

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre uma Classe de Equações Elípticas envolvendo Crescimento Exponencial em $\mathbb{R}^2$

Wanderson Rodrigo Guimarães

João Pessoa - PB

2013

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre uma Classe de Equações Elípticas envolvendo Crescimento Exponencial em $\mathbb{R}^2$

por

Wanderson Rodrigo Guimarães

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

João Pessoa - PB

2013

G963s Guimarães, Wanderson Rodrigo.
Sobre uma classe de equações elípticas envolvendo
crescimento exponencial em $\mathbb{R}^2$ / Wanderson Rodrigo
Guimarães.- João Pessoa, 2013.
101f.
Orientador: Manassés Xavier de Souza
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Teorema do Passo da Montanha.
3. Princípio variacional de Ekeland. 4. Equação de Schrödinger.
5. Desigualdade de Trudinger-Moser. 6. Crescimento
exponencial.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Sobre uma Classe de Equações Elípticas envolvendo Crescimento Exponencial em $\mathbb{R}^2$

por

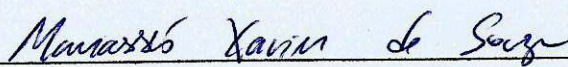
Wanderson Rodrigo Guimarães

Dissertação apresentada ao corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

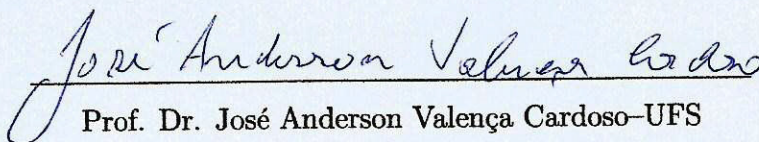
Aprovado em 16 de Maio de 2013.

Banca Examinadora



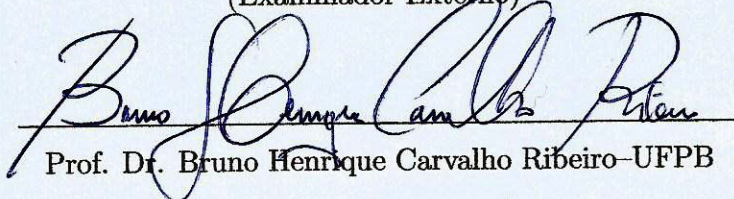
Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza-UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso-UFS

(Examinador Externo)



Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro-UFPB

(Examinador Interno)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo-UFPB

(Suplente)

*Ao meu pai Geraldo e
a minha mãe Socorro.*

Agradecimentos

A Deus, o Senhor da minha existência, por permitir chegar até aqui com saúde, paz e perseverança, tornando este sonho realidade e cada vez mais acreditando que tendo fé Nele tudo é possível.

A minha família, em especial, a meu pai Geraldo, minha mãe Socorro e meu irmão Diego pelo apoio incondicional.

Ao meu orientador prof. Manassés Xavier de Souza pela ótima orientação, pelos conselhos dados, pelas cobranças feitas e pela enorme paciência que teve comigo durante o processo de construção dessa dissertação.

Ao professor Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, por todo o aprendizado que obtive durante o curso de verão em Análise e no curso de Teoria dos Pontos críticos, onde suas aulas foram responsáveis pela minha decisão de me dedicar a área de Análise.

Ao Professor Aldo Trajano Louredo, pela sua confiança e incentivo para eu fazer o Mestrado.

Aos professores Alexandre de Bustamante Simas, Jacqueline Rojas, Napoleon Caro Tuesta e Lizandro Sanchez Challapa pela contribuição na minha formação acadêmica e ao professor Carlos Bocker pelo aprendizado em Análise Funcional e pela confiança que teve em mim.

A Mariana de Brito Maia por sua amizade, companheirismo e por está sempre presente nas horas alegres e difíceis e pronta para dá uma palavra de incentivo.

Ao amigo Eudes Mendes, por sua ajuda e pelas horas de estudos que foram essenciais para a construção dessa dissertação

Aos amigos da “Família Pedregal”, Mônica, Mylenna, Lili, Ginaldo, Tony, Gersica e Luan, que se tornaram minha família em João Pessoa.

Aos meus grandes amigos Francisco Vieira (Chicó) e Paulo por suas amizades, companheirismo, disposição de ajudar e por todo tempo que passamos juntos no mestrado, tanto nos estudos quanto nos bate papos.

Ao amigo Nacib André Gurgel por seu companheirismo e ajuda durante todo mestrado,

a qual foi extremamente importante na construção do meu conhecimento matemático.

Aos meus amigos Eberson, Rafael, Felipe, Wállace, Pedro e Josenildo(Jojó), pelas horas de estudos, amizade e companheirismo.

Aos Professores José Anderson Valença Cardoso e Uberlandio Batista Severo por aceitarem participar da banca examinadora e por seus comentários construtivos para a melhoria desta dissertação.

Aos demais colegas da Pós Graduação em Matemática da UFPB. Em especial a Yane, Enieze, Gilson, Ricardo Burity, Cabelinho, Kely, Tuany, Zé Carlos, Dayvid, Guilherme, Gustavo e Eudes Leite.

A Capes-Reuni pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta Dissertação, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas elípticos não homogêneos envolvendo crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$. Para isto, usaremos o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale em combinação com uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser.

Palavras Chaves: Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland, Equação de Schrödinger, Desigualdade de Trudinger-Moser, Crescimento Exponencial.

Abstract

In this work, we will study the existence and multiplicity of weak solutions for a class of nonhomogeneous elliptic problems involving exponential growth Trudinger-Moser type in $\mathbb{R}^2$. For this, we will use the Ekeland's Variational Principle and the Mountain Pass Theorem without the Palais-Smale condition in combination with a version of the Trudinger-Moser inequality.

Keywords: Mountain Pass Theorem, Ekeland Variational Principle, Schrödinger's Equation, Trudinger-Moser inequality, Exponential Growth.

Sumário

Notações	10
Introdução	12
1 Sobre uma classe de problemas elípticos não-homogêneos em $\mathbb{R}^2$	15
1.1 Introdução	15
1.2 Algumas propriedades do subconjunto E	16
2 Existência e multiplicidade de soluções: Caso Subcrítico	27
2.1 Introdução	27
2.2 Resultados Principais	28
2.3 Alguns resultados preliminares	30
2.4 Formulação Variacional	33
2.5 Geometria do Funcional	36
2.6 Prova dos principais resultados	45
3 Existência e multiplicidade de soluções: Caso Crítico	50
3.1 Introdução	50
3.2 Resultados Principais	51
3.3 Formulação Variacional	54
3.4 Geometria do Funcional	54
3.5 Prova dos principais resultados	56

3.5.1 Prova dos Teoremas 2.2 e 3.3	80
A Preliminares	82
A.1 Resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$	82
A.2 Resultados de Medida e Integração	83
A.3 Resultados de Análise Funcional	85
A.4 Resultados sobre os Espaços de Sobolev	85
A.5 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos	86
B Resultados Auxiliares	88
B.1 Funcionais Diferenciáveis	88
Referências Bibliográficas	98

Notações

Nesta dissertação faremos uso das seguintes simbologias:

- $C, C_0, C_1, \dots$ denotam constantes positivas (possivelmente distintas);
- B_r ou $B(0, r)$ denotam a bola centrada em zero com raio r ;
- $\text{supp } \varphi$ denota o suporte da função φ ;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denotam a convergência fraca e forte, respectivamente;
- $\hookrightarrow$ denota imersão de um espaço em outro;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno do espaço E ;
- $\| \cdot \|$ denota a norma do espaço E ;
- $\| \cdot \|_*$ denota a norma do espaço dual E^* ;
- H^{-1} denota o espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^2)$;
- $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno do espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$;
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de u em relação a x_i ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$ denota o gradiente de u , onde $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u ;
- $f * g$ denota a convolução entre as funções f e g ;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $C^k(\Omega)$ denota o espaço das funções k vezes diferenciáveis em Ω ;
- $C^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω ;
- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável ; } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$ com $1 \leq p < \infty$;
- $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$ denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$;
- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com a norma

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C, \quad \text{quase sempre em } \Omega\}.$$

Introdução

Nesta dissertação, com base no artigo de J. M. do Ó, E. S. de Medeiros e U. B. Severo [18], estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos não-homogêneos,

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

onde h pertence ao dual de um espaço apropriado e o potencial $V(x)$ é contínuo e limitado inferiormente por uma constante positiva. Além disso, assumimos que $[V(x)]^{-1}$ é integrável.

As principais dificuldades deste problema são a falta de compacidade devido ao domínio não ser limitado e o fato que o termo não-linear $f(s)$ pode ter crescimento subcrítico ou crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser.

Afim de obter resultados de existência e multiplicidade de soluções para esta classe de problemas, utilizaremos métodos variacionais, mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale e o Princípio Variacional de Ekeland em combinação com uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser.

Destacamos que nos últimos anos, vários trabalhos foram dedicados ao estudo de problemas elípticos envolvendo o crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser. Problemas deste tipo envolvendo crescimento crítico exponencial para o operador de Laplace foram estudados em [2, 3, 11] quando o domínio é limitado em $\mathbb{R}^2$. Em [1, 16, 28] foram estudados problemas elípticos quase lineares envolvendo crescimento crítico exponencial para o operador N -Laplaciano quando o domínio é limitado em $\mathbb{R}^N$. D. M. Cao em [9] estudou o problema (1) no caso homogêneo, isto é, $h \equiv 0$, e quando $V(x)$ é uma função assintótica a uma constante no infinito. Também foram estudados alguns resultados relacionados ao problema (1) em [4, 19]. Em [17], com uma versão adequada da desigualdade

de Trudinger-Moser em combinação com o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, foi provada a existência de solução não trivial para a seguinte classe de problemas quase lineares

$$-\Delta_N u + V(x)|u|^{N-2}u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$

supondo uma condição de coercividade no potencial $V(x)$ no infinito e $f(x, u)$ com crescimento crítico exponencial.

O problema acima aparece em muitas áreas da Física Matemática. Em particular, soluções da equação (1) são importantes para o estudo das soluções de ondas estacionárias para a equação não-linear de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\hbar \Delta \Psi + W(x) - g(x, \Psi), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

onde $\hbar$ é uma constante positiva e Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Com o objetivo de estudar o problema (1), este trabalho foi dividido em três capítulos e dois apêndices.

No *Capítulo 1*, apresentaremos um subespaço adequado de $H^1(\mathbb{R}^2)$, para o qual demonstraremos algumas de suas propriedades.

No *Capítulo 2*, temos o objetivo de estabelecer, no caso Subcrítico, a existência de duas soluções distintas para o problema (1) quando $\|h\|_*$ é suficientemente pequeno, onde uma solução é do tipo Passo da Montanha e a outra é uma solução tipo mínimo local.

No *Capítulo 3*, estudaremos o caso Crítico do problema (1), tendo o mesmo objetivo do Capítulo 2, ou seja, a existência de duas soluções distintas quando $\|h\|_*$ é suficientemente pequeno, utilizando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale e o Princípio Variacional de Ekeland. Além disso, analisando o sinal de h teremos, para $h(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, que existe duas soluções fracas distintas e não negativas para (1); e para o caso em que $h(x) \leq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, juntamente com uma condição que apresentaremos no Capítulo 3, iremos garantir a existência de pelo menos duas solução fracas não positivas.

No *Apêndice A*, enunciaremos alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo da dissertação.

No *Apêndice B*, faremos um estudo da diferenciabilidade do funcional energia associado ao problema (1). Enunciaremos as definições de derivadas de Fréchet e Gateaux.

Além disso, demonstraremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer do texto.

Ao longo desta dissertação estaremos sempre fazendo referências aos resultados utilizados.

Capítulo 1

Sobre uma classe de problemas elípticos não-homogêneos em $\mathbb{R}^2$

1.1 Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não-homogêneos da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

onde h pertence ao dual de um espaço apropriado (o qual definiremos logo mais) e o termo não-linear $f(s)$ possui crescimento subcrítico ou crítico do tipo Trudinger-Moser (os quais definiremos nos Capítulos 2 e 3, respectivamente). Afim de utilizarmos métodos variacionais assumiremos as seguintes hipóteses sobre o potencial V :

(V₁) $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(V₂) A função $\frac{1}{V(x)}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Consideremos o seguinte subconjunto de $H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2); \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \right\}.$$

O objetivo deste capítulo é apresentarmos algumas das propriedades do subconjunto E , as quais serão tratadas mais especificamente na próxima seção.

1.2 Algumas propriedades do subconjunto E

Primeiramente mostraremos que E é um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$.

De fato,

(i) Claramente a função nula pertence a E .

(ii) Seja $u, v \in E$, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u+v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} [V(x)u^2 + 2V(x)uv + V(x)v^2] dx. \quad (1.2)$$

Sabemos por (V_1) que $V(x) > 0$ e como

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v^2 dx < \infty,$$

temos que $(V(x)^{1/2}u), (V(x)^{1/2}v) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Então, pela desigualdade de Hölder

$$V(x)uv = (V(x)^{1/2}u)(V(x)^{1/2}v) \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Voltando para (1.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u+v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} V(x)uv dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v^2 dx < \infty$$

Logo, $(u+v) \in E$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in E$, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)(\alpha u)^2 dx = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty,$$

ou seja, $(\alpha u) \in E$.

Assim, concluímos que E é subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora, para quaisquer $u, v \in E$, notemos que

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx, \quad (1.3)$$

é um produto interno em E . De fato, sejam $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:

Positividade:

- $\langle u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \geq 0, \quad \text{para todo } u \in E,$

e mais,

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \langle u, u \rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx = 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow u = 0.
 \end{aligned}$$

Simetria:

$$\bullet \quad \langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v \nabla u + V(x)vu) dx = \langle v, u \rangle.$$

Bilinearidade:

- Pela linearidade do gradiente e da integral, temos

$$\begin{aligned}
 \langle u, \alpha v + w \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla(\alpha v + w) + V(x)u(\alpha v + w)] dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha(\nabla u \nabla v + V(x)uv) + (\nabla u \nabla w + V(x)uw)] dx \\
 &= \alpha \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla w + V(x)uw) dx \\
 &= \alpha \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.
 \end{aligned}$$

- Usando a Simetria e a linearidade acima, obtemos

$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \langle w, \alpha u + v \rangle = \alpha \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

Logo, $\langle u, v \rangle$ é um produto interno. Como queríamos demonstrar.

Proposição 1.1. *O subespaço E é um espaço de Hilbert.*

Prova: Notemos, por (V_1) , que

$$\begin{aligned}
 \|u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V_0 u^2) dx \\
 &\geq \min\{1, V_0\} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2) dx = \min\{1, V_0\} \cdot \|u\|_{1,2}^2,
 \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma de E induzida pelo produto interno apresentado em (1.3). Assim, pela estimativa acima, temos

$$\|u\|_{1,2} \leq \left(\frac{1}{\min\{1, V_0\}} \right) \cdot \|u\|. \quad (1.4)$$

Logo, E está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora considerando $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cauchy, temos

$$\|u_n - u_m\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Então, por (1.4),

$$\|u_n - u_m\|_{1,2} \rightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Como $H^1(\mathbb{R}^2)$ é completo, temos que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Mostremos que $u_n \rightarrow u$ em E e $u \in E$. De fato, como $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{1,2}^2 &= \|\nabla(u_n - u)\|_2^2 + \|u_n - u\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u_n - u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^2 dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

O que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u_n - u)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^2 dx \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Queremos mostrar que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla(u_n - u)|^2 + V(x)(u_n - u)^2] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u_n - u)^2 dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por (1.5), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \rightarrow 0.$$

Então, resta verificarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)(u_n - u)^2 dx \rightarrow 0.$$

Como $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, a menos de subsequência, tem-se

$$\begin{cases} u_{n_k}(x) \rightarrow u(x) & \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2, \\ u_{n_k} \rightarrow u & \text{em } L^2(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Daí, sendo (u_{n_k}) de cauchy em E , segue que

$$\begin{aligned} \|V(x)^{1/2}(u_{n_{k+l}} - u_{n_k})\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |V(x)^{1/2}(u_{n_{k+l}} - u_{n_k})|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_{n_{k+l}} - u_{n_k}|^2 dx \\ &\leq \|u_{n_{k+l}} - u_{n_k}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $(V(x)^{1/2}u_{n_k})$ é de cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$, e como $L^2(\mathbb{R}^2)$ é completo, existe $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $V(x)^{1/2}u_{n_k} \rightarrow \tilde{g}$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Como $(V(x)^{1/2}u_{n_k})$ é de cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$ podemos extrair uma subsequência, tal que

$$\|V(x)^{1/2}u_{k_{r+1}} - V(x)^{1/2}u_{k_r}\|_2 < \frac{1}{2^r}. \quad (1.6)$$

Definindo

$$g_l(x) = \sum_{r=1}^l |V(x)^{1/2}u_{k_{r+1}}(x) - V(x)^{1/2}u_{k_r}(x)|,$$

notemos que $g_l(x)$ é uma sequência crescente que converge pontualmente para

$$g(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} g_l(x) = \sum_{r=1}^{\infty} |V(x)^{1/2}u_{k_{r+1}}(x) - V(x)^{1/2}u_{k_r}(x)|.$$

Pela desigualdade de Minkowski e (1.6), temos que

$$\|g_l(x)\|_2 \leq \sum_{r=1}^l \|V(x)^{1/2}u_{k_{r+1}} - V(x)^{1/2}u_{k_r}\|_2 \leq \sum_{r=1}^l \frac{1}{2^r} \leq 1.$$

Daí, usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos que

$$\int |g_l(x)|^2 dx \rightarrow \int |g(x)|^2 dx,$$

e como $\|g(x)\|_2 \leq 1$, temos que $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Agora observemos que,

$$|V(x)^{1/2}u_{k_{r+l}}(x) - V(x)^{1/2}u_{k_r}(x)| \leq g_{r+l-1}(x) - g_{r-1}(x).$$

Fazendo $l \rightarrow \infty$,

$$|V(x)^{1/2}u(x) - V(x)^{1/2}u_{k_r}| \leq g(x) - g_{r-1} \leq g(x). \quad (1.7)$$

Por outro lado,

$$|V(x)^{1/2}u(x) - V(x)^{1/2}u_{k_r}| \geq |V(x)^{1/2}u(x)| - |V(x)^{1/2}u_{k_r}|. \quad (1.8)$$

De (1.7) e (1.8), segue que

$$|V(x)^{1/2}u(x)| - |V(x)^{1/2}u_{k_r}| \leq g(x),$$

implicando que

$$|V(x)^{1/2}u(x)| \leq g(x) + |V(x)^{1/2}u_{k_r}|.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$\begin{aligned} |V(x)^{1/2}u(x)|^2 &\leq (g(x) + |V(x)^{1/2}u_k(x)|)^2 \\ &= g^2(x) + 2g(x)|V(x)^{1/2}u_k(x)| + |V(x)^{1/2}u_k(x)|^2. \end{aligned}$$

Como $2ab \leq a^2 + b^2$, para quaisquer a e b , temos

$$\begin{aligned} V(x)u(x)^2 &\leq g^2(x) + g^2(x) + |V(x)^{1/2}u_k(x)|^2 + |V(x)^{1/2}u_k(x)|^2 \\ &= 2(g^2(x) + |V(x)^{1/2}u_k(x)|^2). \end{aligned}$$

Integrando em ambos os membros da última estimativa, tem-se

$$\begin{aligned} \int V(x)u^2 dx &= 2 \int (g^2(x) + |V(x)^{1/2}u_k(x)|^2) dx \\ &= 2 \left(\int g^2(x) dx + \int |V(x)^{1/2}u_k(x)|^2 dx \right) < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $u \in E$, como queríamos.

Por outro lado, $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Além disso, $V(x)^{1/2}u_{n_k} \rightarrow \tilde{g}$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, então pelo Teorema A.6 existe $G(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$\begin{cases} |V(x)^{1/2}u_{n_k}(x)| \leq G(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2 \\ \text{e} \\ V(x)^{1/2}u_{n_k}(x) \rightarrow V(x)^{1/2}u(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} |V(x)^{1/2}u_{n_k}(x) - V(x)^{1/2}u(x)|^2 &\leq \left(|V(x)^{1/2}u_{n_k}(x)| + |V(x)^{1/2}u(x)| \right)^2 \\ &= |V(x)^{1/2}u_{n_k}(x)|^2 + 2|V(x)^{1/2}u_{n_k}(x)| \cdot |V(x)^{1/2}u(x)| + |V(x)^{1/2}u(x)|^2. \end{aligned}$$

Novamente usando que $2ab \leq a^2 + b^2$, para todo a, b , obtemos

$$\begin{aligned} |V(x)^{1/2}u_{n_k}(x) - V(x)^{1/2}u(x)|^2 &\leq 2 \left(|V(x)^{1/2}u_{n_k}(x)|^2 + |V(x)^{1/2}u(x)|^2 \right) \\ &\leq 2 \left(G^2(x) + V(x)u^2(x) \right) \\ &= \tilde{G}(x) \in L^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_n - u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |V(x)^{1/2}u_{n_k} - V(x)^{1/2}u|^2 dx \rightarrow 0.$$

Assim, concluímos que $u_n \rightarrow u$ em E e $u \in E$. Portanto, E é um espaço de Hilbert. ■

Agora, apresentaremos um importante resultado de densidade que será usado a longo desta dissertação.

Proposição 1.2. *O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E com relação a norma $\|\cdot\|$.*

Prova: Dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: Seja $u \in E$ com suporte compacto $K = \text{supp}(u)$. Então, $u \in L^2(K)$, e consequentemente, $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Consideremos ρ_n uma sequência regularizante em $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \rho_n \subset \overline{B(0, 1/n)}, \quad \int \rho_n(x) dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Pela Proposição A.4 e pelo Teorema A.10, obtemos

$$\phi_n = \rho_n * u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \phi_n \rightarrow u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = \rho_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2). \quad (1.9)$$

Notemos que sempre existe um conjunto K_1 compacto, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K \cup \text{supp } \phi_n \subset K_1.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x) |\phi_n - u|^2 dx = \int_{K_1} V(x) |\phi_n - u|^2 dx \leq \max_{x \in K_1} V(x) \int_{K_1} |\phi_n - u|^2 dx.$$

Deste modo, por (1.9)

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x) |\phi_n - u|^2 dx \rightarrow 0.$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned} |\nabla \phi_n - \nabla u|^2 &= \left| \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right|^2 \\ &= \left| \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right|^2 \\ &= \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Assim, por (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \phi_n - \nabla u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi_n - u\| = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(\phi_n - u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |\phi_n - u|^2 dx \rightarrow 0.$$

Caso 2: Agora, para qualquer $u \in E$, consideremos

$$u_n(x) = M_n(x)u(x),$$

onde $M_n(x) = M(x/n)$ e M é uma função de truncamento em $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, definida por

$$M(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B(0, 1) \\ 0, & \text{se } x \in B^c(0, 2) \end{cases}, \quad \text{com } 0 \leq M \leq 1.$$

Pela definição de M , temos que

$$|u_n(x)| \leq |u(x)| \quad \text{e} \quad u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Como $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ para todo $a, b \geq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} V(x)|u_n - u|^2 &\leq V(x)(|u_n| + |u|)^2 \leq 2V(x)(|u_n|^2 + |u|^2) \\ &\leq 2V(x)(|u|^2 + |u|^2) = 4V(x)u^2 \in L^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_n - u|^2 dx \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial(M_n u)}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u + M_n \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Então observemos que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 &= \left| \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u + M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \leq \left(\left| \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right| + \left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\left| \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 + \left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right). \quad (1.11)$$

Vejamos que,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 dx \rightarrow 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{n} \frac{\partial M_n}{\partial x_i} u \right|^2 dx &= \int_{B(0,2) \setminus B(0,1)} \left| \frac{1}{n} \frac{\partial M}{\partial x_i} u \right|^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \left\| \frac{\partial M}{\partial x_i} \right\|_\infty^2 \int_{B(0,2) \setminus B(0,1)} |u|^2 dx \\ &= \frac{C}{n^2} \int_{B(0,2) \setminus B(0,1)} |u|^2 dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Resta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \rightarrow 0.$$

Para isso, verifiquemos que as condições do Teorema da Convergência Dominada são satisfeitas:

1)

$$M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{se } |x| \leq n \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2n \\ g, & \text{se } n < |x| < 2n \text{ onde } 0 \leq g \leq \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{cases}.$$

Temos que,

$$\left| M_n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

2)

$$\begin{aligned} \left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 &\leq \left(\left| M_n \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right)^2 \leq \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right)^2 \\ &= \left(2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right)^2 = 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2, \end{aligned}$$

onde $2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Portanto, de (1.11), obtemos

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Agora veja que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

O que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx = \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2. \quad (1.13)$$

Assim, por (1.10), (1.12) e (1.13), segue que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u_n - u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_n - u|^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_n - u|^2 dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que para qualquer $u \in E$, existe $u_n = M_n u$ tal que $u_n \rightarrow u$ em E . Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\text{supp}(u_{n_0}) \subseteq \overline{B}(0, 2n_0).$$

Pelo Caso 1, existe $\phi_{n_0} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$\|\phi_{n_0} - u_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para concluir a prova observemos que,

$$\|\phi_{n_0} - u\| = \|\phi_{n_0} - u_{n_0} + u_{n_0} - u\| \leq \|\phi_{n_0} - u_{n_0}\| + \|u_{n_0} - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

■

No próximo lema mostraremos a imersão do subespaço E no espaço de Lebegue $L^p(\mathbb{R}^2)$, para todo $q \geq 1$.

Lema 1.1. *Suponha que $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e que (V_1) , (V_2) são satisfeitas. Então, E está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^2)$, para todo $q \geq 1$.*

Prova: Usando (V_1) , já vimos que

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \frac{1}{\min\{1, V_0\}} \|u\|^2. \quad (1.14)$$

Daí, por (1.14) e pelo Corolário A.1, temos que as seguintes imersões são contínuas.

$$E \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad \text{para todo } 2 \leq q < \infty. \quad (1.15)$$

Como $u \in E$, temos que $(V(x)^{1/2}u) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Por outro lado, pela hipótese (V_2) , tem-se

$$\left(\frac{1}{V(x)^{1/2}} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Daí, pela desigualdade de Hölder,

$$u = \left(\frac{1}{V(x)^{1/2}} \right) \cdot (V(x)^{1/2}u) \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

e mais,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{V(x)} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{V(x)} dx \right)^{1/2} \|u\|. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Mostremos que a imersão continua é válida para $1 < q < 2$. De fato, usando (1.16), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (|u| + |u|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |u| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{V(x)} dx \right)^{1/2} \|u\| + \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Mas, por (V_1) ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx &= \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^2} V_0 |u|^2 dx \leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x) |u|^2) dx = \frac{1}{V_0} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade (1.17), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{V(x)} dx \right)^{1/2} \|u\| + \frac{1}{V_0} \|u\|^2. \quad (1.18)$$

Agora notemos que a imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, com $1 < q < 2$, dada pela inclusão

$$\begin{aligned} i: E &\longrightarrow L^q(\mathbb{R}^2) \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

é contínua, pois i é linear, e por (1.18) se $u_n \rightarrow u$ em E , então $u_n \rightarrow u$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para $1 < q < 2$. Assim, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_q \leq C\|u\|$.

O caso $q = 1$, é imediato. Assim, conseguimos a imersão contínua

$$E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad \text{para todo } q \geq 1.$$

Resta provar que a imersão acima também é compacta. Para isto, tomemos uma sequência de funções $(u_k) \subset E$ limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_k\| \leq C. \quad (1.19)$$

Então provemos que, a menos de subsequência, existe algum $u \in E$ de forma que u_k converge fortemente para u em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$. Usando os Teoremas A.11 e A.14 podemos admitir, sem perda de generalidade, que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \text{ fracamente em } E, \\ u_k \rightarrow u \text{ em } L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2), \text{ para todo } q \geq 1, \\ u_k(x) \rightarrow u(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.20)$$

Por (V_2) , temos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\left(\int_{|x|>R} \frac{1}{V(x)} dx \right)^{1/2} < \varepsilon. \quad (1.21)$$

Daí, por (1.19), (1.21) e usando a desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x|>R} |u_k - u| dx &\leq \left(\int_{|x|>R} \frac{1}{V(x)} dx \right)^{1/2} \left(\int_{|x|>R} V(x) |u_k - u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \|u_k - u\| \leq \varepsilon (\|u_k\| + \|u\|) \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Por outro lado, segue de (1.20), que $u_k \rightarrow u$ fortemente em $L^1(B_R)$, isto é, dado $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R} |u_k - u| dx \leq \delta, \quad \text{para todo } k \geq k_0. \quad (1.23)$$

Assim, de (1.22) e (1.23), segue que

$$\|u_k - u\|_1 \rightarrow 0. \quad (1.24)$$

Para $q > 1$, utilizemos a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u|^{1/2} |u_k - u|^{q-(1/2)} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u| dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u|^{2q-1} dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u| dx \right)^{1/2} \|u_k - u\|_{2q-1}^{q-1/2}. \end{aligned}$$

Logo, fazendo uso da imersão contínua $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u|^q dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u| dx \right)^{1/2} \|u_k - u\|^{q-1/2} \\ &\leq C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_k - u| dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Com isto e (1.24), concluímos a prova do lema. ■

Capítulo 2

Existência e multiplicidade de soluções: Caso Subcrítico

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para o caso subcrítico para a classe de problemas elípticos não-homogêneos apresentada no Capítulo 1, mais precisamente, abordaremos o problema

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

onde $h \in E^*$ e o termo não-linear $f(s)$ possui crescimento subcrítico do tipo Trudinger-Moser, o qual definimos a seguir:

Definição 2.1. Dizemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$, se para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = 0 \quad (2.2)$$

Para evitarmos recorrer ao Capítulo 1, relembremos as hipóteses assumidas sobre o potencial V :

(V₁) $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e existe uma constante $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(V₂) A função $\frac{1}{V(x)}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora introduzimos as seguintes hipóteses sobre o termo não-linear:

(f₀) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(f₁) Existe $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geq s_1$,

$$0 < \theta F(s) = \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s).$$

Afim de encontrarmos soluções fracas para o problema (2.1), consideraremos ao longo deste capítulo o subespaço E definido no Capítulo 1.

2.2 Resultados Principais

Neste capítulo temos o interesse de encontrar condições suficientes que garantam a existência e multiplicidade de solução para o Problema (2.1) no caso subcrítico.

Os principais resultados do caso subcrítico são os seguintes:

Teorema 2.1. *Suponha que $f(s)$ tem crescimento subcrítico e $(V_1) - (V_2)$, (f_0) e (f_1) são satisfeitas. Além disso, assuma a seguinte condição*

$$(f_2) \quad 0 \leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1,$$

onde

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in E \\ \|u\| \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2} \geq V_0 > 0. \quad (2.3)$$

Então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_* < \delta_1$, o problema (2.1) possui, pelo menos, duas soluções fracas em E . Uma delas com energia positiva, enquanto a outra com energia negativa.

Além disso, se $h(x)$ tem sinal definido, o seguinte resultado é obtido.

Teorema 2.2. *Sob as hipóteses do Teorema 2.1, se $h(x) \geq 0$ ($h(x) \leq 0$) quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então as soluções obtidas no Teorema 2.1 são não negativas (não positivas), respectivamente.*

Exemplo 2.1. Um exemplo para funções satisfazendo as condições (f_0) , (f_1) e (f_2) com crescimento subcrítico é $f(s) = \lambda(2s + s^2)e^s$ com $0 < \lambda < \frac{\lambda_1}{2}$. De fato, para provarmos que a condição (f_1) é satisfeita, é suficiente notarmos que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{sf(s)} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{s^2 e^s}{s(2s + s^2)e^s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{s}{(2s + s^2)} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{1}{(2 + s)} = 0,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt = \lambda s^2 e^s$. Além disso, (f_2) é satisfeita,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda(2s + s^2)e^s}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} (2\lambda e^s + \lambda s e^s) = 2\lambda < \lambda_1$$

E claramente, f é contínua e $f(0) = 0$.

Observação 2.1. Notemos que a condição (f_1) implica que existem constantes positivas C_1 e C_2 , tais que

$$F(s) \geq C_1 |s|^\theta - C_2, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

De fato, pela condição (f_1) , temos

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{f(t)}{F(t)}, \quad \text{para cada } t \in A_1,$$

onde $A_1 = \{s \in \mathbb{R}; |s| > s_1\}$. Daí, integrando a estimativa acima, tem-se

$$\int_{|s_1|}^{|s|} \frac{f(t)}{F(t)} dt \geq \theta \int_{|s_1|}^{|s|} \frac{1}{t} dt.$$

Tomando $U = F(t)$, então $dU = f(t)dt$, assim usando o método de integração por substituição, temos que

$$\ln F(t) \Big|_{|s_1|}^{|s|} \geq \theta \ln t \Big|_{|s_1|}^{|s|}, \quad \text{para todo } s \in A_1.$$

Assim,

$$\ln F(|s|) - \ln F(|s_1|) \geq \theta(\ln |s| - \ln |s_1|), \quad \text{para todo } s \in A_1$$

Pelas propriedades de logaritmos,

$$\ln \frac{F(|s|)}{F(|s_1|)} \geq \ln \frac{|s|^\theta}{|s_1|^\theta}, \quad \text{para todo } s \in A_1.$$

O que implica,

$$\frac{F(|s|)}{F(|s_1|)} \geq \frac{|s|^\theta}{|s_1|^\theta}, \quad \text{para todo } s \in A_1.$$

Daí, para $C_1 = \frac{F(|s_1|)}{|s_1|^\theta}$, obtemos

$$F(|s|) \geq C_1 |s|^\theta, \quad \text{para todo } s \in A_1. \quad (2.5)$$

Agora, como $\bar{B}_{s_1} = \mathbb{R} \setminus A_1$ é compacto e F é contínua, existe $k > 0$ tal que

$$F(s) \geq -k, \quad \text{para todo } s \in \bar{B}_{s_1}.$$

Por outro lado, temos que

$$C_1|s|^\theta \leq C_1s_1^\theta, \quad \text{para todo } s \in \bar{B}_{s_1}.$$

Daí, tomando $C_2 > 0$ suficientemente grande de forma que

$$C_1s_1^\theta - C_2 \leq -k,$$

obtemos que

$$F(|s|) \geq C_1s_1^\theta - C_2 \geq C_1|s|^\theta - C_2, \quad \text{para todo } s \in \bar{B}_{s_1}. \quad (2.6)$$

Além disso, por (2.5), temos

$$F(|s|) \geq C_1|s|^\theta - C_2, \quad \text{para todo } s \in A_1. \quad (2.7)$$

Portanto, de (2.6) e (2.7), segue que

$$F(s) \geq C_1|s|^\theta - C_2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2.3 Alguns resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos os resultados que serão constantemente utilizados ao longo dos Capítulos 2 e 3. Já a seguir enunciaremos uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser para todo $\mathbb{R}^2$.

Lema 2.1 (J. M. do Ó [17]). *Se $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) dx < \infty.$$

Além disso, se $\|\nabla u\|_2 \leq 1$, $\|u\|_2 \leq M < \infty$ e $\alpha < 4\pi$, então existe uma constante $C = C(M, \alpha)$, a qual depende unicamente de M e α , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) dx \leq C(M, \alpha).$$

Lema 2.2. *Seja $\beta > 0$ e $r > 1$. Então, para cada $\alpha > r$ existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq C(e^{\alpha \beta s^2} - 1).$$

Em particular, se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então $(e^{\beta s^2} - 1)^r$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Prova: Como $r > 1$, pela regra de L'Hospital, concluimos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{(e^{\alpha \beta s^2} - 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(e^{\beta s^2} - 1)^{r-1} e^{\beta s^2} 2\beta s}{e^{\alpha \beta s^2} 2\alpha \beta s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(e^{\beta s^2} - 1)^{r-1} e^{\beta s^2}}{\alpha e^{\alpha \beta s^2}} = 0,$$

isto é, dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|s| < \delta$ implica que

$$\frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{(e^{\alpha \beta s^2} - 1)} \leq \varepsilon_1,$$

com isso,

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq \varepsilon_1 (e^{\alpha \beta s^2} - 1), \quad \text{sempre que } |s| < \delta.$$

Além disso, notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{(e^{\alpha \beta s^2} - 1)} &= \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\left[e^{\beta s^2} (1 - e^{-\beta s^2}) \right]^r}{e^{\alpha \beta s^2} (1 - e^{-\alpha \beta s^2})} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{r\beta s^2}}{e^{\alpha \beta s^2}} \cdot \frac{(1 - e^{-\beta s^2})^r}{(1 - e^{-\alpha \beta s^2})} \right] \\ &= \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(e^{\beta s^2})^{\alpha-r}} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{e^{\beta s^2}})^r}{(1 - \frac{1}{e^{\alpha \beta s^2}})} \right] = 0. \end{aligned}$$

Logo, dado $\gamma > 0$, existe $\delta_\gamma > 0$ tal que se $|s| > \delta_\gamma$, implica que

$$\frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{(e^{\alpha \beta s^2} - 1)} \leq \gamma,$$

donde temos

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq \gamma (e^{\alpha \beta s^2} - 1), \quad \text{sempre que } |s| > \delta_\gamma.$$

Agora, seja $\delta \leq |s| \leq \delta_\gamma$. Como $\frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{(e^{\alpha \beta s^2} - 1)}$ é uma função contínua, segue que é limitada, ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{(e^{\alpha \beta s^2} - 1)} \leq K,$$

o que implica,

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq K (e^{\alpha \beta s^2} - 1), \quad \text{sempre que } \delta \leq |s| \leq \delta_\gamma.$$

Tomando $C = \max\{\varepsilon_1, \gamma, K\}$, obtemos que

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq C(e^{\alpha\beta s^2} - 1), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Assim, para $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, segue pelo Lema 2.1 que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)^r dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta u^2} - 1) dx < \infty.$$

Logo, $(e^{\beta u^2} - 1)^r \in L^1(\mathbb{R}^2)$. ■

Observação 2.2. Como consequência dos Lemas 2.1 e 2.2 e usando a desigualdade de Hölder, temos que se $\beta > 0$ e $q > 0$ a função $|u|^q(e^{\beta u^2} - 1)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

De fato: Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Usando a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, com $sq > 1$ e $s = \frac{r}{r-1}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\beta u^2} - 1) dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{qs} dx \right)^{1/s} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)^r dx \right)^{1/r} \\ &= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{sq} dx \right)^{1/sq} \right]^q \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)^r dx \right]^{1/r}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, para $\alpha > r$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\beta u^2} - 1) dx \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta u^2} - 1) dx \right]^{1/r} \|u\|_{qs}^q.$$

Utilizando a imersão contínua de $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ (ver Lema 1.1), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\beta u^2} - 1) dx \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta u^2} - 1) dx \right]^{1/r} \|u\|^q.$$

Por fim, pelo Lema 2.1, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\beta u^2} - 1) dx < \infty.$$

Logo, $|u|^q (e^{\beta u^2} - 1) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema 2.3. Se $v \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $\|v\| \leq M$ com $\beta M^2 < 4\pi$, então existe $C = C(\beta, M, q) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1) |v|^q dx \leq C \|v\|^q.$$

Prova: Consideremos $r > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $r\beta M^2 < 4\pi$. Usando a desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, com $sq > 1$ e $s = \frac{r}{r-1}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)^r dx \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q.$$

Agora tomando $\alpha > r$ suficientemente próximo de r tal que $\alpha\beta M < 4\pi$, segue do Lema 2.2 que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q dx \leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta v^2} - 1) dx \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q.$$

Usando que $\|\nabla v\|_2^2 \leq \|v\|^2 \leq M^2$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q dx &\leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha\beta \|\nabla v\|_2^2 \left(\frac{v}{\|\nabla v\|_2} \right)^2} - 1 \right) dx \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q \\ &\leq C_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\alpha\beta M^2 \left(\frac{v}{\|\nabla v\|_2} \right)^2} - 1 \right] dx \right\}^{1/r} \|v\|_{qs}^q, \end{aligned}$$

e pelo Lema 2.1, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q dx \leq C_2 \|v\|_{qs}^q.$$

Por fim, usando a imersão contínua $E \hookrightarrow L^{qs}(\mathbb{R}^2)$ (ver Lema 1.1), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q dx \leq C \|v\|^q.$$

■

2.4 Formulação Variacional

Para obtermos a formulação variacional do problema (2.1), suponhamos que exista $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo (2.1), então multiplicando o problema por uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos

$$-(\Delta u)\varphi + V(x)u\varphi = f(u)\varphi + h\varphi.$$

Integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u)\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi dx.$$

onde $\int_{\mathbb{R}^2} h\varphi dx = \langle h, \varphi \rangle_*$ e iremos usar esta notação ao longo da dissertação.

Seja $K = \text{supp}(\varphi)$ o suporte de φ , então

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u)\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi dx = - \int_K \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi dx + \int_K V(x)u\varphi dx. \quad (2.8)$$

Mas,

$$\int_K \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi dx = \sum_{i=1}^2 \int_K \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi dx. \quad (2.9)$$

Como u pertence a $C^2(\mathbb{R}^2)$, suas derivadas existem e podemos usar a fórmula de integração por partes. Assim,

$$\sum_{i=1}^2 \int_K \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi dx = - \sum_{i=1}^2 \int_K \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Voltando para (2.8) e usando (2.9), segue que, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi dx &= - \left(- \int_K \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right) + \int_K V(x)u\varphi dx \\ &= \int_K \nabla u \nabla \varphi dx + \int_K V(x)u\varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u\varphi dx. \end{aligned}$$

Daí, por densidade (ver Proposição 1.2), obtemos que, para todo $v \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx - \int_{\mathbb{R}^2} hvd x = 0. \quad (2.10)$$

Desta maneira, motivado por (2.10), temos a seguinte definição.

Definição 2.2. Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca para o problema (2.1), se satisfaz a igualdade

$$\langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx - \int_{\mathbb{R}^2} hvd x = 0, \quad \text{para todo } v \in E.$$

Seja $I : E \rightarrow \mathbb{R}$, o funcional definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx - \int_{\mathbb{R}^2} hud x.$$

Pela Seção B.1 do apêndice, temos que o funcional está bem definido, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e para cada $v \in E$, obtemos

$$I'(u)v = \langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx - \int_{\mathbb{R}^2} hud x. \quad (2.11)$$

Agora, fazendo uso da hipótese (f_2) , ou seja,

$$0 \leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1,$$

existe $\varepsilon > 0$, tal que $L < \lambda_1 - 2\varepsilon$, onde $L = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s}$. Por outro lado, para este ε , existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para $|s| < \delta_\varepsilon$,

$$\left| \frac{f(s)}{s} - L \right| \leq \varepsilon.$$

O que implica,

$$L - \varepsilon \leq \frac{f(s)}{s} \leq L + \varepsilon.$$

Como $-\lambda_1 + 2\varepsilon < -L \leq L$, segue que

$$-\lambda_1 + \varepsilon \leq \frac{f(s)}{s} \leq \lambda_1 - \varepsilon.$$

Ou seja, sempre que $|s| < \delta_\varepsilon$, temos

$$|f(s)| \leq (\lambda_1 - \varepsilon)|s|. \quad (2.12)$$

Agora, usando (2.2) e o fato que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha s^2}}{e^{\alpha s^2} - 1} = 1, \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

Temos que, para cada $\alpha > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 1} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} \cdot \frac{e^{\alpha s^2}}{e^{\alpha s^2} - 1} \right] = 0.$$

Então, dado $\gamma > 0$ existe $\delta_\gamma > 0$ tal que para todo $|s| > \delta_\gamma$,

$$|f(s)| \leq \gamma(e^{\alpha s^2} - 1). \quad (2.13)$$

Sabemos que $A = \{s \in \mathbb{R}; |s| < \delta_\varepsilon \text{ ou } |s| > \delta_\gamma\}$ é aberto, consequentemente, $K = \mathbb{R}/A$ é compacto. Usando a continuidade de f , para cada $s \in K$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_1.$$

Desta forma podemos escolher $C_2 > 0$ tal que, para todo $s \in K$,

$$|f(s)| \leq C_2(e^{\alpha s^2} - 1). \quad (2.14)$$

De (2.13) e (2.14), e tomando $C_0 = \max\{\gamma, C_2\}$, tem-se

$$|f(s)| \leq C_0(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \text{para todo } |s| \geq \delta_\gamma. \quad (2.15)$$

Daí, por (2.12) e (2.15), segue que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|f(s)| \leq (\lambda_1 - \varepsilon)|s| + C_0(e^{\alpha s^2} - 1).$$

Portanto, se $f(s)$ satisfaz (2.2), para cada $\alpha > 0$, existe $b_1, b_2 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq b_1|s| + b_2(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Seja $u \in E$, então $F(u)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$. De fato, por (f_1) , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_0^u f(s) ds \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^u |f(s)| ds dx.$$

Mas, por (2.16), tem-se

$$\int_0^u |f(s)| ds \leq \int_0^u [C_1|s| + C_2(e^{\alpha s^2} - 1)] ds \leq C_1|u|^2 + C_2|u|(e^{\alpha u^2} - 1).$$

Como $u \in E$, então $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Usando a Observação 2.2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} [C_1|u|^2 + C_2(e^{\alpha u^2} - 1)|u|] dx < \infty.$$

Ou seja, $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2.5 Geometria do Funcional

Agora verificaremos que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.4. *Suponha que as hipóteses (f_1) , (f_2) e (2.2) são satisfeitas. Então, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $h \in E^*$ com $\|h\|_* < \delta_1$, existe $\rho_h > 0$ tal que*

$$I(u) > 0 \quad \text{se} \quad \|u\| = \rho_h.$$

Além disso, $\rho_h \rightarrow 0$ quando $\|h\|_ \rightarrow 0$.*

Prova: Por (f_2) , existe $\varepsilon > 0$ tal que $L < \lambda_1 - 2\varepsilon$, onde $L = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2F(s)}{s^2}$. Por outro lado, para este ε , existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|s| < \delta_\varepsilon$ implica que

$$L - \varepsilon \leq \frac{2F(s)}{s^2} \leq L + \varepsilon.$$

Como $-\lambda_1 + 2\varepsilon \leq -L \leq L$, segue que

$$\left| \frac{2F(s)}{s^2} \right| \leq \lambda_1 - \varepsilon.$$

Logo, para todo $|s| < \delta_\varepsilon$,

$$|F(s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} |s|^2, \quad (2.17)$$

então por (2.2) e usando um raciocínio análogo ao feito para obter (2.13), segue que, dado $\gamma > 0$ existe $\delta_\gamma > 0$ tal que $|s| > \delta_\gamma$ implica

$$|f(s)| \leq \gamma(e^{\alpha s^2} - 1). \quad (2.18)$$

Por (f_1) , existe $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geq s_1$, temos que

$$F(s) \leq \frac{1}{\theta} s f(s).$$

Tomando $\delta = \max\{s_1, \delta_\gamma\}$ e usando (2.18), obtemos para todo $|s| > \delta$ que,

$$|F(s)| \leq \left| \frac{1}{\theta} s f(s) \right| = \frac{1}{\theta} |s| |f(s)| \leq \frac{\gamma}{\theta} |s| (e^{\alpha s^2} - 1).$$

Daí, para todo $|s| > \delta$ e $q > 2$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq C_1 |s|^q (e^{\alpha s^2} - 1). \quad (2.19)$$

Como $A = \{s \in \mathbb{R}; |s| < \delta_\varepsilon \text{ ou } |s| > \delta\}$ é aberto e $K = \mathbb{R} \setminus A$ é compacto, segue da continuidade de F que existe $C_2 > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq C_2, \quad \text{para todo } s \in K.$$

Assim podemos escolher C_3 suficientemente grande, tal que para todo $s \in K$,

$$|F(s)| \leq C_3 |s|^q (e^{\alpha s^2} - 1). \quad (2.20)$$

De (2.19) e (2.20), e tomando $C_0 = \max\{C_1, C_3\}$, obtemos

$$|F(s)| \leq C_0 |s|^q (e^{\alpha s^2} - 1), \quad (2.21)$$

para todo $|s| \geq \delta_\varepsilon$. Daí, por (2.17) e (2.21), segue para cada $s \in \mathbb{R}$ e $q > 2$ que

$$|F(s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} |s|^2 + C_0 |s|^q (e^{\alpha s^2} - 1). \quad (2.22)$$

Agora usando (2.22), temos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} |F(u)|dx - \|h\|_* \|u\| \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx - C_0 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\alpha u^2} - 1) dx - \|h\|_* \|u\|, \end{aligned}$$

e pelo Lema 2.3

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} \|u\|_2^2 - C\|u\|^q - \|h\|_* \|u\| \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} \left(\frac{\|u\|_2^2}{\|u\|^2} \right) \|u\|^2 - C\|u\|^q - \|h\|_* \|u\|. \end{aligned}$$

Pela definição de λ_1 em (2.3),

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - C\|u\|^q - \|h\|_* \|u\| \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1} \right] \|u\|^2 - C\|u\|^q - \|h\|_* \|u\|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$I(u) \geq \|u\| \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1} \right] \|u\| - C\|u\|^{q-1} - \|h\|_* \right\}. \quad (2.23)$$

Como $\varepsilon > 0$ e $q > 2$, podemos escolher $\rho > 0$ de forma que,

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1} \right] \rho - C\rho^{q-1} > 0.$$

Assim, para $\|h\|_*$ suficientemente pequeno, existe $\rho_h > 0$ tal que

$$I(u) > 0 \quad \text{se} \quad \|u\| = \rho_h$$

e mais,

$$\rho_h \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \|h\|_* \rightarrow 0.$$

■

Lema 2.5. *Suponha que (f_1) é satisfeita. Então, existe $e \in E$ com $\|e\| > \rho_h$ tal que $I(e) < \inf_{\|u\|=\rho_h} I(u)$.*

Prova: Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $u \geq 0$ e

$$u = \begin{cases} s_1, & \text{se } u \in B(0, 1) \\ 0, & \text{se } u \in B^c(0, 2) \end{cases}$$

Denotando $K = \text{supp}(u)$, por (2.4) e $t > 1$, temos que

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{1}{2} \|tu\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(tu) dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(tu) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - C_1 t^\theta \int_{\{x; t|u(x)| \geq s_1\}} |u|^\theta dx - C_2 \int_K dx - t \int_{\mathbb{R}^2} h u dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - C_1 t^\theta \int_{\{x; t|u(x)| \geq s_1\}} |u|^\theta dx - C_2 |K| - t \int_{\mathbb{R}^2} h u dx. \end{aligned}$$

Desde que $\theta > 2$, obtemos

$$I(tu) \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Fixando $e = tu$ com t suficientemente grande, concluímos a prova. $\blacksquare$

Afim de usar minimização próximo a origem de E , precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.6. *Suponha (2.2) satisfeita. Então, existem $\eta > 0$ e $v \in E$ com $\|v\| = 1$ tais que $I(tv) < 0$, para todo $0 < t < \eta$. Em particular, $\inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0$.*

Prova: Primeiramente, afirmamos que o problema

$$-\Delta v + V(x)v = h, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad h \neq 0 \quad (2.25)$$

tem uma única solução fraca $v \in E$. De fato, note que $v \in E$ será solução fraca de (2.25) se,

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx$$

for satisfeita para todo $\varphi \in E$. Consideremos

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx, \end{aligned}$$

de forma que $g \in E^*$. Donde pelo Teorema de Representação de Riesz, existe $v \in E$ tal que

$$\langle v, \varphi \rangle = g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx, \quad \varphi \in E,$$

provando a afirmação. Agora, tomando $\varphi = v$, temos que $v \in E$ é solução fraca de (2.25), e mais,

$$\int_{\mathbb{R}^2} h v dx = \|v\|^2 > 0. \quad (2.26)$$

Desde que $f(0) = 0$, afirmamos que existe $\eta > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}I(tv) = t\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(tv)v dx - \int_{\mathbb{R}^2} hvd x < 0, \quad \forall t \in (0, \eta).$$

Com efeito, note que $t_nv(x)$ converge pontualmente para 0, quando $t_n \rightarrow 0$ e pela continuidade de f , temos

$$f(t_nv(x))v(x) \rightarrow 0, \quad \text{quando } t_n \rightarrow 0.$$

Como $|t_n| \leq C_0$, tem-se que $|t_nv| \leq C_1|v|$. Daí, por (2.16)

$$\begin{aligned} |f(t_nv(x))v(x)| &\leq \left[C_1|t_nv(x)| + C_2 \left(e^{\alpha|t_nv(x)|^2} - 1 \right) \right] |v(x)| \\ &= C_1C_0|v(x)|^2 + C_2 \left(e^{\alpha C_0^2|v(x)|^2} - 1 \right) |v(x)| = G(x). \end{aligned}$$

Notemos que pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha C_0^2|v(x)|^2} - 1 \right) |v(x)| dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha C_0^2|v(x)|^2} - 1 \right)^2 dx \right]^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Desde que $v \in E$, usando os Lemas 2.1 e 2.2, obtemos

$$\left(e^{\alpha C_0^2|v(x)|^2} - 1 \right) |v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Logo, $G(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(t_nv(x))v(x) dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } t_n \rightarrow 0.$$

Consequentemente, $\frac{d}{dt}I(tv) < 0$ quando $t > 0$ é suficientemente pequeno. Agora, usando que $I(0) = 0$, concluímos que $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$, onde η é uma constante pequena. ■

O próximo Lema fornece algumas propriedades sobre as sequências de Palais-Smale para o funcional I .

Lema 2.7. *Suponha (f_1) e (2.2). Seja $(u_n) \in E$ tal que $I(u_n) \rightarrow c$ e $I'(u_n) \rightarrow 0$. Então,*

$$\|u_n\| \leq C, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n dx \right| \leq C \quad e \quad \left| \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx \right| \leq C.$$

Prova: Como $I(u_n) \rightarrow c$ e $I'(u_n) \rightarrow 0$, temos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx = c + o_n(1) \quad (2.27)$$

e para qualquer $\varphi \in E$,

$$\langle u_n, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx = o_n(\|\varphi\|). \quad (2.28)$$

Daí, multiplicando (2.27) por θ , fazendo a diferença com (2.28) e tomando $\varphi = u_n$, temos

$$\begin{aligned} C_0 + \xi_n \|u_n\| &= \frac{\theta}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \theta F(u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \theta h u_n dx - \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n dx + \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx \\ &= \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} [\theta F(u_n) - f(u_n) u_n] dx - (\theta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx. \end{aligned}$$

O que implica,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} [\theta F(u_n) - f(u_n) u_n] dx &= C_0 + \xi_n \|u_n\| + (\theta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx \\ &\leq C_0 + \xi_n \|u_n\| + (\theta - 1) \left| \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx \right| \\ &\leq C_0 + \xi_n \|u_n\| + (\theta - 1) \|h\|_* \|u_n\| \end{aligned}$$

Para $\|h\|_*$ suficientemente pequeno, segue que

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} [\theta F(u_n) - f(u_n) u_n] dx = C_0 + (\xi_n + 1) \|u_n\|.$$

Por (f_1) , temos que

$$- \int_{\mathbb{R}^2} [\theta F(u_n) - f(u_n) u_n] dx \geq - \int_{\{x_i; |u_n(x)| < s_1\}} [\theta F(u_n) - f(u_n) u_n] dx.$$

Assim,

$$C_0 + (\xi_n + 1) \|u_n\| \geq \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|u_n\|^2 - \int_{\{x_i; |u_n(x)| < s_1\}} [\theta F(u_n) - f(u_n) u_n] dx,$$

onde $\xi_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Usando que $|f(s)s - F(s)| \leq C_1|s|$, para todo $|s| \leq s_1$ e a imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, para todo $q \geq 1$ (ver Lema 1.1), obtemos

$$C_0 + (\xi_n + 1) \|u_n\| \geq \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|u_n\|^2 - C_1 \|u_n\|_1 \geq \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \|u_n\|^2 - C_2 \|u_n\|. \quad (2.29)$$

O que implica, $\|u_n\| \leq C_0$, pois do contrário, por (2.29), teríamos

$$C_0 \geq \|u_n\| \left[\|u_n\| - C_2 - (\xi_n + 1) \right] \rightarrow \infty,$$

o que é um absurdo.

Agora como $I'(u_n) \rightarrow 0$, para $\varepsilon > 0$, temos que

$$|I'(u_n)| = \left| \langle u_n, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx \right| \leq \varepsilon.$$

Mas,

$$\left| \langle u_n, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx \right| \geq \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx \right| - \left| \langle u_n, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx \right|.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n dx \right| &\leq \varepsilon + |\langle u_n, u_n \rangle| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx \right| \\ &\leq \varepsilon + \|u_n\|^2 + \|h\|_* \|u_n\| \\ &\leq \varepsilon + C_0^2 + \|h\|_* C_0 = C_3. \end{aligned}$$

Por fim, como $I(u_n) \rightarrow c$, para $\delta > 0$, temos que

$$\left| I(u_n) - c \right| = \left| \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx - c \right| \leq \delta.$$

Porém,

$$\left| \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx - c \right| \geq \left| \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx \right| - \left| \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx - c \right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx \right| &\leq \delta + \frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \left| \int_{\mathbb{R}^2} h u_n dx \right| + c \\ &\leq \delta + \frac{1}{2} C_0^2 + \|h\|_* \|u_n\| + c \\ &\leq \delta + \frac{1}{2} C_0^2 + C_0 \|h\|_* + c = C_4. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C = \max\{C_0, C_3, C_4\}$, concluímos que

$$\|u_n\| \leq C, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_n dx \right| \leq C \quad \text{e} \quad \left| \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n) dx \right| \leq C.$$

■

Lema 2.8. *Seja (u_n) uma sequência (PS) para I . Então, (u_n) possui uma subsequência, que denotaremos por (u_n) , tal que*

$$f(u_n) \rightarrow f(u), \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Prova: É suficiente provar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n)| dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)| dx.$$

Usando o Lema 2.7 temos que (u_n) é limitada em E , consequentemente, podemos supor $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E , e pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ (Ver Lema 1.1), temos que $u_n \rightarrow u$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$, para todo $q \geq 1$. Além disso, pelos Lemas 2.1 e 2.7, obtemos

$$f(u_n) \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad f(u) \in L^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) u_n| dx \leq C_1. \quad (2.30)$$

Desde que $|u|, f(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_A |u| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_A |f(u)|dx < \varepsilon, \quad \text{se} \quad |A| \leq \delta. \quad (2.31)$$

Em seguida usando que $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$, encontramos $M_1 > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^2; |u(x)| \geq M_1\}| \leq \delta. \quad (2.32)$$

Tomando $M = \max\{M_1, \frac{C_1}{\varepsilon}\}$, segue que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n)|dx - \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)|dx \right| \\ &= \left| \int_{|u_n| \geq M} |f(u_n)|dx + \int_{|u_n| < M} |f(u_n)|dx - \int_{|u| < M} |f(u)|dx - \int_{|u| \geq M} |f(u)|dx \right| \\ &\leq G_{1,n} + G_{2,n} + G_{3,n}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} G_{1,n} &= \int_{|u_n| \geq M} |f(u_n)|dx, \\ G_{2,n} &= \left| \int_{|u_n| < M} |f(u_n)|dx - \int_{|u| < M} |f(u)|dx \right| \end{aligned}$$

e

$$G_{3,n} = \int_{|u| \geq M} |f(u)|dx.$$

Estimaremos cada integral separadamente. Por (2.30), tem-se que

$$\begin{aligned} G_{1,n} &= \int_{|u_n| \geq M} \frac{|f(u_n)u_n|}{|u_n|}dx \leq \int_{|u_n| \geq M} \frac{|f(u_n)u_n|}{M}dx \\ &= \frac{1}{M} \int_{|u_n| \geq M} |f(u_n)u_n|dx \leq \frac{C_1}{M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora tomando $B = \{x \in \mathbb{R}^2; |u(x)| \geq M\}$, segue por (2.32) que $|B| \leq \delta$, e por (2.31), obtemos

$$G_{3,n} = \int_B |f(u)|dx \leq \varepsilon.$$

Por fim, afirmamos que $G_{2,n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, consideremos as seguintes funções características:

$$\mathcal{X}_{|u_n| < M} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_n \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus A_n \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_{|u| < M} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_0 \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus A_0 \end{cases},$$

onde $A_n = \{x \in \mathbb{R}^2; |u_n(x)| < M\}$ e $A_0 = \{x \in \mathbb{R}^2; |u(x)| < M\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} G_{2,n} &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{|u_n|<M} |f(u_n)| dx - \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{|u|<M} |f(u)| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{|u_n|<M} (|f(u_n)| - |f(u)|) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}) |f(u)| dx \right|. \end{aligned}$$

Agora por (f_2) e seguindo de forma análoga a feita para obter (2.12), existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_2 |s|, \quad \text{para todo } |s| < \delta. \quad (2.33)$$

Temos que $K = \{s \in \mathbb{R}; -M \leq s \leq -\delta \text{ ou } \delta \leq s \leq M\}$ é limitado e fechado, portanto, pela continuidade de f , existe $C_3 > 0$ tal que, para todo $s \in K$, segue que

$$|f(s)| \leq C_3.$$

Desta forma, podemos escolher $C_4 > 0$, tal que

$$|f(s)| \leq C_4 |s|, \quad \text{para todo } s \in K. \quad (2.34)$$

De (2.33) e (2.34), e tomando $C_0 = \max\{C_2, C_4\}$, tem-se

$$|f(s)| \leq C_0 |s|, \quad \text{para todo } |s| \leq M.$$

Daí, pela Imersão de E em $L^q(\mathbb{R}^2)$ (ver Lema 1.1) e o Teorema A.6, a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n \rightarrow u$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e $|u_n| \leq g_0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, para $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| |f(u_n)| - |f(u)| \right| &\leq |f(u_n)| + |f(u)| \leq C_5 |u_n| + C_6 |u| \\ &\leq C_5 g_0 + C_6 |u| \in L^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{X}_{|u_n| \leq M} (|f(u_n)| - |f(u)|) \rightarrow 0, \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{|u_n| \leq M} (|f(u_n)| - |f(u)|) dx \right| \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Além disso, para n suficientemente grande,

$$\{x \in \mathbb{R}^2; |u_n(x)| < M\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^2; |u(x)| < M\} \subset \{x \in \mathbb{R}^2; |u(x)| \geq M\}.$$

Portanto, por (2.32) e (2.31), para n grande, segue que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}) |f(u)| dx \right| \\
& \leq \int_{|u|<M} |\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}| |f(u)| dx + \int_{|u|\geq M} |\mathcal{X}_{|u_n|<M} - \mathcal{X}_{|u|<M}| |f(u)| dx \\
& = \int_{|u|\geq M} |f(u)| dx < \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Logo, de (2.35) e (2.36), concluímos a prova. $\blacksquare$

2.6 Prova dos principais resultados

Nesta seção apresentaremos a prova do Teorema 2.1, e para isso, assumiremos que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e f satisfaz (f_0) , (f_1) e (f_2) .

Afim de obter uma solução com energia negativa, observemos que se as condições (f_1) , (f_2) e (2.2) são satisfeitas, pelo Lema 2.6 e pela desigualdade (2.23), temos que

$$-\infty < c_0 \equiv \inf_{\|u\|\leq\eta} I(u) < 0. \tag{2.37}$$

Assim, para provarmos a existência de uma solução tipo minimo local usaremos o Principio Variacional de Ekeland.

Lema 2.9. *O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência (PS). Pelo Lema 2.7, (u_n) é limitado em E . Como E é um espaço de Hilbert, existe uma subsequência fracamente convergente, ou seja, $u_n \rightharpoonup u_0$ em E . Usando a imersão compacta $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ (ver Lema 1.1), temos que $u_n \rightarrow u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ e $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$.

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0) dx \rightarrow 0. \tag{2.38}$$

De fato, usando a desigualdade triangular e (2.16), para todo $\alpha > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
| [f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0) | & \leq |f(u_n) - f(u_0)| |u_n - u_0| \\
& \leq (|f(u_n)| + |f(u_0)|) |u_n - u_0| \\
& \leq \left[b_1 |u_n| + b_2 \left(e^{\alpha |u_n|^2} - 1 \right) + b_3 |u_0| + b_4 \left(e^{\alpha |u_0|^2} - 1 \right) \right] |u_n - u_0|.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} |[f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0)| &\leq C \left[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha|u_n|^2} - 1) + (e^{\alpha|u_0|^2} - 1) \right] |u_n - u_0| \\ &= G_n(x). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_n(x) dx \rightarrow 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} G_n(x) dx &= C \int_{\mathbb{R}^2} \left[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha|u_n|^2} - 1) + (e^{\alpha|u_0|^2} - 1) \right] |u_n - u_0| dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^2} \left[|u_n| |u_n - u_0| + |u_0| |u_n - u_0| + (e^{\alpha|u_n|^2} - 1) |u_n - u_0| + (e^{\alpha|u_0|^2} - 1) |u_n - u_0| \right] dx. \end{aligned}$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $q = \frac{p}{p-1}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_n(x) dx \leq C \left\{ \|u_n\|_2 \|u_n - u_0\|_2 + \|u_0\|_2 \|u_n - u_0\|_2 + G_{1,n} + G_{2,n} \right\},$$

onde,

$$G_{1,n} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u_n|^2} - 1)^p dx \right]^{1/p} \|u_n - u_0\|_q$$

e

$$G_{2,n} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u_0|^2} - 1)^p dx \right]^{1/p} \|u_n - u_0\|_q.$$

Fazendo uso da imersão contínua $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ (ver Lema 1.1),

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_n(x) dx \leq C \left\{ C_1 \|u_n\| \|u_n - u_0\|_2 + C_2 \|u_0\| \|u_n - u_0\|_2 + G_{1,n} + G_{2,n} \right\}. \quad (2.40)$$

Como (u_n) é uma sequência (PS), temos pela Imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ que $u_n \rightarrow u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$. Assim,

$$\|u_n\| \|u_n - u_0\|_2 \rightarrow 0, \quad \|u_0\| \|u_n - u_0\|_2 \rightarrow 0.$$

Agora pelo Lema 2.2 e escolhendo $\beta > p$, segue que

$$G_{1,n} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta|u_n|^2} - 1) dx \right]^{1/p} \|u_n - u_0\|_q \quad (2.41)$$

e

$$G_{2,n} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta|u_0|^2} - 1) dx \right]^{1/p} \|u_n - u_0\|_q. \quad (2.42)$$

Usando o Lema 2.1 em (2.42), obtemos

$$G_{2,n} \leq C_3 \|u_n - u_0\|_q \rightarrow 0.$$

Além disso,

$$\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha\beta|u_n|^2} - 1 \right) dx \right]^{1/p} \|u_n - u_0\|_q \rightarrow 0. \quad (2.43)$$

De fato, para $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{1,2}}$, temos que $\|v_n\| = 1$, com isso $\|\nabla v_n\|_2^2 \leq 1$ e $\|v_n\|_2^2 \leq 1$. Como f tem crescimento subcrítico, u_n é limitada em E e usando a imersão contínua $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ (ver Lema 1.1) e tomando α suficientemente pequeno, obtemos que

$$\alpha\beta\|u_n\|_{1,2}^2 \leq \alpha\beta C_4\|u_n\|^2 \leq \alpha\beta C_5 < 4\pi.$$

Portanto, pelo Lema 2.1, existe C_0 tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha\beta u_n^2} - 1 \right) \leq C_0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma,

$$\left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha\beta\|u_n\|_{1,2}^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{1,2}} \right)^2} - 1 \right) dx \right]^{1/p} \|u_n - u_0\|_q \rightarrow 0.$$

Donde segue (2.43). Consequentemente, por (2.41), tem-se

$$G_{1,n} \rightarrow 0.$$

Logo, por (2.40), mostramos que $G_n(x) \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$. Assim de (2.39), temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |[f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0)| dx \rightarrow 0$$

e por consequência, obtemos (2.38).

Agora temos que

$$\begin{aligned} |\langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle| &= |\langle I'(u_n), u_n \rangle - \langle I'(u_n), u_0 \rangle - \langle I'(u_0), u_n - u_0 \rangle| \\ &\leq |\langle I'(u_n), u_n \rangle| + |\langle I'(u_n), u_0 \rangle| + |\langle I'(u_0), u_n - u_0 \rangle|. \end{aligned}$$

Daí, usando a desigualdade de Schwarz e a limitação de (u_n) em E , temos

$$\begin{aligned} |\langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle| &= \|I'(u_n)\|_* \|u_n\| + \|I'(u_n)\|_* \|u_0\| + |\langle I'(u_0), u_n - u_0 \rangle| \\ &\leq K \|I'(u_n)\|_* + \|I'(u_n)\|_* \|u_0\| + |\langle I'(u_0), u_n - u_0 \rangle|. \end{aligned}$$

Como $I'(u_n) \rightarrow 0$ e $u_n \rightharpoonup u_0$ em E , segue que

$$\langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle \rightarrow 0. \quad (2.44)$$

Pela definição da derivada do funcional em (2.11),

$$\langle I'(u_n), u_n - u_0 \rangle = \langle u_n, u_n - u_0 \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u_0)dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_n - u_0)dx \quad (2.45)$$

e

$$\langle I'(u_0), u_n - u_0 \rangle = \langle u_0, u_n - u_0 \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)(u_n - u_0)dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_n - u_0)dx. \quad (2.46)$$

Fazendo a diferença entre (2.45) e (2.46), temos

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle &= \langle u_n - u_0, u_n - u_0 \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0)dx \\ &= \|u_n - u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0)dx. \end{aligned}$$

O que implica,

$$\|u_n - u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} [f(u_n) - f(u_0)](u_n - u_0)dx + \langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle.$$

Portanto, por (2.38) e (2.44), concluímos que $u_n \rightarrow u_0$ em E , e desta maneira, segue o resultado. ■

Agora, enunciaremos e provaremos dois resultados importantes para a prova do Teorema 2.1.

Proposição 2.1. *Existe $\eta_1 > 0$ tal que se $\|h\|_* \leq \eta_1$, então o funcional I possui um ponto crítico u_M no nível minimax*

$$c_M = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], E); g(0) = 0, I(g(1)) < 0\}.$$

Prova: Utilizando os Lemas 2.4 e 2.5, e aplicando o Teorema do Passo da Montanha segue o resultado. ■

Proposição 2.2. *Para cada $h \in E^*$ com $h \neq 0$, o problema (2.1) possui uma solução do tipo mínimo local u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$, onde c_0 é definido em (2.37).*

Prova: Seja ρ_h definido no Lema 2.4. Desde que $\bar{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma de E , convexo e o funcional I é de classe C^1 e limitado

inferiormente em $\bar{B}_{\rho_h}$, pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe uma sequência (u_n) em $\bar{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c_0 = \inf_{\|u\| \leq \rho_h} I(u) < 0, \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

e a prova segue pelo Lema 2.9. ■

Prova do Teorema 2.1: A prova segue das Proposições 2.1 e 2.2. ■

Observação 2.3. *Para a prova do Teorema 2.2 será necessário redefinirmos f , então para evitarmos qualquer confusão, a prova será feita no final do Capítulo 3 na Subseção 3.5.1.*

Capítulo 3

Existência e multiplicidade de soluções: Caso Crítico

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para o caso crítico do problema (2.1), ou seja,

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

com o termo não-linear $f(s)$ possuindo crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser, o qual definimos a seguir:

Definição 3.1. Dizemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento crítico em $+\infty$, se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \forall \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \forall \alpha < \alpha_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Agora relembremos as hipóteses sobre o termo não-linear apresentadas no Capítulo 2:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(f_1) Existe $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geq s_1$,

$$0 < \theta F(s) = \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s);$$

$$(f_2) \quad 0 \leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1, \text{ onde } \lambda_1 \text{ foi dado em (2.3).}$$

Além destas hipóteses assumiremos a seguinte condição:

$$(f_3) \quad \text{Existem constantes } M_0, R_0 > 0 \text{ tal que para todo } |s| \geq R_0,$$

$$0 < F(s) \leq M_0 |f(s)|;$$

Observação 3.1. *A hipótese (f_3) é necessária para garantir a multiplicidade de solução no caso crítico.*

Continuaremos a considerar, neste capítulo, o subespaço E definido no Capítulo 1.

3.2 Resultados Principais

Neste capítulo temos o interesse de encontrar condições suficientes que garantam a existência e multiplicidade de solução para o Problema (2.1) no caso Crítico.

Para o caso em que $f(s)$ possui crescimento crítico obtemos os seguintes resultados.

Teorema 3.1. *Se $f(s)$ tem crescimento crítico e as condições $(V_1) - (V_2)$, (f_0) , (f_2) e (f_3) são satisfeitas, então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_* < \delta_1$, o problema (2.1) possui uma solução com energia negativa em E .*

Teorema 3.2. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, se admitimos que existe $\beta_0 > 0$ tal que*

$$(f_4^+) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sf(s)}{e^{\alpha_0 s^2}} \geq \beta_0 > 0.$$

Então existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_ < \delta_2$, o problema (2.1) possui uma segunda solução fraca em E .*

Além disso, se o sinal de $h(x)$ estiver definido, os seguintes resultados são válidos.

Teorema 3.3. *Sob as hipóteses do Teorema 3.2, se $h(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então as soluções obtidas no Teorema 3.2 são não negativas. Além disso, se $h(x) \leq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e $f(s)$ satisfaz*

$$(f_4^-) \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{sf(s)}{e^{\alpha_0 s^2}} \geq \beta_0 > 0,$$

então estas soluções são não positivas.

Exemplo 3.1. Um exemplo típico de funções que satisfazem as condições (f_2) , (f_3) , (f_4^+) e (f_4^-) com crescimento crítico é $f(s) = 3s^2 + 2se^{s^2} - 2s$. De fato, para provar que a condição (f_3) é satisfeita é suficiente observarmos que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{f(s)} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{s^3 + e^{s^2} - 1 - s^2}{3s^2 + 2se^{s^2} - 2s} = 0.$$

Além disso, é fácil ver que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0 < \lambda_1$ e $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{sf(s)}{e^{s^2}} = \infty$, mostrando que (f_2) e (f_4^+) são satisfeitas.

Observação 3.2. Notemos que a condição (f_3) é mais forte que (f_1) , no sentido que (f_3) implica (f_1) .

De fato, por (f_3) existem constantes $M, R > 0$, tais que

$$F(s) \leq M|f(s)|, \quad \text{para todo } |s| \geq R.$$

Tomando $\theta > 2$, obtemos

$$\theta F(s) \leq \theta M|f(s)|, \quad \text{para todo } |s| \geq R.$$

Logo,

$$sf(s) \geq \theta M|f(s)| \geq \theta F(s), \quad \text{para todo } |s| \geq R_0.$$

onde $R_0 = \max\{R, \theta M\}$.

Observação 3.3. Analogamente a Observação 2.1, obtemos que a condição (f_3) implica que existem constantes positivas C_3 e C_4 tais que

$$F(s) \geq C_3 e^{|s|/M} - C_4, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Observação 3.4. Se $h \geq 0$, temos que o problema

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda_1 u + 2ue^{u^2} + h(x), \quad u > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

não possui soluções positivas.

De fato, se considerarmos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(u) = \begin{cases} \lambda_1 u + 2ue^{u^2}, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0, \end{cases}$$

então $f(u)$ tem crescimento crítico com $\alpha_0 = 1$, pois para $\alpha > 1$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{e^{\alpha u^2}} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 u + 2ue^{u^2}}{e^{\alpha u^2}} = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 u}{e^{\alpha u^2}} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2u}{e^{(\alpha-1)u^2}} \right) \\ &= \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{2\alpha u e^{\alpha u^2}} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2}{2(\alpha-1)u e^{(\alpha-1)u^2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

Para $0 \leq \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{e^{\alpha u^2}} &= \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 u}{e^{\alpha u^2}} + \lim_{u \rightarrow \infty} 2ue^{(1-\alpha)u^2} \right) \\ &= \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{2\alpha u e^{\alpha u^2}} + \lim_{u \rightarrow \infty} 2ue^{(1-\alpha)u^2} \right) = \infty.\end{aligned}$$

Para $\alpha < 0$,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{e^{\alpha u^2}} = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \lambda_1 u e^{-\alpha u^2} + \lim_{u \rightarrow \infty} 2ue^{(1-\alpha)u^2} \right) = \infty.$$

Desta forma,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{e^{\alpha u^2}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Notemos que $\lambda_1 u$ não permite que esta função satisfaça a hipótese (f_2) .

Suponhamos que o seguinte problema

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda_1 u + 2ue^{u^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3)$$

tem uma solução positiva $u \in E$. Então, usando (V_1) e (V_2) , existe $\varphi_1 \in E$ com $\varphi_1 > 0$ tal que

$$-\Delta \varphi_1 + V(x)\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (3.4)$$

(para mais detalhes da existência de φ_1 ver [7]).

Multiplicando (3.3) por φ_1 e integrando, obtemos que

$$-\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u \varphi_1 + V(x)u \varphi_1) dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^2} u \varphi_1 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} ue^{u^2} \varphi_1 dx. \quad (3.5)$$

Usando integração por partes, temos que

$$-\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u \varphi_1 + V(x)u \varphi_1) dx = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla \varphi_1 + V(x)u \varphi_1) dx = - \int_{\mathbb{R}^2} (u \Delta \varphi_1 + V(x)u \varphi_1) dx.$$

Logo, a equação (3.5), pode ser escrita da seguinte forma

$$-\int_{\mathbb{R}^2} (u \Delta \varphi_1 + V(x)u \varphi_1) dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^2} u \varphi_1 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} ue^{u^2} \varphi_1 dx.$$

Fazendo uso de (3.4), temos

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^2} u \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^2} u \varphi_1 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} u e^{u^2} \varphi_1 dx.$$

O que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u e^{u^2} \varphi_1 dx = 0.$$

O que é uma contradição, pois $u > 0$ e $\varphi_1 > 0$. Portanto, a hipótese (f_2) é fundamental para obtermos o resultado de existência de soluções positivas.

3.3 Formulação Variacional

Para a Formulação Variacional do caso Crítico também serão validos os resultados apresentados na Seção 2.4 do Capítulo 2.

Além disso, se $f(s)$ satisfaz (3.1), então seguindo o mesmo raciocínio feito para obtermos (2.16), para cada $\alpha > \alpha_0$ existe $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq c_1 |s| + c_2 (e^{\alpha s^2} - 1), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

E mais, se $u \in E$, segue que $F(u)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$. De fato, por (f_1) , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u)| dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_0^u f(s) ds \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^u |f(s)| ds dx.$$

Mas, por (3.6), tem-se

$$\int_0^u |f(s)| ds \leq \int_0^u [C_1 |s| + C_2 (e^{\alpha s^2} - 1)] ds \leq C_1 |u|^2 + C_2 |u| (e^{\alpha u^2} - 1).$$

Como $u \in E$, então $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Usando a Observação 2.2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(u)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} [C_1 |u|^2 + C_2 (e^{\alpha u^2} - 1) |u|] dx < \infty.$$

Ou seja, $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

3.4 Geometria do Funcional

De maneira análoga ao estudo feito na Seção 2.5, além da substituição das hipóteses (f_1) por (f_3) , (2.2) por (3.1) e (2.16) por (3.6), obtemos que os resultados sobre a geometria do funcional I apresentados no Capítulo 2 também são válidos para o caso Crítico.

Agora enunciaremos e provaremos um Lema necessário para garantir a multiplicidade de solução do problema (2.1) no caso Crítico.

Lema 3.1. *Suponha que (f_2) , (f_3) e (3.1) satisfeitas. Se $(v_n) \subset E$ é uma sequência (PS) para I e u_0 é o seu limite fraco então, a menos de subsequência,*

$$F(v_n) \rightarrow F(u_0) \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Prova: Como consequência do Lema 2.8, temos

$$f(v_n) \rightarrow f(u_0), \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Assim, pelo Teorema A.6, existe $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$|f(v_n)| \leq g_1, \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^2. \quad (3.7)$$

Por outro lado, por (v_n) ser uma sequência (PS), segue do Lema 2.7, que (v_n) é limitada em E . Então, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup u_0$ em E , daí, pela Imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ (Ver Lema 1.1), $v_n \rightharpoonup u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$. Além disso, usando o Teorema A.6 existe $g_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$|v_n|^2 \leq g_2, \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^2. \quad (3.8)$$

Temos de (f_3) , que existem constantes $M_0, R_0 > 0$ tal que para todo $|s| \geq R_0$,

$$|F(s)| \leq M_0 f(s). \quad (3.9)$$

Por outro lado, usando (f_2) e seguindo de forma análoga a feita para obtermos (2.17), existem $C_1, \delta > 0$ tal que para todo $|s| \leq \delta$,

$$|F(s)| \leq C_1 |s|^2. \quad (3.10)$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\delta \leq R_0$. Como $A = \{s \in \mathbb{R}; |s| < \delta \text{ ou } |s| > R_0\}$ é aberto, temos que $K = \mathbb{R} \setminus A$ é compacto, e pela continuidade de F , podemos escolher $C_2 > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq C_2 |s|^2, \quad \text{para todo} \quad s \in K. \quad (3.11)$$

Logo, de (3.9), (3.10) e (3.11), obtemos

$$|F(v_n)| \leq C |v_n|^2 + M_0 |f(v_n)| = G_n,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$, onde por (3.7) e (3.8), tem-se que $G_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, segue que

$$F(v_n) \rightarrow F(u_0), \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^2).$$

■

3.5 Prova dos principais resultados

Substituindo a hipótese (2.2) por (3.1) temos que (2.37) também é válido, ou seja,

$$-\infty < c_0 \equiv \inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0.$$

Além disso, para o caso crítico, precisamos de mais informações a respeito do nível minimax obtido na Geometria do Teorema do Passo da Montanha. Para isto consideremos a sequência de funções de Moser:

$$\widetilde{M}_n(x, r) = (2\pi)^{-1/2} \begin{cases} (\log n)^{1/2}, & \text{se } |x| \leq \frac{r}{n}, \\ \frac{\log(r/|x|)}{(\log n)^{1/2}}, & \text{se } \frac{r}{n} \leq |x| \leq r, \\ 0, & \text{se } |x| \geq r. \end{cases}$$

Algumas Propriedades da Sequência de Funções $\widetilde{M}_n(x, r)$:

- (i) $\widetilde{M}_n(x, r) \in H^1(\mathbb{R}^2)$,
- (ii) $\text{supp}(\widetilde{M}_n(x, r)) = \overline{B}_r$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx = O(1/\log n)$, quando $n \rightarrow \infty$.
- (iv) $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx = 1$.

De fato,

(i) e (ii) Seguem da continuidade e da definição de $\widetilde{M}_n(x, r)$.

(iii) Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx = \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx + \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx \quad (3.12)$$

Para a primeira integral, temos

$$\int_{|x| \leq \frac{r}{n}} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx = (2\pi)^{-1} \log n \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} dx = \frac{r^2 \log n}{2n^2}.$$

Falta calcularmos a segunda integral,

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx = \frac{1}{2\pi \log n} \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \left[\log \left(\frac{r}{|x|} \right) \right]^2 dx, \quad (3.13)$$

então tomemos $\rho = |x|$. Como $x \in \mathbb{R}^2$, tem-se que $x_1 = \rho \cos \theta$ e $x_2 = \rho \sin \theta$. O que implica,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \rho} = \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = \rho \cos \theta.$$

Logo,

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho.$$

Então, usando coordenadas polares, tem-se

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \left[\log \left(\frac{r}{|x|} \right) \right]^2 dx = 2\pi \int_{\frac{r}{n}}^r \left[\log \left(\frac{r}{\rho} \right) \right]^2 \rho d\rho. \quad (3.14)$$

Para calcularmos (3.14) usaremos integração por partes. Seja

$$U_1 = \left[\log \left(\frac{r}{\rho} \right) \right]^2 \quad \text{e} \quad dV_1 = \rho d\rho,$$

então

$$dU_1 = -\frac{2 \log \left(\frac{r}{\rho} \right)}{\rho} d\rho \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{\rho^2}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r}{n}}^r \left[\log \left(\frac{r}{\rho} \right) \right]^2 \rho d\rho &= \frac{\rho^2}{2} \left[\log \left(\frac{r}{\rho} \right) \right]^2 \Big|_{\frac{r}{n}}^r + \int_{\frac{r}{n}}^r \rho \log \left(\frac{r}{\rho} \right) d\rho \\ &= -\frac{r^2 (\log n)^2}{2n^2} + \int_{\frac{r}{n}}^r \rho \log \left(\frac{r}{\rho} \right) d\rho. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Utilizando novamente a fórmula de integração por partes, com

$$U_2 = \log \left(\frac{r}{\rho} \right), \quad dV_2 = \rho d\rho, \quad dU_2 = -\frac{d\rho}{\rho}, \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{\rho^2}{2},$$

teremos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r}{n}}^r \rho \log \left(\frac{r}{\rho} \right) d\rho &= \frac{\rho^2}{2} \log \left(\frac{r}{\rho} \right) \Big|_{\frac{r}{n}}^r + \frac{1}{2} \int_{\frac{r}{n}}^r \rho d\rho = -\frac{r^2 \log n}{2n^2} + \frac{\rho^2}{4} \Big|_{\frac{r}{n}}^r \\ &= -\frac{r^2 \log n}{2n^2} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4n^2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.15), (3.14) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi \log n} \left\{ 2\pi \left[-\frac{r^2 (\log n)^2}{2n^2} - \frac{r^2 \log n}{2n^2} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4n^2} \right] \right\} \\ &= -\frac{r^2 \log n}{2n^2} - \frac{r^2}{2n^2} + \frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{4n^2 \log n}. \end{aligned}$$

Logo, por (3.12)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx &= \frac{r^2 \log n}{2n^2} - \frac{r^2 \log n}{2n^2} - \frac{r^2}{2n^2} + \frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{4n^2 \log n} \\ &= -\frac{r^2}{2n^2} + \frac{r^2}{4 \log n} - \frac{r^2}{4n^2 \log n} = O(1/\log n). \end{aligned}$$

(iv) Pela definição de $\widetilde{M}_n$, notemos que

$$\frac{\partial \widetilde{M}_n(x, r)}{\partial x_i} = \frac{1}{(2\pi)^{-1/2} (\log n)^{-1/2}} \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq \frac{r}{n} \\ \frac{x_i}{|x|^2}, & \text{se } \frac{r}{n} \leq |x| \leq r \\ 0, & \text{se } |x| \geq r. \end{cases}$$

Assim, para $\frac{r}{n} \leq |x| \leq r$, temos

$$\begin{aligned} |\nabla \widetilde{M}_n(x, r)|^2 &= \left[\frac{1}{(2\pi)^{1/2} (\log n)^{1/2}} \right]^2 \left[\left(\frac{x_1}{|x|^2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{|x|^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)(\log n)} \left(\frac{x_1^2}{|x|^4} + \frac{x_2^2}{|x|^4} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)(\log n)} \left(\frac{1}{|x|^2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla \widetilde{M}_n(x, r)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)(\log n)} \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \frac{1}{|x|^2} dx. \quad (3.16)$$

Usando novamente coordenadas polares, obtemos

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} \frac{1}{|x|^2} dx = 2\pi \int_{\frac{r}{n}}^r \frac{1}{\rho} d\rho = 2\pi \left[\log r - \log \left(\frac{r}{n} \right) \right] = 2\pi \log n.$$

Então, substituindo esta última estimativa em (3.16), segue que

$$\|\nabla \widetilde{M}_n\|^2 = 1.$$

Concluindo a demonstração das propriedades de $\widetilde{M}_n(x, r)$.

Agora consideremos $M_n(x, r) = \frac{\widetilde{M}_n(x, r)}{\|\widetilde{M}_n\|}$, com $\|M_n\| = 1$, e observemos que para $|x| \leq \frac{r}{n}$, temos

$$\begin{aligned} M_n^2(x, r) &= \frac{(2\pi)^{-1} \log n}{\|\widetilde{M}_n\|^2} = \frac{(2\pi)^{-1} \log n}{\|\widetilde{M}_n\|^2} - (2\pi)^{-1} \log n + (2\pi)^{-1} \log n \\ &= (2\pi)^{-1} \log n + (2\pi)^{-1} \log n \left(\frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$M_n^2(x, r) = (2\pi)^{-1} \log n + d_n, \quad \text{para todo } |x| \leq \frac{r}{n},$$

onde $d_n = (2\pi)^{-1} \log n \left(\frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|^2} - 1 \right)$. Usando (V_1) e as propriedades de $\widetilde{M}_n(x, r)$, notemos que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx + \int_{\overline{B}_r} V(x) |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx + \max_{x \in \overline{B}_r} V(x) \int_{\overline{B}_r} |\widetilde{M}_n(x, r)|^2 dx \\ &= 1 + O(1/\log n). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|\nabla \widetilde{M}_n\|_2^2 \leq \|\widetilde{M}_n\|^2 \leq 1 + O(1/\log n).$$

Então, passando o limite e fazendo uso do Teorema do Confronto, obtemos que $\|\widetilde{M}_n\| \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente,

$$\frac{d_n}{\log n} = (2\pi)^{-1} \left(\frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|^2} - 1 \right) \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Lema 3.2. *Suponha que as condições (f_2) , (f_3) e (f_4^+) são satisfeitas. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\max_{t \geq 0} \widetilde{I}(tM_n) < \frac{2\pi}{\alpha_0},$$

$$\text{onde } \widetilde{I}(tM_n) = \left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) dx \right].$$

Prova: Fixemos $r > 0$ tal que

$$\beta_0 > \frac{4}{r^2 \alpha_0 (1 + e^{-r^2/2})}, \quad (3.18)$$

onde β_0 é dado em (f_4^+) . Suponha, por contradição, que para todo n temos

$$\max_{t \geq 0} \widetilde{I}(tM_n) = \max_{t \geq 0} \left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) dx \right] \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}, \quad (3.19)$$

onde $M_n = M_n(x, r)$. Tendo em vista a desigualdade (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)dx &= \int_{\{tM_n < s_1\}} F(tM_n)dx + \int_{\{tM_n \geq s_1\}} F(tM_n)dx \\ &\geq C_1 \int_{\{tM_n < s_1\}} e^{|tM_n|/M} dx - C_2 \int_{\{tM_n < s_1\}} dx + \int_{\{tM_n \geq s_1\}} F(tM_n)dx. \end{aligned}$$

Como toda função contínua definida num compacto é limitada e M_n tem suporte compacto, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)dx \geq -C_3 + \int_{\{tM_n \geq s_1\}} F(tM_n)dx.$$

Novamente por (3.2), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)dx &\geq -C_3 + C_4 \int_{\{tM_n \geq s_1\}} e^{|tM_n|/M} dx - C_5 \int_{\{tM_n \geq s_1\}} dx \\ &\geq -C_3 - C_6 + C_4 \int_{\{tM_n \geq s_1\}} e^{|tM_n|/M} dx \\ &= -C_7 + C_4 \int_{\{tM_n \geq s_1\}} e^{|tM_n|/M} dx. \end{aligned}$$

Donde para $t > 0$ suficientemente grande e $m > 2$, temos

$$\int_{\{tM_n \geq s_1\}} e^{tM_n/M} dx \geq \int_{\{tM_n \geq s_1\}} C_8 t^m (M_n)^m dx = C_8 t^m \int_{\{tM_n \geq s_1\}} (M_n)^m dx \geq C_8 t^m \int_{\{M_n \geq s_1\}} (M_n)^m dx.$$

Assim,

$$\tilde{I}(tM_n) \leq \frac{t^2}{2} + C_7 - C_8 t^m \int_{\mathbb{R}^2} M_n dx \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Então, para cada n , existe s_n tal que

$$\tilde{I}(tM_n) < 0, \quad \text{para todo } t > s_n.$$

Agora, considerando o intervalo compacto $[0, s_n]$ e usando a continuidade do funcional $\tilde{I}$, segue pelo Teorema de Weierstrass que, para cada n , existe $t_n > 0$, tal que

$$\frac{t_n^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(t_n M_n) dx = \max_{t \geq 0} \left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(t M_n) dx \right]. \quad (3.20)$$

Desta forma para $t = t_n$, tem-se que

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(t M_n) dx \right) \right|_{t=t_n} = 0.$$

O que implica,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t_n^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) dx \right),$$

isto é,

$$t_n = \int_{\mathbb{R}^2} M_n f(t_n M_n) dx.$$

Multiplicando ambos os lados por t_n , tem-se

$$t_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (t_n M_n) f(t_n M_n) dx.$$

Além disso, desde que $\text{supp}(M_n) = \bar{B}_r$, segue que

$$\begin{aligned} t_n^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (t_n M_n) f(t_n M_n) dx = \int_{|x| \leq r} (t_n M_n) f(t_n M_n) dx + \int_{|x| > r} (t_n M_n) f(t_n M_n) dx \\ &= \int_{|x| \leq r} (t_n M_n) f(t_n M_n) dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pela hipótese (f_4^+) , temos para cada $\varepsilon > 0$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{uf(u)}{e^{\alpha_0 u^2}} - L \leq \left| \frac{uf(u)}{e^{\alpha_0 u^2}} - L \right| \leq \varepsilon, \quad \text{sempre que } |x| \geq R_\varepsilon,$$

onde $L = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{uf(u)}{e^{\alpha_0 u^2}}$. Assim,

$$\frac{uf(u)}{e^{\alpha_0 u^2}} \geq L - \varepsilon \geq \beta_0 - \varepsilon.$$

Disto segue que

$$uf(u) \geq (\beta_0 - \varepsilon) e^{\alpha_0 u^2}, \quad \text{para todo } u \geq R_\varepsilon \text{ e } |x| \leq r. \quad (3.22)$$

Por (3.21), (3.22) e para n grande, obtemos

$$t_n^2 \geq (\beta_0 - \varepsilon) \int_{|x| \leq r} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2} dx \geq (\beta_0 - \varepsilon) \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2} dx.$$

Como $M_n^2 = (2\pi)^{-1} \log n + d_n$, temos

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq (\beta_0 - \varepsilon) e^{\alpha_0 t_n^2 (2\pi)^{-1} \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n} \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} dx \\ &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi \left(\frac{r}{n} \right)^2 e^{\alpha_0 (2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 1 &\geq (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 \frac{e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n}}{n^2 t_n^2} \\
 &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 \frac{e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n}}{e^{\log(n^2 t_n^2)}} \\
 &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n - \log(n^2 t_n^2)}.
 \end{aligned}$$

Fazendo uso das propriedades de logaritmos, teremos

$$\begin{aligned}
 1 &\geq (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n - \log n^2 - \log t_n^2} \\
 &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n - 2 \log n - 2 \log t_n}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Consequentemente, (t_n) é limitada, pois do contrário teríamos, por (3.24), uma contradição.

Afirmamos que,

$$t_n^2 \rightarrow \frac{4\pi}{\alpha_0}. \tag{3.25}$$

De fato, a condição (f_1) juntamente com (3.19) e (3.20) implicam que

$$\frac{t_n^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(t_n M_n) dx = \max_{t \geq 0} \left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(t M_n) dx \right] \geq \frac{2\pi}{\alpha_0},$$

ou seja,

$$\frac{t_n^2}{2} \geq \frac{2\pi}{\alpha_0} + \int_{\mathbb{R}^2} F(t_n M_n) dx \geq \frac{2\pi}{\alpha_0} + \int_{\{t_n M_n \leq s_1\}} F(t_n M_n) dx. \tag{3.26}$$

Por outro lado, por (2.17), existe $\delta > 0$ tal que $|F(s)| \leq C_9 |s|^2$ para todo $|s| < \delta$. Então, notemos que $A = \{s \in \mathbb{R}; |s| < \delta \text{ ou } |s| > s_1\}$ é aberto, e desta forma, $K = \mathbb{R} \setminus A$ é compacto e pela continuidade de F , existe $C_{10} > 0$ tal que $|F(s)| \leq C_{10}$. Daí, para C_{11} suficientemente grande, teremos

$$|F(s)| \leq C_{11} |s|^2, \quad \text{para todo } s \in K.$$

Assim, tomando $C_0 = \max\{C_9, C_{11}\}$, obtemos

$$|F(s)| \leq C_0 |s|^2, \quad \text{para todo } |s| \leq s_1. \tag{3.27}$$

Usando (3.27) e que (t_n) é limitado, obtemos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\{t_n M_n \leq s_1\}} F(t_n M_n) dx \right| &\leq \int_{\{t_n M_n \leq s_1\}} |F(t_n M_n)| dx \leq C \int_{\{t_n M_n \leq s_1\}} M_n^2 dx \\
 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} M_n^2 dx = C \frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{M}_n^2 dx.
 \end{aligned}$$

Sabendo que $\|\widetilde{M}_n\| \rightarrow 1$ e fazendo uso das propriedades de $\widetilde{M}_n(x, r)$, segue

$$\int_{\{t_n M_n \leq s_1\}} F(t_n M_n) dx \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Consequentemente, de (3.26) e (3.28), tem-se

$$t_n^2 \geq \frac{4\pi}{\alpha_0} + o_n(1).$$

Agora suponha, por contradição, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 > \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

Por (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 \left(\frac{e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n}}{e^{\log n^2}} \right) \\ &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n - \log n^2}. \end{aligned}$$

Pelas propriedades do logaritmo, tem-se

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1} t_n^2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n - 2 \log n} \\ &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{[\alpha_0(4\pi)^{-1} t_n^2 - 1] 2 \log n + \alpha_0 t_n^2 d_n}, \end{aligned}$$

que juntamente com (3.17), contraria a limitação de (t_n) e assim segue (3.25).

Para estimar (3.21), consideremos os conjuntos (ver (3.21) e (3.22))

$$A_n = \{x \in B_r; t_n M_n \geq R_\varepsilon\} \quad \text{e} \quad C_n = B_r \setminus A_n.$$

De (3.21) e (3.22), conseguimos

$$\begin{aligned} t_n^2 &= \int_{A_n} t_n M_n f(t_n M_n) dx + \int_{C_n} t_n M_n f(t_n M_n) dx \\ &\geq (\beta_0 - \varepsilon) \int_{A_n} e^{\alpha_0(t_n M_n)^2} dx + \int_{C_n} t_n M_n f(t_n M_n) dx \\ &= (\beta_0 - \varepsilon) \int_{B_r} e^{\alpha_0(t_n M_n)^2} dx - (\beta_0 - \varepsilon) \int_{C_n} e^{\alpha_0(t_n M_n)^2} dx + \int_{C_n} t_n M_n f(t_n M_n) dx. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Notemos que $\chi_{C_n} \rightarrow 1$ para quase todo x tal que $|x| \leq r$, onde

$$\chi_{C_n} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in B_r \setminus C_n \\ 1, & \text{se } x \in C_n \end{cases}$$

é a função característica. Notemos ainda que $M_n(x) \rightarrow 0$, pois $M_n(x, r) = \frac{\widetilde{M}_n(x, r)}{\|\widetilde{M}_n\|}$ e $\|\widetilde{M}_n\| \rightarrow 1$. Portanto,

$$\int_{C_n} t_n M_n f(t_n M_n) dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{C_n} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2} dx \rightarrow \pi r^2. \quad (3.30)$$

Com efeito, como $C_n = \{x \in B_r; t_n M_n < R_\varepsilon\}$, então $t_n M_n \rightarrow 0$ e por f ser contínua, segue que $t_n M_n f(t_n M_n(x)) \rightarrow 0$, e mais, obtemos que $e^{\alpha_0 (t_n M_n(x))^2} \rightarrow 1$. Além disso,

$$|t_n M_n f(t_n M_n)| \leq k R_\varepsilon \quad \text{e} \quad |e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2}| \leq e^{\alpha_0 R_\varepsilon^2}.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue (3.30).

Agora, usando que $t_n^2 \geq \frac{4\pi}{\alpha_0}$, temos também que

$$\int_{|x| \leq r} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2} dx \geq \int_{|x| \leq r} e^{4\pi M_n^2} dx = \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{4\pi M_n^2} dx + \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{4\pi M_n^2} dx. \quad (3.31)$$

Para a primeira integral em (3.31), observemos que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{4\pi M_n^2} dx &= \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{4\pi[(2\pi)^{-1} \log n + d_n]} dx = \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{2 \log n + 4\pi d_n} dx \\ &= e^{2 \log n + 4\pi d_n} \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} dx = \pi \left(\frac{r}{n}\right)^2 e^{2 \log n + 4\pi d_n}, \end{aligned}$$

donde por um cálculo simples, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{4\pi M_n^2} dx &= \pi \left(\frac{r^2}{n^2}\right) e^{\log n [2 + 4\pi(d_n / \log n)]} = \pi \left(\frac{r^2}{n^2}\right) n^{[2 + 4\pi(d_n / \log n)]} \\ &= \pi \left(\frac{r^2}{n^2}\right) n^2 n^{4\pi(d_n / \log n)} = \pi r^2 n^{4\pi(d_n / \log n)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Notemos que,

$$n^{4\pi(d_n / \log n)} \rightarrow e^{-r^2/2}. \quad (3.33)$$

De fato, pela definição de d_n , temos que

$$\frac{d_n}{\log n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|^2} - 1 \right)$$

e como $\|M_n\|^2 = 1 + O(1/\log n)$, obtemos

$$\frac{d_n}{\log n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - \|\widetilde{M}_n\|^2}{\|\widetilde{M}_n\|^2} \right) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{O(1/\log n)}{1 + O(1/\log n)}.$$

Mas pelas propriedades de $\widetilde{M}_n(x, r)$, vimos que

$$\begin{aligned} O(1/\log n) &= -\frac{r^2}{2n^2} + \frac{r^2}{4\log n} - \frac{r^2}{4n^2\log n} \\ &= \frac{1}{\log n} \left[-\frac{r^2\log n}{2n^2} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4n^2} \right] \\ &= \frac{1}{\log n} \epsilon_n, \end{aligned}$$

onde $\epsilon_n \rightarrow \frac{r^2}{4}$. Daí,

$$y_n = n^{4\pi \frac{d_n}{\log n}} = n^{-4\pi(2\pi)^{-1}\{O(1/\log n)/[1+O(1/\log n)]\}} = n^{-(2/\log n)\epsilon_n/[1+O(1/\log n)]},$$

então, aplicando o logaritmo na base e , teremos

$$\begin{aligned} \log y_n &= \log n^{-(2/\log n)\epsilon_n/[1+O(1/\log n)]} \\ &= -\frac{2}{\log n} \cdot \frac{\epsilon_n}{1+O(1/\log n)} \cdot \log n \\ &= -2 \cdot \frac{\epsilon_n}{1+O(1/\log n)}. \end{aligned}$$

O que implica,

$$y_n = e^{-2\epsilon_n/[1+O(1/\log n)]}.$$

Logo, segue (3.33) e por (3.32), temos

$$\int_{|x| \leq \frac{r}{n}} e^{4\pi M_n^2} dx \longrightarrow \pi r^2 e^{-r^2/2}.$$

Para a segunda integral, observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{4\pi M_n^2} dx &= \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{4\pi(2\pi)^{-1} \frac{\log^2\left(\frac{r}{|x|}\right)}{\|\widetilde{M}_n\|^2 \log n}} dx \\ &= \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{2\log n \frac{\log^2\left(\frac{r}{|x|}\right)}{\|\widetilde{M}_n\|^2 \log^2 n}} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\rho = |x|$, temos então que $J(\rho, \theta) = \rho$. Assim,

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{4\pi M_n^2} dx = 2\pi \int_{\frac{r}{n}}^r e^{2\log n \left[\frac{\log\left(\frac{r}{\rho}\right)}{\|\widetilde{M}_n\| \log n} \right]^2} \rho d\rho. \quad (3.34)$$

Para calcularmos (3.34), tomemos $\tau = \frac{\log\left(\frac{r}{\rho}\right)}{\gamma_n \log n}$, com $\gamma_n = \|\widetilde{M}_n\| > 1$, então

$$d\rho = -\rho \gamma_n \log n d\tau, \quad \rho = r e^{-\tau \gamma_n \log n} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{cases} \gamma_n^{-1}, & \text{se } \rho = \frac{r}{n} \\ 0, & \text{se } \rho = r \end{cases}.$$

Logo, voltando para (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{4\pi M_n^2} dx &= 2\pi \left[- \int_{\gamma_n^{-1}}^0 \rho^2 \gamma_n \log n e^{2\tau^2 \log n} d\tau \right] \\
 &= 2\pi \gamma_n \log n \int_0^{\gamma_n^{-1}} r^2 e^{-2\tau \gamma_n \log n} e^{2\tau^2 \log n} d\tau \\
 &= 2\pi r^2 \gamma_n \log n \int_0^{\gamma_n^{-1}} e^{2 \log n (\tau^2 - \tau \gamma_n)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Usando o Lema B.1, segue que

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x| \leq r} e^{4\pi M_n^2} dx \longrightarrow 2\pi r^2.$$

Finalmente, tomando $n \rightarrow \infty$ em (3.29) e usando (3.25), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{\alpha_0} &\geq (\beta_0 - \varepsilon) \left[\pi r^2 e^{-r^2/2} + 2\pi r^2 \right] - (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 \\
 &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 e^{-r^2/2} + 2(\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 - (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 \\
 &= (\beta_0 - \varepsilon) \pi r^2 \left(e^{-r^2/2} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Assim, concluindo que

$$\beta_0 \leq \frac{4}{\alpha_0 r^2 (1 + e^{-r^2/2})} + \varepsilon.$$

Mas isso contradiz (3.18), que completa a prova. ■

Corolário 3.1. *Sob as hipóteses (V_1) , (f_2) , (f_3) e (f_4^+) , se $\|h\|_*$ é suficientemente pequena, então*

$$\max_{t \geq 0} I(tM_n) = \max \left\{ \frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) dx - t \int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx \right\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Prova: Temos que $M_n = \frac{\widetilde{M}_n}{\|\widetilde{M}_n\|}$ e $\|M_n\| = 1$. Daí,

$$\begin{aligned}
 I(tM_n) &= \frac{t^2}{2} \|M_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} htM_n dx \\
 &= \frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) dx - t \int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx.
 \end{aligned}$$

Com isto, precisamos analisar o sinal de $\int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx$. Então, se $\int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx$ é positiva ou nula, temos que para t grande

$$t \int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx \geq 0.$$

Assim, pelo Lema 3.2 segue o resultado.

Agora seja $\int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx$ negativa. Já mostramos na prova do Lema 3.2, que para cada n existe s_n tal que

$$\tilde{I}(tM_n) < 0, \quad \text{para todo } t > s_n.$$

Além disso, notemos que existe $C > 0$ tal que $|s_n| \leq C$. Por outro lado,

$$\|hM_n\|_1 \leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} hM_n dx \right| \leq \|h\|_* \|M_n\| = \|h\|_*.$$

Assim, para $\|h\|_*$ suficientemente pequena, $t \in [0, s_n]$ e usando o Lema 3.2, concluímos a prova. ■

Afim de provar alguns resultados de convergência, precisamos melhorar a estimativa do Lema 3.2.

Corolário 3.2. *Sob as hipóteses (f_2) , (f_3) , (f_4^+) e (2.2)(ou (3.1)), existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $h \in E^*$ com $0 < \|h\|_* < \delta_2$, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com suporte compacto tal que*

$$I(tu) < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Prova: Pelo Lema 2.4, $\rho \rightarrow 0$ quando $\|h\|_* \rightarrow 0$. Consequentemente, c_0 cresce quando $\|h\|_*$ decresce e $c_0 \rightarrow 0$ quando $\|h\|_* \rightarrow 0$. Assim, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_* < \delta_2$, então pelo Corolário 3.1 temos

$$\max_{t \geq 0} I(tM_n) < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Tomando $u = M_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$, o resultado segue. ■

Lema 3.3. *Se (u_n) é uma sequência (PS) para I em qualquer nível com*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 < \frac{4\pi}{\alpha_0},$$

então (u_n) possui uma subsequência que converge fortemente para uma solução de (2.1).

Prova: Como (u_n) é uma sequência (PS), pelo Lema 2.7 temos que $\|u_n\|$ é limitado em E , e a menos de subsequência, podemos assumir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

Ainda pelo Lema 2.7, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E , e pela imersão compacta, $u_n \rightarrow u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ e $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Além disso, pelo Lema 2.8,

$$f(u_n) \rightarrow f(u_0) \quad \text{em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Passando o limite em (2.28), temos

$$\langle u_0, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx = 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como C_0^∞ é denso em E (ver Proposição 1.2), concluímos que u_0 é solução fraca de (2.1).

Afirmamos que $u_n \rightarrow u_0$ em E . De fato, usando que $u_n \rightharpoonup u_0$ e escrevendo $u_n = u_0 + w_n$, segue que $w_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E . Assim, pela imersão compacta, $w_n \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leq q < \infty$. Usando um argumento similar ao do artigo de J. M. do Ó [16, Lema 4], segue que (u_n) e ∇u_n satisfaz as condições do Lema de Brézis-Lieb. Assim,

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u_0^2 dx = \|\nabla u_0\|_2^2 + \|V(x)^{1/2} u_0\|_2^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\nabla u_n\|_2^2 - \|\nabla(u_n - u_0)\|_2^2) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|V(x)^{1/2} u_n\|_2^2 - \|V(x)^{1/2}(u_n - u_0)\|_2^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\|\nabla u_n\|_2^2 + \|V(x)^{1/2} u_n\|_2^2 - (\|\nabla w_n\|_2^2 + \|V(x)^{1/2} w_n\|_2^2)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|^2 - \|w_n\|^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u_n\|^2 - \|w_n\|^2 = \|u_0\|^2 + o_n(1).$$

O que implica,

$$\|u_n\|^2 = \|u_0\|^2 + \|w_n\|^2 + o_n(1). \quad (3.35)$$

Agora, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_0 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) u_0 dx, \quad \text{quando } n \rightarrow 0. \quad (3.36)$$

De fato, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E (ver Proposição 1.2), para todo $\tau > 0$ existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|\varphi - u_0\| < \tau$. Observemos que,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) u_0 dx \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) \varphi dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) (u_0 - \varphi) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) (u_0 - \varphi) dx \right| + \left| \int_{\text{supp } \varphi} [f(u_n) - f(u_0)] \varphi dx \right|. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) u_0 dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) (u_0 - \varphi) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) (u_0 - \varphi) dx \right| \\ &\quad + \|\varphi\|_\infty \int_{\text{supp } \varphi} |f(u_n) - f(u_0)| dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para estimar a primeira integral em (3.37), sendo (u_n) uma sequência (PS), usamos que

$$|\langle I'(u_n), u_0 - \varphi \rangle| \leq \|I'(u_n)\|_* \|u_0 - \varphi\| \leq \tau_n \|u_0 - \varphi\|, \quad \text{com } \tau_n \rightarrow 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\langle I'(u_n), u_0 - \varphi \rangle| &= \left| \langle u_n, u_0 - \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi) dx \right| \\ &\geq \left| \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| - \left| \langle u_n, u_0 - \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi) dx \right| \right| \\ &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| - \left| \langle u_n, u_0 - \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi) dx \right|. \end{aligned}$$

O que implica,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| &\leq |\langle I'(u_n), u_0 - \varphi \rangle| + \left| \langle u_n, u_0 - \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi) dx \right| \\ &\leq \tau_n \|u_n - u_0\| + |\langle u_n, u_0 - \varphi \rangle| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi) dx \right|. \end{aligned}$$

Usando a definição do produto interno em E , tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| &\leq \tau_n \|u_n - u_0\| + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n| |\nabla(u_0 - \varphi)| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (V(x)^{1/2} |u_n|) (V(x)^{1/2} |u_0 - \varphi|) dx + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\|. \end{aligned}$$

Para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, podemos utilizar a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| &\leq \tau_n \|u_n - u_0\| + \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla(u_0 - \varphi)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x) |u_0 - \varphi|^2 dx \right)^{1/2} + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\|. \end{aligned}$$

Como (u_n) é uma sequência (PS), pelo Lema 2.7, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| &\leq \tau_n \|u_n - u_0\| + \|u_n\| \|u_0 - \varphi\| + \|u_n\| \|u_0 - \varphi\| + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\| \\ &\leq \tau_n \|u_n - u_0\| + C_0 \|u_0 - \varphi\| + C_0 \|u_0 - \varphi\| + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\|. \end{aligned}$$

Disto concluímos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0 - \varphi) dx \right| \leq C \|u_n - u_0\| \leq C\tau. \quad (3.38)$$

Agora estimaremos a segunda integral em (3.37), mas primeiramente notemos que, como $u_0 \in E$ é solução fraca para (2.1) temos pela definição 2.2 que

$$\langle I'(u_0), u_0 - \varphi \rangle = \langle I'(u_0), u_0 \rangle - \langle I'(u_0), \varphi \rangle = 0.$$

Usando isto e a definição de produto interno em E , vemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)(u_0 - \varphi)dx = \langle u_0, u_0 - \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi)dx,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)(u_0 - \varphi)dx \right| &\leq |\langle u_0, u_0 - \varphi \rangle| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0 - \varphi)dx \right| \\ &\leq \|u_0\| \|u_0 - \varphi\| + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\| \\ &\leq C \|u_0 - \varphi\| \\ &\leq C\tau. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para estimar a última integral em (3.37) usaremos o Lema 2.8, isto é,

$$f(u_n) \rightarrow f(u_0) \quad \text{em} \quad L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2). \tag{3.40}$$

Daí, voltando para (3.37) e utilizando (3.38), (3.39) e (3.40), temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 dx \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2C\tau + \|\varphi\|_\infty \int_{\text{supp } \varphi} |f(u_n) - f(u_0)|dx \right] \\ &= 2C\tau + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|\varphi\|_\infty \int_{\text{supp } \varphi} |f(u_n) - f(u_0)|dx \right] \\ &= 2C\tau, \end{aligned}$$

donde obtemos (3.36), pois τ é arbitrário.

Agora de (3.35), podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n), u_n \rangle &= \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx \\ &= \|u_0\|^2 + \|w_n\|^2 + o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx \\ &= \|u_0\|^2 + \|w_n\|^2 + o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u_0)dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx. \end{aligned}$$

Desde que $w_n = (u_n - u_0)$ e usando (3.36),

$$\begin{aligned} \langle I'(u_n), u_n \rangle &= \left[\|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_0 dx \right] + \|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(w_n)dx + o_n(1) \\ &= \langle I'(u_0), u_0 \rangle + \|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(w_n)dx + o_n(1), \end{aligned} \tag{3.41}$$

Com isto afirmamos que,

$$\|w_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)w_n dx + o_n(1). \tag{3.42}$$

Com efeito, como $\langle I'(u_0), u_0 \rangle = 0$ e (u_n) é uma sequência (PS), notemos que

$$\begin{aligned} |\langle I'(u_n), u_n \rangle - \langle I'(u_0), u_0 \rangle| &\leq |\langle I'(u_n), u_n \rangle| + |\langle I'(u_0), u_0 \rangle| \\ &\leq \|I'(u_n)\|_* \|u_n\| \leq C \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle I'(u_n), u_n \rangle \rightarrow \langle I'(u_0), u_0 \rangle.$$

Desta forma usando (3.41), segue (3.42).

Por outro lado, por (3.6), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) w_n dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n)| |w_n| dx \\ &\leq b_1 \int_{\mathbb{R}^2} |u_n| |w_n| dx + b_2 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u_n^2} - 1) |w_n| dx. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1$ com $p = \frac{r}{r-1}$ e $r > 1$ temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) w_n dx \right| \leq b_1 \|u_n\|_2 \|w_n\|_2 + b_2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u_n^2} - 1)^r dx \right]^{1/r} \|w_n\|_p.$$

Pela Imersão Contínua $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ (ver Lema 1.1) para todo $q \geq 1$ e o Lema 2.7, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) w_n dx \right| &\leq b_1 C_0 \|u_n\| \|w_n\|_2 + b_2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2 \left(\frac{\|u_n\|_2^2}{\|u_n\|^2} \right)} - 1 \right)^r dx \right]^{1/r} \|w_n\|_p \\ &\leq C_1 \|w_n\|_2 + b_2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha \|u_n\|^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^2} - 1 \right)^r dx \right]^{1/r} \|w_n\|_p. \end{aligned}$$

Agora fazendo uso do Lema 2.2, para $q > r$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) w_n dx \right| &\leq C_1 \|w_n\|_2 + b_2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} C_2 \left(e^{\alpha q \|u_n\|^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^2} - 1 \right) dx \right]^{1/r} \|w_n\|_p \\ &\leq C_1 \|w_n\|_2 + C_3 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha q \|u_n\|^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^2} - 1 \right) dx \right]^{1/r} \|w_n\|_p. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Por hipótese, para n suficientemente grande, $\alpha_0 \|u_n\|^2 < 4\pi$. Agora, consideremos $\alpha > \alpha_0$ e $q > r$, com $r > 1$ perto de 1, de forma que ainda seja valido $\alpha q \|u_n\|^2 < 4\pi$. Logo, podemos usar o Lema 2.1 em (3.43). Disto e da imersão compacta $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q > 1$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) w_n dx \rightarrow 0.$$

Isto juntamente com (3.42), implica que $\|w_n\| \rightarrow 0$ e o resultado segue de (3.35). ■

A seguir provaremos a existência de uma solução do tipo minimo local para o problema (2.1).

Lema 3.4. *Para cada $h \in E^*$ com $0 < \|h\|_* < \delta_1$, o problema (2.1) tem uma solução do tipo mínimo local u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$, onde c_0 foi definido em (2.37).*

Prova: Seja ρ_h como no Lema 2.4. Podemos escolher $\|h\|_*$ suficientemente pequeno tal que

$$\rho_h < \left(\frac{4\pi}{\alpha_0} \right)^{1/2}.$$

Desde que $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo (com a métrica induzida pela norma de E), convexo e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente em $\overline{B}_{\rho_h}$, segue pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Proposição A.7), que existe uma sequência (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c_0 = \inf_{\|u\| \leq \rho_h} I(u) \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Observando que $\|u_n\|^2 \leq \rho_h^2 < \frac{4\pi}{\alpha_0}$, segue pelo Lema 3.3, que existe uma subsequência (u_k) de (u_n) que converge fortemente para uma solução u_0 de (2.1), ou seja, $u_k \rightarrow u_0$. Como I é contínuo, temos que $I(u_k) \rightarrow I(u_0)$. Portanto, pela unicidade do limite concluímos que $I(u_0) = c_0 < 0$. ■

Lema 3.5. *Supondo que (V_1) , (V_2) , (f_2) , (f_3) e (f_4^+) são satisfeitas. Se $\|h\|_* < \delta_1$, então o problema (2.1) tem uma solução do tipo passo da montanha u_M em E .*

Prova: Pelos Lemas 2.4 e 2.5 temos que I possui a geometria do Passo da Montanha. Assim, usando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais Smale (ver Teorema A.15), existe uma sequência (u_n) em E tal que

$$I(u_n) \rightarrow c_M > 0 \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0, \quad (3.44)$$

onde c_M é o nível do Passo da Montanha. Agora pelo Lema 2.7, a sequência (u_n) é limitada em E , logo possui uma subsequência fracamente convergente, digamos, $u_n \rightharpoonup u_M$ em E , e pela imersão compacta, $u_n \rightarrow u_M$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$. Por outro lado, de (3.44) e usando a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ em E , temos que

$$\langle u_n, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx = o_n(\|\varphi\|), \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Daí passando o limite e fazendo uso do Lema 2.8, obtemos

$$\langle u_M, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_M) \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} h \varphi dx = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Portanto, da definição (2.2), segue que u_M é solução de (2.1). ■

Observação 3.5. *Pelo Corolário 3.2, podemos concluir que*

$$0 < c_M < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Nosso objetivo agora é provar que as soluções obtidas nos Lemas 3.4 e 3.5 são distintas, mas para isso precisaremos enunciar e provar uma versão do Lema de Lions para todo $\mathbb{R}^2$.

Lema 3.6 (Extensão do Lema de Lions). *Seja $(w_n) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e suponha que $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|w_0\|_{1,2} < 1$. Então, para todo $0 < p < 4\pi(1 - \|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$, temos*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n^2} - 1) dx < \infty.$$

Prova: Desde que $\|w_n\|_{1,2} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|w_n - w_0\|_{1,2}^2 &= (w_n - w_0, w_n - w_0) \\ &= \|w_n\|_{1,2}^2 - 2(w_n, w_0) + \|w_0\|_{1,2}^2 \\ &= 1 - 2(w_n, w_0) + \|w_0\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe $g_{w_0} \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$, tal que $g_{w_0}(\cdot) = (\cdot, w_0)$, ou seja,

$$\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 = 1 - 2g_{w_0}(w_n) + \|w_0\|_{1,2}^2.$$

Então, como $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que $g_{w_0}(w_n) \rightarrow \|w_0\|_{1,2}^2$. Assim,

$$\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 = 1 - \|w_0\|_{1,2}^2 < \frac{4\pi}{p}.$$

Logo, para n suficientemente grande, temos

$$p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 < \alpha < 4\pi, \quad \text{para algum } \alpha > 0.$$

Daí, tomando $u = \frac{|w_n - w_0|}{\|w_n - w_0\|_{1,2}}$, notemos que $\|u\|_2 \leq 1$ e $\|\nabla u\|_2 \leq 1$. Então, escolhendo $q > 1$ perto de 1 e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$q(1 + \varepsilon^2)p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 < \alpha < 4\pi,$$

e usando o Lema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1 \right] dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 \left(\frac{|w_n - w_0|}{\|w_n - w_0\|_{1,2}} \right)^2} - 1 \right] dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\alpha \left(\frac{|w_n - w_0|}{\|w_n - w_0\|_{1,2}} \right)^2} - 1 \right] dx \leq C. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Além disso, desde que

$$pw_n^2 \leq p(1 + \varepsilon^2)(w_n - w_0)^2 + p \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) w_0^2,$$

segue que,

$$\begin{aligned} e^{pw_n^2} - 1 &\leq \left(e^{p(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2 + p(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1 \right) \\ &= \left(e^{p(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} e^{p(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Agora, para todo $a, b > 0$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, segue pela Desigualdade de Young, que

$$ab - 1 \leq \frac{1}{q}(a^q - 1) + \frac{1}{r}(b^r - 1),$$

obtemos que,

$$e^{pw_n^2} - 1 \leq \frac{1}{q} \left(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} - 1 \right) + \frac{1}{r} \left(e^{rp(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1 \right).$$

Assim, por (3.45) e o Lema 2.1, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n} - 1) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{q} \left(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} - 1 \right) + \frac{1}{r} \left(e^{rp(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1 \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} - 1 \right) dx + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{rp(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2} - 1 \right) dx \\ &\leq C. \end{aligned}$$

■

Agora para provarmos que as soluções obtidas nos Lemas 3.4 e 3.5 são distintas, enunciaremos e provaremos a seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Se $\delta_2 > 0$ é suficientemente pequeno, então as soluções de (2.1) obtidas nos Lemas 3.4 e 3.5 são distintas.*

Prova: Pelos Lemas 3.4 e 3.5, existem sequências limitadas (u_n) e (v_n) em E tais que

$$u_n \rightarrow u_0, \quad I(u_n) \rightarrow c_0 < 0, \quad \langle I'(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0 \quad (3.46)$$

e

$$v_n \rightarrow u_M, \quad I(v_n) \rightarrow c_M > 0, \quad \langle I'(v_n), v_n \rangle \rightarrow 0, \quad (3.47)$$

Suponhamos por contradição que $u_0 = u_M$. Então, pela imersão $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ (ver (1.15)), temos também que $v_n \rightarrow u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, e pela semicontinuidade da norma (ver Proposição A.5), a menos de subsequência,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2} \geq \|u_0\|_{1,2} > 0.$$

Fixando

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{1,2}} \quad \text{e} \quad w_0 = \frac{u_0}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}}, \quad (3.48)$$

obtemos que $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e para todo $\tilde{f}$ no dual de $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_{1,2}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\tilde{f}(v_n)}{\|v_n\|_{1,2}} \right] \\ &= \frac{\tilde{f}(u_0)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}} = \tilde{f}\left(\frac{u_0}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}}\right) \\ &= \tilde{f}(w_0), \end{aligned}$$

ou seja, $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Observando que $\|w_0\|_{1,2} \leq 1$, temos duas possibilidades:

- (i) $\|w_0\|_{1,2} = 1$; ou
- (ii) $\|w_0\|_{1,2} < 1$.

Então, admitindo que (i) vale, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2} = \|u_0\|_{1,2}$, de modo que $v_n \rightarrow v_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Assim pela Proposição B.1, existe $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq g(x), \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Assim (3.6) implica que,

$$\begin{aligned} |f(v_n)v_n| &\leq |f(v_n)||v_n| \leq \left[c_1|v_n| + c_2 \left(e^{\alpha|v_n|^2} - 1 \right) \right] |v_n| \\ &= c_1|v_n|^2 + c_2|v_n| \left(e^{\alpha|v_n|^2} - 1 \right) \\ &\leq c_1g^2 + c_2g \left(e^{\alpha g^2} - 1 \right) = G(x), \end{aligned}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$, para cada $\alpha > \alpha_0$. Pela Observação 2.2, $G(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, e usando que f é contínua, segue que

$$f(v_n)v_n \rightarrow f(u_0)u_0.$$

Desta forma, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluir que,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 dx. \quad (3.49)$$

Similarmente, como $u_n \rightarrow u_0$ em E , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 dx. \quad (3.50)$$

Usando (3.46) e (3.47), temos que

$$\langle I'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx \rightarrow 0 \quad (3.51)$$

e

$$\langle I'(v_n), v_n \rangle = \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv_n dx \rightarrow 0. \quad (3.52)$$

Então, fazendo a diferença entre (3.51) e (3.52), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle I'(u_n), u_n \rangle - \langle I'(v_n), v_n \rangle] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx - \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n dx + \int_{\mathbb{R}^2} hv_n dx \right], \end{aligned}$$

donde por (3.46), (3.49) e (3.50), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_0 dx + \int_{\mathbb{R}^2} hu_0 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2. \end{aligned}$$

Concluindo que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 = \|u_0\|^2.$$

Portanto, $v_n \rightarrow u_0$ em E , e consequentemente, $I(v_n) \rightarrow I(u_0) = c_0$. Mas isso contradiz (3.46) e (3.47), pois pela unicidade do limite, teríamos que $c_M = c_0$.

Agora admitindo que (ii) vale. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$q\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leq 4\pi \frac{1}{1 - \|w_0\|_{1,2}^2} - \delta \quad (3.53)$$

para n grande. De fato, pela Observação 3.5, temos

$$\alpha_0 < \frac{2\pi}{c_M - c_0} = \frac{2\pi}{c_M - I(u_0)}.$$

Assim, podemos escolher $q > 1$ suficientemente perto de 1 tal que

$$q\alpha_0 < \frac{2\pi}{c_M - I(u_0)}.$$

Multiplicando $\|v_n\|_{1,2}^2$ em ambos os membros, podemos escolher $\delta > 0$, de forma que

$$q\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leq \frac{2\pi}{c_M - I(u_0)} \|v_n\|_{1,2}^2 - \delta. \quad (3.54)$$

Observemos que por (3.47), temos que $I(v_n) \rightarrow c_M > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_M &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv_n dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv_n dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} v_n^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Pela definição de norma em $H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} c_M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_n|^2 + v_n^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left[F(v_n) + h v_n + \frac{1}{2} v_n^2 \right] dx \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|v_n\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left[F(v_n) + h v_n + \frac{1}{2} v_n^2 \right] dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como $v_n \rightharpoonup u_0$ em E , pelo Lema 3.1, a menos de uma subsequência, temos que $F(v_n) \rightarrow F(u_0)$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$, e mais, pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ (ver Lema 1.1), $v_n \rightarrow u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$. Assim, de (3.55), a menos de uma subsequência, concluímos que

$$c_M = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left[F(u_0) + h u_0 + \frac{1}{2} u_0^2 \right] dx,$$

o que implica,

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 = c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x),$$

$$\text{onde, } G_0(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[F(u_0) + h u_0 + \frac{1}{2} u_0^2 \right] dx.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \|v_n\|_{1,2}^2 = c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) + o_n(1). \quad (3.56)$$

Assim, de (3.54) e para n suficientemente grande, temos

$$q\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leq 4\pi \frac{c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) + o_n(1)}{c_M - I(u_0)} - \delta. \quad (3.57)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} &\left\{ c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) \right\} (1 - \|w_0\|_{1,2}^2) = \\ &= c_M - c_M \|w_0\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) - \left\{ -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) \right\} \|w_0\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Donde, por (3.56), temos

$$\begin{aligned} &\left\{ c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) \right\} (1 - \|w_0\|_{1,2}^2) = \\ &= c_M - c_M \|w_0\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) v_n^2 dx + G_0(x) - \left\{ \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 - c_M \right\} \|w_0\|_{1,2}^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Agora provemos que

$$(a) \quad G_0(x) = -I(u_0) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u_0^2 dx;$$

$$(b) \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx.$$

Com efeito,

(a) Observemos que,

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} F(u_0) + \int_{\mathbb{R}^2} hu_0 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_0^2 dx - \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \\ &= - \left[\frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_0) dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_0 dx \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_0^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx \\ &= -I(u_0) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

(b) Como (v_n) é uma sequência em E limitada, pelo Lema de Fatou, a menos de subsequência, segue o resultado.

Voltando para (3.58) e usando (a) e (b), obtemos

$$\begin{aligned} &\left\{ c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + G_0(x) \right\} (1 - \|w_0\|_{1,2}^2) \\ &\leq c_M - c_M \|w_0\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx - I(u_0) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2 dx \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 - c_M \right\} \|w_0\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} &\left\{ c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + G_0(x) \right\} (1 - \|w_0\|_{1,2}^2) \\ &\leq c_M - c_M \|w_0\|_{1,2}^2 - I(u_0) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2} \|w_0\|_{1,2}^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 + c_M \|w_0\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Daí, pela definição de w_0 ,

$$\begin{aligned} &\left\{ c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + G_0(x) \right\} (1 - \|w_0\|_{1,2}^2) \\ &\leq c_M - I(u_0) + \frac{1}{2} \|w_0\|_{1,2}^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 - \frac{1}{2} \|w_0\|_{1,2}^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{1,2}^2 \\ &= c_M - I(u_0). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{c_M - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2 dx + G_0(x)}{c_M - I(u_0)} \leq \frac{1}{1 - \|w_0\|_{1,2}^2}.$$

Logo, para n suficientemente grande, (3.57) implica (3.53).

Então tomando $p = (q + \varepsilon)\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2$, segue de (3.53) e do Lema 3.6 que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{(q+\varepsilon)\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 |w_n|^2} - 1 \right] dx \leq C, \quad (3.59)$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, usando (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(v_n)| |v_n - u_0| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left[b_1 |v_n| + b_2 \left(e^{\alpha_0 v_n^2} - 1 \right) \right] |v_n - u_0| dx \\ &= b_1 \int_{\mathbb{R}^2} |v_n| |v_n - u_0| dx + b_2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha_0 v_n^2} - 1 \right) |v_n - u_0| dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ com $q' = \frac{q}{q-1}$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0) dx \right| &\leq b_1 \|v_n\|_2 \|v_n - u_0\|_2 + b_2 \|v_n - u_0\|_{q'} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha_0 v_n^2} - 1 \right)^q dx \right]^{1/q} \\ &= b_1 \|v_n\|_2 \|v_n - u_0\|_2 + b_2 \|v_n - u_0\|_{q'} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha_0 v_n^2 \frac{\|v_n\|_{1,2}^2}{\|v_n\|_{1,2}^2}} - 1 \right)^q dx \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Pela definição de w_n ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0) dx \right| \leq b_1 \|v_n\|_2 \|v_n - u_0\|_2 + b_2 \|v_n - u_0\|_{q'} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 w_n^2} - 1 \right)^q dx \right]^{1/q}.$$

Agora usando o Lema 2.2 e a estimativa (3.59), teremos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0) dx \right| &\leq b_1 \|v_n\|_2 \|v_n - u_0\|_2 + C_1 \|v_n - u_0\|_{q'} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{(q+\varepsilon)\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 w_n^2} - 1 \right) dx \right]^{1/q} \\ &\leq b_1 C_2 \|v_n\| \|v_n - u_0\|_2 + C_1 C_3 \|v_n - u_0\|_{q'}. \end{aligned}$$

Fazendo uso da imersão compacta de E em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ e do Lema 2.7,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0) dx \right| \leq C_4 \|v_n - u_0\|_2 + C_5 \|v_n - u_0\|_{q'} \rightarrow 0. \quad (3.60)$$

Agora usando que

$$|I'(v_n)(v_n - u_0)| \leq \|I'(v_n)\|_* \|v_n - u_0\| \rightarrow 0,$$

segue que,

$$I'(v_n)(v_n - u_0) = \langle v_n, v_n - u_0 \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0) dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(v_n - u_0) dx \rightarrow 0.$$

Assim, pela ultima estimativa juntamente com (3.60), obtemos que

$$\langle v_n, v_n - u_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (3.61)$$

e como $v_n \rightharpoonup u_0$ em E , temos que

$$\langle u_0, v_n - u_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (3.62)$$

Consequentemente, de (3.61) e (3.62), segue que

$$\begin{aligned}\|v_n - u_0\|^2 &= \langle v_n - u_0, v_n - u_0 \rangle \\ &= \langle v_n, v_n - u_0 \rangle - \langle u_0, v_n - u_0 \rangle \rightarrow 0,\end{aligned}$$

Ou seja, $v_n \rightarrow u_0$ em E . Logo, como $I \in C^1$, segue que $I(v_n) \rightarrow I(u_0) = c_0$, mas isso contradiz (3.46) e (3.47). Portanto, $u_0 \neq u_M$. ■

3.5.1 Prova dos Teoremas 2.2 e 3.3

Afim de provar os Teoremas 2.2 e 3.3 no caso $h(x) \geq 0$, redefiniremos $f(s) = 0$ para $s < 0$. Assim, no caso subcrítico vale (f_1) para $s \geq s_1$ e no caso crítico vale (f_3) para $s \geq R_0$. Notemos que as hipóteses (f_1) e (f_3) foram suficientes para provarmos a condição de Palais-Smale e os Lemas 2.5, 2.7 e 3.1, as quais também são válidas para este funcional não-linear modificado.

A prova é uma consequência do seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Se $h(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então as soluções fracas de (2.1) são não-negativas.*

Prova: Seja $u \in E$ uma solução fraca para o problema (2.1). Fixando $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$ e tomando $v = u^-$ na Definição 2.2, obtemos que

$$\langle u, u^- \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)u^- dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu^- dx = 0.$$

Desde que $h(x) \geq 0$, segue que

$$\|u^-\|^2 = - \int_{\mathbb{R}^2} hu^- dx \leq 0,$$

Portanto, $u^- = 0$ e $f(u(x))u^- = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Consequentemente, $u = u^+ \geq 0$. ■

Agora para provarmos os Teoremas 2.2 e 3.3, no caso $h(x) \leq 0$, consideremos a seguinte função

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} -f(-s), & \text{se } s < 0, \\ f(s), & \text{se } s \geq 0. \end{cases}$$

Neste caso, a prova dos Teoremas 2.2 e 3.3 é dada no seguinte corolário.

Corolário 3.4. *Suponha que a condição (f_4^-) é satisfeita e que $h(x) \leq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Então, existem pelo menos duas soluções fracas de (2.1) não positivas.*

Prova: Consideremos o funcional definido por

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{F}(u)dx - \int_{\mathbb{R}^2} (-h)udx,$$

onde $\tilde{F}$ é a primitiva de $\tilde{f}$. Notemos que $\tilde{f}$ imediatamente satisfaz as mesmas hipóteses de f . Como $-h(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, pelo Corolário 3.3, $\tilde{I}(u)$ possui dois pontos críticos não negativos e diferentes do trivial. Seja $\tilde{u}$ um desses tais pontos críticos, isto é,

$$\langle \tilde{u}, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\tilde{u})vdx + \int_{\mathbb{R}^2} hvdx, \quad \text{para todo } v \in E.$$

Recordando a construção $\tilde{f}$, temos que $\tilde{f}(\tilde{u}) = -f(-\tilde{u})$ e colocando $-v$ ao invés de v , obtemos

$$\langle \tilde{u}, -v \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} -f(-\tilde{u})(-v)dx + \int_{\mathbb{R}^2} h(-v)dx, \quad \text{para todo } v \in E.$$

Logo,

$$\langle -\tilde{u}, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(-\tilde{u})vdx - \int_{\mathbb{R}^2} hvdx, \quad \text{para todo } v \in E,$$

Portanto, $-\tilde{u}$ é uma solução não positiva de (2.1). Assim, a prova está concluída. ■

Observação 3.6. *Finalmente, observemos que os mesmos procedimentos utilizados nesta dissertação, juntamente com modificações óbvias, podem ser usados para obtermos resultados análogos para um problema da forma,*

$$-\Delta u + V(x)u = f(x, u) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Apêndice A

Preliminares

Neste apêndice, enunciaremos alguns resultados importantes que são necessários para uma melhor compreensão desta dissertação.

A.1 Resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$

Aqui enunciaremos alguns resultados elementares de Análise Real.

Teorema A.1 ([6], Teorema 40.2 (Regra da Cadeia)). *Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : B \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Suponhamos que f é diferenciável em $a \in A$ e que g é diferenciável em $b = f(a)$. Então a composição $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em a e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(b)f'(c)$$

Teorema A.2 ([6], Teorema 30.8 (Teorema Fundamental do Cálculo)). *Seja f uma função contínua em $J = [a, b]$. Então uma função $F : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt, \quad \text{para todo } x \in J,$$

se, e somente se, $F' = f$ em J .

Teorema A.3 ([24], Teorema 12 (Média para integrais)). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Teorema A.4 ([25], Corolário 1 (Teorema de Weierstrass)). *Toda função real contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, atinge seu máximo e seu mínimo em K , isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x \in K$.*

Teorema A.5 ([27], Teorema 3.10 (Teorema de Fubini)). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ abertos. Se $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $A \times B$, então*

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

A.2 Resultados de Medida e Integração

Teorema A.6 ([8], Teorema 4.9). *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e f uma função em $L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) e uma função h em $L^p(\Omega)$ tais que*

- (i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω ,
- (ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω .

Teorema A.7 ([5], Teorema 4.6 (Teorema da Convergência Monótona)). *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis tal que*

- (i) $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$ quase sempre em Ω ,
- (ii) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Teorema A.8 ([5], Teorema 5.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)). *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que*

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω ;
- (ii) e existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω .

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Teorema A.9 ([23], Corolário 4.14 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado)). *Sejam (f_n) e (g_n) duas sequências de funções de $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $g_n(x) \rightarrow g(x)$ quase sempre em Ω . Suponha, ainda, que*

$$|f_n(x)| \leq |g_n(x)|, \quad \text{quase sempre em } \Omega \quad \text{e} \quad \|g_n - g\|_1 \rightarrow 0.$$

Então,

$$|f(x)| \leq |g(x)|, \quad \text{quase sempre em } \Omega \quad \text{e} \quad \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

Proposição A.1 ([5], Teorema 6.9 (Desigualdade de Hölder)). *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposição A.2 ([5], Teorema 6.11 (Desigualdade de Minkowski)). *Se f e h pertencem a $L^p(\Omega)$, com $p \geq 1$, então $(f + h) \in L^p(\Omega)$ e $\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$.*

Proposição A.3 ([21], Proposição 12.11 (Desigualdade de Young)). *Sejam $p > 1$ e $q > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então vale*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

valendo a igualdade se $a^p = b^q$.

Definição A.1. *Uma sequência de funções $(\rho_n)_{n \geq 1}$ é dita regularizante se*

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \rho_n \subset \overline{B(0, 1/n)}, \quad \int \rho_n(x) dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Proposição A.4 ([8], Teorema 4.20). *Seja $f \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$ ($k \geq 1$) e seja $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Então $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ e*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad \text{para todo } \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq k.$$

*Em particular, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$. Então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema A.10 ([8], Teorema 4.22). *Suponha $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e ρ_n é uma sequência regularizante. Então $(\rho_n * f) \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Lema A.1 ([29], Lema 1.32 (Lema de Brézis-Lieb)). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Suponha que*

- (i) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$,
- (ii) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ quase sempre $x \in \Omega$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

A.3 Resultados de Análise Funcional

Proposição A.5 ([8], Proposição 3.5). *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X . Se $x_n \rightharpoonup x$ em X , então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

Teorema A.11 ([12], Teorema 16.5). *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui uma subsequência fracamente convergente.*

Proposição A.6 ([12], Proposição 24.9). *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador compacto. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X , então, a menos de subsequência, $Tx_n \rightarrow Tx$ em Y , ou seja, um operador compacto leva sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes.*

Teorema A.12 ([8], Teorema 5.5 (Teorema de Representação de Riesz)). *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|f\|_{H^} = \|y\|_H$. Em particular, $H^* = H$ no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.*

A.4 Resultados sobre os Espaços de Sobolev

Definição A.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right]^{1/p}.$$

Quando $p = 2$, escrevemos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Observação A.1 ([8], pg: 264, Observação 4). *Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e (∇u_n) converge para algum limite em $(L^p(\Omega))^N$. Então,*

$u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\|u_n - u\|_{1,p} \rightarrow 0$. Quando $1 < p \leq \infty$ é suficiente que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e que (∇u_n) seja limitado em $(L^p(\Omega))^N$ para concluir que $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.13 ([8], Teorema 9.9 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)). *Seja $1 \leq p < N$. Então $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e existe uma constante C , dependendo apenas de p e N , tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p,$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, onde $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$.

Corolário A.1 ([8], Corolário 9.11). *Se $p = N$ verifica-se que*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } q \in [N, \infty),$$

com injeções contínuas.

Teorema A.14 ([8], Teorema 9.16 (Rellich-Kondrachov)). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado e de classe C^1 . Então, temos as seguintes injeções compactas:*

- (i) *Se $1 \leq p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$, onde $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$;*
- (ii) *Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, \infty)$;*
- (iii) *Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.*

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com injeção compacta, para todo p e para todo N .

A.5 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos

Nesta seção enunciaremos alguns resultados da Teoria dos Pontos Críticos que serão de grande importância ao longo desta dissertação.

Definição A.3. *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência $(u_n) \subseteq X$ tal que*

$$|I(u_n)| \leq C \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência fortemente convergente em X .

Como uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland, temos o seguinte resultado:

Proposição A.7 ([22], Corolário 3.3). *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente, limitado inferiormente e Gâteaux diferenciável. Então, existe uma sequência minimizante (u_n) de quase pontos críticos de Φ no sentido*

$$\Phi(u_n) \rightarrow \inf_{x \in X} \Phi(x) \quad e \quad \Phi'(u_n) \rightarrow 0.$$

Teorema A.15 ([10] (Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale)). *Seja X um espaço de Banach real e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existe uma vizinhança U de zero em X e $\alpha > 0$ de forma que*

- (i) $I(u) > \alpha$ para todo $u \in \partial U$,
- (ii) existe $e \in X$ tal que $e \notin U$ e $I(e) < 0$.

Então, para o nível minimax, definido por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > \alpha,$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$, existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \rightarrow 0.$$

Tal sequência é chamada “sequência de Palais-Smale no nível c ” e é denotada por $(PS)_c$.

Apêndice B

Resultados Auxiliares

Aqui demonstraremos alguns resultados que foram utilizados ao longo deste trabalho.

B.1 Funcionais Diferenciáveis

Definição B.1 ([29], Definição 1.1). *Considere o funcional $I : E \rightarrow \mathbb{R}$, onde $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. O funcional I é Fréchet Diferenciável em $u \in E$, se existir um funcional linear contínuo $I'(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|I(u+v) - I(u) - I'(u)v|}{\|v\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, se a derivada de Fréchet de I existir e for contínua.

Observação B.1. *A derivada de Gateaux é dada por*

$$\frac{\partial I(u)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t}.$$

Além disso, todo funcional de Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Nosso principal objetivo neste Apêndice é mostrar que o funcional $I : E \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^2} h u dx$$

está bem definido e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, com derivada

$$I'(u)v = \langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx - \int_{\mathbb{R}^2} h v dx, \quad \forall v \in E.$$

Afirmção 1. *O funcional I está bem definido.*

De fato, a primeira parcela do funcional I está bem definida, pois corresponde a norma do espaço E .

Agora, seja $u \in E$, pela desigualdade (2.16) (ou (3.6)), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^u f(t) dt dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^u |f(t)| dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^u \left[C_1 |t| + C_2 (e^{\alpha t^2} - 1) \right] dt dx. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_0^u \left[C_1 |t| + C_2 (e^{\alpha t^2} - 1) \right] dt = \left[C_1 |u| + C_2 (e^{\alpha u^2} - 1) \right] |u|.$$

Então,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx \right| \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) |u| dx.$$

Notemos que, pela desigualdade Hölder, para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) |u| dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Usando o Lema 2.2, para $\beta > 2$ existe $C > 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) |u| dx \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha \beta u^2} - 1) dx \right]^{1/2} \|u\|_2,$$

e pelo Lema 2.1, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1) |u| dx < \infty.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx < \infty.$$

Por fim, temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} h u dx \right| \leq \|h\|_* \|u\| < \infty.$$

Assim, concluímos que o funcional I está bem definido.

Consideremos os funcionais I_1 , I_2 e I_3 definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2, \quad I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^2} F(u) dx \quad \text{e} \quad I_3(u) = \int_{\mathbb{R}^2} h u dx.$$

Afirmção 2. *O funcional I_1 é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.*

Existência da derivada de Gateaux

Seja $u \in E$, então para cada $v \in E$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1(u)}{\partial v} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{I_1(u + tv) - I_1(u)}{t} \right] = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\|u + tv\|^2 - \|u\|^2}{t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\langle u + tv, u + tv \rangle - \langle u, u \rangle}{t} \right] = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} [2\langle u, v \rangle - t\|v\|^2] \\ &= \frac{1}{2} 2\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \langle u, v \rangle$ é a candidata a derivada de Fréchet de I_1 .

Existência da derivada de Fréchet de I_1

Seja $u \in E$. Para cada $v \in E$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \left[\frac{I_1(u + v) - I_1(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} \right] &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{2}\|u + v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v \rangle}{\|v\|} \right] \\ &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{2}\langle u + v, u + v \rangle - \frac{1}{2}\langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle}{\|v\|} \right] \\ &= \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v\| = 0. \end{aligned}$$

Assim, I_1 é diferenciável em E com $I'_1(u)v = \langle u, v \rangle$.

Continuidade de I'_1

Consideremos uma sequência $(u_n) \subset E$ com $u_n \rightarrow u$ em E . Mostremos que $I'_1(u_n) \rightarrow I'_1(u)$ em E^* , quando $n \rightarrow \infty$. Com efeito, dado $v \in E$ tal que $\|v\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq |(I'_1(u_n) - I'_1(u))v| &= |I'_1(u_n)v - I'_1(u)v| = |\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \cdot \|v\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

O que implica,

$$\|I'_1(u_n) - I'_1(u)\|_* = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\| \leq 1}} |(I'_1(u_n) - I'_1(u))v| \rightarrow 0.$$

Portanto, $I'_1(u_n) \rightarrow I'_1(u)$ em E^* .

Afirmção 3. *O funcional I_2 é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ e*

$$I'_2(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)vdv, \quad \forall v \in E.$$

Seja $u \in E$ fixado. Para cada $v \in E$ consideremos,

$$r(v) = I_2(u + v) - I_2(u) - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx. \quad (\text{B.1})$$

Afirmamos que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Ou equivalentemente,

$$\lim_{\|v_n\| \rightarrow 0} \frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} = 0.$$

Definindo a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = F(u + tv_n)$, e usando que

$$F(u + tv_n) = \int_0^{u+tv_n} f(t) dt,$$

temos que g é contínua e pela regra da cadeia $g'(t) = f(u + tv_n)v_n$.

Agora, usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0). \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(u + tv_n) dt. \quad (\text{B.3})$$

Daí, de (B.2) e (B.3), obtemos que

$$F(u + v_n) - F(u) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(u + tv_n) dt = \int_0^1 f(u + tv_n)v_n dt,$$

e conseqüentemente, por (B.1),

$$\begin{aligned} r(v_n) &= \int_{\mathbb{R}^2} [F(u + v_n) - F(u)] dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_0^1 f(u + tv_n)v_n dt \right] dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v_n dx. \end{aligned}$$

O que implica,

$$r(v_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_0^1 (f(u + tv_n)v_n - f(u)v_n) dt \right] dx = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n dt dx.$$

Logo,

$$|r(v_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n dt dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^1 |f(u + tv_n) - f(u)| |v_n| dt dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, temos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} |f(u + tv_n) - f(u)| |v_n| dx dt$$

e pela desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tem-se

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 \|v_n\|_2 dt.$$

Usando a imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, para todo $1 \leq q < \infty$, obtemos

$$|r(v_n)| \leq C \|v_n\| \int_0^1 \|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 dt. \quad (\text{B.4})$$

Notemos que, pela desigualdade (2.16) (ou (3.6)), temos

$$\begin{aligned} |f(u + tv_n) - f(u)|^2 &\leq \left(|f(u + tv_n)| + |f(u)| \right)^2 \\ &\leq \left[C_1 |u + tv_n| + C_2 \left(e^{\alpha(u+tv_n)^2} - 1 \right) + C_3 |u| + C_4 \left(e^{\alpha u^2} - 1 \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e tomando $k = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq k^2 \left[|u| + |v_n| + \left(e^{\alpha(u+tv_n)^2} - 1 \right) + \left(e^{\alpha u^2} - 1 \right) \right]^2.$$

Como $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, para todo a, b , tem-se

$$\begin{aligned} |f(u + tv_n) - f(u)|^2 &\leq 2k^2 \left[\left(|u| + |v_n| \right)^2 + \left(e^{\alpha(u+tv_n)^2} - 1 + e^{\alpha u^2} - 1 \right)^2 \right] \\ &\leq 4k^2 \left[|u|^2 + |v_n|^2 + \left(e^{\alpha(u+tv_n)^2} - 1 \right)^2 + \left(e^{\alpha u^2} - 1 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Tomando $M = 4K^2$, teremos que

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq M \left[|u|^2 + |v_n|^2 + \left(e^{\alpha(u+tv_n)^2} - 1 \right)^2 + \left(e^{\alpha u^2} - 1 \right)^2 \right]. \quad (\text{B.5})$$

Como (v_n) é uma sequência que converge fortemente em E , então usando a imersão contínua $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ (ver (1.15)), temos que (v_n) converge fortemente em $H^1(\mathbb{R}^2)$, e assim pelo Teorema A.6, a menos de subsequência, existe $l \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq l(x) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Assim, para $t \in (0, 1)$ e pela desigualdade (B.5), obtemos

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq M \left[|u|^2 + l^2 + \left(e^{\alpha(u+l)^2} - 1 \right)^2 + \left(e^{\alpha u^2} - 1 \right)^2 \right].$$

Pelo Lema 2.2, para $\eta > 2$ existem $C_5, C_6 > 0$, tal que

$$|f(u) + tv_n - f(u)|^2 \leq M \left[|u|^2 + l^2 + C_5 \left(e^{\alpha\eta(u+l)^2} - 1 \right) + C_6 \left(e^{\alpha\eta u^2} - 1 \right) \right] = G(x).$$

Então, pela última estimativa e usando o Lema 2.1, segue que

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq G(x) \in L^1(\mathbb{R}^2). \quad (\text{B.6})$$

Agora, como $\|v_n\| \rightarrow 0$ em E , tem-se que $v_n \rightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Assim,

$$u(x) + tv_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Usando a continuidade da f , segue que

$$f(u(x) + tv_n(x)) \rightarrow f(u(x)) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$|f(u(x) + tv_n(x)) - f(u(x))|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2. \quad (\text{B.7})$$

Então, por (B.6) e (B.7), segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\|f(u(x) + tv_n(x)) - f(u(x))\|_2 \rightarrow 0.$$

Com isto e voltando para (B.4), obtemos que

$$\lim_{\|v_n\| \rightarrow 0} \frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C \int_0^1 \lim_{\|v_n\| \rightarrow 0} \|f(u + tv_n) - f(u)\|_2 dt = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\|v_n\| \rightarrow 0} \frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} = 0.$$

É fácil ver que o funcional $T(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$T(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx.$$

é linear. Além disso, $T(u)$ é contínuo. De fato, como

$$|T(u)v| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v dx \right| = \int_{\mathbb{R}^2} |f(u)||v| dx.$$

segue da desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $p, q > 1$, que

$$|T(u)v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(u)|^p dx \right)^{1/p} \|v\|_q.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1 e fazendo o uso da Imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \leq 1$ (ver Lema 1.1), existe $C_7 > 0$ tal que

$$|T(u)v| \leq C_7 \|v\|.$$

Logo, o funcional I_2 é diferenciável em E , com

$$I'_2(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} f(u)vdx.$$

Continuidade de I'_2

Consideremos uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \rightarrow u$ em E . Assim,

$$\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\|_* = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (f(u_n) - f(u))vdx \right| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(u)| |v| dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $p, q \geq 1$, tem-se

$$\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\|_* \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \|f(u_n) - f(u)\|_p \|v\|_q.$$

Fazendo uso da Imersão $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$, existe $C_8 > 0$ tal que

$$\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\|_* \leq C_8 \sup_{\|v\| \leq 1} \|f(u_n) - f(u)\|_p \|v\| = C_8 \|f(u_n) - f(u)\|_p.$$

Usando novamente o Lema 2.1 e procedendo de maneira similar aos cálculos anteriores, segue que

$$\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\|_* \rightarrow 0.$$

Logo, I'_2 é contínuo e a Afirmação 3 segue.

Afirmação 4. *O funcional I_3 é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ e*

$$I'_3(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} hvdv, \quad \forall v \in E.$$

De fato, vejamos que pela linearidade da integral, temos que I_3 também é linear. E como I_3 é um funcional linear limitado, segue que I_3 é contínuo e sua derivada de Fréchet é o próprio funcional. Assim I'_3 é contínua, e portanto, $I_3 \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $I'_3(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} hvdv$.

Agora provaremos um resultado, o qual é a recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$. Este resultado será necessário para provarmos a Proposição 3.1.

Proposição B.1. *Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ fortemente convergente. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq g(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Em particular, $u_n \rightarrow u$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, donde, podemos extrair uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) , a qual denotaremos por (u_k) , tal que para todo $k \geq 1$,

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{1,2} \leq \frac{1}{2^k}. \quad (\text{B.8})$$

Definindo,

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^n |u_{k+1}(x) - u_k(x)|,$$

temos pelas propriedades de espaço vetorial que $w_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e notemos que pela Desigualdade de Minkowsky e (B.8), tem-se

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{1,2} &= \left\| \sum_{k=1}^n |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \right\|_{1,2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \| |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \|_{1,2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 1. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|w_n\|_2 \leq 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla w_n\|_2 \leq 1.$$

Além disso,

$$w_1(x) \leq w_2(x) \leq \cdots \leq w_n(x)$$

e

$$w_n(x) \nearrow w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |u_{k+1}(x) - u_k(x)|,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Notemos que $|w_n(x)| \leq w(x)$, com $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$, então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\|w_n - w\|_2 \rightarrow 0.$$

Desta convergência e pelo fato que $|\nabla w_n|$ é limitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$, podemos concluir da Observação A.1 que $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora, para $l > k \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} |u_l(x) - u_k(x)| &\leq \sum_{j=k}^{l-1} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{l-1} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| - \sum_{j=1}^k |u_{j+1}(x) - u_j(x)| \\ &= w_{l-1}(x) - w_k(x) \leq w_{l-1}(x). \end{aligned}$$

Fazendo $l \rightarrow \infty$, obtemos para qualquer $k \geq 2$ que

$$|u(x) - u_k(x)| \leq w(x),$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Porém,

$$|u_k(x)| - |u(x)| \leq |u(x) - u_k(x)|.$$

Portanto,

$$|u_k(x)| \leq w(x) + |u(x)| \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Assim, basta tomar $g(x) = w(x) + |u(x)|$. ■

No próximo lema, mostraremos uma estimativa que foi utilizada no Lema 3.2.

Lema B.1. *Seja $\gamma_n = \|\widetilde{M}_n\|$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \log n \int_0^{\gamma_n^{-1}} e^{2 \log n (\tau^2 - \tau \gamma_n)} d\tau = 1.$$

Prova: Seja $s = \tau \gamma_n$. Assim, $d\tau = \gamma_n^{-1} ds$, $\tau = s \gamma_n^{-1}$ e para $\tau = \gamma_n^{-1}$ e $\tau = 0$, temos que $s = 1$ e $s = 0$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \gamma_n \log n \int_0^{\gamma_n^{-1}} e^{2 \log n (\tau^2 - \tau \gamma_n)} d\tau &= \gamma_n \log n \left\{ \gamma_n^{-1} \int_0^1 e^{2 \log n [(s \gamma_n^{-1})^2 - s]} ds \right\} \\ &= \log n \int_0^1 e^{2 \log n (s^2 \gamma_n^{-2} - s)} ds. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Agora, consideremos $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $g(s) = 2 \log n (s^2 \gamma_n^{-2} - s)$, então $g'(s) = 2 \log n (2s \gamma_n^{-2} - 1)$. Dessa maneira,

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 2 \log n (\gamma_n^{-2} - 1) \quad g'(0) = -2 \log n \quad \text{e} \quad g'(1) = 2 \log n (2 \gamma_n^{-2} - 1).$$

Daí para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e usando a expansão em série de Taylor de g nos pontos 0 e 1, temos

$$g(s) = -2s \log n + o(s), \quad s \in [0, \varepsilon]$$

e

$$g(s) = 2 \log n (2\gamma_n^{-2} - 1)(s - 1) + o(s), \quad s \in [1 - \varepsilon, 1].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \log n \int_0^\varepsilon e^{2 \log n (s^2 \gamma_n^{-2} - s)} ds &= \log n \int_0^\varepsilon e^{-2s \log n + o(s)} ds \\ &= \log n \left(-\frac{e^{-2s \log n}}{2 \log n} \Big|_0^\varepsilon \right) \\ &= -\frac{e^{-2\varepsilon \log n}}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\begin{aligned} \log n \int_{1-\varepsilon}^1 e^{2 \log n (s^2 \gamma_n^{-2} - s)} ds &= \log n \int_{1-\varepsilon}^1 e^{2 \log n (2\gamma_n^{-2} - 1)(s-1) + o(s)} ds \\ &= \log n \left(\frac{e^{2 \log n (2\gamma_n^{-2} - 1)(s-1)}}{2 \log n (2\gamma_n^{-2} - 1)} \Big|_{1-\varepsilon}^1 \right) \\ &= \frac{1}{2(2\gamma_n^{-2} - 1)} - \frac{e^{2 \log n (2\gamma_n^{-2} - 1)(-\varepsilon)}}{2(2\gamma_n^{-2} - 1)}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Por outro lado, pelo Teorema da Média para integrais, para cada n existe $s_n \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} \log n \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} e^{2 \log n (s^2 \gamma_n^{-2} - s)} ds &= \log n \left[e^{2 \log n (s_n^2 \gamma_n^{-2} - s_n)} \right] (1 - \varepsilon - \varepsilon) \\ &= \log n \left[e^{2 \log n (s_n \gamma_n^{-2} - 1) s_n} \right] (1 - 2\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Como (s_n) é uma sequência de números reais limitada, a menos de subsequência, $s_n \rightarrow s_0 \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Assim, $s_0(s_0 - 1) < 0$, $\gamma_n \rightarrow 1$. Logo, por (B.9), obtemos, de (B.10), (B.11) e (B.12), que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \log n \int_0^{\gamma_n^{-1}} e^{2 \log n (\tau^2 - \tau \gamma_n)} d\tau &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{e^{-2\varepsilon \log n}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\gamma_n^{-2} - 1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-2 \log n (2\gamma_n^{-2} - 1)\varepsilon}}{2(2\gamma_n^{-2} - 1)} + \log n \left[e^{2 \log n (s_n \gamma_n^{-2} - 1) s_n} \right] (1 - 2\varepsilon) \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Assim, concluimos a prova. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Adimurthi. *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n -Laplacian*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **17** (1990) 393–413.
- [2] Adimurthi.; Yadava, S. L. *Critical exponent problem in $\mathbb{R}^2$ with Neumann boundary condition*. Comm. Partial Differential Equations **15** (1990) 461–501.
- [3] Adimurthi.; Yadava, S. L. *Multiplicity results for semilinear elliptic equations in bounded domain of $\mathbb{R}^2$ involving critical exponent*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **17** (1990) 481–504.
- [4] Alves, C. O.; do Ó, J. M.; Miyagaki, H. *On nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth*. Nonlinear Anal. **56** (2004) 781–791.
- [5] Bartle, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley, New York, 1995.
- [6] Bartle, R. G. *The Elements of Real Analysis*, 2. ed. Canadá, 1975.
- [7] Berezin, F. A.; e Shubin, M.A. *The Schrodinger Equation*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [8] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [9] Cao, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$* . Comm. Partial Differential Equations **17** (1992) 407–435.
- [10] de Figueiredo, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and

- Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [11] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B. *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*. Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995) 139–153.
- [12] de Oliveira, C. R. *Introdução à Análise Funcional*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [13] de Oliveira, E. S. *Multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$ com condição de Neumann*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba. 2012.
- [14] de Souza, M. *On a singular elliptic problem involving critical growth in $\mathbb{R}^N$* . NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications. **18**, (2011), no. 2, 199–215.
- [15] de Souza, M. *Problemas Envolvendo o N -laplaciano em Subdomínios do $\mathbb{R}^N$ e Crescimento Crítico*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba. 2006.
- [16] do Ó, J. M. *Semilinear Dirichlet problems for the N -Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with nonlinearities in the critical growth range*. Differential Integral Equations **9** (1996) 967–979.
- [17] do Ó, J. M. *N -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*. Abstr. Appl. Anal. **2** (1997) 301–315.
- [18] do Ó, J. M.; Medeiros, E. S.; Severo, U. B. *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*. J. Math. Anal. Appl. **345**, (2008) 286–304.
- [19] do Ó, J. M.; Souto, A. S. *On a class of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth*. J. Differential Equations **174** (2001) 289–311.
- [20] do Ó, J. M.; de Souza, M. *On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications*. Math. Nachr. **284**, (2011) 1754–1776.
- [21] Isnard, C. *Introdução à Medida e Integração*. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

- [22] Jabri, Y. *The Mountain Pass Theorem: Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [23] Kavian, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques: Et Applications Aux Problèmes Elliptiques (Mathématiques et Applications)*. Vol 13. Springer France.
- [24] Lima, E. L. *Curso de Análise*. vol. 1. 12^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [25] Lima, E. L. *Curso de Análise*. vol. 2. 11^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [26] Rabinowitz, P. H.; Ambrosetti, A. *Dual variational methods in critical point theory and applications*. *Funct. Anal.* **14** (1973), 349–381.
- [27] Spivak, M. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Addison-Wesley. 1965.
- [28] Tonkes, E. *Solutions to a perturbed critical semilinear equation concerning the N -Laplacian in $\mathbb{R}^N$* . *Comment. Math. Univ. Carolin.* **40** (1999) 679–699.
- [29] Willem, M. *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 1997.
- [30] Yang, Yunyan. *Existence of positive solutions to quasi-linear elliptic equations with exponential growth in the whole Euclidean space*. *J. Funct. Anal.* **262** (2012) 1679–1704.