

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre a existência e unicidade de
solução para as equações de
Navier-Stokes

Hudson Cavalcante da Silva

JOÃO PESSOA – PB
SETEMBRO DE 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre a existência e unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes

por

Hudson Cavalcante da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Flank David Moraes Bezerra

João Pessoa – PB
Setembro de 2014

S585s Silva, Hudson Cavalcante da.

Sobre a existência e unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes / Hudson Cavalcante da Silva.-- João Pessoa, 2014.

81f.

Orientador: Flank David Moraes Bezerra

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Equações de Navier-Stokes.
3. Existência de solução. 4. Método de Faedo-Galerkin.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Sobre a existência e unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes

por

Hudson Cavalcante da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 26 de Setembro de 2014.

Banca Examinadora:

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Orientador)

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo – UEPB
(Examinador Externo)

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof. Dr. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista CNPQ durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais que me fizeram ser o que eu sou e a minha esposa, uma companheira em todos os momentos.

Agradecimentos

A Deus que me deu forças e capacidade para chegar até aqui.

A minha esposa Valéria, pelo companherismo.

Aos meus pais, Edivaldo e Cicera, por estarem incondicionalmente ao meu lado.

Aos professores, Fágner, pelas valiosas orientações ao longo de toda minha vida acadêmica, graduação e mestrado; Sales, por toda ajuda em momentos difíceis; Andrade, pelas sugestões ao longo do meu mestrado, Flank, por ter se mostrado um grande orientador, contribuindo muito até o término deste trabalho e a todos os professores que contribuíram ao meu mestrado.

Aos meus colegas, Cleiton, Luan, Jarbas, Renato, Lucas e Wendel que formaram uma turma unida e vencedora que me proporcionou bons momentos de estudos.

Resumo

Neste trabalho estudamos as equações de Navier-Stokes em domínios limitados do $\mathbb{R}^n$. Inicialmente consideramos o caso $n = 2$ e mostramos que sua formulação variacional está bem posta (no sentido de Hadamard). Em seguida, mostramos a existência de solução para o caso $n \leq 4$. Em ambos os casos utilizamos o método de Faedo-Galerkin.

Palavras-chave: equações de Navier-Stokes; existência de solução; método de Faedo-Galerkin.

Abstract

In this work we study the Navier-Stokes equations in bounded domains of $\mathbb{R}^n$. Initially we the case $n = 2$ and we show that its variational formulation is well put (in case the Hadamard). We show the existence of solution for the case $n \leq 4$. In both cases we use the Faedo-Galerkin method.

Keywords: Navier-Stokes equations; existence of solution; Faedo-Galerkin method.

Sumário

Introdução	2
1 Notações e resultados preliminares	4
1.1 Sobre a teoria das distribuições e os espaços de Sobolev.	4
1.2 Sobre os espaços de Banach $L^p(0, T; X)$	9
1.3 Sobre equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach.	11
1.4 Sobre a Análise de Fourier.	13
1.5 Resultados clássicos sobre os espaços vetoriais normados.	15
2 Equações de Navier-Stokes em domínios limitados do $\mathbb{R}^2$	19
2.1 Espaços Funcionais	19
2.2 Equações de Navier-Stokes em domínio limitados do $\mathbb{R}^2$	28
3 Equações de Navier-Stokes em domínios limitados do $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 4$	52
3.1 Equações de Navier-Stokes	52
3.2 Equações de Stokes	65
A Existência e Pronlogameto de Soluções Aproximadas	70
Referências Bibliográficas	72

Introdução

Neste trabalho, motivados por Medeiros [13], estudamos algumas questões relacionadas às equações de Navier-Stokes. Estas equações foram estudadas inicialmente por Claude Louis Henri Marie Navier, engenheiro, matemático e físico francês que viveu entre 1785 e 1836, por Simeón Denis Poisson, matemático e físico francês que viveu entre 1781 e 1840, por Adhemar Jean Claude Barre de Saint Vennant, professor e engenheiro francês que viveu entre 1797 e 1886 e por George Gabriel Stokes, matemático, físico, político e teólogo irlandês que viveu entre 1819 e 1903. Para mais detalhes ver Rodriguez [19].

As equações de Navier-Stokes constituem um modelo matemático para descrição do movimento de fluídos homogêneos, com densidade ρ constante, incompressíveis e viscosos. Consideremos uma região do $\mathbb{R}^n$, constituída por pontos da forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ocupada por um fluído em movimento. Suponhamos nesta região um aberto Ω , limitado, convexo e com fronteira regular representada por Γ , representemos por $\nu > 0$ a viscosidade e por p a pressão deste fluído. Denotemos por $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ o vetor velocidade das partículas do fluído, sendo t uma variável temporal. Assim sendo, as equações de Navier-Stokes são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f - \nabla p, \text{ em } Q = \Omega \times (0, T), \ T > 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \text{ em } Q, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (1)$$

Σ é a fronteira lateral de Q e $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ é uma aplicação conhecida.

No *Capítulo 1*, introduziremos definições, notações e alguns resultados essenciais para tornar a leitura deste trabalho auto-suficiente. Definiremos os espaços de Sobolev, introduziremos algumas noções básicas sobre a teoria das distribuições e os espaços $L^p(0, T; X)$. Finalizaremos, lembrando alguns resultados sobre equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach e a análise de Fourier.

No *Capítulo 2*, mostraremos que a formulação variacional das equações de Navier-Stokes (1), para o caso $n = 2$ é bem posta no sentido de Hadamard, via o método de Faedo-Galerkin.

O *Capítulo 3* será destinado ao estudo de solução para o problema (1), para o caso $n \leq 4$, para isto usaremos o método de Faedo-Galerkin. Finalmente provaremos

um teorema que garante a unicidade de solução para as equações de Stokes, caso estacionário, no caso $n \leq 4$.

Capítulo 1

Notações e resultados preliminares

Neste capítulo fixaremos algumas notações e apresentaremos definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho. Introduzimos a teoria das distribuições, os espaços de Sobolev, os espaços $L^p(0, T, X)$, como também, a análise de Fourier e alguns resultados clássicos sobre espaços vetoriais normados. Para maiores detalhes veja Adams [1], Brezis [3], Evans [5], Lions [9], [11], Medeiros [13], Medeiros-Miranda [14], Medeiros-Rivera [15], Oliveira [16], Rincon [17], Temam [21] e Yosida [22].

1.1 Sobre a teoria das distribuições e os espaços de Sobolev.

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos suporte de f , e denotamos por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Assim, $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representamos por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis definidas em Ω e com suporte compacto (com as operações usuais).

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ esteja

compactamente imerso em Ω , ou seja, $\overline{B_1} \subseteq \Omega$. Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é, $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1. Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

- (i) Existe um compacto K em Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$, quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Observação 1.1. É possível dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de espaço das funções testes sobre Ω .

Definição 1.2. Uma distribuição (escalar) sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $T(\varphi + \beta\psi) = T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria das distribuições.

Exemplo 1.2. Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver Medeiros-Miranda [14]). Por esta razão, identificamos u à distribuição T_u por ela definida e desta forma, $L_{loc}^1(\Omega)$ será identificado a uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.3. Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [14], mostra-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, é possível ver que δ_0 não é definido por uma função de $L_{loc}^1(\Omega)$.

Definição 1.3. Dizemos que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.4. Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2. Decorre da Definição 1.4 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 1.3. $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω , onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vemos que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim,

$$|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.4. Em Medeiros-Rivera [15] é possível verificar que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representamos o espaço de Sobolev de ordem m , sobre Ω , das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. É possível provar que $W^{m,p}(\Omega)$ munido com as operações de soma entre funções e multiplicação por escalar é um espaço vetorial para quaisquer $m > 0$ e $1 \leq p < \infty$.

Munidos das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (ver Medeiros-Rivera [15]).

Observação 1.5. Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1 (Imersão de Sobolev). *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

- (i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.
- (ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.
- (iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Aqui o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Prova: Ver Brezis [3], Corolário 9.14, p. 284.

Teorema 1.2 (Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

- (i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.
- (ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.
- (iii) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

Aqui o símbolo $\xhookrightarrow{c}$ denota imersão compacta.

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 9.16, p. 285.

Proposição 1.3 (Du Bois Raymond). Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Prova: Ver Medeiros-Miranda [14], Proposição 1.3.1, p. 10.

Lema 1.4 (Desigualdade de Poincaré). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.1)$$

Observação 1.6. Para o caso unidimensional, ou seja, $\Omega = (a, b)$, a constante da desigualdade (1.1) é $C = b - a$.

Prova: Ver Brezis [3], Corolário 9.19, p. 290.

Lema 1.5 (Desigualdade de Young). Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 4.6, p. 92.

Lema 1.6 (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 4.6, p. 92.

Teorema 1.7 (Gauss-Green). Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} u \nu^i d\Gamma,$$

($i = 1, 2, \dots, n$), onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário em $x \in \Gamma$.

Prova: Ver Evans [5], Apêndice C, Teorema 1, p. 627.

Teorema 1.8 (Fórmulas de Green). (i) Se $v \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

$$(ii) \text{ Se } u, v \in H^2(\Omega), \text{ então } \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds.$$

Prova: Ver Evans [5], Apêndice C, Teorema 3,iii, p. 627.

Teorema 1.9 (Tonelli). *Seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω_1, Ω_2 abertos em $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que*

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty, \text{ para todo } x \in \Omega_1$$

e

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty.$$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 4.4, p. 91.

Teorema 1.10 (Fubini). *Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então*

$$F(x, y) \in L^1(\Omega_2);$$

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy \in L^1(\Omega_1), \text{ para todo } x \in \Omega_1$$

e

$$F(x, y) \in L^1(\Omega_1);$$

$$\int_{\Omega_1} |F(x, y)| dx \in L^1(\Omega_2), \text{ para todo } y \in \Omega_2,$$

além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} |F(x, y)| dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x, y)| dx dy.$$

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 4.4, p. 91.

1.2 Sobre os espaços de Banach $L^p(0, T; X)$

Nesta seção introduziremos noções sobre os espaços de Banach $L^p(0, T; X)$, importantes no estudo de equações diferenciais parciais de evolução.

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Representaremos por $L^\infty(0, T; X)$ o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0, T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.7. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X'),$$

onde $\approx$ representa um isomorfismo entre os espaços em questão. Essas identificações se encontram em Lions, [11].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0, T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.5. Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0, T[$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Exemplo 1.4. Dadas $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação

$T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo é uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais, que equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach (ver Adams [1]).

Observação 1.8. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0, T; X)$ será denotado por $H^m(0, T; X)$, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0, T; X)$ o fecho, em $H^m(0, T; X)$, de $\mathcal{D}(0, T; X)$ e por $H^{-m}(0, T; X)$ o dual topológico de $H_0^m(0, T; X)$.

1.3 Sobre equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach.

Nessa seção enunciaremos dois importantes teoremas sobre equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach que auxiliarão na obtenção de soluções para as equações de Navier-Stokes.

Definição 1.6. Dizemos que uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo I da reta, tal que $(x(t), t) \in G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, para todo $t \in I$, é uma solução para o problema

$$x'(t) = f(x, t) \quad (1.2)$$

se $x(t)$ satisfaz (A.1) quase sempre em t . Seja $(x_0, t_0) \in G$. Associado a (A.1) e a (x_0, t_0) temos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Definição 1.7. Dizemos que uma função $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ está nas condições de Carathéodory sobre G se:

- (i) $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixado;
- (ii) $f(x, t)$ é contínua em x para cada t fixado;
- (iii) Para cada compacto K contido em G existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que,

$$|f(x, t)| \leq m_K(t), \text{ para todo } (x, t) \in K.$$

Consideremos o retângulo

$$R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, |x - x_0| \leq b, |t - t_0| \leq a; b > 0 \text{ e } a > 0\}.$$

Teorema 1.11 (Carathéodory). *Seja $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre G , então existe uma solução $x(t)$ de (A.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$, onde $\alpha > 0$.*

Corolário 1.12. Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre G , então o problema (A.2) tem solução para qualquer (x_0, t_0) .

Prova: Ver Rincon [17], Teorema 3.15, p. 15.

Definição 1.8. Seja $\varphi(t)$ uma solução de (A.1) sobre I e $I \subseteq I_1$. Dizemos que $\varphi(t)$ tem um prolongamento até I_1 , se existe $\varphi_i(t)$ solução de (A.1) sobre I_1 e $\varphi_i(t) = \varphi(t)$, para todo $t \in I$.

Teorema 1.13 (Prolongamento). *Sejam $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e limitado e $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory sobre G e suponha que existe uma função integrável $m(t)$ tal que*

$$|f(x, t)| \leq m(t),$$

para todo $(x, t) \in G$. Seja φ uma solução da equação (A.1) sobre o intervalo (a, b) . Então

(i) existem $\varphi(a_+)$, $\varphi(b_-)$;

(ii) Se $(\varphi(b_-), b) \in G$; então φ pode ser prolongado até $(a, b + \delta)$, para algum $\delta > 0$.
De modo análogo para a ;

(iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\varphi(\gamma_+), \gamma)$, $(\varphi(\gamma_-), \omega) \in \partial G$, (∂G é fronteira de G .)

Corolário 1.14. Sejam $G = U \times [0, T]$, $T > 0$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b, b > 0\}$ e f nas condições do Teorema 1.13. Seja $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0, |x_0| \leq b. \end{cases} \quad (1.4)$$

Se em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida tivermos $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, com M sendo uma constante que independe de I e $M < b$, então φ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Prova: Ver Rincon [17], Lemas 3.18 e 3.19, p. 16, Corolário 3.23 e Teorema 3.24, p. 18.

1.4 Sobre a Análise de Fourier.

Nessa seção recordaremos alguns resultados da teoria das séries e transformadas de Fourier.

Definição 1.9. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$. A família $(\langle x_\alpha, x \rangle)_{\alpha \in J}$ é chamada de coeficientes de Fourier de $x \in \mathcal{H}$ e a soma

$$\sum_{\alpha \in J} \langle x_\alpha, x \rangle x_\alpha$$

é chamada de série de Fourier de x em relação à $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.

Teorema 1.15. Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$;

(ii) Se $x \in \mathcal{H}$, então a série de Fourier de x , em relação à $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, converge em $\mathcal{H}$ para x e independe da ordem na soma, ou seja,

$$x = \sum_{\alpha \in J} \langle x_\alpha, x \rangle x_\alpha, \text{ para todo } x \in \mathcal{H};$$

(iii) [Identidade de Parseval]: Para todo $x \in \mathcal{H}$ temos

$$\|x\|_2^2 = \sum_{\alpha \in J} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2.$$

Prova: Ver Oliveira [16], Teorema 21.12, p. 154.

Consideremos os espaços de Hilbert $B_0 \subseteq B \subseteq B_1$ sendo estas imersões contínuas e além disso, a imersão $B_0 \subseteq B$ sendo compacta. Para uma função v de $\mathbb{R}$ em B_1 , sua transformada de Fourier $\hat{v}$ é representada por

$$\hat{v}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \tau t} v(t) dt$$

cujas transformada inversa é dada por

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \tau t} \hat{v}(\tau) d\tau.$$

Seja n um número natural e D_t^n o símbolo de derivação de ordem n em relação a t . Derivando formalmente a igualdade anterior obtemos

$$D_t^n v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i \tau)^n e^{2\pi i \tau t} \hat{v}(\tau) d\tau.$$

Motivados por isso, quando γ for um número real, definimos a derivada fracionária D_t^γ de ordem γ de $v(t)$, com sendo a transformada inversa de $(2\pi i \tau)^\gamma \hat{v}(\tau)$, isto é,

$$\widehat{D_t^\gamma v(t)} = (2\pi i \tau)^\gamma \hat{v}(\tau).$$

Para $\gamma > 0$, definimos o espaço

$$H^\gamma(\mathbb{R}, B_0, B_1) = \{v \in L^2(\mathbb{R}, B_0); |\tau|^\gamma \hat{v}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}, B_1)\}$$

munido com a norma

$$\|v\|_{H^\gamma(\mathbb{R}, B_0, B_1)}^2 = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}, B_0)}^2 + \| |\tau|^\gamma \hat{v}(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}, B_1)}^2.$$

Resulta desta definição que $H^\gamma(\mathbb{R}, B_0, B_1)$ é um espaço de Hilbert. Dado $K \subseteq \mathbb{R}$, representamos por H_K^γ o subespaço de H^γ constituído pela funções u de H^γ com suporte

contido em K .

Teorema 1.16. *Sejam B_0 , B e B_1 , espaços de Hilbert, com $B_0 \subseteq B \subseteq B_1$, sendo estas imersões contínuas e a imersão $B_0 \subseteq B$ compacta. Então para todo $\gamma > 0$ e qualquer conjunto limitado $K \subseteq \mathbb{R}$, a imersão de*

$$H_K^\gamma(\mathbb{R}, B_0, B_1) \text{ em } L^2(\mathbb{R}, B)$$

é compacta.

Prova: Ver Medeiros [13], Apêndice II, Teorema 4, p. 145.

Teorema 1.17 (Plancherel). *Sejam*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

uma aplicação e

$$\hat{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

a sua transformada de Fourier. Então $\mathcal{F}$ e $\hat{\mathcal{F}}$ são isomorfismos de espaços de Hilbert tais que

$$(\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v))_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\hat{\mathcal{F}}(u), \hat{\mathcal{F}}(v))_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Prova: Ver Yosida [22], p. 153.

1.5 Resultados clássicos sobre os espaços vetoriais normados.

Nessa seção iremos enunciar alguns resultados clássicos sobre os espaços vetoriais normados que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Teorema 1.18 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *O conjunto $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto pela topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$, onde E é um espaço de Banach.*

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 3.16, p. 66.

Teorema 1.19 (Representação de Riesz). *Sejam X um espaço vetorial normado, $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(X))'$. Então existe um único $u \in L^q(X)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f dx, \text{ para toda } f \in L^p(X),$$

além disso,

$$\|u\|_{L^q(X)} = \|\varphi\|_{(L^p)'(X)}.$$

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 5.5, p. 135 .

Definição 1.10. Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é dita

(i) *Contínua* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|b(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) *Coerciva* se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$b(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.20 (Lax-Milgram). *Sejam H um espaço de Banach e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Prova: Ver Brezis [3], Corolário 5.8, p. 140.

Teorema 1.21. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\mu \in L^p(0, T, X)$, $\mu' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $\mu \in C^0([0, T]; Y)$.*

Prova: Ver Teman [21], Lema 1.2, p. 260.

Teorema 1.22 (Compacidade Aubin-Lions). *Suponhamos $X \subset B \subset Y$ com imersão compacta $X \rightarrow B$ onde X, Y e B são espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$. Seja F limitado em $L^p(0, T, X) \cap W^{s,r}(0, T, Y)$, onde $s > 0$ se $r \geq p$ e $s > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ se $r \leq p$. Então, F é relativamente compacto em $L^p(0, T, B)$ (e em $C(0, T, B)$ se $p = \infty$).*

Prova: Ver Medeiros [13], Apêndice I, Teorema 2, p. 127.

Definição 1.11. Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subseteq X$ converge fraco para $x \in X$ se

$$f(x_n) \rightarrow f(x), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo $f \in X'$. Neste caso denotemos $x_n \rightharpoonup x \in \Sigma(E', E)$.

Proposição 1.23. Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (x_n) uma sequência em E . Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E', E)$ e $f_n \rightarrow f$ em E' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Prova: Ver Brezis [3], Proposição 3.5.iv, p. 58.

Definição 1.12. Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(f_n) \subseteq X'$ converge *fraco*—* para $f \in X'$ se

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo $x \in X$.

Proposição 1.24. Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sequência de E' . Se $f_n \rightarrow f$ fraco —* em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \underline{\lim} \|f_n\|$.

Prova: Ver Brezis [3], Proposição 3.13.iii, p. 63.

Proposição 1.25. Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sequência de E' . Se $f_n \rightarrow f$ fraco —* em $\sigma(E', E)$ e $x_n \rightarrow x$ em E , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Prova: Ver Brezis [3], Proposição 3.13.iv, p. 63.

Teorema 1.26 (Banach-Steinhaus). *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja (T_n) uma sequência de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \rightarrow \infty$ a um limite que denotamos por T_x . Então temos:*

$$(i) \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty,$$

$$(ii) T \in \mathcal{L}(E, F),$$

$$(iii) \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \underline{\lim} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)}.$$

Prova: Ver Brezis [3], Corolário 2.3, p. 33.

Teorema 1.27 (Ponto fixo de Brouwer). *Seja F um espaço de dimensão finita e seja $Q \subseteq F$ um subconjunto compacto, convexo e não-vazio. Seja $f : Q \rightarrow Q$ uma aplicação contínua então f possui ponto fixo.*

Prova: Ver Brezis [3], p. 179.

Definição 1.13. Uma sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em H é dita uma base ortonormal, ou Hilbertiana se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $|e_n| = 1$ para todo n e $(e_m, e_n) = 0$, para todo $m \neq n$;
- (ii) O espaço linear gerado pelos e_n é denso em H .

Teorema 1.28. *Todo espaço de Hilbert separável possui uma base ortonormal.*

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 5.11, p. 143.

Teorema 1.29 (Teorema Espectral). *Seja H um espaço de Hilbert separável e seja T um operador compacto e auto-adjunto, então existe uma base hilbertiana composta por autovetores de T .*

Prova: Ver Brezis [3], Teorema 6.11, p. 167.

Lema 1.30 (Gronwall). *Seja $x(t)$ uma função não negativa em $[0, T]$ que satisfaz:*

$$x(t) \leq C_1 \int_0^t x(s) ds + C_2, \text{ para } C_1, C_2 \geq 0. \forall t \in [0, T].$$

Então

$$x(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}), \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Em particular se

$$x(t) \leq C_1 \int_0^t x(s) ds, \text{ para todo } 0 \leq t \leq T$$

então

$$x(t) = 0.$$

Prova: Ver Evans [5], Apêndice C, p. 625.

Lema 1.31 (Lions). *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, g_n e g funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tais que*

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} < C, \quad g_n \rightarrow g, \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Então

$$g_n \rightharpoonup g, \text{ em } \Omega.$$

Prova: Ver Lions [9], Lema 1.3, p. 12.

Capítulo 2

Equações de Navier-Stokes em domínios limitados do $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo mostraremos que a formulação variacional das equações de Navier-Stokes é bem posta, no caso de $n = 2$. Para maiores detalhes ver: Adams [1], Aubin [2], Coddington-Levinson [4], Ladyzhenskaya [6], Leray [7], Lions [8], [9], [10] e [11], Lions-Magenes [12], Tartar [20] e Temam [21].

2.1 Espaços Funcionais

Definiremos espaços funcionais apropriados para análise matemática das equações de Navier-Stokes. Primeiro analisaremos um problema estacionário associado a estas equações sobre um domínio limitado e convexo Ω do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

Consideremos inicialmente o problema que consiste em determinar uma função $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$, com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em Ω satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \text{ em } \Omega, \quad i=1,2,\dots,n, \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega, \\ u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

sendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ é uma aplicação conhecida.

Denominamos (2.1) de equações de Stokes linearizado. Este sistema é o modelo linearizado do movimento de fluido incompressível viscoso, com velocidade u , confinado ao reservatório Ω , em regime permanente, submetido a uma densidade volumétrica de forças f . A função p é a pressão do fluido e $\nu > 0$, a viscosidade.

Consideremos $(H_0^1(\Omega))^n = H_0^1(\Omega) \times \dots \times H_0^1(\Omega)$, munido do produto interno:

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H_0^1(\Omega)}, \quad (2.2)$$

onde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in (H_0^1(\Omega))^n$. Mostremos que a aplicação definida em (2.2) é um produto interno em $(H_0^1(\Omega))^n$. De fato, dados $u, v, w \in (H_0^1(\Omega))^n$ temos

- $((u, v)) = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (v_i, u_i)_{H_0^1(\Omega)} = ((v, u));$
- $((\lambda u + v, w)) = \sum_{i=1}^n (\lambda u_i + v_i, w_i)_{H_0^1(\Omega)} = \lambda((u, w)) + ((v, w));$
- $((u, u)) = \sum_{i=1}^n (u_i, u_i)_{H_0^1(\Omega)} \geq 0$, e se $u \neq 0$ então

$$((u, u)) = \sum_{i=1}^n (u_i, u_i)_{H_0^1(\Omega)} > 0,$$

pois para algum i , temos $u_i \neq 0$.

Portanto $(H_0^1(\Omega))^n$ é um espaço de Hilbert, pois é um espaço de Banach munido com o produto interno definido em (2.2) e a norma proveniente deste produto interno. Em $(H_0^1(\Omega))^n$ usando a desigualdade de Poincaré, podemos considerar a norma $\|u\|$ da seguinte forma:

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla u_i|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.3)$$

pois

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n (u_i, u_i)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla u_i|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.4)$$

onde a última igualdade decorre da desigualdade de Poincaré. Além disso, podemos escrever a norma $|\nabla u_i|_{L^2(\Omega)}$ como sendo:

$$|\nabla u_i|^2 = \int_{\Omega} (\nabla u_i)^2 dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) dx = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx,$$

com $dx = dx_1 dx_2, \dots, dx_n$ a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$.

Consideremos também $(L^2(\Omega))^n = L^2(\Omega) \times \dots \times L^2(\Omega)$, munido do produto interno:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i v_i dx. \quad (2.5)$$

Mostremos que a aplicação definida em (2.5) é um produto interno em $(L^2(\Omega))^n$. De fato, dados $u, v, w \in (L^2(\Omega))^n$, temos

- $(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i v_i dx = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (v_i, u_i)_{L^2(\Omega)} = (v, u);$
- $(\lambda u + v, w) = \lambda(u, w) + (v, w);$
- $(u, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i^2 dx \geq 0$, e se $u \neq 0$ então

$$(u, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i^2 dx > 0,$$

pois para algum i , temos $u_i \neq 0$.

A norma induzida em $(L^2(\Omega))^n$ é dada por:

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i^2 dx. \quad (2.6)$$

Consideremos os espaços:

$$V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega\}$$

e

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n; \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ em } \Omega\},$$

com V sendo um subspaço fechado de $(H_0^1(\Omega))^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções testes em Ω e representemos por H o conjunto de aderência de $\mathcal{V}$.

Proposição 2.1. O espaço $\mathcal{V}$ é denso em V .

Prova: Com efeito, seja (φ_m) uma sequência em $\mathcal{V}$, com $\varphi_i \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$. Desta forma, podemos escrever $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in})$, onde $\varphi_{ij} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m, \dots$. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ então para $(\varphi_{ij})_i \subset \mathcal{D}(\Omega)$ existe $\varphi^j \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\varphi_{ij} \rightarrow \varphi^j$, quando $i \rightarrow +\infty$, seja qual for $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto

$$\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in}) \rightarrow (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n) = \varphi \in (H_0^1(\Omega))^n, \text{ quando } i \rightarrow +\infty$$

e

$$\operatorname{div} \varphi = \operatorname{div} \lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} \operatorname{div} \varphi_i = 0.$$

Logo o espaço $\mathcal{V}$ é denso em V , como queríamos mostrar. ■

Procurando uma formulação variacional para o sistema linearizado de Stokes, multipliquemos ambos os membros de (2.1) por um vetor $v_i \in H_0^1(\Omega)$, integremos sobre Ω e assim temos a seguinte igualdade:

$$-\int_{\Omega} \nu \Delta u_i v_i dx + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx,$$

ou seja,

$$-\nu \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx,$$

e portanto, usando o fato que $v_i \in H_0^1(\Omega)$ e pela fórmula de Green, obtemos

$$\nu \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Somando a igualdade anterior em i , e ordenando os termos convenientemente temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx &= \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx \\ &= \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx \\ &= \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx. \end{aligned}$$

Considerando $v \in V$, temos $\operatorname{div} v = 0$, logo da igualdade anterior temos a seguinte equação:

$$\nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx, \text{ para todo } v \in V. \quad (2.7)$$

Daí, reduzimos nosso problema a encontrar $u \in V$ que satisfaça (2.7), para todo $v \in V$. Para demonstrarmos a existência e a unicidade de $u \in V$, solução de (2.7) aplicaremos o lema de Lax-Milgram, para isto consideremos uma forma bilinear da seguinte maneira:

$$a(u, v) = \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad u, v \in V. \quad (2.8)$$

Proposição 2.2. A forma bilinear $a(u, v)$ é contínua e coerciva em V .

Prova: De fato, dados $u, v \in V$ temos

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\ &\leq \left| \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right| \\ &= \nu \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right|, \end{aligned}$$

haja vista que, para $u, v \in (H_0^1(\Omega))^n$ temos a igualdade

$$\begin{aligned} ((u, v)) &= \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^n (\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \end{aligned}$$

obtemos assim a seguinte desigualdade

$$a(u, v) \leq \nu |((u, v))|.$$

Usando a desigualdade de Schwarz concluimos:

$$a(u, v) \leq \nu \|u\| \|v\|.$$

Provando assim a continuidade de $a(u, v)$ em V . Além disso, $a(u, v)$ é coerciva, pois dado $u \in V$ obtemos

$$a(u, u) = \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \nu \sum_{i=1}^n |\nabla u_i|^2 = \nu \|u\|^2.$$

Portanto $a(u, v)$ é contínua e coerciva em V . ■

Para todo $f \in H$ definimos a aplicação

$$f \mapsto \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx = (f, v), \text{ fixado } v \in V. \quad (2.9)$$

Como consequência da desigualdade de Schwarz, a aplicação definida em (2.9) é

contínua e usando a Proposição 2.2, a forma linear $a(u, v)$ é contínua e coerciva em V , então do lema de Lax-Milgram existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = (f, v), \quad \text{para todo } v \in V. \quad (2.10)$$

Relacionemos agora a equação (2.10) com o problema original formulado para as equações (2.1), no entanto, antes mostremos um resultado no qual nos permitirá caracterizar as formas lineares contínuas sobre $(H_0^1(\Omega))^n$ que se anulam em V .

Proposição 2.3 (De Rham). Seja $L \in (H^{-1}(\Omega))^n$, que identificamos como o dual de $(H_0^1(\Omega))^n$, tal que $Lv = 0$, para todo $v \in V$, então existe uma função

$$p \in L_0^2(\Omega) = \left\{ g \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} g(x) dx = 0 \right\},$$

tal que $L = \nabla p$, ou seja,

$$Lv = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx; \quad \text{para todo } v \in V.$$

Prova: Afim de provarmos a Proposição 2.3 consideremos $d(x)$ a distância de um ponto x de Ω à fronteira Γ . Sabemos que $d(x)$ é uma função lipschitziana em Ω . Consideremos então a equação:

$$\operatorname{div}(d(x)\nabla\phi(x)) = g \text{ em } \Omega.$$

Usando resultados de equações elíticas degeneradas é possível mostrar que existe $\phi \in H^2(\Omega)$, solução do problema acima e que a aplicação $g \mapsto \phi$ é contínua de $L_0^2(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$.

Logo existe uma aplicação linear e contínua $p : L_0^2(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))^n$ definida por:

$$p(g) = d(x)\nabla\phi,$$

pois, como $\phi \in H^2(\Omega)$, temos $d(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ e $pg \in (H_0^1(\Omega))^n$. Além disso,

$$\operatorname{div} pg = g. \quad (2.11)$$

Procedendo de maneira semelhante ao que foi feito para chegar a (2.10), usando o lema de Lax-Milgram é possível mostrar que existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = (f, v)_{V' \times V}, \quad \text{para todo } v \in V, \quad f \in V'. \quad (2.12)$$

Aproximaremos a solução de (2.12) por soluções de um problema penalizado em $(H_0^1(\Omega))^n$, para isto definamos para cada $\alpha > 0$ a aplicação bilinear, contínua e coerciva

$$(u_\alpha, v) \mapsto a(u_\alpha, v) + \frac{1}{\alpha}(\operatorname{div} u_\alpha, \operatorname{div} v).$$

Usando o lema de Lax-Milgram obtemos para cada $\alpha > 0$, $u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ tal que

$$a(u_\alpha, v) + \frac{1}{\alpha}(\operatorname{div} u_\alpha, \operatorname{div} v) = (f, v)_{V' \times V}, \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n. \quad (2.13)$$

Nosso objetivo agora é mostrar que u_α converge fraco em $(H_0^1(\Omega))^n$ para a solução u de (2.12).

De fato, fazendo $v = u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ em (2.13) obtemos a igualdade:

$$a(u_\alpha, u_\alpha) + \frac{1}{\alpha}(\operatorname{div} u_\alpha, \operatorname{div} u_\alpha) = (f, u_\alpha)_{V' \times V},$$

ou seja,

$$\nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \right)^2 dx + \frac{1}{\alpha}(\operatorname{div} u_\alpha)^2 = (f, u_\alpha)_{V' \times V},$$

tendo assim a desigualdade

$$\nu \|u_\alpha\|^2 + \frac{1}{\alpha}(\operatorname{div} u_\alpha)^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_\alpha\|_V.$$

Usando o fato que $f \in V'$, segue a estimativa abaixo

$$\|u_\alpha\| \leq C, \quad (2.14)$$

onde C independe de $\alpha > 0$.

Fazendo, $P_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{div} u_\alpha$, considerando $v = u_\alpha$ e substituindo em (2.13) temos

$$a(u_\alpha, v) = (f, u_\alpha)_{V' \times V} + (P_\alpha, \operatorname{div} v), \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n. \quad (2.15)$$

Observação 2.1. Como $u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$, $P_\alpha \in L_0^2(\Omega)$, temos pelo Teorema de Gauss

$$\int_{\Omega} P_\alpha dx = -\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \operatorname{div} u_\alpha dx = -\frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma} u_\alpha \eta d\Gamma = 0, \quad (2.16)$$

pois $u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$, onde $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ é o vetor normal unitário interior a Γ .

Observação 2.2. P_α é limitado em $L^2(\Omega)$.

Com efeito, da Observação 2.1, $P_\alpha \in L_0^2(\Omega)$, e assim sendo, a igualdade (2.11)

garante a existência de um $v_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ tal que

$$\operatorname{div} v_\alpha = \operatorname{div} p(P_\alpha) = P_\alpha, \quad (2.17)$$

e visto que, $p : L^2_0(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))^n$ é contínua, concluímos a desigualdade:

$$\|v_\alpha\| = \|p(P_\alpha)\| \leq C\|P_\alpha\|. \quad (2.18)$$

Tomando $v = v_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ em (2.13), obtemos:

$$(P_\alpha, \operatorname{div} v_\alpha) = a(u_\alpha, v_\alpha) - (f, v_\alpha)_{V' \times V}.$$

Como de (2.17), $\operatorname{div} v_\alpha = P_\alpha$, a igualdade acima nos dá a desigualdade:

$$|P_\alpha|^2 = a(u_\alpha, v_\alpha) - (f, v_\alpha)_{V' \times V} \leq \nu \|u_\alpha\| \|v_\alpha\| + |f|_{V'} \|v_\alpha\|.$$

Usando a estimativa (2.14) e a desigualdade (2.18) temos a estimativa

$$|P_\alpha|^2 \leq \nu \|u_\alpha\| \|v_\alpha\| + |f|_{V'} \|v_\alpha\| = \|v_\alpha\| (\nu \|u_\alpha\| + |f|_{V'}) < C. \quad (2.19)$$

A Observação 2.2 anterior garante que existe uma subsequência de (P_α) , a qual ainda representaremos por (P_α) que converge fraco para p em $L^2(\Omega)$. Novamente usando a estimativa (2.14), existe uma subsequência de (u_α) , denotada ainda por (u_α) , que converge fraco para w em $(H_0^1(\Omega))^n$.

Tomando o limite na equação penalizada (2.13) obtemos a seguinte igualdade:

$$a(w, v) = (f, v)_{V' \times V} + (p, \operatorname{div} v), \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n. \quad (2.20)$$

Em particular, para $v \in V \subseteq (H_0^1(\Omega))^n$ em (2.20), w será solução de

$$a(w, v) = (f, v)_{V' \times V}; \text{ para todo } v \in V. \quad (2.21)$$

Comparando as equações (2.12) e (2.21), $u = w$, pois u é solução única de (2.12). Concluímos assim, que a solução u de (2.12) é obtida como limite de soluções da equação penalizada (2.13).

Consideremos agora $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$, tal que $(f, v) = 0$, para todo $v \in V$, então a solução u de (2.12) é a solução $u = 0$. Retornando à equação (2.20) temos

$$(f, v)_{V' \times V} + (p, \operatorname{div} v) = 0, \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n, \quad (2.22)$$

ou ainda,

$$(f, v)_{V' \times V} + (-\nabla p, v) = 0, \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n, \quad (2.23)$$

provando assim que

$$f = \nabla p.$$

Em particular $p \in L_0^2(\Omega)$ resolve o nosso problema, assim sendo, existe $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que $f = \nabla p$. Concluimos de (2.23) que se L for uma forma linear e contínua sobre $(H_0^1(\Omega))^n$, de modo que, $Lv = 0$, para todo $v \in V$ então existe um único $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$Lv = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx, \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n. \quad (2.24)$$

■

Claramente para qualquer $p \in L^2(\Omega)$, (2.24) torna Lv uma forma linear e contínua em $(H_0^1(\Omega))^n$, nula em V . Usaremos a caracterização (2.24) para fazermos uma interpretação da solução u de (2.10).

Seja u solução de (2.10) e consideremos a forma linear contínua Lv definida em $(H_0^1(\Omega))^n$ da seguinte forma:

$$Lv = a(u, v) - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx; \text{ com } f \in H. \quad (2.25)$$

Sendo u solução de (2.10), $Lv = 0$, para todo $v \in V$, com Lv definida por (2.25). Usando a caracterização dada por (2.24) existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$Lv = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx, \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Logo o par (u, p) de $V \times H$ é solução da forma bilinear

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx, \text{ para todo } v \in (H_0^1(\Omega))^n. \quad (2.26)$$

Como $(\mathcal{D}(\Omega))^n \subseteq (H_0^1(\Omega))^n$, restringindo v à $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ na igualdade (2.26), existe uma única $u \in V$ que satisfaz

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx = \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx &= -\nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i dx \\
 &= -\nu \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i dx \\
 &= -\nu \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx,
 \end{aligned}$$

obtemos a equação:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx = -\nu \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx,$$

resultando assim a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
 -\nu \sum_{i=1}^n \langle \Delta u_i, v_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle f_i, v_i \rangle - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle f_i, v_i \rangle - \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Logo u é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \text{ em } \Omega, \quad i=1,2,\dots,n; \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

ou seja, solução do sistema de Stokes.

2.2 Equações de Navier-Stokes em domínio limitados do $\mathbb{R}^2$

Embora desejemos analisar as equações de Navier-Stokes no plano, os problemas serão formulados no caso geral. Iniciaremos com algumas notações e para isto consideremos,

$$Q = \Omega \times (0, T), \text{ onde } T > 0$$

e o vetor velocidade $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Adotemos as seguintes notações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right)$$

e

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n).$$

As equações de Navier-Stokes possuem a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p, \quad \nu > 0, \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} u = 0, \text{ em } Q, \\ u = 0, \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.27)$$

sendo Σ a fronteira lateral de Q .

O problema a resolver consiste em determinar u e p satisfazendo (2.27), porém antes de fazermos a sua formulação variacional, estabeleceremos mais algumas notações.

Para $u, v \in V$, consideremos a forma linear contínua e coerciva $a(u, v)$ definida anteriormente, ou seja,

$$a(u, v) = \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx,$$

e agora consideremos a forma trilinear $b(u, v, w)$ definida por:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx.$$

A seguir daremos algumas propriedades desta forma trilinear mencionada acima.

Lema 2.4. A forma trilinear $b : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$(u, v, w) \mapsto b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx$$

é contínua.

Prova: De fato, usando o teorema da imersão de Sobolev temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} > 0.$$

Como $n = 2$, obtemos a seguinte imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, +\infty).$$

Assim sendo, da definição de $b(u, v, w)$ chegamos a desigualdade

$$|b(u, v, w)| \leq \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx. \quad (2.28)$$

Notemos que

$$\int_{\Omega} \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx \leq \int_{\Omega} |u_j w_i| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx$$

e usando a desigualdade de Hölder generalizada, com $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$, obtemos a desigualdade

$$\int_{\Omega} \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_j|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |w_i|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx \leq |u_j|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} |w_i|_{L^4(\Omega)}, \quad (2.29)$$

combinando as desigualdades (2.29) e (2.28) conseguimos

$$|b(u, v, w)| \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |u_j|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} |w_i|_{L^4(\Omega)}. \quad (2.30)$$

Em particular $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e assim sendo, de (2.30)

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq C_1 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder temos a seguinte desigualdade:

$$|b(u, v, w)| \leq C_1 \sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Pela desigualdade de Poincaré chegamos a

$$|b(u, v, w)| \leq C \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

Portanto, concluímos que $|b(u, v, w)|$ satisfaz a desigualdade:

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq C \left(\sum_{j=1}^2 \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &= C \|u\|_V \|w\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

Provando assim que $b(u, v, w)$ é contínua em $V \times V \times V$. ■

Usando o Lema 2.4, temos que fixados u e v , a aplicação $w \mapsto b(u, v, w)$ é uma forma linear e contínua em V . Por esta razão podemos definir uma aplicação $B(u, v)$ de $V \times V$ em V' de modo que

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w),$$

sendo $B(u, v)$ bilinear e contínua.

Lema 2.5. Seja $b(u, v, w)$ a forma trilinear definida anteriormente então

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0, \text{ para todos } u, v, w \in V.$$

Prova: Dados u, v e $w \in V$ então

$$\begin{aligned} b(u, v, w) + b(u, w, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i \right) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (w_i, v_i) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes o último termo da igualdade acima temos:

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} (w_i, v_i) dx.$$

Como $u \in V$

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} (w_i, v_i) dx &= -\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} (w_i, v_i) dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (w_i, v_i) \operatorname{div} u dx = 0. \end{aligned}$$

Então

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0,$$

como queríamos. ■

Notemos que, sendo $b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0$, segue $b(u, v, w) = 0$ sempre que $v = w$.

Problema 2.6. Dados $f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^2)$, $u_0 \in H$, determine u e p , sendo $p \in \mathcal{D}'(Q)$ tais que:

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \quad (2.31)$$

$$u' - \nu \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } \mathcal{D}'(Q); \quad (2.32)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.33)$$

A solução do Problema 2.6 satisfaz as condições do sistema (2.27).

Problema 2.7. Dados $f \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^2)$, $u_0 \in H$. Determine u e p , sendo $p \in \mathcal{D}'(Q)$ tais que:

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \quad (2.34)$$

$$(u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad (2.35)$$

para todo $v \in V$ e

$$u(0) = u_0. \quad (2.36)$$

Mostremos que os Problemas 2.6 e 2.7 são equivalentes. De fato, seja u solução do Problema 2.6 e $\varphi \in \mathcal{V}$, multiplicando ambos os membros da equação (2.32) por φ e integrando em Ω obtemos a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega} u'(t) \varphi dx - \nu \int_{\Omega} \Delta u(t) \varphi dx + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} u_j(t) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \varphi_i dx - \int_{\Omega} \nabla p \varphi dx,$$

ou ainda, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$(u'(t), \varphi) + \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial x_j^2} \varphi_i dx + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi) - (\nabla p, \varphi),$$

ou seja,

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi) - (\nabla p, \varphi).$$

Como

$$(\nabla p, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla p \varphi dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = - \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx = 0,$$

concluimos que, para todo $\varphi \in \mathcal{V}$, é satisfeita a igualdade

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T).$$

Visto que, $\mathcal{V}$ é denso em $V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2; \operatorname{div} v = 0\}$, u é solução do Problema 2.7. Provando assim que, se u for solução do problema 2.6 então também será do Problema 2.7. Mostremos agora que vale a recíproca, para isto consideremos na equação (2.35) $v = \varphi \in \mathcal{V}$, para $n = 2$ e assim sendo

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi).$$

Como $\int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx = 0$, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi) + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u'_i(t) \varphi_i dx + \nu \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_i dx = \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i(t) \varphi_i dx + \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Usando o teorema de Green em alguns termos da equação acima obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u'_i(t) \varphi_i dx - \nu \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial x_j^2} \varphi_i dx + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_i dx =$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i(t) \varphi_i dx - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx,$$

implicando

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u'_i(t) \varphi_i dx - \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \Delta u_i(t) \varphi_i dx + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_i dx = \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i(t) \varphi_i dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx, \end{aligned}$$

resultando assim

$$\left\langle u' - \nu \Delta u + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}, \varphi_i \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} = 0, \text{ para todo } \varphi_i \text{ com, } i = 1, 2.$$

Portanto

$$u' - \nu \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Teorema 2.8. *Dados $f \in L^2(0, T; V')$ e $u_0 \in H$. Então existe uma única solução u satisfazendo as condições:*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \quad (2.37)$$

$$u' \in L^2(0, T; V'); \quad (2.38)$$

$$(u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad (2.39)$$

para todo $v \in V$;

$$u(0) = u_0. \quad (2.40)$$

Na demonstração do Teorema 2.8 usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em obter a solução do problema por meio de soluções aproximadas de problemas análogos em dimensão finita. É fundamental a obtenção de estimativas sobre as soluções aproximadas permitindo a obtenção de sequências convergentes. Porém, antes mostraremos alguns lemas técnicos que ajudarão na demonstração do Teorema 2.8.

Lema 2.9. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e regular, então para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ temos*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prova: Seja $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, consideremos $\tilde{u} = u$ em Ω e nula em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ então

$$\tilde{u}^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \tilde{u}^2(s, x_2)}{\partial s} ds = \int_{-\infty}^{x_1} 2\tilde{u}(s, x_2) \frac{\partial \tilde{u}(s, x_2)}{\partial s} ds$$

e assim sendo temos a desigualdade abaixo

$$|\tilde{u}^2(x_1, x_2)| \leq 2 \int_{-\infty}^{x_1} |\tilde{u}(s, x_2)| \left| \frac{\partial \tilde{u}(s, x_2)}{\partial s} \right| ds \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(s, x_2)| \left| \frac{\partial \tilde{u}(s, x_2)}{\partial s} \right| ds = v(x_2).$$

Procedendo analogamente ao que foi feito anteriormente obtemos

$$|\tilde{u}^2(x_1, x_2)| \leq 2 \int_{x_2}^{+\infty} |\tilde{u}(x_1, s)| \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, s)}{\partial s} \right| ds \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(x_1, s)| \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, s)}{\partial s} \right| ds = v(x_1).$$

Multiplicando membro a membro as duas desigualdades acima chegamos a desigualdade

$$|\tilde{u}^4(x_1, x_2)| \leq v(x_1)v(x_2), \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Observando que $v_1, v_2 \in L^1(\Omega)$ então pelo teorema de Tonelli temos $(v_1, v_2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x_1, x_2)|^4 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} v(x_1)v(x_2) dx < +\infty, \quad x = (x_1, x_2).$$

Usando a desigualdade acima e o teorema de Fubini obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x_1, x_2)|^4 dx \leq \int_{\mathbb{R}} v(x_1) dx_1 \int_{\mathbb{R}} v(x_2) dx_2. \quad (2.41)$$

No entanto, da definição de $v(x_2)$ e da desigualdade de Hölder concluímos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(x_2) dx_2 &= 2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}(x_1, x_2)| \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| dx_1 dx_2 \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \tilde{u}(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\ &= 2 |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Analogamente temos

$$\int_{\mathbb{R}} v(x_1) dx_1 \leq 2 |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (2.43)$$

Usando as desigualdades (2.41), (2.42) e (2.43) concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(x_1, x_2)|^4 dx \leq 4 |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

O que implica, aplicando na desigualdade acima a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x_1, x_2)|^4 dx \leq 2|\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \left[\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right],$$

ou seja,

$$\|\tilde{u}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq 2|\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Considerando $\tilde{u} \in \Omega$ temos

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq 2|u|_{L^2(\Omega)}^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Implicando em

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2}|u|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^2)$, segue o que desejávamos. ■

Lema 2.10. Se $u, v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, então $B(u, v) \in L^2(0, T; V')$.

Prova: Para toda $w \in V$, pelo Lema 2.5 e pela desigualdade de Hölder, procedendo de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle B(u(t), v(t)), w \rangle| &= |b(u(t), v(t), w)| = |b(u(t), w, v(t))| \\ &\leq C_1 \|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \|w\|_V \|v(t)\|_{(L^4(\Omega))^2}, \end{aligned}$$

onde

$$B(u(t), v(t)) \in V'$$

e

$$\|B(u(t), v(t))\|_{V'} \leq C_2 \|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \|v(t)\|_{(L^4(\Omega))^2}.$$

Por outro lado, em virtude da desigualdade de Hölder chegamos a

$$\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} = \sum_{i=1}^2 \|u_i(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^2 \|u_i(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Pelo Lema 2.9 obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^2 \|u_i(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^2 \sqrt{2} \|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_i(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^2 \|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_i(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Novamente pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} &\leq 2^{3/4} \left(\|u(t)\|_V \left(\sum_{i=1}^2 \|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\
&= 2^{3/4} \|u(t)\|_V^{1/2} \left(\left(\sum_{i=1}^2 \|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\
&\leq 2^{3/4} \|u(t)\|_V^{1/2} \|u(t)\|_H^{1/2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \leq 2^{3/4} \|u(t)\|_V^{1/2} \|u(t)\|_H^{1/2}.$$

Como por hipótese $u \in L^\infty(0, T; H)$, vale a desigualdade:

$$\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \leq 2^{3/4} (\|u(t)\|_{L^\infty(0, T; H)})^{1/2} \|u(t)\|_V^{1/2} \leq C_3 \|u(t)\|_V^{1/2}. \quad (2.44)$$

Analogamente

$$\|v(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \leq C_4 \|v(t)\|_V^{1/2}. \quad (2.45)$$

Resulta das desigualdades (2.44) e (2.45)

$$\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \|v(t)\|_{(L^4(\Omega))^2} \leq C_5 \|u(t)\|_V^{1/2} \|v(t)\|_V^{1/2}. \quad (2.46)$$

Então

$$\|B(u(t), v(t))\|_{V'} \leq C_5 \|u(t)\|_V^{1/2} \|v(t)\|_V^{1/2}.$$

Usando a desigualdade de Young chegamos a

$$\|B(u(t), v(t))\|_{V'}^2 \leq C_5^2 \|u(t)\|_V \|v(t)\|_V \leq \frac{C_5^2}{2} \{\|u(t)\|_V^2 + \|v(t)\|_V^2\}.$$

Logo

$$\int_0^T \|B(u(t), v(t))\|_{V'}^2 dt \leq C_6 \left[\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt + \int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \right].$$

Como $u, v \in L^2(0, T; V)$, $B(u, v) \in L^2(0, T; V')$ como queríamos. ■

A partir de agora provaremos o Teorema 2.8.

Existência: Considerando as definições dos conjuntos, $\mathcal{V}$, V e H obtemos a seguinte cadeia de imersões:

$$\mathcal{V} \subseteq V \subseteq H.$$

Passando o fecho em $(L^2(\Omega))^2$ na cadeia acima, temos

$$\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overline{V} \subseteq H.$$

Como $H = \overline{\mathcal{V}}$ então

$$H = \overline{V}. \quad (2.47)$$

Logo a imersão de V em H é compacta. Consideremos então o operador A definido pela terna $\{V, H; ((\cdot, \cdot))_V\}$, (cf. Milla [18]), onde

$$D(A) = \{u \in V; \text{ existe } f \in H, \text{ tal que } (f, v)_H = ((u, v))_V, \text{ para todo } v \in V\},$$

$$Au = f.$$

Se $u \in D(A)$ então

$$(Au, v)_H = ((u, v))_V, \text{ para todo } v \in V. \quad (2.48)$$

Pondo $Au = (\xi_1, \xi_2)$ obtemos

$$\sum_{i=1}^2 (\xi_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 ((u_i, v_i))_{H_0^1(\Omega)}.$$

Em particular, tomando $v = \varphi \in \mathcal{V}$ resulta

$$\sum_{i=1}^2 \langle \xi_i, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 (\nabla u_i, \nabla \varphi_i)_{L^2(\Omega)},$$

ou ainda,

$$\sum_{i=1}^2 \langle \xi_i, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^2 \langle -\Delta u_i, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)},$$

e como $Au = (\xi_1, \xi_2)$, segue que

$$\langle Au, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}.$$

Portanto

$$Au = -\Delta u \text{ em } \mathcal{V}', \text{ para todo } u \in D(A),$$

com $-\Delta u = (-\Delta u_1, -\Delta u_2)$.

Por outro lado, conforme o teorema Espectral, temos a existência de uma sequência (w_i) formada por auto-funções do operador A , cujos valores próprios (λ_i) satisfazem:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_i, \lambda_i \rightarrow +\infty \ (i \rightarrow +\infty).$$

Além disso,

(w_i) é um sistema ortonormal completo em H ;

$\left(\frac{w_i}{\lambda_i^{1/2}}\right)$ é um sistema ortonormal completo em V ;

$\left(\frac{w_i}{\lambda_i}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $D(A)$.

Observando a igualdade (2.48) temos

$$(Aw_i, v)_H = ((w_i, v))_V, \text{ para todo } v \in V,$$

ou seja,

$$\lambda_i(w_i, v)_H = ((w_i, v))_V, \text{ para todo } v \in V. \quad (2.49)$$

Como (w_i) é um sistema ortonormal completo em H podemos escrever

$$u = \sum_{i=1}^{+\infty} (u, w_i) w_i, \text{ para todo } u \in H \quad (2.50)$$

e pelo teorema de Parseval

$$|u|_H^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |(u, w_i)|^2, \text{ para todo } u \in H, \quad (2.51)$$

que define uma norma para u em H .

Como $\left(\frac{w_i}{\lambda_i^{1/2}}\right)$ é um sistema ortonormal completo em V , obtemos

$$u = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left(u, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \right)_V \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \text{ para todo } u \in V \quad (2.52)$$

e assim sendo, temos do teorema de Parseval e de (2.49)

$$||u||_V^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \left| \left(\left(u, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \right)_V \right|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \left| \frac{\lambda_i(u, w_i)}{\sqrt{\lambda_i}} \right|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i |(u, w_i)|^2 \quad (2.53)$$

que define uma norma para u em V .

Lembremos que o operador A admite uma extensão, (cf. Milla [18]), $\tilde{A} : V \rightarrow V'$ definido por

$$\langle \tilde{A}u, v \rangle_{V',V} = ((u, v))_V, \text{ para todo } v \in V,$$

extensão esta que é uma bijeção isométrica e auto-adjunta e portanto admite inversa isométrica e auto-adjunta.

$$[\tilde{A}]^{-1} : V' \rightarrow V.$$

Assim sendo, para $v \in V'$ temos de (2.53)

$$\begin{aligned} \|v\|_{V'}^2 &= \|[\tilde{A}]^{-1}v\|_V^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i |([\tilde{A}]^{-1}v, w_i)_H|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i |\langle v, [\tilde{A}]^{-1}w_i \rangle_{V',V}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \left| \left\langle v, \frac{w_i}{\lambda_i} \right\rangle_{V',V} \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} |\langle v, w_i \rangle_{V',V}|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|v\|_{V'}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} |\langle v, w_i \rangle_{V',V}|^2 \quad (2.54)$$

que define uma norma para v em V' .

Sistema Aproximado: Consideremos os vetores (w_i) , solução de

$$((w_i, v))_V = \lambda_i (w_i, v)_H,$$

obtido anteriormente e representemos por V_m o subespaço de V de dimensão m gerado pelos m primeiros vetores

$$w_1, w_2, \dots, w_m.$$

Para cada m , consideremos $u_m \in V_m$, de modo que, a seguinte igualdade é satisfeita

$$(u'_m(t), v) + \nu a(u_m(t), v) + b(u_m(t), u_m(t), v) = (f(t), v), \text{ para todo } v \in V_m, \quad (2.55)$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \text{ sendo } \lim u_{0m} = u_0, \text{ em } H. \quad (2.56)$$

Para escrevermos a equação (2.55) explicitamente, substituamos

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j$$

e tomemos $v = w_i$, assim sendo, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) w_j, w_i \right) + \nu a \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_i \right) + b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_i \right) = (f(t), w_i).$$

Como $a(u_m, w_i) = ((u_m, w_i)) = \lambda_i(u_m, w_i) = \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_i \right)$, podemos escrever a igualdade anterior da seguinte forma:

$$g'_{im}(t) + \nu \lambda_i g_{im}(t) + b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_i \right) = (f_i, w_i) \quad (2.57)$$

$i = 1, 2, \dots, m$.

Relativamente a condição inicial, obtemos

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^m g_{jm}(0) w_j, \quad g_{im}(0) = c_{im}(t) \quad (2.58)$$

Usando o teorema de Caracetheodory, (Teorema 1.11), o sistema (2.57)-(2.58) possui uma solução $(g_{jm})_{1 \leq j \leq m}$ em um intervalo $[0, t_m)$. As estimativas obtidas a seguir garantem, via o teorema do Prolongamento, que o sistema aproximado acima possui solução no intervalo $[0, T)$.

Estimativa I: Tomando $v = u_m(t)$ na equação (2.55) obtemos

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \nu((u_m(t), u_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)),$$

visto que,

$$(u'_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2,$$

$$((u_m(t), u_m(t))) = ||u_m(t)||^2$$

e

$$b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0,$$

pois pelo Lema 2.5 $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$. Portanto, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela desigualdade elementar $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, obte-

mos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 &\leq \|f(t)\|_{V'} \|u_m(t)\|_V \\ &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|f(t)\|_{V'} \sqrt{\nu} \|u_m(t)\|_V \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \|f(t)\|_{V'}^2 + \frac{\nu}{2} \|u_m(t)\|_V^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{2\nu} \|f(t)\|_{V'}^2 + \frac{\nu}{2} \|u_m(t)\|_V^2,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \frac{\nu}{2} \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{2\nu} \|f(t)\|_{V'}^2,$$

resultando assim na seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{V'}^2. \quad (2.59)$$

Integrando a desigualdade (2.59) de 0 a $t \leq t_m$, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds} |u_m(s)|^2 ds + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds,$$

porém, da hipótese sobre u_{0m}

$$|u_{0m}|^2 \leq C_1.$$

Logo, obtemos a estimativa

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq \mathbf{C}, \quad (2.60)$$

onde $\mathbf{C}$ independe de m .

A estimativa (2.60) nos garante encontrarmos estimativa para $|u_m(t)|$ na norma de H , independentemente de m e t em $[0, t_m)$. Como já foi citado anteriormente podemos prolongar a solução a todo intervalo $[0, T)$. Além disso, a sequência (u_m) é limitada em $L^\infty(0, T; H)$ e $L^2(0, T; V)$.

Estimativa II: Identificando H com seu dual H' concluímos do nosso sistema aproximado que

$$\langle u'_m(t), w_j \rangle_{V', V} + \nu \langle -\Delta u_m(t), w_j \rangle_{V', V} + \langle B(u_m(t), u_m(t)), w_j \rangle_{V', V} = \langle f(t), w_j \rangle_{V', V},$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ considerando

$$h_m(t) = f(t) + \nu \Delta u_m(t) - B(u_m(t), u_m(t)), \quad u'_m(t) \in V' \quad (2.61)$$

chegamos a

$$\langle h_m(t), w_j \rangle_{V', V} = \langle u'_m(t), w_j \rangle_{V', V}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} |\langle h_m(t), w_j \rangle_{V', V}|^2 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} |\langle u'_m(t), w_j \rangle_{V', V}|^2, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim sendo obtemos da definição da norma de u'_m em V' ,

$$\|u'_m(t)\|_{V'}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} |\langle u'_m(t), w_j \rangle_{V', V}|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left| \frac{d}{dt} (u_m(t), w_j) \right|^2.$$

Como $(u_m(t), w_j) = 0$, se $j \geq m + 1$, temos

$$\begin{aligned} \|u'_m(t)\|_{V'}^2 &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \left| \frac{d}{dt} (u_m(t), w_j) \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} |\langle u'_m(t), w_j \rangle_{V', V}|^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} |\langle h_m(t), w_j \rangle_{V', V}|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} |\langle h_m(t), w_j \rangle_{V', V}|^2 = \|h_m(t)\|_{V'}^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|u'_m(t)\|_{V'}^2 \leq \|h_m(t)\|_{V'}^2, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, temos

$$\|h_m(t)\|_{V'} \leq \|f(t)\|_{V'} + \nu \|\Delta u_m(t)\|_{V'} + \|B(u_m(t), u_m(t))\|_{V'},$$

onde sendo u_m limitada em $L^2(0, T; V)$, concluímos que $B(u_m, u_m)$ também será limi-

tada em $L^2(0, T; V)$ e sendo $-\Delta$ pertencente a $\mathfrak{L}(V, V')$, $f \in L^2(0, T; V')$ segue

$$\begin{aligned} \|h_m(t)\|_{V'} &\leq \|f(t)\|_{V'} + \nu \|u_m(t)\|_V + C \|u_m(t)\|^{1/2} \|u_m(t)\|^{1/2} \\ &= \|f(t)\|_{V'} + (\nu + C) \|u_m(t)\|. \end{aligned}$$

Logo obtemos a desigualdade

$$\int_0^T \|h_m\|_{V'}^2 dx \leq \int_0^T \|f\|_{V'}^2 dx + \int_0^T 2(\nu + C) \|f\|_{V'} \|u_m\| dx + \int_0^T (\nu + C)^2 \|u_m\|^2 dx \leq C.$$

Portanto, a sequência (h_m) é limitada em $L^2(0, T, V')$ e da desigualdade

$$\|u'_m(t)\|_{V'}^2 \leq \|h_m(t)\|_{V'}^2,$$

chegamos a estimativa

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|_{V'}^2 \leq \int_0^T \|h_m(t)\|_{V'}^2 < C,$$

resultando, assim que a sequência (u'_m) é limitada em $L^2(0, T; V')$.

Portanto conseguimos subsequências das sequências (u_m) e (u'_m) , as quais ainda denotaremos por (u_m) e (u'_m) tais que: (u_m) converge fraco para u em $L^2(0, T; V)$ e converge fraco estrela para u em $L^\infty(0, T; H)$, e (u'_m) converge fraco para u' em $L^2(0, T; V')$.

No entanto estas convergências não são suficientes para passarmos o limite na nossa equação aproximada, faltando a convergência do termo não linear $b(u_m, u_m, v)$. Por este motivo trataremos este termo de forma especial.

Convergência do termo não linear: Mostraremos agora que $b(u_m, u_m, v)$ converge para $b(u, u, v)$, para todo $v \in V$, no sentido de $L^p(0, T)$, para algum $p \geq 1$.

Usando o Lema 2.5,

$$b(u_m, u_m, v) = -b(u_m, v, u_m) = -\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_{mi} dx.$$

Como $v \in V$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e sendo $H_0^1(\Omega) \subseteq L^4(\Omega)$ quando $n = 2$, com esta imersão sendo contínua, obtemos

$$\int_{\Omega} |u_{mi} u_{mj}|^2 dx = \int_{\Omega} |u_{mi}|^2 |u_{mj}|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\Omega} |u_{mi}|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_{mj}|^4 dx \right)^{1/2} \\
&= \|u_{mi}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|u_{mj}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq (\sqrt{2} \|u_{mi}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{mi}\|_{H_0^1(\Omega)}) (\sqrt{2} \|u_{mj}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{mj}\|_{H_0^1(\Omega)}) \\
&= 2 \|u_{mi}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{mj}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{mi}\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_{mj}\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como (u_m) é limitado em $L^\infty(0, T; H)$, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\int_{\Omega} |u_{mi} u_{mj}|^2 dx \leq C_0 \|u_{mi}\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_{mj}\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a T chegamos a

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_{mi} u_{mj}|^2 dx dt \leq C \left[\int_0^T \|u_{mi}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u_{mj}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right],$$

resultando assim que $u_{mi} u_{mj}$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q)$. Portanto existe uma subsequência de $(u_{mi} u_{mj})$, a qual ainda denotaremos por $(u_{mi} u_{mj})$, que converge fraco para $\chi_{i,j}$ em $L^2(0, T; H)$. Identificando H com seu dual H' , temos a cadeia de imersões abaixo

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

com a imersão de V em H sendo compacta.

Usando as limitações das sequências (u_m) e (u'_m) em $L^2(0, T; V)$ e $L^2(0, T; V')$ respectivamente, constatamos que a sequência (u_m) é limitada no espaço

$$W = \{w; w \in L^2(0, T; V) \text{ e } w' \in L^2(0, T; V')\}.$$

Resultando assim pelo teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.22) a existência de uma subsequência de (u_m) , que ainda denotaremos por (u_m) , que converge forte para u em $L^2(0, T; H)$ e quase sempre em Q . Logo (u_{mi}) converge quase sempre para u_i em Q e assim sendo, $(u_{mi} u_{mj})$ converge quase sempre para $u_i u_j$ em Q e usando o lema de Lions, $(u_{mi} u_{mj})$ converge fraco para $u_i u_j$ em $L^2(Q)$. Portanto $\chi_{i,j} = u_i u_j$.

Para todo $\psi(x, t) \in L^2(0, T; H) = L^2(Q)$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_Q u_{mi} u_{mj} \psi(x, t) dx dt = \int_Q u_i u_j \psi(x, t) dx dt \quad (2.62)$$

e para cada $v \in V$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, assim sendo, tomando $\theta \in L^2(0, T)$ a função

$\psi(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \theta(t) \in L^2(0, T; H)$, para $i, j = 1, 2$, substituindo $\psi(x, t)$ em (2.62) chegamos a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(\int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right) \theta(t) dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right) \theta(t) dt,$$

ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (b(u_m, u_m, v), \theta) = (b(u, u, v), \theta), \text{ para todo } \theta \in L^2(0, T),$$

implicando assim na igualdade

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b(u_m, u_m, v) = b(u, u, v) \text{ em } L^2(0, T). \quad (2.63)$$

Passagem ao limite: Usando as convergências de (u_m) e (u'_m) em $L^2(0, T; V)$ e $L^2(0, T; V')$ respectivamente, temos

$$\langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u, w \rangle, \text{ para todo } w \in L^2(0, T; V) \quad (2.64)$$

e

$$\langle u'_m, w \rangle \rightarrow \langle u', w \rangle, \text{ para todo } w \in L^2(0, T; V) \subseteq L^2(0, T; V'), \quad (2.65)$$

assim sendo, multiplicando nossa equação aproximada por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em $[0, T)$ temos a igualdade

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'_m, w_i \rangle \theta(t) dt + \nu \int_0^T ((u_m, w_i)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_i) \theta(t) dt \\ = \int_0^T (f(t), w_i) \theta(t) dt, \text{ para todo } w_i \in V_m. \end{aligned}$$

Como $(w_i) \subseteq V_m$ é uma base Hilbertiana de V , podemos reescrever a equação acima para todo $v \in V$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} (u_m, v) \theta(t) dt + \nu \int_0^T ((u_m, v)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v) \theta(t) dt = \\ \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \text{ para todo } v \in V, \end{aligned} \quad (2.66)$$

ou ainda,

$$- \int_0^T (u_m(t), v) \theta'(t) dt + \nu \int_0^T ((u_m(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v) \theta(t) dt =$$

$$\int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \text{ para todo } v \in V.$$

Tomando $w = \theta v \in \mathcal{D}(0, T; V)$, com $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u_m(t), v) \theta'(t) dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} (u_m(t), v) \theta(t) dt \\ &= \int_0^T \langle u'_m(t), v \rangle \theta(t) dt \\ &= \langle u'_m, v \theta \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t), v) \theta'(t) dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} (u(t), v) \theta(t) dt \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle \theta(t) dt \\ &= \langle u', v \theta \rangle. \end{aligned}$$

Observando a convergência dada por (2.65) chegamos à convergência

$$\langle u'_m, v \theta \rangle \rightarrow \langle u', v \theta \rangle, \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Portanto

$$- \int_0^T (u_m(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow - \int_0^T (u(t), v) \theta'(t) dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (2.67)$$

Tomando agora $w = \theta v \in \mathcal{D}(0, T; V)$, com $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e usando a convergência (2.64) temos

$$\begin{aligned} \nu \int_0^T ((u_m(t), v)) \theta(t) dt &= \nu \int_0^T \langle u_m(t), v \rangle \theta(t) dt = \langle u_m, v \theta \rangle \\ &\rightarrow \langle u, v \theta \rangle = \nu \int_0^T ((u(t), v)) \theta(t) dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\nu \int_0^T ((u_m(t), v)) \theta(t) dt \rightarrow \nu \int_0^T ((u(t), v)) \theta(t) dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (2.68)$$

Considerando as convergências (2.63), (2.67) e (2.68) obtemos a seguinte igualdade

$$\int_0^T \langle u'(t), v \rangle \theta(t) dt + \nu \int_0^T ((u(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v) \theta(t) dt =$$

$$\int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \text{ para todo } v \in V,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (u(t), v) \theta(t) dt + \nu \int_0^T ((u(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v) \theta(t) dt =$$

$$\int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \text{ para todo } v \in V.$$

Resultando em

$$\left\langle \frac{d}{dt} (u(t), v) + \nu ((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) - (f(t), v), \theta \right\rangle = 0, \text{ para todo } \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Assim sendo

$$\frac{d}{dt} (u(t), v) + \nu ((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \text{ para todo } v \in V, \quad (2.69)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Portanto

$$(u'(t), v) + \nu ((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \text{ para todo } v \in V, \quad (2.70)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$, provando assim que u é solução fraca do sistema de Navier-Stokes, para o caso de $n = 2$.

Condição inicial: Inicialmente notemos que pelo fato de

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H);$$

$$u' \in L^2(0, T; V')$$

então

$$u \in C^0([0, T]; V'),$$

assim faz sentido falar em $u(0)$ e $u(T)$. Provemos então que

$$u(0) = u_0.$$

Seja $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, assim sendo, temos a convergência

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (u_m(t), w_j) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (u(t), w_j) \theta(t) dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[(u_m(T), w_j) \theta(T) - (u_m(0), w_j) \theta(0) - \int_0^T (u_m(t), w_j) \theta'(t) dt \right] =$$

$$(u(T), w_j) \theta(T) - (u(0), w_j) \theta(0) - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt.$$

Como $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$ e

$$\int_0^T (u_m(t), w_j) \theta'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty,$$

concluimos a seguinte igualdade:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} -(u_m(0), w_j) = -(u(0), w_j). \quad (2.71)$$

Sendo $u_m(0) = u_{0m}$ convergente para $u_0 \in H$ resulta

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} -(u_m(0), w_j) = \lim_{m \rightarrow +\infty} -(u_{0m}, w_j) = -(u_0, w_j), \text{ para todo } j. \quad (2.72)$$

Comparando os limites (2.71) e (2.72) e pela unicidade do limite

$$(u(0), w_j) = (u_0, w_j).$$

Como (w_j) é denso em H , obtemos

$$(u(0), w) = (u_0, w), \forall w \in H.$$

Portanto

$$u(0) = u_0.$$

Unicidade: Como $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ e $u' \in L^2(0, T; V')$, faz sentido calcularmos $\langle u', v \rangle_{V', V}$ para todo $v \in V$. Sejam u e $\hat{u}$ duas soluções nas condições do Teorema 2.5, com $n = 2$. Fazendo $w = u - \hat{u}$ obtemos

$$(w'(t), v) + \nu a(w(t), v) + b(w(t), w(t), v) = 0,$$

ou seja,

$$(w'(t), v) + \nu a(w(t), v) + b(u(t), u(t), v) - b(\hat{u}(t), \hat{u}(t), v) = 0; \quad (2.73)$$

para todo $v \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Além disso,

$$w(0) = 0. \quad (2.74)$$

Observação 2.3. Para todos $u, v \in V$, temos

$$\begin{aligned} b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) &= b(u - \hat{u} + \hat{u}, u, v) - b(\hat{u} - u + u, \hat{u} - u + u, v) \\ &= b(u - \hat{u}, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - b(\hat{u} - u, \hat{u} - u, v) - b(\hat{u} - u, u, v) \\ &\quad - b(u, \hat{u} - u, v) - b(u, u, v) \\ &= b(w, u, v) - b(-w, -w, v) - b(-w, u, v) - b(u, -w, v) \\ &\quad + b(\hat{u}, u, v) - b(u, u, v) \\ &= b(w, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) + b(w, u, v) \\ &= b(w, u, v) - b(w, u, v) + b(w, u, v) - b(w, w, v) + b(u, w, v) \\ &= b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v). \end{aligned}$$

Utilizando a Observação 2.3 na igualdade (2.73) resulta

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0, \quad (2.75)$$

para todo $v \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Tomando $v = w \in V$ em (2.75) temos

$$(w', w) + \nu a(w, w) + b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w) = 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu a(w, w) + b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w) = 0,$$

ainda podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla w \nabla w dx + b(w, u, w) = 0,$$

implicando em

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu (\nabla w, \nabla w) + b(w, u, w) = 0.$$

Usando a continuidade de $b(u, v, w)$ segue a desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \|w_t\|_V^2 = -b(w, u, w)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C|w|_{(L^4(\Omega))^2}|u|_V|w|_{(L^4(\Omega))^2} \\
&= C|w|_{(L^4(\Omega))^2}^2|u|_V.
\end{aligned}$$

Considerando o Lema 2.9 e a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|_V^2 &\leq C|w|_{(L^4(\Omega))^2}^2|u|_V \\
&\leq C\sqrt{2}\|w\|_V|w|_H\|u\|_V \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\|w(t)\|_V \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}|w(t)|\|u(t)\|_V \\
&\leq \nu\|w(t)\|^2 + \frac{2C^2}{\nu}|w(t)|^2\|u(t)\|_V^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq \frac{2C^2}{\nu}|w(t)|^2\|u(t)\|_V^2.$$

Integrando a desigualdade acima e usando o fato que $w(0) = 0$, temos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|w(s)|^2 ds \leq \int_0^t \frac{2C^2}{\nu}|w(s)|^2\|u(s)\|_V^2 ds,$$

resultando,

$$|w(t)|^2 \leq \frac{2C^2}{\nu} \int_0^t |w(s)|^2\|u(s)\|_V^2 ds.$$

Como $|w(s)|^2 \in L^\infty(0, T)$, $\|u(s)\|_V^2 \in L^2(0, T)$ e pelo lema de Gronwall,

$$|w(t)|^2 = 0, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Provando assim a unicidade da solução u do problema de Navier-Stokes para o caso $n = 2$. ■

Capítulo 3

Equações de Navier-Stokes em domínios limitados do $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 4$

Neste capítulo mostraremos a existência de solução para a formulação variacional das equações de Navier-Stokes, no caso $n \leq 4$. Além disso, provaremos um teorema que garante a unicidade da solução u para o problema de Stokes, caso estacionário, quando a viscosidade ν é grande ou quando $\|f\|_{V'}$ é pequena também para o caso $n \leq 4$. Para maiores detalhes ver: Adams [1], Aubin [2], Coddington-Levinson [4], Ladyzhenskaya [6], Leray [7], Lions [8], [9], [10] e [11], Lions-Magenes [12], Tartar [20] e Temam [21].

3.1 Equações de Navier-Stokes

Consideremos as equações de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f - \frac{\partial p}{\partial x_i}; \quad \nu > 0, \text{ com } i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} u = 0, \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Aqui Γ é a fronteira de Ω , aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $Q = \Omega \times (0, T)$; $T > 0$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Embora tenha sido feita a formulação fraca no caso $\mathbb{R}^2$, faremos aqui para efeito de auto-suficiência. Para isto usemos a mesma notação fixada no capítulo anterior.

A princípio multipliquemos a equação (3.1)₁ por v_i e integremos em Ω , assim sendo,

temos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} v_i dx - \nu \int_{\Omega} \Delta u_i(t) v_i dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_j(t) \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx.$$

Aplicando convenientemente a fórmula de Green e notando que $v_i = 0$ em Γ , obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} v_i dx + \nu \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_j(t) \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx.$$

Somando a igualdade acima em i e notando que $\operatorname{div} v = 0$, temos

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} v_i dx + \nu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_j(t) \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} v_i dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx. \quad (3.2)$$

Utilizando a notação já usada anteriormente, podemos escrever a igualdade (3.2) da seguinte forma:

$$(u'(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \text{ para todo } v \in V. \quad (3.3)$$

A partir disto, formulemos os seguintes problemas:

Problema 3.1. Encontrar um vetor $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ sendo $u_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função numérica $p : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } \mathcal{D}'(Q), \quad (3.4)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\operatorname{div} u = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.5)$$

$$u = 0, \text{ em } \Sigma, \quad (3.6)$$

$$u(0) = u_0, \text{ em } \Omega, \quad (3.7)$$

onde f e u_0 são conhecidas em $L^2(0, T; V')$ e H respectivamente.

Problema 3.2. Dados $f \in L^2(0, T; V')$ e $u_0 \in H$, encontrar u tal que:

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H); \quad (3.8)$$

$$(u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad (3.9)$$

para todo $v \in V$,

$$\operatorname{div} u = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.10)$$

$$u = 0, \text{ em } \Sigma, \quad (3.11)$$

$$u(0) = u_0, \text{ em } \Omega. \quad (3.12)$$

Como no caso $\mathbb{R}^2$, com uma certa regularidade sobre Ω , podemos mostrar que os dois Problemas anteriores são equivalentes. Estudemos então o Problema 3.2 em $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 4$. No entanto, antes relembremos alguns conceitos que nos serão úteis no desenvolvimento do estudo do Problema 3.2. Temos do teorema da Imersão de Sobolev que $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad (3.13)$$

quando $n > 2$. No caso de $n = 2$ a imersão contínua se dá em $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$. Notemos que para $n > 2$, $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Em particular se $n = 3$ então $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^6(\Omega)$ e se $n = 4$ então $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^4(\Omega)$.

Proposição 3.3. A forma trilinear $b(u, v, w)$ é contínua em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$, com o espaço $V \cap (L^n(\Omega))^n$ dotado pela norma

$$v \mapsto \left(\|v\|_V^2 + \|v\|_{(L^n(\Omega))^n}^2 \right)^{1/2}.$$

Prova: De fato, sejam $u, v \in V$ e $w \in V \cap (L^n(\Omega))^n$ então $u_i \in H_0^1(\Omega)$ e $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$. Usando o teorema da imersão de Sobolev, $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ com q dado por (3.13). Se $n > 2$, resulta então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{2n}{n-2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n(n-2) + 2n^2 + 4n}{4n^2} \\ &= \frac{4n^2 - 4n + 2n^2 + 4n}{4n^2} \\ &= \frac{4n^2}{4n^2} = 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1.$$

Logo $u_i \in L^q(\Omega)$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e $w_i \in L^n(\Omega)$ e assim sendo, obtemos da desigualdade

de Hölder a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|u_j\|_{L^q(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando a continuidade da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, a desigualdade de Hölder e a desigualdade acima, chegamos a

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq C \sum_{i,j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \\
&\leq C \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré

$$|b(u, v, w)| \leq C_1 \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Fazendo mais algumas manipulações concluímos:

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq C_1 \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C_1 \|u\|_V \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C_1 \|u\|_V \left(\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= C_1 \|u\|_V \|w\|_{(L^n(\Omega))^n} \|v\|_V.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Provando assim a continuidade de $b(u, v, w)$ em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$. ■

Notemos que, para $n \leq 4$, devido ao teorema da Imersão de Sobolev obtemos

$$V \cap (L^n(\Omega))^n = V,$$

assim sendo, $b(u, v, w)$ é contínua em $V \times V \times V$ quando $n \leq 4$. Portanto a partir de agora suporemos sempre nesta seção $n \leq 4$.

Fixados $u, w \in V$, a aplicação de V em $\mathbb{R}$ dada por:

$$v \rightarrow b(u, v, w)$$

é uma funcional linear contínuo. Portanto fica bem definido o operador linear limitado Bu de V em V' . No caso $n = 2$, representamos este operador por $B(u, u)$. Definindo

$$(Bu, v) = b(u, u, v),$$

sendo

$$|(Bu, v)| = |b(u, u, v)| \leq C_1 \|u\|_V^2 \|v\|_V,$$

ou seja,

$$\|Bu\|_{V'} \leq C_1 \|u\|_V^2. \quad (3.15)$$

Supondo $u \in L^2(0, T; V)$, $\|Bu(t)\|_{V'}$ é mensurável e da desigualdade (3.15) concluímos que $\|Bu(t)\|_{V'} \in L^1(0, T)$ e assim sendo, quando $u \in L^2(0, T; V)$

$$Bu \in L^1(0, T; V').$$

Teorema 3.4. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, com $n \leq 4$.*

$$\text{Dados } f \in L^2(0, T; V'), \quad u_0 \in H, \quad (3.16)$$

então existe

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad (3.17)$$

tal que

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad (3.18)$$

para todo $v \in V$,

$$u(0) = u_0. \quad (3.19)$$

Prova: Sendo V um espaço separável existe em V uma base Hilbertiana (w_i) . Representemos por V_m o subespaço gerado pelos vetores $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m$, $m = 1, 2, \dots$

Sendo $u_0 \in H$ e V denso em H , u_0 pode ser aproximado por vetores w_i .

Problema Aproximado: Consideremos o seguinte problema aproximado: Encontrar $u_m \in V_m$ tal que:

$$(u'_m(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + b(u_m(t), u_m(t), v) = (f(t), v) \text{ para todo } v \in V_m, \quad (3.20)$$

com condição inicial

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } H, \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Usando o teorema 1.11, na equação aproximada (3.20), com condições iniciais (3.21), vemos que este possui solução em $[0, t_m]$. O prolongamento ao intervalo $[0, T]$ é consequência das estimativas a priori feitas a seguir.

Estimativa I: Considerando em (3.20) $v = u_m$, obtemos

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \nu((u_m(t), u_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)).$$

Procedendo analogamente ao que foi feito no capítulo anterior chegamos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2\nu||u_m(t)||^2 &\leq 2||f||_{V'}||u_m(t)|| \\ &= 2\sqrt{\nu}||u_m(t)||\frac{1}{\sqrt{\nu}}||f||_{V'} \\ &\leq \nu||u_m(t)||^2 + \frac{1}{\nu}||f||_{V'}^2, \end{aligned}$$

Daí obtemos

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu||u_m(t)||^2 \leq \frac{1}{\nu}||f||_{V'}^2. \quad (3.22)$$

Integrando a desigualdade abaixo de 0 a $t < t_m$, obtemos

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}||f||_{V'}^2.$$

Concluimos

$$|u_m(t)|^2 \leq |u_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T ||f(t)||_{V'}^2 dt. \quad (3.23)$$

Das hipóteses sobre u_{0m} e f , $|u_m(t)|$ é uniformemente limitada em $[0, t_m]$, resultando assim do teorema do Prolongamento, que podemos prolongar nossa solução u_m a todo intervalo $[0, T]$. Integrando (3.22) de 0 a T obtemos

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq |u_{0m}|^2 + \int_0^T \|f(t)\|_V^2 dt.$$

Portanto, u_m pertence a um limitado de $L^\infty(0, T; H)$ e a um limitado de $L^2(0, T; V)$.

Entretanto as duas conclusões acima não nos permitem passar o limite na nossa equação aproximada, pois ambas dão origem à convergências fracas, nada sendo possível concluir sobre a convergência do termo não linear, além disso, não podemos obter a convergência deste termo da mesma forma que fizemos para o caso $n = 2$, pois naquele caso foi crucial a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^4(\Omega)$, imersão esta que não teremos no caso $n = 3$.

Para sobrepor esta dificuldade usaremos o Teorema 1.16 de imersão compacta que nos permitirá obter uma convergência forte, permitindo assim passarmos o limite no termo não linear $b(u_m(t), u_m(t), v)$.

Estimativa II: Limitemos $D_t^\gamma u_m(t)$, com $0 < \gamma < \frac{1}{4}$. Como citado no Capítulo 1, Seção 1.4, temos que $D_t^\gamma u_m(t)$ é a transformada de Fourier inversa de $(2\pi i\tau)^\gamma \hat{u}_m(\tau)$, ou seja,

$$\widehat{D_t^\gamma u_m(t)} = (2\pi i\tau)^\gamma \hat{u}_m(\tau),$$

supondo $u_m(t)$ estendida à $\mathbb{R}$.

Portanto para limitarmos $D_t^\gamma u_m(t)$ em $L^2(\mathbb{R}, H)$ é suficiente limitar $(2\pi i\tau)^\gamma \hat{u}_m(\tau)$ em $L^2(\mathbb{R}, H)$, isto é, devemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_m(\tau)|^2 d\tau, \text{ para } 0 < \gamma < \frac{1}{4}$$

é limitada.

Com objetivo de encontrarmos tal estimativa, escreveremos a equação (3.20) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(u_m(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + (Bu_m(t)v) = (f(t), v), \text{ para todo } v \in V_m. \quad (3.24)$$

Representemos por $\tilde{g}$ a extensão nula fora de $(0, T)$ de uma função g definida em $(0, T)$. A transformada de Fourier de $\tilde{g}(t)$, representaremos por $\hat{g}$ em vez de $\hat{\tilde{g}}$, sendo assim, estendendo $u_m(t)$ à $\mathbb{R}$, notando que ela está definida em $(0, T)$ temos

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_m(t), v) + \nu((\tilde{u}_m(t), v)) + (B\tilde{u}_m(t)v) = (\tilde{f}(t), v) + (u_{0m}, v)\delta_0 - (u_m(T), v)\delta_T, \quad (3.25)$$

onde δ_0 e δ_T são respectivamente distribuições de Dirac em 0 e T . A igualdade (3.25) é decorrente da observação feita a seguir.

Observação 3.1. Seja f uma função que apresenta descontinuidade de primeira espécie

na origem, mais precisamente suponhamos que $f \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$ e que os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0^+) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0^-),$$

existam e sejam finitos.

Denotaremos por f' a função definida com $\frac{df}{dx}$, para $x \neq 0$ e não definida para $x = 0$ e suponhamos ainda que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Para calcular f' , a derivada de f no sentido das distribuições, basta observar que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com suporte contido em $[-N, N]$, então

$$\begin{aligned} \langle f', \phi \rangle = -\langle f(x), \phi'(x) \rangle &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-N}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^N \right) f \phi' dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-N}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^N \right) f'(x) \phi(x) dx \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \phi(x) \Big|_{-N}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \phi(x) \Big|_{\varepsilon}^N \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx - \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(-\varepsilon) \phi(-\varepsilon) - f(-N) \phi(-N)) \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(N) \phi(N) - f(\varepsilon) \phi(\varepsilon)) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx - (f(0^-) \phi(0) - f(0^+) \phi(0)) \\ &= f' + (f(0^+) - f(0^-)) \phi(0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle f', \phi \rangle = f' + (f(0^+) - f(0^-)) \phi(0). \quad (3.26)$$

Um caso particular importante do que vimos anteriormente ocorre quando consideramos a função f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Obtemos assim

$$f(0^+) = 0, \quad f(0^-) = 1, \quad f' = 0,$$

e observando a igualdade (3.26),

$$\langle f', \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Logo a distribuição de Dirac pode ser vista como derivada de $f(x)$. Como consequência disto podemos dizer:

$$\{f'\} = f' + [f(0^+) - f(0^-)]\delta_0.$$

Como no nosso caso $\tilde{u}_m(t)$ possui duas descontinuidades de primeira espécie em 0 e T, podemos estender a observação anterior e afirmar

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_m(t), v)' &= \frac{d}{dt}(\tilde{u}_m(t), v) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (u_m(t), v)\delta_0 - \lim_{x \rightarrow 0^-} (u_m(t), v)\delta_0 \\ &+ \lim_{x \rightarrow T^+} (u_m(t), v)\delta_T - \lim_{x \rightarrow T^-} (u_m(t), v)\delta_T, \end{aligned} \quad (3.27)$$

como $\lim_{x \rightarrow 0^-} (u_m(0^-), v)\delta_0 = 0 = \lim_{x \rightarrow T^+} (u_m(T^+), v)\delta_T = 0$, obtemos de (3.27) a equação (3.25).

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{u}_m(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\tau s} \frac{d}{ds}\tilde{u}_m(s)ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^{+t} e^{-2\pi i\tau s} \frac{d}{ds}\tilde{u}_m(s)ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-2\pi i\tau s}\tilde{u}_m(s) \Big|_{-t}^{+t} + 2\pi i\tau \int_{-t}^{+t} e^{-2\pi i\tau s} u_m(s)ds \right] \\ &= 2\tau\pi i\hat{u}_m(\tau). \end{aligned}$$

Como $\hat{\delta}_a(\tau) = e^{-2\pi i\tau a}$, temos $\hat{\delta}_0(\tau) = 1$ e $\hat{\delta}_T(\tau) = e^{-2\pi i\tau T}$, então, considerando a transformada de Fourier relativa a t em ambos os membros da equação (3.25)

$$2\pi i(\hat{u}_m(\tau), v) + \nu((\hat{u}_m(\tau), v)) + (B\hat{u}_m(\tau), v) = (\hat{f}(\tau), v) + (u_{0m}, v) - (u_m(T), v)e^{-2\pi i\tau T}. \quad (3.28)$$

Haja vista que,

$$\begin{aligned} \hat{u}_m(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\tau t} u_m(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\tau t} \sum_{j=1}^n g_{jm}(t)w_j dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\tau t} g_{jm}(t)w_j dt \\ &= \sum_{j=1}^n w_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\tau t} g_{jm}(t)dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n w_j \hat{g}_{jm}(t),$$

$\hat{u}_m(t) \in V_m$ e portanto podemos tomar $v = \hat{u}_m(t)$ em (3.28), obtendo assim

$$\begin{aligned} 2\pi i \tau |\hat{u}_m(\tau)|^2 + \nu \|\hat{u}_m(\tau)\|^2 + (B\hat{u}_m(\tau), \hat{u}_m(\tau)) = \\ (\hat{f}(\tau), \hat{u}_m(\tau)) + (u_{0m}, \hat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \hat{u}_m(\tau)) e^{-2\pi i \tau T}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considerando a parte imaginária de (3.29) e a seguir o valor absoluto, temos

$$2\pi \tau |\hat{u}_m(\tau)|^2 \leq |(B\hat{u}_m(\tau), \hat{u}_m(\tau))| + |(\hat{f}(\tau), \hat{u}_m(\tau))| + |(u_{0m}, \hat{u}_m(\tau))| + |(u_m(T), \hat{u}_m(\tau))|. \quad (3.30)$$

Observação 3.2. Vimos que

$$\|B\hat{u}_m(\tau)\|_{V'} \leq C \|\hat{u}_m(\tau)\|^2.$$

Como

$$\hat{u}_m(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \tau t} \tilde{u}_m(t) dt = \int_0^T e^{-2\pi i \tau t} u_m(t) dt$$

resulta por Cauchy-Schwarz que $\|\hat{u}_m(t)\|_V$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_m(t)\|_V^2 &\leq \left(\int_0^T \|u_m(t)\|_V dt \right)^2 \\ &\leq \left(\left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} \right)^2 \\ &= T \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Portanto, $(\hat{u}_m)$ pertence a um limitado de $L^2(0, T; V)$. Logo, chegamos a estimativa

$$\|B\hat{u}_m(\tau)\|_{V'} < C,$$

onde C independe de m .

Retornando a (3.30), usando a imersão de V em H temos por meio da Observação 3.2

$$\begin{aligned}
|\tau| |\hat{u}_m(\tau)|^2 &\leq \|B(\hat{u}_m(\tau))\|_{V'} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V + \|\hat{f}_m(\tau)\|_{V'} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V \\
&+ |u_{0m}|_H |\hat{u}_m(\tau)|_H + |u_m(T)|_H |\hat{u}_m(\tau)|_H \\
&\leq C \|\hat{u}_m(\tau)\|_V^2 + \|\hat{f}_m(\tau)\|_{V'} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V \\
&+ K_1 |u_{0m}|_H \|\hat{u}_m(\tau)\|_V + K_2 |u_m(T)|_H \|\hat{u}_m(\tau)\|_V \\
&\leq \|\hat{u}_m(\tau)\|_V \left[C \|\hat{u}_m(\tau)\|_V + K_1 |u_{0m}|_H \right. \\
&\quad \left. + K_2 |u_m(T)|_H \right] + \|\hat{f}_m(\tau)\|_{V'} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V \\
&= C \|\hat{u}_m(\tau)\|_V + \|\hat{f}_m(\tau)\|_{V'} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V,
\end{aligned}$$

pois $|\hat{u}_m(\tau)|$, norma em H , é dominada por $\|\hat{u}_m(\tau)\|$ norma em V .

O nosso objetivo é provar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_m(\tau)|^2 d\tau < cte, \text{ para } 0 < \gamma < \frac{1}{4}. \quad (3.32)$$

Entretanto, antes notemos a seguinte desigualdade

Observação 3.3. A seguinte estimativa é válida

$$|\tau|^{2\gamma} (1 + |\tau|^{1-2\gamma}) \leq K(\gamma) (1 + |\tau|), \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}.$$

De fato, para isto consideremos dois casos:

CASO 1: $|\tau| < 1$.

Temos para este caso

$$|\tau|^{2\gamma} < 1 < 1 + |\tau|,$$

portanto

$$\frac{|\tau|^{2\gamma}}{1 + |\tau|} (1 + |\tau|^{1-2\gamma}) < 1 + |\tau|^{1-2\gamma} < 2.$$

CASO 2: $|\tau| > 1$.

$$|\tau|^{2\gamma} < |\tau| < 1 + |\tau|$$

resultando

$$\frac{|\tau|^{2\gamma}}{1 + |\tau|} (1 + |\tau|^{1-2\gamma}) < K(\gamma).$$

Agora de posse da desigualdade deduzida na observação anterior, mostremos que a

limitação (3.32) é satisfeita. De fato,

$$\begin{aligned} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_m(\tau)|^2 &\leq K \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\hat{u}_m(\tau)|^2 \\ &\leq \frac{K}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\hat{u}_m(\tau)|^2 + \frac{K|\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\hat{u}_m(\tau)|^2. \end{aligned}$$

Notando que a parcela da direita da última desigualdade é dominada por meio de (3.32) então

$$|\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_m(\tau)|^2 \leq \frac{K}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\hat{u}_m(\tau)|^2 + \frac{KC|\tau|}{|\tau|(1 + |\tau|^{1-2\gamma})} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V + \frac{K|\tau| \|\hat{f}_m(\tau)\|_{V'}}{|\tau|(1 + |\tau|^{1-2\gamma})} \|\hat{u}_m(\tau)\|_V.$$

Assim sendo, para obtermos a validade (3.32) é suficiente dominarmos as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{CK|\tau| \|\hat{u}_m(\tau)\|_V}{|\tau|(1 + |\tau|^{1-2\gamma})} d\tau; \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K|\hat{u}_m(\tau)|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \end{aligned}$$

e

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K|\tau| \|\hat{f}_m(\tau)\| \|\hat{u}_m(\tau)\|_V}{|\tau|(1 + |\tau|^{1-2\gamma})} d\tau.$$

Porém, antes notemos que por meio da desigualdade de Schwarz reduzimos o nosso cálculo à integrais do tipo:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2}, \text{ com } 0 < \gamma < \frac{1}{4}.$$

Onde calculamos em $0 \leq \tau \leq 1$, que existe por continuidade e a seguir em $1 \leq \tau \leq \eta$, tomando limite $\eta \rightarrow \infty$, que existe, pois $(1 + |\xi|^{1-2\gamma})^2 > |\xi|^{2(1-2\gamma)}$, com $0 < \gamma < \frac{1}{4}$. Além disso, notemos que para $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ considerando $\alpha = 1 - 2\gamma > \frac{1}{2}$, a função $\frac{1}{1 + |\tau|^\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} < \infty,$$

pelo que foi observado anteriormente. Como u_m pertence a um limitado de $L^\infty(0, T; H)$ e é nula fora de $(0, T)$, então também pertencerá a um limitado $L^\infty(\mathbb{R}; H)$, haja vista que, $1 + |\tau|^{1-2\gamma} > 1$, resulta do teorema de Plancherel que I_2 é finita. Temos também

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{u}_m(\tau)\|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\tau|^{1-2\gamma})^{-2} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2},$$

sendo $(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^{-1}$ pertencente a $L^2(\mathbb{R})$ e u_m a um limitado de $L^2(\mathbb{R}; V)$, concluímos pelo mesmo argumento acima, que I_1 é finita e por fim notemos que

$$I_3 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(\tau)\|_{V'} \|\hat{u}_m(\tau)\| d\tau$$

é limitada.

Concluímos assim a validade da limitação (3.32), ou seja, $|\tau| \|\hat{u}_m(\tau)\|$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ e assim sendo, chegamos que $D_t^\gamma u_m(t)$ pertence a um limitado de $L^2(\mathbb{R}, H)$. Usando o Teorema 1.16 de compacidade, tomando $B_0 = V$, $B_1 = B = H$ resulta que o espaço das restrições $H^\gamma(\mathbb{R}, V; H)$ ao intervalo $(0, T)$ está compactamente imerso em $L^2(0, T; H)$, se $0 < \gamma < \frac{1}{4}$. Portanto, existe uma subsequência de (u_m) pertencente a $H_K^\gamma(\mathbb{R}, V; H)$, com $K = (0, T)$, ainda representada por (u_m) , que converge forte para u em $L^2(0, T; H)$, ou seja, encontramos uma subsequência de (u_m) que converge fraco para u em $L^2(0, T; V)$, fraco estrela para u em $L^\infty(0, T; H)$ e forte para u em $L^2(0, T; H)$.

De modo análogo ao que foi feito no caso $n = 2$, concluímos através da segunda e da terceira convergências, a convergência do termo não linear. Para passar o limite na equação aproximada consideremos $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(T) = 0$ e procedendo de forma semelhante ao caso $n = 2$ obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m(t), v) \theta'(t) dt + \nu \int_0^T ((u_m(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v) \theta(t) dt = \\ (u_{0m}, v) \theta(0) + \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt \end{aligned} \quad (3.33)$$

Observação 3.4. Podemos reescrever o termo não-linear da seguinte forma

$$\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), \theta v) dt = - \int_0^T b(u_m(t), \theta v, u_m(t)) dt = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_{mj} \frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j} u_{mi} dx dt.$$

Fazendo $\chi_m^{ij} = \frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j} u_{mi}$, quando $m \rightarrow \infty$, χ_m^{ij} converge forte para $\chi^{ij} = \frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j} u_i$ em $L^2(0, T; H)$. Logo,

$$\int_0^T \int_\Omega u_{mj} \frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j} u_{mi} dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega u_j \frac{\partial(\theta v_i)}{\partial x_j} u_i dx dt, \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T b(u_m, u_m, v) \theta dt &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T b(u_m, \theta v, u_m) dt \\
&= - \int_0^T b(u, \theta v, u) \theta dt \\
&= \int_0^T b(u, u, v) \theta dt.
\end{aligned}$$

Usando a observação acima e passando o limite na equação (3.34), encontramos

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u(t), v) \theta'(t) dt + \nu \int_0^T ((u(t), v)) \theta(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v) \theta dt = \\
& (u_0, v) \theta(0) + \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \text{ para todo } v \in V_{0m}, \text{ com } m_0 < m.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Sendo as combinações lineares finitas dos (w_i) densas em V , resulta que a equação (3.34) é válida para todo $v \in V$ e $\theta \in C^1([0, T])$. Tomando $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ em (3.34) implica ser $u(t)$ solução fraca do sistema de Navier-Stokes. De forma análoga ao caso $n = 2$, com $\theta \in C^1([0, T])$, $\theta(T) = 0$ deduzimos que $u(0) = u_0$, no sentido de V' . ■

3.2 Equações de Stokes

Mostremos agora a unicidade da solução u para o caso $n \leq 4$, do seguinte problema: dada $f \in V'$ encontrar $u \in V$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f - p, \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, \text{ em } \Omega, \\ u_i = 0, \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right. \tag{3.35}$$

A formulação fraca equivalente consiste em determinar $u \in V$ tal que:

$$a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \text{ para todo } v \in V. \tag{3.36}$$

Teorema 3.5. *Se $n \leq 4$, existe uma única solução u de (3.36) quando $\nu > \sqrt{\|f\|_{V'}}$.*

Prova: Sendo V um espaço separável, consideremos uma base Hilbertiana (w_i) de V . Seja $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o espaço vetorial de dimensão m gerado pelos m primeiros vetores da base. Obtemos assim o seguinte sistema aproximado

$$u_m \in V_m, \tag{3.37}$$

$$a(u_m, v) + b(u_m, u_m, v) = (f, v), \text{ para todo } v \in V. \tag{3.38}$$

O problema inicial consiste em provar que a equação (3.38) possui solução $u_m \in V_m$, porém antes demonstraremos o seguinte lema:

Lema 3.6. Seja $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que, para $\rho > 0$ temos

$$(P(\xi), \xi) \geq 0, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

com $|\xi| = \rho$. Então existe $|\xi| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$.

Prova: Com $(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$ representamos o produto interno no $\mathbb{R}^n$, cuja norma induzida é $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

Para demonstrarmos o Lema 3.6 faremos a demonstração por redução a uma contradição. Suponhamos que $P(\xi) \neq 0$ em $K = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq \rho\}$ então a aplicação

$$\xi \mapsto \frac{-\rho}{|P(\xi)|} P(\xi)$$

é contínua de K em K . Assim, pelo teorema de Brower (Teorema (1.27)), resulta que ela possui um ponto fixo. Logo existe $\xi \in K$ tal que

$$\frac{-\rho}{|P(\xi)|} P(\xi) = \xi,$$

implicando assim

$$-P(\xi) = \frac{\xi |P(\xi)|}{\rho}.$$

Portanto

$$-(P(\xi), \xi) = \frac{|P(\xi)|}{\rho} (\xi, \xi) > 0,$$

ou seja, $-(P(\xi), \xi) > 0$. Logo, $(P(\xi), \xi) < 0$, para algum $\xi \in K$, contrariando assim a hipótese.

Retornando ao nosso sistema aproximado, $u_m = \sum_{j=1}^n \xi_{jm} w_j$ pertence a V_m e $\xi = (\xi_{jm})_{1 \leq j \leq m}$. Tomando $v = w_i$ obtemos

$$a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) = (f, w_i)$$

que é uma função de ξ_{jm} . Definamos assim a aplicação $P : V_m \rightarrow V_m$ tal que

$$P(\xi) = \eta,$$

sendo $\eta_i = a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) - (f, w_i)$. P é contínua de V_m em V_m , pois é a

soma de aplicações contínuas, além disso,

$$\begin{aligned}
 (P(\xi), \xi) &= (\eta, \xi) = \sum_{i=1}^n \eta_i \xi_{im} \\
 &= \sum_{i=1}^n (a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) - (f, w_i)) \xi_{im} \\
 &= \sum_{i=1}^n a(u_m, w_i) \xi_{im} + b(u_m, u_m, w_i) \xi_{im} - (f, w_i) \xi_{im}.
 \end{aligned}$$

Como $u_m = \sum_{j=1}^n \xi_{jm} w_j$, obtemos a seguinte igualdade:

$$(P(\xi), \xi) = a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) - (f, u_m),$$

visto que, $b(u_m, u_m, u_m) = 0$, temos

$$(P(\xi), \xi) = a(u_m, u_m) - (f, u_m),$$

Logo, obtemos a desigualdade

$$(P(\xi), \xi) \geq \nu \|u_m\|_V^2 - \|f\|_{V'} \|u_m\|_V.$$

Considerando a bola $\|u_m\|_V = \rho$ com ρ tal que $\nu\rho \geq \|f\|_{V'}$ obtemos

$$(P(\xi), \xi) \geq 0,$$

para $|\xi| = \rho$. ■

Observação 3.5. Consideremos (w_i) ortonormalizado em H , assim em V_m as normas são equivalentes a

$$\begin{aligned}
 |u_m|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{j=1}^n \xi_{mj} w_j, w_i \right) \right|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{mi}^2 = \sum_{i=1}^n \xi_{mi}^2 = \xi^2.
 \end{aligned}$$

Concluimos assim do Lema 3.6 que existe $\xi \in V_m$ tal que $P(\xi) = 0$, mas $P(\xi) = \eta$.

Logo $\eta = 0$, ou seja, existe $\xi \in V_m$ de modo que $u_m = \sum_{i=1}^m \xi_{im} w_i$ é solução de

$$a(u_m, w_i) + b(u_m, u_m, w_i) = (f, w_i), \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Estimativas: Tomando $v = u_m$ na equação aproximada (3.38), obtemos

$$a(u_m, u_m) + b(u_m, u_m, u_m) = (f, u_m),$$

implicando assim na desigualdade

$$\nu \|u_m\|^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|,$$

ou ainda,

$$\|u_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}.$$

Logo, (u_m) é limitada em V , consequentemente existe uma subsequência de (u_m) que ainda denotaremos por (u_m) , que converge fraco para u em V , quando $m \rightarrow \infty$.

Por meio desta subsequência podemos passar o limite em $a(u_m, v)$. Para a parte não linear procedemos como no caso de evolução. Temos que $V \subseteq H$, com esta imersão sendo contínua e compacta, daí encontramos uma subsequência de (u_m) que converge forte para u em H e quase sempre em Ω . Portanto tomando o limite na equação aproximada obtemos

$$a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \text{ para todo } v \in V.$$

Unicidade ($n \leq 4$): Vimos na seção anterior que, quando $n \leq 4$, $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$ e a forma trilinear $b(u, v, w)$ é contínua em $V \times V \times V$.

Sejam u e $\hat{u}$ duas soluções dadas pelo Teorema 3.5, isto é,

$$a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v)$$

e

$$a(\hat{u}, v) + b(\hat{u}, \hat{u}, v) = (f, v), \text{ para cada } v \in V.$$

Fazendo $w = u - \hat{u}$ temos

$$a(w, v) + b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) = 0, \text{ para todo } v \in V,$$

ou ainda, pelo que foi visto no capítulo anterior

$$a(w, v) + b(u, w, v) + b(w, u, v) - b(w, w, v) = 0.$$

Tomando $v = w$ e lembrando que $b(u, w, w) = b(w, w, w) = 0$, resulta

$$a(w, w) + b(w, u, w) = 0,$$

chegando na desigualdade

$$\nu \|w\|^2 \leq \|u\| \|w\|^2. \quad (3.39)$$

Como

$$a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v), \text{ para todo } v \in V,$$

tomando $v = u$ obtemos

$$a(u, u) = (f, u),$$

ou ainda,

$$\nu \|u\|^2 \leq \|f\|_{V'} \|u\|,$$

ou seja,

$$\|u\| \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}. \quad (3.40)$$

Combinando as desigualdades (3.39) e (3.40) concluimos que

$$\nu \|w\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'} \|w\|^2.$$

Portanto,

$$(\nu^2 - \|f\|_{V'}) \|w\| \leq 0.$$

Concluindo que, se $\nu^2 > \|f\|_{V'}$, obtemos a unicidade para a equação de Stokes como queríamos . ■

Apêndice A

Existência e Pronlogameto de Soluções Aproximadas

O nosso objetivo neste apêndice é justificar a existência de soluções do sistema (2.57)-(2.58). Considerando as matrizes:

$$X = \begin{bmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} g'_{1m} \\ g'_{2m} \\ \vdots \\ g'_{mm} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix},$$
$$M = \begin{bmatrix} b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_1 \right) \\ b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_2 \right) \\ \vdots \\ b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_m \right) \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix},$$

o sistema (2.57)-(2.58) se transforma em:

$$\begin{cases} X'(t) + \nu \lambda X(t) + M(t) = N(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Fazendo

$$F(X, t) = N(t) - \nu \lambda X(t) - M(t).$$

Então encontrar solução para o sistema (A.1) é equivalente resolver o sistema:

$$\begin{cases} X'(t) = F(X, t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Mostraremos que o sistema (A.2) está nas condições de Caratheodory (definição 1.7). De fato, seja $G = U \times [0, T]$, onde $U = \{x \in \mathbb{R}^{2m}; |x| \leq b\}$, $b > 0$. Então

- Fixado X , $F(X, t)$ é mensurável em t , pois está em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, já que as aplicações $t \rightarrow (f(t), w_j)$ estão em $L^2(\Omega)$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- Fixado t , $F(X, t)$ é contínua, pois as funções $X(t) = (g_{1m}, g_{2m}, \dots, g_{mm})$ e $M(t) = \left(b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_1 \right), b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_2 \right), \dots, b \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_m \right) \right)$ são contínuas;
- Notemos que

$$\begin{aligned} |F(X, t)| &= |N - \nu \lambda X - M| \\ &\leq |N| + |M| + \nu |\lambda| |X| \\ &\leq |w_j| |f(t)| + |w_j| \sum_{j=1}^m |g_{jm}(t)| |w_j| \sum_{j=1}^m |g_{jm}(t)| |w_j| + \nu |\lambda| |X(t)|, \end{aligned}$$

onde $K > 0$ é uma constante. Portanto existe uma função integrável $m_U(t)$, tal que:

$$|F(X, t)| \leq m_U(t),$$

para todo U contido no domínio de $F(X, t)$.

Portanto, pelo corolário (1.12), o sistema (A.2) possui solução em $[0, t_m)$, com $t_m < T$.

Referências Bibliográficas

- [1] R.A. ADAMS, *Sobolev Space*, Academic Press, London, 1975.
- [2] J.P. AUBIN, *Un théorème de compacité*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin 1963 (5024-5044).
- [3] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.
- [4] E. CODDINGTON E N. LEVINSON , *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1957 .
- [5] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, University of California, Berkeley, 1997.
- [6] O.A. LADYZHENSKAYA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, N.Y., 1969.
- [7] J. LERAY, *Essai sur mouvements plans d'un liquide visqueux qui limitent de parois*, J. Math. Pures et Appl. t. 13, 1934 (331-418).
- [8] J.L. LIONS, *Sur l'existence de solutions d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Mai 1959 (2817-2849).
- [9] J.L. LIONS , *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1959.
- [10] J.L. LIONS, *Un théorème d'existence et unicité les équations de Navier-Stokes en dimension 2*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin 1959 (3519-3521).
- [11] J.L. LIONS, *Some problems connected with the Navier-Stokes equations*, IV ELAM, Lima, Perú, 1978.
- [12] J.L. LIONS E E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1969.

- [13] L.A. MEDEIROS , *Topics in PDE- Lições sobre o Sistema de Navier-Stokes*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.
- [14] L.A. MEDEIROS E M.M. MIRANDA, *Espaços de Sobolev- Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [15] L.A. MEDEIROS E P.H. RIVERA, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, textos de Métodos matemáticos, Vol 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.
- [16] L.R. DE OLIVEIRA, *Introdução à análise funcional* , IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [17] J.A.C. RINCON, *Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Carathéodory* , University of Birmingham, 2004.
- [18] M.M. MIRANDA, *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, Eduepb- Editora da Física, São Paulo, 2014.
- [19] O.M.H. RODRIGUEZ, *Aula 21 do curso de fundamentos da mecânica do fluídos, Escola de Engenharia de São Carlos*, Universidade de São Paulo.
- [20] L. TARTAR, *Topics in nonlinear analysis*, Univ Paris Sud, Orsay, France, 1978 .
- [21] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations - Theory and numerical analysis*, North Holland, N.Y., 1979.
- [22] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer, Verlag, New York, 1978.