fato de que a ordem do item (i) é, a priori, somente parcial. Então, dado um subconjunto $\{u, v\}$ de um espaço de Banach ordenado E, é possível que $u \not\preceq v$ e $v \not\preceq u$. Nesse caso, $\sup\{u, v\} \neq u$, $\sup\{u, v\} \neq v$ e é possível que não exista $\sup\{u, v\} \in E$. No caso em que $\sup\{u, v\}$ e $\inf\{u, v\}$ existem em E, chamaremos E de espaço Riesz-Banach, conforme a definição seguinte.

Definição 1.3. *Seja E um espaço de Banach Ordenado. Diz-se que E é um espaço Riesz-Banach se para cada $u, v \in E$ existem*

$$u \vee v := sup\{u, v\} \in E \quad e \quad u \wedge v := \inf\{u, v\} \in E.$$

Nesse caso, define-se $|u| := u \vee (-u)$, $u^+ := u \vee 0$, $u^- := (-u) \vee 0$.

Observação 1.1. Seja E um espaço de Riesz-Banach. Então, temos que
1) $u^- = (-u)^+$;
2) $|u| = u^+ + u^-$;
3) $u^+ = \dfrac{1}{2}(u + |u|)$.
De fato, ocorre 1) pois $(-u)^+ = (-u) \vee 0 = u^-$. Além disso, note que

$$u^+ = u \vee 0 = \sup\{u, 0\} \Rightarrow u \preceq u^+ \text{ e } 0 \preceq u^+$$
$$u^- = (-u) \vee 0 = \sup\{-u, 0\} \Rightarrow -u \preceq u^- \text{ e } 0 \preceq u^-.$$

Daí, e do item (iii) da Definição 1.1, segue que

$$0 \preceq u^- \Rightarrow 0 + u^+ \preceq u^- + u^+ \Rightarrow u \preceq u^+ \preceq u^+ + u^- \Rightarrow u \preceq u^+ + u^-$$
$$0 \preceq u^+ \Rightarrow 0 + u^- \preceq u^+ + u^- \Rightarrow -u \preceq u^- \preceq u^+ + u^- \Rightarrow -u \preceq u^+ + u^-$$

donde $|u| = u \vee (-u) = \sup\{u, -u\} \preceq u^+ + u^- = u^+ + (-u)^+$. Por outro lado, $u \preceq |u|$ e $-u \preceq |u|$, o que implica

$$0 = u + (-u) \preceq |u| + (-u) \preceq |u| + |u| = 2|u| \Rightarrow \frac{1}{2}.0 \preceq \frac{1}{2}.2|u| \Rightarrow 0 \preceq |u|.$$

Então $\sup\{u, -u, 0\} \preceq |u|$. Logo, $u^+ + (-u)^+ = \sup\{u, 0\} + \sup\{-u, 0\} = \sup(\{u, 0\} + \{-u, 0\}) = \sup\{u, -u, 0\} \preceq |u|$. Portanto, $|u| = u^+ + (-u)^+$ e tem-se 2). Note ainda que

$$u + (-u)^+ = \sup\{u\} + \sup\{-u, 0\} = \sup(\{u\} + \{-u, 0\}) = \sup\{u, 0\} = u^+.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}(u+(-u)^+) = \frac{1}{2}u^+ \Rightarrow \frac{1}{2}u^+ + \frac{1}{2}(u+(-u)^+) = u^+ \Rightarrow \frac{1}{2}(u+(u^+ + (-u)^+)) = u^+ \Rightarrow \frac{1}{2}(u+|u|) = u^+,$$

que prova 3).

A partir dessa observação, vê-se que, num espaço de Riesz-Banach, as continuidades das aplicações $u \mapsto |u|$, $u \mapsto u^+$ e $u \mapsto u^-$ são equivalentes, pois as aplicações $u \mapsto u$, $u \mapsto -u$, soma, produto por escalar e composição de funções contínuas são contínuas. Ou seja, supondo $u \mapsto |u|$ contínua tem-se $u \mapsto u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|)$ e $u \mapsto u^- = (-u)^+$ contínuas; supondo agora $u \mapsto u^+$ contínua tem-se $u \mapsto |u| = u^+ + (-u)^+$ e $u \mapsto u^- = (-u)^+$ contínuas; e finalmente se $u \mapsto u^-$ for contínua tem-se $u \mapsto |u| = u^+ + (-u)^+ = (-u)^- + u^-$ e $u \mapsto u^+ = \frac{1}{2}(u+|u|)$ contínuas.

Exemplo 1.1. Sejam Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e $p \geq 1$. Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach Ordenados, munidos da ordem

$$u \preceq v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

As condições (i) e (iii) da Definição 1.1 são claramente satisfeitas para esses espaços. Além disso, já sabemos que eles são espaços de Banach reais. Então, basta mostrar que

$$\begin{aligned}
&L^p(\Omega)^+ := \{u \in L^p(\Omega) : 0 \preceq u\} = \{u \in L^p(\Omega) : u(x) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega\},\\
&W^{k,p}(\Omega)^+ := \{u \in W^{k,p}(\Omega) : 0 \preceq u\} = \{u \in W^{k,p}(\Omega) : u(x) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega\} \text{ e}\\
&W_0^{k,p}(\Omega)^+ := \{u \in W_0^{k,p}(\Omega) : 0 \preceq u\} = \{u \in W_0^{k,p}(\Omega) : u(x) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega\}
\end{aligned}$$

são subconjuntos fechados de $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$, respectivamente. De fato, seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)^+$ tal que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então, $u_n(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω e, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Mas,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, $u(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω. Portanto, $u \in L^p(\Omega)^+$ e $L^p(\Omega)^+$ é fechado em $L^p(\Omega)$. As provas que $W^{k,p}(\Omega)^+$ e $W_0^{k,p}(\Omega)^+$ são subconjuntos fechados de $L^p(\Omega)$ seguem analogamente, pois se $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$ ou em $W_0^{k,p}(\Omega)$ então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$.

A fim de exemplificar que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Riesz-Banach, com $p \geq 1$ e Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, apresentaremos abaixo alguns resultados auxiliares.

Proposição 1.2. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada f' é limitada. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então*

$$v := f(u) \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x_i} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ para cada } i = 1, ..., N.$$

Demonstração. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dado $t \in \mathbb{R}$, pelo teorema do valor médio, existe t_0 entre 0 e t tal que

$$\frac{|f(t) - f(0)|}{|t - 0|} = |f'(t_0)| \leq M \text{ para alguma constante } M,$$

pois f' é limitada. Então $|f(t)| \leq M|t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $|f(u(x))| \leq M|u(x)|$ para todo $x \in \Omega$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Logo

$$\int_\Omega |f(u(x))|^p dx \leq M^p \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty \text{ e}$$

$$|f(u(x))| \leq M|u(x)| < C_1 \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ se } p = \infty,$$

donde $v := f(u) \in L^p(\Omega)$. Além disso, $|f'(u)| \leq M$ em Ω, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, para cada $i = 1, ..., N$, tem-se

$$|f'(u)| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq M \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|, \text{ com } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

Daí,

$$\int_\Omega |f'(u(x))|^p \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx \leq M^p \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty \text{ e}$$

$$|f'(u(x))| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leq M \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| < C_2 \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ se } p = \infty,$$

Logo $f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$. Resta mostrar que

$$\int_\Omega f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.2}$$

isto é, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Quando $1 \leq p < \infty$, pode-se escolher uma sequencia $\{u_n\}$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L^p(\omega) \text{ para todo } \omega \subset\subset \Omega.$$

Como $\{u_n\} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$, então $f(u_n) \in C^1(\mathbb{R})$. Em particular, temos que

$$\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(u_n)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

Pela escolha de (u_n) e pela continuidade de f', tem-se para cada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$f(u_n)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \longrightarrow f(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \text{ em } L^p(\Omega) \text{ e}$$

$$f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi \longrightarrow f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi \text{ em } L^p(\omega) \text{ para todo } \omega \subset\subset \Omega.$$

Além disso, como $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tem suporte compacto, $|u_n| \leq h_p \in L^p(\Omega)$ e $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq \tilde{h}_p \in L^p(\Omega)$, tem-se

$$\left|f(u_n)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| \leq M|u_n|\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| \leq C_3|u_n| \leq C_3 h_p \in L^p(\Omega) \text{ e}$$

$$\left|f'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\phi\right| \leq M\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right||\phi| \leq C_4\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq C_4\tilde{h}_p \in L^p(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, de (1.3) segue (1.2).

Agora, quando $p = \infty$, dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fixe um aberto Ω' tal que *supp*$\phi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Então $u \in W^{1,p}(\Omega')$ para todo $p < \infty$ e (1.2) segue da mesma forma que o caso anterior. □

Tal resultado permite provar o seguinte.

Proposição 1.3. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *então*

$$u^+ := \max\{u, 0\},\ u^- := \max\{-u, 0\},\ |u| := u^+ + u^- \in W^{1,p}(\Omega) \ e$$

$$\|\nabla|u|\|_p = \|\nabla u\|_p \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Primeiro, vejamos que $u^+ := \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega)$. Como $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $|u^+(x)| \leq |u(x)|$ para todo $x \in \Omega$, então $u^+ \in L^p(\Omega)$. Agora, dado $\varepsilon > 0$ defina $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon, & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{, se } t \leq 0. \end{cases}$$

Note que f_ε satisfaz as hipóteses da Proposição 1.2. Então, $f_\varepsilon(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e para cada $i = 1, ..., N$, tem-se

$$\frac{\partial f_\varepsilon(u)}{\partial x_i} = f'_\varepsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Daí,

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_{\{u>0\}} \frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.4}$$

Além disso,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(u) = \begin{cases} u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \implies \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(u) = u^+,$$

e ainda

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(u(x))|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right| &= |(u(x)^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-\varepsilon|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right|\\ &\leq |(u(x)^2+2u(x)\varepsilon+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-\varepsilon|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right|\\ &= |u(x)|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right| \in L^p(\Omega) \text{ quando } u(x)>0 \text{ e}\\ |f_\varepsilon(u(x))|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right| &= 0 \leq |u(x)| \in L^p(\Omega) \text{ quando } u(x)\leq 0.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, tem-se

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \longrightarrow \int_\Omega u^+\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \text{ quando } \varepsilon\to 0$$

e

$$\int_{\{u>0\}} \phi\frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial u}{\partial x_i} \longrightarrow \int_{\{u>0\}} \phi\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ quando } \varepsilon\to 0.$$

De (1.4) segue que

$$\int_\Omega u^+\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_{\{u>0\}}\phi\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim, existe a derivada fraca $\dfrac{\partial u^+}{\partial x_i}$ e

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{q.t.p. sobre } \{u>0\}\\ 0\ , & \text{q.t.p. sobre } \{u\leq 0\}.\end{cases}$$

Como $\left|\dfrac{\partial u^+}{\partial x_i}(x)\right| \leq \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|$ e $u\in W^{1,p}(\Omega)$, tem-se $\dfrac{\partial u^+}{\partial x_i}\in L^p(\Omega)$ para todo $i=1,...,N$. Assim, $u^+\in W^{1,p}(\Omega)$, com

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{q.t.p. sobre } \{u>0\}\\ 0\ , & \text{q.t.p. sobre } \{u\leq 0\}\end{cases}$$

Por outro lado, $-u\in W^{1,p}(\Omega)$ e $u^-=(-u)^+$, então $u^- := \max\{-u,0\}\in W^{1,p}(\Omega)$, com

$$\nabla u^- = \nabla(-u)^+ = \begin{cases} \nabla(-u), & \text{q.t.p. sobre } \{-u>0\}\\ 0\ , & \text{q.t.p. sobre } \{-u\leq 0\},\end{cases}$$

ou ainda

$$\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u, & \text{q.t.p. sobre } \{u<0\}\\ 0\ , & \text{q.t.p. sobre } \{u\geq 0\}.\end{cases}$$

Por fim, como $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, então $|u| = u^+ + (-u)^+ = u^+ + u^- \in W^{1,p}(\Omega)$, com

$$\nabla|u| = \begin{cases} \nabla u, \text{ se } u(x) > 0 \\ 0\ , \text{ se } u(x) = 0 \\ -\nabla u, \text{ se } u(x) < 0 \end{cases}$$

e, como

$$\begin{aligned} \|\nabla|u|\|_p &= \int_\Omega |\nabla|u||^p d\mu \\ &= \int_{\{u>0\}} |\nabla u|^p d\mu + \int_{\{u<0\}} |-\nabla u|^p d\mu \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^p d\mu = \|\nabla u\|_p \text{ para todo } u \in W^{1,p}(\Omega), \end{aligned}$$

temos que $\|\nabla|u|\|_p = \|\nabla u\|_p$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$. □

Exemplo 1.2. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Riesz-Banach, ou seja, dados $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, tem-se

$$u \vee v = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}|u+v| \in W^{1,p}(\Omega)$$

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}|u+v| \in W^{1,p}(\Omega).$$

Com efeito, dados $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, pela Proposição 1.3 e pelo fato de $W^{1,p}(\Omega)$ ser espaço vetorial, tem-se

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}|u+v| \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e} \\ B &= \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}|u+v| \in W^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Afirmamos que $u \vee v = A$. De fato, para cada $x \in \Omega$ pode-se ter

$$\begin{aligned} u(x) \leq v(x) &\Rightarrow u(x), v(x) \leq v(x) = A(x) \text{ ou} \\ v(x) \leq u(x) &\Rightarrow u(x), v(x) \leq u(x) = A(x), \end{aligned}$$

o que implica $u \preceq A$, $v \preceq A$ e $u \vee v \preceq A$. Além disso, $u \preceq u \vee v$ e $v \preceq u \vee v$, então para cada $x \in \Omega$ pode-se ter

$$\begin{aligned} u(x) \leq v(x) &\Rightarrow A = u(x) \leq v(x) \leq u(x) \vee v(x) \text{ ou} \\ v(x) \leq u(x) &\Rightarrow A = v(x) \leq u(x) \leq u(x) \vee v(x) \end{aligned}$$

o que implica $A \preceq u \vee v$. Logo, pela propriedade antissimétrica de ordem, concluímos que $u \vee v = A$. Analogamente, vê-se que $u \wedge v = B$.

Destacamos que as aplicações u^+, u^- e $|u|$ definidas na Proposição 1.3 correspondem às aplicações $u^+ := u \vee 0$, $u^- := (-u) \vee 0$ e $|u| := u \vee (-u)$ definidas no espaço de Riesz-Banach

$W^{1,p}(\Omega)$. De fato, $u \vee v = sup\{u, v\} = max\{u, v\}$, pois

$$\begin{aligned} & u, v \leq \max\{u, v\} \text{ q.t.p. em } \Omega \\ & \Rightarrow \sup\{u, v\} \leq \max\{u, v\} \text{ q.t.p. em } \Omega \\ & \Rightarrow \sup\{u, v\} \preceq \max\{u, v\} \end{aligned}$$

e para cada $x \in \Omega$ pode-se ter

$$\begin{aligned} & \max\{u(x), v(x)\} = u(x) \leq \sup\{u(x), v(x)\} \text{ ou} \\ & \max\{u(x), v(x)\} = v(x) \leq \sup\{u(x), v(x)\} \end{aligned}$$

em ambos os casos, $\max\{u(x), v(x)\} \leq \sup\{u(x), v(x)\}$. Então, $\max\{u, v\} \leq \sup\{u, v\}$ q.t.p. em Ω. Logo $\max\{u, v\} \preceq \sup\{u, v\}$. Então, pela propriedade antissimétrica de ordem, concluímos que $u \vee v = \max\{u, v\}$. Assim, $u^+ = \max\{u, 0\} = u \vee 0$, $u^- = \max\{-u, 0\} = (-u) \vee 0$ e $|u| = u^+ + u^- = u^+ + (-u)^+ = u \vee (-u)$.

Analisemos, agora, a continuidade da aplicação $u \mapsto |u|$ nos espaços de Sobolev.

Proposição 1.4. *Quando $1 \leq p < \infty$, a aplicação $u \mapsto |u|$ é contínua em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. De $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ tem-se

$$\| |u_n| - |u| \|_p^p = \int_\Omega | \ |u_n(x)| - |u(x)| \ |^p dx \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^p dx = \|u_n - u\|_p^p \longrightarrow 0$$

donde $|u_n| \to |u|$ em $L^p(\Omega)$. Além disso, de $\nabla u_n \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)$ tem-se

1) $\nabla|u_n| \to \nabla|u|$ q.t.p. em Ω;

2) $\|\nabla|u_n|\|_p = \|\nabla u_n\|_p \leq C$, para alguma constante C;

3) $\|\nabla|u_n|\|_p = \|\nabla u_n\|_p \longrightarrow \|\nabla u\|_p = \|\nabla|u|\|_p$;

Daí, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice A), $\|\nabla|u_n| - \nabla|u|\|_p \longrightarrow 0$, isto é, $\nabla|u_n| \longrightarrow \nabla|u|$ em $L^p(\Omega)$. Logo, $|u_n| \to |u|$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Portanto, a aplicação $u \mapsto |u|$ é contínua em $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

A aplicação $u \mapsto |u|$ não é contínua em $W^{1,\infty}(\Omega)$. Por exemplo, supondo $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $u(x) = x$ e $u_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$, tem-se $u_n \to u$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$ e claramente

$$\nabla|u| = \frac{d}{dx}|u| = \begin{cases} 1, & se \ x > 0 \\ -1, & se \ x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \nabla|u_n| = \frac{d}{dx}|u_n| = \begin{cases} 1, & se \ x > -\dfrac{1}{n} \\ -1, & se \ x < -\dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Daí, $\nabla|u_n| - \nabla|u| = 2$ quando $-\dfrac{1}{n} < x < 0$. Logo,

$$\| |u_n| - |u| \|_{W^{1,\infty}(-1,1)} = \|\nabla|u_n| - \nabla|u|\|_\infty = 2 > \varepsilon = 1.$$

Portanto, a aplicação $u \mapsto |u|$ não é contínua em $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Dos exemplos e proposições acima, concluímos que os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach Ordenados para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. Além disso, quando $k = 1$ eles se tornam também espaços de Riesz-Banach e, quanto a continuidade da aplicação $u \mapsto |u|$, ela ocorre apenas quando $1 \leq p < \infty$, ou seja, a aplicação $u \mapsto |u|$ não é contínua em $W^{1,\infty}(\Omega)$. Por fim, veremos a seguir que quando $k \geq 2$, os espaços de Sobolev são apenas espaços de Banach Ordenados, ou seja, não são espaços de Riesz-Banach, pois existe $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para o qual $|u| \notin W^{2,p}(\Omega)$. Portanto, dos espaços de Sobolev, apenas $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ são espaços de Riesz-Banach com a aplicação $u \mapsto |u|$ contínua.

Exemplo 1.3. Os espaços de Sobolev de segunda ordem ou mais não são espaços de Riesz-Banach. Considerando $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ e $u(x) = x$, tem-se

$$|u(x)| = \begin{cases} x, & se\ x > 0 \\ -x, & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

cujas derivadas no sentido das distribuições são

$$\frac{d}{dx}|u(x)| = 2H(x) - 1 \text{ e } \frac{d^2}{dx^2}|u(x)| = 2\delta,$$

onde H é a função Heaviside e δ é a distribuição Dirac dadas, respectivamente, por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ 0, & se\ x \leq 0, \end{cases}$$

e $\delta(\phi) = \phi(0)$, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. De fato, note que a função Heaviside é quase sempre diferenciável com derivada $\dfrac{dH}{dx}$ nula. Essa derivada gera, portanto, a distribuição

$$T_{\frac{dH}{dx}}(\phi) = \int_\Omega \frac{dH}{dx}\phi = 0 \text{ para } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por outro lado, a derivada de distribuição de H é dada por

$$\frac{d}{dx}T_H(\phi) = -T_H(\frac{d\phi}{dx}) = -\int_0^1 \frac{d\phi}{dx} = -\lim_{c \to 1^-} \phi(c) + \phi(0) = \phi(0) = \delta(\phi),$$

para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Agora, suponha, por absurdo, que H tem derivada fraca. Então considerando uma função teste ϕ não nula na origem, teríamos

$$0 = \int_\Omega \frac{dH}{dx}\phi = -\int_\Omega H(\frac{d\phi}{dx}) = -T_H(\frac{d\phi}{dx}) = \frac{d}{dx}T_H(\phi) = \delta(\phi) \neq 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, $|u| \notin W^{2,p}(-1,1)$. E conclui-se que os espaços $W^{2,p}(-1,1)$ não são espaço de Riesz-Banach.

Exemplo 1.4. O conjunto $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $f' \in C[a,b]\}$ não é um espaço de Riesz-Banach. De fato, a função $sen : [0,1] \to \mathbb{R}$ pertence ao conjunto $C^1[0,1]$. No entanto, a função $sen^+[0,1] \notin C^1[0,1]$ pois tal função não é diferenciável no ponto $x = \pi$. Portanto, $C^1[a,b]$ não é um espaço de Riesz-Banach.

A seguir, exemplos de espaços de Riesz-Banach.

Exemplo 1.5. Os espaços de sequências l^p com $1 \leq p \leq \infty$ definidos por

$$l^p = \left\{ \xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

$$l^\infty = \left\{ \xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} : \sup_k |\xi_k| < \infty \right\}$$

são espaços de Riesz-Banach, com a ordem parcial dada por

$$\xi = (\xi_k) \preceq \eta = (\eta_k) \ \Leftrightarrow \ \xi_k \leq \eta_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Primeiro, note que l^p é um espaço de Banach Ordenado, para qualquer $1 \leq p \leq \infty$. Com efeito, as condições (i) e (iii) da Definição 1.2 são claramente satisfeitas e sabemos que l^p é um espaço de Banach real. Então, vejamos que

$$(l^p)^+ := \{\xi \in l^p : 0 \preceq \xi\} = \{\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p : 0 \leq \xi_k, \ \forall \ k \in \mathbb{N}\} \subset l^p$$

é um subespaço fechado de l^p. Seja $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequencia em $(l^p)^+$ tal que

$$\xi_n \to \xi \in l^p \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.5}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\xi_n = (\xi_n^k)_{k=1}^{\infty}$ e $\xi_n^k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, $\xi = (\xi^k)_{k=1}^{\infty}$. De (1.5), segue que, para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\xi_n^k \to \xi^k$ quando $n \to \infty$. Mas $\xi_n^k \geq 0$. Logo, $\xi^k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\xi \in (l^p)^+$. Donde, $(l^p)^+$ é um subespaço fechado de l^p. Portanto, l^p é um espaço de Banach Ordenado. Agora, note que dados $\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}, \eta = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p$, temos que a sequência $\gamma = (\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$, definida por $\gamma_k := \max\{\xi_k, \eta_k\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, é tal que

$$\xi_k \leq \gamma_k \text{ e } \eta_k \leq \gamma_k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi, \eta \preceq \gamma,$$

e para toda sequência $\xi, \eta \preceq \theta = (\theta_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $\xi_k, \eta_k \leq \theta_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\xi_k, \eta_k \leq \theta_k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \gamma_k = \max\{\xi_k, \eta_k\} \leq \theta_k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \gamma \preceq \theta,$$

donde $\gamma = \sup\{\xi, \eta\}$. Além disso, quando $1 \leq p < \infty$, tem-se

$$\gamma_k \leq \xi_k + \eta_k \Rightarrow |\gamma_k|^p \leq (|\xi_k| + |\eta_k|)^p \leq 2^{p-1}(|\xi_k|^p + |\eta_k|^p) \ \forall k \in \mathbb{N}$$

o que implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^p \leq 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right) < \infty,$$

ou seja, $\gamma \in l^p$. Quando $p = \infty$, tem-se

$$\gamma_k \leq \xi_k + \eta_k \leq \sup_k |\xi_k| + \sup_k |\eta_k| < \infty \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_k |\gamma_k| < \infty,$$

donde $\gamma \in l^\infty$. Logo, existe $\xi \vee \eta = \sup\{\xi, \eta\} = \gamma \in l^p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Analogamente, existe $\xi \wedge \eta = \inf\{\xi, \eta\} = \theta = (\theta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, onde $\theta_k = \min\{\xi_k, \eta_k\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, l^p é um espaço de Riesz-Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Exemplo 1.6. Os conjuntos $C(\overline{\Omega})$, $C^\theta(\overline{\Omega})$ e $Lip(\overline{\Omega})$ formados, respectivamente, pelas funções contínuas, Hölder contínuas com expoente θ e Lipschitz contínuas são espaços de Riesz-Banach, cuja ordem é dada por

$$f \preceq g \ \Leftrightarrow \ f(x) \leq g(x) \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Vamos provar aqui este resultado apenas para o espaço $C^\theta(\overline{\Omega})$, pois para os outros espaços procede-se analogamente. Primeiro, note que $C^\theta(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach Ordenado, pois $C^\theta(\overline{\Omega})^+$ é um conjunto fechado. De fato, dada uma sequência de funções (f_n) em $C^\theta(\overline{\Omega})^+$ tal que $f_n \to f \in C^\theta(\overline{\Omega})$, temos que para cada $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que $n \geq N_\varepsilon$ implica $\|f_n - f\|_{C^\theta} < \varepsilon$. Então, para cada $n \geq N_\varepsilon$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{C^\theta} < \varepsilon, \ \text{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

donde (f_n) converge para f uniformemente em $\overline{\Omega}$. Desde que $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, e assim, $f \in C^\theta(\overline{\Omega})^+$.

Agora, provemos que dadas funções $f, g \in C^\theta(\overline{\Omega})$ existem $f \vee g$ e $f \wedge g$ em $C^\theta(\overline{\Omega})$, isto é, $C^\theta(\overline{\Omega})$ é espaço espaço de Riesz-Banach. Afirmamos que se $f, g \in C^\theta(\overline{\Omega})$, então a função $h = \max\{f, g\}$ definida por $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ pertence ao espaço $C^\theta(\overline{\Omega})$. De fato, em $\mathbb{R}$ vale a desigualdade

$$|\max(t, s) - \max(t', s')| \leq |t - t'| + |s - s'|,$$

pois

$$
\begin{aligned}
|\max(t,s)-\max(t',s')| &= \left|\frac{1}{2}(t+s)+\frac{1}{2}|t-s|-\left(\frac{1}{2}(t'+s')+\frac{1}{2}|t'-s'|\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(t'-t')+\frac{1}{2}(s-s')+\frac{1}{2}\left(|t-s|-|t'-s'|\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}|t'-t'|+\frac{1}{2}|s-s'|+\frac{1}{2}\left||t-s|-|t'-s'|\right| \\
&\leq \frac{1}{2}|t'-t'|+\frac{1}{2}|s-s'|+\frac{1}{2}\left|t-s-t'+s'\right| \\
&\leq \frac{1}{2}|t'-t'|+\frac{1}{2}|s-s'|+\frac{1}{2}\left(|t-t'|+|s-s'|\right) \\
&= |t'-t'|+|s-s'|.
\end{aligned}
$$

Daí, tem-se

$$
\begin{aligned}
|h(x)-h(y)| &= |\max\{f(x),g(x)\}-\max\{f(y),g(y)\}| \\
&\leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\
&\leq \alpha\|x-y\|^{\theta}+\beta\|x-y\|^{\theta}=(\alpha+\beta)\|x-y\|^{\theta}
\end{aligned}
$$

onde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, pois f e g são Hölder contínuas de expoente θ. Logo, a afirmação está provada. Além disso, tem-se $h=f\vee g$ pois

$$
f(x)\leq h(x),\ g(x)\leq h(x)\ \forall x\in\overline{\Omega}\Rightarrow f,g\preceq h,
$$

e para toda função l definida sobre $\overline{\Omega}$ tal que $f(x),g(x)\leq l(x)$ para todo $x\in\overline{\Omega}$, tem-se

$$
f(x),g(x)\leq l(x)\ \forall x\in\overline{\Omega}\Rightarrow h(x)=\max\{f(x),g(x)\}\leq l(x)\ \forall x\in\overline{\Omega}\Rightarrow h\preceq l.
$$

Analogamente, mostra-se que existe $f\wedge g=min\{f,g\}\in C^{\theta}(\overline{\Omega})$. Portanto, $C^{\theta}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Riesz-Banach.

Proposição 1.5. *A aplicação $f\mapsto|f|$ é contínua em $C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Basta notar que dada uma sequência (f_n) de funções em $C(\overline{\Omega})$ tal que $f_n\to f$ em $C(\overline{\Omega})$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\||f_n|-|f|\|_{C(\overline{\Omega})} &= \sup_{x\in\overline{\Omega}}||f_n(x)|-|f(x)|| \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)-f(x)| \\
&= \|f_n-f\|_{C(\overline{\Omega})}\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

quando $n\to\infty$. $\square$

A aplicação $f\mapsto|f|$ não é contínua em $C^{\theta}(\overline{\Omega})$. Por exemplo, considere $N=1,\Omega=(-1,1)$, e a sequencia $f_n(x) = f(x) + \dfrac{1}{n}$ em $C^\theta[-1,1]$, onde

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\theta, & se\ x \geq 0 \\ -|x|^\theta, & se\ t < 0 \end{cases}$$

Então $f_n \to f$ em $C[-1,1]$ quando $n \to \infty$. Além disso, tomando $x = -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}}$ e $y = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \||f_n| - |f|\|_{C^\theta} &= \sup_{x\in[-1,1]} ||f_n(x)| - |f(x)|| + \sup_{\substack{x,y\in[-1,1]\\ x\neq y}} \frac{||f_n(x)| - |f(x)| - (|f_n(y)| - |f(y)|)|}{|x-y|^\theta} \\ &\geq \sup_{\substack{x,y\in[-1,1]\\ x\neq y}} \frac{||f_n(x)| - |f(x)| - (|f_n(y)| - |f(y)|)|}{|x-y|^\theta} \\ &= \frac{\left|\left|f_n\left(-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)\right| - \left|f\left(-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)\right| - (|f_n(0)| - |f(0)|)\right|}{\left|-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 0\right|^\theta} = \frac{\left|0 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = 2 \end{aligned}$$

que implica a não continuidade da aplicação $f \mapsto |f|$ em $C^\theta(\overline{\Omega})$.

Afirmamos, ainda, que a aplicação $f \mapsto |f|$ não é contínua em $Lip(\overline{\Omega})$. Por exemplo, no caso $N = 1$ e $\Omega = (-1,1)$, tem-se $Lip(-1,1) = W^{1,\infty}(-1,1)$ (ver [4], p. 207). Então, pelo que foi visto anteriormente, como a aplicação $u \mapsto |u|$ não é contínua em $W^{1,\infty}(-1,1)$, temos a validade da afirmação.

1.2 Nova versão do Teorema do Passo da Montanha

Os espaços de Riesz-Banach em que a aplicação $u \mapsto |u|$ é contínua são particularmente interessantes, pois sobre eles se aplica uma versão do Teorema do Passo da Montanha, a qual apresentaremos nessa seção. Primeiramente, são necessárias algumas suposições, que descreveremos a seguir.

Sejam E um espaço de Riesz-Banach, no qual a aplicação $u \mapsto |u|$ é contínua, e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Para cada $u \in E$ e $\varepsilon > 0$, pode-se definir

$$dist(u, E^+) := \inf\{\|u - v\| : v \in E^+\} \text{ e}$$

$$E_\varepsilon^+ := \{u \in E : dist(u, E^+) \leq \varepsilon\}.$$

A fim de obter condição suficiente para a existência de um ponto crítico do funcional I em E^+, adiciona-se a esse cenário a seguinte hipótese: existem pontos $e_0, e_1 \in E^+$ e um subconjunto aberto

U de E sobre os quais se define

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E^+) : \gamma(0) = e_0, \gamma(1) = e_1\},$$

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \le t \le 1} I(\gamma(t)), \tag{1.6}$$

e que satisfazem:
(I1) $e_0 \in E^+ \cap U$, $e_1 \in E^+ \setminus \overline{U}$;
(I2) $\max\{I(e_0), I(e_1)\} < \inf_{\partial U \cap E^+} I(u)$;
(I3) se $\{u_n\} \subset E$, $dist(u_n, E^+) \to 0$, $I(u_n) \to c$ dado em (1.6) e $I'(u_n) \to 0$, então $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente;
(I4) existem constantes $a \in (-\infty, c)$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo (I4i) ou (I4ii):
(I4i) $I(|u|) \le I(u)$, se $a < I(u) < c$ e $u \in E^+_\varepsilon$;
(I4ii) $I(u^+) \le I(u)$, se $a < I(u) < c$ e $u \in E^+_\varepsilon$.

Note que E^+ é convexo. Com efeito, dados $u, v \in E^+$ e $t \in [0,1]$ tem-se $0 \preceq u, v$ e $0 \le t, 1-t$. Pelo item (iii) da Definição 1.1, segue que $0 \preceq v(1-t)+0 \le v(1-t)+ut$. Logo, $v(1-t)+ut \in E^+$. Daí, o caminho γ dado por $\gamma(t) = e_0(1-t) + e_1 t$ pertence a Γ, donde Γ é não vazio. Além disso, se o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$, com c definido em (1.6), então claramente I satisfaz $(I3)$.

Teorema 1.6 (Passo da Montanha para Espaços de Banach Ordenados). *Sejam E um espaço de Riesz-Banach, no qual a aplicação $u \mapsto |u|$ é contínua, $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, $e_0, e_1 \in E^+$ e $U \subset E$ satisfazendo $(I1) - (I4)$. Então, existe um ponto crítico $u \in E^+$ de I tal que $I(u) = c$.*

A fim de demonstrar esse teorema, vamos aplicar uma versão do Lema de Deformação, descrita abaixo.

Lema 1.7 (Lema de Deformação). *Sejam E um espaço de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, $X \subset E$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon_0, r > 0$ constantes que satisfazem*

$$dist(u, X) \le \varepsilon_0 \ e \ |I(u) - c| \le \varepsilon_0 \Rightarrow \|I'(u)\| \ge r.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$ e $b \in (-\infty, c)$, existem $\delta \in (0, c-b)$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que
(i) $\eta(0,u) = u, \ \forall u \in E$;
(ii) $\|\eta(t,u) - u\| \le \varepsilon, \ \forall (t,u) \in [0,1] \times E$;
(iii) $I(\eta(t,u)) \le I(u), \ \forall t \in [0,1]$ e $u \in E$;
(iv) se $I(u) \le b$ então $\eta(t,u) = u, \ \forall t \in [0,1]$;
(v) se $u \in X$ e $b < I(u) \le c + \delta$ então $b < I(\eta(1,u)) \le c - \delta$.

Demonstração. Seja $\tilde{E} := \{u \in E : I'(u) \neq 0\}$. Então, existe um campo pseudo-gradiente $V : \tilde{E} \to E$ para I sobre $\tilde{E}$ (ver [10], p.81), isto é, V é localmente lipschitziana e para todo $u \in \tilde{E}$ tem-se

$$\|V(u)\| \leq 2\|I'(u)\| \tag{1.7}$$

e

$$\langle I'(u), V(u)\rangle \geq \|I'(u)\|^2. \tag{1.8}$$

De (1.7), segue que

$$4\|I'(u)\|^2 \geq \|V(u)\|^2 \Rightarrow \|I'(u)\|^2 \geq \frac{1}{4}\|V(u)\|^2 \text{ para todo } u \in \tilde{E} \tag{1.9}$$

e de (1.8) obtemos

$$\|I'(u)\|^2 \leq \langle I'(u), V(u)\rangle \leq \|I'(u)\|\|V(u)\| \Rightarrow \|I'(u)\| \leq \|V(u)\| \text{ para todo } u \in \tilde{E}. \tag{1.10}$$

Dados $b \in (-\infty, c)$ e $\varepsilon > 0$, tome $0 < \gamma < \min\{c - b, \varepsilon_0, \varepsilon\}$ e $0 < \delta < \min\left\{\gamma, \frac{\gamma r}{8}\right\}$. Assim, pode-se definir

$$B := I^{-1}([c-\delta, c+\delta]) \cap X_\delta \subseteq A := I^{-1}([c-\gamma, c+\gamma]) \cap X_\gamma$$

Agora, define-se a função $\psi : E \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) := \frac{dist(u, E \setminus A)}{dist(u, E \setminus A) + dist(u, B)}.$$

Note que $\psi \equiv 0$ em $E \setminus A, \psi \equiv 1$ em B e $|\psi| \leq 1$. Além disso, ψ é localmente lipschitziana. De fato, a função distância de um elemento a um subconjunto Z, isto é, $dist(\cdot, Z)$ é lipschitziana, pois dados dois elementos u e v, tem-se

$$dist(u, Z) \leq \|u - x\| \leq \|u - v\| + \|v - x\| \Rightarrow dist(u, Z) - \|u - v\| \leq \|v - x\| \text{ para todo } x \in Z.$$

Então,

$$dist(u, Z) - \|u - v\| \leq dist(v, Z) \Rightarrow |dist(u, Z) - dist(v, Z)| \leq \|u - v\|.$$

Logo, $dist(\cdot, E \setminus A)$ e $dist(\cdot, B)$ são lipschitzianas. Assim, podemos concluir que ψ é localmente lischitziana, pois é o quociente de duas funções lipschitzianas e $dist(u, E \setminus A) + dist(u, B) > 0$ para todo $u \in E$. Agora, definamos a aplicação $f : E \to E$ da seguinte maneira:

$$f(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|^2}, & \text{se } u \in A \\ 0, & \text{se } u \notin A. \end{cases}$$

Quando $u \in A$ tem-se $|I(u) - c| \leq \varepsilon_0$ e $dist(u, X) \leq \varepsilon_0$ o que implica $\|I'(u)\| \geq r$ e daí $u \in \tilde{E}$. Então, faz sentido calcular $V(u)$ e, consequentemente, f está bem definida. Além disso, f é localmente lipschitziana, pois quando $u \in A$, tem-se $f(u)$ como produto de funções localmente lipschitzianas com $\psi(u)$ limitada. E ainda, de (1.10), segue que

$$\|f(u)\| = \left\| -\psi(u) \frac{V(u)}{\|V(u)\|^2} \right\| \leq \frac{1}{\|V(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|} \leq \frac{1}{r}, \text{ quando } u \in A$$

e

$$\|f(u)\| = 0 \leq \frac{1}{r}, \text{ quando } u \notin A.$$

Portanto, f é limitada. Assim, para cada $u \in E$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t, u) = f(\sigma(t, u)) \\ \sigma(0, u) = u \end{cases} \tag{1.11}$$

tem uma única solução $\sigma(\cdot, u)$, pois f é localmente lipschitziana. Ademais, tal solução pode ser estendida para toda a reta devido o fato de f ser limitada (ver [10] ou [5]) e, da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, a aplicação $\sigma(\cdot, u) : \mathbb{R} \to E$ é contínua. Assim, vamos considerar a aplicação contínua $\eta : [0, 1] \times E \to E$ dada por

$$\eta(t, u) := \sigma(\gamma r t, u).$$

Logo, por definição, $\eta(0, u) = \sigma(0, u) = u$ para todo $u \in E$, o que prova (i). Por outro lado, desde que $\|f(u)\| \leq 1/r$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\eta(t, u) - u\| = \|\sigma(\gamma r t, u) - \sigma(0, u)\| &= \left\| \int_0^{\gamma r t} \frac{d}{ds}\sigma(s, u) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{\gamma r t} \|f(\sigma(s, u))\| \, ds \leq \frac{1}{r}\gamma r t \leq \gamma < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $(t, u) \in [0, 1] \times E$, o que mostra (ii). Além disso,

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t, u)) = \langle I'(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt}\sigma(t, u) \rangle = \langle I'(\sigma(t, u)), f(\sigma(t, u)) \rangle.$$

Se $\sigma(t,u) \in A$, da igualdade acima, de (1.8) e de (1.9), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}\langle I'(\sigma(t,u)), V(\sigma(t,u))\rangle \\ &\leq \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}\|I'(\sigma(t,u))\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{4}\psi(\sigma(t,u)) \leq 0.\end{aligned}$$

Agora, se $\sigma(t,u) \notin A$, tem-se

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = \langle I'(\sigma(t,u)), 0\rangle = 0.$$

Então, em qualquer um dos casos, $\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq 0$, o que mostra, em particular, que

$$\frac{d}{dt}I(\eta(t,u)) = \frac{d}{dt}I(\sigma(\gamma rt,u)) \leq 0 \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Daí, $I(\eta(t,u))$ é não crescrente em $t \in [0,1]$ e, portanto, $I(\eta(t,u)) \leq I(\eta(0,u)) = I(u)$ para todo $t \in [0,1]$ e $u \in E$, donde se verifica (iii). Para obter (iv), basta notar que se $I(u) \leq b < c-\gamma$, então $I(u) \notin [c-\gamma, c+\gamma]$, o que implica que $u \notin A$. Daí, $f(u) = 0$ e, portanto, $\sigma(t,u) \equiv u$ soluciona (1.11) mostrando que $\eta(t,u) = \sigma(\gamma rt, u) = u$ para todo $t \in [0,1]$. Resta mostrar (v). Primeiro, vamos supor que $b < I(u) < c-\gamma$. Neste caso, $u \notin A$ e, como vimos anteriormente, $\eta(1,u) = u$ o que implica que $b < I(u) = I(\eta(1,u)) < c-\delta$. Agora, suponha que $u \in X$, $c-\gamma \leq I(u) \leq c+\delta$ e $c-\gamma < I(\eta(1,u))$. Logo, $u \in B$ e $c-\gamma < I(\eta(1,u)) \leq I(\eta(t,u)) \leq I(u) \leq c+\delta$. Por outro lado, observemos que, para cada $t \geq 0$ e $u \in E$,

$$\begin{aligned}\|\sigma(t,u) - u\| = \|\sigma(t,u) - \sigma(0,u)\| &= \left\|\int_0^t \frac{d}{ds}\sigma(s,u)ds\right\| \\ &\leq \int_0^t \left\|\frac{d}{ds}\sigma(s,u)\right\| ds = \int_0^t \|f(\sigma(s,u))\|\, ds \\ &\leq \int_0^t \frac{1}{r}ds = \frac{t}{r},\end{aligned}$$

Portanto, se $t \in [0, \gamma r]$ concluímos que $\|\sigma(t,u) - u\| \leq \gamma$. Logo, pelo exposto acima, segue que

$\sigma(t,u) \in A$ para todo $t \in [0,\gamma r]$. Assim,

$$\begin{aligned}
I(\eta(1,u)) &= I(\sigma(\gamma r,u)) \\
&= I(u) + \int_0^{\gamma r} \frac{d}{dt} I(\sigma(t,u))dt \\
&= I(u) + \int_0^{\gamma r} \langle I'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\rangle dt \\
&= I(u) + \int_0^{\gamma r} \langle I'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u))\rangle dt \\
&= I(u) + \int_{\{t\in[0,\gamma r]:\sigma(t,u)\in A\}} \langle I'(\sigma(t,u)), -\psi(\sigma(t,u))\frac{V(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}\rangle dt \\
&= I(u) + \int_{\{t\in[0,\gamma r]:\sigma(t,u)\in A\}} \frac{-\psi(\sigma(t,u))}{\|V(\sigma(t,u))\|^2}\langle I'(\sigma(t,u)), V(\sigma(t,u))\rangle dt \\
&\leq I(u) - \frac{1}{4}\int_{\{t\in[0,\gamma r]:\sigma(t,u)\in A\}} \psi(\sigma(t,u))dt \\
&\leq I(u) - \frac{1}{4}|\{t \in [0,\gamma r] : \sigma(t,u) \in A\}| \\
&= I(u) - \frac{\gamma r}{4} \leq c + \delta - \frac{\gamma r}{4} \leq c - \delta.
\end{aligned}$$

Ademais, desde que $\eta(1,u) \in A$ então $I(\eta(1,u)) \geq c - \gamma > b$, o que finaliza a prova do item (v) e a prova do Lema de Deformação. $\square$

Demonstração do Teorema 1.6: Aqui, vamos aplicar o Lema de Deformação com $X = E^+$. Suponha, por absurdo, que não existe $u \in E^+$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. Nesse caso, a seguinte afirmação é válida:
Existem constantes $r, \varepsilon_0 > 0$ tais que

$$dist(u,E^+) < \varepsilon_0 \; e \; |I(u) - c| < \varepsilon_0 \;\Rightarrow\; \|I'(u)\| \geq r.$$

De fato, se tais constantes r, ε_0 não existissem, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $u_n \in E$ tal que

$$dist(u_n,E^+) < \frac{1}{n}, |I(u_n) - c| < \frac{1}{n} \; e \; \|I'(u_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Fazendo $n \to \infty$, teríamos uma sequência $\{u_n\}$ em E tal que

$$dist(u_n,E^+) \to 0, I(u_n) \to c \; e \; I'(u_n) \to 0$$

então, por (I3), $\{u_n\}$ possuiria uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ convergente para $u \in E$. Mas, note que
1) $dist(u,E^+) = dist\left(lim_{k\to\infty}u_{n_k}, E^+\right) = lim_{k\to\infty}dist(u_{n_k},E^+) = 0 \Rightarrow u \in E^+$;
2) $I(u) = I\left(lim_{k\to\infty}u_{n_k}\right) = lim_{k\to\infty}I(u_{n_k}) = c$;
3) $I'(u) = I'\left(lim_{k\to\infty}u_{n_k}\right) = lim_{k\to\infty}I'(u_{n_k}) = 0$,

o que contradiz a hipótese inicial da demonstração. Portanto, existem tais constantes $r, \varepsilon_0 > 0$ e a afirmação está provada.

Agora, dado $\gamma \in \Gamma$, como $\gamma([0,1])$ é conexo e, por (I1), tem o ponto e_0 em comum com U e e_1 em comum com $E \setminus U$, pelo Teorema da Alfândega (ver Apêndice A) existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_\gamma) \in \partial U \cap \gamma([0,1]) \subseteq \partial U \cap E^+$. Então,

$$\inf_{\partial U \cap E^+} I(u) \leq I(\gamma(t_\gamma)) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

e sendo γ arbitrário, tem-se

$$\inf_{\partial U \cap E^+} I(u) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Logo, por (I2) e pela definição de c, tem-se

$$\max\{I(e_0), I(e_1)\} < \inf_{\partial U \cap E^+} I(u) \leq c.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $a < c$ como em (I4). Pode-se escolher b de modo que $c - b > 0$ tal que

$$A = \max\{I(e_0), I(e_1), a\} < b < c. \tag{1.12}$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ e $b < c$ acima, existem $\delta \in (0, c-b)$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ satisfazendo as afirmações $(i) - (v)$ do Lema de Deformação. Como $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$, pode-se escolher $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) < c + \delta. \tag{1.13}$$

Além disso, de (1.12), tem-se $I(e_i) \leq A < b$ para $i = 0, 1$. Segue, da afirmação (iv) do Lema 1.7, que

$$\eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, e_0) = e_0 \text{ e } \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e_1) = e_1.$$

Lembre que $\gamma(t) \in E^+$ para $t \in [0,1]$, pois $\gamma \in \Gamma$. Além disso, as constantes $\varepsilon > 0$ e $a < c$ consideradas aqui podem satisfazer (I4i) ou (I4ii). Primeiro, suponhamos (I4i). Defina

$$\overline{\gamma}(t) := |\eta(1, \gamma(t))|.$$

Como η é contínua e a aplicação $u \mapsto |u|$ também o é, então $\overline{\gamma}$ é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned}
&0 \preceq |\eta(1, \gamma(t))| = \overline{\gamma}(t) \Rightarrow \overline{\gamma}(t) \in E^+;\\
&\overline{\gamma}(0) = |\eta(1, \gamma(0))| = |e_0| = e_0, \text{ pois } e_0 \in E^+ \text{ e}\\
&\overline{\gamma}(1) = |\eta(1, \gamma(1))| = |e_1| = e_1, \text{ pois } e_1 \in E^+,
\end{aligned}$$

donde $\overline{\gamma} \in \Gamma$. Seja $t \in [0,1]$. Se t satisfaz $I(\gamma(t)) \leq b$, então pela afirmação (iv) do Lema 1.7

tem-se $\eta(1,\gamma(t)) = \gamma(t) \in E^+$ o que implica que $\overline{\gamma}(t) = |\eta(1,\gamma(t))| = |\gamma(t)| = \gamma(t)$. Assim,

$$I(\overline{\gamma}(t)) = I(\gamma(t)) \leq b < c - \delta.$$

Agora, se t satisfaz $I(\gamma(t)) > b$, então por (1.13),

$$b < I(\gamma(t)) \leq \max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma(t)) < c + \delta.$$

Como $\gamma(t) \in E^+$, segue de (v) do Lema 1.7 que

$$a < b < I(\eta(1,\gamma(t))) \leq c - \delta < c \tag{1.14}$$

e de (ii) do Lema 1.7 $dist(\eta(1,\gamma(t)), E^+) \leq \|\eta(1,\gamma(t)) - \gamma(t)\| \leq \varepsilon$, mostrando que

$$\eta(1,\gamma(t)) \in E^+_\varepsilon. \tag{1.15}$$

Então, de (1.14), (1.15) e (I4i), obtemos

$$I(\overline{\gamma}(t)) = I(|\eta(1,\gamma(t))|) \leq I(\eta(1,\gamma(t))) \leq c - \delta.$$

Assim, para qualquer $t \in [0,1]$, tem-se $I(\overline{\gamma}(t)) \leq c - \delta$, donde

$$c \leq \max_{0\leq t\leq 1} I(\overline{\gamma}(t)) \leq c - \delta,$$

o que é um absurdo. Para o caso (I4ii), define-se $\overline{\gamma} := \eta(1,\gamma(t))^+$ e analogamente chega-se a um absurdo. Portanto, existe $u \in E^+$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. □

Corolário 1.8. *Sejam E um espaço de Riesz-Banach, no qual a aplicação $u \mapsto |u|$ é contínua, e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo $(I1)$, $(I2)$, a condição $(PS)_c$, com c definido em* (1.6)*, e pelo menos uma das condições abaixo*

$$I(|u|) \leq I(u) \text{ para todo } u \in E; \tag{1.16}$$

$$I(u^+) \leq I(u) \text{ para todo } u \in E. \tag{1.17}$$

Então, existe um ponto crítico $u \in E^+$ de I tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Demonstração. Claramente, sob as hipóteses desse corolário, I satisfaz $(I1)-(I4)$, pois a condição $(PS)_c$ implica $(I3)$ e, para qualquer $a \in (-\infty, c)$ e $\varepsilon > 0$, a ocorrência de (1.16) implica (I4i) enquanto a ocorrência de (1.17) implica (I4ii). Portanto, pelo Teorema 1.6, tem-se o desejado. □

Capítulo 2

Equações elípticas semilineares com termos não-lineares mudando de sinal

Neste capítulo, com base no artigo [11], aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha para espaços Riesz-Banach, especificamente o Corolário 1.8, para obter solução positiva para dois problemas elípticos semilineares cujos termos não-lineares podem mudar de sinal. No que segue, $N \geq 1$ e Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$.

2.1 Primeiro problema

Como primeira aplicação, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p + \lambda g(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $g \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, se $N = 1,2$ e $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$. Dizemos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução (fraca) de (2.1) se $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$ e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega a(x)u^p \phi dx + \lambda \int_\Omega g(x,u)\phi dx, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vamos impor as seguintes condições sobre as aplicações g e a:
(g_0) $g(x,0) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$;
(g_1) existem constantes $q, C > 0$ e $\theta \in [0,2]$ tais que

$$1 < q < \infty, \text{ se } N = 1,2, \quad 1 < q < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3,$$

$$|g(x,s)| \leq C(|s|^q + 1) \text{ e} \tag{2.2}$$

$$(p+1)G(x,s) - sg(x,s) \leq C|s|^\theta + C \tag{2.3}$$

para $s \geq 0$ e $x \in \Omega$, onde G é dada por

$$G(x,s) := \int_0^s g(x,t)dt \text{ para } s \geq 0; \tag{2.4}$$

(g_2) $s^{-p}|g(x,s)| \longrightarrow 0$ uniformemente sobre Ω quando $s \to \infty$;

(a_1) $a(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \Omega$.

(a_2) $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in \Omega$;

Daqui por diante, quando fizermos referência ao problema (2.1), estaremos supondo que o mesmo está sob as hipóteses (g_0), (g_1), (a_1) ou (g_0), (g_2), (a_2). Embora se tenha $(a_2) \Rightarrow (a_1)$, as condições (g_1) e (g_2) não sugerem implicação entre si, então esses conjuntos de hipóteses com os quais trabalhamos são diferentes.

Teorema 2.1. *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que* (2.1) *tem solução positiva para cada $\lambda \in [0, \lambda_0)$.*

Observação 2.1. Em geral, (2.1) não tem solução positiva se $\lambda > 0$ for grande. Vejamos, por exemplo, um caso particular em que $a \equiv g \equiv 1$. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda \text{ em } \Omega \\ \quad u > 0 \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Sejam λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ e ϕ uma autofunção positiva correspondente tal que $\|\phi\|_1 = 1$. Fazendo o produto interno de L^2 na primeira equação em (2.5) com ϕ, tem-se

$$\langle -\Delta u, \phi \rangle = \langle u^p + \lambda, \phi \rangle = \langle u^p, \phi \rangle + \lambda \|\phi\|_1.$$

Como $-\Delta$ é um operador autoadjunto, segue que

$$\langle u, -\Delta\phi \rangle = \langle u^p, \phi \rangle + \lambda.$$

Daí e da Desigualdade de Jensen (ver Apêndice A), tem-se

$$\lambda_1 \langle u, \phi \rangle \geq (\langle u, \phi \rangle)^p + \lambda. \tag{2.6}$$

Agora, denote $L := \max_{t \geq 0} \lambda_1 t - t^p$. Seja $\lambda > L > 0$ suficientemente grande. Suponha, por contradição, que (2.5) tem uma solução u positiva. Então, $\langle u, \phi \rangle > 0$, e por (2.6)

$$L < \lambda \leq \lambda_1 \langle u, \phi \rangle - \langle u, \phi \rangle^p \leq \max_{t \geq 0} \lambda_1 t - t^p = L,$$

o que não pode ocorrer. Portanto, (2.5) não tem solução positiva.

Dessa observação, nota-se a relevância da restrição $\lambda \in [0, \lambda_0)$ no Teorema 2.1. O questionamento natural é se existe uma função $g \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty), \mathbb{R})$ que satisfaz (g_0), (g_1) ou (g_0), (g_2). Com efeito, o exemplo a seguir mostra que a resposta a tal questionamento é positiva.

Exemplo 2.1. Sejam $b, c, d \in C(\overline{\Omega})$ tais que $b(x)$ pode mudar de sinal e $c(x), d(x) \geq 0$ em Ω. Então, as funções

$$\overline{g}(x, s) = b(x)s^q + c(x), \text{ com } 0 < q < p, s \geq 0 \text{ e}$$

$$\underline{g}(x, s) = b(x)s^p + c(x)s^q + d(x), \text{ com } 1 < p < q < \frac{N+2}{N-2}, s \geq 0$$

satisfazem, respectivamente, $(\overline{g}_0), (\overline{g}_2)$ e $(\underline{g}_0), (\underline{g}_1)$. De fato, devido à continuidade de b, c e d, tem-se $\overline{g}$ e $\underline{g}$ contínuas. E ainda, $\overline{g}(x, 0) = c(x) \geq 0$ e $\underline{g}(x, 0) = d(x) \geq 0$ em Ω, o que implica $(\overline{g}_0)$ e $(\underline{g}_0)$. Agora, note que

$$\begin{aligned} |s|^{-p}|\overline{g}(x, s)| &= |s|^{-p}|b(x)s^q + c(x)| \\ &\leq |s|^{-(p-q)}|b(x)| + |s|^{-p}|c(x)| \\ &\leq |s|^{-(p-q)}M + |s|^{-p}N \text{ para todo } x \in \Omega, \end{aligned}$$

onde M e N são constantes positivas, devido ao fato de b e c serem limitadas. Daí, quando $s \to \infty$ tem-se $|s|^{-p}|\overline{g}(x, s)| \to 0$ uniformemente sobre Ω, donde ocorre $(\overline{g}_2)$. Portanto, $\overline{g}$ satisfaz $(\overline{g}_0)$, $(\overline{g}_2)$. Além disso,

$$|\underline{g}(x, s)| \leq |s|^p M + |s|^q N + L \text{ para todo } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega,$$

onde M, N e L são constantes positivas devidas ao fato de b, c e d serem limitadas (pois são funções contínuas definidas num conjunto compacto). Se $|s| \geq 1$, como $p < q$, então $|s|^p < |s|^q$. Logo,

$$\begin{aligned} |\underline{g}(x, s)| &\leq |s|^q(M + N) + L \\ &\leq \max\{M + N, L\}|s|^q + \max\{M + N, L\} \\ &= C_1|s|^q + C_1 \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{M + N, L\}$ é uma constante positiva. Se $|s| \leq 1$, então $|s|^p < |s|$ e $|s|^q < |s|$. Daí, $|\underline{g}(x, s)| \leq |s|(M + N) + L$. Como $1 < q$, pode-se tomar uma constante $C_2 > C_1 > 0$ tão grande que

$$|s| \leq \frac{C_2}{M + N}|s|^q + \frac{C_2}{M + N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|\underline{g}(x,s)| &\leq \left(\frac{C_2}{M+N}|s|^q + \frac{C_2}{M+N}\right)(M+N)+L\\ &\leq C_2|s|^q + C_2 + L\\ &\leq (C_2+L)|s|^q + (C_2+L)\\ &= C_3|s|^q + C_3,\end{aligned}$$

onde $C_3 > C_1$ é uma constante positiva. Assim, em qualquer um dos casos, tem-se $|\underline{g}(x,s)| \leq C_3|s|^q + C_3$ para todo $s \geq 0$ e $x \in \Omega$, e isso garante (2.2) para $\underline{g}$. Finalmente,

$$\begin{aligned}(p+1)\underline{G}(x,s) - s\underline{g}(x,s) &= (p+1)\int_0^s [b(x)t^p + c(x)t^q + d(x)]dt - s[b(x)s^p + c(x)s^q + d(x)]\\ &= (p+1)\left[b(x)\frac{s^{p+1}}{p+1} + c(x)\frac{s^{q+1}}{q+1} + d(x)s\right] - b(x)s^{p+1} - c(x)s^{q+1} - d(x)s\\ &= \left(\frac{p+1}{q+1} - 1\right)c(x)s^{q+1} + pd(x)s\\ &= \frac{p-q}{q+1}c(x)s^{q+1} + pd(x)s \leq pd(x)s \leq pLs\end{aligned}$$

então tomando $C > pL > 0$ e $\theta = 1$, tem-se

$$(p+1)\underline{G}(x,s) - s\underline{g}(x,s) \leq Cs^\theta + C \text{ para todo } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega.$$

Donde ocorre (2.3) para $\underline{g}$. Portanto, $\underline{g}$ satisfaz $(\underline{g}_0)$, $(\underline{g}_1)$.

Anteriormente, impomos sobre o problema (2.1) as hipóteses (g_0), (g_1), (a_1) ou (g_0), (g_2), (a_2). Em ambos os casos, os termos não lineares a e g podem mudar de sinal. Além disso, é permitido tratar o caso $g(x,0) > 0$. Dessa forma, o Teorema do Passo da Montanha usual não é aplicável em geral a este problema. De fato, defina $f(x,s) := a(x)s^p + \lambda g(x,s)$. Se $f(x,0) = 0$, como f é contínua, pode-se estender $f(x,s)$ fazendo

$$\tilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x,s), \text{ se } s \geq 0\\ 0, \quad \text{se } s < 0\end{cases}$$

e definimos

$$\tilde{I}(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \tilde{F}(x,u)\right)dx$$

onde

$$\tilde{F}(x,u) := \int_0^u \tilde{f}(x,s)ds.$$

Então, quando $\tilde{f}$ possui condições que garantem a estrutura do passo da montanha, obtêm-se um ponto-crítico não-trivial u_0 de $\tilde{I}$. Assim, $\tilde{I}'(u_0)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em particular,

$$\tilde{I}'(u_0)(-u_0^-) = \int_\Omega (\nabla u_0^-)^2 dx - \int_\Omega \tilde{f}(x, -u_0^-)u_0^- dx = 0.$$

Por outro lado, pela extensão $\tilde{f}$ de f, tem-se $\tilde{f}(x, -u_0^-) = 0$ em Ω pois $-u_0^-(x) \leq 0$ em Ω. Logo,

$$\int_\Omega (\nabla u_0^-)^2 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0^- = 0.$$

Portanto, u_0 é solução não-negativa. Então u_0 se tornaria uma solução positiva de (2.1), pelo Princípio do Máximo Forte. No entanto, como não assumimos $f(x, 0) = 0$, não se pode estender continuamente a função f colocando apenas $\tilde{f}(x, s) = 0$ para $s < 0$. Isso dificulta mostrar a existência de uma solução não-trivial não-negativa. A existência de tal solução será garantida pelo Corolário 1.8, quando $\lambda \geq 0$ é suficientemente pequeno, e a positividade da solução encontrada decorrerá do Princípio do Máximo de Hopf (ver Apêndice A).

Lembre que $g(x, s)$ é definida apenas para $s \geq 0$. A partir do lema seguinte, estende-se a definição de $g(x, s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Lema 2.2. *Seja $g \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty), \mathbb{R})$ satisfazendo $(g_0), (g_1)$ ou $(g_0), (g_2)$. Então, em ambos os casos, $g(x, s)$ possui uma extensão para $\Omega \times \mathbb{R}$ que cumpre os mesmos pressupostos da g para todo $s \in \mathbb{R}$ e que satisfaz*

$$G(x, s) \leq G(x, |s|) \text{ para todo } x \in \Omega, s \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

onde $G(x, s)$ é definida por (2.4) para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Defina $h(x, s) := g(x, s) - g(x, 0)$ para $s \geq 0$. Então $h(x, 0) = g(x, 0) - g(x, 0) = 0$ e, consequentemente, $h(x, s)$ pode ser estendida sobre $\Omega \times \mathbb{R}$ como uma função ímpar com respeito a s, pois basta considerar $h(x, s) = -h(x, -s)$ para $s < 0$. Assim, define-se a extensão de g como

$$g(x, s) := h(x, s) + g(x, 0) \text{ para } s \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Vejamos que tal extensão satisfaz (g_0), (g_1) ou (g_0), (g_2), para $s < 0$, e também satisfaz a desigualdade (2.7). De fato, fazendo

$$H(x, s) := \int_0^s h(x, t)dt,$$

temos de (2.8) que

$$\begin{aligned} &\int_0^s g(x, t)dt = \int_0^s h(x, t)dt + g(x, 0)\int_0^s dt \text{ para cada } s \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \; G(x, s) = H(x, s) + g(x, 0)s \text{ para cada } s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Além disso, como $h(x,s)$ é impar com respeito a s, então

$$H(x,-s) = \int_0^{-s} h(x,t)dt = \int_0^{-s} -h(x,-t)dt = \int_0^{-s} h(x,-t)d(-t) = \int_0^{s} h(x,t)dt = H(x,s),$$

isto é, $H(x,s)$ é par com respeito a s. Seja $s \geq 0$. Como g satisfaz (g_0), (g_1) ou (g_0), (g_2), então em qualquer dos casos tem-se (g_0), ou seja, $g(x,0) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Então, por (2.9), tem-se

$$G(x,-s) = H(x,-s) - g(x,0)s = H(x,s) - g(x,0)s \leq H(x,s) + g(x,0)s = G(x,s) = G(x,|-s|),$$

e $G(x,s) = G(x,|s|)$. Portanto, ocorre (2.7). Além disso, se g satisfaz (g_0), (g_1), tem-se

$$\begin{aligned}
&(p+1)G(x,s) - sg(x,s) \leq C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)[H(x,s) + g(x,0)s] - s[h(x,s) + g(x,0)] \leq C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)H(x,s) + pg(x,0)s - sh(x,s) \leq C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)H(x,s) \leq sh(x,s) - pg(x,0)s + C|s|^\theta + C, \text{ para } s \geq 0.
\end{aligned}$$

Como $H(x,s)$ e $sh(x,s)$ são pares com respeito a s, então a desigualdade acima equivale a

$$\begin{aligned}
&(p+1)H(x,-s) \leq -sh(x,-s) - pg(x,0)s + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)[G(x,-s) + g(x,0)s] \leq -s[g(x,-s) - g(x,0)] - pg(x,0)s + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)G(x,-s) + pg(x,0)s \leq -sg(x,-s) - pg(x,0)s + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)G(x,-s) \leq -sg(x,-s) - 2pg(x,0)|s| + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)G(x,-s) \leq -sg(x,-s) + C_1|s| + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)G(x,-s) - (-s)g(x,-s) \leq C_1|s| + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)G(x,-s) - (-s)g(x,-s) \leq C_1(C_2|s|^\theta + C_2) + C|s|^\theta + C \\
&\Rightarrow (p+1)G(x,-s) - (-s)g(x,-s) \leq C_3|s|^\theta + C_3, \text{ para } s \geq 0,
\end{aligned}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas que não dependem de s. Daí, (2.3) é válida para $s < 0$.

E ainda,

$$
\begin{aligned}
&|g(x,s)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |h(x,s)+g(x,0)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |-h(x,-s)+g(x,0)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |-[g(x,-s)-g(x,0)]+g(x,0)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |-g(x,-s)+2g(x,0)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |g(x,-s)-2g(x,0)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |g(x,-s)|-|2g(x,0)| \le C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |g(x,-s)| \le 2g(x,0) + C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |g(x,-s)| \le C_4 + C|s|^\theta + C\\
&\Rightarrow |g(x,-s)| \le C_5|s|^\theta + C_5, \text{ para } s \ge 0,
\end{aligned}
$$

onde $C_4, C_5 > 0$ são constantes positivas que não dependem de s. Logo, (2.2) é válida para $s < 0$. Portanto, (g_1) ocorre também para $s < 0$. Agora, se g satisfaz (g_0), (g_2) então a extensão de g satisfaz (g_2) quando $s \to \infty$. Além disso, claramente $\dfrac{C_6}{s^p} \to 0$ quando $s \to -\infty$, onde C_6 é uma constante positiva tal que $C_6 > |2g(x,0)| \ge 0$, para todo $x \in \Omega$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existem $A_1, A_2 > 0$ tais que

$$
s > A_1 \Rightarrow s^{-p}|g(x,s)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } x \in \Omega, \text{ e } s < -A_2 \Rightarrow \frac{C_6}{s^p} \le \left|\frac{C_6}{s^p}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.
$$

Tomando $A := \max\{A_1, A_2\} > 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
s < -A \Rightarrow -s > A &\Rightarrow \frac{1}{(-s)^p}|g(x,-s)| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{(-s)^p}|h(x,-s)+g(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{(-s)^p}|-h(x,s)+g(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{(-s)^p}|-[g(x,s)-g(x,0)]+g(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{(-s)^p}|g(x,s)-2g(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{s^p}\left(|g(x,s)|-|2g(x,0)|\right) \le \frac{1}{(-s)^p}|g(x,s)-2g(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{s^p}|g(x,s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|2g(x,0)|}{s^p}\\
&\Rightarrow \frac{1}{s^p}|g(x,s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C_6}{s^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ para todo } x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

Daí, (g_2) também é válida quando $s \to -\infty$. $\square$

Agora que estendemos $g(x,s)$, para cada $\lambda > 0$ define-se um funcional $I(u)$ sobre $H_0^1(\Omega)$ por

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} a(x)|u|^{p+1} - \lambda G(x,u) \right) dx, \tag{2.10}$$

cuja derivada de Fréchet é dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega \big(\nabla u \nabla v - a(x)|u|^{p-1}uv - \lambda g(x,u)v \big)\, dx \text{ para } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Note que um ponto crítico do funcional I se torna solução da equação (2.1). A fim de aplicar o Corolário 1.8 para este funcional e obter pontos críticos, veremos no lema abaixo que I satisfaz a condição de Palais-Smale, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Lema 2.3. *Seja $g \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$ satisfazendo (g_0). Se $g(x,s)$ satisfaz (g_1) com $\theta < 2$ ou $g(x,s)$ satisfaz $(g_2), (a_2)$, então o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale para todo $\lambda > 0$. Além disso, se $g(x,s)$ satisfaz (g_1) com $\theta = 2$, então o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência qualquer em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n)$ converge para zero. Primeiro, suponha que $g(x,s)$ satisfaz (g_0),(g_1). Seja $1 \le \theta \le 2$. Então, usando as definições de $I(u)$ e $I'(u)v$, obtemos

$$\begin{aligned}
(p+1)I(u_n) - I'(u_n)u_n &= (p+1) \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p+1} a(x)|u_n|^{p+1} - \lambda G(x,u_n) \right) dx \\
&\quad - \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - a(x)|u_n|^{p+1} - \lambda g(x,u_n)u_n \big)\, dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{p-1}{2}|\nabla u_n|^2 + \lambda g(x,u_n)u_n - \lambda(p+1)G(x,u_n) \right) dx \\
&= \frac{p-1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega ((p+1)G(x,u_n) - g(x,u_n)u_n) dx
\end{aligned}$$

que, por (2.3), implica

$$\frac{p-1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega (C|u_n|^\theta + C) dx \le (p+1)I(u_n) - I'(u_n)u_n. \tag{2.12}$$

Devido à desigualdade de Poincaré, a norma em $H_0^1(\Omega)$ dada por $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$ é equivalente à usual. Como $I(u_n)$ é limitado e $I'(u_n)$ converge para zero, existem constantes $C_1 > 0$ e $n_1 = n_1(C_1) \in \mathbb{N}$ tais que

$$|I(u_n)| \le \frac{C_1}{p+1} \text{ e } \|I'(u_n)\| < C_1 \text{ desde que } n \ge n_1.$$

Então, para $n \geq n_1$ tem-se

$$\begin{aligned}
|(p+1)I(u_n) - I'(u_n)u_n| &\leq (p+1)|I(u_n)| + |I'(u_n)u_n| \\
&\leq (p+1)|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|\|u_n\|_{H_0^1} \\
&\leq (p+1)\frac{C_1}{p+1} + C_1\|\nabla u_n\|_2 \\
&= C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1.
\end{aligned}$$

Daí e da desigualdade (2.12), segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda C\|u_n\|_\theta^\theta - \lambda C|\Omega| \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1 \\
&\Rightarrow \frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq \lambda C\|u_n\|_\theta^\theta + \lambda C|\Omega| + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1
\end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ é a medida de Ω. Mas, pela imersão de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para qualquer $r \in [1,\infty)$ se $N = 1,2$ e $r \in [1, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$. Então, como $\theta \in [1,2]$, $[1,2] \subset [1,\infty)$ se $N = 1,2$ e $[1,2] \subset [1, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$. Logo, $\|u_n\|_\theta \leq C_2\|\nabla u_n\|_2$, donde

$$\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq \lambda C C_2\|\nabla u_n\|_2^\theta + \lambda C|\Omega| + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1, \tag{2.13}$$

onde C_2 é uma constante positiva. Tanto no caso $\theta < 2$, quanto no caso $\theta = 2$ com $0 < \lambda < \frac{p-1}{2C_2}$ suficientemente pequeno, a desigualdade (2.13) mostra que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2$ é limitada. De fato, se fosse $\|\nabla u_n\|_2 \to \infty$, ocorreria

$$\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^{2-\theta} \leq \lambda C C_2 + \frac{C_1}{\|\nabla u_n\|_2^{\theta-1}} + \frac{\lambda C|\Omega| + C_1}{\|\nabla u_n\|_2^\theta}, \text{ se } 1 \leq \theta < 2 \text{ e}$$

$$\frac{p-1}{2} \leq \lambda C C_2 + \frac{C_1}{\|\nabla u_n\|_2} + \frac{\lambda C|\Omega| + C_1}{\|\nabla u_n\|_2^2}, \text{ se } \theta = 2.$$

Mas, na primeira desigualdade, o lado esquerdo diverge para ∞, enquanto o lado direito converge para $\lambda C C_2$ e, na segunda desigualdade, basta fazer $n \to \infty$ para obter $\frac{p-1}{2} \leq \lambda C C_2$, o que implica $\frac{p-1}{2CC_2} \leq \lambda$. Ambas situações são absurdas. Logo, $\|\nabla u_n\|_2 \leq M$ para alguma constante $M > 0$. Agora, seja $0 \leq \theta < 1$. Então,

$$(p+1)G(x,s) - sg(x,s) \leq c|s|^\theta + C \leq C(|s| + C_3) + C \leq C_4|s| + C_4,$$

onde $C_3, C_4 > 0$ são constantes. Daí, analogamente ao que foi feito acima,

$$\begin{aligned}
&\frac{p-1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_\Omega (C_4|u_n| + C_4)dx \leq (p+1)I(u_n) - I'(u_n)u_n \\
&\Rightarrow \frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda C_4\|u_n\|_1 - \lambda C_4|\Omega| \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1 \\
&\Rightarrow \frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq \lambda C_4\|u_n\|_1 + \lambda C_4|\Omega| + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1
\end{aligned}$$

e pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ segue que

$$\frac{p-1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq \lambda C_5\|\nabla u_n\|_2 + \lambda C|\Omega| + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1, \tag{2.14}$$

com uma constante $C_5 > 0$. Logo, a desigualdade (2.14) mostra que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Assim, como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, então para todo $\theta \in [0,2]$ pode-se extrair uma subsequência de $\{u_n\}$ (novamente denotada por $\{u_n\}$) que converge fracamente para um limite $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Por imersão compacta, $u_n \to u_0$ fortemente em $L^r(\Omega)$ para qualquer $r \in [1,\infty)$ se $N = 1,2$ e $r \in [1, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$. Daí, a menos de subsequência, $u_n \to u_0$ converge q.t.p. em Ω e $|u_n| \leq h_r$ q.t.p. em Ω, onde $h_r \in L^r(\Omega)$. Além disso, de (2.2) segue que

$$\begin{aligned}
&|g(x,s)s| \leq C|s| + C|s|^{q+1} \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega \\
&\Rightarrow |g(x,u_n)u_n| \leq C|u_n| + C|u_n|^{q+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \\
&\Rightarrow |g(x,u_n)u_n| \leq C\ h_1 + C\ h_{q+1}^{q+1} \in L^1(\Omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_\Omega g(x,u_n)u_n dx \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_0)u_0 dx. \tag{2.15}$$

Analogamente, para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
&|g(x,u_n)v| \leq C|v| + C|v||u_n|^q \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow |g(x,u_n)v| \leq C|v| + C|v|h_q^q \in L^1(\Omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega g(x,u_n)v dx \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_0)v dx. \tag{2.16}$$

De (2.11), segue que

$$I'(u_n)u_0 = \int_\Omega \big(\nabla u_n \nabla u_0 - a(x)|u_n|^{p-1}u_n u_0 - \lambda g(x,u_n)u_0\big)\, dx.$$

Fazendo $n \to \infty$, como $I'(u_n) \to 0$, então por (2.16) com $v = u_0$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Omega (a|u_0|^{p+1} + \lambda g(x, u_0)u_0)dx.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} I'(u_n)u_n &= \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - a(x)|u_n|^{p+1} - \lambda g(x, u_n)u_n\right) dx \\ \Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx &= I'(u_n)u_n + \int_\Omega (a(x)|u_n|^{p+1} - \lambda g(x, u_n)u_n)dx. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, como $I'(u_n) \to 0$, então por (2.15)

$$\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \|\nabla u_0\|_2^2 = \|u_0\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Portanto, a subsequência $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$, converge q.t.p. em Ω para u_0 e $\|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \to \|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}$. Então, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice A), tem-se $\|u_n - u_0\|_{H^1_0(\Omega)} \to 0$, isto é, u_n converge fortemente para u_0 em $H^1_0(\Omega)$, o que prova que $\{u_n\}$ é uma sequencia de Palais-Smale.

Agora, suponha que $g(x, s)$ satisfaz (g_0), (g_2), (a_2). Fixe $\lambda > 0$ arbitrário. Por (g_2), dado $\varepsilon > 0$ de forma que $\varepsilon a_0 > 0$, então existe $C_\varepsilon > 0$ tal que para $s > C_\varepsilon$ tem-se

$$\begin{aligned} \left|s^{-p}|g(x, s)|\right| < \frac{\varepsilon a_0}{\lambda} &\Rightarrow |g(x, s)| < \frac{\varepsilon a_0}{\lambda}|s|^p \leq \frac{\varepsilon a(x)}{\lambda}|s|^p \\ &\Rightarrow |s||g(x, s)| \leq \frac{\varepsilon a(x)}{\lambda}|s|^{p+1}, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda|sg(x, s)| \leq \varepsilon a(x)|s|^{p+1} + C_\varepsilon \text{ para } x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Além disso, por (2.7), temos que

$$|G(x, s)| \leq |G(x, |s|)| \leq \int_0^{|s|} |g(x, t)|dt \leq \int_0^{|s|} \frac{\varepsilon a_0}{\lambda}(p + 1)|t|^p dt = \frac{\varepsilon a_0}{\lambda}\frac{|s|^{p+1}}{p + 1}(p + 1),$$

donde

$$\lambda|G(x, s)| \leq \varepsilon a(x)|s|^{p+1} + C_\varepsilon \text{ para } x \in \Omega. \tag{2.18}$$

Então, usando (2.17) e (2.18), obtemos as estimativas

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u_n|^{p+1} - \lambda G(x, u_n)\right) dx \\ &\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u_n|^{p+1} - \varepsilon a(x)|u_n|^{p+1} - C_\varepsilon\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - ((p - 1)^{-1} + \varepsilon)a(x)|u_n|^{p+1} - C_\varepsilon\right) dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I'(u_n)u_n &= \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - a(x)|u_n|^{p+1} - \lambda g(x,u_n)u_n\big)\,dx \\
&\leq \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - a(x)|u_n|^{p+1} + |\lambda||g(x,u_n)u_n|\big)\,dx \\
&\leq \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - a(x)|u_n|^{p+1} - \varepsilon a(x)|u_n|^{p+1} + C_\varepsilon\big)\,dx \\
&\leq \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - (1-\varepsilon)a(x)|u_n|^{p+1} + C_\varepsilon\big)\,dx.
\end{aligned}$$

Fixe $0 < \varepsilon < \dfrac{\left(1 - \frac{2}{p+1}\right)}{3}$. Então

$$1 - \frac{2}{p+1} > 3\varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon - 2\varepsilon > \frac{2}{p+1} \Rightarrow 1 - \varepsilon > \frac{2}{p+1} + 2\varepsilon = 2\left(\frac{1}{p+1} + \varepsilon\right),$$

donde se pode definir

$$r := \frac{1-\varepsilon}{(p+1)^{-1} + \varepsilon} > 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
rI(u_n) - I'(u_n)u_n &\geq \int_\Omega \left(\frac{r}{2}|\nabla u_n|^2 - (1-\varepsilon)a(x)|u_n|^{p+1} - rC_\varepsilon\right)dx \\
&\quad - \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - (1-\varepsilon)a(x)|u_n|^{p+1} + C_\varepsilon\big)\,dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{r-2}{2}|\nabla u_n|^2 - (r+1)C_\varepsilon\right)dx.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{r-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 - (r+1)C_\varepsilon|\Omega| &\leq rI(u_n) - I'(u_n)u_n \\
&\leq r|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq rC_6 + C_6\|\nabla u_n\|_2,
\end{aligned}$$

que implica

$$\frac{r-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_7\|\nabla u_n\|_2 + C_7,$$

onde $C_6, C_7 > 0$ são constantes. E, analogamente ao realizado no caso em que g satisfaz (g_0), (g_1), temos que essa última desigualdade assegura que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, podemos extrair uma subsequência (novamente denotada por $\{u_n\}$) que converge fracamente para um limite $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Por imersão compacta, $u_n \to u_0$ fortemente em $L^r(\Omega)$ para qualquer $r \in [1,\infty)$ se $N = 1, 2$ e $r \in [1, \frac{2N}{N-2})$ se $N \geq 3$. Daí, $u_n \to u_0$ converge q.t.p. em Ω e $|u_n| \leq h_r$ q.t.p. em Ω onde $h_r \in L^r(\Omega)$. Então, usando (2.17), temos que

$$|u_n||g(x,u_n)| \leq \frac{\varepsilon a(x)}{\lambda}|u_n|^{p+1} + \frac{C_\varepsilon}{\lambda},$$

o que implica que

$$|u_n||g(x,u_n)| \leq C_8 h_{p+1}^{p+1} + C_8 \in L^1(\Omega) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega g(x,u_n)u_n dx \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_0)u_0 dx. \tag{2.19}$$

De modo análogo, chega-se a convergência

$$\int_\Omega g(x,u_n)v dx \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_0)v dx. \tag{2.20}$$

quando $n \to \infty$, qualquer que seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Por fim, analogamente ao feito no caso anterior, usando as desigualdades (2.19) e (2.20) chega-se a $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$. Portanto, a subsequência $\{u_n\}$ satisfaz todas as hipóteses do Lema de Brezis-Lieb, donde u_n converge fortemente para u_0 em $H_0^1(\Omega)$, o que prova que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale. $\square$

O Teorema, a seguir, aplica o Teorema do Passo da Montanha para espaços de Riesz-Banach, especificamente o Corolário 1.8, para demonstrar a existência de solução não-trivial não-negativa para o problema (2.1).

Teorema 2.4. *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que (2.1) possui uma solução não-trivial não-negativa, qualquer que seja $\lambda \in [0, \lambda_0)$.*

Demonstração. Lembre que o espaço $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente nos espaços $L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, 2^*)$. Assim, para cada $\sigma \in [1, \infty)$, se $N = 1, 2$, e $\sigma \in [1, \frac{2N}{N-2})$, se $N \geq 3$, pode-se denotar por A_σ a constante da imersão de Sobolev dada por

$$\|u\|_\sigma \leq A_\sigma \|\nabla u\|_2 \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.21}$$

Além disso, tanto no caso de (2.1) estar sob as hipóteses (g_0), (g_1), (a_1) quanto no caso de estar sob (g_0), (g_2), (a_2), temos que existem constantes $C_0 > 0$ e $q > 1$ tais que

$$1 < q < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3,$$

e

$$|G(x,s)| \leq C_0(|s|^{q+1} + 1) \text{ para } (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

De fato, no primeiro caso, por (2.2) existem constantes $C > 0$ e $q > 1$ tais que

$$1 < q < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3,$$

e

$$\begin{aligned}|G(x,s)| &= \int_0^s |g(x,t)|dt \le \int_0^s C(|s|^q+1)dt = \frac{C}{q+1}|s|^{q+1} + C|s| \\ &\le \frac{C}{q+1}|s|^{q+1} + C(|s|^{q+1}+C_1) \le C_0(|s|^{q+1}+1), \text{ para } (x,s) \in \Omega\times\mathbb{R},\end{aligned}$$

onde C_0, C_1 são constantes positivas. E, no segundo caso, por (g_2), temos que dado $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \le C_0(p+1)$, existem constantes $C_\varepsilon > 0$ e $p > 1$ que satisfazem

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \ge 3,$$

e

$$\begin{aligned}|G(x,s)| &= \int_0^s |g(x,t)|dt \le \int_0^s \varepsilon|s|^p dt \\ &= \frac{\varepsilon}{p+1}|s|^{p+1} \le C_0(|s|^{p+1}+1) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ desde que } |s| > C_\varepsilon.\end{aligned}$$

Nesse caso, $q = p$. Portanto, (2.22) é válida. Note que a função $a(x)$ é contínua e definida num conjunto compacto, portanto $a \in L^\infty(\Omega)$. Então, define-se

$$C_2 := \frac{1}{p+1}\|a\|_\infty A_{p+1}^{p+1}, \quad C_3 := C_0 A_{q+1}^{q+1} \tag{2.23}$$

e fixe $\rho > 0$ tão pequeno que

$$C_2\rho^{p+1} + C_3\rho^{q+1} \le \frac{\rho^2}{4}. \tag{2.24}$$

Em seguida, define-se $\lambda_1 > 0$ por

$$\lambda_1 C_0|\Omega| = \frac{\rho^2}{8}. \tag{2.25}$$

Em ambos os casos de hipóteses sobre (2.1), existe $x_0 \in \Omega$ tal que $a(x_0) > 0$. Então pode-se escolher um $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $a(x) > 0$ na bola $B(x_0,\delta)$. Fixe, assim, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ não-trivial tal que *supp*$\phi \subset B(x_0,\delta)$ e $\phi \in (H_0^1(\Omega))^+$, isto é, $\phi(x) \ge 0$ q.t.p. em Ω. Fixada tal função ϕ, pode ser que ocorra $\|\nabla\phi\|_2 < \rho$. Então fixe também $r > 0$ tão grande que

$$\rho < r\|\nabla\phi\|_2 \tag{2.26}$$

e

$$r^2\|\nabla\phi\|_2^2 < \frac{r^{p+1}}{p+1}\int_{B(x_0,\delta)} a(x)|\phi|^{p+1}dx. \tag{2.27}$$

Além disso, como a função G do problema (2.1) pode mudar seu sinal, define-se $\lambda_2 > 0$ tão pequeno que

$$\frac{r^{p+1}}{2(p+1)}\int_{B(x_0,\delta)} a(x)|\phi|^{p+1}dx + \lambda\int_{B(x_0,\delta)} G(x,r\phi)dx > 0, \text{ para } \lambda \in [0,\lambda_2]. \tag{2.28}$$

Pelo Lema 2.3, pode-se definir $\lambda_3 > 0$ suficientemente pequeno tal que o funcional satisfaça a condição (PS) para todo $\lambda \in [0, \lambda_3]$, qualquer que sejam as hipóteses sobre (2.1). Finalmente, defina $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 1\}$. Sendo $E := H_0^1(\Omega)$ e fixado $\lambda \in [0, \lambda_0)$, verifica-se que I satisfaz as hipóteses do Corolário 1.8. Com efeito, como $\|\nabla |u|\|_p = \|\nabla u\|_p$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ e $G(x,s) \leq G(x,|s|)$ para todo $x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} I(|u|) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla |u||^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u|^{p+1} - \lambda G(x,|u|) \right) dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u|^{p+1} - \lambda G(x,u) \right) dx \\ &= I(u), \text{ para todo } u \in E. \end{aligned}$$

Como λ_0 foi definido de forma a I satisfazer a condição (PS) para $\lambda \in [0, \lambda_0]$, resta verificar $(I1), (I2)$. Defina U como sendo a bola aberta de centro 0 e raio ρ em $H_0^1(\Omega)$ com a norma $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$, ou seja,

$$U := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\|_2 < \rho\}$$

Faça $e_0 \equiv 0$ e $e_1 \equiv r\phi$, então claramente $e_0, e_1 \in E^+$. Como $\|\nabla e_0\|_2 = 0 < \rho$, então $e_0 \in E^+ \cap U$. Além disso, por (2.26), $r\|\nabla \phi\|_2 > \rho \Rightarrow \|r\nabla\phi\|_2 > \rho \Rightarrow \|\nabla(r\phi)\|_2 > \rho \Rightarrow r\phi \notin \overline{U} \Rightarrow e_1 \in E^+ \setminus \overline{U}$. Então $(I1)$ se verifica. Note que para $u \in \partial U$, tem-se $\|\nabla u\|_2 = \rho$ então

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}a(x)|u|^{p+1} - \lambda G(x,u) \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega a(x)|u|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega G(x,u)dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder e de (2.22), segue

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|a\|_\infty \|u^{p+1}\|_1 - \lambda \int_\Omega C_0(|u|^{q+1} + 1)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|a\|_\infty \|u\|_{p+1}^{p+1} - \lambda C_0(\|u\|_{q+1}^{q+1} + |\Omega|). \end{aligned}$$

E, de (2.21), a desigualdade acima implica que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|a\|_\infty A_{p+1}^{p+1}\|\nabla u\|_2^{p+1} - \lambda C_0 A_{q+1}^{q+1}\|\nabla u\|_2^{q+1} - \lambda C_0|\Omega|.$$

Além disso, de (2.23), do fato de $\lambda \leq 1$ e $\lambda \leq \lambda_1$ segue que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - C_2\|\nabla u\|_2^{p+1} - \lambda C_3\|\nabla u\|_2^{q+1} - \lambda_1 C_0|\Omega|.$$

Então, usando (2.24) e (2.25), obtemos que

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - C_2\rho^{p+1} - C_3\rho^{q+1} - \frac{\rho^2}{8}\\
&\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^2}{8} = \frac{\rho^2}{8}, \text{ para todo } u \in \partial U.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\inf_{u\in\partial U} I(u) \geq \frac{\rho^2}{8}. \tag{2.29}
$$

Usando (2.27) e (2.28), temos que

$$
\begin{aligned}
I(e_1) = I(r\phi) &= \frac{1}{2}\|\nabla(r\phi)\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega a(x)|r\phi|^{p+1}dx - \lambda\int_\Omega G(x,r\phi)dx\\
&= \frac{r^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega a(x)|r\phi|^{p+1}dx - \lambda\int_\Omega G(x,r\phi)dx\\
&\leq \frac{r^{p+1}}{2(p+1)}\int_{B(x_0,\delta)} a(x)|\phi|^{p+1}dx - \frac{r^{p+1}}{(p+1)}\int_{B(x_0,\delta)} a(x)|\phi|^{p+1}dx - \lambda\int_{B(x_0,\delta)} G(x,r\phi)dx\\
&= -\frac{1}{2}\frac{r^{p+1}}{(p+1)}\int_{B(x_0,\delta)} a(x)|\phi|^{p+1}dx - \lambda\int_{B(x_0,\delta)} G(x,r\phi)dx < 0.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
I(e_0) = -\lambda\int_\Omega G(x,0)dx, \text{ com } G(x,0) = \int_0^0 g(x,t)dt = 0,
$$

o que implica que $I(e_0) = 0$. Logo, usando (2.29), obtemos

$$
\max(I(e_0), I(e_1)) = 0 < \frac{\rho^2}{8} \leq \inf_{u\in\partial U} I(u) \leq \inf_{u\in\partial U\cap E^+} I(u).
$$

Portanto, (I_2) se verifica. Então, pelo Corolário 1.8, existe um ponto crítico $u \in E^+$ tal que $I'(u) = 0$ e

$$
I(u) = c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1},
$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E^+) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = r\phi\}$.

Mas, da desigualdade (1.16), segue que

$$
I(u) = c \geq inf_{\partial U\cap E^+} I(u) \geq inf_{\partial U} I(u) \geq \frac{\rho^2}{8} > 0. \tag{2.30}
$$

Portanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca não-trivial não-negativa de (2.1). □

A partir dessa demonstração, quando nos referirmos a λ_0 supomos a definição dada no Teorema 2.4.

Lema 2.5. *Qualquer solução $u \in H_0^1(\Omega)$ não-trivial não-negativa de (2.1) com $\lambda \in [0, \lambda_0)$ satisfaz*

$$u \in L^\sigma(\Omega) \text{ para todo } 1 \leq \sigma < \infty.$$

Nesse caso, a aplicação f dada por $f(x,u) := a(x)u^p + \lambda g(x,u)$ pertence a $L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$.

Demonstração. Fixe $\lambda \in [0, \lambda_0)$. Agora, seja $f(x,s) := a(x)s^p + \lambda g(x,s)$. Como as funções $a(x)$ e $g(x,s)$ são contínuas, então f é carathéodory. Além disso, note que para todo $s \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} |f(x,s)| &\leq |a(x)||s|^p + \lambda|g(x,s)| \\ &\leq \|a\|_\infty |s|^p + \lambda |g(x,s)|. \end{aligned}$$

Note ainda que, tanto no caso de o problema (2.1) estar sob as hipóteses (g_0),(g_1),(a_1) quanto no caso (g_0),(g_2),(a_2), tem-se

$$|g(x,s)| \leq C(1 + |s|^q) \tag{2.31}$$

devido à (2.2) e à (g_2), respectivamente, com $q = p$ no segundo caso. Daí,

$$\begin{aligned} |s| \leq 1 &\Rightarrow |s|^q \leq |s| \\ &\Rightarrow |g(x,s)| \leq C(1 + |s|^q) \leq C(1 + |s|) \leq (C + 2C|s|^{q-1})(1 + |s|), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |s| \geq 1 &\Rightarrow |s|^q \geq 1 \\ &\Rightarrow |g(x,s)| \leq C(1 + |s|^q) \leq C(|s|^q + |s|^q) = 2C|s|^q = 2C|s|^{q-1}|s| \\ &\Rightarrow |g(x,s)| \leq 2C|s|^{q-1}(1 + |s|) \leq (C + 2C|s|^{q-1})(1 + |s|), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} |f(x,s)| &\leq \|a\|_\infty |s|^p + \lambda(C + 2C|s|^{q-1})(1 + |s|) \\ &\leq \|a\|_\infty (1 + |s|^p) + \lambda(C + 2C|s|^{q-1})(1 + |s|) \\ &\leq (\|a\|_\infty + \|a\|_\infty |s|^{p-1})(1 + |s|) + \lambda(C + 2C|s|^{q-1})(1 + |s|) \\ &\leq (\|a\|_\infty + \|a\|_\infty |s|^{p-1} + \lambda C + \lambda 2C|s|^{q-1})(1 + |s|) \\ &\leq (C_1|s|^{p-1} + C_1|s|^{q-1} + C_1)(1 + |s|). \end{aligned}$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (2.1) para $\lambda \in [0, \lambda_0]$ que está fixado. Defina $h(x) := C_1|u(x)|^{p-1} + C_1|u(x)|^{q-1} + C_1$. Note que

$$(p-1)\frac{N}{2}, (q-1)\frac{N}{2} < \infty \text{ se } N = 1, 2$$

e

$$(p-1)\frac{N}{2}, (q-1)\frac{N}{2} < \frac{N}{2}\left(\frac{N+2}{N-2}-1\right) = \frac{N}{2}\frac{4}{N-2} = \frac{2N}{N-2} \text{ se } N \geq 3.$$

Então, pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$, se $N = 1, 2$, e $\sigma \in [1, \frac{2N}{N-2})$, se $N \geq 3$, temos que

$$\int_\Omega |u(x)|^{(p-1)\frac{N}{2}} dx < \infty \text{ e } \int_\Omega |u(x)|^{(q-1)\frac{N}{2}} dx < \infty,$$

donde $h(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $|f(x,u)| \leq h(x)(1+|u|)$ para quase todo $x \in \Omega$. Portanto, pelo Lema Brezis-Kato (ver apêndice A), $u \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$.

Agora, seja $1 \leq \sigma < \infty$. Usando (2.31), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u)|^\sigma dx &\leq \int_\Omega (\|a\|_\infty |u(x)|^p + \lambda |g(x,u(x))|)^\sigma dx \\
&\leq 2^{\sigma-1}\|a\|_\infty^\sigma \int_\Omega |u(x)|^{p\sigma} dx + 2^{\sigma-1}\lambda^\sigma \int_\Omega |g(x,u(x))|^\sigma dx \\
&\leq 2^{\sigma-1}\|a\|_\infty^\sigma \int_\Omega |u(x)|^{p\sigma} dx + 2^{\sigma-1}\lambda^\sigma \int_\Omega C^\sigma (1+|u(x)|^q)^\sigma dx \\
&\leq 2^{\sigma-1}\|a\|_\infty^\sigma \int_\Omega |u(x)|^{p\sigma} dx + 2^{\sigma-1}\lambda^\sigma C^\sigma 2^{\sigma-1} \int_\Omega (1+|u(x)|^{q\sigma}) dx \\
&\leq C_5 \int_\Omega |u(x)|^{p\sigma} dx + C_5 \int_\Omega |u(x)|^{q\sigma} dx + C_5|\Omega| < \infty,
\end{aligned}$$

pois $u \in L^{p\sigma}(\Omega)$ e $u \in L^{q\sigma}(\Omega)$. Além disso,

$$\|f\|_\sigma \leq C_5\|u\|_{p\sigma}^{p\sigma} + C_5\|u\|_{q\sigma}^{q\sigma} + C_5. \tag{2.32}$$

Portanto, $f \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$. □

No Teorema 2.4 provou-se para cada $\lambda \in [0, \lambda_0)$ a existência de uma solução não-trivial não-negativa para o problema (2.1). Então, para demonstrar o Teorema 2.1, basta mostrar que tal solução é estritamente positiva.

Demonstração do Teorema 2.1: Seja $\lambda \in [0,\lambda_0)$. A fim de fazer uma discussão rigorosa, reescreve-se o valor crítico, a função $f(x,u)$ definida no Lema 2.5, a solução fraca e o funcional como c_λ, f_λ, u_λ e $I_\lambda(u)$, respectivamente. Primeiro, note que pelo Lema 2.5, $u_\lambda, f_\lambda \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$. Logo, pelo Teorema(ADN) (ver apêndice A), temos que $u_\lambda \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ e

$$\|u_\lambda\|_{2,\sigma} \leq C_6\|f_\lambda\|_\sigma, \text{ para todo } 1 \leq \sigma < \infty. \tag{2.33}$$

Assim, pode-se tomar σ suficientemente grande de modo que $2\sigma > N$ e $0 < \frac{N}{\sigma} < 1$. Segue do Teorema da desigualdade geral de Sobolev (ver apêndice A) que $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e pela imersão compacta de $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ em $C^1(\overline{\Omega})$ tem-se $u_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$. Agora, note que existe uma constante $C_7 > 0$

independente de λ tal que

$$\frac{\rho^2}{8} \leq c_\lambda \leq C_7, \text{ para todo } \lambda \in [0, \lambda_0]. \tag{2.34}$$

De fato, de (2.31) segue a desigualdade da esquerda. Além disso, para mostrar a outra desigualdade coloca-se $\gamma(t) := te_1$ para $0 \leq t \leq 1$, que claramente pertente a Γ. O caminho γ ainda satisfaz, para cada $t \in [0, 1]$, a igualdade

$$I_\lambda(\gamma(t)) = I_\lambda(te_1) = \frac{t^2}{2}\|\nabla e_1\|_2^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_{B(x_0,\delta)} a|e_1|^{p+1}dx - \lambda\int_{B(x_0,\delta)} G(x, te_1)dx.$$

De (2.27) e dos fatos $t \leq 1$ e $\lambda \leq \lambda_0$, segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(te_1) &= \frac{1}{2}\|\nabla e_1\|_2^2 - t^{p-1}r^2\|\nabla\phi\|_2^2 + \lambda\int_{B(x_0,\delta)} |G(x, te_1)|dx \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla e_1\|_2^2 + \lambda_0 \sup_{0\leq t\leq 1}\int_{B(x_0,\delta)} |G(x, te_1)|dx = C_7. \end{aligned}$$

Daí,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1} I_\lambda(\gamma(t)) \leq \max_{0\leq t\leq 1} I_\lambda(te_1) \leq C_7.$$

Logo, (2.34) é válida. Portanto, $I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$ é limitado para $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e $I'(u_\lambda) = 0$. Então, pelo argumento usado na demonstração do Lema 2.3, concluímos que $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_\lambda\|_2$ é limitada para $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Faz-se, agora, um argumento de bootstrap para obter a desigualdade

$$\sup_{0\leq\lambda\leq\lambda_0} \|u_\lambda\|_{2,\sigma} < \infty \text{ para todo } \sigma \in [1, \infty). \tag{2.35}$$

Para $N = 1, 2$, pela imersão de Sobolev, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$. Então,

$$\|u_\lambda\|_\sigma \leq C_8\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty \text{ para todo } 1 \leq \sigma < \infty,$$

pois $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada. Por (2.32), segue que

$$\|f_\lambda\|_\sigma < \infty \text{ para todo } 1 \leq \sigma < \infty.$$

Daí, a desigualdade (2.33), implica que

$$\|u_{2,\lambda}\|_\sigma < \infty \text{ para todo } \sigma \in [1, \infty),$$

qualquer que seja $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Portanto, tem-se (2.35). Para $N \geq 3$, pela imersão de Sobolev, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < 2^*$, com $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Então,

$$\|u_\lambda\|_{2^*} \leq C_8 \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty \text{ para todo } 1 \leq \sigma < \infty,$$

pois $\|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada. Defina $1 < p_0 := \max\{p, q\} < 2^* - 1$. Então,

$$\begin{aligned} |f_\lambda| &\leq \|a\|_\infty |u_\lambda|^p + \lambda C(1 + |u_\lambda|^q) \\ &\leq \|a\|_\infty (|u_\lambda|^{p_0} + C_9) + \lambda C(1 + |u_\lambda|^{p_0} + C_9) \\ &\leq C_{10} |u_\lambda|^{p_0} + C_{10}, \end{aligned}$$

onde C_9 e C_{10} são constantes positivas. Logo, fazendo $\sigma_0 := \frac{2^*}{p_0}$, temos que

$$\int_\Omega |f_\lambda|^{\sigma_0} = \int_\Omega |f_\lambda|^{\frac{2^*}{p_0}} \leq C_{10} \int_\Omega |u_\lambda|^{2^*} + C_{10}|\Omega| < \infty.$$

Donde $f_\lambda \in L^{\sigma_0}(\Omega)$ e $\|f_\lambda\|_{\sigma_0} \leq C_{10}\|u_\lambda\|_{2^*} + C_{10}|\Omega| < \infty$. Da desigualdade (2.33), segue que $\|u_\lambda\|_{\sigma_0} < \infty$. Há três possibilidades para σ_0.

Se $2\sigma_0 > N$, então pela desigualdade geral de Sobolev (ver apêndice A) temos que $u_\lambda \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Logo, $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u_\lambda\|_\sigma \leq \|u_\lambda\|_\infty < \infty$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$. Então, por (2.32) e (2.33), temos que

$$\|u_{2,\lambda}\|_\sigma < \infty \text{ para todo } \sigma \in [1, \infty),$$

qualquer que seja $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Donde, segue (2.35).

Se $2\sigma_0 = N$, então por Imersão, temos que $W^{2,\sigma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$. Logo, $u_\lambda \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$, o que implica $f_\lambda \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$. Pelo Teorema (ADN) (ver apêndice A) $u_\lambda \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$. Em particular, pode-se tomar σ tal que $2\sigma > N$. Assim, pela desigualdade geral de Sobolev (ver apênide A) $u_\lambda \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Então, analogamente ao caso anterior, $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u_\lambda\|_\sigma \leq \|u_\lambda\|_\infty < \infty$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$. Então, por (2.32) e (2.33), temos que

$$\|u_{2,\lambda}\|_\sigma < \infty \text{ para todo } \sigma \in [1, \infty),$$

qualquer que seja $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Donde, segue (2.35).

Se $2\sigma_0 < N$, então pela desigualdade geral de Sobolev $u_\lambda \in L^{p_1}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p_1} = \frac{p_0}{2^*} - \frac{2}{N}$ e $\|u_\lambda\|_{p_1} \leq C_{11}\|u_\lambda\|_{2,\sigma_0}$. Note que $p_1 > 2^*$, pois

$$\frac{1}{p_1} = \frac{p_0}{2^*} - \frac{2}{N} \Rightarrow p_1 = \frac{2^* N}{p_0 N - 2.2^*}$$

e

$$p_0 < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow p_0 N - 2.2^* < \frac{N}{N-2}(N+2) - 2.2^* = \frac{N}{N-2}(N+2) - \frac{4N}{N-2} = N$$

donde

$$p_1 = \frac{2^* N}{p_0 N - 2.2^*} > \frac{2^* N}{N} = 2^*.$$

Então, fazendo $\sigma_1 := \frac{p_1}{p_0}$, temos que

$$\int_\Omega |f_\lambda|^{\sigma_1} = \int_\Omega |f_\lambda|^{\frac{p_1}{p_0}} \leq C_{10} \int_\Omega |u_\lambda|^{p_1} + C_{10}|\Omega| < \infty,$$

ou seja, $f_\lambda \in L^{\sigma_1}(\Omega)$, com $\sigma_1 > \sigma_0 > 1$. Então, pelo Teorema(ADN), segue que $u_\lambda \in W^{2,\sigma_1}(\Omega)$. Analogamente ao realizado para σ_0, há três possibilidades para σ_1:
Se $2\sigma_1 \geq N$, então $u_\lambda \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Donde, segue (2.35).
Se $2\sigma_1 < N$, então pela desigualdade geral de Sobolev $u_\lambda \in L^{p_2}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p_2} = \frac{p_0}{p_1} - \frac{2}{N}$ e $\|u_\lambda\|_{p_2} \leq C_{11}\|u_\lambda\|_{2,\sigma_1}$, com $p_2 > p_1$. Fazendo $\sigma_2 := \frac{p_2}{p_0}$, temos que $f_\lambda \in L^{\sigma_2}(\Omega)$, com $\sigma_2 > \sigma_1 > 1$. Então, pelo Teorema(ADN), $u_\lambda \in W^{2,\sigma_2}(\Omega)$.
Prosseguindo dessa forma, encontramos números $< 1\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_k$ e $p_0 < 2^* < p_1 < p_2 < ... < p_k$ tais que $\frac{1}{p_j} = \frac{p_0}{p_{j-1}} - \frac{2}{N}$. Então,

$$\frac{1}{p_1} = \frac{p_0}{2^*} - \frac{2}{N},$$

$$\frac{1}{p_2} = \frac{p_0}{p_1} - \frac{2}{N} = p_0\left(\frac{p_0}{2^*} - \frac{2}{N}\right) - \frac{2}{N} = \frac{p_0^2}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0 + 1),$$

$$\frac{1}{p_3} = \frac{p_0}{p_2} - \frac{2}{N} = p_0\left(\frac{p_0^2}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0 + 1)\right) - \frac{2}{N} = \frac{p_0^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0^2 + p_0 + 1),$$

$$\frac{1}{p_4} = \frac{p_0}{p_3} - \frac{2}{N} = p_0\left(\frac{p_0^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0^2 + p_0 + 1)\right) - \frac{2}{N} = \frac{p_0^4}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0^3 + p_0^2 + p_0 + 1),$$

donde

$$\frac{1}{p_j} = \frac{p_0^j}{2^*} - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{j-1} p_0^k = \frac{p_0^j}{2^*} - \frac{2}{N}\left(\frac{p_0^j - 1}{p_0 - 1}\right) = \left(\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p_0 - 1)}\right)p_0^j + \frac{2}{N(p_0 - 1)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} p_0 < \frac{N+2}{N-2} &\Rightarrow N(p_0 - 1) < N\left(\frac{N+2}{N-2} - 1\right) = \frac{4N}{N-2} \\ &\Rightarrow \frac{N-2}{2N} - \frac{2}{N(p_0 - 1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p_0 - 1)} < 0. \end{aligned}$$

Logo, existe $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{p_j} < 0$, o que implica

$$\frac{p_0}{p_j} - \frac{2}{N} < 0 \Rightarrow \frac{p_0}{p_j} < \frac{2}{N} \Rightarrow 2\left(\frac{p_j}{p_0}\right) = 2\sigma_j > N.$$

Portanto, para esse número j finito de passos, tem-se $u_\lambda \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Donde, segue (2.35).
Agora, prova-se que u_λ é estritamente positiva para $\lambda \in [0, \lambda_0']$ com $\lambda_0' > 0$ pequeno ($\lambda_0' \leq \lambda_0$). Com efeito, suponha por absurdo que existem sequencias $\{\lambda_n\}$, $\{u_n\}$ e $\{x_n\}$ tais que $\lambda_n \geq 0$, $\lambda_n \to 0$, $u_n \in E^+$, u_n é um ponto crítico correspondendo a c_{λ_n}, $x_n \in \Omega$ e $u_n(x_n) = 0$. Note que, por (2.35), para todo $n \in \mathbb{N}$ ocorre

$$\|u_n\|_{2,\sigma} \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \|u_\lambda\|_{2,\sigma} < \infty \text{ para todo } \sigma \in [1, \infty),$$

então a sequencia $\{u_n\}$ é limitada em $W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$. Logo, existe uma subsequencia de $\{u_n\}$ (novamente denotada por $\{u_n\}$) que converge fracamente para um limite u_0 em $W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$. Assim, pode-se tomar σ tão grande que $2\sigma > N$ e $0 < \frac{N}{\sigma} < 1$, então segue da desigualdade geral de Sobolev que $u_0 \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ e por imersão compacta $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$. Então

$$u_n \to u_0 \text{ em } C^1(\Omega). \tag{2.36}$$

Como u_n é solução de (2.1), então para λ_n temos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v = \int_\Omega a(x) u_n^p v + \lambda_n \int_\Omega g(x, u_n) v, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $n \to \infty$, por (2.36) e $\lambda_n \to 0$, segue que

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v = \int_\Omega a(x) u_0^p v \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, u_0 é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = a(x) u_0^p, & \text{em } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.37}$$

Além disso,

$$I_{\lambda_n}(u_n) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 - \frac{1}{p+1} a(x) |u_n|^{p+1} - \lambda_n G(x, u_n) \right) dx$$

converge para

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 - \frac{1}{p+1} a(x) |u_0|^{p+1} \right) dx.$$

Então,

$$c_{\lambda_n} = I_{\lambda_n}(u_n) \geq \frac{\rho^2}{8} \Rightarrow \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 - \frac{1}{p+1} a(x) |u_0|^{p+1} \right) dx \geq \frac{\rho^2}{8}.$$

Assim, se fosse $u_0 \equiv 0$, teríamos da desigualdade acima que $0 \geq \frac{\rho^2}{8} > 0$, o que é absurdo. Portanto, u_0 é solução não-trivial de (2.37).
Note que, como $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, temos que u_0 é limitada. Daí, $a u_0^{p-1}$ é limitada e pode-se definir

$M := \|au_0^{p-1}\|_\infty$. Adicionando Mu_0 a (2.37), temos que

$$-\Delta u_0 + Mu_0 = a(x)u_0^p + Mu_0 \Rightarrow (M - \Delta)u_0 = a(x)u_0^p + Mu_0.$$

Por outro lado,

$$-a(x)u_0^p = -a(x)u_0^{p-1}u_0 \leq |a(x)u_0^{p-1}||u_0| \leq \|au_0^{p-1}\|_\infty u_0 \Rightarrow a(x)u_0^p \geq -\|au_0^{p-1}\|_\infty u_0.$$

Portanto,

$$(M - \Delta)u_0 \geq (M - \|au_0^{p-1}\|_\infty)u_0 = 0, \tag{2.38}$$

o que implica que $u_0 > 0$ em Ω. De fato, suponha por contradição que existe $x \in \Omega$ tal que $u_0(x) = 0$. Então, x é ponto de mínimo de u_0 (pois u_0 é não-negativa). Por outro lado, como ocorre (2.38), segue do Princípio do Máximo de Hopf que u_0 é constante. Como $u_0(x) = 0$, temos que $u_0 \equiv 0$, o que é uma contradição. Portanto, $u_0 > 0$ em Ω e o mínimo de u_0 é atingido em $\partial\Omega$, o que implica que

$$u_0 > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u_0}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial\Omega, \tag{2.39}$$

onde $\frac{\partial u_0}{\partial \nu}$ denota o vetor derivada normal de u_0. Agora, considere a sequencia $\{x_n\}$ tal que $u_n(x_n) = 0$. Como $x_n \in \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e Ω é limitado, então $\{x_n\}$ é lmitada. Assim, tomando uma subsequencia, se necessário, temos que $\{x_n\}$ converge para um limite x_0. Se $x_0 \in \Omega$, como $u_n(x_n) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}|u_0(x_0)| = |u_n(x_n) - u_0(x_0)| &= |u_n(x_n) - u_0(x_n) + u_0(x_n) - u_0(x_0)| \\ &\leq |(u_n - u_0)(x_n)| + |u_0(x_n) - u_0(x_0)| \\ &\leq \|u_n - u_0\|_\infty + |u_0(x_n) - u_0(x_0)| \longrightarrow 0\end{aligned}.$$

Donde $u_0(x_0) = 0$, o que contradiz (2.39). Se $x_0 \in \partial\Omega$, como $x_n \to x_0$, então x_n é suficientemente próximo de $\partial\Omega$ para n suficientemente grande. Logo, pode-se escolher $y_n \in \partial\Omega$ tal que $dist(x_n, \partial\Omega) = \|x_n - y_n\|_{\mathbb{R}^N}$. Daí, $\frac{(y_n - x_n)}{\|y_n - x_n\|_{\mathbb{R}^N}}$ é o vetor normal exterior. Além disso, como $u_n(x_n) = 0 = u_n(y_n)$ (pois $y_n \in \partial\Omega$), temos pelo Teorema de Rolle que existe um ponto z_n no segmento que liga x_n e y_n tal que

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(z_n) = 0, \tag{2.40}$$

onde ν é o vetor normal exterior. Sabemos que $x_n \to x_0$ e $\|x_n - x_0\|_{\mathbb{R}^N} \to 0$, então

$$\|y_n - x_0 + x_n - x_n\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|y_n - x_n\|_{\mathbb{R}^N} + \|x_n - x_0\|_{\mathbb{R}^N} \to 0.$$

Donde $y_n \to x_0$. Assim sendo, x_n e y_n convergem para x_0, o que implica que $z_n \to x_0$. Daí e de (2.40), segue que $\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x_0) = 0$, o que contradiz (2.39). Portanto, em ambos os casos chega-se numa contradição, donde u_λ é estritamente positiva para todo $\lambda \in [0, \lambda_0^{'}]$ com $\lambda_0^{'}$ suficientemente pequeno. $\square$

2.2 Segundo problema

Para uma segunda aplicação, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.41}$$

onde $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$. Dizemos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução (fraca) de (2.41) se $u \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega f(x,u)\phi dx, \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vamos impor as seguintes hipóteses sobre a aplicação f:

(f_1) existem constantes $C > 0$, $\mu > 2$, $\theta \in [0,2)$ e

$$1 < p < \infty, \text{ se } N = 1,2$$
$$1 < p < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3$$

tais que

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^p + 1) \tag{2.42}$$

$$\mu F(x,s) - sf(x,s) \leq C|s|^\theta + C \tag{2.43}$$

para $s \geq 0$ e $x \in \Omega$, onde F é dada por

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt; \tag{2.44}$$

(f_2) existem $x_0 \in \Omega$ e $\delta > 0$ tais que

$$\min_{|x-x_0|\leq\delta} \frac{F(x,s)}{s^2} \longrightarrow \infty \text{ quando } s \to \infty; \tag{2.45}$$

(f_3) existem $a(x) \in C(\overline{\Omega})$ e uma constante $C > 0$ tais que $\lambda_1(-\Delta - a)$ é positivo e

$$-Cs \leq f(x,s) \leq a(x)s, \text{ para cada } x \in \Omega \tag{2.46}$$

se $s > 0$ é suficientemente pequeno, onde $\lambda_1(-\Delta - a)$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta - a(x)$ com a condição de contorno de Dirichlet.

As seguintes observações fornecem condições suficientes para que uma aplicação $f \in C(\overline{\Omega} \times$

$[0, \infty), \mathbb{R})$ satisfaça a hipótese (f_2) ou a hipótese (f_3).

Observação 2.2. Se existem $x_0 \in \Omega$ e $\delta > 0$ tais que $\frac{f(x,s)}{s}$ diverge para ∞ uniformemente sobre $B(x_0, \delta)$ quando $s \to \infty$, então ocorre (f_2). Com efeito, dado $A > 0$, existe $s_0 \in \mathbb{N}$ (que depende apenas de A) tal que:

$$\begin{aligned} s > s_0 \Rightarrow & \frac{f(x,s)}{s} > 2A, \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta) \\ & \Rightarrow f(x,s) > 2As, \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta) \\ & \Rightarrow \int_0^s f(x,t)dt > \int_0^s 2Atdt, \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta) \\ & \Rightarrow F(x,s) > 2A\frac{s^2}{2}, \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta) \\ & \Rightarrow \frac{F(x,s)}{s^2} > A, \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta) \\ & \Rightarrow \min_{|x-x_0| \leq \delta} \frac{F(x,s)}{s^2} > A. \end{aligned}$$

Portanto, ocorre (f_2).

Observação 2.3. Se $\frac{f(x,s)}{s}$ converge para zero uniformemente sobre Ω quando $s \to 0^+$, então ocorre (f_3). De fato, dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < s < \delta \Rightarrow & \left| \frac{f(x,s)}{s} \right| < 1, \text{ para todo } x \in \Omega \\ & \Rightarrow |f(x,s)| < |s| = s, \text{ para todo } x \in \Omega \\ & \Rightarrow -s < f(x,s) < s, \text{ para todo } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $C = 1 > 0$ e $a(x) \equiv 1 \in C(\overline{\Omega})$. Daí, ocorre (f_3).

O questionamento natural diz respeito à existência de uma aplicação $f \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty), \mathbb{R})$ satisfazendo as condições $(f_1) - (f_3)$. O exemplo a seguir garante essa existência.

Exemplo 2.2. Seja $f(x,s) = a(x)s^p - b(x)s^q$, com $1 < p < q < \frac{N+2}{N-2}$ e $N \geq 3$, um termo não-linear tal que $a(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \Omega$ e ocorre

$$a(x) \geq 0 \in \Omega \quad \text{ou} \quad b(x) \geq 0 \in \Omega.$$

Então f satisfaz $(f_1) - (f_3)$. De fato, como $a(x_0) > 0$ e a é contínua, então existe $\delta > 0$ tal que $a(x) > \alpha > 0$ em $B(x_0, \delta)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, como $b \in C(\overline{\Omega})$ temos que $|b(x)| \leq M$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, com M uma constante positiva. Então, $|b(x)| \leq M$ em $B(x_0, \delta)$, donde $-b(x) > -M$. Logo, para $s > 1 > 0$ temos que

$$\frac{f(x,s)}{s} = a(x)s^{p-1} - b(x)s^{q-1} > \alpha s^{p-1} - Ms^{q-1} = s^{p-1}\left(\alpha - \frac{M}{s^{p-q}}\right).$$

Como $p-q>0$ e $p-1>0$, então dado $A>0$ pode-se tomar s_0 suficientemente grande de modo que

$$\frac{M}{s_0^{p-q}}<\alpha \text{ e } s_0^{p-1}\left(\alpha-\frac{M}{s_0^{p-q}}\right)>A.$$

Daí,

$$s>s_0 \Rightarrow \frac{f(x,s)}{s}>s^{p-1}\left(\alpha-\frac{M}{s^{p-q}}\right)>A \text{ em } B(x_0,\delta).$$

Assim, $\frac{f(x,s)}{s}$ diverge para ∞ uniformemente sobre $B(x_0,\delta)$ quando $s\to\infty$ e, pela Observação 1.7, f satisfaz (f_2). Além disso, a é limitada, pois $a\in C(\overline{\Omega})$, donde $|a(x)|\leq N$ em Ω, com $N>0$ uma constante. Então, dado $\varepsilon>0$, existe $s_0>0$ suficientemente pequeno de forma que $s_0^{p-1}+s_0^{q-1}<\frac{\varepsilon}{\max\{N,M\}}$. Logo, para $0<s<s_0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| &= \frac{|f(x,s)|}{s}\leq |a(x)|s^{p-1}+|b(x)|s^{q-1}\\
&\leq Ns^{p-1}+Ms^{q-1}\\
&\leq \max\{N,M\}s^{p-1}+\max\{N,M\}s^{q-1}\\
&= \max\{N,M\}(s^{p-1}+s^{q-1})\\
&< \max\{N,M\}(s_0^{p-1}+s_0^{q-1})\\
&< \max\{N,M\}\frac{\varepsilon}{\max\{N,M\}}=\varepsilon \text{ em } \Omega.
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{f(x,s)}{s}$ converge para zero uniformemente sobre Ω quando $s\to 0^+$ e, pela Observação 1.8, f satisfaz (f_3). Finalmente, como $p>1$, pode-se tomar $C>0$ tal que $|s|\leq C|s|^p+C$. Pela convergência acima, dado $\varepsilon=1>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\begin{aligned}
0<s<\delta \Rightarrow \frac{|f(x,s)|}{|s|} &\leq 1\\
\Rightarrow |f(x,s)| &\leq |s|\\
\Rightarrow |f(x,s)| &\leq C|s|^p+C \text{ em } \Omega.
\end{aligned}$$

donde f satisfaz (2.42). Resta a verificação de (2.43). Se $b\geq 0$ em Ω, então faz-se $2<\mu=p+1$.

Logo,

$$\begin{aligned}
(p+1)F(x,s) - sf(x,s) &= (p+1)\int_0^s f(x,t)dt - sf(x,s) \\
&= (p+1)\int_0^s (a(x)t^p - b(x)t^q)dt - s(a(x)s^p - b(x)s^q) \\
&= (p+1)\left[a(x)\frac{s^{p+1}}{p+1} - b(x)\frac{s^{q+1}}{q+1}\right] - a(x)s^{p+1} + b(x)s^{q+1} \\
&= \left(1 - \frac{p+1}{q+1}\right) b(x)s^{q+1} = \left(\frac{q+1-p-1}{q+1}\right) b(x)s^{q+1} \\
&= -\left(\frac{p-q}{q+1}\right) b(x)s^{q+1} \leq 0, \text{ para } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega,
\end{aligned}$$

pois $p - q > 0$. Donde, a desigualdade (2.43) é satisfeita, qualquer que seja $\theta \in [0,2)$ e tomando $C > 0$ como acima. Se $a \geq 0$ em Ω, então faz-se $2 < \mu = q+1$. Daí, analogamente ao feito no caso acima, temos que

$$\begin{aligned}
(q+1)F(x,s) - sf(x,s) &= (q+1)\left[a(x)\frac{s^{p+1}}{p+1} - b(x)\frac{s^{q+1}}{q+1}\right] - a(x)s^{p+1} + b(x)s^{q+1} \\
&= \left(\frac{q+1}{p+1} - 1\right) a(x)s^{p+1} \\
&= -\left(\frac{p-q}{p+1}\right) a(x)s^{p+1} \leq 0, \text{ para } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Portanto, f satisfaz (f_1).

Teorema 2.6. *Seja $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$ satisfazendo $(f_1) - (f_3)$. Então o problema* (2.41) *tem uma solução positiva.*

Demonstração. Para s suficientemente pequeno, pela hipótese (f_3), existem $a(x) \in C(\overline{\Omega})$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$-Cs \leq f(x,s) \leq a(x)s, \text{ para cada } x \in \Omega$$

então, fazendo $s \to 0^+$, tem-se $0 \leq f(x,0) \leq 0$, donde $f(x,0) = 0$. Logo, pode-se obter uma extensão ímpar com respeito a s para a função f, definindo $f(x,s) = -f(x,-s)$ para $s < 0$. Faça $E := H_0^1(\Omega)$ e defina

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right) dx,$$

que é um funcional de classe C^1 (ver apêndice A). Primeiro, mostra-se que I satisfaz as hipóteses do Corolário 1.8. De fato, a derivada de Frechet de $I(u)$ é dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v - f(x,u)v)\, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n))$ converge para zero. Procederemos de modo análogo ao argumento usado no Lema 2.3, a fim de concluir que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale. Seja $1 \leq \theta \leq 2$. Usando as definições de $I(u)$ e $I'(u)v$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu I(u_n) - I'(u_n)u_n &= \mu \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - F(x,u_n)\right) dx - \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n\right) dx \\
&= \left(\frac{\mu-2}{2}\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega \left(\mu F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n\right) dx \\
&\geq \left(\frac{\mu-2}{2}\right) \|\nabla u_n\|_2^2 - \int_\Omega \left(C|u_n|^\theta + C\right) dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese, existem constantes $C_1 > 0$ e $n_1 = n_1(C_1) \in \mathbb{N}$ tais que

$$|I(u_n)| \leq \frac{C_1}{p+1} \text{ e } \|I'(u_n)\| < C_1 \text{ desde que } n \geq n_1.$$

Então, para $n \geq n_1$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\mu I(u_n) - I'(u_n)u_n| &\leq \mu|I(u_n)| + |I'(u_n)u_n| \\
&\leq \mu|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|\|u_n\|_{H_0^1} \\
&\leq \mu\frac{C_1}{\mu} + C_1\|\nabla u_n\|_2 \\
&= C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{\mu-2}{2}\right) \|\nabla u_n\|_2^2 - \int_\Omega \left(C|u_n|^\theta + C\right) dx \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1.$$

Como $\theta \in [1,2] \subset [1,2^*)$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$, temos pela imersão de Sobolev que $(H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,2^*])$. Então,

$$\left(\frac{\mu-2}{2}\right) \|\nabla u_n\|_2^2 - C\|u_n\|_\theta^\theta + C|\Omega| \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu-2}{2}\right) \|\nabla u_n\|_2^2 \leq C\|u_n\|_2^\theta + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_2, \tag{2.47}$$

com uma constante $C_2 > 0$. Como $\theta \leq 2$, tal desigualdade mostra que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Agora, seja $0 \leq \theta < 1$. Então,

$$\mu F(x,s) - sg(x,s) \leq C|s|^\theta + C \leq C(|s| + C_3) + C \leq C_4|s| + C_4,$$

onde C_3 e C_4 são constantes positivas. Daí, analogamente ao feito acima,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mu-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 - \int_\Omega (C_4|u_n| + C_4)dx \leq \mu I(u_n) - I'(u_n)u_n \\
\Rightarrow &\left(\frac{\mu-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 - C_4\|u_n\|_1 - C_4|\Omega| \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1 \\
\Rightarrow &\left(\frac{\mu-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_4\|u_n\|_1 + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_5
\end{aligned}$$

e pela imersão, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$\left(\frac{\mu-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_6\|\nabla u_n\|_2 + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_5,$$

com constantes $C_5, C_6 > 0$. Donde $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Então, como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, para todo $\theta \in [0,2]$ pode-se extrair uma subsequencia de u_n (novamente denotada por u_n) que converge fracamente para um limite $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Por imersão compacta, $u_n \to u_0$ fortemente em $L^\sigma(\Omega)$ para qualquer $\sigma \in [1,\infty)$, se $N = 1,2$ e $\sigma \in [1, \frac{2N}{N-2})$, se $N \geq 3$. Daí, $u_n \to u_0$ converge q.t.p. em Ω e $|u_n| \leq h_\sigma$ q.t.p. em Ω onde $h_\sigma \in L^\sigma(\Omega), \sigma \in [1, 2^*)$. Além disso, (2.42) implica

$$|sf(x,s)| \leq C|s| + C|s|^{p+1}, \text{ para todo } s \geq 0 \text{ e } x \in \Omega.$$

Então,

$$|u_n f(x,u_n)| \leq C|u_n| + C|u_n|^{p+1}$$

Logo,

$$|u_n f(x,u_n)| \leq Ch_1 + Ch_{p+1}^{p+1} \in L^1(\Omega).$$

E, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega u_n f(x,u_n)dx \longrightarrow \int_\Omega u_0 f(x,u_0)dx$$

quando $n \to \infty$. Note ainda que

$$\begin{aligned}
&|vf(x,u_n)| \leq C|v| + C|v||u_n|^p \\
&\Rightarrow |vf(x,u_n)| \leq C|v| + C|v|h_p^p \in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega vf(x,u_n)dx \longrightarrow \int_\Omega vf(x,u_0)dx$$

quando $n \to \infty$. Assim, fazendo $n \to \infty$ nas igualdades

$$I'(u_n)u_0 = \int_\Omega (\nabla u_n \nabla u_0 - f(x,u_n)u_0)\,dx \text{ e}$$

$$I'(u_n)u_n = \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n\big)\,dx,$$

como $I'(u_n) \to 0$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \text{ e}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx,$$

respectivamente. Donde

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, pelo Lema Brezis-Lieb (ver apêndice A), temos u_n convergindo fortemente para u_0 em $H_0^1(\Omega)$, o que prova que $\{u_n\}$ é uma sequencia de Palais-Smale. Como $f(x,s)$ é ímpar com respeito a s, então $F(x,s)$ é par com respeito a s, pois

$$F(x,-s) = \int_0^{-s} f(x,t)dt = \int_0^{-s} -f(x,-t)dt = \int_0^{-s} f(x,-t)d(-t) = \int_0^{s} f(x,t)dt = F(x,s),$$

para $s \geq 0$. Logo $F(x,s) = F(x,-s) = F(x,|s|)$. Daí,

$$I(|u|) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla|u||^2 - F(x,|u|)\right) dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right) dx = I(u),$$

para toda $u \in E$. Resta mostrar $(I1)$ e $(I2)$. Afirmamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - a(x)u^2\big)\,dx \geq \varepsilon_0 \|\nabla u\|_2^2, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.48}$$

De fato, suponha por absurdo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$, $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2 = 1$ tal que

$$\int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - a(x)u_n^2\big)\,dx < \frac{1}{n}.$$

Note que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, a menos de subsequencia, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e, pela imersão de Sobolev, $u_n \to u_0$ em $L^2(\Omega)$. Como, por (f_3), temos

$$0 < \lambda_1(-\Delta - a) = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 - au^2)\,dx}{\int_\Omega |u|^2 dx},$$

então
$$0 \leq \lambda_1(-\Delta - a)\int_\Omega |u_n|^2 dx \leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - a(x)u_n^2\right) dx < \frac{1}{n}.$$
Dessa desigualdade temos
$$0 \leq \lambda_1(-\Delta - a)\int_\Omega u_n^2 dx \leq \frac{1}{n} \text{ e} \tag{2.49}$$
$$0 \leq 1 - \int_\Omega a u_n^2 dx < \frac{1}{n}. \tag{2.50}$$
Fazendo $n \to \infty$, como $|au_n^2| \leq \|a\|_\infty h_2^2 \in L^1(\Omega)$ com $h_2 \in L^2(\Omega)$, obtemos de (2.49)
$$\int_\Omega u_n^2 dx \longrightarrow 0 \Rightarrow \int_\Omega u_0^2 dx = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \Rightarrow \int_\Omega a u_0^2 dx = 0$$
e de (2.50),
$$\int_\Omega a u_n^2 dx \longrightarrow 1 \Rightarrow \int_\Omega a u_0^2 dx = 1,$$
que é um absurdo. Portanto, a afirmação é válida. Pela hipótese (f_3), existe $s_0 > 0$ tal que
$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq s_0 &\Rightarrow f(x,s) \leq a(x)s \\ &\Rightarrow -f(x,-s) \leq a(x)s \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$
pois f é ímpar com respeito a s. Logo,
$$0 \leq s \leq s_0 \Rightarrow f(x,-s) \leq a(x)(-s) \text{ em } \Omega,$$
donde a desigualdade $f(x,s) \leq a(x)s$ em Ω é válida também para $-s_0 \leq s \leq 0$. Assim,
$$f(x,s) \leq a(x)s \text{ em } \Omega, \text{ desde que } |s| \leq s_0.$$
Integrando tal desigualdade com respeito a s, temos que
$$F(x,s) \leq a(x)\frac{s^2}{2} \text{ em } \Omega, \text{ desde que } |s| \leq s_0.$$
por outro lado, por (2.42), temos
$$\begin{aligned} F(x,s) \leq |F(x,s)| &\leq \int_0^s |f(x,t)|dt \leq \int_0^s C(|t|^p + 1)dt \\ &\leq \frac{C}{p+1}|s|^{p+1} + C|s| \leq \frac{C}{p+1}|s|^{p+1} + C(|s|^{p+1} + C_7) = C_8|s|^{p+1}, \text{ para } s \geq 0. \end{aligned}$$
Além disso, como F é par, temos
$$F(x,s) = F(x,-s) \leq C_8|-s|^{p+1} = C_8|s|^{p+1} \text{ para } s \leq 0.$$

Segue que

$$F(x,s) \leq C_8|s|^{p+1} + a(x)\frac{s^2}{2}, s \in \mathbb{R}. \tag{2.51}$$

Daí,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega \left(C_8|u|^{p+1} + a(x)\frac{u^2}{2}\right)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega a(x)u^2dx\right) - C_8\|u\|_{p+1}^{p+1}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, por (2.48) e pela imersão de Sobolev com A_{p+1} como em (2.21), temos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\|\nabla u\|_2^2\right) - C_8A_{p+1}^{p+1}\|\nabla u\|_2^{p+1}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.52}$$

Fixe $\rho > 0$ tão pequeno que $C_8A_{p+1}^{p+1} \leq \frac{\varepsilon_0}{4}\rho^2$, o que é possível porque $p+1 > 2$ e $\rho < 1$. Defina U como sendo a bola aberta de centro 0 e raio ρ em $H_0^1(\Omega)$ com a norma $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$, ou seja,

$$U := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\|_2 < \rho\}$$

Logo, por (2.52), para $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\nabla u\|_2 = \rho$ temos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\rho^2\right) - C_8A_{p+1}^{p+1}\rho^{p+1} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\rho^2 - \frac{\varepsilon_0}{4}\rho^2 = \frac{\varepsilon_0}{4}\rho^2, \tag{2.53}$$

donde

$$\inf_{u\in\partial U} I(u) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\rho^2 > 0. \tag{2.54}$$

Fixe, ainda, $\phi \in C_0^\infty$ não-trivial tal que $supp\phi \subset B(x_0,\delta)$, onde x_0 e δ foram dados em (f_2), e $\phi \in (H_0^1(\Omega))^+$, isto é, $\phi(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω. Afirmamos que existe $r > 0$ suficientemente grande de forma que $I(r\phi) < 0$. Faça $\alpha := \frac{\|\phi\|_\infty}{2}$ e defina

$$D := \{x \in B(x_0,\delta) : \phi(x) > \alpha\}.$$

Note que dado $M > 0$, pela hipótese (f_2), existe $S > 0$ tal que

$$s \geq S \Rightarrow F(x,s) \geq \frac{F(x,s)}{s^2} \geq \min_{x\in B(x_0,\delta)} \frac{F(x,s)}{s^2} > M > 0, \text{ para } x \in B(x_0,\delta). \tag{2.55}$$

Então, tomando $r \in \left(\frac{S}{\alpha},\infty\right)$, define-se

$$\tilde{D} = \tilde{D}(r) := \{x \in B(x_0,\delta) : r\phi > S\},$$

e tem-se

$$D \subset \tilde{D} \text{ e} \tag{2.56}$$

$$F(x, r\phi) > 0 \text{ em } \tilde{D}, \tag{2.57}$$

pois

$$x \in D \Rightarrow \phi(x) > \alpha \Rightarrow r\phi(x) > r\alpha > \frac{S}{\alpha}\alpha = S \Rightarrow x \in \tilde{D},$$

e, por (2.55),

$$x \in \tilde{D} \Rightarrow r\phi(x) > S \Rightarrow F(x, r\phi(x)) > 0.$$

Segue de (2.56) que

$$\int_{\tilde{D}} F(x, r\phi)dx = \int_D F(x, r\phi)dx + \int_{\tilde{D}\setminus D} F(x, r\phi)dx,$$

e de (2.57) tem-se

$$-\int_{\tilde{D}\setminus D} F(x, r\phi)dx \leq 0.$$

Logo,

$$-\int_{\tilde{D}} F(x, r\phi)dx = -\int_D F(x, r\phi)dx - \int_{\tilde{D}\setminus D} F(x, r\phi)dx \leq -\int_D F(x, r\phi)dx.$$

Daí, denotando $B := B(x_0, \delta)$, tem-se

$$\begin{aligned}
-\int_B F(x, r\phi)dx &= -\int_{\{x\in B:\ r\phi(x)>S\}} F(x, r\phi)dx - \int_{\{x\in B:\ 0\leq r\phi(x)\leq S\}} F(x, r\phi)dx \\
&\leq -\int_{\tilde{D}} F(x, r\phi)dx + \int_{\{x\in B:\ 0\leq r\phi(x)\leq S\}} |F(x, r\phi)|dx \\
&\leq -\int_D F(x, r\phi)dx + \int_\Omega \max_{0\leq s\leq S} |F(x, r\phi)|dx \\
&= -\int_D F(x, r\phi)dx + |\Omega| \max_{0\leq s\leq S, x\in\overline{\Omega}} |F(x, r\phi)| \\
&= -\int_D F(x, r\phi)dx + C_9,
\end{aligned}$$

com $C_9 > 0$. Como $supp\phi \subset B$, então

$$\begin{aligned}
I(r\phi) &= \frac{r^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \int_{supp\phi} F(x, r\phi)dx \\
&= \frac{r^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \int_B F(x, r\phi)dx \\
&\leq \frac{r^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \int_D F(x, r\phi)dx + C_9 \\
&\leq \frac{r^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - r^2\int_D \phi^2\frac{F(x, r\phi)}{(r\phi)^2}dx + C_9.
\end{aligned}$$

Por outro lado, em D, tem-se $\phi(x) > \alpha \Rightarrow -\phi(x)^2 < -\alpha$, então

$$I(r\phi) \leq r^2 \left(\frac{1}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \alpha^2 \int_D \frac{F(x, r\phi)}{(r\phi)^2} dx \right) + C_9.$$

Desde que $\alpha \leq \phi(x) \leq \|\phi\|_\infty = 2\alpha$ em D, a integral $\frac{F(x,r\phi)}{(r\phi)^2}$ diverge para ∞ uniformemente sobre D quando $r \to \infty$. Logo, pode-se tomar $r > 0$ suficientemente grande de forma que $I(r\phi) < 0$. E a afirmação está provada. Então, fixe $r > 0$ tão grande que $I(r\phi) < 0$ e $r\|\nabla\phi\|_2 > \rho$. Faça $e_0 \equiv 0$ e $e_1 \equiv r\phi$, então claramente $e_0, e_1 \in E^+$. Como $\|\nabla e_0\|_2 = 0 < \rho$, então $e_0 \in E^+ \cap U$. Além disso,

$$r\|\nabla\phi\|_2 > \rho \Rightarrow \|r\nabla\phi\|_2 > \rho \Rightarrow \|\nabla(r\phi)\|_2 > \rho \Rightarrow r\phi \notin \overline{U} \Rightarrow e_1 \in E^+ \setminus \overline{U}.$$

Logo, $(I1)$ se verifica. Como $I(e_0) = I(0) = 0$ e $I(e_1) = I(r\phi) < 0$, então $\max(I(e_0), I(e_1)) = 0$. Por (2.54), segue que

$$\max(I(e_0), I(e_1)) = 0 < \inf_{u\in\partial U} I(u) \leq \inf_{u\in\partial U\cap E^+} I(u).$$

Então, $(I2)$ se verifica. Portanto, segue do Corolário 1.8, que existe uma solução não-trivial não-negativa u_0 de (2.41). Pela hipótese (f_3), pode-se escolher $M > 0$ tão grande que

$$\begin{aligned} s \in [0, \|u_0\|_\infty) &\Rightarrow f(x,s) \geq -Ms \\ &\Rightarrow f(x,s) + Ms \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Então, adicionando Mu_0 a (2.41) com $u = u_0$, temos que

$$-\Delta u_0 + Mu_0 = f(x, u_0) + Mu_0 \geq 0, \text{ em } \Omega,$$

pois $0 \leq u_0(x) \leq \|u_0\|_\infty$ em Ω. Logo, $u_0 > 0$ em Ω. Caso contrário, existiria $x \in \Omega$ tal que $u_0(x) = 0$, o que implicaria x ser ponto de mínimo de u_0 (pois u_0 é não-negativa). Pela desigualdade acima, seguiria do Princípio do Máximo de Hopf que u_0 é constante, donde $u \equiv 0$ (pois $u_0(x) = 0$), que é absurdo. Portanto, a solução u_0 é estritamente positiva. $\square$

Capítulo 3

Equações elípticas semilineares com pequenas perturbações

Este capítulo se dedica a aplicar o usual Teorema do Passo da Montanha na demonstração da existência de uma solução positiva para equações elípticas semilineares nas quais o termo principal sofre uma pequena perturbação. Aqui, o termo principal está sob hipóteses que garantem sobre ele a geometria do passo da montanha e, consequentemente, a existência de uma solução no caso de perturbação nula. Sem que se coloquem hipóteses sobre o termo de perturbação, tal solução satisfaz a equação também no caso de perburbação não-nula suficientemente pequena. Por fim, quando se coloca sobre o termo de perturbação a hipótese de ser não-negativo, encontra-se para o problema uma outra solução, diferente da primeira. Nesse sentido, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \lambda g(x,u) & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $N \geq 1$, as funções $f(x,s)$ e $g(x,s)$ são contínuas sobre $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, e λ é um parâmetro real cujo valor absoluto é pequeno. Sobre a aplicação f impomos as sequintes condições:
(f_1) Existem constantes $C > 0$ e

$$1 < p < \infty, \text{ se } N = 1,2$$
$$1 < p < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3$$

tais que

$$|f(x,s)| \leq C(s^p + 1)$$

para $s \geq 0$ e $x \in \Omega$.
(f_2) Existem constantes $\alpha > 2$, $\theta \in [0, 2)$ e $C > 0$ tais que

$$\alpha F(x,s) - sf(x,s) \leq C|s|^\theta + C$$

para $s \geq 0$ e $x \in \Omega$, onde F é dada por

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt.$$

(f_3) Existem $x_0 \in \Omega$ e $\delta_0 > 0$ tais que

$$\min_{|x-x_0|\leq\delta_0} \frac{F(x,s)}{s^2} \longrightarrow \infty \text{ quando } s \to \infty;$$

(f_4)

$$\limsup_{s\to 0^+} \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \right) < \mu_1,$$

onde μ_1 denota o primeiro autovalor do Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet em Ω.
(f_5)

$$\liminf_{s\to 0^+} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \right) > -\infty.$$

As hipóteses $(f_1) - (f_4)$ garantem que $f(x,s)$ tem uma estrutura do passo da montanha, e (f_5) garante que uma solução do passo da montanha é estritamente positiva. Note que se a hipótese (f_3) estivesse sendo considerada para todo $x \in \Omega$, ela se tornaria a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Teorema 3.1. *Sejam $f(x,s)$ e $g(x,s)$ funções contínuas sobre $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Suponha que $(f_1) - (f_5)$ acontecem. Então, valem as seguintes afirmativas:*
(i) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que (3.1) tem uma solução positiva u_λ quando $|\lambda| \leq \lambda_0$. Além disso, para qualquer sequência $\{\lambda_j\}$ convergindo para zero, corresponde uma subsequencia $\{u_{\lambda_j}\}$ que converge para u_0 em $W^{2,q}(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$, onde u_0 é uma solução do passo da montanha de (3.1) com $\lambda = 0$ e $W^{2,q}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev.
(ii) Se $g(x,0) \geq 0$ e $g(x,0)$ é não-trivial em Ω, então (3.1) tem outra solução não-negativa v_λ para λ suficientemente pequeno tal que $0 \leq v_\lambda(x) < u_\lambda(x)$ e $v_\lambda \to 0$ em $W^{2,q}(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$. Além disso, se

$$\liminf_{s\to 0^+} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{g(x,s)-g(x,0)}{s} \right) > -\infty, \tag{3.2}$$

então cada v_λ é estritamente positivo.

A observação, a seguir, fornece condições suficientes para que uma aplicação f satisfaça (f_3), (f_4) e (f_5).

Observação 3.1. Seja $f(x,s)$ como no problema (3.1). Se

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} = 0, \text{ uniformemente em } \Omega, \tag{3.3}$$

então f satisfaz (f_4) e (f_5). Além disso, se f é superlinear em $s = \infty$ numa pequena vizinhança de $x_0 \in \Omega$, isto é,

$$\lim_{s\to\infty} \left(\min_{x\in B(x_0,\delta)} \frac{f(x,s)}{s} \right) = \infty, \tag{3.4}$$

então f satisfaz (f_3). De fato, dado $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \mu_1$, por (3.2) existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < s < \delta \Rightarrow & \frac{|f(x,s)|}{s} < \varepsilon, \text{ para todo } x \in \Omega \\ & \Rightarrow \max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \leq \left| \max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \right| = \max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x,s)|}{s} < \varepsilon. \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} & \left| \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \right| = \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x,s)|}{s} < \varepsilon \\ & \Rightarrow \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, a função que associa a cada $s \in \mathbb{R}$ a expressão $\max_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{f(x,s)}{s}$ é limitada por ε na vizinhança superior $(0,\delta)$. Assim,

$$\limsup_{s\to 0^+} \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \right) < \mu_1,$$

e a condição (f_4) é satisfeita. Analogamente, a função que associa a cada $s \in \mathbb{R}$ a expressão $\min_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{f(x,s)}{s}$ é limitada inferiormente por $-\varepsilon$ na vizinhança superior $(0,\delta)$. Assim,

$$\liminf_{s\to 0^+} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} \right) > -\infty,$$

e a condição (f_5) é satisfeita. Além disso, dado $A > 0$, por (3.3) existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} s > s_0 \Rightarrow & \min_{x\in B(x_0,\delta)} \frac{f(x,s)}{s} > 2A \\ & \Rightarrow \frac{f(x,s)}{s} \geq \min_{x\in B(x_0,\delta)} \frac{f(x,s)}{s} > 2A, \text{ para todo } x \in B(x_0,\delta) \\ & \Rightarrow f(x,s) > 2As, \text{ para todo } x \in B(x_0,\delta) \\ & \Rightarrow F(x,s) > As^2, \text{ para todo } x \in B(x_0,\delta) \\ & \Rightarrow \frac{F(x,s)}{s^2} > A, \text{ para todo } x \in B(x_0,\delta) \\ & \Rightarrow \min_{x\in B(x_0,\delta)} \frac{F(x,s)}{s^2} > A. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\min_{|x-x_0|\leq\delta_0} \frac{F(x,s)}{s^2} \longrightarrow \infty \text{ quando } s\to\infty$$

e a condição (f_3) é satisfeita.

Exemplo 3.1. A função $f(x,s)=a(x)s^p+b(x)s^q$ definida sobre $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$, onde $a,b\in C(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{aligned}&1<q<p, \text{ se } N=1,2\\ &1<q<p<\frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N\geq 3,\end{aligned}$$

é um exemplo de termo não-linear que muda de sinal e satisfaz $(f_1)-(f_5)$, desde que pelo menos uma das condições a seguir seja válida.
(i) $a(x)$ pode mudar seu sinal, mas $a(x_0)>0$ em algum $x_0\in\Omega$ e $b(x)\leq 0$ em Ω;
(ii) $a(x_0)\geq 0$, $a(x)$ é não-trivial em Ω e $b(x)$ é qualquer função.
Com efeito, como $a,b\in C(\overline{\Omega})$, então existem constantes $M,N>0$ tais que $|a(x)|\leq M$ e $|b(x)|\leq N$ para todo $x\in\overline{\Omega}$. Então

$$|f(x,s)|\leq |a(x)||s|^p+|b(x)||s|^q\leq Ms^p+Ns^q, \text{ para } s\geq 0 \text{ e } x\in\Omega.$$

Mas $1<q<p$, então existe uma constante $C_0>0$ tal que $s^q\leq s^p+C_0$. Logo,

$$|f(x,s)|\leq Ms^p+N(s^p+C_0)\leq C(s^p+1), \text{ para } s\geq 0 \text{ e } x\in\Omega,$$

onde C é uma constante positiva. Donde f verifica (f_1). Agora, note que dado $\varepsilon>0$, como $p-1,q-1>0$, pode-se tomar $s_0>0$ suficientemente pequeno de forma que $s_0^{p-1}+s_0^{q+1}<\frac{\varepsilon}{\max\{M,N\}}$. Então, para $0<s<s_0$ tem-se

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x,s)}{s}\right| &\leq M|s|^{p-1}+N|s|^{p-1}\\ &\leq \max\{M,N\}s^{p-1}+\max\{M,N\}s^{q-1}\\ &= \max\{M,N\}(s^{p-1}+s^{q-1})\\ &< \max\{M,N\}(s_0^{p-1}+s_0^{q-1})\\ &< \max\{M,N\}\frac{\varepsilon}{\max\{M,N\}}=\varepsilon, \text{ em } \Omega.\end{aligned}$$

Daí, ocorre (3.2). Além disso, tanto no caso (i) quanto no caso (ii), existe $x_0\in\Omega$ tal que $a(x_0)>0$. Então, pode-se tomar uma bola $B(x_0,\delta)$ na qual $a(x)>\rho>0$, com $\rho>0$ uma constante pequena. Dado $A>0$, como $p-q,p-1>0$, pode-se tomar s_1 suficientemente grande de forma que

$$\frac{N}{s_1^{p-q}}<\rho \quad \text{e} \quad s_1^{p-1}\left(\rho-\frac{N}{s_1^{p-q}}\right)>A.$$

Logo, para $s > s_1$ temos que

$$\frac{f(x,s)}{s} = a(x)s^{p-1} + b(x)s^{q-1} > \rho s^{p-1} - Ns^{q-1} = s^{p-1}\left(\rho - \frac{N}{s^{p-q}}\right), \text{ em } B(x_0,\delta).$$

Daí,

$$\min_{x\in B(x_0,\delta)}\{\frac{f(x,s)}{s}\} > s^{p-1}\left(\rho - \frac{N}{s^{p-q}}\right) > s_1^{p-1}\left(\rho - \frac{N}{s_1^{p-q}}\right) > A.$$

Então, ocorre (3.3). Pela Observação acima, temos f satisfazendo $(f_3)-(f_5)$. Resta a verificação de (f_2). Primeiro, considere o caso (i) e escolha $\alpha = p+1 > 2$, então

$$\begin{aligned}
\alpha F(x,s) - sf(x,s) &= (p+1)F(x,s) - sf(x,s)\\
&= (p+1)\int_0^s f(x,t)dt - sf(x,s)\\
&= (p+1)\int_0^s (a(x)t^p + b(x)t^q)dt - s(a(x)s^p + b(x)s^q)\\
&= (p+1)\left(a(x)\frac{s^{p+1}}{p+1} + b(x)\frac{s^{q+1}}{q+1}\right) - a(x)s^{p+1} - b(x)s^{q+1}\\
&= \left(\frac{p+1}{q+1} - 1\right)b(x)s^{q+1}\\
&= \frac{p-q}{q+1}b(x)s^{q+1} \le 0 \le C|s|^\theta + C,
\end{aligned}$$

para algum $C > 0$ e $\theta \in [0,2)$. Analogamente, considere o caso (ii) e escolha $\alpha = q+1 > 2$, então

$$\begin{aligned}
\alpha F(x,s) - sf(x,s) &= (q+1)F(x,s) - sf(x,s)\\
&= (q+1)\int_0^s f(x,t)dt - sf(x,s)\\
&= (q+1)\int_0^s (a(x)t^p + b(x)t^q)dt - s(a(x)s^p + b(x)s^q)\\
&= (q+1)\left(a(x)\frac{s^{p+1}}{p+1} + b(x)\frac{s^{q+1}}{q+1}\right) - a(x)s^{p+1} - b(x)s^{q+1}\\
&= \left(\frac{q+1}{p+1} - 1\right)a(x)s^{p+1}\\
&= -\frac{p-q}{p+1}a(x)s^{p+1} \le 0 \le C|s|^\theta + C,
\end{aligned}$$

para algum $C > 0$ e $\theta \in [0,2)$. Donde f satisfaz (f_2).

Para a demostração do Teorema 3.1, utiliza-se o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio do Máximo de Hopf. Primeiro, note que as hipóteses (f_4) e (f_5) implicam $f(x,0) = 0$ em $\overline{\Omega}$. De fato, de (f_4), temos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < s < \delta_1 \Rightarrow \frac{f(x,s)}{s} < \mu_1 \Rightarrow f(x,s) < \mu_1 s, \text{ em } \overline{\Omega},$$

e, de (f_5), temos que existem $C > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < s < \delta_2 \Rightarrow f(x, s) \geq -Cs, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Então, para $0 < s < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$-Cs \leq f(x, s) \leq \mu_1 s, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Fazendo $s \to 0^+$ temos $f(x, 0) = 0$ em $\overline{\Omega}$. Dessa forma, pode-se estender a função f do problema (3.1) colocando $f(x, s) = 0$ para $s < 0$ obtendo uma extensão $f(x, s)$ definida em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ e contínua em s. Além disso, tal extensão satisfaz (f_4) e (f_5), com $s \to 0$ em vez de $s \to 0^+$, e (f_2) para todo $s \in \mathbb{R}$, pois para $s < 0$ tem-se $\frac{f(x,s)}{s} = 0$ em $\overline{\Omega}$. Donde

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \frac{f(x, s)}{s} = 0 < \mu_1 \quad \text{e} \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{f(x, s)}{s} = 0 > -\infty.$$

Por outro lado, dados $\alpha > 2$, $C > 0$ e $\theta \in [0, 2)$ temos

$$\alpha F(x, s) - sf(x, s) = 0 \leq C|s|^\theta + C.$$

Definição 3.1. *Diz-se que uma função u é solução fraca de* (3.1) *se $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e satisfaz a primeira equação de* (3.1) *no sentido das distribuições.*

Seja u uma solução de (3.1). Apresentaremos adiante a demostração de que, por um argumento de bootstrap com o Teorema de regularidade elíptica, tem-se $u \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$ satisfazendo a primeira equação de (3.1) quase sempre em Ω. Além disso, $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Lema 3.2. *Seja u uma solução não-trivial de* (3.1) *com $\lambda = 0$. Então u é estritamente positiva e $\frac{\partial u}{\partial v} < 0$ sobre $\partial\Omega$, onde $\frac{\partial}{\partial v}$ denota o vetor normal exterior.*

Demonstração. Primeiro, defina

$$D := \{x \in \Omega : u(x) < 0\}.$$

Suponha, por absurdo, que D é não-vazio. Então, para $x \in D$ tem-se $u(x) < 0$ que pela extensão de f implica $f(x, u(x)) = 0$, donde u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) = 0 \text{ em } D \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Daí, $u \equiv 0$ em D, o que é uma contradição. Logo, $u(x) \geq 0$ em Ω. Faça $A := \|u\|_\infty$. Por (f_5), existe $C > 0$ tal que

$$0 \leq s \leq A \Rightarrow f(x,s) \geq -Cs, \text{ em } \Omega.$$

Então

$$0 \leq u \leq A \Rightarrow f(x,u) \geq -Cu, \text{ em } \Omega,$$

donde

$$-\Delta u + Cu = f(x,u) + Cu \geq 0, \text{ em } \Omega.$$

Isso implica u estritamente positiva, pois supondo, por absurdo, que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$, então como $u \geq 0$ tem-se

$$u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$$

e pelo Princípio do Máximo de Hopf, u é constante, donde $u(x) = u(x_0) = 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, isto é, $u \equiv 0$, o que é um absurdo. Portanto, $u > 0$ em Ω e, como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, tem-se $\frac{\partial u}{\partial v} < 0$ sobre $\partial\Omega$. $\square$

Pela primeira equação de (3.1), define-se o funcional de Lagrange $I_0(u)$ por

$$I_0(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) \right) dx, u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $F(x,u)$ é definido em (f_2), cuja derivada de Frèchet é dada por

$$I_0'(u)v = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - f(x,u)v \right) dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

A fim de aplicar o Teorema do Passo da Montanha para o problema (3.1) com $\lambda = 0$, os próximos lemas mostram que tal funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale e possui a geometria do Passo da Montanha.

Lema 3.3. *O funcional I_0 satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I_0(u_n)$ é limitada e $\|I_0'(u_n)\|$ converge para zero. Seja $1 \leq \theta \leq 2$. Usando as definições de $I_0(u)$ e $I_0'(u)v$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha I_0(u_n) - I_0'(u_n)u_n &= \alpha \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - F(x,u_n) \right) dx - \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n \big) dx \\ &= \left(\frac{\alpha - 2}{2} \right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega \left(\alpha F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n \right) dx \\ &\geq \left(\frac{\alpha - 2}{2} \right) \|\nabla u_n\|_2^2 - \int_\Omega \big(C|u_n|^\theta + C \big) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese, existem constantes $C_1 > 0$ e $n_1 = n_1(C_1) \in \mathbb{N}$ tais que

$$|I_0(u_n)| \leq \frac{C_1}{\alpha} \text{ e } \|I_0'(u_n)\| < C_1 \text{ desde que } n \geq n_1.$$

Então, para $n \geq n_1$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\alpha I_0(u_n) - I_0'(u_n)u_n| &\leq \alpha|I_0(u_n)| + |I_0'(u_n)u_n| \\
&\leq \alpha|I_0(u_n)| + \|I_0'(u_n)\|\|u_n\|_{H_0^1} \\
&\leq \alpha\frac{C_1}{\alpha} + C_1\|\nabla u_n\|_2 \\
&= C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 - \int_\Omega \left(C|u_n|^\theta + C\right)dx \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1.$$

Como $\theta \in [1,2] \subset [1,2^*) = [1,\frac{2N}{N-2})$, a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,2^*)$ implica que $u_n \in L^\theta(\Omega)$ e

$$\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 - C\|u_n\|_\theta^\theta + C|\Omega| \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_2\|\nabla u_n\|_2^\theta + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_2, \tag{3.5}$$

com uma constante $C_2 > 0$. Como $\theta \leq 2$, tal desigualdade mostra que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Pois, se tivéssemos $\|\nabla u_n\|_2 \to \infty$, de (3.5) teríamos

$$\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^{2-\theta} \leq C_2 + \frac{C_1}{\|\nabla u_n\|_2^{\theta-1}} + \frac{C_2}{\|\nabla u_n\|_2^\theta},$$

com o lado esquerdo divergindo para ∞ e o lado direito convergindo para C_2, o que é uma contradição. Então $\|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Agora, seja $0 \leq \theta < 1$. Então,

$$\alpha F(x,s) - sf(x,s) \leq C|s|^\theta + C \leq C(|s| + C_3) + C \leq C_4|s| + C_4,$$

onde $C_3, C_4 > 0$ são constantes positivas. Daí, analogamente ao feito acima,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 - \int_\Omega (C_4|u_n| + C_4)dx \leq \alpha I_0(u_n) - I_0'(u_n)u_n \\
&\Rightarrow \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 - C_4\|u_n\|_1 - C_4|\Omega| \leq C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_1 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_4\|u_n\|_1 + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_5
\end{aligned}$$

e pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ segue que

$$\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_6\|\nabla u_n\|_2 + C_1\|\nabla u_n\|_2 + C_5,$$

com constantes $C_5, C_6 > 0$. Donde $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Portanto, como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, então para todo $\theta \in [0,2]$ pode-se extrair uma subsequencia de u_n (novamente denotada por u_n) que converge fracamente para um limite $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Por imersão compacta, $u_n \to u_0$ fortemente em $L^\sigma(\Omega)$ para qualquer $\sigma \in [1,\infty)$, se $N = 1,2$ e $\sigma \in [1, \frac{2N}{N-2})$, se $N \geq 3$. Daí, $u_n \to u_0$ converge q.t.p. em Ω e $|u_n| \leq h_\sigma$ q.t.p. em Ω onde $h_\sigma \in L^\sigma(\Omega), \sigma \in [1, 2^*)$. Além disso, (f_1) implica

$$|sf(x,s)| \leq C|s| + C|s|^{p+1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \Omega.$$

Daí,

$$|u_n f(x,u_n)| \leq C|u_n| + C|u_n|^{p+1}.$$

Logo,

$$|u_n f(x,u_n)| \leq Ch_1 + Ch_{p+1}^{p+1} \in L^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega u_n f(x,u_n)dx \longrightarrow \int_\Omega u_0 f(x,u_0)dx$$

quando $n \to \infty$. Note ainda que dado $v \in H_0^1(\Omega)$, pela imersão compacta, tem-se $v \in L^1(\Omega)$ e, por (f_1),

$$\begin{aligned} &|vf(x,u_n)| \leq C|v| + C|v||u_n|^p \\ &\Rightarrow |vf(x,u_n)| \leq C|v| + C|v|h_p^p \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega vf(x,u_n)dx \longrightarrow \int_\Omega vf(x,u_0)dx$$

quando $n \to \infty$. Fazendo $n \to \infty$ nas igualdades

$$I_0'(u_n)u_0 = \int_\Omega (\nabla u_n \nabla u_0 - f(x,u_n)u_0)\, dx \text{ e}$$

$$I_0'(u_n)u_n = \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n\right) dx,$$

como $I_0'(u_n) \to 0$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \text{ e}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx,$$

respectivamente. Donde

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pelo Lema Brezis-Lieb (ver apêndice A), temos que u_n converge fortemente para u_0 em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale. $\square$

Lema 3.4. *O funcional I_0 tem uma geometria do passo da montanha, isto é, existem $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e constantes $r, \rho > 0$ tais que $I_0(u_1) < 0$, $\|\nabla u_1\|_2 > r$ e*

$$I_0(u) \geq \rho \text{ quando } \|\nabla u\|_2 = r. \tag{3.6}$$

Demonstração. Lembre que, pela extensão de f, a hipótese (f_4) é válida com $s \to 0$. Logo, existem $s_0 > 0$ e $\mu \in (0, \mu_1)$ tais que para $|s| \leq s_0$ temos

$$\frac{f(x,s)}{s} \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} \frac{f(x,s)}{s} < \mu < \mu_1, \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Daí, para todo $|s| \leq s_0$, temos que

$$f(x,s) < \mu s \Rightarrow \int_0^s f(x,t)dt < \mu \int_0^s t dt \Rightarrow F(x,s) \leq \mu \frac{s^2}{2} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Por outro lado, de (f_1), para todo $s \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt &\leq \int_0^s C(|t|^p + 1)dt = C|s|^{p+1} + C|s| \\ &\leq C|s|^{p+1} + C(|s|^{p+1} + C_1) \leq C_2|s|^{p+1} \text{ em } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{2}s^2 + C_2|s|^{p+1} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Além disso, como μ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$, segue que

$$\mu_1 = \inf_{0\neq x\in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx} = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \|u\|_2^2 \mu_1 \leq \|\nabla u\|_2^2 \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Então, I_0 é estimado como

$$\begin{aligned}
I_0(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega \left(\frac{\mu}{2}u^2 + C_2|u|^{p+1}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\mu}{2}\|u\|_2^2 + C_2\|u\|_{p+1}^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}\|\nabla u\|_2^2\right) + C_2\|\nabla u\|_2^{p+1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\mu_1}\right)\|\nabla u\|_2^2 - C_2\|\nabla u\|_2^{p+1} \\
&= \left(\frac{\mu_1 - \mu}{2\mu_1}\right)\|\nabla u\|_2^2 - C_2\|\nabla u\|_2^{p+1}.
\end{aligned}$$

Fixe $r > 0$ tão pequeno que $\left(\frac{\mu_1-\mu}{2\mu_1}\right)r^2 - C_2r^{p+1} > 0$ e defina $\rho = \left(\frac{\mu_1-\mu}{2\mu_1}\right)r^2 - C_2r^{p+1} > 0$. Então, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2 = r$ temos que $I_0(u) > \rho$. Sejam x_0, δ_0 como em (f_3). Seja ϕ uma função não-trivial tal que $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi(x) \geq 0$ em Ω e $supp\phi \subset B(x_0,\delta_0)$. Então, por (f_3),

$$\min_{x\in B(x_0,\delta_0)} \frac{F(x,s)}{s^2} \longrightarrow \infty \text{ quando } x \to \infty.$$

Faça $a := \frac{\|\phi\|_\infty}{2}$ e $D := \{x \in B(x_0,\delta_0) : \phi(x) \geq a\} \subset supp\phi$. Para $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
I_0(t\phi) &= \frac{t^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \int_{supp\phi} F(x,t\phi)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - \int_D F(x,t\phi)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - t^2\int_D \frac{\phi^2 F(x,t\phi)}{t^2\phi^2}dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|\nabla\phi\|_2^2 - t^2a^2\int_D \frac{F(x,t\phi)}{t^2\phi^2}dx \longrightarrow -\infty \text{ quando } t \to \infty.
\end{aligned}$$

Fixe $t > 0$ tão grande que $I_0(t\phi) < 0$ e $t\|\nabla\phi\|_2 \geq r$. Então, fazendo $u_1 := t\phi$ temos $I_0(u_1) < 0$, $\|\nabla u_1\|_2 > r$. Além disso, como $I_0(0) = 0$, então o funcional I_0 satisfaz a geometria do passo da montanha. $\square$

Para u_1 como no lema acima, define-se

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\},$$

$$c_0 := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)).$$

Pela Teorema do passo da montanha, temos que c_0 um valor crítico de I_0 e $c_0 \geq \rho$, ou seja, existe

$u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I_0(u) = c_0 \geq \rho$ e $I_0'(u) = 0$.

Lema 3.5. *Existe uma constante* $\tilde{C} > 0$ *tal que* $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \tilde{C}$ *para toda solução passo da montanha* u *de* I_0.

Demonstração. Dada u uma solução passo da montanha de I_0. Então $I_0'(u) = 0$ e $I_0(u) = c_0$. Analogamente à demonstação do Teorema 2.6, como

$$\alpha I_0(u) - I_0'(u)u = \frac{\alpha - 2}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega (\alpha F(x,u) - uf(x,u))\, dx$$

e existem $\alpha > 2$, $\theta \in [0,2)$ e $C > 0$ tais que

$$\alpha F(x,s) - sf(x,s) \leq C|s|^\theta + C, \text{ para } s \in \mathbb{R} e x \in \Omega,$$

então, temos que

$$\frac{\alpha - 2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq \alpha I_0(u) - I_0'(u)u + C\int_\Omega |u|^\theta dx + C|\Omega|.$$

Essa desigualdade implica

$$\frac{\alpha - 2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq \alpha c_0 + C_1\|\nabla u\|_2 + C_2, \text{ quando } \theta \in [0,1]$$

$$\frac{\alpha - 2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq \alpha c_0 + C_3\|\nabla u\|_2^\theta + C_2, \text{ quando } \theta \in [1,2).$$

Por outro lado, pelo Teorema do Passo da Montanha, temos que $c_0 \geq \rho$. Além disso, considerando o caminho $\gamma(t) := tu_1$ para $t \in [0,1]$, com u_1 como no Lema 3.4, temos que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = u_1$, donde $\gamma \in \Gamma$. Para cada $t \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned} I_0(tu_1) &= \frac{t^2}{2}\|\nabla u_1\|_2^2 - \int_\Omega F(x,tu_1)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_1\|_2^2 + \int_\Omega |F(x,tu_1)|dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_1\|_2^2 + \sup_{t\in[0,1]}\int_\Omega |F(x,tu_1)|dx = \frac{C_4}{\alpha}, \end{aligned}$$

onde C_4 é uma constante positiva independente de u. Assim,

$$c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_0(tu_1) \leq \frac{C_4}{\alpha}.$$

Daí,

$$\frac{\alpha - 2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq C_4 + C_1\|\nabla u\|_2 + C_2, \text{ quando } \theta \in [0,1],$$

e

$$\frac{\alpha - 2}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq C_4 + C_3\|\nabla u\|_2^\theta + C_2, \text{ quando } \theta \in [1,2).$$

Portanto, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada, isto é, $\|\nabla u\|_2 \leq \tilde{C}$ com $\tilde{C}$ independente de u. Afirmação: Se $u \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma < \infty$, então $f \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma < \infty$. De fato, para cada $\sigma < \infty$ tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u)|^\sigma dx &\leq C^\sigma \int_\Omega (|u|^p + 1)^\sigma \, dx \\ &\leq C^\sigma 2^{\sigma-1} \int_\Omega (|u|^{p\sigma} + 1)^\sigma \, dx \\ &\leq C^\sigma 2^{\sigma-1} \int_\Omega |u|^{p\sigma} dx + C^\sigma 2^{\sigma-1}|\Omega| < \infty,\end{aligned}$$

pois $u \in L^{p\sigma}(\Omega)$. Agora, por um argumento de bootstrap com (f_1) e o teorema de regularidade elíptica, obtém-se também $\|u\|_{2,\sigma}$ limitada para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Especialmente, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \tilde{C}$ para alguma constante $\tilde{C} > 0$. Com efeito, Para $N = 1, 2$, pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $1 \leq \sigma < \infty$ temos que

$$\|u\|_\sigma \leq C_5 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \text{ limitada para todo } \sigma \in [1,\infty).$$

Então, pela afirmação acima, $f \in L^\sigma(\Omega)$ e

$$\|f\|_\sigma^\sigma \leq C^\sigma 2^{\sigma-1} \|u\|_{p\sigma}^{p\sigma} + C^\sigma 2^{\sigma-1}|\Omega| \text{ é limitada, para todo } \sigma \in [1,\infty).$$

E, pelo Teorema (ADN) $u \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ e $\|u\|_{2,\sigma} \leq C_6 \|f\|_\sigma$ é limitada para todo $\sigma < \infty$. Para $N \geq 3$, pela imersão de Sobolev tem-se $u \in L^{2^*}(\Omega)$ e $\|u\|_{2^*} \leq C_7 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada, com $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Defina $1 < p_0 := \frac{2^*}{p}$. Então, por (f_1),

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u)|^{p_0} dx &= C^{p_0} 2^{p_0-1} \int_\Omega (|u|^{pp_0} + 1) dx \\ &= C^{p_0} 2^{p_0-1} \int_\Omega |u|^{2^*} dx + C^{p_0} 2^{p_0-1}|\Omega| < \infty.\end{aligned}$$

donde $f \in L^{p_0}(\Omega)$ e

$$\|f\|_{p_0}^{p_0} \leq C^{p_0} 2^{p_0-1} \|u\|_{2^*}^{2^*} + C^{p_0} 2^{p_0-1}|\Omega|$$

é limitada. Então, pelo Teorema(ADN), $u \in W^{2,p_0}(\Omega)$ e $\|u\|_{2,p_0} \leq C_8 \|f\|_{p_0}$ é limitada. Há três possibilidades para $p_0 = \frac{2^*}{p}$. Se $2(\frac{2^*}{p}) > N$, então pela desigualdade geral de Sobolev $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Se $2(\frac{2^*}{p}) = N$, então pelo Teorema de Imersão $W^{k,p_0}(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Logo, $u \in L^\sigma(\Omega)$ e

$$\|u\|_\sigma \leq C \|u\|_{2,p_0} \text{ é limitada}$$

para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Pela afirmação acima, $f \in L^\sigma(\Omega)$ e

$$\|f\|_\sigma^\sigma \leq C^\sigma 2^{\sigma-1} \|u\|_{p\sigma}^{p\sigma} + C^\sigma 2^{\sigma-1}|\Omega| \text{ é limitada, para todo } \sigma \in [1,\infty).$$

E, pelo Teorema (ADN) $u \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ e $\|u\|_{2,\sigma} \leq C_6\|f\|_\sigma$ é limitada para todo $\sigma < \infty$. Se $2(\frac{2^*}{p}) < N$, então pela desigualdade geral de Sobolev $u \in L^{p_1}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$ e $\|u\|_{p_1} \leq C\|u\|_{2,p_1}$ é limitada. Note que $p_1 > 2^*$, pois

$$\frac{1}{p_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \Rightarrow p_1 = \frac{2^*N}{pN - 2.2^*}$$

e

$$p < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow pN - 2.2^* < \frac{N}{N-2}(N+2) - 2.2^* = \frac{N}{N-2}(N+2) - \frac{4N}{N-2} = N$$

donde

$$p_1 = \frac{2^*N}{pN - 2.2^*} > \frac{2^*N}{N} = 2^*.$$

Então,

$$\int_\Omega |f(x,u)|^{\frac{p_1}{p}} \leq C\int_\Omega |u|^{p_1} + C|\Omega| < \infty,$$

donde $f \in L^{\frac{p_1}{p}}(\Omega)$ e

$$\|f\|^{\frac{p_1}{p}}_{\frac{p_1}{p}} \leq C\|u\|^{p_1}_{p_1} + C \text{ é limitada },$$

com $\frac{p_1}{p} > \frac{2^*}{p} > 1$, então pelo Teorema(ADN) $u \in W^{2,\frac{p_1}{p}}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{2,\frac{p_1}{p}} \leq C\|f\|_{\frac{p_1}{p}} \text{ é limitada.}$$

Analogamente ao realizado para $\frac{2^*}{p}$, há três possibilidades para $\frac{p_1}{p}$, das quais se obtem: Se $2(\frac{p_1}{p}) > N$, então $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Se $2(\frac{p_1}{p}) > N$, então $W^{2,\frac{p_1}{p}} \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Logo, $u \in L^\sigma(\Omega)$ e

$$\|u\|_\sigma \leq C\|u\|_{2,\frac{p_1}{p}} \text{ é limitada}$$

para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Pela afirmação acima, $f \in L^\sigma(\Omega)$ e

$$\|f\|^\sigma_\sigma \leq C^\sigma 2^{\sigma-1}\|u\|^{p\sigma}_{p\sigma} + C^\sigma 2^{\sigma-1}|\Omega| \text{ é limitada, para todo } \sigma \in [1,\infty).$$

E, pelo Teorema (ADN) $u \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ e $\|u\|_{2,\sigma} \leq C_6\|f\|_\sigma$ é limitada para todo $\sigma < \infty$. Se $2(\frac{p_1}{p}) < N$, então pela desigualdade geral de Sobolev $u_\lambda \in L^{p_2}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p_2} = \frac{p}{p_1} - \frac{2}{N}$ e $\|u\|_{p_2} \leq C_{11}\|u\|_{2,\frac{p_1}{p}}$, com $p_2 > p_1$. Donde $f \in L^{\frac{p_2}{p}}(\Omega)$, com $\frac{p_2}{p} > \frac{p_1}{p} > 1$, então pelo Teorema(ADN) $u \in W^{2,\frac{p_2}{p}}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{2,\frac{p_2}{p}} \leq C\|f\|_{\frac{p_2}{p}} \text{ é limitada.}$$

Prosseguindo dessa forma, encontramos números $2^* < p_1 < p_2 < ... < p_k$ tais que $\frac{1}{p_j} = \frac{p}{p_{j-1}} - \frac{2}{N}$. Então,

$$\frac{1}{p_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N},$$

$$\frac{1}{p_2} = \frac{p}{p_1} - \frac{2}{N} = p\left(\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}\right) - \frac{2}{N} = \frac{p^2}{2^*} - \frac{2}{N}(p+1),$$

$$\frac{1}{p_3} = \frac{p}{p_2} - \frac{2}{N} = p_0\left(\frac{p^2}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0+1)\right) - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2+p+1),$$

$$\frac{1}{p_4} = \frac{p}{p_3} - \frac{2}{N} = p\left(\frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2+p+1)\right) - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2}{N}(p_0^3+p_0^2+p_0+1),$$

donde

$$\frac{1}{p_j} = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{j-1} p^k = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N}\left(\frac{p^j-1}{p-1}\right) = \left(\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p_0-1)}\right)p^j + \frac{2}{N(p-1)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} p < \frac{N+2}{N-2} &\Rightarrow N(p-1) < N\left(\frac{N+2}{N-2} - 1\right) = \frac{4N}{N-2} \\ &\Rightarrow \frac{N-2}{2N} - \frac{2}{N(p-1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} < 0. \end{aligned}$$

Então, existe $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{p_j} < 0$, o que implica que

$$\frac{p}{p_j} - \frac{2}{N} < 0 \Rightarrow \frac{p}{p_j} < \frac{2}{N} \Rightarrow 2\left(\frac{p_j}{p}\right) > N.$$

Portanto, para esse número j finito de passos, tem-se $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Daí,

$$u \in W^{2,\sigma}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{2,\sigma} < C\|f\|_\sigma \text{ é limitada,}$$

para todo $\sigma < \infty$. Logo, por imersão compacta, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{2,\sigma}$ é limitada. $\square$

Pelo Lema anterior, temos $M > 0$ tal que

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq M \tag{3.7}$$

para toda solução passo da montanha u de I_0. Agora, defina (ver [12])

$$\tilde{g}(x,s) = \begin{cases} g(x,0), \text{ se } s \leq 0 \\ g(x,s), \text{ se } 0 \leq s \leq 2M \\ g(x,2M), \text{ se } s \geq 2M \end{cases}$$

Note que

$$\lim_{s\to 0^+} \tilde{g}(x,s) = lim_{s\to 0^+} g(x,s) = g(x,0) \text{ em } \overline{\Omega},$$

pois g é contínua, e

$$\lim_{s\to 0^-} \tilde{g}(x,s) = \lim_{s\to 0^-} g(x,0) = g(x,0) \text{ em } \overline{\Omega},$$

donde $\tilde{g}$ é contínua em $s=0$. Note, ainda, que

$$\lim_{s\to 2M^-} \tilde{g}(x,s) = lim_{s\to 2M^-} g(x,s) = g(x,2M) \text{ em } \overline{\Omega},$$

pois g é contínua, e

$$\lim_{s\to 2M^+} \tilde{g}(x,s) = \lim_{s\to 2M^+} g(x,2M) = g(x,2M) \text{ em } \overline{\Omega},$$

donde $\tilde{g}$ é contínua em $s=2M$. Logo, $\tilde{g}$ é contínua sobre $\Omega\times\mathbb{R}$. Então, sobre o fechado $\overline{\Omega}\times[0,2M]$, $\tilde{g}$ é limitada, digamos $|\tilde{g}(x,s)| \leq C$. Daí, $|\tilde{g}(x,s)| \leq \max\{C, g(x,0), g(x,2M)\}$, donde $\tilde{g}$ é limitada sobre $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$. Escolha uma função $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $h(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $h(s) = 1$ quando $|s| \leq 2M$, e $h(s) = 0$ quando $|s| \geq 4M$. E defina o funcional

$$I_\lambda(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - \lambda h(u)\tilde{G}(x,u)\right) dx, \text{ para } u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$

onde f satisfaz $(f_1)-(f_5)$ e

$$\tilde{G}(x,u) := \int_0^s \tilde{g}(x,t)dt.$$

Por (f_1), I_λ é um funcional de classe C^1, com derivada de Fréchet de $I_\lambda(u)$ dada por

$$I'_\lambda(u)v = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - vf(x,u) - \lambda v h(u)\tilde{g}(x,u) - \lambda v h'(u)\tilde{G}(x,u)\right) dx \text{ para } v \in H_0^1(\Omega).$$

Então, um ponto crítico de $I_\lambda(u)$ é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \lambda h(u)\tilde{g}(x,u) + \lambda h'(u)\tilde{G}(x,u), \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

A estratégia da demonstração do Teorema 3.1 é encontrar uma solução do Passo da Montanha u_λ de I_λ, provar que $0 < u_\lambda \leq 2M$ para λ suficientemente pequeno, $h'(u_\lambda) = 0$, $h(u_\lambda) = 1$, $\tilde{g}(x,u_\lambda) = g(x,u_\lambda)$ e, daí, u_λ é solução de (3.1).

Note que $h(s)\tilde{G}(x,s)$ é uma função limitada com respeito a s pois h e $\tilde{G}$ o são. Além disso, a derivada de $h(s)\tilde{G}(x,s)$ com respeito a s é dada por $h(s)\tilde{g}(x,s) - h'(s)\tilde{G}(x,s)$ que também é limitada devido a limitação de h, $\tilde{g}$, h' e $\tilde{G}$ com respeito a s. Portanto, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|h(s)\tilde{G}(x,s)| \leq C_1 \text{ e } |h(s)\tilde{g}(x,s) - h'(s)\tilde{G}(x,s)| \leq C_2 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Lema 3.6. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o funcional I_λ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $\{u_n\}$ uma sequencia em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I_\lambda(u_n)$ é limitada e $\|I'_\lambda(u_n)\|$ converge para zero. Como

$$I'_\lambda(u)v = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v - vf(x,u) - \lambda v h(u)\tilde{g}(x,u) - \lambda v h'(u)\tilde{G}(x,u)\right) dx \text{ para } v \in H_0^1(\Omega),$$

temos que

$$\begin{aligned}
\alpha I_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u_n)u_n &= \alpha \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - F(x,u_n) - \lambda h(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\right) dx \\
&\quad - \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - u_n f(x,u_n) - \lambda u_n h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) - \lambda u_n h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\right) dx \\
&= \frac{\alpha-2}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega (\alpha F(x,u_n) - u_n f(x,u_n))\, dx \\
&\quad - \alpha\lambda \int_\Omega h(u_n)\tilde{G}(x,u_n)dx + \lambda \int_\Omega u_n \left(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\alpha-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 &\leq \alpha I_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u_n)u_n + \int_\Omega \left(C|u_n|^\theta + C\right) dx + \alpha\lambda \int_\Omega C_1 dx + \lambda \int_\Omega |u_n| C_2 dx \\
&\leq \alpha|I_\lambda(u_n)| + \|I'_\lambda(u_n)\|\|\nabla u_n\|_2 + C\int_\Omega |u_n|^\theta dx + C|\Omega| + \alpha\lambda C_1|\Omega| + \lambda C_2\|u_n\|_1 dx \\
&\leq C + C\|\nabla u_n\|_2 + C\int_\Omega |u_n|^\theta dx + C|\Omega| + \alpha\lambda C_1|\Omega| + \lambda C_2\|\nabla u_n\|_2 \\
&\leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C\int_\Omega |u_n|^\theta dx + C_3
\end{aligned}$$

Essa desigualdade implica

$$\frac{\alpha-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C\|u_n\|_\theta^\theta + C_3 \leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C_4\|\nabla u_n\|_2^\theta + C_3, \text{ quando } \theta \in [0,1]$$

e

$$\frac{\alpha-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C\|u_n\|_1 + C_3 \leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C_5\|\nabla u_n\|_2 + C_3, \text{ quando } \theta \in [1,2).$$

Ambas desigualdades mostram que $\|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Daí, podemos extrair uma subsequência de $\{u_n\}$ (novamente denotada por $\{u_n\}$) tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. E, por imersão compacta, $u_n \to u_0$ q.t.p. em Ω. Segue, de (3.10), que

$$\left|u_n \left(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\right)\right| \leq |u_n| C_1 \in L^1(\Omega) \text{ e}$$

$$\left|v \left(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\right)\right| \leq |v| C_1 \in L^1(\Omega), \text{ para } v \in H_0^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega u_n \Big(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\Big)\,dx \longrightarrow \int_\Omega u_0 \Big(h(u_0)\tilde{g}(x,u_0) + h'(u_0)\tilde{G}(x,u_0)\Big)\,dx \text{ e}$$

$$\int_\Omega v \Big(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)\Big)\,dx \longrightarrow \int_\Omega v \Big(h(u_0)\tilde{g}(x,u_0) + h'(u_0)\tilde{G}(x,u_0)\Big)\,dx.$$

Como

$$I'_\lambda(u_n)u_0 = \int_\Omega \Big(\nabla u_n \nabla u_0 - u_0 f(x,u_n) - \lambda u_0(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n))\Big)\,dx,$$

então, fazendo $n \to \infty$, das convergências acima e do fato de $I'_\lambda(u_n)$ convergir para zero, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \int_\Omega f(x,u_0)u_0 - \lambda \int_\Omega u_0(h(u_0)\tilde{g}(x,u_0) + h'(u_0)\tilde{G}(x,u_0))dx \\ \Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx &= \int_\Omega f(x,u_0)u_0 + \lambda \int_\Omega u_0(h(u_0)\tilde{g}(x,u_0) + h'(u_0)\tilde{G}(x,u_0))dx. \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo $n \to \infty$ em

$$I'_\lambda(u_n)u_n = \int_\Omega \Big(|\nabla u_n|^2 - u_n f(x,u_n) - \lambda u_n(h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n))\Big)\,dx,$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 &= lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega f(x,u_0)u_0 - \lambda \int_\Omega u_0(h(u_0)\tilde{g}(x,u_0) + h'(u_0)\tilde{G}(x,u_0))dx \\ \Rightarrow lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx &= \int_\Omega f(x,u_0)u_0 + \lambda \int_\Omega u_0(h(u_0)\tilde{g}(x,u_0) + h'(u_0)\tilde{G}(x,u_0))dx = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx. \end{aligned}$$

Donde $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$. Portanto, pelo Lema de Brezis-Lieb, tem-se I_λ satisfazendo a condição de Palais-Smale. □

Lema 3.7. *Existe um $\lambda_0 > 0$ tal que I_λ tem uma geometria do Passo da Montanha para todo $|\lambda| \le \lambda_0$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u) - \lambda h(u)\tilde{G}(x,u)\right) dx \\ &= I_0(u) - \lambda \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx. \end{aligned}$$

Além disso, por (3.10), temos para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ que

$$
\begin{aligned}
& -C_1 \leq h(u)\tilde{G}(x,u) \leq C_1 \\
& \Rightarrow -C_1|\Omega| \leq \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx \leq C_1|\Omega| \\
& \Rightarrow -C_3 \leq \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx \leq C_3.
\end{aligned}
$$

Então, para $\lambda \geq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
& -|\lambda|C_3 \leq -|\lambda| \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx \leq |\lambda|C_3 \\
& \Rightarrow I_0(u) - |\lambda|C_3 \leq I_0(u) - \lambda \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx \leq I_0(u) + |\lambda|C_3 \\
& \Rightarrow I_0(u) - |\lambda|C_3 \leq I_\lambda(u) \leq I_0(u) + |\lambda|C_3.
\end{aligned}
$$

Para $\lambda < 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
& -|\lambda|C_3 \leq |\lambda| \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx \leq |\lambda|C_3 \\
& \Rightarrow I_0(u) - |\lambda|C_3 \leq I_0(u) - \lambda \int_\Omega h(u)\tilde{G}(x,u)dx \leq I_0(u) + |\lambda|C_3 \\
& \Rightarrow I_0(u) - |\lambda|C_3 \leq I_\lambda(u) \leq I_0(u) + |\lambda|C_3.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
I_0(u) - |\lambda|C_3 \leq I_\lambda(u) \leq I_0(u) + |\lambda|C_3 \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.11}
$$

com $C_3 > 0$ uma constante independente de λ e u. Sejam r, ρ e u_1 como no Lema 3.4. Então, como $I_0(u_1) < 0$, para $|\lambda|$ suficientemente pequeno, temos que

$$
I_\lambda(u_1) \leq I_0(u_1) + |\lambda|C_3 < 0
$$

e

$$
I_\lambda(u) \geq I_0(u) - |\lambda|C_3 \geq \rho - |\lambda|C_3 \geq \frac{\rho}{2} \quad \text{quando } \|\nabla u\|_2 = r, \tag{3.12}
$$

o que mostra que o funcional I_λ satisfaz a geometria do Passo da Montanha para todo $|\lambda| \leq \lambda_0$, com λ_0 suficientemente pequeno. $\square$

Assim sendo, define-se o valor do Passo da Montanha c_λ de I_λ por

$$
c_\lambda := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)).
$$

Então, quando $\lambda \to 0$, por (3.11), temos $I_\lambda(u)$ convergindo para $I_0(u)$. Assim,

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \longrightarrow \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)) = c_0.$$

Lema 3.8. *Seja $\lambda_n \in \mathbb{R}$ uma sequência convergindo para zero e u_n uma solução do Passo da Montanha de I_{λ_n}. Então uma subsequência de u_n converge para um limite u_0 em $W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$, onde u_0 é uma solução do Passo da Montanha de I_0.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como u_n é uma solução do Passo da Montanha de I_{λ_n}, temos que $I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n} \geq \frac{\rho}{2}$ e $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$. Note que $\dfrac{\rho}{2} \leq c_{\lambda_n} \leq C_4$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde C_1 é uma constante positiva independente de u_n. De fato, considerando o caminho dado por $\gamma(t) := tu_1$ para $t \in [0,1]$, temos $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = u_1$, donde $\gamma \in \Gamma$. Então, para $t \in [0,1]$ temos que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_n}(tu_1) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla tu_1|^2 - F(x,tu_1) - \lambda h(tu_1)\tilde{G}(x,tu_1)\right) dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|\nabla u_1\|_2^2 + \int_\Omega |F(x,tu_1)|dx + \lambda C_1|\Omega| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_1\|_2^2 + \sup_{t\in[0,1]} \int_\Omega |F(x,tu_1)|dx + C_3 = C_4,
\end{aligned}$$

com C_4 uma constante positiva independente de u_n. Logo,

$$\frac{\rho}{2} \leq c_{\lambda_n} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(tu_1) \leq C_4.$$

Analogamente ao que foi feito na demonstração do Lema 3.7, temos que

$$\frac{\alpha-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C_4\|\nabla u_n\|_2^\theta + C_3, \text{ quando } \theta \in [0,1]$$

$$\frac{\alpha-2}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \leq C_3\|\nabla u_n\|_2 + C_5\|\nabla u_n\|_2 + C_3, \text{ quando } \theta \in [1,2).$$

Ambas desigualdades mostram que $\|\nabla u_n\|_2$ é limitada. Além disso, por (f_1) e (3.10), obtemos

$$|f(x,u_n) + \lambda_n h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) + \lambda_n h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)| \leq |f(x,u_n)| + |\lambda_n|C_2 \leq C(|u_n|^p + 1) + |\lambda_n|C_2.$$

Afirmamos que se $u_n \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma < \infty$ então $f(x,u_n) + \lambda_n h(u_n)\tilde{g}(x,u_n) +$

$\lambda_n h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n) \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma < \infty$. Com efeito, para cada $\sigma < \infty$ temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u_n)+\lambda_n h(u_n)\tilde{g}(x,u_n)+\lambda_n h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n)|^\sigma dx &\leq \int_\Omega (C(|u_n|^p+1)+|\lambda_n|C_2)^\sigma\, dx \\ &\leq 2^{\sigma-1}\int_\Omega (C^\sigma(|u_n|^p+1)^\sigma+|\lambda_n|^\sigma C_2^\sigma)\, dx \\ &\leq 2^{\sigma-1}\int_\Omega \left(C^\sigma 2^{\sigma-1}(|u_n|^{p\sigma}+1)+|\lambda_n|^\sigma C_2^\sigma\right) dx \\ &\leq C_6\int_\Omega |u_n|^{p\sigma}dx + C_6 < \infty,\end{aligned}$$

pois $u_n \in L^{p\sigma}(\Omega)$. Portanto, $g_n := f(x,u_n)+\lambda_n h(u_n)\tilde{g}(x,u_n)+\lambda_n h'(u_n)\tilde{G}(x,u_n) \in L^\sigma(\Omega)$ para todo $\sigma < \infty$ e

$$\|g_n\|_\sigma^\sigma \leq C_6\|u_n\|_{p\sigma}^{p\sigma}+C_6.$$

Note que essa estimativa, juntamente com

$$|g_n|^\sigma \leq C_6|u_n|^{p\sigma}+C_6,$$

é análoga as usadas na prova do Lema 3.6, o que permite a utilização de um argumento de bootstrap para concluir que $u_n \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ e $\|u_n\|_{2,\sigma}$ é limitada para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Logo, podemos extrair uma subsequência de $\{u_n\}$ (também denotada por $\{u_n\}$) tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Por imersão compacta, $u_n \to u_0$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Como I_{λ_n} converge para I_0, c_{λ_n} converge para c_0 e $u_n \to u_0$ em $C^1(\overline{\Omega})$ quando $\lambda_n \to 0$. Fazendo $n \to \infty$ em $I_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n}$ e $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$, segue que $I_0(u_0) = c_0$ e $I'_0(u_0) = 0$. Daí, u_0 é solução Passo da Montanha de I_0 e, pelo Lema 3.6, $u_0 \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$. Além disso, g_n converge para $f(x,u_0)$ uniformemente sobre $x \in \overline{\Omega}$. E o teorema de regularidade elíptica assegura que $u_n \to u_0$ em $W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1,\infty)$. □

Para $\delta > 0$, define-se

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : dist(x,\partial\Omega) < \delta\},$$

onde $dist(x,\partial\Omega)$ denota a distância de x para $\partial\Omega$.

Lema 3.9. *Existem constantes λ_0,δ_0, $a, b > 0$ tais que qualquer solução do Passo da Montanha u de I_λ com $|\lambda| \leq \lambda_0$ satisfaz (i) e (ii) abaixo:*
(i) $0 \leq u(x) \leq 2M$ em Ω, onde M foi definida por (3.7);
(ii) $\frac{\partial u}{\partial v} < -a$ em Ω_δ e $u(x) > b$ em $\Omega \setminus \Omega_\delta$, onde $\frac{\partial}{\partial v}$ é definida em cada ponto de Ω_δ para $\delta > 0$ pequeno devido à $\partial\Omega$ ser suave.

Demonstração. Para toda solução do Passo da Montanha u de I_λ, tem-se $|u(x)| \leq 2M$, com $0 < |\lambda| \leq \lambda_0$. De fato, suponha por absurdo que existem sequências $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $u_n \in H_0^1(\Omega)$ e $x_n \in \Omega$ tais que $\lambda_n \to 0$, u_n é uma solução do passo da Montanha de I_{λ_n} e $|u_n(x_n)| > 2M$, o que implica que $\|u_n\|_\infty \geq 2M$. Então, pelo Lema 3.8, u_n converge a menos de subsequência para uma solução do Passo da Montanha u_0 de I_0 em $C^1(\Omega)$. Além disso, como $\|u_0\|_\infty \leq M$, temos que

$$\|u_n\|_\infty = \|u_n - u_0 + u_0\|_\infty \leq \|u_n - u_0\|_\infty + \|u_0\|_\infty < M + M = 2M,$$

para n suficientemente grande. O que é uma contradição. Então, $\|u\|_\infty \leq 2M$. Agora, suponha por absurdo que para cada $a = \frac{1}{n}, \delta_0 = \frac{1}{n} > 0$ existem $0 < |\lambda_n| < |\lambda_0|$, u_n solução Passo da Montanha de I_{λ_n}, e $x_n \in \Omega_{\frac{1}{n}}$ tais que

$$\frac{\partial u_n}{\partial v}(x_n) \geq -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial v}(x_n) \geq 0 \text{ e } dist(x_n, \partial\Omega) \to 0.$$

Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $dist(x_n, \partial\Omega) < 1$ desde que $n \geq n_0$, o que equivale $x_n \in \Omega_1$, donde a sequência $\{x_n\}$ é limitada. Então, podemos escolher uma subsequencia de $\{x_n\}$ (novamente denotada por $\{x_n\}$) que converge para um limite x_0 em $\partial\Omega$. Pelo lema anterior, u_n converge a menos de subsequencia para uma solução Passo da Montanha u_0 de I_0 em $C^1(\overline{\Omega})$. Logo,

$$\begin{aligned}
|u_n(x_n) - u_0(x_0)| &= |u_n(x_n) - u_0(x_n) + u_0(x_n) - u_0(x_0)| \\
&\leq |(u_n - u_0)(x_n)| + |u_0(x_n) - u_0(x_0)| \\
&\leq \|u_n - u_0\|_\infty + |u_0(x_n) - u_0(x_0)| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $u_n(x_n) \to u_0(x_0)$. Donde $\frac{\partial u_n}{\partial v}(x_n) \to \frac{\partial u_0}{\partial v}(x_0)$ quando $n \to \infty$. Como

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial v}(x_n) \geq 0,$$

então $\frac{\partial u_0}{\partial v}(x_0) \geq 0$, o que contradiz o Lema 3.2. Portanto, $\frac{\partial u}{\partial v} < -a$ em Ω_{δ_0} para algum $a, \delta_0 > 0$, qualquer que seja a solução Passo da Montanha u de I_λ com $0 < |\lambda| < |\lambda_0|$. Por fim, suponha por absurdo que para cada $b = \dfrac{1}{n}, \delta_1 = \dfrac{1}{n} > 0$ existem $0 < |\lambda_n| < |\lambda_0|$, u_n solução Passo da Montanha de I_{λ_n}, e $x_n \in \Omega \setminus \Omega_{\frac{1}{n}}$ tais que

$$u_n(x_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Então,

$$\limsup_{n\to\infty} u_n(x_n) \leq 0$$

e $\{x_n\}$ é uma sequencia limitada. Assim, podemos escolher uma subsequencia de $\{x_n\}$ (novamente denotada por $\{x_n\}$) que converge para um limite $x_0 \in \Omega$. Pelo Lema anterior, analogamente ao feito acima, temos que $u_n(x_n) \to u_0(x_0)$ quando $n \to \infty$. Daí,

$$u_0(x_0) = \limsup_{n\to\infty} u_n(x_n) \leq 0$$

o que contradiz o Lema 3.2. Portanto, existem $b > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que $u_(x) > b > 0$ em $\Omega \setminus \Omega_\delta$. portanto, existem $a, b, \delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$ para os quais (ii) é válida. Em particular, $u(x) > 0$ em $\Omega \setminus \Omega_\delta$. Por argumento análogo, suponha que existem sequências $\lambda_n \in \mathbb{R}$, com $\lambda_n \to 0$, e u_n solução Passo da Montanha de I_{λ_n} tais que $u_n(x_n) < 0$ para algum $x_n \in \Omega \cap \Omega_\delta$. Então,

$$\liminf_{n\to\infty} u_n(x_n) \leq 0$$

e x_n converge, a menos de subsequencia, para um limite $x_0 \in \Omega$. Pelo Lema anterior, $u_n(x_n) \to u_0(x_0)$ quando $n \to \infty$. Daí, temos que

$$u_0(x_0) = \liminf_{n\to\infty} u_n(x_n) \leq 0,$$

que contradiz o Lema 3.2. Logo, $u(x) > 0$ em $\Omega \cap \Omega_\delta$. Donde $u(x) > 0$ em Ω. Portanto, (i) é válida. $\square$

Lema 3.10. *Existe $r_0 > 0$ tal que para cada $r \in (0, r_0)$ existem $\rho_r, \lambda'_r > 0$ tais que*

$$I_\lambda(u) \geq \rho_r \text{ quando } \|\nabla u\|_2 = r, \text{ para todo } |\lambda| < \lambda'.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.4, existem $r_0, \rho_0 > 0$ tais que

$$I_0(u) \geq \frac{\mu_1 - \mu}{2\mu_1}\|\nabla u\|_2^2 - C_2\|\nabla u\|_2^{p+1} = \rho_0 > 0 \text{ quando } \|\nabla u\|_2 = r_0,$$

onde r_0 é tão pequeno que $\frac{\mu_1 - \mu}{2\mu_1} r_0^2 - C_2 r_0^{p+1} > 0$. Então, para cada $r \in (0, r_0)$, podemos tomar $\rho_r > 0$ tal que $2\rho_r = \frac{\mu_1 - \mu}{2\mu_1} r^2 - C_2 r^{p+1} > 0$ e

$$I_0(u) \geq 2\rho_r \text{ quando } \|\nabla u\|_2 = r.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.8, existe λ'_r tal que

$$I_\lambda(u) \geq 2\rho_r - |\lambda| C_3 \geq \frac{2\rho_r}{2} = \rho_r \text{ quando } \|\nabla u\|_2 = r, \text{ para todo } |\lambda| < \lambda'_r.$$

Donde temos o resultado. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1: Escolha $\lambda_0 > 0$ satisfazendo os Lemas 3.7 e 3.9. Então, para todo

$|\lambda| < \lambda_0$, o funcional I_λ tem a geometria do Passo da Montanha e satisfaz a condição (PS), donde existe u_λ ponto crítico de I_λ. Seja u_λ um ponto crítico de I_λ com $|\lambda| \leq \lambda_0$. Então, u_λ é solução de (3.9). Por outro lado, pelo Lema 3.9, temos que

$$0 < u_\lambda(x) \leq 2M \text{ em } \Omega.$$

Daí, u_λ é uma solução positiva de I_λ e, pela definição de $\tilde{g}$, temos que $\tilde{g}(x, u_\lambda) = g(x, u_\lambda)$. Além disso, como $|u_\lambda(x)| \leq 2M$ em Ω, temos pela definição de h que $h(u_\lambda) = 1$ e $h'(u_\lambda) = 0$. Portanto, u_λ é uma solução positiva de (3.1). Seja λ_j uma sequencia convergindo para zero. Então, pelo Lema 3.9, $\{u_{\lambda_j}\}$ converge, a menos de subsequencia, para uma solução u_0 de I_0 em $W^{2,\sigma}(\Omega)$ para todo $\sigma \in [1, \infty)$, onde $\{u_{\lambda_j}\}$ é solução Passo da Montanha de I_{λ_j}. Portanto, o item (i) está provado. Agora, suponha que $g(x, 0) \geq 0$ e $g(x, 0)$ é não-trivial em Ω. E defina $B := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\|_2 \leq r\}$. De (3.12), segue que

$$\inf_{u \in \partial B} I_\lambda(u) = \inf_{\|\nabla u\|_2 = r} I_\lambda(u) \geq \frac{\rho}{2} > 0 = I_\lambda(0),$$

onde r e ρ são como no Lema 3.7. Afirmamos que o mínimo de I_λ em B é atingido em um ponto interior $v_\lambda \in intB$. Com efeito, escolha uma sequencia $\{u_n\}$ em B tal que

$$I_\lambda(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in B} I_\lambda(u).$$

Como B é limitado, então $\{u_n\}$ é limitada e, a menos de subsequencia, temos que $u_n \rightharpoonup v_\lambda$ em Ω, com $v_\lambda \in B$. Além disso, como I_λ é fracamente semicontínuo inferiormente, tem-se

$$I_\lambda(v_\lambda) \leq \liminf_{n \to \infty} I_\lambda(u_n) = \lim_{n \to \infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{u \in B} I_\lambda(u).$$

Mas, $v_\lambda \in B$, então

$$I_\lambda(v_\lambda) = \inf_{u \in B} I_\lambda(u) \quad \Rightarrow \quad I_\lambda(v_\lambda) = \min_{u \in B} I_\lambda(u).$$

Em particular,

$$I_\lambda(v_\lambda) \leq I_\lambda(0) = 0 < \inf_{u \in \partial B} I_\lambda(u),$$

donde $v_\lambda \in intB$. O que prova a afirmação. Além disso,

$$I_\lambda(v_\lambda) \leq I_\lambda(0) = 0 < \frac{\rho}{2} \leq c_\lambda = I_\lambda(u_\lambda).$$

Portanto, $v_\lambda \neq u_\lambda$. Analogamente a demonstração do Lema 3.6 com $|\lambda|$ e $r > 0$ suficientemente pequenos, usa-se um argumento de bootstrap para provar que $\|v_\lambda\|_\infty \leq M$. Então, pelas definições de $\tilde{g}$ e h, tem-se

$$\tilde{g}(x,v_\lambda)=\begin{cases} g(x,0), \text{ se } v_\lambda(x)\leq 0\\ g(x,0), \text{ se } v_\lambda(x)\geq 0\end{cases}$$

e $h(v_\lambda)=1$, $h'(v_\lambda)=0$. Donde v_λ é uma solução de (3.1). Note que v_λ é não-trivial. De fato, se fosse $v_\lambda\equiv 0$ teríamos

$$f(x,v_\lambda)=f(x,0)=0 \text{ e } 0=-\Delta v_\lambda=\lambda g(x,v_\lambda)=\lambda g(x,0) \quad\Rightarrow\quad g(x,0)\equiv 0,$$

pois $\lambda\neq 0$. E isso é uma contradição, pois $g(x,0)$ é não trivial. Logo, v_λ é uma solução não trivial de (3.1). Mostra-se, ainda, que $v_\lambda(x)\geq 0$ para $\lambda>0$. De fato, defina $D:=\{x\in\Omega : v_\lambda(x)<0$ e suponha por absurdo que D é não-vazio. Como $f(x,s)=f(x,0)=0$ e $g(x,s)=g(x,0)\geq 0$ para $s<0$, tem-se para $\lambda>0$

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda=f(x,v_\lambda)+\lambda g(x,v_\lambda)\geq 0, \text{ em } D\\ \quad v_\lambda=0, \text{ sobre } \partial D\end{cases}$$

donde $v_\lambda\geq 0$ em D, o que contradiz a definição de D. Logo, D é vazio e $v_\lambda\geq 0$ em Ω. Pelo Lema 3.10, $\|\nabla v_\lambda\|_2$ converge para zero quando λ para zero. Então, $\|v_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada e, como é solução de (3.1), analogamente a demonstração do Lema 3.6, por um argumento de bootstrap, tem-se

$$v_\lambda\in W^{2,\sigma}(\Omega) \text{ para todo } \sigma\in[1,\infty).$$

Daí,

$$\|v_\lambda\|_{2,\sigma}\leq C\|\nabla v_\lambda\|_2\longrightarrow 0 \text{ quando } \lambda\to 0,$$

especialmente, $v_\lambda\to 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Logo, considerando $b>0$ como no Lema 3.10, temos que $v_\lambda(x)<b<u_\lambda(x)$ em Ω para $\lambda>0$ suficientemente pequeno. Finalmente, suponha que (3.2) é válida. Então, sendo $A:=\|v_\lambda\|_\infty$, existe $C>0$ tal que

$$\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{g(x,s)-g(x,0)}{s}\geq -C, \text{ para } 0\leq s\leq A$$

$$\Rightarrow\frac{g(x,s)-g(x,0)}{s}\geq -C, \text{ para } 0\leq s\leq A \text{ e } x\in\Omega$$
$$\Rightarrow g(x,s)-g(x,0)\geq -Cs, \text{ para } 0\leq s\leq A \text{ e } x\in\Omega.$$

Além disso, analogamente a demonstração do Lema 3.2, temos que existe $\tilde{C}>0$ tal que $f(x,s)\geq -\tilde{C}s$ para $0\leq s\leq A$ e $x\in\Omega$. Então, considerando $C_1=\min\{C,\tilde{C}\}>0$, temos que

$$\begin{aligned}
((1+\lambda)C_1 - \Delta)\, v_\lambda &= (1+\lambda)C_1 v_\lambda - \Delta v_\lambda \\
&= C_1 v_\lambda + \lambda C_1 v_\lambda + f(x, v_\lambda) + \lambda g(x, v_\lambda) - \lambda g(x,0) + \lambda g(x,0) \\
&\geq C_1 v_\lambda + \lambda C_1 v_\lambda - C_1 v_\lambda - \lambda C_1 v_\lambda + \lambda g(x,0) \\
&= \lambda g(x,0) \geq 0
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio do máximo forte, v_λ é estritamente positiva. $\square$

Apêndice A

Resultados básicos

Para tornar a leitura mais clara, enunciamos nesse apêndice alguns resultados usados nas demonstrações realizadas ao longo do nosso trabalho.

Teorema A.1 (Teorema da Alfândega)**.** *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Se $C \subset X$ é conexo, $C \cap A \neq \varnothing$ e $C \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, então $C \cap \partial A \neq \varnothing$.*

Demonstração. ver [3], p. 95. $\square$

Teorema A.2 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado e $u : U \to \mathbb{R}$ somável. Então,*

$$f\left(\frac{1}{|U|}\int_U u dx\right) \leq \frac{1}{|U|}\int_U f(u)dx.$$

Demonstração. ver [6], p. 621. $\square$

Teorema A.3 (Princípio do Máximo de Hopf)**.** *Sejam $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$) num domínio Ω, não necessariamente limitado. Então, se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω, então u é constante. Consequentemente, a função harmônica não pode atingir um máximo não-negativo (mínimo não-positivo) no interior de Ω, a menos que seja constante.*

Demonstração. ver [2], p. 15. $\square$

Lema A.4 (Brézis-Lieb, 1983)**.** *Sejam Ω um subespaço aberto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$. Se (u_n) for limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_n \longrightarrow u$ q.t.p. em Ω, então*

$$\lim_{n\to\infty}(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

Demonstração. ver [9], p. 10. $\square$

Lema A.5 (Brezis-Kato)**.** *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função carathéodory tal que*

$$|f(x,u)| \leq h(x)(1+|u|) \text{ para quase todo } x \in \Omega,$$

onde a função não-negativa $h(x) \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$ *e* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *é uma solução fraca de*

$$-\Delta u = f(x,u), \ \ em\ \Omega.$$

Então $u \in L^{\sigma}_{loc}(\Omega)$ *para todo* $\sigma < \infty$. *Se* $u \in H^1_0(\Omega)$ *e* $h(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, *então* $u \in L^{\sigma}(\Omega)$ *para todo* $\sigma < \infty$.

Demonstração. ver [9], p. 48. □

Teorema A.6 (ADN)**.** *Sejam* $f \in L^{\sigma}(\Omega)$ *com* $\sigma > 1$ *e* $u \in H^1_0(\Omega)$ *uma solução fraca de*

$$-\Delta u = f(x,u), \ \ em\ \Omega.$$

Então, $u \in W^{2,\sigma}(\Omega)$ *e existe* $C > 0$ *independente de* u *tal que*

$$\|u\|_{2,\sigma} \leq C\|f\|_r.$$

Demonstração. ver [13]. □

Teorema A.7 (Desigualdade Geral de Sobolev)**.** *Seja* Ω *um subconjunto aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$, *com fronteira* C^1. *Assuma que* $u \in W^{k,p}(\Omega)$.
1º) Se $k < \frac{N}{p}$ *então* $u \in L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$, *e tem-se a estimativa*

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

com a constante C *dependendo de* k, p, N *e* Ω.
2º) Se $k > \frac{N}{p}$ *então* $u \in C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *onde*

$$\gamma = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}, \ \ se\ \dfrac{N}{p}\ não\ for\ inteiro \\ algum\ número\ positivo\ menor\ que\ 1, \ \ se\ \dfrac{N}{p}\ for\ inteiro \end{cases}$$

e tem-se a estimativa

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

com a constante C *dependendo de* k, p, N *e* Ω.

Demonstração. ver [6], p. 270. □

Nesse trabalho, as equações elípticas semilineares consideradas foram da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u), \ \text{em } \Omega \\ \quad u = 0, \qquad \text{sobre } ,\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $N \geq 1$ e a aplicação $h(x,u) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$ possui um crescimento subcrítico, isto é, existem constantes $q, C > 0$ tais que

$$1 < q < \infty, \text{ se } N = 1, 2, \quad 1 < q < \frac{N+2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3,$$

e $|h(x,s)| \leq C(|s|^q + 1)$. Além disso, o funcional associado é definido por

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - H(x,u) \right) dx,$$

onde H é dada por

$$H(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt.$$

A proposição a seguir, justifica a existência da derivada de Frèchet de I.

Proposição A.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado. Então a aplicação $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$I(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - H(x,u) \right) dx$$

é de classe C^1.

Demonstração. ver [8]. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., v.14, p. 349-381, 1973.

[2] D. Gilbarg & N. S. Trundiger, *Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[3] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Ao livro técnico S.A. e editora da universidade de S. Paulo, Rio de Janeiro, 1970.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, 1979.

[6] L. C. Evans, *Partial Defferential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[7] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer Verlag, 4° Ed., 2007.

[8] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Berlim, 1996.

[9] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer Verlag , 1993.

[10] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in critical point theory with applications to differential equations*, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Miami , 1984.

[11] R. Kajikyia, *Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications to semilinear elliptic equations*, Springer Basel , v.19, n. 2, p. 159-175, 2012.

[12] R. Kajikyia, *Positive solutions of semilinear elliptic equations with small perturbations*, Proceeding of the American Mathematical Society , v. 141, n. 4, p. 1335-1342, 2013.

[13] S. Agmon, A. Douglis e L. Niremberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I*, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.

[14] Z. Liu, J. Sun , *Invariant sets of descending flow in critical point theory with applications to nonlinear differential equations*, J. Differ. Equ. 172 (2001), 257-299.