

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

# Desigualdade de Bohnenblust–Hille: estimativas e comportamento assintótico

Nacib Gurgel Albuquerque

JOÃO PESSOA – PB  
SETEMBRO DE 2012

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Desigualdade de Bohnenblust–Hille: estimativas e comportamento assintótico

por

Nacib Gurgel Albuquerque

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
da Universidade Federal da Paraíba como requi-  
sito parcial para obtenção do título de Mestre  
em Matemática.

João Pessoa – PB  
Setembro de 2012

A345d    Albuquerque, Nacib Gurgel.  
Desigualdade de Bohnenblust–Hille: estimativas e  
comportamento assintótico / Nacib Gurgel Albuquerque. – João  
Pessoa, 2012.  
91f.  
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.  
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.  
1. Matemática. 2. Desigualdade de Bohnenblust–Hille.  
3. Estimativas. 4. Comportamento assintótico.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Desigualdade de Bohnenblust–Hille: estimativas e comportamento assintótico

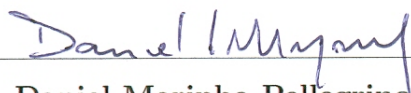
por

Nacib Gurgel Albuquerque

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 18 de setembro de 2012.

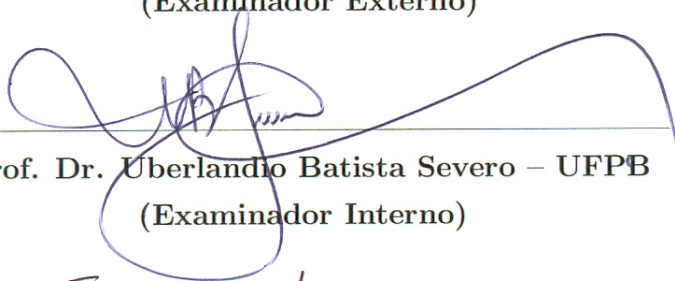
Banca Examinadora:



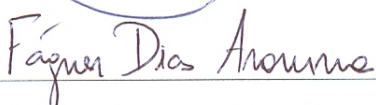
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB  
(Orientador)



Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho – UFCG  
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Uberlândia Batista Severo – UFPB  
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB  
(Suplente)

# Dedicatória

*Aos meus avós Florentino,  
Maria, Praxedes e Zezinha*

# Agradecimentos

Inicialmente a Deus por todos os momentos de êxito e desventura.

A minha família, em especial aos meus pais pelo apoio e amor incondicional.

A Karé, companheira, amiga e alma gêmea. Seu apoio irrestrito foi essencial para a conclusão dessa caminhada.

Ao estimado professor Daniel. Guardo gentil gratidão pelas ocasiões de sabedoria e amizade.

Aos todos os amigos do curso, cuja ajuda foi indispensável para conclusão dessa jornada. Em especial a Eudes Lima, Ricardo Burity, Gérsica, Danilo, Eudes Barboza, Gilson, Yane, Reginaldo, Pammella, Gustavo, José Carlos, Ricardo Pinheiro, Wallace, Sheldon, Vinicius, Esteban, Wanderson, Paulo, Chicó, dentre muitos outros.

Aos professores do departamento, pela amizade e oportunidades compartilhadas, em especial a Eduardo, Everaldo, Andrade, Napoleão, Fágner, Uberlandio e João Marcos. Reservo profunda admiração e consideração ao professor Abdoral de Souza Oliveira (in memoriam), pelo zelo de nos presentear com suas aulas repletas de sutil equilíbrio entre paciência e rigor.

À banca examinadora, pelos comentários que enriqueceram este trabalho.

Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

“ ...

– Severino retirante,  
deixe agora que lhe diga:  
eu não sei bem a resposta  
da pergunta que fazia,  
se não vale mais saltar  
fora da ponte e da vida;  
nem conheço essa resposta,  
se quer mesmo que lhe diga;  
é difícil defender,  
só com palavras, a vida,  
ainda mais quando ela é  
esta que vê, severina;  
mas se responder não pude  
à pergunta que fazia,  
ela, a vida, a respondeu  
com sua presença viva.  
E não há melhor resposta  
que o espetáculo da vida:  
vê-la desfiar seu fio,  
que também se chama vida,  
ver a fábrica que ela mesma,  
teimosamente, se fabrica,  
vê-la brotar como há pouco  
em nova vida explodida;  
mesmo quando é assim pequena  
a explosão, como a ocorrida;  
mesmo quando é uma explosão  
como a de há pouco, franzina;  
mesmo quando é a explosão  
de uma vida severina.”

Morte e Vida Severina,  
João Cabral de Melo Neto

# Resumo

A Desigualdade de Bohnenblust–Hille assegura a existência de uma função  $\mathcal{C} : \mathbb{N} \longrightarrow [1, +\infty)$ , que corresponde à cada inteiro positivo  $m$  uma constante  $\mathcal{C}(m) \in [1, +\infty)$  com a seguinte propriedade: quaisquer que sejam o natural  $N$  e a forma  $m$ -linear limitada  $U : \ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N \rightarrow \mathbb{K}$ , a sequência  $(U(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}))_{i_1, \dots, i_m=1}^N$  pertence à  $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$  e sua norma  $\frac{2m}{m+1}$  é limitada por  $\mathcal{C}(m) \cdot \|U\|$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma supremo. Afora o interesse matemático intrínseco, pois  $\mathcal{C}(m)$  independe de cada natural  $N$ , a diversidade e relevância das aplicações enriquecem ainda mais o resultado. No cenário atual, recentes estimativas para as constantes  $\mathcal{C}(m)$  apresentam comportamento assintótico ótimo e crescimento subexponencial, em contraste ao crescimento exponencial das estimativas conhecidas ao longo das várias décadas anteriores. Informações de valor a respeito das constantes ótimas (as menores possíveis com a propriedade descrita anteriormente) surgem, uma vez provado que essas também usufruirão de crescimento assintótico ótimo, caso este exista.

**Palavras-chave:** Bohnenblust–Hille, Estimativas, Comportamento Assintótico.

# Abstract

The Bohnenblust–Hille inequality guarantees the existence of a function  $\mathcal{C} : \mathbb{N} \longrightarrow [1, +\infty)$ , corresponding to each positive integer  $m$ , a constant  $\mathcal{C}(m)$  with the following property: regardless of the choice of the natural  $N$  and the bounded  $m$ -linear form  $U : \ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N \rightarrow \mathbb{K}$ , the sequence  $(U(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}))_{i_1, \dots, i_m=1}^N$  belongs to  $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$  and its  $\frac{2m}{m+1}$ -norm is bounded by  $\mathcal{C}(m) \cdot \|U\|$ , where  $\|\cdot\|$  denotes the supremum norm. Apart from the intrinsic mathematical interest, for  $\mathcal{C}(m)$  does not depend on each natural  $N$ , the diversity and relevance of the applications enrich the result further. On the actual scenario, recent explicit estimates for the constants  $\mathcal{C}(m)$  present optimal asymptotic behaviour and subexponential growth, in contrast to the exponential growth of the known estimates from the last decades. Valuable informations concerning the optimal constants (the lowest ones with the previous property stated) emerge, once proved that these also enjoy of an optimal asymptotic growth, if it exists.

**Keywords:** Bohnenblust–Hille, Estimates, Asymptotic Behaviour.

# Sumário

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                             | <b>xi</b> |
| <b>1 Operadores Absolutamente Somantes</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1 Somabilidade Incondicional e Absoluta . . . . .           | 1         |
| 1.2 Operadores Absolutamente Somantes . . . . .               | 6         |
| 1.3 Cotipo de Espaços de Banach . . . . .                     | 17        |
| 1.4 Operadores multilineares múltiplo somantes . . . . .      | 19        |
| <b>2 A Desigualdade de Bohnenblust–Hille</b>                  | <b>25</b> |
| 2.1 Contexto histórico . . . . .                              | 25        |
| 2.2 Caracterizações da desigualdade . . . . .                 | 27        |
| 2.3 Otimalidade do Expoente $\frac{2m}{m+1}$ . . . . .        | 34        |
| 2.4 Aparato Técnico . . . . .                                 | 36        |
| 2.5 Demonstração e estimativas da desigualdade . . . . .      | 46        |
| <b>3 Comportamento Assintótico</b>                            | <b>55</b> |
| 3.1 Bohnenblust e Hille encontram Euler . . . . .             | 56        |
| 3.2 Comportamento Assintótico das constantes $C_m$ . . . . .  | 58        |
| 3.3 Comportamento Assintótico das constantes ótimas . . . . . | 63        |
| <b>A Resultados Auxiliares</b>                                | <b>66</b> |
| <b>B Biografias</b>                                           | <b>71</b> |
| B.1 Einar Carl Hille . . . . .                                | 71        |
| B.2 Hans Hahn . . . . .                                       | 72        |
| B.3 Henri Frédéric Bohnenblust . . . . .                      | 73        |
| B.4 Stefan Banach . . . . .                                   | 73        |
| <b>Referências</b>                                            | <b>76</b> |

# Introdução

No ano de 1931, H. F. Bohnenblust e E. C. Hille provaram o que mais tarde viria a ser conhecido como a *Desigualdade (multilinear) de Bohnenblust–Hille*: a cada inteiro positivo  $m$  é associado uma constante  $C_m \geq 1$  que cumpre

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \cdot \sup_{x_1, \dots, x_m \in B^N} |T(x_1, \dots, x_m)|,$$

independentemente do natural  $N$  e da forma  $m$ -linear  $T \in \mathcal{L}(^m \ell_\infty^N; \mathbb{K})$ , onde  $\{e_i\}_{i=1}^N$ ,  $B^N$  representam a base canônica, bola unitária fechada de  $\ell_\infty^N$ , respectivamente.

A Desigualdade de Bohnenblust–Hille possui ainda uma versão polinomial válida para polinômios  $m$ -homogêneos. No contexto da Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes, a Desigualdade de Bohnenblust–Hille assegura que toda  $m$ -forma linear limitada é múltiplo  $(\frac{2m}{m+1}; 1)$ -somante, e ainda garante a existência de uma constante  $C_m$  que estima a dominação da norma  $\|\cdot\|_{\pi(\frac{2m}{m+1}, 1)}$  sobre a norma  $\|\cdot\|$  usual do supremo.

A importância das desigualdades multilinear e polinomial é ratificada com as aplicações em diferentes campos da Matemática e da Física, a saber em Teoria dos Operadores, Análise Complexa, Harmônica e de Fourier, Teoria Analítica dos Números e Teoria Quântica da Informação. Ao longo dos oitenta anos de sua publicação na *Annals of Mathematics*, a desigualdade permaneceu aparentemente esquecida, uma vez que apenas nos últimos retornou nos trabalhos de A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdá, M. Ounaïes, K. Seip, dentre outros, onde obtiveram-se, dentre vários outros resultados, melhores estimativas para as constantes  $C_m$ , além do passo de valor que foi dado ao descobrir-se que a versão polinomial da desigualdade é hipercontrativa (*vide* [8]), o que marcou o retorno do tema à *Annals*.

Nesse texto discorreremos sobre os artigos [13] e [30], os quais apresentam informações e descobertas a respeito do tema. Melhores estimativas para as constantes  $C_m$  são expostas, sobressaindo-se o comportamento assintótico ótimo das mesmas, significando precisamente que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 1,$$

uma vez que estimativas anteriores apresentavam crescimento exponencial. Mais ainda, de tal

comportamento irá concluir-se que as constantes ótimas (da Desigualdade de Bohnenblust–Hille) crescem a taxa subexponencial, e também usufruirão de comportamento assintótico ótimo, caso o limite da expressão anterior em destaque exista para as constantes ótimas.

## Estrutura do Texto

O capítulo um desenvolve informações básicas a respeito da Teoria dos Operadores Absolutamente Somantes, inserindo nesse contexto a forma original da Desigualdade de Bohnenblust–Hille. Apresentamos conceitos de somabilidade, noções de operadores absolutamente somantes, e falamos resumidamente sobre cotipo de espaços de Banach e operadores múltiplo somantes, generalização natural dos absolutamente somantes. Esse capítulo pode ser usado de forma independente do restante do texto.

No capítulo dois expomos um pouco do histórico da Desigualdade de Bohnenblust–Hille e sua importância. Veremos a demonstração da minimalidade do expoente da desigualdade e as diferentes maneiras de apresentá-la (na forma multilinear). Em seguida apresentaremos as ferramentas necessárias para enfim demonstrarmos o resultado e, ao mesmo tempo, apresentarmos as estimativas presentes em [30].

O texto culmina no último capítulo, que versa sobre o comportamento assintótico ótimo das estimativas apresentadas, sua influência no crescimento subexponencial e possível otimalidade no comportamento assintótico das constantes ótimas.

No apêndice A veremos alguns resultados independentes usados no decorrer do texto. Finalizamos o texto com o Apêndice B, onde saboreamos um pouco da história de vida de personagens marcantes que forneceram valiosas contribuições à área.

## Terminologia e Notações

No decorrer desse texto, consideraremos espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$  dos números reais  $\mathbb{R}$  ou dos complexos  $\mathbb{C}$ . Não faremos distinção entre os termos “aplicação”, “função”, “mapa” ou “operador”. O conjunto  $\mathfrak{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  das funções entre os conjuntos não vazios  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  será também representado por  $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ , conforme for conveniente. A imagem de um operador linear  $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  entre dois espaços vetoriais quaisquer  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{W}$ , em um vetor  $v \in \mathbb{V}$ , será expressa por  $T \cdot v$ , ou simplesmente  $Tv$ .

$\mathcal{N}$  sempre irá representar um espaço vetorial normado. No entanto, nosso maior interesse serão os espaços de Banach, sempre denotados por  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \dots$ , cujos elementos típicos serão  $x, y, z, \dots$ , respectiva e ocasionalmente com índices; e cuja norma será simbolizada por  $\|\cdot\|$ , ou  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  quando maior precisão for exigida.  $B_{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  serão a bola unitária fechada  $\{x \in \mathcal{X} ; \|x\| \leq 1\}$ , e a esfera unitária  $\{x \in \mathcal{X} ; \|x\| = 1\}$ , respectivamente.  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  a coleção dos operadores

lineares limitados  $u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  com norma  $\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in B_{\mathcal{X}}} \|u \cdot x\|$ . Usaremos  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  em vez de  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ , e  $\mathcal{X}'$  para o dual topológico  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ . Mais geralmente,  $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$  representará o papel da coleção dos operadores  $m$ -lineares limitados  $T : \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m \longrightarrow \mathcal{Y}$ , com norma  $\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in B_{\mathcal{X}_1} \times \dots \times \mathcal{X}_m} \|T \cdot x\|$ . Quando  $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ , reservaremos a denominação *m-forma* limitada para tais operadores. Escreveremos  $\mathcal{L}({}^m\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ , quando os  $\mathcal{X}_i$  forem o mesmo  $\mathcal{X}$ .

Por *sequência escalar*, queremos dizer uma sequência cujas entradas são escalares do corpo  $\mathbb{K}$  em questão, ou mais precisamente, um elemento de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Salvo menção explícita, os números reais  $p, q$  serão tais que  $1 \leq p, q \leq \infty$ . O *expoente conjugado* de  $p \in (1, \infty)$  será  $p'$ , i.e., o real que satisfaz  $1/p + 1/p' = 1$ . Adotaremos  $1' = \infty$ . O intervalo fechado  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  denotar-se-á por  $I$ .

Destacamos alguns espaços familiares que surgirão ao longo do texto:

$\ell_p \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} ; \sum_n |\alpha_n|^p < \infty\}$ , quando  $p \in [1, \infty)$ ;

$\ell_{\infty}$  reúne as sequências escalares limitadas;

$\ell_p^N \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p ; \alpha_i = 0, \text{ para cada } i \geq N + 1\} = \mathbb{K}^N$  (do ponto de vista conjuntista);

$c_0$ , as sequências escalares que convergem para  $0_{\mathbb{K}}$ ;

$c_{00}$ , as sequência escalares que possuem um número finito de entradas não nulas.

$L_p \stackrel{\text{def}}{=} L_p(I, \mathcal{B}, \mu)$ , com  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mathcal{B}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $I$  e  $\mu$  a medida de Lebesgue.

# Capítulo 1

## Operadores Absolutamente Somantes

O propósito desse capítulo é apresentar conceitos e definições referentes à Teoria dos Espaços de Banach e dos Operadores Absolutamente Somantes, necessários para o desenvolvimento do texto nos capítulos posteriores, de modo que venha a servir como resumo independente a ser consultado por aqueles que buscam noções, alguns resultados principais e comentários.

A primeira seção introduz a ideia de somabilidade de sequências, e a relaciona com os conceitos de completude e dimensão do espaço. Na seção seguinte, outras noções de somabilidade são apresentadas, juntamente a alguns espaços de sequências essenciais para chegarmos aos operadores absolutamente somantes, ilustrados por alguns exemplos, além dos ilustres Teorema de Grothendieck e o da Dominação de Pietsch. A terceira seção ocupa-se, sucintamente, da definição de cotipo de um espaço de Banach. Por fim, à última reservamos os operadores múltiplo somantes, que generalizam os absolutamente somantes e contextualizam o Teorema de Bohnenblust–Hille na teoria atual.

### 1.1 Somabilidade Incondicional e Absoluta

Iniciamos o texto tratando de propriedades intrínsecas da estrutura dos espaços de Banach: somabilidades incondicional e absoluta de sequências, uma vez que revelam-se como maneiras de caracterizar aqueles. Apresentamos algumas caracterizações das sequências incondicionalmente somáveis, e como o afamado Teorema de Dvoretzky–Rogers estabelece analogia com a dimensão do espaço e a relação entre somas absolutas e incondicionais.

**Definição 1.1.** Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no espaço vetorial normado  $\mathcal{N}$  é dita *absolutamente somável*, se  $\sum x_n$  é absolutamente convergente; e *incondicionalmente somável*, quando  $\sum x_{\sigma(n)}$  converge, qualquer que seja a permutação  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Nesse momento é importante estabelecer que sequências incondicionalmente convergentes possuem um bom comportamento, no sentido de que não apenas suas somas parciais convergem, independente da ordem que for estabelecida, mas como esse limite é único.

**Proposição 1.1.** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência incondicionalmente somável em  $\mathcal{N}$ . Para quaisquer permutações  $\sigma, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , teremos  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\varphi(n)}$ .

*Demonstração.* Sequências escalares  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  incondicionalmente somáveis são absolutamente somáveis e o limite da soma é único, isto é,  $\sum_n \alpha_{\sigma(n)} = \sum_n \alpha_{\varphi(n)}$ , conforme [20, Teorema IV.22] prova o caso real, e podemos estendê-lo aos complexos trabalhando coordenada a coordenada. Dado qualquer  $f \in \mathcal{N}'$ , por continuidade,  $f(\sum_n x_{\sigma(n)}) = \sum_n f(x_{\sigma(n)}) = \sum_n f(x_{\varphi(n)}) = f(\sum_n x_{\varphi(n)})$ . Portanto, o Teorema de Hahn–Banach nos assegura que  $\sum_n x_{\sigma(n)} = \sum_n x_{\varphi(n)}$ .  $\square$

Como já comentado anteriormente, na reta real sequências absolutamente somáveis são somáveis. Banach percebeu que isso não só é preservado pela completude (na verdade, a somabilidade incondicional de sequências absolutamente somáveis), como também é suficiente para caracterizá-la. Mais precisamente,

**Proposição 1.2.** Seja  $\mathcal{X}$  um espaço vetorial normado. São equivalentes:

- i.  $\mathcal{X}$  é um espaço de Banach;
- ii. Toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável;
- iii. Toda sequência absolutamente somável é somável.

*Demonstração.* A implicação (ii)  $\Rightarrow$  (iii) é clara. Vejamos (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sejam  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma permutação e  $(x_n)_n$  absolutamente somável. Por  $\sum \|x_n\|$  ser absolutamente convergente em  $\mathbb{R}$ ,  $\sum \|x_{\sigma(n)}\|$  converge, e por sua vez a sequência formada por suas somas parciais é de Cauchy. Por conseguinte, para  $m > n$  suficientemente grandes

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^m \|x_{\sigma(k)}\| \geq \left\| \sum_{k=n+1}^m x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^m x_{\sigma(k)} \right\|$$

isso mostra que  $(\sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)})_n$  é de Cauchy no espaço de Banach  $\mathcal{X}$ , portanto, é somável. Por fim, (iii)  $\Rightarrow$  (i): dada uma sequência de Cauchy  $(x_n)_n$ , é possível obtermos uma sequência de inteiros positivos estritamente crescente  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ . Com isso,  $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})_k$  é absolutamente somável, logo somável. A convergência de  $(x_{n_k})_k$  segue de  $x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{i=1}^k (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$  e acarreta a convergência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , por ser uma sequência de Cauchy com uma subsequência convergente.  $\square$

J. P. G. L. Dirichlet provou que a noção de sequências absolutamente e incondicionalmente somáveis coincidem nos reais. Usando a convergência coordenada a coordenada, estende-se esse resultado para espaços de dimensão finita. No entanto, em dimensão infinita o cenário é outro, como ilustrado no exemplo a seguir. A fim de consolidar o teorema anterior. Também exibimos uma sequência absolutamente somável que não é somável.

**Exemplo 1.1.** Sejam  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$  e  $e_i \stackrel{\text{def}}{=} (\delta_{in})_{n \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  os vetores unitários canônicos do espaço de seqüências escalares  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Em  $\ell_2$ , a seqüência  $(\alpha_n e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é incondicionalmente somável pois  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = (\alpha_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ , para qualquer permutação  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ; mas não absolutamente somável, a menos que  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$ . No espaço  $c_{00}$  das seqüências escalares eventualmente nulas,  $(\frac{e_n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  é absolutamente somável, mas não somável, uma vez que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e_n}{n^2} = \left( \frac{1}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \notin c_{00} \quad (\text{converge fora do espaço}).$$

Salientamos que sempre é possível encontrar seqüências incondicional e não-absolutamente somáveis em espaços de Banach com dimensão infinita, sendo essa propriedade, portanto, uma maneira de caracterizá-los. Para tanto, basta tomarmos uma seqüência (de escalares) que pertença a  $\ell_2$  mas não a  $\ell_1$ , como nos assegura um resultado devido a A. Dvoretzky e A. Rogers, cuja prova pode ser encontrada em [12, Theorem 1.2] e [6, Teorema 10.1.12]. Basicamente nos informa que em dimensão infinita existem seqüências incondicionalmente somáveis “iguais” às seqüências de  $\ell_2$ .

**Teorema de Dvoretzky–Rogers.** Suponha que  $\mathcal{X}$  possua dimensão infinita. Dada qualquer seqüência  $(\alpha_n)_n \in \ell_2$ , existe uma seqüência incondicionalmente somável  $(x_n)_n$  em  $\mathcal{X}$ , que cumpre  $\|x_n\| = |\alpha_n|$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

No que diz respeito às seqüências incondicionalmente somáveis, existe um vasto arsenal de caracterizações elementares, úteis e até surpreendentes. No resultado a seguir, apresentamos algumas de caráter manipulativo, segundo [12].

**Teorema 1.3.** *Seja  $(x_n)_n$  uma seqüência em  $\mathcal{X}$ . São equivalentes:*

- i.  $(x_n)_n$  é incondicionalmente somável;
- ii. Para todo  $\varepsilon$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , tal que se  $F \subset \mathbb{N}$  é finito e  $\min F > n_\varepsilon$ , então  $\|\sum_{n \in F} x_n\| < \varepsilon$ ;
- iii.  $(x_n)_n$  é subsérie somável, isto é, para qualquer seqüência estritamente crescente de inteiros positivos  $(k_n)_n$ ,  $(x_{k_n})_n$  é somável;
- iv.  $(x_n)_n$  é sinal somável, isto é, para qualquer seqüência  $(\xi_n)_n \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $(\xi_n x_n)_n$  é somável.

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponhamos que (ii) não seja válido. Então existe  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade: para cada  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos  $F_k \subset \mathbb{N}$  finito, com  $\min F_k > k$  e  $\|\sum_{n \in F_k} x_n\| \geq \delta$ . Com isso, construímos a seqüência  $(F_k)_k$  de conjuntos finitos  $F_k \subset \mathbb{N}$  tais que  $\max F_k < \min F_{k+1}$  e  $\|\sum_{n \in F_k} x_n\| \geq \delta$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que existe uma permutação  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que leva cada intervalo

$$I_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cap [\min F_k, \min F_k + \text{card } F_k)$$

em  $F_k$ , onde  $\text{card } F_k$  significa a cardinalidade de  $F_k$ . De fato, note que  $\text{card } F_k = \text{card } I_k$ . Observemos que, se  $F \subset \mathbb{N}$  é finito, então  $\min F + \text{card } F \leq 1 + \max F$ , ocorrendo a igualdade se, e somente se

$$F = \{\min F, 1 + \min F, \dots, \min F + \text{card } F - 1\} = \mathbb{N} \cap [\min F, \min F + \text{card } F).$$

Consideremos  $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cap [\min F_k, \min F_{k+1})$ . Por  $\min F_k + \text{card } F_k \leq \max F_k + 1 \leq \min F_{k+1}$ ,  $F_k, I_k \subset J_k$ , é lícito definirmos  $\sigma_k : J_k \rightarrow J_k$  biunívoca que cumpre  $\sigma_k(I_k) = F_k$ . Como  $\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$  é uma união disjunta, onde  $J_0 = \{1, \dots, \min F_1 - 1\}$ , caso  $\min F_1 > 1$ , e  $J_0 = \emptyset$ , caso contrário; obtemos a permutação  $\sigma$  desejada por colagem das  $\sigma_k$ , isto é,  $\sigma(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_k(n)$ , para  $n \in J_k$ . Outro modo de fazer isso é considerar que os conjuntos  $F_k$  cumpram  $\max F_k + 1 < \min F_{k+1}$ , dessa forma

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_k I_k, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_k F_k, \quad \mathbb{N} \setminus A \quad \text{e} \quad \mathbb{N} \setminus B$$

são infinitos, uma vez que  $\max F_k + 1 \notin I_k, I_{k+1}, F_k, F_{k+1}$ . Logo existem bijeções  $\sigma_1 : A \rightarrow B$  (que leva  $I_k$  em  $F_k$ ) e  $\sigma_2 : \mathbb{N} \setminus A \rightarrow \mathbb{N} \setminus B$ , que podem ser “coladas” para obtermos a permutação  $\sigma$  procurada.

Provaremos que a sequência formada pelas somas parciais  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}$  não é de Cauchy em  $\mathcal{X}$ , o que contraria (i) e, portanto, conclui a prova. De fato, utilizando o  $\delta > 0$  anterior, dado  $k \in \mathbb{N}$ , consideremos o  $F_k \subset \mathbb{N}$  finito correspondente, ou seja, que cumpre  $\min F_k > k$  e  $\|\sum_{n \in F_k} x_n\| \geq \delta$ . Para  $p = \min F_k - 1$  e  $q = \min F_k + \text{card } F_k - 1$ , temos  $q \geq p + 1 > k$  e

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{i=p+1}^q x_{\sigma(i)} \right\| = \left\| \sum_{n \in F_k} x_n \right\| \geq \delta.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Dados  $\varepsilon > 0$  e  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutação seja  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}$  com a propriedade em (ii). Tomemos  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\{i\}_{i=1}^{N_\varepsilon} \subset \{\sigma(i)\}_{i=1}^{N_\varepsilon}$ . Com isso, se  $q > p > N_\varepsilon$  e  $M = \{\sigma(i)\}_{i=p+1}^q$ , então  $\sigma(p+1), \sigma(q) > n_\varepsilon$ ;  $\min M > n_\varepsilon$  e  $\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{i=p+1}^q x_{\sigma(i)} \right\| = \left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$ . Logo  $(S_n)_n$  é de Cauchy e, portanto,  $(x_{\sigma(n)})_n$  é somável.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Fixado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , tal que  $\sum_{n \in M} x_n < \varepsilon$ , sempre que  $M \subset \mathbb{N}$  for finito e  $\min M > n_\varepsilon$ . Se  $(k_n)_n$  é uma sequência de naturais estritamente crescente, então  $k_n \geq n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $q > p > n_\varepsilon \Rightarrow k_q \geq q > n_\varepsilon$  e  $k_{p+1} \geq p + 1 > n_\varepsilon$ , logo  $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{k_{p+1}, \dots, k_q\}$  cumpre  $\min M_0 > n_\varepsilon$ , daí  $\left\| \sum_{i=p+1}^q x_{k_i} \right\| = \left\| \sum_{n \in M_0} x_n \right\| < \varepsilon$ . Portanto,  $(x_{k_n})_n$  é somável.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Sejam  $(x_n)_n$  subsérie somável e  $(\xi_n)_n$  uma sequência formada por  $\pm 1$ . Consideremos  $S^+, S^-$  o conjunto de índices de  $(\xi_n)_n$  cujos termos correspondentes são positivos, negativos,

respectivamente. Como ambas as séries  $\sum_{n \in S^+} x_n$  e  $\sum_{n \in S^-} x_n$  convergem, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, se  $q > p > n_\varepsilon$ , então

$$\left\| \sum_{\substack{n=p+1 \\ n \in S^+}}^q x_n \right\| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{\substack{n=p+1 \\ n \in S^-}}^q x_n \right\| < \varepsilon/2.$$

Consequentemente, para  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ , e  $q > p > n_\varepsilon$ ,

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^q \xi_n x_n \right\| = \left\| \sum_{\substack{n=p+1 \\ n \in S^+}}^q x_n - \sum_{\substack{n=p+1 \\ n \in S^-}}^q x_n \right\| \leq \left\| \sum_{\substack{n=p+1 \\ n \in S^+}}^q x_n \right\| + \left\| \sum_{\substack{n=p+1 \\ n \in S^-}}^q x_n \right\| < \varepsilon.$$

Portanto,  $(x_n)_n$  é sinal somável.

(iv)  $\Rightarrow$  (ii): Suponhamos que existam  $\delta > 0$  e uma sequência  $(M_k)_k$  de conjuntos finitos  $M_k \subset \mathbb{N}$  tais que  $\max M_k < \min M_{k+1}$  e  $\|\sum_{n \in M_k} x_n\| \geq \delta$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Definamos  $M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$  e  $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \chi_M(n) - \chi_{\mathbb{N} \setminus M}(n)$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ , isto é,  $\xi_n = 1$ , se  $n \in M$ , ou  $\xi_n = -1$ , caso contrário. Logo  $\sum_n \xi_n x_n$  e  $\sum_n x_n$  convergem, e asseguram a convergência da série cujas somas parciais são  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n (1 + \xi_i) x_i$ . Fixado  $m \in \mathbb{N}$ , tomemos  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $m < \min M_k$ . Teremos

$$\left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1 + \xi_n) x_n \right\| = \left\| \sum_{\substack{n=\min M_k \\ n \in M_k}}^{\max M_k} 2x_n + \sum_{\substack{n=\min M_k \\ n \notin M_k}}^{\max M_k} 0 \cdot x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in M_k} 2x_n \right\| \geq 2\delta,$$

o que contraria  $(S_n)_n$  ser de Cauchy. □

Por meio dessas caracterizações, mais uma vez concluímos a unicidade das somas incondicionais, como já visto na Proposição 1.1.

**Corolário 1.4.** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência incondicionalmente somável em  $\mathcal{X}$ . Qualquer que seja a permutação  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ;  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\sigma(n)}$ .

*Demonstração.* Do item (ii) anterior, segue que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $M \subset \mathbb{N}$  finito e  $\min M > n_\varepsilon$  implicam  $\|\sum_{n \in M} x_n\| < \varepsilon$ . Seja  $L \in \mathbb{N}$  tal que  $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(L)\}$  (podemos supor que  $L > n_\varepsilon$ ). Para  $N > L$ ,  $M_1 = \{1, \dots, N\} \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$  e  $M_2 = \{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\} \setminus \{1, \dots, N\}$  satisfazem  $\min M_1; \min M_2 > n_\varepsilon$ , logo

$$\left\| \sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^N x_{\sigma(n)} \right\| = \left\| \sum_{n \in M_1} x_n - \sum_{n \in M_2} x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M_2} x_n \right\| < 2\varepsilon.$$

Isso significa justamente que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^N x_{\sigma(n)} \right\| = 0$ . Por ambas séries  $\sum_n x_n$  e  $\sum_n x_{\sigma(n)}$  convergirem, e a norma ser contínua, o resultado segue.  $\square$

## 1.2 Operadores Absolutamente Somantes

Nesta seção, iremos expor um dos principais conceitos desse texto, a saber os operadores absolutamente  $(p; q)$ -somantes, e para tanto necessitaremos de outras definições de somabilidade que generalizam as da seção anterior, bem como de alguns espaços de sequências úteis e interessantes. Mencionamos outra forma do Teorema de Dvoretzky–Rogers, inserida nesses espaços de sequências. Veremos: maneiras equivalentes de identificar os operadores absolutamente somantes; que a coleção desses, munida da norma adequada, é cativante (é um espaço de Banach); que essa norma domina a norma natural dos operadores limitados; exemplos de tais operadores; e por fim fazemos comentários sobre o Teorema de Grothendieck e o da Dominação de Pietsch, que são alguns resultados principais do tema.

**Definição 1.2.** Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{X}$  é *fortemente  $p$ -somável*, se a sequência de escalares correspondente  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  for um elemento de  $\ell_p$ .

O conjunto das sequências fortemente  $p$ -somáveis em  $\mathcal{X}$ , denotado por

$$\ell_p(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} ; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é fortemente } p\text{-somável} \},$$

e munido das operações pontuais, é um espaço vetorial cuja norma natural é

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|,$$

para  $1 \leq p < \infty$  e  $p = \infty$ , respectivamente, como pode ser verificado sem maiores dificuldades. Percebemos que a norma de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(\mathcal{X})$  nada mais é que a norma de  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\ell_p$ . No caso particular em que  $\mathcal{X} = \mathbb{K}$ , nos reduzimos a  $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ .

**Teorema 1.5.**  $(\ell_p(\mathcal{X}), \|\cdot\|_p)$  é Banach.

*Demonstração.* Trabalharemos apenas com o caso  $1 \leq p < \infty$ , uma vez que adaptando-se o argumento, obtem-se o caso  $p = \infty$ . Seja  $(x^n)_n$  uma sequência de Cauchy em  $\ell_p(\mathcal{X})$ , onde cada  $x^n = (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}} = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in \ell_p(\mathcal{X})$ . Para  $\varepsilon > 0$  arbitrário, e  $k, l$  naturais suficientemente grandes

$$\varepsilon > \|x^k - x^l\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^k - x_n^l\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \|x_n^k - x_n^l\|.$$

Logo, para cada natural  $n$  fixado,  $(x_n^k)_k$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{X}$  e, portanto, existe  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n \in \mathcal{X}$ . Tomando o limite  $k \rightarrow \infty$  na expressão destacada, obtemos

$$\varepsilon \geq \|x^k - x\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^k - x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde  $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_n)_n$ . Isso significa precisamente que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$  e  $x^k - x \in \ell_p(\mathcal{X})$ , e sendo este um espaço vetorial, concluímos que  $x \in \ell_p(\mathcal{X})$ .  $\square$

**Proposição 1.6.** O conjunto das sequências em  $\ell_p(\mathcal{X})$  com um número finito de termos não nulos é um subespaço denso (em  $\ell_p(\mathcal{X})$ ).

*Demonstração.* Dados  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p(\mathcal{X})$  e  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente,  $(\sum_{n > k+1} \|x_n\|^p)^{1/p} < \varepsilon$ , para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Então  $\xi_k \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_k, 0, \dots)$  cumpre  $\|x - \xi_k\|_p < \varepsilon$ . Claramente a condição de subespaço é satisfeita.  $\square$

**Definição 1.3.** Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{X}$  é *fracamente  $p$ -somável*, quando a sequência de escalares  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  for um elemento de  $\ell_p$ , para cada funcional linear contínuo  $f \in \mathcal{X}'$ .

O conjunto das sequências fracamente  $p$ -somáveis em  $\mathcal{X}$ , denotado por

$$\ell_p^w(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é fracamente } p\text{-somável}\},$$

possui uma estrutura linear natural que, como pode-se verificar usando a estrutura linear de  $\ell_p$ , e mais ainda, uma norma conveniente para os casos  $1 \leq p < \infty$ ;  $p = \infty$ , respectivamente, definida por

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{p,w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty,w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_{\infty}.$$

Como no caso da  $p$ -somabilidade forte, percebe-se que  $\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p$ . Não é imediato que o supremo acima seja finito. Para tanto, recorremos ao Teorema do Gráfico Fechado. De fato, fixado  $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ , definamos o operador  $u_x : \mathcal{X}' \rightarrow \ell_p$  por  $u_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x_n))_n$ , que certamente é bem-definido e linear. Provemos que é contínuo: se  $f_n \rightarrow f \in \mathcal{X}'$  e  $u_x(f_n) \rightarrow y = (y_n)_n \in \ell_p$ , então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_k(x_n) \xrightarrow{k} f(x_n)$  e  $f_k(x_n) \xrightarrow{k} y_n$ , logo  $u_x(f) = (f(x_n))_n = (y_n)_n = y$  significa que  $\text{Graf}(u_x)$  é fechado e, portanto,  $u_x$  é contínua. Com isso, deduzimos que o supremo é finito, pois

$$\|x\|_{p,w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(u_x(f))\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \|u_x\| < \infty.$$

Por fim, vejamos que  $\|\cdot\|_{p,w}$  uma norma em  $\ell_p^w(\mathcal{X})$ :

$$0 = \|(x_n)_n\|_{p,w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p$$

implica  $(f(x_n))_n = 0_{\ell_p}$ , para cada funcional limitado  $f \in B_{\mathcal{X}'}$ , logo o Teorema de Hahn-Banach assegura que  $(x_n)_n = 0_{\ell_p}$ , onde  $0_{\ell_p} = (0, 0, \dots)_n$  é o elemento nulo de  $\ell_p$ ; para cada  $g \in B_{\mathcal{X}'}$  e para cada sequências  $(x_n)_n, (y_n)_n$  em  $\ell_p^w(\mathcal{X})$ ,

$$\begin{aligned} \|(g(x_n + y_n))_n\|_p &= \|(g(x_n))_n + (g(y_n))_n\|_p \\ &\leq \|(g(x_n))_n\|_p + \|(g(y_n))_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_{p,w} + \|(y_n)_n\|_{p,w}, \end{aligned}$$

onde as duas últimas desigualdades devem-se à desigualdade triangular da norma em  $\ell_p$ , e a definição de  $\|\cdot\|_{p,w}$ , respectivamente; para cada escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e sequência  $(z_n)_n \in \ell_{p,w}(\mathcal{X})$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot (z_n)_n\|_{p,w} &= \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(\alpha z_n))_n\|_p = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|\alpha(f(z_n))_n\|_p \\ &= \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |\alpha| \cdot \|(f(z_n))_n\|_p = |\alpha| \cdot \|(z_n)_n\|_{p,w}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.7.**  $(\ell_p^w(\mathcal{X}), \|\cdot\|_{p,w})$  é Banach.

*Demonstração.* Sejam uma sequência de Cauchy  $(x^n)_n$  em  $\ell_p^w(\mathcal{X})$  e  $\varepsilon > 0$ . Para  $k, l \in \mathbb{N}$  suficientemente grandes teremos

$$\varepsilon > \|x^k - x^l\|_{p,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n^l))_n\|_p \stackrel{\forall n \in \mathbb{N}}{\geq} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x_n^k - x_n^l)| \stackrel{\text{HB}}{=} \|x_n^k - x_n^l\|_{\mathcal{X}},$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  (a sigla HB significa, daqui por diante, que utilizamos o Teorema de Hahn-Banach). Logo, fixado um natural  $n$ ,  $(x_n^k)_k$  é de Cauchy em  $\mathcal{X}$  e, por conseguinte, existe  $\lim_k x_n^k = x_n \in \mathcal{X}$ . Provaremos que  $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$  e  $x^k \xrightarrow{k} x$ , e isso concluirá a demonstração. Inicialmente, consideremos o caso em que  $1 \leq p < \infty$ : para cada  $f \in B_{\mathcal{X}'}$  e  $k, j \in \mathbb{N}$  grandes,

$$\varepsilon^p > \|x^k - x^j\|_{p,w}^p = \left( \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n^j))_n\|_p \right)^p \geq \sum_{n=1}^N |f(x_n^k - x_n^j)|^p.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obteremos  $\sum_{n=1}^N |f(x_n - x_n^j)|^p \leq \varepsilon^p, \forall f \in B_{\mathcal{X}'}$  e  $k$  grande, ou seja,  $\|x^k - x\|_{p,w} \leq \varepsilon$ , com  $k$  grande. Consequentemente,  $x^k \xrightarrow{\|\cdot\|_{p,w}} x$  e  $x \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ .

Resta-nos o caso  $p = \infty$ , que, não por acaso, foi abordado por último: provaremos que  $\ell_\infty(\mathcal{X}) = \ell_\infty^w(\mathcal{X})$ . De fato, se  $(x_n)_n$  é uma sequência limitada em  $\mathcal{X}$ , então

$$\|(x_n)_n\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \|x_n\| \stackrel{\text{HB}}{=} \sup_n \left( \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)| \right) = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sup_n |f(x_n)| \right) \stackrel{\text{def}}{=} \|(x_n)_n\|_{\infty, w}$$

e isso justifica a inclusão  $\ell_\infty(\mathcal{X}) \subset \ell_{\infty, w}(\mathcal{X})$ . Com o resultado seguinte, obtemos a outra inclusão e, portanto, tais espaços são idênticos um ao outro, e ainda, a expressão destacada prova que as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_{\infty, w}$  são, de fato, a mesma. A troca dos supremos na expressão destacada pode ser justificada por: para cada  $x_n$ , o Teorema de Hahn–Banach nos assegura a existência de  $f_{x_n} \in B_{\mathcal{X}'}$ , que cumpre  $\|x_n\| = f_{x_n}(x_n)$ ; logo,

$$\|x_n\| = f_{x_n}(x_n) \leq \sup_n |f_{x_n}(x_n)| \leq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sup_n |f(x_n)| \right)$$

implica a desigualdade

$$\sup_n \|x_n\| = \sup_n \left( \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x_n)| \right) \leq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sup_n |f(x_n)| \right);$$

a desigualdade contrária é simples de ser verificada e, portanto, ocorre a igualdade na troca dos supremos.  $\square$

**Proposição 1.8.**  $\ell_p(\mathcal{X})$  é subespaço (fechado) de  $\ell_p^w(\mathcal{X})$ .

*Demonstração.* Basta verificarmos a inclusão. Se  $(x_n)_n \in \ell_p(\mathcal{X})$  e  $f \in B_{\mathcal{X}'}$ , então  $\|(f(x_n))_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_p$ . Isso acarreta  $\|(x_n)_n\|_{p, w} \leq \|(x_n)_n\|_p$ , que por sua vez implica  $(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ .  $\square$

Ressaltando o que demonstramos no teorema anterior,

**Corolário 1.9.**  $\ell_\infty(\mathcal{X}) = \ell_\infty^w(\mathcal{X})$  e  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty, w}$ .

Informamos que, quando  $1 \leq p < \infty$ ,  $\ell_p(\mathcal{X}) = \ell_p^w(\mathcal{X})$  se, e somente se,  $\mathcal{X}$  é um espaço (de Banach) com dimensão finita, conforme nos garante outra forma do resultado de Dvoretzky e Rogers. Portanto, a inclusão da proposição anterior é estrita, a menos que o espaço possua dimensão finita. Da mesma forma sucedida com as sequências incondicional não-absolutamente somáveis, a existência de sequências fraca e não fortemente  $p$ -somáveis é uma caracterização dos espaços de dimensão infinita, como Dvoretzky e Rogers (também) verificaram na versão fraca do resultado enunciado anteriormente, cuja prova pode ser vista em [12, Theorem 2.18].

**Teorema de Dvoretzky–Rogers (fraco).** Seja  $1 \leq p < \infty$ . Todo espaço de Banach com dimensão infinita contém uma sequência fracamente  $p$ -somável, que falha em ser fortemente  $p$ -somável.

Quando  $p \in [1, \infty)$ , é útil trabalhamos com o espaço

$$\ell_p^u(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p^w(\mathcal{X}) ; \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_n)_{n > k}\|_{p,w} = 0 \right\},$$

pois o caso particular  $p = 1$  revelar-se-á sendo o conjunto das seqüências incondicionalmente convergentes, como veremos em seguida (daí talvez justifica-se o “u” de *unconditional*).

**Lema 1.10.** Se  $(\alpha_n)_n$  é uma seqüência de escalares e  $c > 0$  são tais que, para cada conjunto  $M \subset \mathbb{N}$  finito,  $\left| \sum_{n \in M} \alpha_n \right| \leq c$ , então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| \leq 4c$ .

*Demonstração.* Dados  $M \subset \mathbb{N}$  finito, escrevamos  $M = M_{Re}^+ \cup M_{Re}^- \cup M_{Im}^+ \cup M_{Im}^-$ , onde

$$M_{Re}^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in M ; \operatorname{Re}(\lambda_n) \geq (<)0\} \quad \text{e} \quad M_{Im}^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in M ; \operatorname{Im}(\lambda_n) \geq (<)0\}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in M} |\lambda_n| &\leq \sum_{n \in M} |\operatorname{Re}(\lambda_n)| + \sum_{n \in M} |\operatorname{Im}(\lambda_n)| \\ &= \sum_{n \in M_{Re}^+} \operatorname{Re}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{Re}^-} (-\operatorname{Re}(\lambda_n)) + \sum_{n \in M_{Im}^+} \operatorname{Im}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{Im}^-} (-\operatorname{Im}(\lambda_n)) \end{aligned}$$

Além disso,  $\left| \sum_{n \in M_{Re}^+} \operatorname{Re}(\lambda_n) \right| = \left| \operatorname{Re} \left( \sum_{n \in M_{Re}^+} \lambda_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in M_{Re}^+} \lambda_n \right| \leq c$ . O mesmo argumento nos leva a  $\left| \sum_{n \in M_{Re}^-} (-\operatorname{Re}(\lambda_n)) \right|, \left| \sum_{n \in M_{Im}^+} \operatorname{Im}(\lambda_n) \right|, \left| \sum_{n \in M_{Im}^-} (-\operatorname{Im}(\lambda_n)) \right| \leq c$ . Tomando  $M = \{1, \dots, k\}$ , com  $k \in \mathbb{N}$  arbitrário, obtemos  $\sum_{n=1}^k |\lambda_n| \leq 4c$ , e daí deduz-se o resultado.  $\square$

**Proposição 1.11.** Uma seqüência  $(x_n)_n \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$  é incondicionalmente somável se, e somente se,  $(x_n)_n \in \ell_1^u(\mathcal{X})$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $(x_n)_n$  seja incondicionalmente somável. A caracterização do Teorema 1.3 nos assegura que  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon/4$ , sempre que  $M \subset \mathbb{N}$  for finito com elemento mínimo grande, digamos maior que  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Escolhido  $f \in B_{\mathcal{X}'}$  arbitrariamente,

$$\left| \sum_{n \in M} f(x_n) \right| \leq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left| \sum_{n \in M} f(x_n) \right| = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left| f \left( \sum_{n \in M} x_n \right) \right| \stackrel{\text{HB}}{=} \left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Logo, do lema anterior segue  $\sum_{n > n_0} |f(x_n)| < 4 \cdot \varepsilon/4$ . Para  $n > n_0$ , teremos

$$\|(x_i)_{i \geq n}\|_{1,w} \leq \|(x_i)_{i \geq n_0}\|_{1,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sum_{i \geq n_0} |f(x_i)| \leq \varepsilon.$$

Portanto,  $(x_n)_n \in \ell_1^u(\mathcal{X})$ . Reciprocamente, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_\varepsilon$  implica

$\|(x_i)_{i \geq n}\|_{1,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sum_{i \geq n} |f(x_i)| \leq \varepsilon$ . Assim, se  $M \subset \{n_\varepsilon, 1 + n_\varepsilon, \dots\}$  é finito, então

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| \stackrel{\text{HB}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left| \sum_{n \in M} f(x_n) \right| \leq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sum_{n \geq n_\varepsilon} |f(x_n)| = \|(x_n)_{n \geq n_\varepsilon}\|_{1,w} < \varepsilon.$$

Mais uma vez as caracterizações apresentadas no Teorema 1.3 garantem que  $(x_n)_n$  é incondicionalmente somável.  $\square$

A completude de  $\ell_p^u(\mathcal{X})$  é assegurada pelo próximo resultado.

**Proposição 1.12.**  $\ell_p^u(\mathcal{X})$  é um subespaço fechado de  $\ell_p^w(\mathcal{X})$ .

*Demonstração.* É simples verificar a estrutura linear. Sejam  $(x^k)_k$  uma sequência em  $\ell_p^u(\mathcal{X})$  que converge para  $x \in \ell_p^w(\mathcal{X})$  na norma  $\|\cdot\|_{p,w}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq k_0$  implica

$$\frac{\varepsilon}{2} > \|x^k - x\|_{p,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n))_n\|_p \geq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n^k - x_n))_{n > N}\|_p = \|(x_n^k - x_n)_{n > N}\|_{p,w},$$

para cada  $N \in \mathbb{N}$ ; bem como existe  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow \|(x_n^{k_0})_{n > n_0}\|_{p,w} < \varepsilon/2$ . Com isso,  $n > n_0$  implica

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n > n_0}\|_{p,w} &= \|(x_n)_{n > n_0} - (x_n^{k_0})_{n > n_0} + (x_n^{k_0})_{n > n_0}\|_{p,w} \\ &\leq \|(x_n - x_n^{k_0})_{n > n_0}\|_{p,w} + \|(x_n^{k_0})_{n > n_0}\|_{p,w} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_n)_{n \geq k}\|_{p,w} = 0$  prova que  $x \in \ell_p^u(\mathcal{X})$ .  $\square$

Em geral, a inclusão do resultado anterior é própria, como exemplificamos em seguida.

**Exemplo 1.2.** Consideremos  $(e_n)_n \in \ell_2^{\mathbb{N}}$ , onde  $e_i = (\delta_{in})_n$ . Veremos que  $(e_n)_n \in \ell_2^w(\ell_2) \setminus \ell_2^u(\ell_2)$ . De fato, pela identificação entre  $(\ell_2)'$  e  $\ell_2$  (isomorfismo isométrico), cada  $f \in (\ell_2)'$  poder ser visto como o elemento  $(f(e_n))_n \in \ell_2$ , com  $\|f\| = \|(f(e_n))_n\|_2$  (ver Apêndice A, Proposição A.1). Por isso, para cada  $f \in (\ell_2)'$ ,

$$\sum_n |f(e_n)|^2 = \|f\|_2^2 < \infty \Rightarrow \forall f \in (\ell_2)', (f(e_n))_n \in \ell_2 \Rightarrow (e_n)_n \in \ell_2^w(\ell_2).$$

No entanto, fixado  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|(e_n)_{n > k}\|_{2,w} = \sup_{f \in B_{(\ell_2)'}} \|(f(e_n))_{n > k}\|_2 \stackrel{\text{Prop. A.1}}{=} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_2}} \|(\alpha_n)_{n > k}\|_2 = 1.$$

Portanto,  $(e_n)_n \notin \ell_2^u(\ell_2)$ .

Dados  $p \in [1, \infty)$  e um operador linear limitado  $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , a correspondência

$$(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X}) \longmapsto (u \cdot x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{Y})$$

induz naturalmente um operador linear limitado  $\hat{u} : \ell_p^w(\mathcal{X}) \longrightarrow \ell_p^w(\mathcal{Y})$ , ocorrendo o mesmo entre  $\ell_p(\mathcal{X})$  e  $\ell_p(\mathcal{Y})$ . Algumas vezes esse processo induz um operador linear de  $\ell_q^w(\mathcal{X})$  em  $\ell_p(\mathcal{Y})$ , onde  $p, q \in [1, \infty)$ , e nesse caso teremos um operador absolutamente  $(p; q)$ -somante.

**Definição 1.4.** Sejam  $1 \leq p, q < \infty$ . Dizemos que um operador linear limitado  $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é *absolutamente  $(p; q)$ -somante*, ou simplesmente  *$(p; q)$ -somante*, quando a aplicação induzida

$$\begin{aligned} \hat{u} : \ell_q^w(\mathcal{X}) &\longrightarrow \ell_p(\mathcal{Y}) \\ (x_n)_n &\longmapsto (u \cdot x_n)_n \end{aligned}$$

for um operador linear limitado bem definido, ou seja, quando o operador  $u$  levar sequências fracamente  $q$ -somáveis de  $\mathcal{X}$  em sequências fortemente  $p$ -somáveis de  $\mathcal{Y}$ . Denotamos por  $\prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  o conjunto formado pelos operadores  $(p; q)$ -somantes entre  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ . Quando  $p = q$ , simplesmente escreveremos  $\prod_p(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  e denominaremos seus elementos por operadores  $p$ -somantes.

Naturalmente,  $\prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , e  $\|u\|_{\pi(p,q)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{u}\|$  define uma norma nesse espaço, que cumpre  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \leq \|\cdot\|_{\pi(p,q)}$ , e o torna Banach, como veremos mais adiante. O resultado a seguir apresenta algumas das formas mais comuns de definirmos os operadores  $(p; q)$ -somantes.

**Proposição 1.13.** Seja  $u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  um operador linear limitado. São equivalentes:

- i.  $u$  é absolutamente  $(p; q)$ -somante;
- ii. Existe  $C_1 \geq 0$  tal que, para quaisquer  $n$  natural e  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n \|u \cdot x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{k=1}^n |f(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} ;$$

- iii. Existe  $C_2 \geq 0$  tal que, para cada  $(x_n)_n \in \ell_q^w(\mathcal{X})$ ,

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \|u \cdot x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} ;$$

- iv. Existe  $C_3 \geq 0$  tal que, para cada  $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X})$ ,

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \|u \cdot x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3 \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} ;$$

v.  $(u \cdot x_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$ , sempre que  $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X})$ .

Mais ainda, o ínfimo das constantes em cada um dos itens (ii), (iii) e (iv) é precisamente  $\|u\|_{\pi(p;q)}$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Inicialmente provemos que  $\hat{u}$  possui gráfico fechado. Seja  $(x^k)_k$  uma sequência em  $\ell_q^w(\mathcal{X})$  que convirja para  $x = (x_n)_n \in \ell_q^w(\mathcal{X})$ , de modo que  $\hat{u}(x^k)$  também convirja para  $y = (y_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$ . Devemos concluir que  $\hat{u}(x) = y$ . Da primeira convergência, obtemos a convergência coordenada a coordenada, isto é,  $\lim_k x_n^k = x_n$ , pois vale

$$\varepsilon > \|x^k - x\|_{q,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n^k - x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq |f(x_n^k - x_n)|,$$

para  $\varepsilon > 0$  pequeno,  $k$  natural grande, e para cada  $f \in B_{\mathcal{X}'}$ ; por conseguinte,

$$\|x_n^k - x_n\| = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x_n^k - x_n)| \leq \varepsilon,$$

para cada natural  $n$  e sempre que  $k$  for grande o suficiente. Dessa convergência pontual e da continuidade do operador  $u$ , segue  $\lim_k u \cdot x_n^k = u \cdot x_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixo. Por outro lado, a convergência  $\hat{u}(x^k) = (u \cdot x_n^k)_n \xrightarrow{k} (y_n)_n$  (em  $\ell_p(\mathcal{Y})$ ) também acarreta a convergência coordenada a coordenada, pois

$$\varepsilon > \|\hat{u}(x^k) - y\|_p = \|(u \cdot x_n^k - y_n)_n\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|u \cdot x_n^k - y_n\|^p \right)^{1/p} \geq \|u \cdot x_n^k - y_n\|,$$

consequentemente,  $u \cdot x_n = \lim_k u \cdot x_n^k = y_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $\hat{u}(x) = \hat{u}(x_n)_n = (u \cdot x_n)_n = (y_n)_n = y$ , o que prova que  $\text{Graf}(\hat{u})$  é fechado e, portanto,  $\hat{u}$  é contínua. Com isso, fixado  $n$  natural e  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  arbitrários, representando a sequência  $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in \ell_q^w(\mathcal{X})$  por  $(x_k)_{k=1}^n$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n \|u \cdot x_k\|^p \right)^{1/p} = \|\hat{u}((x_k)_{k=1}^n)\|_p \leq \|\hat{u}\| \cdot \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q} = \|\hat{u}\| \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{k=1}^n |f(x_k)|^q \right)^{1/q}$$

demonstra a desigualdade em questão, e, além disso, o ínfimo  $\alpha_1$  das constantes que satisfazem tal desigualdade cumpre  $\alpha_1 \leq \|\hat{u}\| \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{\pi(p;q)}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Para cada  $(x_n)_n \in \ell_q^w(\mathcal{X})$ ,

$$\|(u \cdot x_n)_n\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|u \cdot x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left( \sum_{i=1}^n \|u \cdot x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{(ii)}{\leq} \sup_n \left[ C_1 \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

Pode-se verificar, sem maiores dificuldades, que

$$\sup_n \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sup_n \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto,

$$\|(u \cdot x_n)_n\|_p \leq C_1 \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} = C_1 \cdot \|(x_n)_n\|_{q,w},$$

comprova (iii), e, mais ainda, que  $\alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \|u\|_{\pi(p;q)}$ , onde  $\alpha_2$  representa o ínfimo das constantes em (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (i): O item (iii) garante  $\hat{u}(\ell_q^w(\mathcal{X})) \subset \ell_p(\mathcal{Y})$ , traduzindo-se na boa definição do operador linear  $\hat{u} : \ell_q^w(\mathcal{X}) \longrightarrow \ell_p(\mathcal{Y})$ , cuja limitação é consequência de

$$\sup_{(x_n)_n \in B_{\ell_q^w(\mathcal{X})}} \|\hat{u} \cdot (x_n)_n\|_p = \sup_{(x_n)_n \in B_{\ell_q^w(\mathcal{X})}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|(u \cdot x_n)_n\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{(iii)}{\leq} \sup_{(x_n)_n \in B_{\ell_q^w(\mathcal{X})}} C_2 \cdot \|(x_n)_n\|_{q,w} = C_2,$$

assim como  $\|u\|_{\pi(p;q)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{u}\| \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \|u\|_{\pi(p;q)}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Óbvio, uma vez que  $\ell_q^u(\mathcal{X}) \subset \ell_q^w(\mathcal{X})$  é garantido pelo Teorema 1.12. Dessa inclusão, ainda obtemos  $\|u\|_{\pi(p;q)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{u}\| = \alpha_2 \geq \alpha_3$  (ínfimo das constantes em (iv)).

(iv)  $\Rightarrow$  (v): Se  $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X}) \subset \ell_q^w(\mathcal{X})$ , então, por  $\|(x_n)_n\|_{q,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} (\sum_n |f(x_n)|^q)^{1/q}$  ser finito,  $(\sum_n \|u \cdot x_n\|_p^p)^{1/p} \stackrel{(iv)}{\leq} C_3 \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} (\sum_n |f(x_n)|^q)^{1/q} < \infty$ . Portanto  $(u \cdot x_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$ .

(v)  $\Rightarrow$  (i): O operador linear  $(x_n)_n \in \ell_q^u(\mathcal{X}) \xrightarrow{\tilde{u}} (u \cdot x_n)_n \in \ell_p(\mathcal{Y})$  é bem definido por (v). Repetindo o argumento usado em (i)  $\Rightarrow$  (ii), concluimos que  $\text{Graf}(\tilde{u})$  é fechado e, portanto,  $\tilde{u}$  é limitado. Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  arbitrariamente, consideremos  $(x_i)_{i=1}^n \in \ell_q^u(\mathcal{X})$ . Da continuidade de  $\tilde{u}$ , segue

$$\left( \sum_{i=1}^n \|(u \cdot x_i)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|\tilde{u} \cdot (x_i)_{i=1}^n\|_p \leq \|\tilde{u}\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,w} = \|\tilde{u}\| \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

provando (i) e  $\|u\|_{\pi(p;q)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{u}\| = \alpha_1 \leq \|\tilde{u}\| = \alpha_3 \leq \|\hat{u}\| \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{\pi(p;q)}$ , de onde conclui-se a igualdade entre os ínfimos e  $\|u\|_{\pi(p;q)}$ .  $\square$

**Proposição 1.14.** Para cada  $u \in \prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\|u\| \leq \|u\|_{\pi(p;q)}$ , i.e.,  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \leq \|\cdot\|_{\pi(p;q)}$ .

*Demonstração.* De fato, tomando  $n = 1$  no item (i) do Teorema 1.13,

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in B_X} \|u \cdot x\| \leq \sup_{x \in B_X} \|u\|_{\pi(p;q)} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x)| = \|u\|_{\pi(p;q)} \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x)| = \|u\|_{\pi(p;q)}.$$

□

**Proposição 1.15.** Se  $p < q$ , então  $\prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}) = \{0\}$ .

*Demonstração.* Existe  $(\lambda_n)_n \in \ell_q \setminus \ell_p$ , pois  $q > p$  (ver Apêndice A, Proposição A.3). Logo, fixado  $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ ,  $(\lambda_n x)_n \in \ell_q(x) \subset \ell_q^w(\mathcal{X})$ . Suponhamos que exista um operador  $u \in \prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  não nulo. Consequentemente, existiria  $C > 0$  que cumpriria, para cada natural  $n$ ,

$$\begin{aligned} \|u \cdot x\| \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \sum_{i=1}^n \|u \cdot \lambda_i x\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{i=1}^n |f(\lambda_i x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C \cdot \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x)| \leq C \cdot \|x\| \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo com  $\|x\| \leq 1$ , obteríamos  $\|u\| \cdot (\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot (\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ , o que significaria  $(\lambda_n)_n \in \ell_p$ , contradizendo  $(\lambda_n)_n \in \ell_q \setminus \ell_p$ . □

**Teorema 1.16.**  $(\prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \|\cdot\|_{\pi(p;q)})$  é Banach.

*Demonstração.* Podemos supor que  $1 \leq q \leq p < \infty$ , uma vez que o caso trivial  $\prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}) = \{0\}$  acontece quando  $1 \leq p < q$ . Seja  $(u_n)_n$  uma sequência de Cauchy em  $(\prod_{p,q}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \|\cdot\|_{\pi(p;q)})$ . Da proposição anterior obtemos que  $(u_n)_n$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , logo converge para  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Definamos  $\hat{u} : \ell_q^w(\mathcal{X}) \rightarrow \ell_p^w(\mathcal{Y})$  por  $\hat{u} \cdot ((x_n)_n) \stackrel{\text{def}}{=} (u \cdot x_n)_n$ . Note que  $\hat{u}$  é linear e limitado, pois

$$\|\hat{u} \cdot ((x_n)_n)\|_{p,w} = \|(u \cdot x_n)_n\|_{p,w} \leq \|u\| \cdot \|(x_n)_n\|_{p,w} \stackrel{(*)}{\leq} \|u\| \cdot \|(x_n)_n\|_{q,w},$$

onde em  $(*)$  usamos o fato de  $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ , sempre que  $q \leq p$  (ver Apêndice A, Proposição A.2). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos o operador linear limitado induzido  $\hat{u}_n$ , como na Definição 1.4. Por  $\|u_n\|_{\pi(p;q)} = \|\hat{u}_n\|$ ,  $(\hat{u}_n)_n$  é de Cauchy no espaço de Banach  $\mathcal{L}(\ell_q^w(\mathcal{X}); \ell_p(\mathcal{Y}))$  ( $\ell_p(\mathcal{Y})$  é Banach), logo converge para  $w \in \mathcal{L}(\ell_q^w(\mathcal{X}); \ell_p(\mathcal{Y}))$ . Com isso, dado  $(x_k)_k \in \ell_q^w(\mathcal{X})$ , consideremos  $(y_k)_k \stackrel{\text{def}}{=} w \cdot (x_k)_k \in \ell_p(\mathcal{Y})$ . Fixado  $k \in \mathbb{N}$ , teremos

$$\|u_n \cdot x_k - y_k\| \leq \|(u_n \cdot x_k - y_k)_k\|_p = \|\hat{u}_n \cdot (x_k)_k - w \cdot (x_k)_k\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot x_k = y_k.$$

Por outro lado,  $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}} u$  implica  $\lim_n u_n \cdot x_k = u \cdot x_k$ . Portanto,  $y_k = u \cdot x_k$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  e consequentemente,  $\hat{u} \cdot (x_k)_k = (u \cdot x_k)_k = (y_k)_k = w \cdot (x_k)_k$ , i.e.,  $\hat{u} = w \in \mathcal{L}(\ell_q^w(\mathcal{X}); \ell_p(\mathcal{Y}))$ . □

A proposição e os exemplos a seguir evidenciam a abundância de modelos de operadores absolutamente somantes ao nosso alcance.

**Proposição 1.17.** Todo operador  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  de posto finito é absolutamente  $p$ -somante.

*Demonstração.* De fato, um operador limitado  $u$  possui posto 1 se, e somente se, existem  $y \in \mathcal{Y} \setminus \{0_{\mathcal{Y}}\}$  e  $f \in \mathcal{X}' \setminus \{0_{\mathcal{X}'}\}$ , tais que  $u \cdot x = f(x) \cdot y$ , para cada  $x \in \mathcal{X}$ , e, conseqüentemente, verifica-se  $\|u\| = \|f\| \cdot \|y\|$ . Com isso, para quaisquer  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ , teremos

$$\left( \sum_{i=1}^n \|ux_i\|^p \right)^{1/p} = \|f\| \cdot \|y\| \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{f}{\|f\|}(x_i) \right|^p \right)^{1/p} \leq \|f\| \cdot \|y\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w}.$$

Assim, as Proposições 1.13 e 1.14 garantem que  $u$  é  $p$ -somante e  $\|u\|_{\pi(p)} = \|u\|$ . De modo geral, um operador de posto finito é combinação linear de operadores de posto 1, portanto, é também um operador  $p$ -somante, como assegurado pela estrutura vetorial de  $\Pi_p(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ .  $\square$

**Exemplo 1.3.** Para verificar as afirmações aqui presentes, *vide* [12, Example 2.9].

- (a) **OPERADOR MULTIPLICAÇÃO DO ESPAÇO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS:** Sejam  $p \in [1, \infty)$ ,  $K$  um espaço topológico compacto de Hausdorff,  $\mu$  uma medida positiva regular de Borel em  $K$  e  $\mathcal{C}(K)$  a família das funções contínuas  $g : K \rightarrow \mathbb{K}$ . Cada  $\varphi \in L_p(\mu)$  induz o *operador multiplicação*  $M_\varphi : \mathcal{C}(K) \rightarrow L_p(\mu)$ ;  $M_\varphi(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \cdot \varphi$ , que é  $p$ -somante e  $\|M_\varphi\|_{\pi(p)} = \|\varphi\|_p$ ;
- (b) **OPERADOR INCLUSÃO FORMAL:** Nas mesmas condições do item anterior, o *mapa canônico*  $j_p : \mathcal{C}(K) \hookrightarrow L_p(\mu)$  é  $p$ -somante e  $\|j_p\|_{\pi(p)} = \mu(K)^{1/p}$ ;
- (c) **OPERADOR MULTIPLICAÇÃO DO ESPAÇO  $L_\infty(\mu)$ :** Sejam  $p \in [1, \infty)$  e  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Cada  $\varphi \in L_p(\mu)$  induz o *operador multiplicação*  $M_\varphi : L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ , definido por  $M_\varphi(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \cdot \varphi$ , que é  $p$ -somante e  $\|M_\varphi\|_{\pi(p)} = \|\varphi\|_p$ ;
- (d) **OPERADOR INCLUSÃO FORMAL: (bis)** Nas mesmas condições do item anterior, o *mapa inclusão canônico*  $i_p : L_\infty(\mu) \hookrightarrow L_p(\mu)$  é  $p$ -somante e  $\|i_p\|_{\pi(p)} = \mu(\Omega)^{1/p}$ ;
- (e) **OPERADOR DIAGONAL:** Seja  $p \in [1, \infty)$ . Qualquer elemento  $\xi = (\xi_n)_n$  de  $\ell_p$  induz o *operador diagonal*  $D_\xi : \ell_\infty \rightarrow \ell_p$ ;  $D_\xi \cdot (\alpha_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} (\xi \alpha_n)_n$ , que é  $p$ -somante e  $\|D_\xi\|_{\pi(p)} = \|\xi\|_p$ .

O resultado a seguir é considerado central na teoria dos operadores absolutamente somantes e, em particular, nos fornece exemplos de operadores absolutamente somantes que não são de posto finito. Para demonstrações desse, *vide* [12, Theorem 1.13] ou [6, Teorema 10.2.6].

**Teorema de Grothendieck.**  $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2) = \prod_1(\ell_1; \ell_2)$ , ou seja todo operador linear contínuo entre  $\ell_1$  e  $\ell_2$  é absolutamente somante (1-somante).

Outro célebre resultado da teoria caracteriza os operadores absolutamente  $p$ -somantes:

**Teorema da Dominação de Pietsch.** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $u : X \rightarrow Y$  um operador linear limitado. Então  $u$  é absolutamente  $p$ -somante se, e somente se, existem uma constante  $C > 0$  e uma medida de probabilidade  $\mu$  de Borel de  $B_{X'}$ , com a topologia fraca estrela, que cumpram, para todo  $x \in X$ ,

$$\|u \cdot x\| \leq C \cdot \left( \int_{B_{X'}} |f(x)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma demonstração desse pode ser vista em [12, Theorem 2.12].

### 1.3 Cotipo de Espaços de Banach

Inicialmente discorreremos sobre um tema necessário para a definição de cotipo e que desempenhará um papel central para a Desigualdade de Khinchin, ferramenta imprescindível para obtermos a Desigualdade de Bohnenblust–Hille. As *funções de Rademacher* são formalmente definidas, para cada natural  $n$ , por

$$\begin{aligned} r_n : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \text{sign} \sin(2^n \pi t) \end{aligned}$$

As proposições apresentadas a seguir asseguram que as funções de Rademacher possuem boas propriedades ortogonais.

**Proposição 1.18.** Sejam  $p_1, \dots, p_k$  e  $n_1 < \dots < n_k$  inteiros positivos. Então

$$\int_I r_{n_1}^{p_1}(t) \cdots r_{n_k}^{p_k}(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Basta analisarmos o caso em que cada  $p_j$  é ímpar, e nesse caso é suficiente considerarmos  $p_1 = \dots = p_k = 1$ , uma vez que  $r_{n_j}^{p_j} = r_{n_j}$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ . Note que se  $m < n$  são inteiro positivos, então o intervalo fechado unitário  $I$  é particionado em  $2^m$  subintervalos  $I_j^m$  de comprimento  $1/2^m$ . Por sua vez, cada subintervalo  $I_j^m$  é particionado em  $2^{n-m}$  subintervalos  $I_l^n$  de comprimento  $2^{-n}$ , logo a função de Rademacher  $r_n$  assume os valores 1 e  $-1$  em quantidades iguais em cada subintervalo  $I_j^m$ . Consequentemente,  $\int_{I_j^m} r_n(t) dt = 0$ , para cada  $I_j^m$  e daí

$$\int_I r_n(t) r_m(t) dt = \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{I_j^m} r_n(t) dt = 0.$$

Com isso, obtemos (indutivamente) que  $I$  pode ser particionado em  $2^{n_{k-1}}$  intervalos  $I_{j_{k-1}}^{n_{k-1}}$  de comprimento  $1/2^{n_{k-1}}$ . Cada um desses subintervalos pode ser particionado em  $2^{n_k - n_{k-1}}$  subintervalos

$I_{j_k}^{n_k}$  de comprimento  $1/2^{n_k}$  e, por conseguinte, a integral de  $r_{n_k}$  sobre  $I_{j_{k-1}}^{n_{k-1}}$  é zero. Uma vez que  $r_{n_1} \cdots r_{n_{k-1}}$  é constante em cada  $I_{j_{k-1}}^{n_{k-1}}$ , concluímos que

$$\int_I r_{n_1}^{p_1}(t) \cdots r_{n_k}^{p_k}(t) dt = \sum_{j_{k-1}=0}^{2^{n_{k-1}-1}-1} (\pm 1) \cdot \int_{I_{j_{k-1}}^{n_{k-1}}} r_{n_k}(t) dt = 0.$$

□

Em particular,  $\{r_n\}_n$  é ortonormal em  $L_2[0, 1]$ , uma vez

$$\langle r_n, r_m \rangle_{L_2[0,1]} = \int_I r_n(t) \cdot r_m(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m; \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Consequentemente,

**Proposição 1.19.** Para toda sequência  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \int_I \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t) \right|^2 dt$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \overline{\alpha_j} \int_I r_i(t) \cdot r_j(t) dt = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot r_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot r_n \right\rangle_{L_2} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot r_n \right\|_{L_2}^2 = \int_I \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot r_n(t) \right|^2 dt. \end{aligned}$$

□

**Definição 1.5.** Diremos que (um espaço de Banach)  $\mathcal{X}$  possui *cotipo*  $q$ , quando existir uma constante  $C > 0$  com a seguinte propriedade:

$$\left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \cdot \left( \int_I \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

qualquer que seja a escolha finita de  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ . Quando  $q = \infty$  substituímos  $\left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$  por  $\max_{i=1, \dots, n} \|x_i\|$ . O ínfimo de tais constantes é denotado por  $C_q(\mathcal{X})$  e será denominado *constante de cotipo*.

**Proposição 1.20.** Ver [15, Proposição 3.2.3]

- i. O cotipo  $q$  de um espaço de Banach cumpre  $q \geq 2$ ;
- ii. Se um espaço de Banach possui cotipo  $q$ , então também possui cotipo  $\tilde{q} \geq q$ ;

- iii. Todo espaço de Hilbert possui cotipo 2;
- iv.  $\ell_p$  possui cotipo  $\max\{2, p\}$  para todo  $p \geq 1$ .

## 1.4 Operadores multilineares múltiplo somantes

Apresentaremos uma generalização natural dos operadores absolutamente somantes: os operadores múltiplo somantes. O conceito que veremos foi introduzido por D. Pérez–García [31, 2003] e por M. C. Matos [22, 2003], de maneira independente, e insere o cerne desse texto (a Desigualdade de Bohnenblust–Hille) no contexto da Teoria dos Espaços de Banach.

**Definição 1.6.** Um operador multilinear limitado  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$  será denominado *múltiplo*  $(q; p_1, \dots, p_m)$ –somante se existe uma constante  $C \geq 0$  que cumpre

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^q \right)^{1/q} \leq C \cdot \prod_{k=1}^m \left\| (x_i^k)_{i=1}^N \right\|_{p_k, w},$$

quaisquer que sejam  $N \in \mathbb{N}$  e  $x_i^k \in \mathcal{X}_k$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ . A coleção dos operadores múltiplo  $(q; p_1, \dots, p_m)$ –somantes é representada por  $\Pi_{(q; p_1, \dots, p_m)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ , e, naturalmente, é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ . O ínfimo das constantes  $C$  anteriores define uma norma denotada por  $\|\cdot\|_{\pi(q; p_1, \dots, p_m)}$ . Quando  $p = p_1 = \dots = p_m$  e  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 = \dots = \mathcal{X}_m$ , simplesmente escreveremos  $\left(\Pi_{(q; p)}^m(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \|\cdot\|_{\pi(q; p)}\right)$ .

Em seguida, apresentamos uma caracterização dos operadores múltiplo somantes. Antes recordemos que, para  $q \in [1, \infty]$ ,  $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} (q, \overset{m \text{ vezes}}{\dots}, q)$ , o espaço de Banach  $\ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_q(\overset{m \text{ vezes}}{\dots}(\ell_q(\mathcal{X})) \dots)$  reúne todas as matrizes vetoriais  $(x_{i_1 \dots i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}$  tais que

$$\|(x_{i_1 \dots i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}\|_{\mathbf{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \|x_{i_1 \dots i_m}\|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & \text{caso } 1 \leq q < \infty; \\ \sup_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \|x_{i_1 \dots i_m}\| < \infty, & \text{caso } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposição 1.21.** Sejam  $q, p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ ,  $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} (q, \overset{m \text{ vezes}}{\dots}, q)$  e  $T : \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m \rightarrow \mathcal{Y}$  um operador  $m$ -linear. São equivalentes:

- i.  $T$  é múltiplo  $(q; p_1, \dots, p_m)$ –somante;
- ii.  $(T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$  sempre que  $(x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Nesse caso, os espaços  $\Pi_{(q; p_1, \dots, p_m)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$  e  $\mathcal{L}(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1), \dots, \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m); \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}))$  são isometricamente isomorfos via a correspondência que associa a cada operador múltiplo  $(q; p_1, \dots, p_m)$ –somante  $T : \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m \rightarrow \mathcal{Y}$ , o operador  $m$ -linear  $\widehat{T} : \ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1) \times \dots \times \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m) \rightarrow \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$  definido

por múltiplo  $(q; p_1, \dots, p_m)$ -somante  $T$  ao operador  $m$ -linear  $\widehat{T}$  definido por

$$\widehat{T} \left( (x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (x_i^m)_{i \in \mathbb{N}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}.$$

*Demonstração.* (ii)  $\Rightarrow$  (i): Por hipótese, o operador  $\widehat{T}$  é bem definido e, facilmente, verifica-se que é  $m$ -linear. Usaremos o teorema do gráfico fechado, para concluir a continuidade de  $\widehat{T}$ . Consideremos, para cada  $k = 1, \dots, m$ , uma sequência  $(x_i^{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\ell_{p_k}^w(E_k)$ , que cumpre

$$x^{k,n} \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^{k,n})_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^k \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{em } \ell_{p_k}^w(E_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (*_1)$$

e, mais ainda,

$$\widehat{T}(x^{1,n}, \dots, x^{m,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \quad \text{em } \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y}). \quad (*_2)$$

Provaremos que  $\widehat{T}(x^1, \dots, x^m) = (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}$ , e, portanto, a continuidade de  $\widehat{T}$  será consequência do Teorema do Gráfico Fechado. Da convergência  $(*_1)$  obtemos, a partir de  $\varepsilon > 0$  dado, um natural  $n_1$  que cumpre

$$n \geq n_1 \implies \varepsilon > \sup_{\phi \in B_{\mathcal{X}'_k}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left| \phi(x_i^{k,n} - x_i^k) \right|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \geq \left| \phi(x_i^{k,n} - x_i^k) \right|.$$

Consequentemente, Hahn-Banach nos leva a concluir que

$$n \geq n_1 \implies \varepsilon \geq \sup_{\phi \in B_{\mathcal{X}'_k}} \left| \phi(x_i^{k,n} - x_i^k) \right| = \|x_i^{k,n} - x_i^k\|_{\mathcal{X}_k},$$

ou seja, ocorre a convergência das sequências coordenadas:  $x_i^{k,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i^k$  em  $\mathcal{X}_k$ , quaisquer que sejam  $k = 1, \dots, m$  e  $i \in \mathbb{N}$ . Com isso, a continuidade de  $T$  implicará em

$$T(x_{i_1}^{1,n}, \dots, x_{i_m}^{m,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m) \quad \text{em } \mathcal{Y}, \quad (*_3)$$

para quaisquer  $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$  fixos. Por outro lado, a convergência  $(*_2)$  nos fornece  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} n \geq n_2 \implies \varepsilon &> \left\| \widehat{T}(x^{1,n}, \dots, x^{m,n}) - (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathbf{q}} \\ &= \left\| (T(x_{i_1}^{1,n}, \dots, x_{i_m}^{m,n})) - (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathbf{q}} \\ &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_m} \|T(x_{i_1}^{1,n}, \dots, x_{i_m}^{m,n}) - y_{i_1, \dots, i_m}\|_{\mathcal{Y}}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \|T(x_{i_1}^{1,n}, \dots, x_{i_m}^{m,n}) - y_{i_1, \dots, i_m}\|_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Logo,  $T(x_{i_1}^{1,n}, \dots, x_{i_m}^{m,n})$  converge à  $y_{i_1, \dots, i_m}$  em  $\mathcal{Y}$ , para quaisquer índices  $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ . Assim, a unicidade da convergência em  $(*_3)$  garantirá que  $T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m) = y_{i_1, \dots, i_m}$ , e com isso,

$$\widehat{T}(x^1, \dots, x^m) = (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} = (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}},$$

e disso concluímos que  $\widehat{T}$  é contínuo. Dessa forma, dados um natural arbitrário  $N$  e  $z_i^k \in \mathcal{X}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ , teremos

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \|T(z_{i_1}^1, \dots, z_{i_m}^m)\|^q \right)^{1/q} = \left\| \widehat{T}((z_i^1)_{i=1}^N, \dots, (z_i^m)_{i=1}^N) \right\|_{\mathbf{q}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^m \left\| (z_i^k)_{i=1}^N \right\|_{p_k, w},$$

donde concluímos, portanto, que  $T$  é múltiplo  $(q; p_1, \dots, p_m)$ -somante. Mais ainda, provamos que  $\|T\|_{\pi(q; p_1, \dots, p_m)} \leq \|\widehat{T}\|$ . A desigualdade reversa será proveniente do argumento apresentado no item a seguir.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): dadas  $(x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , como  $T$  é  $(q; p_1, \dots, p_m)$ -somante, teremos

$$\begin{aligned} \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathbf{q}} &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^q \right)^{1/q} \\ &= \sup_{N \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \cdot \sup_{N \in \mathbb{N}} \left[ \prod_{k=1}^m \left\| (x_i^k)_{i=1}^N \right\|_{p_k, w} \right] \\ &= C \cdot \prod_{k=1}^m \left\| (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \right\|_{p_k, w}, \end{aligned}$$

logo  $(T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ . Portanto, fica provado que o operador  $\widehat{T}$  é bem definido, (claramente)  $m$ -linear e limitado, com  $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|_{\pi(q; p_1, \dots, p_m)}$ .

O argumento apresentado prova nas implicações (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) prova que a correspondência  $T \leftrightarrow \widehat{T}$  é, de fato, uma isometria. Para concluirmos a demonstração, resta verificarmos que é sobrejetora. Isso segue do seguinte: dado um operador  $m$ -linear limitado  $S : \ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1) \times \dots \times \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m) \rightarrow \ell_{\mathbf{q}}(\mathcal{Y})$ , definamos  $T : \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_m \rightarrow \mathcal{Y}$  por  $T(x_1, \dots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} S(x^1, \dots, x^m)$  onde  $x^k \stackrel{\text{def}}{=} (x_k, 0, \dots) \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X})$ ,  $k = 1, \dots, m$ ; com isso verifica-se que  $T$  é  $m$ -linear, múltiplo  $(q; p_1, \dots, p_m)$ -somante e, mais ainda,  $\widehat{T} = S$ .  $\square$

Os próximos resultados, comparados às Proposições 1.14 e 1.15, ratificam o fato de que os operadores (multilineares) múltiplo somantes generalizam os absolutamente somantes.

**Proposição 1.22.** Se  $q < p_j$  para algum  $1 \leq j \leq m$ , então  $\prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) = \{0\}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que exista  $T \in \prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$  não nulo. Então é possível tomarmos  $x_j \in \mathcal{X}_j \setminus \{0\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , tais que  $T(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ . A Proposição A.3 do Apêndice A assegura a existência de  $(\alpha_{i_j})_{i_j} \in \ell_{p_j} \setminus \ell_q$ . Consequentemente, teremos  $(\alpha_{i_j} x_j)_{i_j} \in \ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Considerando  $(x_{i_k}^k)_{i_k} = (x_k, 0, \dots)$ , para cada  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ ,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \|T(x_{i_1}^1, \dots, \alpha_{i_j} x_j, \dots, x_{i_m}^m)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left( \sum_{i_j=1}^{\infty} \|T(x_1, \dots, \alpha_{i_j} x_j, \dots, x_m)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|T(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m)\| \cdot \left( \sum_{i_j=1}^{\infty} |\alpha_{i_j}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \cdot \left( \prod_{k \neq j} \|x_k\| \right) \cdot \|(\alpha_{i_j} x_j)_{i_j}\|_{p_j, w} \\ &= C \cdot \left( \prod_{k \neq j} \|x_k\| \right) \cdot \|x_j\| \cdot \left( \sum_{i_j=1}^{\infty} |\alpha_{i_j}|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\left( \sum_{i_j=1}^{\infty} |\alpha_{i_j}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$  contradiz o fato de  $(\alpha_{i_j})_{i_j} \notin \ell_q$ . □

**Proposição 1.23.**  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})} \leq \|\cdot\|_{\pi(q;p_1, \dots, p_m)}$ .

*Demonstração.* Para cada  $j = 1, \dots, m$ ,  $(x_{i_j}^j)_{i_j} \in \ell_{p_j}^w(\mathcal{X}_j)$  e  $T \in \prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y})$ ,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)} \cdot \prod_{j=1}^m \left\| (x_{i_j}^j)_{i_j} \right\|_{p_j, w}.$$

Considerando  $(x_{i_j}^j)_{i_j} = (x_j, 0, \dots)$ , para cada  $j = 1, \dots, m$ , teremos

$$\|T(x_1, \dots, x_m)\| = \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \|T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)} \cdot \prod_{j=1}^m \left\| (x_{i_j}^j)_{i_j} \right\|_{p_j, w}.$$

No entanto,  $(x_{i_j}^j)_{i_j} = (x_j, 0, \dots)$  implica

$$\left\| (x_{i_j}^j)_{i_j} \right\|_{p_j, w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_{i_j=1}^{\infty} |f(x_{i_j}^j)|^{p_j} \right)^{1/p_j} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} |f(x_j)| = \|x_j\|,$$

que por sua vez acarreta  $\|T(x_1, \dots, x_m)\| \leq \|T\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_m\|$ . Portanto, o resultado será consequência da definição  $\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\|x_j\| \leq 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \|T(x_1, \dots, x_m)\|$ . □

Como esperado,

**Teorema 1.24.**  $\left(\prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y}), \|\cdot\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)}\right)$  é Banach.

*Demonstração.* Consideremos uma sequência  $(T_n)_n$  de Cauchy em  $\prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$ . Do resultado anterior, sabemos que  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})} \leq \|\cdot\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)}$ , logo  $(T_n)_n$  é de Cauchy em  $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$  e, portanto, podemos tomar  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$  de modo que  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  em  $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$ . Provaremos que  $T \in \prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$  e, para tanto, a Proposição 1.21 nos informa que é suficiente provarmos que, dadas sequências  $x^k \stackrel{\text{def}}{=} (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_{p_k}^w(\mathcal{X}_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , teremos  $(T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in \ell_q(\mathcal{Y})$ .

A isometria fornecida na Proposição 1.21 garante que  $(\widehat{T}_n)_n$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1), \dots, \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m); \ell_q(\mathcal{Y}))$ , que é Banach pois  $\ell_q(\mathcal{Y})$  o é, logo  $(\widehat{T}_n)_n$  converge à  $S \in \mathcal{L}(\ell_{p_1}^w(\mathcal{X}_1), \dots, \ell_{p_m}^w(\mathcal{X}_m); \ell_q(\mathcal{Y}))$ . Fixados índices  $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$ , consideremos o operador projeção  $P_{j_1, \dots, j_m} : \ell_q(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}$  definido por  $P_{j_1, \dots, j_m}(y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} y_{j_1, \dots, j_m}$ . Com isso,

$$\begin{aligned} & \|P_{j_1, \dots, j_m}(S(x^1, \dots, x^m)) - T(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m)\|_{\mathcal{Y}} \\ & \leq \|P_{j_1, \dots, j_m}(\widehat{T}_n(x^1, \dots, x^m)) - P_{j_1, \dots, j_m}(S(x^1, \dots, x^m))\|_{\mathcal{Y}} + \\ & \quad + \|P_{j_1, \dots, j_m}(\widehat{T}_n(x^1, \dots, x^m)) - T(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m)\| \\ & = \|P_{j_1, \dots, j_m}(\widehat{T}_n(x^1, \dots, x^m)) - P_{j_1, \dots, j_m}(S(x^1, \dots, x^m))\|_{\mathcal{Y}} + \\ & \quad + \|T_n(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m) - T(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m)\| \\ & \leq \|P_{j_1, \dots, j_m}\| \cdot \|\widehat{T}_n - S\| \cdot \|x^1\|_{p_1, w} \cdots \|x^m\|_{p_m, w} + \|T_n - T\| \cdot \|x_{j_1}^1\| \cdots \|x_{j_m}^m\|. \end{aligned}$$

Tomando  $n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$  na desigualdade anterior, concluímos que

$$P_{j_1, \dots, j_m}\left(S\left((x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (x_i^m)_{i \in \mathbb{N}}\right)\right) = T(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m),$$

quaisquer que sejam  $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$S\left((x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (x_i^m)_{i \in \mathbb{N}}\right) = (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{T}\left((x_i^1)_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (x_i^m)_{i \in \mathbb{N}}\right).$$

Isso prova que  $\widehat{T} = S$  e  $(T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in \ell_q(\mathcal{Y})$ , o que conclui a prova da afirmação  $T \in \prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$ . Resta provarmos que a convergência  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  ocorre em  $\prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y})$ , o que é consequência de

$$\|T_n - T\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)} = \|\widehat{T_n - T}\| = \|\widehat{T_n} - \widehat{T}\| = \|\widehat{T_n} - S\|,$$

juntamente com o fato de  $\widehat{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$ . Portanto,  $\left(\prod_{(q;p_1,\dots,p_m)}^m(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_m;\mathcal{Y}), \|\cdot\|_{\pi(q;p_1,\dots,p_m)}\right)$  é um espaço de Banach.  $\square$

Por fim, alguns resultados que merecem destaque da teoria dos operadores múltiplo somantes: o primeiro devido a D. Pérez–García, generaliza o célebre Teorema de Grothendieck; o segundo, provado independentemente por G. M. A. Botelho e Pellegrino em [5, 2008], e D. Popa em [32, 2009], trata de resultados de coincidência em espaço com cotipo 2.

**Teorema 1.25** (Pérez–García). *Se  $1 \leq p \leq 2$ , então*

$$\Pi_p^m(\ell_1; \ell_2) = \mathcal{L}({}^m\ell_1; \ell_2).$$

**Teorema 1.26** (Botelho e Pellegrino; Popa). *Sejam  $m \geq 2$  natural e  $1 \leq p, q < 2$ . Então, para quaisquer espaços de Banach  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$  com cotipo 2 e  $\mathcal{Y}$  espaço de Banach,*

$$\Pi_p^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}) = \Pi_q^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathcal{Y}).$$

# Capítulo 2

## A Desigualdade de Bohnenblust–Hille

Este capítulo é fundamentado no artigo [30, 2012]. Discorreremos sobre um resultado da década de 30, inicialmente obtido por J. E. Littlewood e posteriormente generalizado por H. F. Bohnenblust e E. C. Hille, que possui figura central em todo esse texto. No contexto dos operadores múltiplo somantes, tal resultado afirma que toda forma  $m$ -linear limitada é múltiplo  $(\frac{2m}{m+1}; 1)$ -somante, e ainda que a norma  $\|\cdot\|_{\pi(\frac{2m}{m+1}; 1)}$  é dominada pela norma natural  $\|\cdot\|$  das formas  $m$ -limitadas. O principal objetivo desse capítulo será obter o resultado em questão, e apresentar estimativas melhores a respeito daquela dominação, preparando terreno para o capítulo posterior, que versará sobre o comportamento assintótico ótimo dessas estimativa, e como isso fornecerá informações a respeito do crescimento das constantes ótimas.

Dissertaremos um pouco sobre a história desse teorema na primeira seção. Na segunda apresentaremos diferentes equivalências da forma original apresentada por Littlewood, Bohnenblust e Hille, e na terceira seção provaremos a otimalidade do expoente. A quarta seção reúne as ferramentas essenciais para provarmos o resultado e suas estimativas, presentes na última seção, onde faremos ainda um comparativo do progresso dessas.

### 2.1 Contexto histórico

Em 1930, Littlewood provou em [21], o que mais tarde seria conhecido como a *Desigualdade 4/3 de Littlewood*, que, para qualquer inteiro positivo  $N$  e qualquer forma bilinear  $T \in \mathcal{L}({}^2c_0; \mathbb{C})$ ,

$$\left( \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \sqrt{2} \cdot \sup_{z_1, z_2 \in B} |T(z_1, z_2)|,$$

onde  $B$  representa a bola unitária de  $c_0$ . O expoente  $4/3$  possui uma característica peculiar: é ótimo, no sentido de não ser possível substituí-lo por outro menor, de modo que a constante  $\sqrt{2}$  seja trocada por outra que independa de  $N$ .

Conforme A. Defant e U. Schwaing relatam em [11], Bohnenblust e Hille imediatamente

perceberam a importância desse resultado, e das técnicas utilizadas para prová-lo, no propósito em que estava inserido o resultado de Littlewood: resolver o *Problema da Convergência Absoluta de Bohr*, que basicamente indaga qual a maior largura  $L$  de uma faixa vertical no plano complexo, na qual a série de Dirichlet  $\sum_n a_n \cdot n^{-s}$  converge uniformemente, mas não absolutamente. Em 1913, N. H. D. Bohr obteve que  $L \leq 1/2$ , e questionou se a igualdade ocorreria. Bohnenblust e Hille responderam em [4] afirmativa e engenhosamente a essa pergunta, sendo um dos ingredientes cruciais para tal feito a versão  $m$ -linear da Desigualdade  $4/3$  de Littlewood: para cada inteiro positivo  $m$ , existe uma constante  $C_m \geq 0$ , tal que, qualquer que seja a forma  $m$ -linear  $T \in \mathcal{L}(^m c_0; \mathbb{C})$ ,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \cdot \sup_{z_1, \dots, z_m \in B} |T(z_1, \dots, z_m)|,$$

e mais uma vez o expoente  $\frac{2m}{m+1}$  é ótimo, naquele sentido descrito no expoente  $4/3$  do resultado de Littlewood, ou seja, é impossível reduzi-lo sem que as constantes  $C_m$  independam de  $N$ . Na terceira seção (Teorema 2.6) apresentamos uma prova elementar <sup>1</sup> desse fato obtida por Nuñez-Alarcón e Pellegrino em [25].

Além do interesse matemático intrínseco, os resultados de Bohnenblust–Hille e Littlewood possuem aplicações profundas em vários campos da análise: teoria dos espaços de Banach, análise de Fourier e harmônica, análise complexa em finitas e infinitas variáveis; além de teoria analítica dos números (cf. [9]); e ainda aplicações na teoria quântica da informação (cf. [13]).

Será visto na Proposição 2.4 da seção seguinte, que o resultado de Bohnenblust–Hille basicamente afirma que toda forma  $m$ -linear contínua é múltiplo  $(\frac{2m}{m+1}; 1)$ -somante, e ainda garante que a norma  $\|\cdot\|_{\pi(\frac{2m}{m+1}; 1)}$  é dominada pela norma  $\|\cdot\|$ , resultando, pela Proposição 1.23, que essas normas são equivalentes. Visto a importância desse resultado no cenário global, e por figurar o papel de principal teorema desse texto, a partir de agora iremos nos referir a este simplesmente por

**Desigualdade de Bohnenblust–Hille.** Para cada inteiro positivo  $m \geq 1$  existe uma constante positiva  $C_m$  com a propriedade de que ocorre

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \cdot \|T\|, \quad (\text{DBH})$$

quaisquer que sejam o inteiro positivo  $N \geq 1$  e a forma  $m$ -linear  $T \in \mathcal{L}(^m \ell_\infty^N; \mathbb{K})$ . Mais ainda, o expoente  $2m/(m+1)$  é ótimo.

A otimalidade do expoente significa que não existe expoente  $0 < \rho_m < \frac{m+1}{2m}$  para o qual ocorra a desigualdade (DBH) com uma constante  $C_m$  que dependa *apenas* de  $m$  (ver Teorema 2.6).

---

<sup>1</sup>elementar comparada à prova original de Bohnenblust–Hille, conforme relato de outros autores (ver seção 2.3).

Veremos ainda que quaisquer constantes que cumpram (DBH) necessariamente serão maiores ou iguais à 1 (ver Observação 2.3), e também que o ínfimo de tais constantes é atingido, ou seja, a constante ótima possui a propriedade (DBH) (ver Observação 2.4).

Na última seção deste capítulo apresentaremos uma demonstração desse resultado ao atingirmos as constantes  $C_m$  obtidas por Pellegrino e Seoane-Sepúlveda em [30].

## 2.2 Caracterizações da desigualdade

Essa seção destina-se a inserir as formas originais dos resultados de Littlewood e Bohnenblust–Hille no atual contexto dos operadores múltiplo somantes. Estabeleceremos alguns isomorfismos isométricos, para concluirmos que é possível considerar, no enunciado original daqueles resultados, quaisquer  $m$ -formas em  $\mathcal{L}({}^m\ell_\infty^N; \mathbb{K}) = \mathcal{L}({}^m\mathbb{K}^N; \mathbb{K})$ ,  $\mathcal{L}({}^m c_0; \mathbb{K})$  ou até mesmo em  $\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$ .

**Lema 2.1.** Para  $1 < p < \infty$ ,  $(x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$  e  $(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}$ ,  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  converge. Quando  $p = 1$ , o mesmo ocorre para  $(x_n)_n \in \ell_1^w(\mathcal{X})$  e  $(\alpha_n)_n \in c_0$ .

*Demonstração.* Fixados naturais  $n > m$ , temos

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{i=m+1}^n \alpha_i x_i \right\|, && \text{Hahn–Banach,} \\ &= \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left| f \left( \sum_{i=m+1}^n \alpha_i x_i \right) \right| \\ &\leq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i f(x_i)|, && \text{Hölder,} \\ &\leq \left( \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^{p'} \right)^{1/p'} \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left( \sum_n |f(x_n)|^p \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^{p'} \right)^{1/p'} \cdot \|(x_n)_n\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue de  $(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}$ . No caso  $p = 1$ , usa-se  $\lim_n \alpha_n = 0$  em vez de aplicar a Desigualdade de Hölder no termo  $\sum_{i=m+1}^n |\alpha_i f(x_i)|$ .  $\square$

O resultado a seguir caracteriza os espaços das sequências fracamente  $p$ -somáveis.

**Lema 2.2.** Para  $1 < p < \infty$ ,  $\mathcal{L}(\ell_{p'}, \mathcal{X})$  e  $\ell_p^w(\mathcal{X})$  são isometricamente isomorfos via a correspondência  $u \mapsto (u \cdot e_n)_n$ . Quando  $p = 1$ , o mesmo ocorre substituindo  $\ell_p'$  por  $c_0$ .

*Demonstração.* No caso  $p \in (1, \infty)$ , recordemos que cada elemento  $f \in (\ell_p)'$  pode ser visto como o elemento  $(f(e_n))_n \in \ell_{p'}$ , com  $\|f\| = \|(f(e_n))_n\|_{p'}$ , e reciprocamente, cada elemento  $\xi = (\xi_n)_n \in \ell_{p'}$

também é correspondido à  $f_\xi \in (\ell_p)'$ , definido por  $f_\xi((\alpha_n)_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \xi_n \alpha_n$ , de modo que  $\|\xi\|_{p'} = \|f_\xi\|$ . O mesmo ocorre entre  $(c_0)'$  e  $\ell_1$  (ver Apêndice A, Proposição A.1). Voltando à demonstração, trataremos apenas o caso  $1 < p < \infty$ . Usando argumento similar e trabalhando com  $c_0$  em vez de  $\ell_{p'}$ , obteremos a mesma conclusão para  $p = 1$ . Claramente  $\Psi$  é linear. Vejamos que é bem definida: primeiro note que  $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p'})$  e  $\|(e_n)_n\|_{p,w} = 1$ , pois para cada  $g \in (\ell_{p'})'$  é visto como sua cópia isométrica  $(g(e_n))_n \in \ell_p$ , logo

$$\sum_n |g(e_n)|^p = \|(g(e_n))_n\|_p^p = \|g\|^p < \infty;$$

segundo, para cada  $f \in \mathcal{X}'$ ,

$$\sum_n |f(u \cdot e_n)|^p = \sum_n |(f \circ u)(e_n)|^p < \infty,$$

uma vez que  $(f \circ u) \in (\ell_{p'})'$  e  $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p'})$ ; logo, isso prova que  $(u \cdot e_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$  e, portanto, conclui que  $\Psi$  é bem definida.

Dado  $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ , o lema anterior garante a convergência de  $\sum_n \alpha_n x_n$ , para cada  $(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}$ . Logo,  $u : \ell_{p'} \rightarrow \mathcal{X}$ , definido por  $u \cdot (\alpha_n)_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \alpha_n x_n$  é linear, e limitada pois

$$\begin{aligned} \|u \cdot (\beta_n)_n\| &= \left\| \sum_n \beta_n x_n \right\| \stackrel{\text{HB}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left| \sum_n \beta_n f(x_n) \right| \leq \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sum_n |\beta_n f(x_n)| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|(\beta_n)_n\|_{p'} \cdot \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(x_n))_n\|_p = \|(\beta_n)_n\|_{p'} \cdot \|(x_n)_n\|_{p,w}, \end{aligned}$$

para cada  $(\beta_n)_n \in \ell_{p'}$ . Verificando-se  $\Psi(u) = x$ , conclui-se a sobrejetividade de  $\Psi$ .

Por fim, vejamos que  $\Psi$  preserva norma. Apenas nessa etapa o argumento é distinto no caso  $p = 1$ , que consideraremos mais adiante. No momento, discorreremos sobre o caso  $1 < p < \infty$ :

$$\|(u \cdot e_n)_n\|_{p,w} = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \|(f(u \cdot e_n))_n\|_p = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sup_{g \in B_{(\ell_p)'}} |g((f(u \cdot e_n))_n)| = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right|.$$

O lema anterior assegura a convergência de  $\sum_{i=1}^n \alpha_i u \cdot e_i$ , por  $(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}$  e  $(u \cdot e_n)_n \in \ell_p^w(\mathcal{X})$ ; a continuidade de  $f$  acarreta

$$\left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right| = |f(u \cdot (\alpha_n)_n)|;$$

e as igualdades a seguir concluirão que  $\Psi$  é isometria:

$$\begin{aligned}
 \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right| &= \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} |f(u \cdot (\alpha_n)_n)| \\
 &\stackrel{(*_1)}{=} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} \sup_{f \in B_{X'}} |f(u \cdot (\alpha_n)_n)| \\
 &\stackrel{\text{HB}}{=} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} \|u \cdot (\alpha_n)_n\| \\
 &= \|u\|.
 \end{aligned}$$

Denotando o operador adjunto de  $u$  por  $u'$ , a troca de supremos em  $(*_1)$  é permissível pois

$$\begin{aligned}
 \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right| &= \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p'}} |(f \circ u)(\alpha_n)_n| \\
 &= \sup_{f \in B_{X'}} \|f \circ u\| \\
 &= \sup_{f \in B_{X'}} \|u' \cdot f\| \\
 &= \|u'\| \\
 &= \|u\|
 \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}}} \sup_{f \in B_{X'}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right| &\stackrel{\text{HB}}{=} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}}} \left\| \sum_n \alpha_n u \cdot e_n \right\| \\
 &= \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}}} \|u \cdot (\alpha_n)_n\| \\
 &= \|u\|.
 \end{aligned}$$

Quando  $p = 1$ , é necessário mudar o argumento anterior (na etapa da isometria) por não ser possível concluirmos a convergência de  $\sum_{i=1}^n \alpha_i u \cdot e_i$ , com  $(\alpha_n)_n \in \ell_\infty$ , e mesmo que isso ocorra,  $u$  não é definido sobre  $\ell_\infty$  (apenas sobre  $c_0$ ). Considerando isso tomamos outro caminho:

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(u)\|_{1,w} &\stackrel{\text{def}}{=} \|(u \cdot e_n)_n\|_{1,w} \\
 &= \sup_{f \in B_{X'}} \sum_n |f(u \cdot e_n)| \\
 &= \sup_{f \in B_{X'}} \sum_n |(f \circ u)(e_n)| \\
 &= \|u\| \cdot \sup_{f \in B_{X'}} \sum_n \left| \frac{1}{\|u\|} \cdot (f \circ u)(e_n) \right| \\
 &\leq \|u\| \cdot \sup_{g \in B_{(c_0)'}} \sum_n |g(e_n)|.
 \end{aligned}$$

Usando a dualidade entre  $(c_0)'$  e  $\ell_1$  (Apêndice A, Proposição A.1),

$$\sup_{g \in B_{(c_0)'}} \sum_n |g(e_n)| = \sup_{(\beta_n)_n \in B_{\ell_1}} \sum_n |\beta(e_n)| = 1,$$

logo,  $\|\Psi(u)\|_{1,w} \leq \|u\|$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \left\| u \cdot \left( \sum_n \alpha_n e_n \right) \right\| \\ &= \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \left\| \sum_n \alpha_n u \cdot e_n \right\| \\ &= \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \sup_{f \in B_{X'}} \left| f \left( \sum_n \alpha_n u \cdot e_n \right) \right| \\ &\stackrel{(*)}{=} \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \left| f \left( \sum_n \alpha_n u \cdot e_n \right) \right|, \end{aligned}$$

com a troca de supremos em  $(*)$  é justificada, *mutatis mutandis*, como a ocorrida em  $(*)_1$ . Como o Lema 2.1 nos garante que

$$\sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \left| f \left( \sum_n \alpha_n u \cdot e_n \right) \right| = \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right|,$$

teremos

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{c_0}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right| \\ &\leq \sup_{f \in B_{X'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_\infty}} \left| \sum_n \alpha_n f(u \cdot e_n) \right| \\ &\stackrel{\text{HB}}{=} \sup_{f \in B_{X'}} \|(f(u \cdot e_n))_n\|_1 \\ &= \|(u \cdot e_n)_n\|_{1,w} \\ &= \|\Psi(u)\|_{1,w}, \end{aligned}$$

e isso conclui, portanto,  $\Psi$  é isometria (no caso  $p = 1$ ). □

**Lema 2.3.**  $\ell_1^N$  e  $(\ell_\infty^N)'$  são isometricamente isomorfos.

*Demonstração.* Definamos  $\Phi : \ell_1^N \longrightarrow (\ell_\infty^N)'$  por  $\Phi(b = (b_i)_{i=1}^N) = \varphi_b$ , onde  $\varphi_b(a_i)_{i=1}^N = \sum_{i=1}^N a_i b_i$ , para cada  $(a_i)_{i=1}^N \in \ell_\infty^N$ . Claramente  $\Phi$  e  $\varphi_b$  são lineares, e a limitação dessa se deve à  $\ell_\infty^N$  possuir dimensão finita, logo  $\Phi$  é bem definida. Agora vejamos que  $\Phi$  é uma isometria. Fixado  $b = (b_i)_{i=1}^N \in \ell_1^N$ , para cada  $a = (a_i)_{i=1}^N \in \ell_\infty^N$ , temos

$$|\varphi_b(a_i)_{i=1}^N| = \left| \sum_{i=1}^N a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |a_i b_i| \leq \|a\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^N |b_i| = \|a\|_\infty \cdot \|b\|_1,$$

logo,  $\|\varphi_b\| \leq \|b\|$ . Para obtermos a outra desigualdade, consideremos  $\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} \overline{b_i}/|b_i|$ , caso  $b_i \neq 0$ , ou  $\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} 0$ , caso contrário, para cada  $i = 1, \dots, N$ . Com isso,  $\xi = (\xi_i)_{i=1}^N \in \ell_\infty^N$ , e cada entrada cumpre  $\xi_i b_i = |b_i|$ , daí

$$\|b\|_1 = \sum_{i=1}^n \xi_i b_i = \sum_{i=1}^N \xi_i \varphi_b(e_i) = \varphi_b \left( \sum_{i=1}^N \xi_i e_i \right) = \varphi_b(\xi)_{i=1}^N = |\varphi_b(\xi)| \leq \|\varphi_b\| \cdot \|\xi\|_\infty = \|\varphi_b\|,$$

uma vez que (excluindo o caso trivial  $b \neq 0$ )  $\|\xi\|_\infty = 1$  por cada entrada não nula satisfazer  $|\xi_i| = 1$ . Portanto,  $\Phi$  é uma isometria e, conseqüentemente, injetora. Como os espaços  $\ell_1^N$  e  $(\ell_\infty^N)'$  possuem a mesma dimensão  $N$ ,  $\Phi$  é sobrejetora. Também é possível provar a sobrejetividade explicitamente: dado  $\varphi \in (\ell_\infty^N)'$ , basta tomar  $c = (\varphi(e_i))_{i=1}^N \in \ell_1^N$  e verificar  $\varphi = \varphi_c = \Phi(c)$ .  $\square$

**Observação 2.1.** A prova pode ser generalizada para  $\ell_p^N$  e  $\ell_{p'}^N$ ,  $1 < p < \infty$ , fazendo as devidas modificações, uma vez que  $\ell_q^N = \mathbb{K}^N$ .

**Observação 2.2.** O mesmo argumento usado no lema anterior pode ser generalizado para concluirmos que  $b = (b_n)_n \in \ell_1 \xrightarrow{\Phi} \varphi_b \in (\ell_\infty)'$  é também uma isometria linear, exceto pela sobrejetividade, ou seja,  $\Phi(\ell_1) \subsetneq (\ell_\infty)'$ . De fato, isso se deve a  $c_{00}$  ser denso em  $\ell_1$ , mas  $\Phi(c_{00})$  não ser denso em  $(\ell_\infty)'$ , uma vez que  $\ell_\infty$  não é separável.

O resultado a seguir apresenta diversas formas de interpretar o Teorema de Bohnenblust–Hille, dentre elas, a que nos informa que toda forma  $m$ -linear contínuo é um operador múltiplo  $(\frac{2m}{m+1}; 1)$ -somante.

**Proposição 2.4.** As afirmações a seguir são equivalentes:

- i. Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $C_m \geq 0$ , tal que, quaisquer que sejam o natural  $N$  e  $Q \in \mathcal{L}(^m \ell_\infty^N; \mathbb{K})$ ,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |Q(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \cdot \|Q\|;$$

- ii. Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $D_m \geq 0$ , tal que, independentemente de  $N \in \mathbb{N}$  e  $U \in \mathcal{L}(^m c_0; \mathbb{K})$ ,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |U(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_m \cdot \|U\|;$$

- iii. Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $E_m \geq 0$ , que cumpre, não importa quais sejam  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,

o operador  $R \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$  e as sequências  $(x_n^k)_n \in \ell_1^w(\mathcal{X}_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |R(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq E_m \cdot \|R\| \cdot \prod_{k=1}^m \|(x_n^k)_n\|_{1,w};$$

iv. Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $F_m \geq 0$ , tal que, quaisquer que sejam  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ ,

$$\Pi_{\left(\frac{2m}{m+1}; 1\right)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) \quad \text{e} \quad \|\cdot\|_{\pi\left(\frac{2m}{m+1}; 1\right)} \leq F_m \cdot \|\cdot\|.$$

Além disso, podemos considerar  $C_m = D_m = E_m = F_m$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Dados  $m, N \in \mathbb{N}$  e  $U \in \mathcal{L}(^m c_0; \mathbb{K})$  arbitrários, consideremos  $U_N$  a restrição do operador  $m$ -linear  $U$  ao subespaço de dimensão finita  $(\ell_\infty^N)^m \subset (c_0)^m$ . Logo  $\|U_N\| \leq \|U\|$ , e com isso

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |U(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |U_N(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &\stackrel{(i)}{\leq} C_m \cdot \|U_N\| \leq C_m \cdot \|U\|. \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Sejam  $m, N \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$ , e  $(x_n^k)_n \in \ell_1^w(\mathcal{X}_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$  arbitrários. O Lema 2.2 assegura a limitação do operador linear  $u_k : c_0 \rightarrow \mathcal{X}_k$ , tal que  $u_k \cdot e_n = x_n^k$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , e ainda que  $\|u_k\| = \|(x_n^k)_n\|_{1,w}$ , com  $k = 1, \dots, m$ . Dessa forma,  $S : (c_0)^m \rightarrow \mathbb{K}$ , definido por  $S(x_1, \dots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} T(u_1 \cdot x_1, \dots, u_m \cdot x_m)$ , é um operador  $m$ -linear limitado e

$$\|S\| \leq \|T\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_m\| = \|T\| \cdot \|(x_n^1)_n\|_{1,w} \cdots \|(x_n^m)_n\|_{1,w}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(u_1 \cdot e_{i_1}, \dots, u_m \cdot e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |S(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} D_m \cdot \|S\| \\ &\leq D_m \cdot \|T\| \cdot \prod_{k=1}^m \|(x_n^k)_n\|_{1,w}. \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Inicialmente, note que  $(e_i)_{i=1}^N \in \ell_1^w(\ell_\infty^N)$ , pois

$$\|(e_i)_{i=1}^N\|_{1,w} = \sup_{f \in B_{(\ell_\infty^N)'}'} \sum_{i=1}^N |f(e_i)| \stackrel{\text{Lema 2.3}}{=} \sup_{(b_i)_{i=1}^N \in B_{\ell_1^N}} \sum_{i=1}^N |b_i| = 1.$$

Portanto, dado  $Q \in \mathcal{L}({}^m \ell_\infty^N; \mathbb{K})$ ,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |Q(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \stackrel{(iii)}{\leq} E_m \cdot \|Q\| \cdot \prod_{k=1}^m \|(e_{i_k})_{i_k=1}^N\|_{1,w} = E_m \cdot \|Q\|.$$

Por fim, é simples verificar que os itens (iii) e (iv) são equivalentes. De fato, se para um operador arbitrário  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$  e sequências  $(x_n^k)_n \in \ell_1^w(\mathcal{X}_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , vale

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq E_m \cdot \|T\| \cdot \prod_{k=1}^m \|(x_n^k)_n\|_{1,w},$$

então  $T$  é múltiplo  $(\frac{2m}{m+1}; 1)$ -somante e  $\|T\|_{\pi(\frac{2m}{m+1}; 1)} \leq E_m \cdot \|T\|$ . Isso significa justamente que  $\Pi_{(\frac{2m}{m+1}; 1)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$  e  $\|\cdot\|_{\pi(\frac{2m}{m+1}; 1)} \leq E_m \cdot \|\cdot\|$ . Reciprocamente, a coincidência dos espaços juntamente com a desigualdade de normas anterior (com a constante  $F_m$ ) significa que o operador inclusão

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K}) \hookrightarrow \Pi_{(\frac{2m}{m+1}; 1)}^m(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$$

é limitado e sua norma é menor ou igual a  $F_m$ . Portanto, vale o item (iii) com constante  $F_m$ .  $\square$

**Observação 2.3.** De posse dessas caracterizações, verificamos que qualquer constante que satisfaça o Teorema de Bohnenblust–Hille, necessariamente é maior do que, ou igual a um. De fato, dado  $m \in \mathbb{N}$ , consideremos a  $m$ -forma limitada  $T \in \mathcal{L}({}^m c_0; \mathbb{K})$ , definida por

$$T((x_i^1)_i, \dots, (x_i^m)_i) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^1 \cdot x_1^2 \cdots x_1^m.$$

Sem maiores dificuldades, verifica-se que  $\|T\| = 1$ . Usando o Teorema de Bohnenblust–Hille na forma do item (i) do resultado anterior, obtemos

$$C_m = \|T\| \cdot C_m \geq \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} = \left( |T(e_1, \dots, e_1)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} = 1,$$

para qualquer  $N \in \mathbb{N}$ , o que conclui a afirmação que fizemos.

**Observação 2.4.** As constantes ótimas na DBH também são constantes que satisfazem a desigualdade, isto é, o ínfimos de tais constantes é atingido. De fato, basta provarmos que, fixado um inteiro positivo  $m$ , para quaisquer  $N \in \mathbb{N}$  e  $T \in \mathcal{L}(^m l_\infty^N; \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{1}{\|T\|} \cdot \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq K_m$$

onde  $K_m$  denota a constante ótima do caso  $m$ . Fixado um operador não-nulo  $T \in \mathcal{L}(^m l_\infty^N; \mathbb{K})$ , temos

$$\frac{1}{\|T\|} \cdot \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m$$

para qualquer constante  $C_m$  da DBH. Logo, o valor do lado esquerdo da desigualdade acima é uma cota inferior para as constantes  $C_m$  e, portanto, é menor ou igual ao ínfimo dessas, a saber, a constante ótima  $K_m$ . Com isso,  $K_m$  é também uma constante que satisfaz a DBH (no caso  $m$ ).

## 2.3 Otimalidade do Expoente $\frac{2m}{m+1}$

Exibiremos uma prova alternativa da minimalidade do expoente no Teorema de Bohnenblust–Hille, nos casos polinomial e multilinear concomitantemente, obtida por Nuñez-Alárcon e Pellegrino no *preprint* [25]. Conforme relatam Defant *et al* em [8, page 468] “Bohnenblust e Hille mostraram, através de um argumento absolutamente não trivial, que o expoente  $2m/(m+1)$  não pode ser melhorado.” Em [3] há ainda uma outra prova, no entanto os argumentos também carecem de acessibilidade, uma vez que utilizam conjuntos  $p$ -sidon sistemas *sub-gaussianos*.

Basicamente será demonstrado que a otimalidade de  $2m/(m+1)$  é consequência direta do famoso resultado conhecido por Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund, *vide* [18, Theorem 4, Chapter 6].

**Teorema 2.5** (Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund). *Sejam  $m, n$  inteiros positivos. Então existem sinais  $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ , tais que, o polinômio  $m$ -homogêneo  $P_{m,n} : \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por*

$$P_{m,n}(z) = \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha z^\alpha,$$

*satisfaz*

$$\|P_{m,n}\| \leq C n^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\log m},$$

*onde  $C$  é uma constante universal (independe de  $n$  ou  $m$ ).*

A notação usada nesse teorema é a seguinte:  $|\alpha| = m$ , significa que o multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$  satisfaz  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ ; e o polinômio  $P_{m,n}$  avaliado em cada

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_\infty^n$  é

$$Px = \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

A Desigualdade de Bohnenblust–Hille Polinomial nos assegura, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , a existência de constantes  $D_m \geq 1$ , tais que

$$\left( \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_m \cdot \|P\|,$$

independentemente de  $N \in \mathbb{N}$ , e do polinômio  $m$ -homogêneo  $Px = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$  em  $\ell_\infty^N$ .

**Teorema 2.6.** *O expoente  $2m/(m+1)$  da Desigualdade de Bohnenblust–Hille é ótimo, em ambos os casos multilinear e polinomial.*

*Demonstração.* Uma vez que a Desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear (com potência  $q$ ) implica a polinomial (com mesma potência), basta provarmos o resultado para essa última.

Fixemos um inteiro positivo  $m \geq 2$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $P_{m,n} : \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{C}$  o polinômio  $m$ -homogêneo que satisfaz da Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund. Suponhamos que exista um expoente  $0 < q < 2m/(m+1)$ , que satisfaz a Desigualdade de Bohnenblust–Hille polinomial. Inicialmente percebamos que a quantidade de parcelas da soma

$$\sum_{|\alpha|=m} |\varepsilon_\alpha|^q = \sum_{|\alpha|=m} 1$$

é exatamente o número de soluções inteiras  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$  da equação  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ . Um cálculo combinatório simples nos informa que esse número é precisamente

$$\binom{m+n-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{n! \cdot (m-1)!}.$$

Portanto,

$$\sum_{|\alpha|=m} |\varepsilon_\alpha|^q = \frac{(n+m-1)!}{n! \cdot (m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (n+k) = Q(n),$$

onde  $Q(n)$  é um polinômio em de grau  $m$ . Como a versão multilinear do Teorema de Bohnenblust–Hille implica a polinomial, e usando a Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund, teremos

$$Q(n) = \sum_{|\alpha|=m} |\varepsilon_\alpha|^q \stackrel{\text{Bohn-Hille}}{\leq} (C_{m,q} \cdot \|P_{m,n}\|)^q \stackrel{\text{Des. KSZ}}{\leq} (C_{m,q} \cdot C)^q \cdot n^{\frac{q(m+1)}{2}} (\log m)^{q/2},$$

para alguma constante  $C_{m,q} > 0$ . Consequentemente,

$$\frac{Q(n)}{n^{q(m+1)/2}} \leq (C_{m,q} \cdot C)^q \cdot (\log m)^{q/2} \quad (*)$$

é válida para cada  $n \in \mathbb{N}$ , estando  $q, m$  fixos. No entanto, o grau de  $Q$ ,  $m$ , é estritamente maior que  $q(m+1)/2$  (pois  $q$  cumpre  $q < 2m/(m+1)$ ). Logo,  $Q(n) \cdot n^{-q(m+1)/2}$  é um polinômio com grau estritamente maior que 1 e, com isso,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q(n)}{n^{q(m+1)/2}} = +\infty$$

o que contradiz a expressão (\*). Portanto concluímos que, de fato,  $2m/(m+1)$  é o menor expoente que satisfaz o Teorema de Bohnenblust–Hille (multilinear e polinomial). □

## 2.4 Aparato Técnico

Apresentaremos ferramentas indispensáveis para obtermos o principal resultado do capítulo: uma melhor estimativa das constantes do Teorema de Bohnenblust–Hille, provindas de [30, Theorems 2.2, 3.2]. Mais especificamente, são essas: a Desigualdade de Khinchin; uma desigualdade inspirada nos resultados de R. Blei [3, Theorems II.5 and VII.36], que dizem respeito à Desigualdade de Littlewood; e por fim, outra desigualdade que envolve cotipos, sendo um caso particular de [9, Lemma 2.2].

**Desigualdade de Khinchin.** Para todo  $p \in (0, \infty)$ , existem constantes positivas  $A_p$  e  $B_p$  tais que, independentemente da sequência de escalares  $(\alpha_n)_n \in \ell_2$ , teremos

$$A_p \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_I \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou equivalentemente,

$$A_p \cdot \|(\alpha_n)_n\|_2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n \right\|_{L_p[0,1]} \leq B_p \cdot \|(\alpha_n)_n\|_2.$$

*Demonstração.* Dividiremos o argumento em 4 etapas: inicialmente abordaremos o caso  $p = 4$ , necessário para o caso seguinte  $p \in (0, 2)$ ; em seguida trataremos  $p \in [2, \infty)$  no ambiente real, e por fim no complexo. Ressaltamos que é suficiente provarmos o resultado para uma sequência escalar finita  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ , visto que

$$A_p \cdot \left( \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \cdot \left( \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e  $(\alpha_n)_n \in \ell_2$  asseguram que  $\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i \right)$  é de Cauchy em  $L_p$  e, portanto, podemos tomar o limite  $n \rightarrow \infty$  na desigualdade acima para concluir o resultado. Será útil trabalhar com a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i$ . A Proposição 1.19 nos diz que

$$\|f\|_{L_2} = \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i \right\|_{L_2} = \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}.$$

A demonstração é dividida em situações que dependem de  $p$  e do ambiente real e complexo. O caso  $p = 4$  é especial por representar importante papel nos demais casos e, portanto, é o primeiro a ser tratado.

*Caso  $p = 4$  complexo e real:* A monotonicidade da norma garante  $\|\cdot\|_{L_2} \leq \|\cdot\|_{L_4}$ . Da propriedade das funções de Rademacher na Proposição 1.19, conseguimos a primeira desigualdade com  $A_4 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} &\stackrel{\text{Prop. 1.19}}{=} \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \right\|_{L_2} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \right\|_{L_4} = \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i(t) \right|^4 dt \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_I \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i(t) \right|^4 dt &= \int_I \left( \sum_{i \leq n} \alpha_i r_i(t) \right) \cdot \overline{\left( \sum_{j \leq n} \alpha_j r_j(t) \right)} \cdot \left( \sum_{k \leq n} \alpha_k r_k(t) \right) \cdot \overline{\left( \sum_{l \leq n} \alpha_l r_l(t) \right)} dt \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} \int_I r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} \int_I r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt \\ = \sum_{\substack{i=j \\ k=l}} \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} + \sum_{\substack{i=k \\ j=l}} \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} + \sum_{\substack{i=l \\ j=k}} \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^4. \end{aligned}$$

Logo, das relações de ortogonalidade das funções de Rademacher na Proposição 1.18, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_I \left| \sum_{k=1}^n \alpha_n r_n(t) \right|^4 dt &= \sum_{\substack{i=j \\ k=l}} \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} + \sum_{\substack{i=k \\ j=l}} \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} + \sum_{\substack{i=l \\ j=k}} \alpha_i \overline{\alpha_j} \alpha_k \overline{\alpha_l} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^4 \\
&= 2 \cdot \sum_{i,j=1}^n |a_i|^2 |a_j|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_i^2 \overline{a_j}^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n |a_i|^4 \\
&= 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right) + \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \overline{\left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)} - 2 \cdot \sum_{i=1}^n |a_i|^4 \\
&= 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^2 + \left| \sum_{i=1}^n a_i^2 \right|^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n |a_i|^4 \\
&\leq 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^2 \\
&= 3 \cdot \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^2,
\end{aligned}$$

e isso significa justamente que obtemos a outra desigualdades com  $B_4 = 3^{1/4}$ , uma vez que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \right\|_{L_4} = \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i(t) \right|^4 dt \right)^{1/4} \leq 3^{1/4} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

*Caso  $0 < p < 2$  real e complexo:* Prova-se que  $\theta \stackrel{\text{def}}{=} (2 - p/2)^{-1} \in (0, 1)$  satisfaz  $p\theta + 4(1 - \theta) = 2$ . Usando a Desigualdade de Hölder com os expoentes  $1/\theta$  e  $1/(1 - \theta)$ , obtemos  $\|f\|_{L_2}^2 \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta} \cdot \|f\|_{L_4}^{4(1-\theta)}$ , uma vez que

$$\int_I |f|^2 dt = \int_I |f|^{p\theta} \cdot |f|^{4(1-\theta)} \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_I (|f|^{p\theta})^{1/\theta} \right)^\theta \cdot \left( \int_I (|f|^{4(1-\theta)})^{1/(1-\theta)} \right)^{1-\theta}.$$

Fazendo uso de  $2 - 4(1 - \theta) = p\theta$  e  $\|f\|_{L_4} \leq B_4 \|f\|_{L_2}$  (caso  $p = 4$ ), temos

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta} \cdot \|f\|_{L_4}^{4(1-\theta)} \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta} \cdot B_4^{4(1-\theta)} \cdot \|f\|_{L_2}^{4(1-\theta)} \Rightarrow B_4^{-4(1-\theta)} \cdot \|f\|_{L_2}^{p\theta} \leq \|f\|_{L_p}^{p\theta}.$$

Consequentemente, o fato da norma (nos espaços  $L_r$  de medida igual a 1) ser monótona (não-decrescente) (ver Apêndice A, Proposição A.4), nos leva a

$$B_4^{-\frac{4(1-\theta)}{p\theta}} \cdot \|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_2},$$

que, por  $2 - \frac{4}{p} = -\frac{4(1-\theta)}{p\theta}$ , equivale a

$$B_4^{2-\frac{4}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}.$$

*Caso  $p \in [2, \infty)$  real:* Para qualquer número real  $t$  e qualquer natural  $k$ ,

$$|t|^k \leq k! \cdot \left( 1 + \frac{|t|^k}{k!} \right) \leq k! \cdot e^{|t|} \quad (*)$$

De fato, a primeira igualdade vem de  $|t|^k \leq k! + |t|^k = k! \cdot (1 + |t|^k/k!)$ , e a segunda do desenvolvimento em séries  $e^{|t|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!}$ . Consideremos  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g \stackrel{\text{def}}{=} f/\|f\|_{L_2} = \sum_{i=1}^N \beta_i r_i$ , onde  $\beta_i = \alpha_i/\|f\|_{L_2}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Claramente,

$$1 = \|g\|_{L_2} = \left\| \sum_{i=1}^N \beta_i r_i \right\|_{L_2} \stackrel{\text{Prop. 1.19}}{=} \left( \sum_{i=1}^N \beta_i^2 \right)^{1/2}$$

e

$$e^{g(t)} = e^{\sum_{i=1}^N \beta_i r_i(t)} = \prod_{i=1}^N e^{\beta_i r_i(t)} \quad \text{e} \quad e^{\beta_i r_i(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_i^k r_i^k(t)}{k!}.$$

Na expressão a seguir ocorre: passagem do produtório sob a integral em  $(*_1)$ , pois as funções de Rademacher podem ser vistas como variáveis aleatórias independentes (ver [2, Theorems 5.2.3, 5.3.1]); passagem do somatório sob a integral em  $(*_2)$ , pois a convergência da série é uniforme; e uso da propriedade de ortogonalidade na Proposição 1.18 também em  $(*_2)$ .

$$\int_I e^{g(t)} dt \stackrel{(*_1)}{=} \prod_{i=1}^N \int_I e^{\beta_i r_i(t)} dt = \prod_{i=1}^N \int_I \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_i^k r_i^k(t)}{k!} \right) dt \stackrel{(*_2)}{=} \prod_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_i^{2k}}{(2k)!} \right) = \prod_{i=1}^n \cosh(\beta_i).$$

Por  $k! \cdot 2^k \leq k! \cdot (k+1) \cdots 2k = (2k)!$ , o teste de comparação de séries garante

$$\cosh(\beta_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_i^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_i^{2k}}{k! \cdot 2^k} = e^{\beta_i^2/2},$$

e conseqüentemente,

$$\int_I e^{g(t)} \leq \prod_{i=1}^n e^{\beta_i^2/2} = e^{\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i^2} = e^{\left(\frac{1}{2} \cdot \|g\|_{L_2}^2\right)} = e^{1/2}.$$

De modo análogo chega-se a  $\int_I e^{-g(t)} \leq e^{1/2}$ . Utilizando a propriedade  $(*)$ ,

$$\int_I |g(t)|^k dt \leq k! \cdot \int_I e^{|g(t)|} dt \leq k! \cdot \int_I (e^{g(t)} + e^{-g(t)}) \leq 2k! \cdot e^{1/2}.$$

Tomando um inteiro positivo  $k > p$ , a monotonicidade da norma nos fornecerá

$$1 = \|g\|_{L_2} \leq \|g\|_{L_p} \leq \|g\|_{L_k} = \left( \int_I |g(t)|^k dt \right)^{1/k} \leq (2k! \cdot e^{1/2})^{1/k}.$$

Recordando que  $g \stackrel{\text{def}}{=} f/\|f\|_{L_2[0,1]}$  e  $f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$ , temos  $\|g\|_{L_p} = \|f\|_{L_p}/\|f\|_{L_2}$ . Com isso, a desigualdade anterior se traduz em  $\|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p} \leq (2k! \cdot e^{1/2})^{1/k} \cdot \|f\|_{L_2}$ , que por sua vez significa o resultado desejado com  $A_p = 1$  e  $B_p = (2k! \cdot e^{1/2})^{1/k}$ , pois é o mesmo que

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \right)^{1/2} \leq \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq (2k! \cdot e^{1/2})^{1/k} \cdot \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \right)^{1/2}.$$

*Caso  $p \in [2, \infty)$  complexo:* Uma das desigualdades segue da norma ser monótona. Para a outra, escrevendo  $(\alpha_k)_{k=1}^N = (\beta_k)_{k=1}^N + i \cdot (\gamma_k)_{k=1}^N$ , teremos  $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k r_k = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$ , com  $\text{Re}(f) = \sum_{k=1}^N \beta_k r_k$  e  $\text{Im}(f) = \sum_{k=1}^N \gamma_k r_k$ . Do caso anterior obtemos

$$\|\text{Re}(f)\|_{L_p} = \left( \int_I \left| \sum_{k=1}^N \beta_k r_k(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \cdot \left( \sum_{k=1}^N \beta_k^2 \right)^{1/2} = B_p \cdot \|\text{Re}(f)\|_{L_2},$$

assim como  $\|\text{Im}(f)\|_{L_p} \leq B_p \cdot \|\text{Im}(f)\|_{L_2}$ . Portanto,  $\|f\|_{L_p} \leq \|\text{Re}(f)\|_{L_p} + \|\text{Im}(f)\|_{L_p} \leq 2B_p \cdot \|f\|_{L_2}$  é a desigualdade que restava, o que conclui esse caso, e enfim a prova do teorema.  $\square$

**Observação 2.5.** Ressaltamos que a Desigualdade de Khinchin resulta no seguinte: para cada  $p, q \in (0, \infty)$ , existem constantes positivas  $A_p$  e  $B_q$  que satisfazem, qualquer que seja  $(\xi_n)_n \in \ell_2$ ,

$$\left( \int_I \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n(t) \right|^q dt \right)^{1/q} \leq A_p^{-1} \cdot B_q \cdot \left( \int_I \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p},$$

que, na realidade, é um caso particular da Desigualdade de Kahane (*cf.* [12, Theorem 11.1]).

**Observação 2.6.** A relação de ortogonalidade da Funções de Rademach na Proposição 1.19 nos assegura que podemos considerar  $B_2 = 1$ . Mais ainda, o teorema em seguida garante que essa é a menor constante quando  $p = 2$ .

Em [16] U. Haagerup obteve as constantes ótimas que satisfazem a Desigualdade de Khinchin, ou seja, os maiores, menores valores que  $A_p, B_p$  podem assumir, respectivamente, de modo que aquela seja válida. Mais explicitamente,

**Teorema 2.7** (Haagerup). *As constantes ótimas  $A_p$  e  $B_p$  da Desigualdade de Khinchin são*

$$A_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (0, p_0]; \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (p_0, 2); \\ 1, & \text{se } p \in [2, \infty). \end{cases}$$

e

$$B_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in (0, 2]; \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (2, \infty). \end{cases}$$

onde  $\Gamma$  representa a Função Gama, e  $p_0$  é o número real pertencente ao intervalo  $(1, 2)$  que cumpre  $\Gamma((p_0+1)/2) = \sqrt{\pi}/2$  (sabe-se que  $p_0 \approx 1,84742$ ).

O próximo resultado, extraído de [9, Lemma 3.1], foi inspirado nos resultados de R. Blei [3, Theorems II.5 and VII.36], que dizem respeito à Desigualdade de Littlewood.

**Proposição 2.8** (Blei, Defant et al.). *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos finitos não vazios, e  $(\alpha_{ij})_{i,j \in A \times B}$  uma matriz de entradas reais positivas, com colunas  $\alpha_j^C = (\alpha_{ij})_{i \in A}$ ,  $j \in B$ , e linhas  $\alpha_i^L = (\alpha_{ij})_{j \in B}$ ,  $i \in A$ . Para  $q, r_1, r_2 \geq 1$ , com  $q > \max(r_1, r_2)$ , teremos*

$$\left( \sum_{(i,j) \in A \times B} \alpha_{ij}^{g(r_1, r_2)} \right)^{\frac{1}{g(r_1, r_2)}} \leq \left( \sum_{i \in A} \|\alpha_i^L\|_q^{r_1} \right)^{\frac{f(r_1, r_2)}{r_1}} \cdot \left( \sum_{j \in B} \|\alpha_j^C\|_q^{r_2} \right)^{\frac{f(r_2, r_1)}{r_2}},$$

onde  $f, g : [1, q)^2 \rightarrow [0, \infty)$  são definidas por

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x(q-y)}{q(x+y)-2xy} \quad \text{e} \quad g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q^2(x+y)-2qxy}{q^2-xy}.$$

*Demonstração.* Consideremos os números reais positivos

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{qr_1(q-r_2)}{q^2-r_1r_2}, \quad v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{qr_2(q-r_1)}{q^2-r_1r_2}, \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q^2-r_1r_2}{r_1(q-r_2)} \quad \text{e} \quad s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q^2-r_1r_2}{q(q-r_2)}$$

Observemos que  $p > 1$ , visto que

$$q > r_1 \Rightarrow q^2 > qr_1 \Rightarrow q^2 - r_1r_2 > qr_1 - r_1r_2 \Rightarrow p = (q^2 - r_1r_2)/(r_1(q - r_2)) > 1.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, temos, para cada  $i \in A$ ,

$$\sum_{j \in B} \alpha_{ij}^t \alpha_{ij}^v \leq \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{tp} \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)^{1/p'},$$

que, se denotarmos

$$\zeta_i = \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{tp} \quad \text{e} \quad \eta_i = \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'},$$

pode ser reescrita como

$$\sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{t+v} \leq \zeta_i^{1/p} \cdot \eta_i^{1/p'}.$$

Também verifica-se que  $s > 1$ :

$$qr_2 > r_1 r_2 \Rightarrow q^2 - r_1 r_2 > q^2 - qr_2 = q(q - r_2) \Rightarrow s = (q^2 - r_1 r_2)/(q(q - r_2)) > 1.$$

Com isso, e utilizando a Desigualdade de Hölder mais uma vez,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A \times B} \alpha_{ij}^{t+v} &= \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{t+v} \right) \leq \sum_{i \in A} \zeta_i^{1/p} \cdot \eta_i^{1/p'} \leq \left( \sum_{i \in A} \zeta_i^{s/p} \right)^{1/s} \cdot \left( \sum_{i \in A} \eta_i^{s'/p'} \right)^{1/s} \\ &= \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{tp} \right)^{s/p} \right)^{1/s} \cdot \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)^{s'/p'} \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Averiguando que

$$\left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A} = \sum_{j \in B} \left( \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A},$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)^{s'/p'} \right)^{1/s'} &= \left[ \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)^{s'/p'} \right)^{p'/s'} \right]^{1/p'} \\ &= \left\| \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A} \right\|_{s'/p'}^{1/p'} \\ &= \left\| \sum_{j \in B} \left( \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A} \right\|_{s'/p'}^{1/p'}. \end{aligned}$$

Verificada a relação  $s'/p' = q/r_2$ , conclui-se que  $s'/p' > 1$ . Logo  $\|\cdot\|_{s'/p'}$  é uma norma em  $\mathbb{R}^{\text{card}(A \times B)}$  e, portanto, podemos fazer uso da desigualdade triangular para obter

$$\left\| \sum_{j \in B} \left( \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A} \right\|_{s'/p'}^{1/p'} \leq \left( \sum_{j \in B} \left\| \left( \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A} \right\|_{s'/p'} \right)^{1/p'},$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{vp'} \right)^{s'/p'} \right)^{1/s'} &\leq \left( \sum_{j \in B} \left\| \left( \alpha_{ij}^{vp'} \right)_{i \in A} \right\|_{s'/p'} \right)^{1/p'} \\
 &= \left[ \sum_{j \in B} \left( \sum_{i \in A} \left( \alpha_{ij}^{vp'} \right)^{s'/p'} \right)^{p'/s'} \right]^{1/p'} \\
 &= \left( \sum_{j \in B} \left( \sum_{i \in A} \alpha_{ij}^{vs'} \right)^{p'/s'} \right)^{1/p'}.
 \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\sum_{(i,j) \in A \times B} \alpha_{ij}^{t+v} \leq \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^{tp} \right)^{s/p} \right)^{1/s} \cdot \left( \sum_{j \in B} \left( \sum_{i \in A} \alpha_{ij}^{vs'} \right)^{p'/s'} \right)^{1/p'}. \quad (*)$$

Como ocorrido na expressão  $s'/p' = q/r_2$ , simples cálculos constataam

$$t + v = g(r_1, r_2), \quad tp = q, \quad \frac{s}{p} = \frac{r_1}{q}, \quad \text{e} \quad vs' = q.$$

Recordando que  $\alpha_i^L = (\alpha_{ij})_{j \in B}$  e  $\alpha_j^C = (\alpha_{ij})_{i \in A}$  representam as linhas e colunas, da matriz  $(\alpha_{ij})_{i,j \in A \times B}$ , respectivamente, a desigualdade (\*), elevada à potência  $1/g(r_1, r_2) = 1/(t + v)$ , assume a forma

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{(i,j) \in A \times B} \alpha_{ij}^{g(r_1, r_2)} \right)^{\frac{1}{g(r_1, r_2)}} &\leq \left( \sum_{i \in A} \left( \sum_{j \in B} \alpha_{ij}^q \right)^{\frac{r_1}{q}} \right)^{\frac{1}{s \cdot g(r_1, r_2)}} \cdot \left( \sum_{j \in B} \left( \sum_{i \in A} \alpha_{ij}^q \right)^{\frac{r_2}{q}} \right)^{\frac{1}{p' \cdot g(r_1, r_2)}} \\
 &= \left( \sum_{i \in A} \|\alpha_i^L\|_q^{r_1} \right)^{\frac{1}{s \cdot g(r_1, r_2)}} \cdot \left( \sum_{j \in B} \|\alpha_j^C\|_q^{r_2} \right)^{\frac{1}{p' \cdot g(r_1, r_2)}}.
 \end{aligned}$$

Por fim, é simples certificar que

$$\frac{f(r_1, r_2)}{r_1} = \frac{1}{s \cdot g(r_1, r_2)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p' \cdot g(r_1, r_2)} = \frac{f(r_2, r_1)}{r_2},$$

o que nos leva a conclusão do resultado:

$$\left( \sum_{(i,j) \in A \times B} \alpha_{ij}^{g(r_1, r_2)} \right)^{\frac{1}{g(r_1, r_2)}} \leq \left( \sum_{i \in A} \|\alpha_i^L\|_q^{r_1} \right)^{\frac{f(r_1, r_2)}{r_1}} \cdot \left( \sum_{j \in B} \|\alpha_j^C\|_q^{r_2} \right)^{\frac{f(r_2, r_1)}{r_2}}.$$

□

O próximo resultado é o último utensílio a fim de alcançarmos o Teorema de Bohnenblust–Hille com as constantes recentes melhoradas. É um caso particular de [9, Lemma 2.2], que é provado em [32, Lemma 3], e diz respeito a uma desigualdade que envolve cotipos. Continuaremos a denotar as constantes da Desigualdade de Khinchin por  $A_p$  e  $B_p$ . Usaremos a Desigualdade de Minkowski para integrais, cujo enunciado preciso pode ser visto em no Apêndice A.

**Proposição 2.9.** Sejam  $1 \leq r \leq 2$  e  $(\alpha_{i_1 \dots i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^N$  uma matriz de escalares. Então

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |\alpha_{i_1 \dots i_m}|^2 \right)^{1/2} \leq A_r^{-m} \cdot \left( \int_{I^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_1 \cdots dt_m \right)^{1/r}.$$

*Demonstração.* Usaremos o Princípio da Indução sobre  $m \in \mathbb{N}$ . O caso  $m = 1$  provém da Desigualdade de Khinchin:

$$\left( \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \leq A_r^{-1} \cdot \left( \int_I \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i r_i(t) \right|^r dt \right)^{1/r}.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para  $m - 1$ , ou seja,

$$\left( \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N |\alpha_{i_2 \dots i_m}|^2 \right)^{1/2} \leq A_r^{-(m-1)} \cdot \left( \int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_2 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_2 \cdots dt_m \right)^{1/r}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |\alpha_{i_1 \dots i_m}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_{i_1=1}^N \left[ \left( \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N |\alpha_{i_1 \dots i_m}|^2 \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq A_r^{-(m-1)} \cdot \left[ \sum_{i_1=1}^N \left( \int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_2 \cdots dt_m \right)^{2/r} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Considerando o espaço  $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$  com a  $\sigma$ -álgebra das partes de  $\Omega$  e a medida de contagem  $\#$ , o somatório com índice  $i_1$  na expressão anterior pode ser visto como a integral do espaço de medida  $(\Omega, \sigma, \#)$ . Como  $2/r \geq 1$ , é lícito usarmos a Desigualdade de Minkowski (DM) para integrais (ver Apêndice A). Logo,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \sum_{i_1=1}^N \left( \int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{2}{r}} \right]^{\frac{r}{2} \cdot \frac{1}{r}} \\
 &= \left\{ \left[ \int_{\Omega} \left( \int_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_2 \cdots dt_m \right)^{\frac{2}{r}} d\# \right]^{\frac{r}{2}} \right\}^{\frac{1}{r}} \\
 &\stackrel{\text{DM}}{\leq} \left[ \int_{I^{m-1}} \left( \int_{\Omega} \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^{r \cdot \frac{2}{r}} d\# \right)^{\frac{r}{2}} dt_2 \cdots dt_m \right]^{\frac{1}{r}} \\
 &= \left[ \int_{I^{m-1}} \left( \sum_{i_1=1}^N \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^2 \right)^{\frac{r}{2}} dt_2 \cdots dt_m \right]^{\frac{1}{r}}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |\alpha_{i_1 \dots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_r^{-(m-1)} \cdot \left[ \int_{I^{m-1}} \left( \sum_{i_1=1}^N \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^2 \right)^{\frac{r}{2}} dt_2 \cdots dt_m \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Utilizando a Desigualdade de Khinchin, e lembrando que na prova dessa obtivemos  $A_2 = 1$ , aliada as observações 2.5 e 2.6,

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{i_1=1}^N \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{\text{Des. Khinchin}}{\leq} \left( \int_I \left| \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^2 dt_1 \right)^{1/2} \\
 &= \left( \int_I \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^2 dt_1 \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{\text{Obs. 2.5 e 2.6}}{\leq} A_r^{-1} \cdot \left( \int_I \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_1 \right)^{1/r}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema de Fubini irá nos levar a conclusão do resultado, visto que

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |\alpha_{i_1 \dots i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq A_r^{-(m-1)} \cdot \left[ \int_{I^{m-1}} \left( \sum_{i_1=1}^N \left| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^2 \right)^{r/2} dt_2 \cdots dt_m \right]^{1/r} \\
 & \leq A_r^{-(m-1)} \cdot \left[ \int_{I^{m-1}} \left( A_r^{-r} \cdot \int_I \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_1 \right) dt_2 \cdots dt_m \right]^{1/r} \\
 & \stackrel{\text{Fubini}}{=} A_r^{-m} \cdot \left( \int_{I^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N \alpha_{i_1 \dots i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^r dt_1 \cdots dt_m \right)^{1/r}.
 \end{aligned}$$

□

## 2.5 Demonstração e estimativas da desigualdade

Bohnenblust e Hille obtiveram em seu teorema original de [4, 1930] as seguintes constantes:  $m^{\frac{m+1}{2m}} \cdot 2^{\frac{m-1}{2}}$ . O resultado passou alguns anos esquecido até que fosse redescoberto por S. Kaijser [19, 1978] (cf. [8]), cuja prova alcançou melhores estimativas que as originais (cf. [30]):  $2^{\frac{m-1}{2}}$ . Posteriormente, H. Queffélec [29, 1995] deu mais um passo na busca de estimativas mais precisas (para o caso complexo):  $(2/\sqrt{\pi})^{m-1}$ . A. Defant e P. Sevilla-Peris também confirmaram esses valores em [10, 2009].

Reservamos o final desse capítulo para apresentarmos estimativas conquistadas por Pellegrino e Seoane-Sepúlveda em [30, 2012], atualmente consideradas mais precisas que as demais no caso real, e para  $m \geq 7$  no caso complexo, como veremos a seguir. Antecipamos que essas ainda possuem uma particularidade marcante: crescimento assintótico ótimo, em certo sentido que trataremos no capítulo 3. Os autores ressaltam que esse resultado foi inspirado em [9]. Por fim, exibimos algumas tabelas que confrontam os valores dos resultados mencionados, e ratificam que as constantes de [30, 2012] são, de fato, as melhores estimativas.

Mas antes disso, vejamos uma prova da desigualdade que deu origem a todos esses trabalhos.

**Desigualdade 4/3 de Littlewood.** Para qualquer inteiro positivo  $N$  e qualquer forma bilinear  $T \in \mathcal{L}({}^2c_0; \mathbb{K})$ ,

$$\left( \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \sqrt{2} \cdot \|T\|.$$

Mais ainda, o expoente 4/3 é ótimo e a constante  $\sqrt{2}$  é ótima no caso real.

*Demonstração.* A demonstração inicia-se aplicando a desigualdade de Hölder adequadamente:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3}} |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3}} \right), \quad \text{Hölder, } p = 3, \ p' = 3/2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3} \cdot 3} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)| \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{Hölder, } p = 3/2, \ p' = 3 \\
 &\leq \left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)| \right)^{\frac{2}{3} \cdot 3} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{3}},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left( \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)| \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Mas pela desigualdade de Minkowski,

$$\left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2}.$$

Logo,

$$\left( \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (2.1)$$

Iremos estimar o primeiro desses fatores (a estimativa para o segundo é obtida por argumento similar). A desigualdade de Khinchin nos informa que

$$\sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^N \sqrt{2} \int_I \left| \sum_{j=1}^N T(e_i, e_j) r_j(t) \right| dt = \sqrt{2} \int_I \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N T(e_i, e_j) r_j(t) \right| dt.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \int_I \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N T(e_i, e_j) r_j(t) \right| dt \\
 &\leq \sqrt{2} \int_I \sup_{t \in I} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N T(e_i, e_j) r_j(t) \right| dt \\
 &= \sqrt{2} \sup_{t \in I} \sum_{i=1}^N \left| T \left( e_i, \sum_{j=1}^N r_j(t) e_j \right) \right|. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Agora percebamos que, para cada  $t \in I$  fixo,  $T_t \stackrel{\text{def}}{=} T \left( \cdot, \sum_{j=1}^N r_j(t) e_j \right) : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$  é um operador linear limitado cuja norma cumpre

$$\|T_t\| = \left\| T \left( \cdot, \sum_{j=1}^N r_j(t) e_j \right) \right\| \leq \|T\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) e_j \right\| \stackrel{\text{Prop. A.8}}{\leq} \|T\| \cdot \|(e_j)_{j=1}^N\|_{1,w} = \|T\|,$$

onde a última desigualdade é consequência de  $\|(e_j)_{j=1}^N\|_{1,w} = 1$ , que por sua vez é justificado pelo Lema 2.3:  $(e_j)_{j=1}^N$  é um elemento de  $\ell_1^w(\ell_\infty^N)$  e como cada  $f \in (\ell_\infty^N)'$  pode ser visto com  $(f(e_j))_{j=1}^N \in \ell_1^N$ , teremos

$$\|(e_j)_{j=1}^N\|_{1,w} = \|(e_j)_{j=1}^N\|_{\ell_1^w(\ell_\infty^N)} = \sup_{f \in B_{(\ell_\infty^N)'}} \sum_{j=1}^N |f(e_j)| = \sup_{f \in B_{\ell_1^N}} \sum_{j=1}^N |f(e_j)| = 1.$$

Assim, aplicando o caso linear  $m = 1$  da desigualdade de Bohnenblust–Hille, que vale com constante igual à 1 (apresentaremos uma prova deste caso ao demonstrarmos o Teorema 2.10), ao operador linear  $T_t$ ,

$$\sum_{i=1}^N \left| T \left( e_i, \sum_{j=1}^N r_j(t) e_j \right) \right| = \sum_{i=1}^N |T_t(e_i)| \leq \|T_t\| = \|T\|.$$

Por conseguinte, da desigualdade (2.2) obteremos

$$\sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \sup_{t \in I} \sum_{i=1}^N \left| T \left( e_i, \sum_{j=1}^N r_j(t) e_j \right) \right| = \sqrt{2} \sup_{t \in I} \sum_{i=1}^N |T_t(e_i)| \leq \sqrt{2} \|T\|,$$

o que fornece uma estimativa para o primeiro fator da desigualdade 2.1 (o outro fator é estimado de modo similar). Logo,

$$\left( \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leq \left( \sqrt{2} \|T\| \right)^{1/2} \left( \sqrt{2} \|T\| \right)^{1/2} = \sqrt{2} \|T\|,$$

ficando, portanto, provada a desigualdade. A otimalidade do expoente  $4/3$  já foi vista no Teorema 2.6. Para provarmos que a constante  $\sqrt{2}$  é ótima no caso real, denotemos por  $K_2$  o ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade  $4/3$  de Littlewood, o qual é atingido, como garantido pela observação 2.4. Dessa forma, basta provarmos que  $K_2 \geq \sqrt{2}$ . Para tanto, procederemos como em [14]: consideremos a seguinte forma bilinear  $U : c_0 \times c_0 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$U((x_n)_n, (y_n)_n) := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2.$$

Note que

$$|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| = 2 \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

é válida para quaisquer números reais  $\alpha$  e  $\beta$  (isso pode ser checado uma vez que podemos escrever  $\beta = \lambda\alpha$  sempre que  $\alpha \neq 0$ )<sup>2</sup>. Com isso,

$$\begin{aligned} |U(x, y)| &= |x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_2)| \\ &\leq \|x\| (|y_1 + y_2| + |y_1 - y_2|) \\ &= 2\|x\| \max\{|y_1|, |y_2|\} \\ &\leq 2\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Por outro lado,  $U(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2$ , logo  $\|U\| = 2$ . Dado um inteiro arbitrário  $N \geq 2$ , teremos

$$\left( \sum_{i,j=1}^N |T(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} = 4^{3/4} \leq K_2 \|U\| = 2K_2,$$

ou seja,  $K_2 \geq \sqrt{2}$ , o que conclui a otimalidade de  $\sqrt{2}$ . □

Nos resultados principais em seguida, usaremos a notação da Proposição 2.8 e consideraremos as constantes ótimas da Desigualdade de Khinchin 2.7.

**Teorema 2.10** (Pellegrino e Seoane, 2012). *Vale a Desigualdade de Bohnenblust–Hille com constantes*

$$C_m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1; \\ C_{\frac{m}{2}} \cdot A_{\frac{2m}{m+2}}^{-\frac{m}{2}}, & \text{se } m \text{ for par}; \\ \left( C_{\frac{m-1}{2}} \cdot A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{-\frac{m+1}{2}} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \cdot \left( C_{\frac{m+1}{2}} \cdot A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{-\frac{m-1}{2}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}, & \text{se } m \text{ for ímpar}. \end{cases}$$

Em particular,  $C_2 = \sqrt{2}$  e  $C_m = \sqrt{2} \cdot C_{m/2}$ , se  $m$  é par e  $2 \leq m \leq 24$ .

---

<sup>2</sup>Salientamos que esta propriedade não vale em ambiente complexo, uma vez que  $|i+1| + |i-1| = 2\sqrt{2} > 2 = 2 \max\{|i|, |1|\}$ . Portanto tal argumento não serve para obtermos a otimalidade de  $\sqrt{2}$  no caso complexo.

*Demonstração.* O caso linear ( $m = 1$ ) é simples de ser provado: como foi visto na Proposição 1.17,  $\prod_{(1;1)}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) = \mathcal{X}'$  e  $\|\cdot\|_{\pi(1;1)} = \|\cdot\|_{\mathcal{X}'}$ , logo  $C_1 = 1$ ; outro modo de provar isso é usar a relação de dualidade dada pela Proposição A.1 entre  $(c_0)'$  e  $\ell_1$  para obter que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f(e_n)| = \|f\|,$$

qualquer que seja  $f \in (c_0)'$ . Como a Proposição 2.4 nos garante que basta considerarmos as constantes da desigualdade quando o espaço em questão é  $c_0$ , concluímos que  $C_1 = 1$ . O caso  $m = 2$  é a desigualdade  $4/3$  de Littlewood, cuja constante (ótima) já vimos anteriormente que vale  $\sqrt{2}$  (no caso real). Verifiquemos que vale a expressão afirmada:  $C_2 = C_1 \cdot (A_1)^{-1}$ , com  $A_1 \stackrel{\text{Teo. 2.7}}{=} 2^{1/2-1} = 2^{-1/2}$ , portanto  $C_2 = \sqrt{2}$  verifica a expressão. Procederemos de acordo com o Princípio da Indução Finita sobre  $m$ . Iremos supor que o resultado seja válido para  $1, 2, \dots, m-1$ . Dados  $N \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$  e  $x_1^k, \dots, x_N^k \in \mathcal{X}_k$ , tais que  $\|(x_i^k)_{i=1}^N\|_{1,w} \leq 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ , analisaremos os casos em que  $m$  é par ou ímpar separadamente.

*Caso  $m$  par:* obteremos a etapa  $m$  a partir da  $m/2$ . Considerando  $q = 2$  e  $s_1 = s_2 = \frac{2 \cdot m/2}{2+m/2} = \frac{2m}{m+2}$ , teremos  $g(s_1, s_2) = \frac{2m}{m+1}$  e  $f(s_1, s_2) = 1/2$ . Fazendo uso da Proposição 2.8, aliada ao fato de que um soma do tipo  $\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N$  pode ser vista da forma  $\sum_{(a,b) \in A \times B}$ , onde  $A = B = \{1, \dots, N \cdot m/2\}$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ & \stackrel{\text{Prop. 2.8}}{\leq} \left( \sum_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \right\|_2^{s_1} \right)^{\frac{f(s_1, s_2)}{s_1}} \times \\ & \quad \times \left( \sum_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N \right\|_2^{s_2} \right)^{\frac{f(s_2, s_1)}{s_2}}. \end{aligned}$$

Cada um dos dois fatores anteriores será estimado separadamente. Por simplicidade, escreveremos  $dt_A = dt_1 \cdots dt_{m/2}$ . Fixados  $i_{m/2+1}, \dots, m$ , pela Proposição 2.9 temos

$$\begin{aligned} & \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N \right\|_2^{s_2} \\ & \stackrel{\text{Prop. 2.9}}{\leq} (A_{s_2}^{-m/2})^{s_2} \cdot \int_{I^{m/2}} \left| \sum_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m) r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_{m/2}}(t_{m/2}) \right|^{s_2} dt_A \\ & = (A_{s_2}^{-m/2})^{s_2} \cdot \int_{I^{m/2}} \left| T \left( \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_{m/2}=1}^N r_{i_{m/2}}(t_{m/2}) x_{i_{m/2}}^{m/2}, x_{i_{m/2+1}}^{m/2+1}, \dots, x_{i_m}^m \right) \right|^{s_2} dt_A. \end{aligned}$$

Somando essa desigualdade sobre todos os índices  $i_{m/2+1}, \dots, i_m = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N \right\|_2^{s_2} \cdot (A_{s_2}^{m/2})^{s_2} \\ & \leq \int_{I^{m/2}} \sum_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \left| T \left( \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_{m/2}=1}^N r_{i_{m/2}} x_{i_{m/2}}^{m/2}, x_{i_{m/2+1}}^{m/2+1}, \dots, x_{i_m}^m \right) \right|^{s_2} dt_A. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Na última linha da expressão acima, o termo no interior do módulo pode ser visto como um operador  $m/2$ -linear limitado aplicado em  $(x_{i_{m/2+1}}^{m/2+1}, \dots, x_{i_m}^m) \in \mathcal{X}_{m/2+1} \times \dots \times \mathcal{X}_m$ , uma vez que os termos  $\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_{m/2}=1}^N r_{i_{m/2}} x_{i_{m/2}}^{m/2}$  não são afetados pelo somatório  $\sum_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N$ . Portanto, pela hipótese de indução (HI), é um operador múltiplo  $(s_2; 1)$ -somante cuja norma  $\|\cdot\|_{\pi(s_2; 1)}$  é menor igual que norma  $\|\cdot\|$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \left| T \left( \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_{m/2}=1}^N r_{i_{m/2}} x_{i_{m/2}}^{m/2}, x_{i_{m/2+1}}^{m/2+1}, \dots, x_{i_m}^m \right) \right|^{s_2} \\ & \stackrel{\text{HI}}{\leq} \left\| T \left( \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_{m/2}=1}^N r_{i_{m/2}} x_{i_{m/2}}^{m/2}, \cdot, \dots, \cdot \right) \right\|_{\pi(s_2; 1)}^{s_2} \\ & \stackrel{\text{HI}}{\leq} (C_{m/2})^{s_2} \cdot \left( \|T\| \cdot \left\| \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1 \right\| \cdots \left\| \sum_{i_{m/2}=1}^N r_{i_{m/2}} x_{i_{m/2}}^{m/2} \right\| \right)^{s_2} \\ & \leq (C_{m/2} \cdot \|T\|)^{s_2}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

com a última desigualdade justificada por  $\left\| \sum_{i_l=1}^N r_{i_l}(t_l) x_{i_l}^l \right\| \leq \left\| (x_{i_l})_{i_l=1}^N \right\|_{1,w} \leq 1$ ,  $l = 1, \dots, m/2$ , que por sua vez é assegurada pela Proposição A.8 do Apêndice A. Reunindo as desigualdades (2.3) e (2.4), conquistamos a estimativa almejada, visto que

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N \right\|_2^{s_2} \right)^{1/s_2} \\ & \leq \left( (A_{s_2}^{-m/2})^{s_2} \cdot \int_{I^{m/2}} (C_{m/2} \cdot \|T\|)^{s_2} dt_A \right)^{1/s_2} \\ & = A_{s_2}^{-m/2} \cdot C_{m/2} \cdot \|T\|. \end{aligned}$$

Uma adaptação simples do mesmo argumento nos leva à outra estimativa:

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_{m/2}=1}^N \left\| (T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m))_{i_{m/2+1}, \dots, i_m=1}^N \right\|_2^{s_1} \right)^{1/s_1} \leq A_{s_2}^{-m/2} \cdot C_{m/2} \cdot \|T\|,$$

que, combinada com a anterior, e por  $f(s_1, s_2) = f(s_2, s_1) = 1/2$ , nos fornece

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N |T(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq A_{s_2}^{-m/2} \cdot C_{m/2} \cdot \|T\|.$$

Portanto, como  $s_1 = s_2 = \frac{2m}{m+2}$ , concluímos que  $T \in \prod_{(\frac{2m}{m+2}; 1)}^m (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})$ ,

$$\|\cdot\|_{\pi(\frac{2m}{m+2}; 1)} \leq A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2} \cdot C_{m/2} \cdot \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m; \mathbb{K})}$$

e

$$C_m = \frac{C_{m/2}}{A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}}.$$

*Caso m ímpar:* difere do argumento usado na situação par apenas por ser consequência das etapas  $\frac{m-1}{2}$  e  $\frac{m+1}{2}$ ; e, na notação da Proposição 2.8, por fazermos uso de  $q = 2$ ,  $s_1 = \frac{2 \cdot \frac{m-1}{2}}{\frac{m-1}{2} + 1} = \frac{2m-2}{m+1}$  e  $s_2 = \frac{2 \cdot \frac{m+1}{2}}{\frac{m+1}{2} + 1} = \frac{2m+2}{m+3}$ , que implicam  $g(s_1, s_2) = \frac{2m}{m+1}$ ,  $f(s_1, s_2) = \frac{m-1}{2m}$  e  $f(s_2, s_1) = \frac{m+1}{2m}$ . Realizadas essas modificações, um prova similar nos conduz à mesma conclusão do caso par, a menos das constantes, que agora assumem a forma

$$C_m = \left( \frac{C_{\frac{m-1}{2}}}{A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \cdot \left( \frac{C_{\frac{m+1}{2}}}{A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{m+1}{2}}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}.$$

Por fim, façamos uma estimativa das constantes  $C_m$ . Da Proposição 2.7 sabemos que  $A_p = 2^{1/2-1/p}$ , sempre que  $p \leq 1,847$ . Logo, para  $2 \leq m \leq 24$ , teremos  $A_{\frac{2m}{m+2}} = 2^{-1/m}$  e, portanto,  $C_m = \sqrt{2} \cdot C_{m/2}$ , para  $m$  par e  $2 \leq m \leq 24$ .  $\square$

No caso complexo, as constantes de Pellegrino e Seoane-Sepúlveda perdem em precisão comparadas às constantes  $(2/\sqrt{\pi})^{m-1}$  obtidas por Queffélec [29], e Defant e Sevilla-Peris [10], para  $2 \leq m \leq 11$ . No entanto, para  $m \geq 12$  ocorre inversão dos papéis, como pode ser visto na tabela a seguir.

| $m$ | $C_{\mathbb{C},m}$ [30, 2012] | $C_{\mathbb{C},m} = (2/\sqrt{\pi})^{m-1}$ [10, 29, 1995] |
|-----|-------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 2   | 1,41421                       | 1,12837                                                  |
| 3   | 1,789                         | 1,27323                                                  |
| 4   | 2                             | 1,43669                                                  |
| 5   | 2,298                         | 1,62113                                                  |
| 6   | 2,520                         | 1,82925                                                  |
| 7   | 2,6918                        | 2,06409                                                  |
| 8   | 2,8284                        | 2,32908                                                  |
| 9   | 3,055                         | 2,62809                                                  |
| 10  | 3,249                         | 2,96548                                                  |
| 11  | 3,4174                        | 3,34618                                                  |
| 12  | 3,563                         | 3,77577                                                  |

Tabela 2.1: Comparativo das Constantes Complexas do Teorema 2.10 (valores aproximados).

Apesar dessa discrepância dos valores iniciais, o resultado de Pellegrino e Seoana-Sepúlveda pode ser modificado de modo a tirar proveito disso: sendo a prova obtida por um argumento recursivo, tomam-se como valores iniciais  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$  as constantes  $(2/\sqrt{\pi})^{m-1}$ , continuando com as expressões obtidas no Teorema 2.10 para  $m \geq 7$ . Com essa modificação, o resultado com melhores constantes para o caso complexo assume a forma do resultado em seguida.

**Teorema 2.11** (Pellegrino e Seoane, 2012). *Vale o Teorema de Bohnenblust–Hille no caso complexo, com constantes*

$$C_{\mathbb{C},m} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1; \\ (2/\sqrt{\pi})^{m-1}, & \text{se } m \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \\ C_{\mathbb{C}, \frac{m}{2}} \cdot A_{\frac{2m}{m+2}}^{-\frac{m}{2}}, & \text{se } m \text{ for par e } m > 6; \\ \left( C_{\mathbb{C}, \frac{m-1}{2}} \cdot A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{-\frac{m+1}{2}} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \cdot \left( C_{\mathbb{C}, \frac{m+1}{2}} \cdot A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{-\frac{m+1}{2}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}, & \text{se } m \text{ for ímpar e } m > 5. \end{cases}$$

A tabela a seguir evidencia a melhoria dessas novas constantes comparada às anteriores. Os valores das novas constantes  $C_{\mathbb{C},m}$  foram fornecidos por Pellegrino e Seoane–Sepúlveda. Os valores das constantes de Queffélec–Defant–Peris, Kaijser e das originais de Bohnenblust–Hille foram calculadas em [TTMath].

| $m$  | Novas $C_{\mathbb{C},m}$ [30, 2012] | $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$ [10, 29, 1995] | $2^{\frac{m-1}{2}}$ [19, 1978] | $m^{\frac{m+1}{2m}} \cdot 2^{\frac{m-1}{2}}$ [4, 1931] |
|------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 2    | 1,12837                             | 1,12837                                                  | 1,41421                        | 2,3784                                                 |
| 3    | 1,27323                             | 1,27323                                                  | 2                              | 4,1601                                                 |
| 4    | 1,43669                             | 1,43669                                                  | 2,828                          | 6,7271                                                 |
| 5    | 1,62113                             | 1,62113                                                  | 4                              | 10,5061                                                |
| 6    | 1,82925                             | 1,82925                                                  | 5,656                          | 16,0877                                                |
| 7    | 1,9293                              | 2,06409                                                  | 8                              | 24,3222                                                |
| 8    | 2,031                               | 2,329                                                    | 11,313                         | 36,442                                                 |
| 9    | 2,172                               | 2,628                                                    | 16                             | 54,232                                                 |
| 10   | 2,292                               | 2,965                                                    | 22,627                         | 80,283                                                 |
| 11   | 2,449                               | 3,346                                                    | 32                             | 118,354                                                |
| 12   | 2,587                               | 3,775                                                    | 45,425                         | 173,869                                                |
| 13   | 2,662                               | 4,260                                                    | 64                             | 254,680                                                |
| 14   | 2,728                               | 4,807                                                    | 90,509                         | 372,128                                                |
| 15   | 2,805                               | 5,424                                                    | 128                            | 542,574                                                |
| 25   | 3,715                               | 18,151                                                   | 4096                           | 21841                                                  |
| 50   | 5,302                               | 371,790                                                  | 23726566                       | 174465514                                              |
| 100  | 7,602                               | 155973                                                   | $7,961 \cdot 10^{14}$          | $8,146 \cdot 10^{15}$                                  |
| 500  | 17                                  | $1,496 \cdot 10^{26}$                                    | $1,279 \cdot 10^{75}$          | $2,878 \cdot 10^{76}$                                  |
| 1000 | 25                                  | $2,526 \cdot 10^{52}$                                    | $2,314 \cdot 10^{150}$         | $7,344 \cdot 10^{151}$                                 |
| 5000 | 58                                  | $1,67 \cdot 10^{262}$                                    | $2,657 \cdot 10^{753}$         | $1,88 \cdot 10^{754}$                                  |

Tabela 2.2: Comparativo das Constantes Complexa no Teorema 2.11 (valores aproximados).

**Nota Final:** Mais recentemente, o trabalho de Nuñez-Alarcón, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda [26, 2012] traz estimativas ainda melhores para o caso complexo que as apresentadas nesse texto. Os autores modificaram a demonstração do Teorema 2.10, fazendo uso de uma forma alternativa da Desigualdade de Khinchin que usa Variáveis de Steinhaus, resultando em constantes ainda menores, até mesmo que as de Queffélec–Defant–Peris nos casos iniciais de  $m$ .

## Capítulo 3

# Comportamento Assintótico

Nesse capítulo discorreremos principalmente sobre resultados tratados em [13, 2012], e alguns outros de [27, 2012]. O capítulo anterior culmina na atestação de que as estimativas dos Teoremas 2.10 e 2.11 são mais precisas que as anteriores. Aqui apresentaremos mais uma virtude dessas: crescimento assintótico ótimo. Mais precisamente, com isso queremos dizer que as constantes

$$C_m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1; \\ C_{\frac{m}{2}} \cdot A_{\frac{2m}{m+2}}^{-\frac{m}{2}}, & \text{se } m \text{ for par}; \\ \left( C_{\frac{m-1}{2}} \cdot A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{-\frac{m+1}{2}} \right)^{\frac{m-1}{2m}} \cdot \left( C_{\frac{m+1}{2}} \cdot A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{-\frac{m-1}{2}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}, & \text{se } m \text{ for ímpar}. \end{cases}$$

(a partir desse momento simplesmente denotadas dessa forma) satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 1.$$

Conforme visto no capítulo anterior, essas não são as melhores estimativas para o caso complexo, mas servirão para concluirmos dois importantes fatos a respeito das constantes ótimas  $(K_n)_n$  (daqui por diante assim representadas) que satisfazem o Teorema de Bohnenblust–Hille:

1.  $(K_n)_n$  possui crescimento subexponencial;
2. Caso exista o limite  $\lim_n \frac{K_{n+1}}{K_n}$ , este será, necessariamente, igual a 1.

É importante ressaltar que, não obstante as oito décadas de existência do resultado de Bohnenblust e Hille, e de melhores estimativas terem sido alcançadas ao longo dos anos, nenhuma informação a respeito do comportamento assintótico das constantes ótimas havia sido obtida previamente na literatura. Das estimativas anteriores, sabia-se que o crescimento ocorria em taxa exponencial de ordem:

- $\sqrt{2} \approx 1,4142$  (Kaijser [19]);

- $2/\sqrt{\pi} \approx 1,1284$  (Queffelec [29], Defant–Sevilla [10]);

o que comprova a importância dos resultados obtidos em [13, 2012]. Afora o interesse matemático intrínseco, o conhecimento preciso desse comportamento assintótico teve particular relevância em recentes aplicações da Teoria da Informação Quântica, uma vez que o crescimento das constantes está relacionado com a conjectura de Aaronson e Ambainis (ver [1]), relacionada a simulações clássicas de *quantum query algorithms*, e ainda por o Teorema de Bohnenblust–Hille possuir potencial uso em *XOR-games* (conforme cita [23, 2012]).

### 3.1 Bohnenblust e Hille encontram Euler

Nesta seção estabeleceremos uma relação entre as constantes  $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$  e a notória *constante de Euler–Mascheroni*  $\gamma$ <sup>1</sup>, formalmente definida por

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \approx 0.5772156649.$$

Mais especificamente, esse vínculo ocorre por consequência da proximidade entre a constante de Euler e a clássica Função Gama, cuja definição vale a pena ser lembrada:  $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\Gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ . Uma das relações (clássicas) mais simples entre  $\Gamma$  e  $\gamma$  é

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

Para maiores detalhes de como a constante de Euler e a função Gama estão relacionada, sugerimos [17, Chapter 6: Gamma meets Gamma]. Como cada  $C_m$  depende das constantes de Haagerup que, por sua vez, utilizam a Função Gama, a conexão é então estabelecida.

Na busca do comportamento assintótico, analisamos o quociente  $C_{m+1}/C_m$  nos casos em que  $m$  é par e ímpar separadamente. No caso em que  $m$  é par,

$$\frac{C_m}{C_{m/2}} = A_{\frac{2m}{m+2}}^{-\frac{m}{2}} \tag{3.1}$$

e no caso em que  $m$  é ímpar,

$$\frac{C_m}{\left(C_{\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \cdot \left(C_{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}} = \left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}\right)^{\frac{1-m^2}{4m}} \cdot \left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}\right)^{\frac{1-m^2}{4m}}, \tag{3.2}$$

logo, estamos à procura do que ocorre com os termos  $A_{\frac{2m}{m+2}}^{-\frac{m}{2}}$ ,  $\left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}\right)^{\frac{1-m^2}{4m}}$  e  $\left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}\right)^{\frac{1-m^2}{4m}}$ ,

---

<sup>1</sup>Descoberta em 1734, na publicação de Euler *De Progressionibus Harmonicis Observationes*, até a presente data não se sabe se é um valor algébrico ou transcendental.

quando  $m \rightarrow +\infty$ . Recordando o Teorema 2.7:  $p_0 \approx 1,8474$  é o único real tal que  $p_0 \in (1, 2)$  e  $\Gamma((p_0 + 1)/2) = \sqrt{\pi}/2$ ; e quando  $p \in (p_0, 2)$ ,

$$A_p = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/p} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \cdot \left( \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(3/2)} \right)^{1/p}.$$

(usamos as propriedades da função  $\Gamma$  para obter a segunda igualdade:  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2})$ ). Para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{2m}{m+2} < 2$ , logo, sempre que  $m \geq 25$ , teremos  $p_0 < \frac{2m}{m+2} < 2$  e

$$A_{\frac{2m}{m+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \Gamma\left(\frac{\frac{2m}{m+2} + 1}{2}\right) / \Gamma(3/2) \right)^{\frac{m+2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right) / \Gamma(3/2) \right)^{\frac{m+2}{4}}.$$

Da mesma forma,  $m \geq 26$  implica  $p_0 < \frac{2m-2}{m+1}$ ,  $\frac{2m+2}{m+3} < 2$  e, consequentemente,

$$\left( A_{\frac{2m-2}{m+1}} \right)^{\frac{m^2-1}{4m}} = 2^{\frac{m^2-1}{8m}} \cdot \left( \Gamma\left(\frac{3m-1}{2m+2}\right) / \sqrt{\pi} \right)^{\frac{(m+1)^2}{8m}}$$

e

$$\left( A_{\frac{2m+2}{m+3}} \right)^{\frac{m^2-1}{4m}} = 2^{\frac{m^2-1}{8m}} \cdot \left( \Gamma\left(\frac{3m+5}{2(m+3)}\right) / \sqrt{\pi} \right)^{\frac{m+3}{2(m+1)}}.$$

Fazendo uso de recurso computacional, obtemos <sup>2</sup>

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \Gamma\left(\frac{3m+2}{2m+4}\right) / \Gamma(3/2) \right)^{\frac{m+2}{4}} = \frac{2}{e^{1-\gamma/2}},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2^{\frac{m^2-1}{8m}} \cdot \left( \Gamma\left(\frac{3m-1}{2m+2}\right) / \sqrt{\pi} \right)^{\frac{(m+1)^2}{8m}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot \left( e^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma} \right)$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2^{\frac{m^2-1}{8m}} \cdot \left( \Gamma\left(\frac{3m+5}{2(m+3)}\right) / \sqrt{\pi} \right)^{\frac{m+3}{2(m+1)}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot \left( e^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma} \right).$$

Portanto em ambos os casos, real e complexo, concluiremos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_{\frac{2m}{m+2}}^{-\frac{m}{2}} = \frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}} \approx 1.4402, \quad (3.3)$$

quando  $m$  for par, e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( A_{\frac{2m-2}{m+1}} \right)^{\frac{1-m^2}{4m}} \cdot \left( A_{\frac{2m+2}{m+3}} \right)^{\frac{1-m^2}{4m}} = \left( \frac{e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma}}{2^{1/4}} \right)^2 = \frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}}, \quad (3.4)$$

quando  $m$  for ímpar. De posse desses limites, analisaremos o comportamento assintótico das  $C_m$ .

---

<sup>2</sup>Valores calculados em [WolframAlpha].

### 3.2 Comportamento Assintótico das constantes $C_m$

Versaremos sobre um dos principais teoremas do artigo [13, 2012]: o comportamento assintótico das constantes  $C_m$  é ótimo, no sentido de possuírem crescimento controlado, na forma do limite destacado do teorema a seguir, comparado ao crescimento exponencial das constantes provenientes de outros resultados. Mais especificamente, esse resultado nos informa que

**Teorema 3.1** (Diniz–Muñoz–Pellegrino–Seoane, 2012). *Existe uma sequência  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de constantes que cumprem o Teorema de Bohnenblust–Hille e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 1.$$

Conforme já mencionamos, tais constantes são as constantes  $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ . As próximas ideias desenvolvidas ao longo dessa seção seguem na direção de provar que as  $C_m$  satisfazem o limite desse teorema, cuja demonstração iniciaremos a partir desse momento.

Das expressões (3.1) e (3.2), e dos limites (3.3) e (3.4), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}}{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n+1}}{C_n^{\frac{2n}{2(2n+1)}} \cdot C_{n+1}^{\frac{2n+2}{2(2n+1)}}} = \frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}} \approx 1.4402. \quad (3.5)$$

Uma vez que

$$\frac{C_{2n}}{C_n} \cdot \left( \frac{C_{2n-1}}{C_{n-1}^{\frac{n-1}{2n-1}} \cdot C_n^{\frac{n}{2n-1}}} \right)^{-1} = \frac{C_{2n}/C_{2n-1}}{(C_n/C_{n-1})^{\frac{n-1}{2n-1}}} \quad (3.6)$$

e

$$\frac{C_{2n+1}}{C_n^{\frac{n}{2n+1}} \cdot C_{n+1}^{\frac{n+1}{2n+1}}} \cdot \left( \frac{C_{2n}}{C_n} \right)^{-1} = \frac{C_{2n+1}/C_{2n}}{(C_{n+1}/C_n)^{\frac{n+1}{2n+1}}}, \quad (3.7)$$

de (3.5) e (3.6) obteremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}/C_{2n-1}}{(C_n/C_{n-1})^{\frac{n-1}{2n-1}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{C_{2n}}{C_n} \cdot \left( \frac{C_{2n-1}}{C_{n-1}^{\frac{n-1}{2n-1}} \cdot C_n^{\frac{n}{2n-1}}} \right)^{-1} \right] \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}}{C_n} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n-1}}{C_{n-1}^{\frac{n-1}{2n-1}} \cdot C_n^{\frac{n}{2n-1}}} \right)^{-1} \\ &= \frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{e^{1-\gamma/2}} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

e de (3.5) e (3.7),

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n+1}/C_{2n}}{(C_{n+1}/C_n)^{\frac{n+1}{2n+1}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{C_{2n+1}}{C_n^{\frac{n}{2n+1}} \cdot C_{n+1}^{\frac{n+1}{2n+1}}} \cdot \left( \frac{C_{2n}}{C_n} \right)^{-1} \right] \\
 &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n+1}}{C_n^{\frac{n}{2n+1}} \cdot C_{n+1}^{\frac{n+1}{2n+1}}} \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}}{C_n} \right)^{-1} \\
 &= \frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{e^{1-\gamma/2}} \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Em [28, Theorem 2], consta

**Proposição 3.2** (Qi, 2002).  $\left( \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(r)} \right)^{\frac{1}{s-r}}$  é crescente, com  $r, s > 0$ , i.e.,

$$0 < s_1 \leq s_2 \Rightarrow \left( \frac{\Gamma(s_1)}{\Gamma(r)} \right)^{\frac{1}{s_1-r}} \leq \left( \frac{\Gamma(s_2)}{\Gamma(r)} \right)^{\frac{1}{s_2-r}}$$

e

$$0 < r_1 \leq r_2 \Rightarrow \left( \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(r_1)} \right)^{\frac{1}{s-r_1}} \leq \left( \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(r_2)} \right)^{\frac{1}{s-r_2}}.$$

De posse dessa ferramenta, conseguimos

**Proposição 3.3** ([27], Lemma 6.1).  $\left( A_{\frac{2n}{n+2}}^{-n/2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente. Em particular,

$$C_{2n} \leq C_n \cdot \left( \frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}} \right),$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.7, teremos, para  $n < 25$ ,

$$A_{\frac{2n}{n+2}}^{-n/2} = \left( 2^{\frac{1}{2} - \frac{n+2}{2n}} \right)^{-n/2} = \left( 2^{-1/n} \right)^{-n/2} = \sqrt{2},$$

logo, a sequência é constante até o vigésimo quarto termo. Para  $n \geq 25$ , sabemos que

$$A_{\frac{2n}{n+2}}^{-n/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \Gamma \left( \frac{3n+2}{2n+4} \right) / \Gamma(3/2) \right)^{-\frac{n+2}{4}}.$$

Usando o resultado de F. Qi, com  $s_n = (3n+2)/(2n+4)$  e  $r_n = 3/2$ , concluímos que

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \left( \frac{\Gamma\left(\frac{3n+2}{2n+4}\right)}{\Gamma(3/2)} \right)^{-\frac{n+2}{2}} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \left( \frac{\Gamma(s_n)}{\Gamma(r_n)} \right)^{\frac{1}{s_n - r_n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é crescente, uma vez que  $s_n = \frac{3n+2}{2n+4} < \frac{3n+5}{2n+6} = s_{n+1}$ . Com isso, a monotonicidade segue de  $A_{\frac{2n}{n+2}}^{-n/2} = \sqrt{\alpha_n/2}$ , para cada natural  $n$ . Do limite (3.3), da relação  $\frac{C_m}{C_{m/2}} = A_{\frac{2m}{m+2}}^{-m/2}$  e por  $\left(A_{\frac{2n}{n+2}}^{-n/2}\right)_n$  ser crescente, obtem-se  $C_{2n} \leq C_n \cdot \left(\frac{e^{1-\gamma/2}}{\sqrt{2}}\right)$ .  $\square$

A principal consequência da proposição anterior é o próximo resultado, também extraído de [27], que apresenta papel crucial para concluirmos o Teorema 3.1:

**Teorema 3.4** ([27], Proposition 6.2).  $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$  é crescente.

*Demonstração.* Procederemos por indução (os primeiros valores são verificados manualmente). Suponhamos que o resultado seja válido para todos os inteiros positivos menores que  $m$ .

*Caso  $n$  par:* Note  $C_n \leq C_{n+1}$  equivale a

$$\frac{C_{n/2}}{A_{\frac{2n}{n+2}}^{n/2}} \leq \left( \frac{C_{n/2}}{A_{\frac{(n+2)/2}{n+2}}^{(n+2)/2}} \right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot \left( \frac{C_{(n+2)/2}}{A_{\frac{2n+4}{n+4}}^{n/2}} \right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}},$$

e esta é equivalente a

$$(C_{n/2})^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \left( \left( A_{\frac{2n}{n+2}}^{n/2} \right)^{-1} \right)^{\frac{n}{2(n+1)}} \leq (C_{(n+2)/2})^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \left( \left( A_{\frac{2n+4}{n+4}}^{(n+2)/2} \right)^{-1} \right)^{\frac{n}{2(n+1)}}.$$

Por hipótese de indução,  $C_{n/2} \leq C_{(n+2)/2}$ , e pela proposição anterior,  $A_{\frac{2n}{n+2}}^{-n/2} \leq A_{\frac{2n+4}{n+4}}^{-n/2}$ , logo a última desigualdade ocorre e isso conclui a prova desse caso.

*Caso  $n$  ímpar:* Similarmente,  $C_n \leq C_{n+1}$  é o mesmo que

$$\left( A_{\frac{2n-2}{n+1}}^{-\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} C_{\frac{2n}{n+1}}^{\frac{n-1}{2}} \leq \left( A_{\frac{2n+2}{n+3}}^{-\frac{n+1}{2}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} C_{\frac{2n}{n+1}}^{\frac{n-1}{2}},$$

o resultado segue por  $C_{\frac{2n}{n+1}}^{\frac{n-1}{2}} \leq C_{\frac{2n}{n+1}}^{\frac{n-1}{2}}$  ser consequência da hipótese de indução, e  $A_{\frac{2n-2}{n+1}}^{-\frac{n-1}{2}} \leq A_{\frac{2n+2}{n+3}}^{-\frac{n+1}{2}}$  ser assegurado pela proposição anterior.  $\square$

Consideremos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n \stackrel{\text{def}}{=} C_{n+1}/C_n$ . A monotonicidade do resultado anterior nos informa que  $D_n \geq 1$ . Da Proposição 3.3, sabemos que  $(C_{2n}/C_n)_n$  é limitada por uma constante uma constante  $K > 1$ , e com isso,

$$K \geq \frac{C_{2n}}{C_n} = \frac{C_{2n}}{C_{2n-1}} \cdot \frac{C_{2n-1}}{C_{2n-2}} \cdots \frac{C_{n+1}}{C_n} = \prod_{k=n}^{2n-1} D_k \geq D_n \geq 1. \quad (3.10)$$

As afirmações que apresentaremos em seguida nos auxiliarão a mostrar que a sequência  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente e que seu limite é 1, concluindo a prova do Teorema 3.1. Nesse momento estabelecemos seguinte notação: dadas duas sequências de números reais positivos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , escreveremos  $x_n \sim y_n$  quando  $\lim_n x_n/y_n = 1$ . Com isso, vale a transitividade: se  $x_n \sim y_n$  e  $y_n \sim z_n$ , então  $x_n \sim z_n$ .

**Afirmação 1.** A sequência  $(D_n)_n$  satisfaz as seguintes identidades assintóticas:

- a.  $D_{2n-1} \sim \sqrt{D_{n-1}}$ ;
- b.  $D_{2n} \sim \sqrt{D_n}$ .

*Demonstração.* (a) Primeiro vejamos que  $(D_{n-1})^{\frac{n-1}{2n-1}} \sim \sqrt{D_{n-1}}$  ocorre. De fato,

$$(D_{n-1})^{\frac{n-1}{2n-1}} \cdot (D_{n-1})^{-\frac{1}{2}} = (D_{n-1})^{-\frac{1}{2(2n-1)}}.$$

Logo,  $1 \leq D_{n-1} \leq K$  implica  $1 \leq (D_{n-1})^{-\frac{1}{2(2n-1)}} \leq K^{-\frac{1}{2(2n-1)}}$ . Como  $\lim_n K^{-\frac{1}{2(2n-1)}} = 1$ , obtemos  $\lim_n (D_{n-1})^{-\frac{1}{2(2n-1)}} = 1$ , que prova  $(D_{n-1})^{\frac{n-1}{2n-1}} \sim \sqrt{D_{n-1}}$ . Por outro lado, o limite (3.8) significa que  $D_{2n-1} \sim (D_{n-1})^{\frac{n-1}{2n-1}}$ . Reunindo essas duas identidades assintóticas (e usando a transitividade), concluímos  $D_{2n-1} \sim \sqrt{D_{n-1}}$ .

(b): Similiarmente ao item anterior, inicialmente provemos  $(D_n)^{\frac{n+1}{2n+1}} \sim \sqrt{D_n}$ :

$$\begin{aligned} (D_n)^{\frac{n+1}{2n+1}} \cdot D_n^{-\frac{1}{2}} &= (D_n)^{\frac{1}{2(2n+1)}} \\ 1 \leq D_n \leq K &\Rightarrow 1 \leq (D_n)^{\frac{1}{2(2n+1)}} \leq (K)^{\frac{1}{2(2n+1)}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (K)^{\frac{1}{2(2n+1)}} &= 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (D_n)^{\frac{1}{2(2n+1)}} = 1 \end{aligned}$$

O limite (3.9) significa que  $D_{2n} \sim (D_n)^{\frac{n+1}{2n+1}}$ . Portanto,

$$D_{2n} \sim (D_n)^{\frac{n+1}{2n+1}} \quad \text{e} \quad (D_n)^{\frac{n+1}{2n+1}} \sim \sqrt{D_n} \Rightarrow D_{2n} \sim \sqrt{D_n}.$$

□

**Afirmação 2.** Seja  $P > 1$ . Se existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $n > n_0$  implica  $1 \leq D_n < P$ , então existe  $N > n_0$ , que cumpre  $n > N \Rightarrow 1 \leq D_n < P^{5/8}$ .

*Demonstração.* Seja  $0 < \varepsilon < P^{1/8} - 1$ . Sabemos que  $\lim_n D_{2n-1}/\sqrt{D_{n-1}} = 1$  (item (a) da afirmação anterior) e, por consequência, é possível escolhermos  $n_1 > n_0 + 1$ , tal que

$$n > n_1 \Rightarrow \frac{D_{2n-1}}{\sqrt{D_{n-1}}} < 1 + \varepsilon < P^{1/8} \Rightarrow D_{2n-1} < \sqrt{D_{n-1}} \cdot P^{1/8} < P^{5/8}.$$

O item (b) anterior significa  $\lim_n D_{2n}/\sqrt{D_n} = 1$ , e, analogamente, tomamos  $n_2 > n_0$  com a propriedade

$$n > n_2 \Rightarrow \frac{D_{2n}}{\sqrt{D_n}} < 1 + \varepsilon < P^{1/8} \Rightarrow D_{2n} < \sqrt{D_n} \cdot P^{1/8} < P^{5/8}.$$

Portanto, escolhendo  $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$  e  $N = 2n_3 + 1$ , concluímos a afirmação.  $\square$

**Afirmação 3.** Seja  $Q > 1$ . Se  $1 \leq D_n < Q$ , sempre que  $n > n_0$ , para algum natural  $n_0$ , então existe  $N \geq n_0$  tal que,  $n > N$  implica

$$1 \leq D_n < \sqrt{Q}.$$

*Demonstração.* De fato, basta usar a afirmação anterior duas vezes: como  $P = Q \geq 1$ ,  $D_n < Q^{5/8}$ , sempre que  $n > N_0$ ; usando a afirmação novamente com  $P = Q^{5/8}$ , obteremos um inteiro positivo  $N > N_0$ , com a propriedade

$$n > N \Rightarrow 1 \leq D_n \leq (Q^{5/8})^{5/8} = Q^{(5/8)^2} \leq Q^{1/2}.$$

$\square$

**Afirmação 4.** Seja  $C$  uma cota superior para  $(D_n)_n$ . Para cada inteiro positivo  $k$ , existe um inteiro positivo  $n_0$  (que depende de  $k$ ), tal que  $n > n_0$  implica

$$1 \leq D_n \leq C^{2^{-k}}.$$

*Demonstração.* Proceremos por indução sobre  $k$ . O caso  $k = 0$  é evidentemente válido por  $C$  ser uma cota superior para  $(D_n)_n$ . O caso  $k = 1$  é Afirmação 3. Suponhamos que o resultado ocorra para algum  $k \geq 0$ , ou seja, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $n > n_0 \Rightarrow 1 \leq D_n \leq C^{2^{-k}}$ . Então a Afirmação 3 garante a existência de  $n_1 > n_0$ , que cumpre

$$1 \leq D_n \leq \left(C^{2^{-k}}\right)^{1/2} = C^{2^{-(k+1)}},$$

sempre que  $n > n_1$ .  $\square$

De posse dessas afirmações, concluímos a demonstração do Teorema 3.1, obtendo que  $(D_n)_n$  é convergente e  $\lim_n D_n = 1$ . De fato, a equação (3.10) nos informa que  $D_n$  é limitada por alguma constante  $K > 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomarmos  $k_0 \in \mathbb{N}$  que satisfaça  $K^{2^{-k_0}} < 1 + \varepsilon$ , e usarmos a Afirmação 4, para enfim conquistarmos o resultado.

**Comentário:** nessa demonstração, seguimos o que foi feito em [13], a menos de um pequeno desvio na metade do argumento, onde provamos a monotonicidade de  $(C_m)_m$ . Apesar de suspeitarem disso devido aos fortes indícios numéricos, os autores desconheciam uma prova formal naquele momento. Então, para obter o Teorema 3.1 em [13], analisaram duas situações: a que a sequência é crescente, onde usa-se as afirmações apresentadas aqui para chegar-se à conclusão; e a que isso não ocorre, onde é feita uma perturbação nas  $C_m$  de modo que a monotonicidade seja obtida, e concluir da mesma maneira que na situação anterior. Mais recentemente, Nuñez, Pellegrino, Seoane e Serrano responderam afirmativamente essa questão da monotonicidade em [27, 2012], sendo assim, decidimos inserir esse resultado na prova do teorema em questão.

### 3.3 Comportamento Assintótico das constantes ótimas

Como consequência do crescimento controlado dos  $C_m$ , as constantes ótimas  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que cumpram o Teorema de Bohnenblust–Hille, também irão possuir um bom comportamento assintótico, como veremos nos resultados em seguida.

**Teorema 3.5.** *As constantes ótimas  $(K_n)_n$  possuem crescimento subexponencial.*

*Demonstração.* Devemos provar que dada qualquer constante  $C > 1$ , existe um inteiro positivo  $N$  com a seguinte propriedade:

$$n > N \implies K_n < C^n.$$

É suficiente provarmos que as constantes  $C_n$  possuem tal propriedade. Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $1 + \varepsilon < C$ . Como assegurado pelo Teorema 3.1,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 1.$$

Consequentemente, existe  $n_0$  tal que  $n > n_0 \implies \frac{C_{n+1}}{C_n} < 1 + \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} A < C$ . Por indução, obteremos que  $C_{n+k} < C_n \cdot A^k$ , para cada inteiro positivo  $k$ , onde  $n > n_0$ . Como

$$\frac{C_n \cdot A^k}{C^n \cdot C^k} = \left( \frac{C_n}{C^n} \right) \cdot \left( \frac{A}{C} \right)^k$$

e  $A < C$ , existe  $N$  tal que

$$k > N \implies \left( \frac{C_n}{C^n} \right) \cdot \left( \frac{A}{C} \right)^k < 1.$$

Portanto, o resultado segue de

$$k > N \implies C_{n+k} < C_n \cdot A^k < C^{n+k},$$

onde  $n > n_0$  é fixado previamente. □

**Teorema 3.6.** *O comportamento assintótico das constantes ótimas  $(K_n)_n$  que satisfazem o Teorema de Bohnenblust–Hille é ótimo. Mais especificamente, se o limite*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n},$$

*existir e for igual a  $L$ , concluiremos que  $L = 1$ .*

*Demonstração.* Provaremos que os casos  $L < 1$  e  $L > 1$  resultam em contradições.

*Caso  $L < 1$ :* Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $1 - \varepsilon \in (L, 1)$ . Então existe  $N_0$  tal que  $n \geq N_0 \implies K_{n+1}/K_n < 1 - \varepsilon$ . Por indução, obteremos  $K_{N_0+k} < K_{N_0} \cdot (1 - \varepsilon)^k$ , para cada  $k$  natural. Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0,$$

contradiz o fato de que  $K_n \geq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  (ver Observação 2.3).

*Caso  $L > 1$ :* Provaremos que existe um inteiro positivo suficientemente grande que satisfaz  $K_n > C_n$ , contradizendo a minimalidade de  $K_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$  (pequeno o suficiente), tomaremos  $n_0$  que cumpra

$$n \geq n_0 \implies \frac{C_{n+1}}{C_n} < 1 + \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} A \quad \text{e} \quad \frac{K_{n+1}}{K_n} > 1 + \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} B.$$

Logo,  $C_{n_0+k} < A^k \cdot C_{n_0}$  e  $K_{n_0+k} > B^k K_{n_0}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Então, teremos

$$\frac{K_{n_0}}{C_{n_0+k}} > \frac{B^k \cdot K_{n_0}}{A^k \cdot C_{n_0}} = \left(\frac{B}{A}\right)^k \cdot \frac{K_{n_0}}{C_{n_0}}.$$

Por  $B/A > 1$ , ocorre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{B}{A}\right)^k \cdot \frac{K_{n_0}}{C_{n_0}} = +\infty.$$

Assim existe  $L \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\left(\frac{B}{A}\right)^L \cdot \frac{K_{n_0}}{C_{n_0}} > 1,$$

e, portanto,

$$\frac{K_{n_0+L}}{C_{n_0+L}} > 1$$

fornece a contradição procurada. □

**Nota Final:** [27, 2012] traz outros resultados que complementam os tratados nesse capítulo: afirma a existência de uma sequência  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de constantes que cumprem o Teorema de Bohnenblust–Hille com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{C}_{n+1} - \mathcal{C}_n) = 0$ ; que as constantes ótimas  $K_n$  cumprem

$$K_{n+1} - K_n < \frac{0,87}{n^{0,473}},$$

para infinitos índices  $n$  (crescimento subpolinomial); e caso exista o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_{n+1} - K_n)$ , será necessariamente igual a zero.

# Apêndice A

## Resultados Auxiliares

Apresentamos alguns resultados independentes usados ao longo do texto.

**Proposição A.1.** Para  $1 \leq p < \infty$  a correspondência

$$\begin{aligned}\Phi : (\ell_p)' &\rightarrow \ell_{p'} \\ f &\mapsto (f(e_n))_n,\end{aligned}$$

estabelece um isomorfismo isométrico entre  $(\ell_p)'$  e  $\ell_{p'}$ . De maneira similar constrói-se uma relação de dualidade entre  $(c_0)'$  e  $\ell_1$ .

*Demonstração.* Provaremos apenas o resultado para  $1 < p < \infty$ . O mesmo argumento que apresentaremos aplica-se, *mutatis mutandis*, para obter-se o caso  $p = 1$  e a dualidade entre  $(c_0)'$  e  $\ell_1$ . Inicialmente vejamos que, como  $(e_n)_n$  é a base de Schauder canônica de  $\ell_p$ , cada  $a = (a_n)_n \in \ell_p$  é escrito da forma  $a = \sum_n a_n e_n$ , logo para  $f \in (\ell_p)'$  teremos

$$f(a) = f\left(\sum_n a_n e_n\right) = \sum_n a_n f(e_n).$$

Vejamos que  $\Phi$  é bem definida e limitada. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos a sequência  $\xi^n = (\xi_k^n)_k$  cujas entradas são

$$\xi_k^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |f(e_k)|^{p'} / f(e_k), & \text{se } f(e_k) \neq 0 \text{ e } 1 \leq k \leq n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso,

$$\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{p'} = f(\xi^n) \leq \|f\| \cdot \|\xi^n\|_p = \|f\| \cdot \left( \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{(p'-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \cdot \left( \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo,  $\left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \|f\|$  qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ , donde segue-se que  $\Phi(f) \stackrel{\text{def}}{=} (f(e_n))_n \in \ell_{p'}$  e  $\|\Phi(f)\| = \|(f(e_n))_n\|_{p'} \leq \|f\|$ . É imediato verificar que  $\Phi$  é linear. Dado  $a = (a_n)_n \in \ell_p$ , da desigualdade

$$|f(a)| = \left| \sum_n a_n f(e_n) \right| \leq \sum_n |a_n f(e_n)| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|(f(e_n))_n\|_{p'} \cdot \|a\|_p,$$

concluimos que  $\|f\| \leq \|(f(e_n))_n\|_{p'} = \|\Phi(f)\|$  e, portanto, que  $\Phi$  é uma isometria. Resta provar a sobrejetividade: dado  $b = (b_n) \in \ell_{p'}$ , definindo o funcional  $f_b : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$  por  $f_b((a_n)_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n a_n b_n$ , a desigualdade de Hölder assegura que  $f$  é bem definido (e, com isso, verifica-se que é linear) e limitado, mais ainda, teremos que  $\Phi(f_b) = (f(e_n))_n = (b_n)_n = b$ .  $\square$

**Proposição A.2.** Se  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , então  $\ell_p \subset \ell_q$ , e caso  $q \neq \infty$ ,  $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ .

*Demonstração.* O caso  $q = \infty$  é simples: cada  $(\alpha_n)_n \in \ell_p$  é limitada pois

$$|\alpha_n| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(\alpha_n)_n\|_p,$$

portanto, vale  $\ell_p \subset \ell_\infty$ . Assim, lidemos agora com o caso  $q < \infty$ . A desigualdade das normas, e consequentemente a inclusão dos espaços, é consequência da seguinte propriedade: fixados  $0 < r < s$ , para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in [0, +\infty)$  temos

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^s \right)^{1/s} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{1/r}.$$

Vejamos como provar isso: inicialmente note que

$$\frac{(\sum a_i^s)^{1/s}}{(\sum a_i^r)^{1/r}} = \left[ \sum \frac{a_i^s}{(\sum a_i^r)^{s/r}} \right]^{1/s} = \left[ \sum \left( \frac{a_i^r}{\sum a_i^r} \right)^{s/r} \right]^{1/s}.$$

Como

$$s/r \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{a_i^r}{\sum a_i^r} \leq 1 \quad \implies \quad \left( \frac{a_i^r}{\sum a_i^r} \right)^{s/r} \leq \frac{a_i^r}{\sum a_i^r},$$

obtemos

$$\frac{(\sum a_i^s)^{1/s}}{(\sum a_i^r)^{1/r}} = \left[ \sum \left( \frac{a_i^r}{\sum a_i^r} \right)^{s/r} \right]^{1/s} \leq \left( \frac{a_i^r}{\sum a_i^r} \right)^{1/s} = 1,$$

e isso prova a propriedade enunciada.

Outro modo de provar a inclusão é o seguinte: dado  $(\beta_n)_n \in \ell_p$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um natural  $n_0$  com as seguintes propriedades

$$n > m > n_0 \Rightarrow \sum_{i=m+1}^n |\beta_i|^p < \varepsilon$$

e

$$k > n_0 \Rightarrow |\beta_k| < 1.$$

Logo,  $|\beta_k|^q \leq |\beta_k|^p < 1$ , sempre que  $k > n_0$  e, consequentemente,  $n > m > n_0$  implica  $\sum_{i=m+1}^n |\beta_i|^q < \sum_{i=m+1}^n |\beta_i|^p < \varepsilon$ , ou seja,  $(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^q)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, portanto  $(\beta_n)_n \in \ell_q$  prova a inclusão  $\ell_p \subset \ell_q$ .  $\square$

**Proposição A.3.** Se  $1 \leq p < q \leq \infty$ , então  $\ell_p \subsetneq \ell_q$ .

De fato,  $(1, 1, \dots) \in \ell_\infty \setminus \ell_p$  e, quando  $q < \infty$ ,  $(n^{-1/p})_n \in \ell_q \setminus \ell_p$ .

**Proposição A.4.** Sejam  $0 < p < q \leq \infty$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida tal que  $\mu(X) = 1$ . Então  $L_q(\mu) \subset L_p(\mu)$  e  $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ , para cada  $f \in L_q(\mu)$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in L_q(\mu)$ . Se  $q = \infty$ , então

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X (\|f\|_\infty)^p d\mu = \|f\|_\infty^p \cdot \mu(X) = \|f\|_\infty^p,$$

o que prova a inclusão e desigualdade das normas. Agora suponhamos que  $q < \infty$  e seja  $r = q/p > 1$ . Então  $|f|^p \in L_r(\mu)$ , e como a função constante  $\mathbf{1}$  pertence à  $L_{r'}(\mu)$ , segue da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \cdot \mathbf{1} d\mu \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_X |f|^{pr} \cdot \mathbf{1} d\mu \right)^{1/r} \cdot \left( \int_X \mathbf{1}^{r'} d\mu \right)^{1/r'} \\ &= \left( \int_X |f|^q \cdot \mathbf{1} d\mu \right)^{p/q} = \|f\|_q^p, \end{aligned}$$

o que conclui o resultado.  $\square$

Uma prova do próximo resultado pode ser encontrado em [3, p.32] ou em [7, Theorem A.4].

**Desigualdade de Minkowski para integrais.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espaços de medida sigma-finitos. Se  $u : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ -mensurável, então

$$\left( \int_X \left( \int_Y |u(x, y)| \nu(dy) \right)^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left( \int_X |u(x, y)|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \nu(dy),$$

para todo  $p \in [1, \infty)$ , ocorrendo a igualdade quando  $p = 1$ .

**Proposição A.5.** Para quaisquer  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , temos

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j| = \sup_{|\beta_j|=1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right| = \sup_{|\beta_j| \leq 1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right|.$$

*Demonstração.* De fato, a desigualdade

$$\sup_{|\beta_j|=1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right| \leq \sup_{|\beta_j| \leq 1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$$

é verificada sem maiores dificuldades. Se  $\theta_j$  é o argumento de cada  $\alpha_j$ , então  $|\alpha_j| = \alpha_j e^{-i\theta_j}$ . Logo, o resultado segue de  $|e^{-i\theta_j}| = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , pois

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j| = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-i\theta_j} = \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-i\theta_j} \right| \leq \sup_{|\beta_j|=1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right|.$$

□

**Proposição A.6.** Seja  $p \in [0, \infty)$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Para cada  $(\alpha_j)_{j=1}^N \in \ell_p^N$ , com  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0$ , existem  $\beta_1, \dots, \beta_N \geq 0$ , que cumprem

$$\sum_{j=1}^N \beta_j^{p'} = 1 \text{ e } \|(\alpha_j)_{j=1}^N\|_p = \sum_{j=1}^N \alpha_j \beta_j.$$

*Demonstração.* O Teorema de Hahn–Banach nos assegura a existência de  $g \in (\ell_p^N)'$ , tal que

$$\|(\alpha_j)_{j=1}^N\|_p = \sup_{f \in B_{(\ell_p^N)'}} |f((\alpha_j)_{j=1}^N)| = g((\alpha_j)_{j=1}^N). \quad (*)$$

Como na Proposição A.1,  $(\ell_p^N)'$  e  $\ell_{p'}^N$  são isometricamente isomorfos, logo, cada  $f \in (\ell_p^N)'$  é correspondido à  $(a_j^f)_{j=1}^N \in \ell_{p'}^N$ , com  $f((b_j)_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N a_j^f b_j$ , para cada  $((b_j)_{j=1}^N) \in \ell_p^N$ , e  $\|f\| = \|(a_j^f)_{j=1}^N\|_{p'}$ . Com isso, existe  $(b_j^g)_{j=1}^N \in B_{\ell_{p'}^N}$ , tal que  $\|(\alpha_j)_{j=1}^N\|_p = \sum_{j=1}^N \alpha_j b_j^g$ . Como cada  $\alpha_j$  é não-negativo, e o supremo na expressão (\*) é atingindo, e necessariamente cada  $b_j^g$  é não-negativo, portanto, basta tomarmos  $\beta_j = b_j^g$ ,  $j = 1, \dots, n$  para concluirmos o resultado. □

**Proposição A.7.** Para quaisquer  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ ,

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{1,w} = \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| = \sup_{|\alpha_i|=1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|.$$

*Demonstração.* Provaremos apenas uma das igualdades: inicialmente note que

$$\sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \stackrel{\text{HB}}{=} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \left| f \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \right| = \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left| f \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \right|,$$

onde a troca de supremos na última igualdade pode ser verificada sem maiores dificuldades. Portanto, a Proposição A.5, nos leva à conclusão do resultado:

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| &= \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left| f \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \right| \\ &= \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \right| \stackrel{\text{Prop. A.5}}{=} \sup_{f \in B_{\mathcal{X}'}} \sum_{i=1}^n |f(x_i)| = \|(x_i)_{i=1}^n\|_{1,w}. \end{aligned}$$

□

**Proposição A.8.** Para quaisquer  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ ,

$$\sup_{t \in I} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \leq \|(x_i)_{i=1}^n\|_{1,w},$$

onde  $r_i$  são as Funções de Rademacher.

*Demonstração.* Com efeito,

$$\sup_{t \in I} \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| \leq \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \stackrel{\text{Prop. A.7}}{=} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{1,w}.$$

□

# Apêndice B

## Biografias

Nesse apêndice desfrutamos um pouco da biografia de importantes personagens que contribuíram com os temas desse trabalho. O texto é uma tradução livre das biografias de Hille, Hahn e Banach que constam em [McT]. As informações a respeito de Bohnenblust foram obtidas em [CIT].

### B.1 Einar Carl Hille



Figura B.1: Einar Carl Hille

Nasceu em Nova Iorque, Estados Unidos, em 28 de junho de 1894. Aos dois anos de idade retornou a Suécia, país de origem dos seus pais, acompanhando sua mãe que se separara antes mesmo do seu nascimento. Só retornou aos Estados Unidos 24 anos depois.

Ingressou na escola *Palmsgrenska Samskola* em 1900, onde concluiu seus estudos em 1911. Em seguida, iniciou sua vida acadêmica na Universidade de Estocolmo cursando por 2 anos a graduação em Química, tendo como professor o renomado químico Hans Von Euler-Chelpin, chegando inclusive a publicar trabalho juntos. Contudo, mesmo tendo uma carreira promissora na área, percebeu que não mantinha interesse em construir seu trabalho manuseando experimentos químicos delicados, e decidiu então mudar o rumo de seus estudos e passou a dar a sua contribuição à matemática.

Assim como na Química, Hille teve a felicidade de trabalhar com nomes importantes da matemática, sendo orientado a princípio por Ivar Bendixson e Helge Von Koch. Obteve em 1913 o diploma de graduação, e no ano seguinte, ganhou o título equivalente ao de Mestre. Trabalhou com Marcel Riesz, e submeteu sua tese no tema mapas conformes em 1916, qualificando-se para exercer a Livre Docência. O período que passou em Estocolmo foi bastante influenciado por Magnus Gösta Mittag-Leffler.

A I Guerra Mundial instalara-se na Europa, e na ocasião Hille serviu o Exército por dois anos como datilógrafo. Mesmo nessa situação, decidiu que iria retomar as suas pesquisas, e em 1918 recebeu o título de PhD em Estocolmo, após apresentar seu trabalho intitulado “*Some Problems Concerning Spherical Harmonics*”. Foi premiado no ano seguinte com o *Mittag-Leffler* devido as suas grandes contribuições, e adquiriu o direito de lecionar na Universidade de Estocolmo.

No ano de 1920, foi contemplado com uma bolsa de estudos em Havard e voltou aos Estados Unidos. Teve a oportunidade de trabalhar com George David Birkhoff. Entre 1921 e 1922 foi instrutor em Havard e, posteriormente, em Princeton, onde foi promovido a Professor Assistente em 1923, e Professor Associado em 1927. Tornou-se professor da Universidade de Yale em 1933, e assumiu a Direção da Graduação em 1938, cargo que manteve até sua aposentadoria, em 1968.

Casou-se com Kirsti Ore em 1937 e tiveram dois filhos.

No biênio de 1937–1938, presidiu a Sociedade Americana de matemática. Foi conferencista no Colóquio da Sociedade em 1944. Trabalhou na “*Annals of Mathematics*” entre 1929 e 1933, e na “*Transactions of the American Mathematical Society*” no período de 1937 a 1943. Recebeu várias honras, incluído a eleição para a Academia Nacional de Ciências em 1953, e a Academia Real de Ciências de Estocolmo. Na Suécia foi contemplado com a “*Order of the Noth Star*”.

A principal contribuição de Hille ocorreu nas áreas de Equações Integrais, Equações Diferenciais, Funções Especiais, nas séries de Dirichlet e Fourier. Mais tarde, direcionou seus estudos para a Análise Funcional.

Foi autor de várias obras, sendo a primeira de 1948, intitulada “*Functional analysis and semi-groups*”. Dentre elas, citamos “*Analytic function theory*” (1964), “*Analysis*” (1966), “*Lectures on ordinary differential equations*” (1969), “*Methods in Classical and Functional Analysis*” (1972), e “*Ordinary differential equations in the complex domain*” (1976).

Faleceu no dia 12 de fevereiro de 1980, em La Jolla, Califórnia, Estados Unidos.

## B.2 Hans Hahn



Figura B.2: Hans Hahn

Hans Hahn nasceu no dia 27 de setembro de 1879 em Viena, Áustria. Em 1902, obteve seu título de PhD por sua tese “*Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale*”, na Universidade de Viena, sob orientação de Gustav Ritter Von Escherich. Durante sua formação, estabeleceu grande amizade com outros três proeminentes estudantes de matemática, Paul Ehrenfest, Heinrich Tietze e Gustav Herglotz, e passaram a ser conhecido como “*os quatro inseparáveis*”.

Após ter sido habilitado através de sua tese, Hahn tornou-se Professor Associado da Universidade de Viena em 1905. Lecionou em Czernowitz (Áustria–Hungria) entre 1909 e 1914, e destacou-se como professor. Durante a I Guerra Mundial, serviu ao Exército Húngaro-Austriaco, ocasião que saiu severamente ferido. Mudou-se para Bonn, mas em 1921 retornou à Viena, reassumindo seu cargo de professor. Entre seus alunos, destacamos Karl Menger, Witld Hurewics e Kurt Gödel.

Hahn foi pioneiro nos estudos da Teoria dos Conjuntos e na Análise Funcional. Entretanto, é lembrado por muitos matemáticos pelo notório *Teorema de Hahn–Banach*. Foi durante o período de 1903 e 1913 que Hahn deu sua maior contribuição para o Cálculo das Variáveis desenvolvendo as ideias de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass. Interessava-se pela Análise Real e dedicou-se a vários tópicos nessa área, chegando a escrever dois livros sobre Funções Reais, “*Theorie der reeleen Funktionen*” e “*Relle Funktionen*”.

Mesmo tendo inúmeros estudos, Hahn é considerado por muitos um filósofo matemático. Criou um grupo de discussão entre cientistas e filósofos que se encontravam frequentemente em Viena, denominado “*Vienna Circle or Logical Positivists*”.

Ao longo de sua carreira, Hahn recebeu várias honras, como o “*Lieban Prize*” em 1921. Foi eleito membro da Academia Austríaca de Ciências, e membro honorário da Sociedade de matemática de Calcutá. Seu último livro, “*Set Fuctions*”, foi publicado 14 anos após o seu falecimento, e escrito em co-autoria com Arthur Rosenthal. Hahn faleceu em Viena, Áustria, em 24 de julho de 1934.

### B.3 Henri Frédéric Bohnenblust

Nasceu em 1906 na Suíça. Em 1928 foi aos Estados Unidos com o intuito de graduar-se em matemática na Universidade de Princeton. Em 1931 obteve seu título de PhD pela Universidade Princeton, com tese intitulada “*On the Absoulte Convergence of Dirichlet Series*”, tendo a honra de ser orientado pelo ilustre professor Carl Einar Hille. Foi membro da Faculdade de matemática de Princeton até 1945, e no ano seguinte seguiu para a Universidade de Indiana.

A sua capacidade de administração e de julgamento foram logo reconhecidas, e tornou-se o administrador da Faculdade de matemática, cargo que exerceu por 20 anos. Entre 1956 a 1970 foi designado deão dos estudos da graduação, e sua atuação administrativa se estendeu através de todo o campus. Foi presidente da *Association Graduate Schools* na Sociedade Americana de matemática, e serviu como co-editor da prestigiosa *Annals of Mathematics* por dez anos.

O interesse de Bohnenblust concentrava-se na Análise Funcional, campo o qual iniciou sua carreira. Graças ao seu entusiasmo, suas ideias possibilitaram o crescimento da mesma.

Embora possuísse uma reputação bastante consolidada nas pesquisas, se destacou brilhantemente como professor de matemática, por ministrar com clareza e didática aos seus alunos. Teve sua foto publicada na *Time* como um dos dez professores mais marcantes dos Estados Unidos.

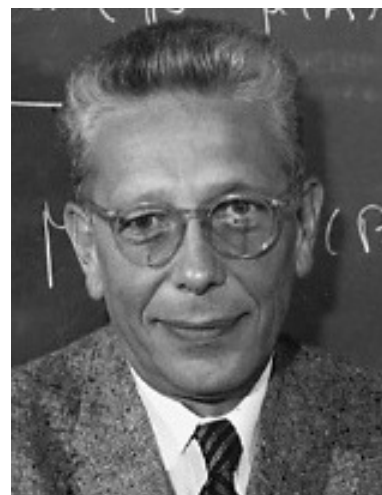


Figura B.3: Bohnenblust

Uma das frustrações de Bohnenblust se devia ao fato das aplicações da Análise Funcional estarem sempre em constante mutação. Parâmetros e soluções correspondentes estavam sempre mudando, mas os desenhos no quadro negro eram estáticos. Com o advento do computador e do tubo de CTR (*cathode ray tube* – o tubo de imagem da televisão), obteve meios que podiam suprir as deficiências da lousa e do giz. Aposentou-se em 1974 e aos 94 anos faleceu no ano 2000, em Santa Bárbara, Estados Unidos.

### B.4 Stefan Banach

Stefan Banach nasceu no dia 30 de março de 1892, em Cracóvia, Áustria-Hungria (atualmente Polônia). Abandonado pela mãe com apenas quatro dias de vida, imediatamente após seu batismo, já mais velho teve a intenção de procurá-la, contudo seu pai recusava-se a fornecê-lo informações sobre a mesma. Após ser batizado, Banach passou a viver com a avó, mas quando esta ficou doente, foi levado pelo pai para ser criado por Franciszka Plowa, que vivia em Cracóvia com sua filha Maria. Por sua vez, Maria tinha um tutor chamado Juliusz Mieou, um intelectual que logo de início reconheceu os talentos de Banach, ensinou-o a falar francês e cuidou para que lhe fosse dada educação adequada. Banach visitava frequentemente sua avó que ficara em Ostrowsko.

Cursou o Ensino Primário até 1902 e em seguida ingressou no Secundário na escola *Henryk Sienkiewicz Gymnasium* em Cracóvia. Quando secularista, foi colega de classe de Witold Wilkosz que também se tornaria professor de matemática. Wilkosz mudou de escola, mas os dois nunca perderam contato. No período escolar, foi notável o interesse que Banach mantinha pela matemática. Devido as suas boas notas, conseguiu fazer seu exame escolar final em 1910. Ao decidir que rumo seguiria na vida, mesmo sendo um entusiasta da matemática, optou pela Engenharia, pois nessa época não acreditava que pudessem ser feitas novas descobertas matemáticas. Seguiu para Lvov, e sem nenhum apoio do pai (este falou abertamente ao filho que a partir deste momento ele seria o dono do seu próprio rumo) matriculou-se na Faculdade de Engenharia da Universidade Técnica de Lvov. Graduou-se em 1914, concluindo além do tempo normal, pois tinha parte do seu tempo ocupado com atividades que garantissem meios para o seu sustento.

Com a deflagração da I Guerra Mundial, a cidade de Lvov foi ocupada pelo exército russo. Por não ter porte físico e ainda ter a visão comprometida no olho esquerdo, não foi convocado para servir na guerra, e passou esse período trabalhando na construção de estradas e como professor nas escolas de Cracóvia. Também ministrou palestras na Universidade de Cracóvia.

Durante a primavera de 1916, um acontecimento inusitado aconteceu, e isto mudou a vida de Banach. O matemático Hugo Dyonizy Steinhaus passeava pelas ruas de Cracóvia e ao se aproximar de dois jovens, escutou o termo “*medida de Lebesgue*”. Imediatamente apresentou-se jovens Banach e Otton Marcin Nikodym, que o contaram que ainda tinham outro companheiro de discussões, Witold Wilkosz. Neste momento foi dado o primeiro passo para a criação da Sociedade de matemática de Cracóvia.

Numa discussão, Steinhaus comentou com Banach sobre um problema matemático do qual estava envolvido em seus trabalhos, mas não obtinha sucesso com o resultado. Dias depois, Banach teve uma ideia para um contra-exemplo, e escreveram juntos para ser publicado. A guerra atrasou esta publicação, sendo o primeiro trabalho de Banach publicado apenas em 1918 no Boletim da Academia de Cracóvia. Deste ponto em diante, ele começou a realizar importantes estudos rapidamente. Muitos perguntam o que teria sido da história deste matemático caso Steinhaus não o tivesse encontrado casualmente. Também graças a ele, Banach teve a oportunidade de conhecer sua futura esposa, Lucya Braus.

No ano de 1919 sob a iniciativa de Steinhaus, foi criada a Sociedade de matemática de Cracóvia, que no ano seguinte passaria a se chamar de Sociedade Polonesa de matemática.

Banach foi assistente de Antoni Lomnicki na Universidade Técnica de Lvov em 1920. Mesmo não sendo o caminho padrão, pois Banach era graduado em Engenharia, encaixou-se com exceção por seu grande talento matemático e defendeu sua tese de doutorado intitulada “*On operations on abstract sets and their application to integral equations*” sob a orientação de Lomnicki em 1922. A Universidade de Jan Kazimierz o concedeu o direito de lecionar na graduação de matemática e no ano de 1924 foi promovido, e entre 1924 a 1925 esteve em Paris dando continuidade aos seus estudos, principalmente nas áreas de aritmética, geometria e álgebra.

Junto com Steinhaus, em 1929 criaram o jornal “*Studia Mathematica*” nos quais eram editores, e focavam interesse nas pesquisas de Análise Funcional e tópicos relacionados. Dois anos depois, em parceria com outros estudiosos, publicou a “*Mathematics Monographs*”.

Banach tinha um modo peculiar de trabalhar. Era frequente encontrá-lo nos cafés de Lvov

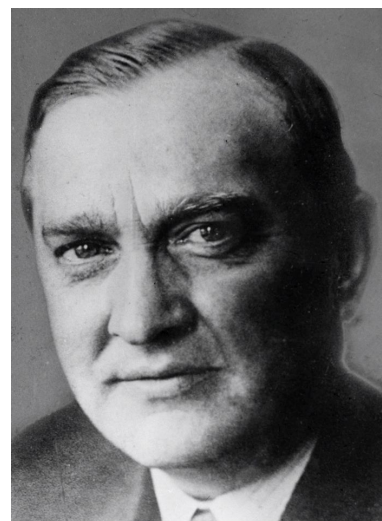


Figura B.4: Stefan Banach

discutindo os assuntos matemáticos com seus colegas, e gostava de ficar nesses locais sozinho, apenas para refletir sobre seu trabalho.

Pouco antes da II Guerra Mundial, foi eleito Presidente da Sociedade Polonesa de matemática. Deflagrada a guerra, Lvov foi ocupada por tropas soviéticas, mas como sempre manteve um bom relacionamento com os matemáticos russos (havia visitado Moscou diversas vezes), dava-se bem com a nova administração soviética, assegurando seu lugar na Universidade, que foi renomeada Universidade de Ivan Frank. Até 1940, Banach conseguiu levar sua vida quase na normalidade, realizando suas pesquisas, escrevendo seus textos, ministrando aulas e seus encontros nos cafés.

Entretanto dificuldades surgiram em 1941, quando Lvov foi ocupada pelos nazistas. Banach foi preso suspeito de traficar a moeda alemã, mas liberado dias depois. Sobreviveu a uma época que vários acadêmicos poloneses foram assassinados, incluindo Lomniski. Foram tempos terríveis durante a ocupação dos alemães. Finalmente, em 1944, a Rússia retomou o controle de Lvov, e Banach pode novamente entrar em contato com os seus companheiros.

Entre suas contribuições, podemos citar a criação da Análise Funcional Moderna, endossou os estudos relacionados à Teoria dos Espaços Vetoriais Topológicos, além de seus trabalhos em Teoria da Medida e Integração, Teoria dos Conjuntos, e Séries Ortogonais.

Na sua tese, definiu o que hoje é conhecido de *Espaços de Banach*. A grandeza de seu trabalho está no desenvolvimento de uma teoria sistemática da Análise Funcional, quando antes só haviam resultados isolados. Ele provou uma série de conclusões na “*Normed Linear Spaces*”, e muitos teoremas importantes, como os célebres e atualmente denominados: *Teoremas de Hahn–Banach*, *de Banach–Steinhaus* e *de Banach–Alooglu*, além do notório *Paradoxo de Banach-Tarski*.

Banach planejava voltar para Cracóvia ao final da II Guerra onde tinha a intenção de retomar a sua carreira na Universidade de Jagiellonian, mas morreu em Lvov, em 1945 de câncer de pulmão.

# Referências

- [1] S. AARONSON AND A. AMBAINIS, *The Need for Structure in Quantum Speedups*, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 110 (2009).
- [2] H. BAUER, *Probability Theory and Elements of Measure Theory*, Academic Press, 1981.
- [3] R. BLEI, *Analysis in Integer and Fractional Dimensions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 71, Cambridge University Press, 2001.
- [4] H. F. BOHNENBLUST, E. HILLE, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Annals of Mathematics, 32 (1931) 600–622.
- [5] G. BOTELHO, D. M. PELLEGRINO, *Coincidences for multiple summing mappings*, II ENAMA, João Pessoa, Brasil, 2008.
- [6] G. BOTELHO, D. M. PELLEGRINO, E. TEXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [7] O. F. BREVIG, *The Sidon Constant for Ordinary Dirichlet Series*, master’s thesis, NTNU – Trondheim, 2013.
- [8] A. DEFANT, L. FRERICK, J. ORTEGA-CERDÀ, M. OUNAÏES, K. SEIP, *The Bohnenblust–Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive*, Annals of Mathematics, (2) 174 (2011), 485–497.
- [9] A. DEFANT, D. POPA, U. SCHWARTING, *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces*, Journal of Functional Analysis, 259 (2010) 220–242.
- [10] A. DEFANT, P. SEVILLA-PERIS, *A new multilinear insight on Littlewood’s  $4/3$ -inequality*, Journal of Functional Analysis, 256 (2009) 1642–1664.
- [11] A. DEFANT, U. SCHWARTING, *Bohr’s radii and strips – a microscopic and a macroscopic view*, Note di Matematica, 31 (2011) n. 1, 87–101.
- [12] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43, Cambridge University Press, 1995.

- [13] D. DINIZ, G. A. MUÑOZ-FERNÁNDEZ, D. M. PELLEGRINO, J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *The asymptotic growth of the constants in the Bohnenblust–Hille inequality is optimal*, Journal of Functional Analysis, 263 (2012) 415–428.
- [14] D. DINIZ, G. A. MUÑOZ-FERNÁNDEZ, D. M. PELLEGRINO AND J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars*, arXiv: arXiv: 1111.3253v2, 2011.
- [15] V. V. FÁVARO, *Tipo e cotipo de espaços de Banach e espaços  $L_p$  de Banach*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.
- [16] U. HAAGERUP, *The Best constants in Khinchine inequality*, Studia Math, 70 (1982) 231–283.
- [17] J. HAVIL, *Gamma: exploring Euler’s constant*, Princeton University Press, 2003.
- [18] J.-P. KAHANE, *Some Random Series of Functions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.5, Cambridge University Press, 1993.
- [19] S. KAIJSER, *Some results in the metric theory of tensor products*, Studia Math. 63 (1978) 157–170.
- [20] E. L. LIMA, *Curso de Análise Vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, 13ª Edição, 2011.
- [21] J.E. LITTLEWOOD, *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables*, Q. J. Math. 1 (1930) 164–174.
- [22] M. C. MATOS, *Fully absolutely summing and Hilbert–Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math. 54 (2003) 111–136.
- [23] A. MONTANARO, *Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory*, arXiv: 1208.0161v1, 2012.
- [24] D. NUÑEZ-ALARCÓN, *O Teorema de Bohnenblust–Hille*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2011.
- [25] D. NUÑEZ-ALARCÓN, D. M. PELLEGRINO, *A Simple Proof that the power  $2m/(m+1)$  in the Bohnenblust–Hille Inequalities is sharp*, arXiv: 1207.2662v1, 2012.
- [26] D. NUÑEZ-ALARCÓN, D. M. PELLEGRINO, J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *A Note on The Bohnenblust–Hille Inequality and Steinhaus Random Variables*, arXiv: 1203.3043v2 , 2012.
- [27] D. NUÑEZ-ALARCÓN, D. M. PELLEGRINO, J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, D. M. SERRANO-RODRÍGUEZ, *There exists multilinear Bohnenblust–Hille constants  $(C_n)_{n=1}^\infty$  with  $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n+1} - C_n) = 0$* , J. Funct. Anal. 264 (2013), 429–463.

- [28] F. QI, *Monotonicity results and inequalities for the gamma and incomplete gamma functions*, Mathematical Inequalities & Applications, 5 (2002), 61–67.
- [29] H. QUEFFÉLEC, *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series: old and new results*, J. Anal. 3 (1995), 43–60.
- [30] D. M. PELLEGRINO, J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA, *New upper bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 386 (2012) 300–307.
- [31] D. PÉREZ-GARCÍA, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tesis, 2003.
- [32] D. POPA, *Reverse inclusions for multiple summing operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 350 (2009), 360–368.
- [33] J. S. DOS SANTOS, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.
- [McT] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>, acessado em 01 agosto de 2012.
- [CIT] Sítios da CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY: (acessado em 01 de agosto de 2012) <http://calteches.library.caltech.edu/3047/1/Retiring.pdf> e <http://calteches.library.caltech.edu/3994/1/Obituaries.pdf>.
- [TTMath] TTMATH: [http://www.ttmath.org/online\\_calculator](http://www.ttmath.org/online_calculator) (sítio com poderosa calculadora online), acessado em 15 de agosto de 2012.
- [WolframAlpha] WOLFRAMALPHA: <http://www.wolframalpha.com> (sítio com complexo mecanismo computacional de resposta), acessado em 15 de agosto de 2012.