Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Coeficientes de Hilbert e profundidade de aneis graduados associados

Tuanny da Silva Maciel

2014

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Coeficientes de Hilbert e profundidade de aneis graduados associados

por

Tuanny da Silva Maciel

sob orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

Fevereiro de 2014

João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Coeficientes de Hilbert e profundidade de aneis graduados associados

por

Tuanny da Silva Maciel

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovado por:

____

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto (Orientador)

____

Prof. Dr. Aron Simis - UFPE

____

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal- UFPB

____

Prof. Dr. Fernando Xavier de Souza - UFPB (Suplente)

À minha mãe, pelo exemplo de mãe e mulher que é.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por me dá sabedoria para seguir em frente.

Aos meus pais e ao meu irmão, pelo incentivo e por nunca medirem esforços para me ajudar. Em especial a minha mãe, por ser, por muitas vezes, mãe e pai, além de me entender quando por muitas vezes eu não merecia.

A Ieva Maria, minha filhada, que mesmo tão pequena e não sabendo a importância disso tudo, me ajudou a colocar um sorriso no rosto e a perceber a beleza da vida.

Aos amigos que a matemática me deu, em especial a Yane Lisley, que estava comigo no momento que eu mais precisei de apoio, me incentivando a lutar e a nunca desistir.

Aos amigos que a vida me dá e que seguem caminho comigo.

A Fernando, Everaldo, Uberlândio, Pedro Hinojosa, Jacqueline e a todos os professores que ao longo da minha vida ensinaram muito além de apenas conhecimentos específicos. Em especial ao professor Aron Simis, que se dispôs, com atenção, a contribuir (antecipadamente) com este trabalho, fazendo correções e sugestões de grande importância. E ao professor Roberto Bedregal por aceitar participar da banca.

Ao meu orientador, Cleto Miranda, por ter feito o que poucos fariam, aceitando-me como orientanda na situação que eu estava. Além de contribuir para a minha formação acadêmica e pessoal, como professor e amigo.

Obrigada!

Sumário

Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar os belos resultados de Huckaba-Marley sobre os coeficientes de Hilbert de um ideal de co-comprimento finito em um anel local Cohen-Macaulay, bem como a profundidade do seu anel graduado associado. Para tal, aplicamos o complexo de Huckaba-Marley, ferramenta fundamental na obtenção do teorema principal aqui discutido.

Palavras-chave: Coeficientes de Hilbert, filtração de Hilbert, sequência superficial, redução mínima, profundidade.

Abstract

Our goal in this work is to present beautiful results due to Huckaba-Marley concerning the Hilbert coefficients of an ideal of finite co-length in a Cohen-Macaulay local ring, as well as the depth of its associated graded ring. For this end, we employ the Huckaba-Marley complex, which is a fundamental tool for the obtainment of the main theorem discussed herein.

Keyword: Hilbert coefficients, Hilbert filtration, superficial sequence, minimal reduction, depth.

Introdução

Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano de dimensão $d \geq 0$. A função de Hilbert-Samuel de um ideal I $\mathfrak{m}$-primário em A é definida como

$$H_I(n) = \lambda\left(\frac{A}{I^n}\right), \; n \geq 1,$$

onde λ denota a função comprimento. Samuel mostrou que, para n suficientemente grande a função de Hilbert $H_I(n)$ é dada por um polinômio, o qual denotaremos por $P_I(x)$, cujo grau é igual a d. Este é dito polinômio de Hilbert e pode ser escrito como

$$P_I(x) = e_0(I)\begin{pmatrix} x+d-1 \\ d \end{pmatrix} - e_1(I)\begin{pmatrix} x+d-2 \\ d-1 \end{pmatrix} + ... + (-1)^{d-1}e_{d-1}(I)x + (-1)^d e_d(I),$$

onde $e_i(I)$, com $i = 0, 1, 2, ..., \; d$, são os coeficientes de Hilbert e e_0, em especial, é a *multiplicidade* de I, a qual tem uma grande importância geométrica (que não iremos detalhar neste trabalho).

Dada uma filtração multiplicativa $\mathfrak{F}$ de ideais sobre A, consideraremos os aneis $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ e $G(\mathfrak{F})$, que denotarão a álgebra de Rees e o anel graduado associado de $\mathfrak{F}$, respectivamente (introduziremos também as noções de filtração Noetheriana e de Hilbert). Segundo Huckaba e Marley [6], uma das maiores dificuldades é encontrar condições sobre os coeficientes de Hilbert sob as quais o anel graduado associado $G(I)$ tenha profundidade suficientemente grande, em um sentido que tornaremos preciso adiante. Para encontrar tais condições, estuda-se os coeficientes de Hilbert, principalmente $e_1(I)$. Por exemplo, foi provado por Northcott o seguinte resultado básico: $e_1 = 0$ se, e somente se, I é gerado por um sistema de parâmentos.

Posteriormente, Huneke [7] provou que

$$\lambda\left(\frac{A}{I}\right) = e_0(I) - e_1(I) \;\text{ se, e somente se, } I^2 = IJ,$$

para alguma (equivalentemente, toda) redução mínima J de I.

Nosso objetivo é apresentar alguns resultados dessa natureza já existentes na literatura, utilizando ferramentas que serão vistas ao longo do trabalho, bem como certas condições que foram colocadas por Huckaba-Marley [6].

Os principais teoremas que apresentaremos aqui são:

(i) Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d, $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e J uma redução mínima de $\mathfrak{F}$. Então, para qualquer $r \geq 0$,

$$e_1(\mathfrak{F}) \geq \sum_{n=1}^{r} \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right),$$

verificando-se a igualdade se, e somente se, $G(\mathfrak{F})$ é Cohen-Macaulay e $r_J(I) \leq r$.

(ii) Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d, $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e J uma redução mínima de $\mathfrak{F}$. Então,

$$e_1(\mathfrak{F}) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda\left(\frac{I_n}{JI_{n-1}}\right),$$

verificando-se a igualdade se, e somente se, depth $G(\mathfrak{F}) \geq d - 1$.

Para isto, dividimos nosso trabalho em três capítulos. O primeiro apresenta algumas preliminares e definições básicas; o segundo trata essencialmente da construção do complexo de Huckaba-Marley e estudo de sua homologia, que serão de fundamental importância para o capítulo seguinte; finalmente, o terceiro capítulo fornece resultados importantes a respeito (da profundidade) do anel graduado associado da filtração $\mathfrak{F}$ a partir do estudo dos coeficientes de Hilbert.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e notações

Neste capítulo, daremos algumas definições necessárias a este trabalho e estabeleceremos algumas notações.

Nesta dissertação, A denotará um anel (comutativo com 1) local Noetheriano , com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e dimensão de Krull igual a d. Denotaremos por $\lambda(\cdot)$ a função comprimento de A-módulos.

1.1.1 Filtração de Hilbert

Definição 1.1. Um cadeia de ideais de A tal que $I_0 = A$, $I_1 \neq A$, e para quaisquer m, n vale $I_{n+1} \subset I_n$ e $I_n I_m \subset I_{n+m}$, é dita uma *filtração multiplicativa de ideais*, a qual denotaremos por

$$\mathfrak{F} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Utilizaremos uma filtração específica, a qual iremos definir adiante . Agora, definiremos, dada a filtração $\mathfrak{F}$, dois aneis graduados fundamentais.

Definição 1.2.

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{F}) = A \oplus I_1 t \oplus I_2 t^2 \oplus ...$$

e

$$G(\mathfrak{F}) = \frac{A}{I_1} \oplus \frac{I_1}{I_2} \oplus ...,$$

como sendo a *álgebra de Rees* e o *anel graduado associado de* $\mathfrak{F}$, respectivamente.

A multiplicação em $G(\mathfrak{F})$ é definida da seguinte maneira: se $a \in I_i$, $b \in I_j$ definimos $\overline{a}\overline{b}$ como $\overline{ab}$, isto é, a imagem de ab em I_{i+j}/I_{i+j+1}.

Dado um ideal $I \subseteq A$, denotaremos estas duas álgebras por $\mathfrak{R}(I)$ e $G(I)$ no caso em que a filtração é I-ádica, isto é, $\mathfrak{F} = \{I^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Entenderemos por $G(\mathfrak{F})_+$ o ideal de $G(\mathfrak{F})$ gerado pelos elementos homogêneos de grau positivo.

Com base na definição acima, temos:

Definição 1.3. Uma filtração $\mathfrak{F}$ é dita *Noetheriana* se $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ é um anel Noetheriano.

Definição 1.4. Diremos que $\mathfrak{F}$ é uma *filtração de Hilbert* se $\mathfrak{F}$ é uma filtração I_1-estável e I_1 é um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Aqui, $\mathfrak{F}$ é *estável* se $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ for um $\mathfrak{R}(I_1)$-módulo finitamente gerado.

De acordo com [3],

Teorema 1.5. *$\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ é um $\mathfrak{R}(I_1)$-módulo finitamente gerado se, e somente se, existe um inteiro k tal que $I_n \subset (I_1)^{n-k}$, para todo n.*

Observemos o seguinte teorema, o qual encontra-se em [10]:

Teorema 1.6. [*Hilbert-Serre*] *Seja $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ um anel graduado Noetheriano, com A_0 Artiniano e seja M um A-módulo graduado finitamente gerado. Suponhamos que $A = A_0[x_1, ..., x_r]$, com x_i de grau d_i, e considere*

$$P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Então, $P(M,t)$ é uma função racional de t, e pode ser escrito

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{d_i})},$$

onde $f(t)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Demonstração: Usaremos indução sobre r, isto é, sobre o número de geradores de A, como uma A_0-álgebra. Quando $r = 0$, temos $A = A_0$, tal que para n suficientemente grande, $M_n = 0$, e a série formal $P(M,t)$ é um polinômio.

Suponha $r > 0$. Fazendo multiplicação por x_r, temos um mapa A_0-linear $M_n \to M_{n+d_r}$. Escrevendo K_n e L_{n+d_r} para o núcleo e o conúcleo, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r} \longrightarrow L_{n+d_r} \longrightarrow 0\ .$$

Escreva $K = \bigoplus K_n$ e $L = \bigoplus L_n$. Então, K é um submódulo graduado de M e $L = \frac{M}{x_r M}$. Logo, K e L são $A-$módulos finitamente gerados. Além disso, $x_r K = x_r L = 0$. Logo, K e L podem ser vistos como $\frac{A}{(x_r)}-$módulos, de modo que podemos aplicar a hipótese de indução a $P(K,t)$ e $P(L,t)$.

Da sequência exata acima, obtemos

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d_r}) - \lambda(L_{n+d_r}) = 0.$$

Se multiplicarmos por t^{n+d_r} e somarmos sobre n, teremos

$$t^{d_r} P(K,t) - t^{d_r} P(M,t) + P(M,t) - P(L,t) = g(t),$$

onde $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Assim,

$$P(M,t)(1 - t^{d_r}) = \frac{f(t)}{(1 - t^{d_r})},$$

onde $f(t) = g(t) + P(L,t) - t^{d_r} P(K,t)$.

■

Com base no teorema acima, temos o seguinte resultado :

Corolário 1.7. *Se $\mathfrak{F}$ é uma filtração de Hilbert, então $G(\mathfrak{F})$ é um $G(I_1)$-módulo finitamente gerado. Além disso, para n suficientemente grande, temos que a função $H_{\mathfrak{F}}(n) = \lambda(\frac{A}{I_n})$ coincide com o polinômio $P_{\mathfrak{F}}(n)$ de grau d. A essa função daremos o nome de função de Hilbert(ou Hilbert- Samuel) e ao polinômio "associado", polinômio de Hilbert(ou de Hilbert-Samuel) de $\mathfrak{F}$.*

Definimos por $n(\mathfrak{F}) = \sup\{n \in \mathbb{Z} | H_{\mathfrak{F}}(n) \neq P_{\mathfrak{F}}(n)\}$. Usaremos tal definição mais adiante.

Para $m,\ k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 1$, defina

$$\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Podemos escrever

$$P_{\mathfrak{F}}(n) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(\mathfrak{F}) \left(\begin{array}{c} n+d-i-1 \\ d-i \end{array} \right),$$

onde os inteiros $e_0(\mathfrak{F}), e_1(\mathfrak{F}), ..., e_d(\mathfrak{F})$ são os *coeficientes de Hilbert* de $\mathfrak{F}$.

Indicamos a leitura de [10] para maiores detalhes.

Para uma filtração qualquer $\mathfrak{F} = \{I_n\}$, e um ideal J de A, $\frac{\mathfrak{F}}{J}$ denotará a filtração $\{\frac{(I_n,J)}{J}\}$ do anel $\frac{A}{J}$. Percebe-se, a partir das definições, que se $\mathfrak{F}$ é uma filtração Noetheriana (de Hilbert) então $\frac{\mathfrak{F}}{J}$ também o é.

Definição 1.8. Um ideal $J \subset I_1$ é dito uma *redução* de $\mathfrak{F}$ se $JI_n = I_{n+1}$, para n suficientemente grande. Equivalentemente, $J \subset I_1$ é uma redução de $\mathfrak{F}$ se, e somente se, $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ é um $\mathfrak{R}(J)$-módulo finitamente gerado. Entenderemos por uma *redução mínima* de $\mathfrak{F}$ uma redução da filtração $\mathfrak{F}$ que é minimal com respeito à inclusão. No caso em que J é uma redução da filtração I-ádica $\mathfrak{F} = \{I^n\}$ diremos que J é uma redução de I.

Observação 1.9. Suponha que $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ é infinito. De acordo com [12], sempre existe uma redução mínima de ideais. Além disso, se I é um ideal $\mathfrak{m}$-primário, então a redução J de I é mínima se , e somente se, J é gerado por d elementos. Mais ainda, se $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ é um $\mathfrak{R}(I_1)$-módulo finitamente gerado, então J será uma redução de $\mathfrak{F}$ se, e somente se, J é uma redução de I_1. Dessa forma, concluímos que reduções mínimas de filtração de Hilbert sempre existem e são geradas por d elementos.

Definimos $r_J(\mathfrak{F}) = \sup\{n \in \mathbb{Z} | \ I_n \neq JI_{n-1}\}$ para uma redução mínima J de $\mathfrak{F}$. Este número é chamado *número de redução* de $\mathfrak{F}$ com respeito a J. O ínfimo do conjunto $\{r(J)(\mathfrak{F})\}_J$, com J variando sobre todas as reduções mínimas de $\mathfrak{F}$, é o *número de redução de* $\mathfrak{F}$, denotado por $r(\mathfrak{F})$.

Para simplificar notações, usaremos $r(I),\ n(I),\ P_I,\ H_I$ e $e_i(I)$ $(0 \leq i \leq d)$ ao invés de $r(\mathfrak{F}),\ n(\mathfrak{F}),\ P_{\mathfrak{F}},\ H_{\mathfrak{F}}$ e $e_i(\mathfrak{F})$ sempre que estivermos trabalhando com $\mathfrak{F} = \{I^n\}$, onde I é um ideal $\mathfrak{m}$-primário.

Seja $\mathfrak{F}$ uma filtração Noetheriana. Para qualquer $x \in I_1$, considere x^* a imagem de x em $G(\mathfrak{F})_1 = \frac{I_1}{I_2}$.

Observação 1.10. Notemos que se x^* é um elemento regular de $G(\mathfrak{F})$ então, x é um elemento regular de A e $G(\dfrac{\mathfrak{F}}{(x)}) \cong \dfrac{G(\mathfrak{F})}{(x^*)}$.

A definição a seguir será de fundamental importância mais adiante.

Definição 1.11. Um elemento $x \in I_1$ é dito um *elemento superficial* para $\mathfrak{F}$ se existe um inteiro não-negativo c tal que

$$(I_{n+1} : x) \cap I_c = I_n, \quad \forall\, n \geq c.$$

Em termos do anel graduado associado de $\mathfrak{F}$, x é um elemento superficial para $\mathfrak{F}$ se, e somente se, $(0 :_{G(\mathfrak{F})} x^*)_n = 0$, para n suficientemente grande.

Definição 1.12. Uma sequência $x_1, ..., x_k$ é uma *sequência superficial* para $\mathfrak{F}$ se x_i é um elemento superficial para $\overline{\mathfrak{F}} = \dfrac{\mathfrak{F}}{(x_1, ..., x_{i-1})}$, para $2 \leq i \leq k$.

Definição 1.13. Sejam A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado, e J um ideal de A tal que $JM \neq M$. Definimos o *grade de J em M* como sendo o comprimento comum das M-sequências máximas em J, denotado por .

$$\operatorname{grade}(J, M).$$

No caso em que $M = A$, escrevemos grade (J).

Definição 1.14. Um elemento $x \in A$ é dito um *não-divisor-de-zero* em M se a condição $xz = 0$, para $z \in M$, implicar em $z = 0$. Uma sequência $\underline{x} = x_1, ..., x_n$ de elementos de A é chamada uma *M-sequência fraca* se

(i) x_i é um não divisor-de-zero em $\frac{M}{(x_1,...,x_{i-1})M}$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Se adicionarmos a hipótese $(\underline{x})M \neq M$, diremos que $\underline{x}$ é uma M-sequência (ou sequência M-regular).

Definição 1.15. Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano , e seja M um A-módulo finitamente gerado. A *profundidade* de M é o número

$$\operatorname{depth}(M) = \operatorname{grade}(\mathfrak{m}, M).$$

Se $\mathfrak{F}$ é uma filtração de Hilbert e $x_1, ..., x_k$ é uma sequência superficial para $\mathfrak{F}$, e depth $A \geq k$, escrevemos

$$P_{\overline{\mathfrak{F}}}(n) = \Delta^k(P_{\mathfrak{F}}(n)) = \sum_{i=0}^{d-k} (-1)^i e_i(\mathfrak{F}) \begin{pmatrix} n+d-1-i \\ d-i \end{pmatrix}.$$

Observação 1.16. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função. Definimos o *operador diferença* como sendo $\Delta[f(n)] = f(n) - f(n-1)$, e $\Delta^i[f(n)] = \Delta^{i-1}[\Delta[f(n)]]$.

Lema 1.17. *Seja $\mathfrak{F}$ uma filtração Noetheriana e $\underline{x} = x_1, ..., x_k$ uma sequência superficial para $\mathfrak{F}$. Se* grade $G(\mathfrak{F})_+ \geq k$, *então $x^* = x_1^*, ..., x_k^*$ é uma sequência regular.*

Demonstração: Por indução, é suficiente mostrar o caso $k = 1$. Mas

$$(0 :_{G(\mathfrak{F})} x_1^*) \subset \bigcup_{n \geq 0} 0 :_{G(\mathfrak{F})} G(\mathfrak{F})_+^n = H^0_{G(\mathfrak{F})_+}(G(\mathfrak{F})) = 0.$$

Logo, x_1^* é elemento regular.

■

Lema 1.18. *Sejam $\mathfrak{F} = \{I_n\}$ uma filtração Noetheriana e $\underline{x} = x_1, ..., x_k$ uma sequência superficial para $\mathfrak{F}$. Se* grade $G(\frac{\mathfrak{F}}{(x_1,...,x_k)})_+ \geq 1$, *então* grade $G(\mathfrak{F})_+ \geq k+1$.

Demonstração: Consideremos o caso $k = 1$ e escrevamos $x_1 = x$. Por hipótese, grade $G(\frac{\mathfrak{F}}{(x)})_+ \geq 1$. Agora, seja y um elemento em I_t tal que a imagem de y em $G(\frac{\mathfrak{F}}{(x)})_t$, para algum $t > 0$, não é um divisor-de-zero em $G(\frac{\mathfrak{F}}{(x)})$. Assim, $(I_{n+tj} : y^j) \subset (I_n, x)$, para todo n, j. Já que x é superficial para $\mathfrak{F}$, existe um inteiro c tal que $(I_{n+j} : x^j) \cap I_c = I_n$, para todo $j \geq 1$ e $n \geq c$. Sejam n e j arbitrários e p qualquer inteiro maior que $\frac{c}{t}$. Assim,

$$y^p(I_{n+j} : x^j) \subseteq (I_{n+pt+j} : x^j) \cap I_c \subseteq I_{n+pt}.$$

(Note que para obtermos tais inclusões basta olharmos para a definição de elemento superficial e propriedades do condutor de um ideal. Observemos também que é essencial o fato de $p > \frac{c}{t}$)

Portanto,

$$(I_{n+j} : x^j) \subseteq (I_{n+pt} : y^p) \subseteq (I_n, x).$$

Daí, $(I_{n+j} : x^j) = I_n + x(I_{n+j} : x^{j+1})$, para todo n e j. Aplicando esse processo n vezes, encontramos

$$(I_{n+j} : x^j) = I_n + xI_{n-1} + x^2I_{n-2} + ... + x^n(I_{n+j} : x^{j+n}) = I_n.$$

Logo, x^* é um elemento regular de $G(\mathfrak{F})$. E como $G(\mathfrak{F}/(x)) \cong G(\mathfrak{F})/(x^*)$, temos grade $G(\mathfrak{F})_+ \geq 2$.

Agora, suponhamos $k > 1$. Pelo caso anterior, grade $G\ (\frac{\mathfrak{F}}{(x_1, ..., x_{k-1})})_+ \geq 2$. Por indução sobre k, grade $G(\mathfrak{F})_+ \geq k$ e pelo lema anterior, $x_1^*, ..., x_k^*$ é uma sequência regular em $G(\mathfrak{F})$. Desde que $G(\mathfrak{F}/(\underline{x})) \cong G(\mathfrak{F})/(\underline{x^*})$, temos grade $G(\mathfrak{F})_+ \geq k+1$, como queríamos.

■

Capítulo 2

O complexo de Huckaba-Marley

Estudaremos um complexo, o qual chamamos *complexo de Huckaba-Marley*, bem como suas propriedades.

2.1 A construção do complexo

Apresentaremos um resultado conhecido como *Lema Fundamental* que foi provado por Huneke [7], e também a generalização de tal lema dada por Huckaba [5]. Ambos nos dão um interessante fenômeno a respeito das funções e polinômios de Hilbert.

Lema 2.1. (*Lema Fundamental*) *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel local Cohen-Macaulay* 2*-dimensional,* I *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário de* A*, e* $J = (x_1, x_2)$ *uma redução mínima de* I*. Então*

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) - \lambda\left(\frac{(I^n : J)}{I^{n-1}}\right) = \Delta^2[P_I(n+1) - H_I(n+1)],$$

para todo $n \geq 1$.

Huneke usou este lema para obter algumas fórmulas para os coeficientes de Hilbert e para caracterizar a condição $H_I(n) = P_I(n)$, para $n \geq 1$, sob certas restrições em I.

Huckaba generalizou o lema fundamental para um anel local Cohen-Macaulay d-dimensional. Antes de apresentarmos a generalização, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.2. Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local d-dimensional $(d > 0)$, I um ideal de A $\mathfrak{m}$-primário e J uma redução mínima de I. Assuma que $J = (x_1, ..., x_d)$, onde $\{x_1, ..., x_d\}$

é uma sequência superficial para I, e considere $J_i = (x_1, ..., x_i)$ para $0 \leq i \leq d$, onde $J_0 = (0)$. Para um inteiro não-negativo n, definimos $\mathfrak{w}_n(J, I) = 0$ se $d = 1$, e para $d > 1$

$$\mathfrak{w}_n(J,I) = \Delta^{d-1}\left[\lambda\left(\frac{(I^{n+1}:x_1)}{I^n}\right)\right] + \Delta^{d-2}\left[\lambda\left(\frac{((I^{n+1},J_1):x_2)}{(I^n,J_1)}\right)\right]$$

$$+ ... + \Delta\left[\lambda\left(\frac{((I^{n+1},J_{d-2}):x_{d-1})}{(I^n,J_{d-2})}\right)\right] - \lambda\left(\frac{(I^{n+1}:x_1)}{(JI^n:x_1)}\right)$$

$$-\lambda\left(\frac{((I^{n+1},J_1):x_2)}{((JI^n,J_1):x_2)}\right) - ... - \lambda\left(\frac{((I^{n+1},J_{d-2}):x_{d-1})}{((JI^n,J_{d-2}):x_{d-1})}\right).$$

Observação 2.3. Notemos que a definição acima fica assegurada devido a [21, Remark 2.6], que garante que a redução mínima $J = (x_1, ..., x_d)$ é gerada por uma sequência superficial $x_1, ..., x_d$ para I.

Lema 2.4. *Se A, I, e $J = (x_1, ..., x_d)$ são como na definição acima e se $d > 1$, então*

$$\mathfrak{w}_n(J,I) = \mathfrak{w}_n(\overline{J},\overline{I}) + \Delta^{d-1}[\lambda((I^{n+1}:x_1)/I^n] - \lambda((I^{n+1}:x_1)/(JI^n:x_1)),$$

para todo $n \geq 1$, onde “ $-$ ” denota imagem módulo (x_1).

Demonstração: Para a prova deste resultado basta usar a definição acima e observar que $x_1 \in (I^n, J_i)$ e $x_1 \in (JI^n, (J_i : x_{i+1}))$, para todo $i \geq 1$. ■

Agora, veremos a generalização do lema fundamental de Huneke, provado por Huckaba [5].

Teorema 2.5. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de A, e $J = (x_1, ..., x_d)$ uma redução mínima de I, e suponha que $\{x_1, ..., x_d\}$ é uma sequência superficial para I. Então, para todo $n \geq 0$, temos*

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) + \mathfrak{w}_n(J,I) = \Delta^d[P_I(n+1) - H_I(n+1)].$$

Demonstração: Como A é Cohen-Macaulay, usando a observação 1.10, $\{x_1, ..., x_d\}$ é uma A-sequência regular. Usaremos indução sobre d para provarmos o teorema. Se $d = 1$, então $\mathfrak{w}_n(J, I) = 0$ e

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{x_1I^n}\right) = \lambda\left(\frac{A}{(x_1)}\right) + \lambda\left(\frac{(x_1)}{x_1I^n}\right) - \lambda\left(\frac{A}{I^{n+1}}\right).$$

Por hipótese, (x_1) é uma redução mínima de I e A é Cohen-Macaulay, logo $e_0(I) = \lambda(A/(x_1))$. Agora, usando o fato que x_1 é A-regular, temos $(x_1)/x_1I^n \cong A/I^n$. Portanto,

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{x_1I^n}\right) = e_0 + H_I(n) - H_I(n+1),$$

o qual podemos escrever como

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{x_1I^n}\right) = \Delta[P_I(n+1) - H_I(n+1)].$$

Seja $d > 1$, e denote imagem módulo (x_1) por " $-$ " . Temos

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) = \lambda\left(\frac{A}{(JI^n, x_1)}\right) + \lambda\left(\frac{(JI^n, x_1)}{JI^n}\right) - \lambda\left(\frac{A}{(I^{n+1}, x_1)}\right) - \lambda\left(\frac{(I^{n+1}, x_1)}{I^{n+1}}\right).$$

Usando o fato de que $(JI^n, x_1)/JI^n \cong A/(JI^n : x_1)$ e $(I^{n+1}, x_1)/I^{n+1} \cong A/(I^{n+1} : x_1)$, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) &= \lambda\left(\frac{\overline{I^{n+1}}}{\overline{JI^n}}\right) + \lambda\left(\frac{A}{(JI^n : x_1)}\right) - \lambda\left(\frac{A}{(I^{n+1} : x_1)}\right) \\ &= \lambda\left(\frac{\overline{I^{n+1}}}{\overline{JI^n}}\right) + \lambda\left(\frac{(I^{n+1} : x_1)}{(JI^n : x_1)}\right).\end{aligned}$$

Combinando a equação acima com as nossas hipóteses e aplicando o lema 2.4, obtemos

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) + \mathfrak{w}_n(J, I) = \Delta^{d-1}\left[P_{\overline{I}}(n+1) - H_{\overline{I}}(n+1)\right] + \Delta^{d-1}\left[\lambda\left(\frac{(I^{n+1} : x_1)}{I^n}\right)\right].$$

Note que $P_{\overline{I}}(n+1) = P_I(n+1) - P_I(n)$, já que x_1 é um elemento superficial para I, e que $H_{\overline{I}}(n+1) = H_I(n+1) - H_I(n) + \lambda\left(\frac{(I^{n+1}:x_1)}{I^n}\right)$ (Vide [11, (22.6)]). Portanto,

$$\lambda\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) + \mathfrak{w}_n(J, I) =$$

$$= \Delta^{d-1}\left[\Delta\left[P_I(n+1) - H_I(n+1)\right] - \lambda\left(\frac{(I^{n+1} : x_1)}{I^n}\right)\right] + \Delta^{d-1}\left[\lambda\left(\frac{I^{n+1} : x_1}{I_n}\right)\right]$$

$$= \Delta^d[P_I(n+1) - H_I(n+1)],$$

provando o teorema.

■

Observação 2.6. Tomando $d = 2$ no teorema acima, recuperamos o lema fundamental provado por Huneke em [7], ao observar a exatidão do complexo

$$0 \longrightarrow \frac{A}{(I^n:(x,y))} \xrightarrow{\alpha} \left(\frac{A}{I^n}\right)^2 \xrightarrow{\beta} \frac{(x,y)}{I^n(x,y)} \longrightarrow 0\,,$$

onde n é um inteiro qualquer e (x,y) é uma redução de I, $\alpha(\overline{r}) = (-\overline{ry}, \overline{rx})$ e $\beta(\overline{s},\overline{t}) = \overline{sx+ty}$. A partir de agora, iremos analisar uma formulação diferente deste complexo.

Sejam $(A,\mathfrak{m})$ um anel local d-dimensional, $\mathfrak{F} = \{I_n\}$ uma filtração, e $\underline{x} = x_1,...,x_k \in I_1$. Para qualquer inteiro n, construiremos o complexo $C.(\underline{x},\mathfrak{F},n)$ da seguinte maneira: Para $k=1$, definimos $C.(x_1,\mathfrak{F},n)$ como sendo

$$0 \longrightarrow \frac{A}{I_{n-1}} \xrightarrow{x_1} \frac{A}{I_n} \longrightarrow 0.$$

Para $k>1$, assumimos que $C.(x_1,...,x_{k-1},\mathfrak{F},n)$ foi definido e consideramos o mapa de conexão de complexos

$$f : C.(x_1,...,x_{k-1},\mathfrak{F},n-1) \to C.(x_1,...,x_{k-1},\mathfrak{F},n),$$

dado pela multiplicação por x_k. Defina $C.(x_1,...,x_k,\mathfrak{F},n)$ como sendo o “mapping cone"de f [18, (p.374-377)]. É possível mostrar que $C.(\underline{x},\mathfrak{F},n)$ tem a forma

$$0 \longrightarrow \frac{A}{I_{n-k}} \longrightarrow \left(\frac{A}{I_{n-k+1}}\right)^k \longrightarrow \left(\frac{A}{I_{n-k+2}}\right)^{\binom{k}{2}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{A}{I_n} \longrightarrow 0\,.$$

e que existe uma sobrejeção natural de complexos

$$K.(\underline{x},A) \to C.(\underline{x},\mathfrak{F},n), \tag{2.1}$$

onde $K.(\underline{x},A)$ é o complexo de Koszul da sequência $\underline{x}$.

Sejam $C.(n) = C.(\underline{x},\mathfrak{F},n)$ e $C'_.(n) = C.(x_1,...,x_{k-1},\mathfrak{F},n)$. Para qualquer n, existe uma sequência exata de complexos

$$0 \longrightarrow C'_.(n) \longrightarrow C.(n) \longrightarrow C'_.(n-1)[-1] \longrightarrow 0,$$

onde $C'_.(n-1)[-1]$ é o complexo $C'_.(n-1)$ torcida 1 grau à esquerda . Dessa forma, podemos estender a uma sequência exata longa em homologia

$$\cdots \longrightarrow H_i(C'_.(n)) \longrightarrow H_i(C.(n)) \longrightarrow H_{i-1}(C'_.(n-1)) \xrightarrow{\pm x_k} H_{i-1}(C'_.(n)) \longrightarrow \cdots\,. \tag{2.2}$$

Lema 2.7. *Sejam* $\mathfrak{F} = \{I_n\}$ *uma filtração de Hilbert,* $\underline{x} = x_1, ..., x_k \in I_1$ *e* $C.(n) = C.(\underline{x}, \mathfrak{F}, n)$*. Assim,*

(a) $H_0(C.(n)) = \dfrac{A}{(I_n, x)}$;

(b) $H_k(C.(n)) = \dfrac{(I_{n-k+1} : \underline{x})}{I_{n-k}}$;

(c) *Se* $x_1, ..., x_k$ *é uma sequência regular, então* $H_1(C.(n)) \cong \dfrac{(\underline{x}) \cap I_n}{(\underline{x})I_{n-1}}$.

Demonstração: Para o item (a) e (b) basta usarmos a equação (2.2).

Provaremos o item (c). Primeiro, notemos que, como por hipótese $\underline{x}$ é uma sequência regular,

$$A^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{f} A^k \xrightarrow{g} (\underline{x}) \longrightarrow 0.$$

é uma sequência exata (onde f e g são os homomorfismos apropriados oriundos do complexo de Koszul $K.(\underline{x}, A)$).

Tensorizando esta sequência com $\frac{A}{I_{n-1}}$, vemos que a sequência

$$\left(\frac{A}{I_{n-1}}\right)^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\alpha} \left(\frac{A}{I_{n-1}}\right)^k \longrightarrow \frac{(\underline{x})}{(\underline{x})I_{n-1}} \longrightarrow 0,$$

também é exata.

Notemos que se $\phi_i : C_i(n) \to C_{i-1}(n)$ é a i-ésima diferencial do complexo $C.(n)$ então $Im(\phi_2) = Im(\alpha)$. Assim, temos o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & im(\phi_2) \arrow[r] \arrow[d] & \left(\frac{A}{I_{n-1}}\right)^k \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \frac{(\underline{x})}{(\underline{x})I_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\phi_1) \arrow[r] & \left(\frac{A}{I_{n-1}}\right)^k \arrow[r, "\phi_1"] & \frac{A}{I_n} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como ψ é a aplicação identidade, obtemos

$$H_1(C.(n)) = \frac{Ker(\phi_1)}{Im(\phi_2)} \cong Ker(\beta) \cong \frac{((\underline{x}) \cap I_n)}{(\underline{x})I_{n-1}}.$$

■

No próximo resultado apresentaremos uma caracterização para o grade de $(\underline{x}^*)$, que será determinado pela posição do último módulo de homologia não-nulo do complexo $C.(n) = C.(\underline{x}, \mathfrak{F}, n)$, para algum n.

Proposição 2.8. *Sejam $\mathfrak{F} = \{I_n\}$ uma filtração Noetheriana, $\underline{x} = x_1, ..., x_k \in I_1$ e $\underline{x}^* = x_1^*, ..., x_k^*$. Então,*

$$\text{grade }(\underline{x}^*) = \min\{j|\ H_{k-j}(C.(n)) \neq 0,\ \textit{para algum } n\}.$$

Demonstração: Consideremos o complexo $K. = K.(\underline{x}^*, G(\mathfrak{F}))$. Por ([10, (Thm. 16.8)]), sabemos que

$$\text{grade }(\underline{x}^*) = \min\{j|\ H_{k-j}(K.) \neq 0\}.$$

Assim, é suficiente provar que $H_i(K.) = 0$, para todo $i \geq j$ se, e somente se, $H_i(C.(n)) = 0$, para todo n e $i \geq j$. Desde que cada x_i^* é homogêneo de grau 1, o complexo $K.$ é a soma direta de complexos da forma

$$0 \longrightarrow \frac{I_{n-k-1}}{I_{n-k}} \longrightarrow \left(\frac{I_{n-k}}{I_{n-k+1}}\right)^k \longrightarrow \ldots \longrightarrow \frac{I_{n-1}}{I_n} \longrightarrow 0\ .$$

Seja $K.(n)$ o complexo acima. Logo, para cada n temos a sequência exata de complexos:

$$0 \longrightarrow K.(n) \longrightarrow C.(n) \longrightarrow C.(n-1) \longrightarrow 0\ .$$

Da correspondente sequência exata longa em homologia, temos que se $H_i(C.(n)) = 0$, para todo n e $i \geq j$, então $H_i(K.) = \bigoplus_n H_i(K.(n)) = 0$, para todo n e $i \geq j$. Reciprocamente, se $H_i(K.) = 0$ para $i \geq j$, então a sequência

$$0 \longrightarrow H_i(C.(n)) \longrightarrow H_i(C.(n-1))$$

é exata para todo n e $i \geq j$. Um vez que $H_i(C.(n)) = 0$, para $n \leq 0$, temos $H_i(C.(n)) = 0$ para todo n e $i \geq j$.

■

O complexo $C.(n)$ também satisfaz uma certa condição de rigidez, a qual descreveremos no seguinte lema:

Lema 2.9. *Seja $\mathfrak{F}$, $\underline{x}$ e $C.(n)$ como na proposição acima. Suponhamos que para algum $j \geq 1$, $H_j(C.(n)) = 0$, para todo n. Então, $H_i(C.(n)) = 0$, para todo n e $i \geq j$.*

Demonstração: No caso $k = 1$, não temos nada a provar. Agora, assumamos $k > 1$ e suponhamos que o resultado é válido para o complexo $C'.(x_1, ..., x_{k-1}, \mathfrak{F}, n)$. Logo, por (2.2), temos a sequência exata

$$H_{j+1}(C_\cdot(n)) \longrightarrow H_j(C'_\cdot(n-1)) \longrightarrow H_j(C'_\cdot(n)) \longrightarrow 0\,.$$

Como $H_j(C'_\cdot(n)) = 0$ para $n \leq 0$, temos $H_j(C'_\cdot(n)) = 0$, para todo n. Novamente, por (2.2), $H_i(C'_\cdot(n)) = 0$ para todo n e $i \geq j$. Como queríamos mostrar.

■

Ocasionalmente, faremos uso do seguinte fato, que generaliza para filtrações um importante resultado de Valabrega e Valla [19].

Proposição 2.10. *Considere $\mathfrak{F}$ e $\underline{x}$ como na proposição 2.8. Então, $\underline{x}^*$ é uma sequência regular se, e somente se, $\underline{x}$ é uma sequência regular e $(\underline{x}) \cap I_n = (\underline{x})I_{n-1}$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Pelo lema 2.7, se $\underline{x}$ é uma sequência regular, então

$$H_1(C_\cdot(n)) \cong \frac{((\underline{x}) \cap I_n)}{(\underline{x})I_{n-1}} = \frac{(\underline{x})I_{n-1}}{(\underline{x})I_{n-1}},$$

o que nos dá $H_1(C_\cdot(n)) = 0$. Agora, pelo lema 2.9, temos $H_i(C_\cdot(n)) = 0$, para todo n e $i \geq j$, ou ainda, $H_i(C_\cdot(n)) \neq 0$ para $j > i$. Portanto,

$$\text{grade } (\underline{x}^*) = \min\{j|\ H_{k-j}(C_\cdot(n)) \neq 0,\ \text{para algum } n\} = k,$$

ou seja, $\underline{x}^*$ é uma sequência regular. A outra implicação é análoga. ■

Agora, estabeleceremos algumas propriedades especiais do complexo $C_\cdot(\underline{x}, \mathfrak{F}, n)$ no caso em que $\underline{x}$ é uma sequência superficial para a filtração $\mathfrak{F}$.

Começamos com:

Lema 2.11. *Seja $\mathfrak{F}$, $\underline{x}$ e $C_\cdot(n)$ como na proposição 2.8. Suponha que $\underline{x}$ é uma sequência regular em A, e que além disso, é uma sequência superficial em $\mathfrak{F}$. Então, $H_i(C_\cdot(n)) = 0$, para $i \geq 1$ e n suficientemente grande.*

Demonstração: Para $k = 1$, temos, pelo lema 2.7, $H_1(C_\cdot(n)) = \frac{(I_n : x_1)}{I_{n-1}}$. Já que x_1 é um não-divisor-de-zero e, além disso, um elemento superficial para $\mathfrak{F}$, temos que $(I_n : x_1) = I_{n-1}$, para n suficientemente grande. Daí, $H_1(C_\cdot(n)) = 0$, e agora aplicamos o lema 2.9.

Suponhamos $k > 1$ e assuma que o resultado é válido para o complexo $C'_\cdot(n) = C_\cdot(x_1, ..., x_{k-1}, \mathfrak{F}, n)$. Por (2.2), temos $H_i(C_\cdot(n)) = 0$, para $i \geq 2$ e n suficientemente grande. Para $i = 1$, temos que a sequência

$$0 \longrightarrow H_1(C.(n)) \longrightarrow \frac{A}{(I_{n-1}, x_1, ..., x_{k-1})} \xrightarrow{\alpha_n} \frac{A}{(I_n, x_1, ..., x_{k-1})} \longrightarrow 0$$

é exata para n suficientemente grande (α_n denota multiplicação por x_k).

Considere $\overline{\mathfrak{F}} = \dfrac{\mathfrak{F}}{(x_1, ..., x_{k-1})}$ e $\overline{x_k}$ a imagem de x_k no anel $\dfrac{A}{(x_1, ..., x_{k-1})}$. Pelo lema 2.7, item (*b*), $H_1(C.(\overline{x_k}, \overline{\mathfrak{F}}, n)) = Ker(\alpha_n)$, para todo n. Assim, pelo caso $k = 1$, temos $Ker(\alpha_n) = 0$, para n suficientemente grande, logo, $H_1(C.(n)) = 0$ para n suficientemente grande.

■

Considere $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e $\underline{x} = x_1, ..., x_k$ uma sequência regular em A e superficial para $\mathfrak{F}$.

Observação 2.12. Uma vez que $\mathfrak{F}$ é uma filtração de Hilbert, $H_i(C.(\underline{x}, \mathfrak{F}, n))$ tem comprimento finito, para todo i e n.

Com base nesta observação, podemos definir, para $i \geq 1$,

$$h_i(\underline{x}, \mathfrak{F}) = \sum_{n \geq 1} \lambda(H_i(C.(\underline{x}, \mathfrak{F}, n))).$$

Pelo lema anterior, estes inteiros estão bem definidos. Claramente, $h_i(\underline{x}, \mathfrak{F}) = 0$ para $i > k$.

Apresentaremos agora um teorema que será fundamental para provarmos alguns resultados do próximo capítulo.

Teorema 2.13. *Sejam $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e $\underline{x} = x_1, ..., x_k$ uma sequência regular em A e superficial para $\mathfrak{F}$. Então, para cada $i \geq 1$,*

$$\sum_{j \geq i} (-1)^{j-i} h_j(\underline{x}, \mathfrak{F}) \geq 0.$$

Além disso, ocorre igualdade se, e somente se, grade $(\underline{x}^*) \geq k - i + 1$.

Demonstração: Usaremos indução sobre k. Para $k = 1$, o resultado segue diretamente da proposição 2.8 (Note que $\mathfrak{F}$ é uma filtração Noetheriana). Agora, assumamos $k > 1$ e considere $C.(n) = C.(\underline{x}, \mathfrak{F}, n)$ e $C'_.(n) = C.(x_1, ..., x_{k-1}, \mathfrak{F}, n)$. Fixemos $i \geq 1$ e para cada n seja B_n o núcleo da aplicação $H_i(C.(n)) \to H_{i-1}(C'_.(n-1))$ dada em (2.2). Assim, para cada n temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_k(C_.(n)) \longrightarrow H_{k-1}(C'_.(n-1)) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_i(C'_.(n)) \longrightarrow B_n \longrightarrow 0\,.$$

Portanto, para cada n temos

$$\lambda(B_n) = \sum_{j\geq i+1} (-1)^{j-i-1}\lambda(H_j(C_.(n))) + \sum_{j\geq i}(-1)^{j-i}\Delta(\lambda(H_j(C'_.(n)))).$$

Somando estas equações sobre todo $n \geq 1$ e usando o fato de que $\sum_{n\geq 1}\Delta(\lambda(H_j(C'_.(n)))) = 0$ para $j \geq 1$ (lema 2.11), encontramos

$$h_i(\underline{x}, \mathfrak{F}) \geq \sum_{n\geq 1}\lambda(B_n) = \sum_{j\geq i+1}(-1)^{j-i-1}h_j(\underline{x}, \mathfrak{F}), \tag{2.3}$$

o que prova a primeira parte do teorema.

Pela proposição 2.8, se grade $(\underline{x}^*) \geq k-i+1$, então $H_j(C_.(n)) = 0$, para todo n e $j \geq i$ (lema 2.9).

Reciprocamente, suponhamos

$$\sum_{j\geq i}(-1)^{j-i}h_j(\underline{x}, \mathfrak{F}) = 0.$$

Então, por (2.3), temos $h_i(\underline{x}, \mathfrak{F}) = \sum_{n\geq 1}\lambda(B_n)$. Consequentemente, $B_n = H_i(C_.(n))$, para todo $n \geq 1$. Portanto, a aplicação

$$H_{i-1}(C'_.(n-1)) \xrightarrow{x_k} H_{i-1}(C'_.(n))\,,$$

é injetiva para todo $n \geq 1$. Se $i > 1$, então pelo lema 2.11, $H_{i-1}(C'_.(n)) = 0$, para todo n. Assim, o lema 2.9 fornece $H_j(C'_.(n)) = 0$, para todo n e $j \geq i-1$. Logo, por (2.2), segue-se que $H_j(C_.(n)) = 0$, para todo n e $j \geq i$. Pela proposição 2.8, grade $(\underline{x}^*) \geq k-i+1$.

Se $i = 1$, então o homomorfismo

$$\frac{A}{(I_{n-1}, x_1, \ldots, x_{k-1})} \xrightarrow{x_k} \frac{A}{(I_n, x_1, \ldots, x_{k-1})}$$

é injetivo para todo n. Assim,

$$\text{grade } G\left(\frac{\mathfrak{F}}{(x_1, \ldots, x_{k-1})}\right)_+ \geq 1.$$

Finalmente, usando o lema 1.17 e 1.18, concluímos que $x_1^*, \ldots, x_k^*$ é uma sequência regular.

O teorema está provado.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Relação entre os coeficientes de Hilbert e a profundidade de aneis graduados associados

Neste capítulo, $(A, \mathfrak{m})$ denotará um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$. Além disso, assumiremos que o corpo residual $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ é infinito.

3.1 Funções de Hilbert em um anel Cohen-Macaulay

Seja $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e J uma redução mínima de $\mathfrak{F}$. Como $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ é infinito, podemos encontrar uma sequência superficial $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ para $\mathfrak{F}$ tal que $J = (\underline{x})$. [Vide [4, Lemma 2.11]

Considere $C.(n) = C.(\underline{x}, \mathfrak{F}, n)$. Por (2.2), segue-se que para cada inteiro n, tem-se

$$\Delta^d(H_{\mathfrak{F}}(n)) = \sum_i (-1)^i \lambda(C_i(n)) = \sum_i (-1)^i \lambda(H_i(C.(n)).$$

Usando o lema 2.7 e o fato de que $\Delta^d(P_{\mathfrak{F}}(n)) = \lambda(\frac{A}{J})$, temos que, para cada n,

$$\Delta^d(P_{\mathfrak{F}}(n) - H_{\mathfrak{F}}(n)) =$$
$$= \lambda\left(\frac{A}{J}\right) - \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \lambda(H_i(C.(n))) \tag{3.1}$$

$$= \lambda\left(\frac{A}{J}\right) - \lambda\left(H_0(C.(n))\right) - \sum_{i=1}^{d}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n)))$$

$$= \lambda\left(\frac{A}{J}\right) - \lambda\left(\frac{A}{(I_n, J)}\right) - \sum_{i=1}^{d}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n)))$$

$$= \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right) - \sum_{i=1}^{d}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n))) \tag{3.2}$$

$$= \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right) - \lambda\left(\frac{J \cap I_n}{JI_{n-1}}\right) - \sum_{i=2}^{d}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n)))$$

$$= \lambda\left(\frac{I_n}{J \cap I_n}\right) - \lambda\left(\frac{J \cap I_n}{JI_{n-1}}\right) - \sum_{i=2}^{d}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n)))$$

$$= \lambda\left(\frac{I_n}{JI_{n-1}}\right) - \sum_{i=2}^{d}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n))) \tag{3.3}$$

Notemos que a equação 3.3 nos dá uma interpretação homológica dos inteiros $\mathfrak{w}_n(J, I)$ dados na definição 2.2. De fato, com o auxílio do teorema 2.5, podemos escrever

$$\mathfrak{w}_n(J, I) = -\sum_{i \geq 2}(-1)^i\lambda(H_i(C.(n-1))).$$

Além disso, a equação (3.2) também mostra que se depth $G(\mathfrak{F}) \geq d-1$, então

$$\Delta^d(P_{\mathfrak{F}}(n) - H_{\mathfrak{F}}(n)) = \lambda\left(\frac{I_n}{JI_{n-1}}\right), \text{ para todo n.}$$

Disto decorre a seguinte observação:

Observação 3.1. Considere $I \subseteq A$ $\mathfrak{m}$-primário tal que depth $G(I) \geq d-1$. Então

$$r(I) = n(I) + d.$$

(Lembrando $r_J(I) = \min\{n \geq 0 \mid JI^n = I^{n+1}\}$, $r(I) = \min\{r_J(I) \mid J$ é redução mínima de $I\}$ e $n(I) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid H_I(n) \neq P_I(n)\}$).

Assim, se mostrarmos tal resultado, teremos:

Lema 3.2. *Se* depth $G(\mathfrak{F}) \geq d-1$ *e* J *é qualquer redução de* $\mathfrak{F}$*, então*

$$r_J(\mathfrak{F}) = n(\mathfrak{F}) + d.$$

(Aqui, $r_J(\mathfrak{F})$ *e* $n(\mathfrak{F})$ *são como definidos no capítulo I).*

Daremos agora a prova da observação acima, como dada em [9, Theorem 2.15].

Demonstração: Usaremos indução sobre d. Se $d = 1$. Sejam $r = r(I)$, $k = n(I)$ e (x) uma redução de I. Por definição, $xI^r = I^{r+1}$. Logo, $I^n = x^{n-r}I^r$, para $n \geq r$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{A}{I^n}\right) = \lambda\left(\frac{A}{x^{n-r}I^r}\right) &= \lambda\left(\frac{A}{(x^{n-r})}\right) + \lambda\left(\frac{(x^{n-r})}{x^{n-r}I^r}\right) \\
&= \lambda\left(\frac{A}{x^{n-r}}\right) + \lambda\left(\frac{A}{I^r}\right) \\
&= (n-r)\lambda\left(\frac{A}{(x)}\right) + \lambda\left(\frac{A}{I^r}\right) \\
&= P_I(n).
\end{aligned}$$

Portanto, $k \leq r-1$.

Agora,

$$\lambda\left(\frac{A}{I^{k+1}}\right) = (k+1)\lambda\left(\frac{A}{(x)}\right) - e_1.$$

De modo que,

$$e_1 = \lambda\left(\frac{I^{k+1}}{(x^{k+1})}\right).$$

Logo,

$$\lambda\left(\frac{A}{I^{k+2}}\right) = (k+2)\lambda\left(\frac{A}{(x)}\right) - \lambda\left(\frac{I^{k+1}}{(x^{k+1})}\right) = \lambda\left(\frac{A}{xI^{k+1}}\right).$$

O que implica, $xI^{k+1} = I^{k+2}$. Assim, $k \leq r-1$. Daí, $k = r-1$.

Agora, analisaremos o caso $d > 1$. Seja J uma redução mínima de I. Podemos assumir $J = (x_1, ..., x_d)$, com $x_1^*, ..., x_{d-1}^*$ formando uma $G(I)$-sequência. Denotaremos por "$-$" o homomorfismo canônico de A em $\frac{A}{(x_1)}$. Desde que depth $G(\overline{I}) \geq d-2$ e $\overline{A}$ é um anel local Cohen-Macaulay $(d-1)$-dimensional, temos, por indução,

$$r_{\overline{J}}(\overline{I}) = n(\overline{I}) + d - 1.$$

Por outro lado, pode-se mostrar que

$$r_{\overline{J}}(\overline{I}) = r_J(I)$$

[9, Lemma 2.14] e $n(\overline{I}) = n(I) + 1$ [9, Lemma 2.8]. Assim, conclui-se que

$$r_J(I) = n(I) + d.$$

■

Necessitaremos de uma sequência de resultados técnicos (Extraídos de [5]).

Lema 3.3. *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(n) = 0$ para n suficientemente grande. Então:*

(1) Para todo k, j, $0 < k \leq d$, $0 < j \leq d$,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^j[f(n+1)] = -\sum_{n=k-1}^{\infty} \binom{n}{k-1} \Delta^{j-1}[f(n+1)].$$

(2) Se $f(n) = 0$, para todo $n \leq 0$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^j[f(n+1)] = 0,$$

para $0 < j \leq d$..

Demonstração: Note que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^j[f(n+1)] = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^{j-1}[f(n+1) - f(n)]$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^{j-1}[f(n+1)] - \sum_{n=k-1}^{\infty} \binom{n+1}{k} \Delta^{j-1}[f(n+1)]$$

$$= -\Delta^{j-1}[f(k)] - \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k-1} \Delta^{j-1}[f(n+1)]$$

$$= -\sum_{n=k-1}^{\infty} \binom{n}{k-1} \Delta^{j-1}[f(n+1)].$$

Logo, fica provado o item (1).

Para provarmos (2), notemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta[f(n+1)] = -f(0).$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^j[f(n+1)] = -\Delta^{j-1}[f(0)].$$

Por hipótese, $f(n) = 0$ para todo $n \leq 0$, o que é condição suficiente para finalizar a prova.

■

Lema 3.4. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão $d > 0$ e $I \subseteq A$ $\mathfrak{m}$- primário. Assuma que A contém uma sequência superficial de comprimento d para I. Se $P_I(n)$ é o polinômio de Hilbert de I, então*

$$\Delta^{d-i}[P_I(0)] = (-1)^i e_i(I),$$

para $1 \leq i \leq d$.

Demonstração: Aplicaremos indução sobre d. Seja i um inteiro tal que $1 \leq i \leq d$. Notemos que se $d = i$ o resultado é imediato. Suponhamos $i < d$ e consideremos x um elemento superficial para I. Assim temos,

$$\Delta^{d-i}[P_I(0)] = \Delta^{(d-1)-i}[P_{\overline{I}}(0)] = (-1)^i e_i(\overline{I}) = (-1)^i e_i(I).$$

Portanto,

$$\Delta^{d-i}[P_I(0)] = (-1)^i e_i(I), \quad \text{para } 1 \leq i \leq d.$$

■

Proposição 3.5. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão $d > 0$, e $I \subseteq A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Suponhamos que A contém uma sequência superficial de comprimento d para I. Então,*

$$\sum_{n=i-1}^{\infty} \binom{n}{i-1} \Delta^d[P_I(n+1) - H_I(n+1)] = e_i(I), \ \textit{para } 1 \leq i \leq d.$$

Demonstração: Definamos

$$f(n) = P_I(n) - H_I(n).$$

Seja i um inteiro tal que $1 \leq i \leq d$. Utilizando, repetidas vezes, o lema 3.3(1), obtemos

$$\sum_{n=i-1}^{\infty} \binom{n}{i-1} \Delta^d[f(n+1)] = (-1)^{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{d-i+1}[f(n+1)],$$

e

$$(-1)^{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{d-i+1}[f(n+1)] = (-1)^{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{d-i+1}[P_I(n+1)]$$
$$= (-1)^{i}\Delta^{d-i}[P_I(0)] = e_i(I).$$

Para a primeira igualdade usamos o lema 3.3(2) e o lema 3.4 acima. ■

Adaptando-a, obtemos:

Corolário 3.6.

$$\sum_{n\geq i}^{\infty}\begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\Delta^{d}[P_{\mathfrak{F}}(n) - H_{\mathfrak{F}}(n)] = e_i(\mathfrak{F}),\ \textit{para}\ 1\leq i\leq d. \tag{3.4}$$

Utilizando esse resultado podemos encontrar fórmulas para os coeficientes de Hilbert de $\mathfrak{F}$, no caso em que depth $G(\mathfrak{F})\geq d-1$.

Proposição 3.7. *Seja $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e suponha que* depth $G(\mathfrak{F})\geq d-1$. *Então, para $1\leq i\leq d$,*

$$e_i(\mathfrak{F}) = \sum_{n\geq i}\begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\lambda\left(\frac{I_n}{JI_{n-1}}\right).$$

Demonstração: Pela proposição 2.8, temos $H_i(C.(n)) = 0$, para $i\geq 2$ e todo n. Sendo assim, utilizando (3.3) e a proposição 3.5, o resultado é imediato.

■

Exemplo 3.8. [5, Exemplo 2.12] Seja $A = K[x,y,z]_{(x,y,z)}$, onde $K=\mathbb{Q}$. E considere $I = (x^2, y^3, z^3, x^2z+yz^2)\subseteq A$, então, depth $G(I) = 2 = d-1$. Calculando comprimentos (computacionalmente) e aplicando o resultado acima obtemos:

$$e_0(I) = 27,\ e_1(I) = 18,\ e_2(I) = 31 \text{ e } e_3(I) = 56.$$

A seguir, provaremos o principal resultado desta dissertação.

Teorema 3.9. *Seja $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e J uma redução mínima de $\mathfrak{F}$. Então, ficam assegurados os resultados a seguir:*

(a) $e_1(\mathfrak{F})\geq\sum_{n\geq 1}\lambda\left(\frac{(I_n,J)}{J}\right)$, *com igualdade se, e somente se, $G(\mathfrak{F})$ é Cohen-Macaulay;*

(b) $e_1(\mathfrak{F}) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda\left(\frac{I_n}{JI_{n-1}}\right)$, *com igualdade se, e somente se,* depth $\mathrm{G}(\mathfrak{F}) \geq \mathrm{d}-1$.

Demonstração: Para obtermos tal resultado, usamos as equações (3.4), (3.2) e (3.3) e encontramos

$$\begin{aligned} e_1(\mathfrak{F}) &= \sum_{n\geq 1} \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right) + \sum_{i\geq 1}(-1)^{i-1}h_i(\underline{x}, \mathfrak{F}); \\ &= \sum_{n\geq 1} \lambda\left(\frac{I_n}{JI_{n-1}}\right) - \sum_{i\geq 2}(-1)^{i-2}h_i(\underline{x}, \mathfrak{F}), \end{aligned}$$

onde tomamos $\underline{x}$ como sendo uma sequência superficial para $\mathfrak{F}$ que gera J. Utilizando o teorema 2.13, chegamos aos itens (a) e (b). ■

Agora, exporemos dois resultados sobre os coeficientes de Hilbert de um ideal $\mathfrak{m}$-primário, o primeiro deles tendo sido apresentado por Nagata [11], e o segundo por Huneke [7]. São eles:

- $e_1(I) \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $r(I) = 0$.
- $\lambda\left(\frac{A}{I}\right) \geq e_0(I) - e_1(I)$, com igualdade se, e somente se, $r(I) \leq 1$.

Além disso, se J é uma redução mínima de I, isto pode ser rescrito como:

$$e_1(I) \geq \lambda\left(\frac{I}{J}\right), \quad \text{com igualdade se, e somente se, } r_J(I) \leq 1,$$

pois já vimos que $e_0(I) = \lambda\left(\frac{A}{J}\right)$ no caso em que a redução J é mínima.

A seguir, daremos uma generalização natural desses dois resultados. Primeiro, provamos:

Corolário 3.10. *Sejam $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e J uma redução mínima de $\mathfrak{F}$. Então, para qualquer $r \geq 0$,*

$$e_1(\mathfrak{F}) \geq \sum_{n=1}^{r} \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right),$$

com igualdade se , somente se, $G(\mathfrak{F})$ é Cohen-Macaulay e $r_J(\mathfrak{F}) \leq r$.

Demonstração: Pela parte (a) do teorema 3.9, chegamos à desigualdade enunciada. Agora, suponhamos verdadeira a igualdade. Novamente pelo teorema 3.9, item (a), $G(\mathfrak{F})$ é Cohen-Macaulay e $I_n \subseteq J$ para $n > r$ Usando a proposição 2.10, $J \cap I_n = JI_{n-1}$, para $n \geq 1$. Logo, $I_{n+1} = JI_n$, para $n \geq r$. A outra implicação segue do teorema 3.9(a). ■

Podemos agora apresentar as generalizações prometidas acima.

Corolário 3.11. *Considere $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert. Então:*

(a) $e_1(\mathfrak{F}) \geq 0$, *com igualdade se, e somente se,* $r(\mathfrak{F}) = 0$.

(b) $\lambda\left(\frac{A}{I_1}\right) \geq e_0(\mathfrak{F}) - e_1(\mathfrak{F})$, *com igualdade se, e somente se,* $r(\mathfrak{F}) \leq 1$.

Demonstração: O item (a) segue imediatamente do corolário 3.10. Agora, para o item (b), note que se $r(\mathfrak{F}) \leq 1$, então $G(\mathfrak{F})$ é Cohen- Macaulay [Proposição 2.10]. Assim, o resultado segue do corolário anterior. ■

Seguimos com outra aplicação do teorema 3.9, que nos dará critério para a Cohen-Macaulicidade $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ em termos do coeficiente de Hilbert $e_1(\mathfrak{F})$. Vejamos:

Corolário 3.12. *Sejam $\mathfrak{F}$ uma filtração de Hilbert e J uma redução mínima de $\mathfrak{F}$. Então,*

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{F}) \textit{ é Cohen- Macaulay se, e somente se, } e_1(\mathfrak{F}) = \sum_{n=1}^{d-1} \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right).$$

Demonstração:

É sabido que $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $G(\mathfrak{F})$ é Cohen-Macaulay e $r(\mathfrak{F}) < d$ (vide [20]). Agora, pelo corolário 3.10, encontramos

$$e_1(\mathfrak{F}) = \sum_{n=1}^{d-1} \lambda\left(\frac{(I_n, J)}{J}\right).$$

■

Observação 3.13. Notemos que, para qualquer ideal I, o conjunto de ideais $\{(I^{n+1} : I^n)\}$ constitui uma cadeia ascendente. Defina

$$\widetilde{I} := \bigcup_n (I^{n+1} : I^n),$$

o chamado *fecho de Ratliff-Rush de I*. Ratliff e Rush, provaram em [13], que $\widetilde{I}$ é o maior ideal contendo I com o mesmo polinômio de Hilbert de I, desde que depth $(I) \geq 1$. A filtração $\{\widetilde{I^n}\}$ é chamada *filtração de Ratliff-Rush associada a I.*

Antes de apresentarmos o próximo resultado faremos a seguinte observação

Observação 3.14. Sejam $\mathfrak{F}$ uma filtração I- estável, $M \subseteq A$ um A-módulo d-dimensional, tal que depth $M \geq 1$. Então existe um inteiro n_0 tal que $M_n = \tilde{M}_n$, para todo $n \geq n_0$.

Com efeito, seja x um elemento superficial para I. Desde que depth $M \geq 1$, x é um elemento regular para M e existe um inteiro n tal que $M_{J+1} : x = M_j$, para todo $j \geq n$. Logo, temos

$$\tilde{M}_n = M_{n+k} : I^k \subseteq M_{n+k} : x^k = (M_{n+k} : x) :_M x^{k-1} = M_{n+k-1} : x^{k-1} = ... = M_{n+1} : x = M_n.$$

Portanto,

$$\tilde{M}_n = M_n.$$

Lema 3.15. *Sejam $I \subseteq A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário e $\mathfrak{F} = \{\widetilde{I^n}\}$. Então, $\mathfrak{F}$ é uma filtração de Hilbert, $P_{\mathfrak{F}} = P_I$ e* depth $G(\mathfrak{F}) \geq 1$.

Demonstração: Desde que $\widetilde{I^n} = I^n$, para n suficientemente grande $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ é um $\mathfrak{R}(I)$-módulo finitamente gerado e $H_{\mathfrak{F}}(n) = H_I(n)$. Assim, $\mathfrak{F}$ é uma filtração de Hilbert e $P_{\mathfrak{F}} = P_I$.

Para a última afirmação, é suficiente verificarmos que $(\widetilde{I^{k+1}} : I) = \widetilde{I^k}$, para todo $k \geq 1$. Para isto, notemos que $\widetilde{I^k}$ por definição é a união dos ideais $\{(I^{n+k} : I^n)\}$, donde ser ver que se $u \in (\widetilde{I^{k+1}} : I)$, então $uI \subseteq (I^{n+k+1} : I^n)$, para algum n. Dessa forma, $uI^{n+1} \subseteq I^{k+n+1}$ e assim, $u \in \widetilde{I^k}$. A outra inclusão segue diretamente da definição. Finalmente, utilizando ([14, Lemma 3.1.1, 6.]), concluímos que depth $G(\mathfrak{F}) \geq 1$.

∎

Em particular, os coeficientes de Hilbert de I são os mesmos que os coeficientes de Hilbert da filtração $\{\widetilde{I^n}\}$. Aplicaremos esses fatos em dimensão 2 e encontraremos algumas fórmulas para os coeficientes de Hilbert $e_1(I)$ e $e_2(I)$.

Corolário 3.16. *Considere A um anel 2-dimensional e seja $I \subseteq A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então:*

1. $e_1(I) = \sum_{n\geq 1} \lambda \left(\dfrac{\widetilde{I^n}}{J\widetilde{I^{n-1}}} \right)$
2. $e_2(I) = \sum_{n\geq 2} (n-1) \lambda \left(\dfrac{\widetilde{I^n}}{J\widetilde{I^{n-1}}} \right)$
3. $e_2(I) = 0$ *se, e somente se,* $r(\widetilde{I}) \leq 1$.

Demonstração: Os itens (1) e (2) seguem do lema anterior e da proposição 3.7. Provemos o item (3). Para simplificarmos notação, definamos $\widetilde{I} = K$. Se $e_2(I) = 0$, então, pelo item (2), temos $\widetilde{I^n} = J\widetilde{I^{n-1}}$, para $n \geq 2$. Também, tem-se $K^2 \subseteq \widetilde{I^2}$, e daí, $K^2 \subseteq JK$, mostrando que $r(K) \leq 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $r(K) \leq 1$. Assim, depth $(G(K)) \geq 1$, já que $G(K)$ é Cohen-Macaulay. Daí, $\widetilde{K^n} = K^n$, para todo $n \geq 0$. Mas, $\widetilde{K^n} = \widetilde{I^n}$, para todo $n \geq 0$, e assim, $\widetilde{I^n} = K^n$, para todo $n \geq 0$. Portanto, $J\widetilde{I^{n-1}} = \widetilde{I^n}$, para todo $n \geq 2$, de modo que, pelo item (2), obtemos $e_2(I) = 0$.

■

Agora, apresentaremos um importante resultado obtido por J. D.Sally em [16, Theorem 1.4].

Corolário 3.17. *Suponha que $d \geq 2$ e seja $I \subseteq A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Assuma que $e_2(I) \neq 0$. Então, $\lambda\left(\frac{A}{I}\right) = e_0(I) - e_1(I) + 1$ se, e somente se, para alguma (toda) redução mínima J de I, $\lambda\left(\frac{I^2}{JI}\right) = 1$ e $r_J(I) = 2$. Essas condições asseguram que $e_2(I) = 1$ e* depth $G(I) \geq d - 1$.

Demonstração: Para qualquer redução J de I, temos

$$e_1(I) = \lambda\left(\frac{I}{J}\right) + 1.$$

Notemos que, se depth $G(I) \geq d-1$, então pela proposição 3.5 teremos $\lambda\left(\frac{I^2}{JI}\right) = 1$, $r_J(I) = 2$ e $e_2(I) = 1$. Assim, será suficiente mostrarmos que depth $G(I) \geq d - 1$. Se $d > 2$, consideremos $\underline{x} = x_1, ..., x_{d-2}$ uma sequência superficial para I. Assim,

$$e_i\left(\frac{I}{(\underline{x})}\right) = e_i(I), \text{ para } i = 0,\ 1,\ 2.$$

Se depth $G\left(\frac{I}{(\underline{x})}\right) \geq 1$, então pelo lema 1.18, tem-se depth $G(I) \geq d - 1$. Dessa forma, é suficiente provar que se $d = 2$ e $e_1(I) = \lambda\left(\frac{I}{J}\right) + 1$ então depth $G(I) \geq 1$. Agora, utilizando o corolário 3.16 (1) e fazendo uso da sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I}{J} \longrightarrow \frac{\tilde{I}}{J} \longrightarrow \frac{\tilde{I}}{I} \longrightarrow 0,$$

encontramos

$$\lambda\left(\frac{I}{J}\right) + \lambda\left(\frac{\widetilde{I}}{I}\right) + \sum_{n\geq 2} \lambda\left(\frac{\widetilde{I^n}}{J\widetilde{I^{n-1}}}\right) = e_1(I),$$

ou seja

$$\lambda\left(\frac{\widetilde{I}}{I}\right)+\sum_{n\geq 2}\lambda\left(\frac{\widetilde{I^n}}{J\widetilde{I^{n-1}}}\right)=1.$$

Note que se $I \neq \tilde{I}$, então teríamos, utilizando o corolário 3.16(2), que $e_2(\mathfrak{F}) = 0$, contradizendo a nossa hipótese. Portanto, $I = \widetilde{I}$, $\lambda\left(\frac{\widetilde{I^2}}{JI}\right) = 1$ e $\widetilde{I^n} = J\widetilde{I^{n-1}}$, para $n \geq 3$.(Note que se $\widetilde{I^2} = JI$ então $r_J(I) \leq 1$, o que novamente contradiz a hipótese de que $e_2(I) \neq 0$). Já que

$$\lambda\left(\frac{\widetilde{I^2}}{JI}\right)=\lambda\left(\frac{\widetilde{I^2}}{I^2}\right)+\lambda\left(\frac{I^2}{JI}\right),$$

temos $\widetilde{I^2} = I^2$ e, consequentemente, $\widetilde{I^n} = I^n$, para todo $n \geq 1$. Portanto, depth $G(I) \geq 1$.

Reciprocamente, suponhamos $\lambda\left(\frac{I^2}{JI}\right) = 1$ e $r_J(I) = 2$. Pelo teorema 3.9(b),

$$e_1(I)\leq\lambda\left(\frac{I}{J}\right)+\lambda\left(\frac{I^2}{JI}\right)=\lambda\left(\frac{I}{J}\right)+1.$$

Por outro lado, utilizando uma propriedade mencionada após a demonstração do teorema 3.9 e a hipótese de que $r_J(I) = 2$, tem-se

$$e_1(I)\geq\lambda\left(\frac{I}{J}\right)+1.$$

Logo,

$$e_1(I)=\lambda\left(\frac{I}{J}\right)+1=\lambda\left(\frac{A}{J}\right)-\lambda\left(\frac{A}{I}\right)+1=e_0(I)-\lambda\left(\frac{A}{I}\right)+1.$$

Portanto,

$$\lambda\left(\frac{A}{I}\right)=e_0(I)-e_1(I)+1,$$

como queríamos provar.

■

3.1.1 Uma aplicação para depth $(G(I)) \geq d-1$

Nosso próximo resultado é uma recíproca da proposição 3.7, que fornecerá uma caracterização da condição depth $(G(I)) \geq d-1$ no caso em que $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$ e $I \subseteq A$ é $\mathfrak{m}$-primário.

Antes de apresentarmos tal caracterização, enunciaremos um resultado auxiliar.

Corolário 3.18. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$, $I \subseteq A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário e J uma redução mínima de I, e assuma que J é gerado por uma sequência superficial de comprimento d para I. Então, os coeficientes de Hilbert de I satisfazem as fórmulas*

$$e_i(I) = \sum_{n=i-1}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} \left[\lambda \left(\frac{I^{n+1}}{JI^n} \right) + \mathfrak{w}_n(J, I) \right], \text{ para } 1 \leq i \leq d.$$

Demonstração: Usando a generalização do lema fundamental(2.5), juntamente com a proposição (3.5), obtemos o corolário.

■

Teorema 3.19. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$, $I \subseteq A$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário e J uma redução mínima de I, e assuma que J é gerado por uma sequência superficial de comprimento d para I. Assim, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \left(\frac{I^{n+1}}{JI^n} \right) = e_1(I)$.

(2) depth $(G(I)) \geq d - 1$.

Demonstração: Suponhamos (1). Consideremos uma redução mínima J de I, tal que $J = (x_1, ..., x_d)$, onde $\{x_1, ..., x_d\}$ é uma sequência superficial para I [observação 2.3]. Nosso propósito é mostrar que $\{x_1^*, ..., x_{d-1}^*\}$ é uma $G(I)$-sequência regular. Pelo corolário anterior, e assumindo (1), encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{w}_n(J, I) = 0.$$

Agora, utilizando o item (2) do lema 3.4, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{w}(J, I) = 0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \left(\frac{(I^{n+1} : x_1)}{(JI^n : x_1)} \right) - ... - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \left(\frac{((I^{n+1}, J_{d-2}) : x_{d-1})}{((JI^n, J_{d-2}) : x_{d-1})} \right).$$

Portanto

$$((I^{n+1}, J_{i-1}) : x_i) = ((JI^n, J_{i-1}) : x_i), \tag{3.5}$$

para todo $n \geq 0$ e $1 \leq i \leq d - 1$.

Aplicaremos indução sobre n para provarmos que $J_{d-1} \cap I^{n+1} = J_{d-1}I^n$, para todo $n \geq 0$. Note que, provado isto, teremos concluído a demonstração, com o auxílio usando a proposição 2.10.

O caso $n = 0$ é trivial. Consideremos $n > 0$ e seja $r \in J_{d-1} \cap I^{n+1}$. Escrevamos $r = \sum_{i=1}^{d-1} r_i x_i$ com $r_i \in A$. Assim, $r_{d-1} \in ((I^{n+1}, J_{d-2}) : x_{d-1}) = ((JI^n, J_{d-2}) : x_{d-1})$, por 3.5. Daí,

$$r_{d-1}x_{d-1} = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i + \sum_{i=1}^{d-2} b_i x_i, \text{ para algum } a_i \in I^n,\ b_i \in A.$$

Como $\{x_1, ..., x_d\}$ é uma sequência regular, temos $a_d \in J_{d-1}$. Assim, por indução, $a_d \in J_{d-1} \cap I^n = J_{d-1}I^{n-1}$. Logo, podemos escrever

$$a_d = \sum_{i=1}^{d-1} c_i x_i, \text{ com } \ c_i \in I^{n-1}.$$

Substituindo na equação para r, obtemos

$$r = \sum_{i=1}^{d-2}(r_i + b_i)x_i + \sum_{i=1}^{d-1}(a_i + c_i x_d)x_i,$$

onde $r_i + b_i \in A$ e $a_i + c_i x_d \in I^n$.

Tomando $s = \sum_{i=1}^{d-1}(a_i + c_i x_d)x_i$, então $r - s = \sum_{i=1}^{d-2}(r_i + b_i)x_i$ e $s \in J_{d-1}I^n$. Portanto, $r - s \in J_{d-2} \cap I^{n+1}$. Podemos agora repetir o processo feito para $r - s$ e encontrar $s' \in J_{d-1}I^n$ tal que $r - s' \in J_{d-3} \cap I^{n+1}$. Continuando, obteremos $r \in J_{d-1}I^n$, como queríamos provar.

Finalmente, a implicação (2) $\Rightarrow$ (1) segue da proposição 3.7.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Apêndice

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que auxiliaram na construção de resultados dos capítulos anteriores. Iniciamos com o complexo de Koszul.

4.1 O complexo de Koszul

Seja A um anel comutativo e seja x um elemento de A. Denotaremos por $K(x)$ ou $K^A(x)$, o seguinte complexo:

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow K_1(x) \longrightarrow K_0(x) \longrightarrow 0;$$

ou seja,

$$K_i(x) = 0,\ i \neq 0,\ 1;\ K_1(x) = A;\ K_0(x) = A.$$

O mapa $d : K_1(x) \to K_0(x)$ é a multiplicação por x.

Observe que não estamos assumindo que A é Noetheriano.

Iremos identificar $K_0(x)$ com A, e vamos escolher uma base e_x de A-módulo $K_1(x)$ tal que $d(e_x) = x$. Chamamos a função d de *diferencial* e definimos pela fórmula

$$d(ae_x) = ax,\ se\ a \in A.$$

Se M é um A-módulo, escreveremos $K(x, M)$ para representar o produto tensorial do complexo $K(x) \otimes_A M$. Dessa forma, temos:

$$K(x, M)_n = 0,\ se\ n \neq 0,\ 1;$$

$$K(x, M)_0 = K_0(x) \otimes_A M \simeq M;$$

$$K(x, M)_1 = K_1(x) \otimes_A M \simeq M,$$

e a derivação

$$d : K(x, M)_1 \to K(x, M)_0$$

definida por

$$d(e_x \otimes m) = xm, \ \ onde\ m \in M.$$

Os *módulos homológicos* de $K(x, M)$ são dados por $\dfrac{Ker\ d_p}{Im\ d_{p+1}}$. Dessa forma, temos

$$H_0(K(x), M) = \frac{M}{xM},$$

$$H_1(K(x), M) = Ann_M(x) = Ker(x_M : M \to M),$$

$$H_i(K(x), M) = 0, \ \ se\ i \neq 0, 1.$$

Denotaremos tais módulos homológicos por $H_i(x, M)$.

Para seguirmos, faz-se necessária algumas definições.

Definição 4.1. Seja $K(x)$ um complexo de $A-$módulos, n um inteiro. Denotaremos por $K[n]$ o complexo K com um "shift"n, isto é, o complexo com módulo

$$(K[n])^i = K^{n+i}$$

e seu diferencial por

$$(-1)^n d_k.$$

Definição 4.2. Sejam K e L complexos de $A-$módulos. O *produto tensorial* é o complexo com

$$(K \otimes_A L)^n = \bigoplus_{i+j=n} K^i \otimes_A L^j,$$

e seu diferencial $A-$linear em um elemento $k \otimes_A l \in K^i \otimes_A L^j$ é definido por:

$$d(k \otimes_A l) = d_k(k) \otimes l + (-1)^i k \otimes d_l(l).$$

Definição 4.3. Um *homomorfismo de complexo* de K a L é um $Hom_A(K, L)$, consistindo de módulos

$$Hom_A(K, L) = \prod_i Hom_A(K^i, L^{i+n}).$$

E o diferencial $A-$linear definido em um elemento $f \in Hom_A(K, L)^n$ é dado por:

$$d(f) = d_l \circ f - (-1)^n f \circ d_k.$$

Considere L um complexo de A-módulos. Os módulos homológicos do complexo $K(x) \otimes_A L$ estão próximos aos módulos homológico de L da seguinte maneira:

Proposição 4.4. *Sejam L um complexo de $A-$módulos e $x \in A$. Assim:*

(i) O n-ésimo termo do complexo $L \otimes_A K(x)$ é $L_n \oplus L_{n-1}$ e o n-ésimo mapa é dado pela equação

$$d_n\left(\begin{pmatrix} l_n \\ l_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d(l_n) + (-1)^{n-1} x l_{n-1} \\ d(l_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Dessa forma, o complexo $L \otimes_A K(x)$ é dado por

$$\ldots \longrightarrow L_{n+1} \oplus L_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & (-1)^n x \\ 0 & d \end{pmatrix}} L_n \oplus L_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & (-1)^{n-1} x \\ 0 & d \end{pmatrix}} L_{n-1} \oplus L_{n-2} \longrightarrow \ldots,$$

(ii) Existe uma sequência de homologia exata longa

$$\ldots \longrightarrow H_n(L) \longrightarrow H_n(L \otimes_A K(x)) \longrightarrow H_{n-1}(L) \longrightarrow H_{n-1}(L) \longrightarrow H_{n-1}(L \otimes_A K(x)) \longrightarrow \ldots .$$

Proposição 4.5. *Para cada $p \geq 0$, temos uma sequência exata*

$$0 \to H_0(x, H_p(L)) \to H_p(K(x) \otimes_A L) \to H_1(x, H_{p-1}(L)) \to 0.$$

Demonstração: Maiores detalhes em [17]. ∎

4.1.1 O Complexo de Koszul e o grade de uma sequência

Nesta seção apresentamos algumas propriedades do complexo de Koszul.

Teorema 4.6. *Sejam A um anel, $\underline{x} = x_1, ..., x_n$ uma sequência em A e M um A-módulo. Se $I = (\underline{x})$, ideal de A, contém uma M-sequência fraca, digamos, $\underline{y} = y_1, ..., y_m$, então*

1. $H_{n+1-i}(\underline{x}, M) = 0$, para $i = 1, ..., m$;

2. $H_{n-m}(\underline{x}, M) \cong Hom_A(\frac{A}{I}, \frac{M}{IM}) \cong Ext^m_A(\frac{A}{I}, M)$.

Demonstração: Maiores detalhes em [17]. ∎

Teorema 4.7. *Seja A anel Noethereano, e M um A-módulo finitamente gerado. Suponhamos $I = (x)$ ideal em A, onde $x = x_1, ..., x_n$.. Assim,*

a) *$H_i(x, M) = 0$, $i = 0, ..., n$, se, e somente se, $M = IM$.*

b) *Suponhamos $H_i(x, M) \neq 0$ para algum i, e considere*

$$h = max\{i : H_i(x, M) \neq 0\}.$$

Assim, toda M sequência maximal em I tem comprimento $g = n - h$, isto é, o $grade(I, M) = n - h$.

Demonstração: Suponhamos $M = IM$. Notemos que $H_0(x, M) \cong \frac{M}{IM}$. Daí, como $M = IM$, temos $H_0(x, M) = 0$, para $i = 0, ..., n$. Reciprocamente, consideremos P um ideal primo de A, temos

$$(H_i(x, M))_P \cong H_i(x, M_P),$$

onde em $H_i(x, M_P)$, x é uma sequência em A_P. Agora, temos dois casos à analisar. O primeiro, façamos o caso em que $I \nsubseteq P$. Dessa forma, existe um $a \in I$ tal que a não está em P. Logo, tal $\frac{a}{1}$ é unidade em A_P é uma unidade. Temos que a multiplicação por $\frac{a}{1}$ é homotópica nula em $K_0(x, M_P)$. Em particular, $I = (x)$ anula $H_0(x, M_P)$. Daí, utilizando o isomorfismo acima, encontramos que para algum i temos $H_i(x, M) = 0$. Vamos analisar o segundo caso,ou seja, se $I \subset P$. Logo, $I_P \subset P_P$ que é maximal em A_P. Daí, pelo lema de Nakayama, encontramos $M_P = 0$. Portanto, $H_i(x, M_P) = 0$, e assim, concluímos a prova do item (a)

Provemos o item (b). Pelo item que acabamos de mostrar, $M \neq IM$. Consideremos y uma sequência M-maximal em I. Assim, y tem comprimento $g =$ grade (I, M). Utilizando o teorema anterior e o lema de Rees, temos $H_i(x, M) = 0$, para $i = n - g + 1, ..., n$ e além disso,

$$H_{n-g}(x, M) \cong Ext^g_A(\frac{A}{I}, M) \neq 0.$$

Agora, seja y uma M-sequência maximal em I, e suponhamos que y tem comprimento g. Assim, $H_i(x, M) \cong Hom_A(\frac{A}{I}, \frac{M}{IM})$. Desde que I consiste de divisores de zero de $\frac{M}{IM}$, temos $H_{n-g}(x, M) \neq 0$. Como queríamos chegar.

■

Lema 4.8. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ Noetheriano local, M um A-módulo finitamente gerado e $x = x_1, ..., x_n$ uma $\mathfrak{m}$-sequência. Seja $x' = x_1, ..., x_{n-1}$. Se $H_i(x, M) = 0$, então $H_i(x', M) = 0$.*

Demonstração: Já sabemos que

$$K_0(x) \cong K_0(x') \otimes K_0(x_n).$$

Assim, temos uma sequência exata

$$H_i(x', M) \xrightarrow{x_n} H_i(x', M) \longrightarrow H_i(x, M) \longrightarrow 0.$$

Note que estes módulos são finitos. Se $H_i(x', M) = 0$, então a multiplicação por x_n em $H_i(x', M)$ é sobrejetiva. Daí, $H_i(x', M) = 0$. Pelo lema de Nakayama, temos

$$\frac{H_i(x', M)}{x_n(H_i(x', M))} = 0 \Rightarrow H_i(x', M) = 0.$$

■

Agora,

Corolário 4.9. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ Noetheriano local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, $M \neq 0$ um A-módulo finitamente gerado, e $I \subset \mathfrak{m}$ um ideal gerado por $x = x_1, ..., x_n$. Nestas condições, são equivalentes:*

a) *$grade(I, M) = n$;*

b) *$H_i(x, M) = 0$, para $i > 0$;*

c) *$H_1(x, M) = 0$;*

d) *x é uma M-sequência.*

Demonstração: (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) Seja $x = x_1, ..., x_n$ uma M-sequência maximal de comprimento n.Pelo que já vimos, grade $(I, M) = n - h$, onde $h = \max\{i : H_i(x, M) = 0\}$, para $i > 0$;

(**b**) $\Rightarrow$ (**c**) É claro.

(**c**) $\Rightarrow$ (**d**) Suponhamos $H_1(x, M) = 0$. Aplicaremos indução em i e utilizamos o lema anterior chegamos ao resultado desejado.

(**d**) $\Rightarrow$ (**a**) É imediato.

Portanto, provamos as equivalências.

■

4.2 Mapping Cone

Definiremos *Mapping Cone*(ou Mapping cylinder). Consideremos os complexos

$$\mathbb{F} : ... \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$$

e

$$\mathbb{G} : ... \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0,$$

com δ_F e δ_G sendo os mapas diferenciais dos complexos $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$, respectivamente.

Considere $\phi : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ um homomorfismo de complexos. Definimos

Definição 4.10. O *Mapping Cone* é o complexo $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\phi)$ de ϕ para o qual o i-ésimo módulo

$$\mathbb{M}_i = \mathbb{F}_{i-1} \oplus \mathbb{G}_i$$

e o diferencial δ_M é

$$\mathbb{F}_i \oplus \mathbb{G}_{i+1} \to \mathbb{F}_i \oplus \mathbb{G}_{i+1}$$

dado por

$$(f, g) \mapsto (-\delta_F(f), \phi(f) + \delta_G(g)).$$

Observação 4.11. Notemos que, de fato, $\mathbb{M}$ é um complexo pois

$$\delta_M^2(f, g) = \delta_M(-\delta_F(f), \phi(f) + \delta_G(g))$$

$$= (\delta_F^2(f), \phi(-\delta_F(f) + \delta_G(\phi(f) + \delta_G(g))))$$

Como ϕ é um homomorfismo de complexos,

$$\delta_M^2(f, g) = (0, \phi(-\delta_F(f) + \delta_G(\phi(f)))) = (0, 0).$$

Como consequência da definição, e utilizando as notações acima, temos o resultado

Proposição 4.12. *Existe uma sequência exata curta de complexos canônica*

$$0 \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{F}[-1] \longrightarrow 0.$$

Mais ainda, podemos estender a uma sequência exata longa em homologia

$$\ldots \longrightarrow H_{i+1}(\mathbb{F}[-1]) \longrightarrow H_i(\mathbb{G}) \longrightarrow H_i(\mathbb{M}) \longrightarrow H_i(\mathbb{F}[-1]) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbb{G}) \longrightarrow \ldots ,$$

onde o mapa de conexão $H_{i-1}(\mathbb{F}) \to H_{i-1}(\mathbb{G})$ é induzido pelo mapa ϕ.

Demonstração: Indicamos a referência [18] para detalhes. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M.F.; MacDonald, L.G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.

[2] Bruns, W.; Herzog, J. *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] Boubarki, N. *Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[4] Hoa, L.; Zarzuela, S. *Reduction numbers and a-invariant of good filtrations*, CRM/Institut d'Estudis Catalans, preprint (1993).

[5] Huckaba, S.; *A d-dimensional extension of a lemma of Huneke's and formulas for the Hilbert coefficients*. Proceeding of the American Mathematical Society, vol. 124, n.5, 1996, 1393-1401.

[6] Huckaba, S.; Marley, T.; *Hilbert coefficients and the depths of associated graded rings*. Mathematical subject classification, 1991.

[7] Huneke, C.; *Hilbert coefficientes and symbolic powers*. Michigan Math, J.34, 1987, 293-318.

[8] Kubota, K.; *On the Hilbert-Samuel Function*. Tokyo J. Math, Vol. 8, No. 2, 1985.

[9] Marley, T.; *Hilbert functions of ideals in Cohen-Macaulay rings*. Purdue University, 1989.

[10] Matsumura, H. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[11] Nagata, M. *Local Rings*. Kriger, Huntington and New York, 1975.

[12] Northcott, D. C.; Rees, D. *Reductions of ideals in local rings*. Proc. Camb. Phil. Soc. 50, 145-158 (1954).

[13] Ratliff, L.; Rush, D. *Two notes on reductions of ideals*. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 929-934.

[14] Rossi, E. M.; Valla, G.; *Hilbert Functions of filtered modules*. Math. AC, 2009.

[15] Rotman, J.; *An introduction to homological Algebra*. Springer, 1979.

[16] Sally, D. *Hilbert coeficients and reduction number 2*. J. Algebraic Geom. 1 (1992), 325-333.

[17] Serre, J. Pierre. *Local Algebra*. Springer, (2000).

[18] Swanson, I; Huneke, C. *Integral Closure of Ideals, Rings and Modules*. London Matematical Society note series 336, Cambridge University Press, 374-377.

[19] Valabrega, P; Valla, G. *Form Rings and regular sequences*. Nagoya Math. J. 72 (1978), 93 - 101.

[20] Viet, D. *A note on the Cohen-Macaulayness of Rees algebras of filtrations*. Communications in Algebra 21 (1) (1993), 221-229.

[21] Wu, Y. *Reduction numbers and Hilbert polynomials of ideals in higher dimensional Cohen-Macaulay local rings*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 111 (1992).