

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Superfícies em \mathbb{R}^4 do ponto de vista da teoria das singularidades

Por
Paulo do Nascimento Silva

sob orientação do
Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática-
CCEN-UFPB, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

maio - 2013
João Pessoa - Paraíba

Superfícies em \mathbb{R}^4 do ponto de vista da teoria das singularidades

por

Paulo do Nascimento Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Singularidades

Aprovada por:

Prof. Dr. **Lizandro Sanchez Challapa**
Orientador

Prof. Dr. **Alexandre César G. Fernandes**
Examinador

Prof. Dr. **Pedro Antonio Gomez Venegas**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

maio - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **maio - 2013**

Autor: **Paulo do Nascimento Silva**

Título: **Superfícies em \mathbb{R}^4 do ponto de vista
da teoria das singularidades**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **maio** Ano: **2013**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

Dedico este trabalho a Deus, aos meus saudosos avós Pedro e Josefa, à minha mãe, ao meu irmão e à minha noiva.

Agradecimentos

Para conseguir obter o diploma de mestre foram necessários muitos dias e noites de estudo, e muitas vezes abdicar de momentos com a família, noiva e amigos, sem esquecer das muitas orações que fiz e que fizeram por mim durante esse tempo.

Primeiramente agradeço à Deus por ter me dado forças, paz interior e sabedoria durante este curso.

À minha mãe que sempre cuidou bem de mim, ensinando-me valores e dando uma boa educação, além de sempre acreditar em mim quando nem mesmo eu acreditava.

Ao meu irmão Petrônio, pela torcida e por ser sempre prestativo.

À minha noiva Juliana, por seu amor, carinho e compreensão.

Ao meu amigo Jailson por ser um dos primeiros que me incentivou a cursar o mestrado.

Aos colegas do mestrado, pelo prazer de suas amizades, momentos de estudo em grupo, pela troca de conhecimentos, listas de exercícios, conversas, futebol e etc, em particular, ao Danilo, Eberson, Edna, Erinaldo, Francisco, Ginaldo, Guilherme, Gustavo, José Carlos, Luan, Luando, Mariana, Max, Mônica, Nacib, Pedro, Renato, Reginaldo, Ricardo, Yane, entre outras que conheci durante esta caminhada.

Um agradecimento especial ao Francisco Viera de Oliveira, que ao longo desta caminhada se tornou um grande amigo, sempre dando esperança e apoio nos momentos mais necessários. Muito obrigado Francisco.

Agradeço ao professor Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, pelas boas aulas na disciplina Introdução a Análise Real durante o verão para seleção do mestrado.

Agradeço aos meus professores do mestrado, Dr. Alexandre de Bustamante Simas,

*Dra. Jacqueline Rojas, Dr. Pedro Antônio Hinojosa Vera, Dr. Serguey Agafonov,
Dra. Miriam da Silva Pereira .*

Em especial, agradeço a meu orientador Dr. Lizandro Sanchez Challapa pela paciência, incentivos, por acreditar que eu era capaz, sugestões, dicas, enfim por uma boa orientação.

Agradeço aos professores Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes e Dr. Pedro Antonio Gomez Venegas por terem aceitado fazer parte da banca.

Também gostaria de agradecer ao professor Dr. Roberto Callejas Bedregal por ter sido um dos principais responsáveis pela minha viagem à USP de São Carlos onde pude adquirir o conhecimento necessário para escrever minha dissertação.

À professora Dra. Maria Aparecida Ruas coordenadora do projeto Procad, por liberar a viagem para à USP afim de que pudesse utilizar os livros e artigos da biblioteca da USP de São Carlos para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor Marcelo José Saia da USP de São Carlos, pelo acolhimento e pelas boas aulas na disciplina Singularidades de aplicações diferenciáveis.

Aos professores e funcionários do Programa de pós-graduação em Matemática da UFPB, em especial aos professores Dr. Everaldo Souto de Medeiros e Dr. Daniel Marinho Pellegrino que foram ambos coordenadores do mestrado durante o período em que era mestrando.

Aos meus antigos professores da Universidade Federal da Paraíba, em especial aos professores Dr. Antônio Sales da Silva, Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, Dr. João Batista Alves Parente, Dr. Milton de Lacerda Oliveira e Dra. Rogéria Gaudêncio do Rego pelas boas aulas e conselhos.

Também agradeço ao REUNI pela bolsa, pois sem ela, não teria condições de concluir este curso.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta e indireta contribuíram para a concretização deste trabalho.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Singularidades de germes de funções suaves	1
1.1.1 Classificação dos germes de codimensão ≤ 5	6
1.2 Variedade Riemanniana	7
1.3 Conjuntos singulares	13
1.4 Contato entre subvariedades	16
1.5 As equações de Estrutura	18
2 Superfícies em \mathbb{R}^4	21
2.1 Elipse curvatura	21
2.2 Os Invariantes de Superfícies em \mathbb{R}^4	28
2.3 Formas Quadráticas Degeneradas	34
3 Contatos de Superfícies em \mathbb{R}^4 com hiperplanos	36
3.1 Variedade canal de uma superfície em \mathbb{R}^4	36
3.2 Caracterização geométrica das singularidades de funções altura	42
Referências Bibliográficas	49

Resumo

Neste trabalho estudamos a geometria das superfícies em \mathbb{R}^4 através da variedade canal e das singularidades das famílias de funções altura das superfícies. Provaremos que os pontos de inflexão das superfícies são os pontos umbílicos das famílias de funções altura. Além disso, veremos que pontos de inflexão do tipo imaginário serão pontos isolados da curva $\Delta^{-1}(0)$. Como uma consequência deste estudo provaremos que qualquer mergulho genérico convexo de S^2 em \mathbb{R}^4 tem pelo menos um ponto de inflexão.

Palavras-Chave: Singularidades, Segunda Forma Fundamental, Elipse de Curvatura, Função Altura, Ponto de Inflexão, Ponto Umbílico, Mergulho Genérico.

Abstract

We study the geometry of surfaces immersed in \mathbb{R}^4 through the singularities of their families of height functions. Inflection points on the surfaces are shown to be umbilic points from their families of height functions. Furthermore, we see that inflection points of imaginary type are isolated points of the curve $\Delta^{-1}(0)$. As a consequence we prove that any dive generic convexly embedded S^2 in \mathbb{R}^4 has inflexion points.

Keywords:

Singularities, Second Fundamental Form, Ellipse Curvature, Height Function, Inflexion Point, Umbilic Point, Embedding Generic.

Introdução

Resultados importantes da geometria das superfícies em \mathbb{R}^4 podem ser obtidos através da análise de seus contatos genéricos com hiperplanos, esses contatos serão dados pelas singularidades da família de funções altura.

Para nosso estudo da geometria das superfícies em \mathbb{R}^4 vamos considerar uma imersão de uma superfície em \mathbb{R}^4 . Para cada ponto da superfície podemos definir uma elipse no subespaço normal, denominada elipse de curvatura. A elipse de curvatura é dada pela segunda forma fundamental da superfície. Um ponto da superfície será chamado de ponto de inflexão quando a elipse de curvatura associada a esse ponto for um segmento de reta radial, esse conceito é encontrado em [10].

Este trabalho baseia-se no artigo "The Geometry of Surfaces in 4-space from a Contact Viewpoint" e está dividido em três capítulos.

No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e resultados importantes na teoria de singularidades que podem ser encontrados em sua grande maioria em [8], como por exemplo: germes de aplicações, conjuntos singulares, codimensão de um germe, classificação dos germes de codimensão ≤ 5 , contato entre subvariedades. Finalizamos o capítulo estudando equações de estrutura de uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , através das equações de estrutura do \mathbb{R}^n . Na sessão 1.2 introduzimos alguns conceitos de geometria Riemanniana relacionados a conexão de uma variedade Riemanniana.

No capítulo 2, calculamos os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície utilizando o referencial móvel, o qual é definido na sessão 1.6 no capítulo 1. Encontramos a curvatura gaussiana da superfície, usando o famoso teorema de Gauss (veja [4]). Também estudamos a elipse de curvatura e os invariantes associados a

superfície.

No capítulo 3, interpretamos geometricamente as singularidades das funções altura associada a superfície com o objetivo de obter informações geométricas da superfície. Também introduzimos o conceito da variedade canal associada a superfície, para desenvolver uma técnica que permite obter informações geométricas da superfície a partir da variedade canal. Como consequência deste estudo provaremos que qualquer mergulho genérico convexo de S^2 em \mathbb{R}^4 tem pelo menos um ponto de inflexão.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos as notações e definições básicas, usualmente utilizadas na Teoria de Singularidades e aplicações suaves. Em seguida, introduzimos alguns conceitos de geometria Riemanniana. Finalizamos este capítulo com estudo das equações de Estrutura associadas a uma imersão de uma superfície em \mathbb{R}^4 . Os resultados deste capítulo são inspirados em [8], [13],[12],[4].

1.1 Singularidades de germes de funções suaves

Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ quando existem e são contínuas em U todas as derivadas parciais de f de ordem $\leq k$. Sejam U e V conjuntos abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p , respectivamente. Em grande parte do trabalho estamos considerando, quando não é dito contrário, aplicações $f : U \rightarrow V$ suaves, ou C^∞ , isto é, que possui derivadas de todas as ordens.

Definição 1.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave. Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto singular de f se, o posto da matriz jacobiana de f no ponto x ,*

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right), \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n,$$

não é máximo. Caso contrário, dizemos que x é um ponto regular de f . O ponto x também pode ser chamado de uma singularidade de f .

É claro que um ponto ser uma singularidade de uma aplicação é uma propriedade local. Neste trabalho estaremos interessados em aplicações que tem um singularidade na origem. Por este motivo introduzimos a seguinte relação de equivalência:

Definição 1.2. *Dadas duas aplicações suaves $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$, com $x \in U_1$ e $x \in U_2$. Dizemos que $f_1 \sim f_2$ se, e somente se, existe uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x tal que $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in U$*

As classes de equivalência sobre essa relação são chamadas de *germes* de aplicações em x . Denotemos o germe de um elemento $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x por $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, onde $y = f(x)$. Dizemos que x e y são respectivamente fonte e meta do germe. Para cada germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, associamos a sua derivada $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ que é definido como sendo a derivada em x de qualquer um representante. Um germe é invertível se, e somente se, sua derivada é invertível. O posto de um germe é definido como o posto de sua derivada em x . Quando o posto de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é igual a n dizemos que o germe é uma imersão. No caso em o posto é igual a p , dizemos que o germe é uma submersão.

Definição 1.3. *Dois germes $f : (\mathbb{R}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_1)$ e $g : (\mathbb{R}^n, x_2) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_2)$ são equivalentes quando existem germes invertíveis $h : (\mathbb{R}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_2)$ e $k : (\mathbb{R}^p, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_2)$ para os quais o diagrama comuta,*

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^n, x_1) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, y_1) \\
 \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow k \\
 (\mathbb{R}^n, x_2) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, y_2),
 \end{array}$$

isto é, $k \circ f = g \circ h$.

Denotamos por $\mathcal{E}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ . Quando $p = 1$, este conjunto é denotado por \mathcal{E}_n . Observemos que ε_n é

um anel local cujo ideal maximal é $m_n := \{f \in \mathcal{E}_n; f(0) = 0\}$. Além disso é possível verificar que m_n é o ideal gerado por x_1, \dots, x_n .

Definição 1.4. *Sejam $f, g \in \mathcal{E}_n$. Dizemos que f e g são \mathcal{R} -equivalentes e denotamos por $f \sim g$ se existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $f = g \circ h^{-1}$.*

Para nosso estudo é importante o conhecimento de alguns resultados básicos da análise no espaço euclidiano.

Definição 1.5. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto x_0 em \mathbb{R}^n é um ponto crítico não degenerado se x_0 é um ponto singular de f e a Hessiana, que é o determinante da matriz*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

é não nulo.

Definição 1.6. *Uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função de Morse se todos os seus pontos singulares são pontos críticos não degenerados.*

Observação 1.7. *Note que uma função regular $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é também uma função de Morse.*

É bem conhecido do cálculo que as funções de Morse desempenham um papel importante em suas aplicações e possuem uma forma normal na vizinhança de um ponto crítico não degenerado como veremos a seguir.

Lema 1.8. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe suave. Então:*

- 1) *Se x_0 é um ponto regular de f , então o germe é equivalente a $\pi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_1$.*
- 2) *Se x_0 um ponto crítico não degenerado de f , então o germe é equivalente a $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por*

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

Denotaremos por $P^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ o espaço vetorial real das aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que cada componente f_i de $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ é um polinômio de grau $\leq k$ nas coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n de \mathbb{R}^n com termo constante nulo. A noção de espaço de k-jatos de aplicações suaves é introduzida em [11]. Neste trabalho utilizamos a seguinte identificação:

Proposição 1.9. *Seja $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ o espaço dos k-jatos. Então existe uma bijeção canônica entre o espaço de k-jatos e o conjunto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times P^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

Definição 1.10. *Para cada aplicação $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ e cada $a \in \mathbb{R}^n$, definimos a aplicação*

$$\begin{aligned} J^k f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a &\longmapsto J^k f(a) = (a, f(a), P_1(a), \dots, P_n(a)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $P_i(a)$ é o polinômio de Taylor da função f_i de ordem k em a , sem o termo constante.

Denotaremos por $j^k f(a) = (P_1(a), \dots, P_n(a))$. A aplicação $J^k f$ é de classe C^∞ e $j^k f(a)$ é chamado o k-jato de f em a .

Exemplo 1.11. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Neste caso temos que:*

$$j^k f(a) = f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k,$$

e $J^k f(a)$ pode ser identificado com um elemento do espaço \mathbb{R}^{k+2} com a correspondência

$$(a, f(a), f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k) \leftrightarrow (a, f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \frac{f^{(k)}(a)}{k!}).$$

Ao conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ vamos associar uma topologia, chamada Topologia de Whitney.

Definição 1.12 (Topologia de Whitney). *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Uma base para a topologia de C^k de Whitney de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é dada pelos seguintes conjuntos*

$$V(f, \delta) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p); \|J^k g(x) - J^k f(x)\| < \delta(x)\},$$

onde $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e positiva.

A Topologia C^∞ de Whitney $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tem como base a união de todos os abertos das topologias C^k de Whitney, com $k \geq 0$.

Definição 1.13. Um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é k -determinado se para qualquer germe $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(g)(0) = j^k(f)(0)$ temos que f é \mathcal{R} -equivalente a g .

Um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é finitamente determinado se existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que f seja k -determinado.

Definição 1.14. Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe tal que 0 é isolado de $f^{-1}(0)$. A multiplicidade $\mu_0[f]$ de f em 0 é definida por

$$\mu_0[f] = \dim_{\mathbb{R}}[\mathcal{E}_n / \langle f_1, \dots, f_n \rangle],$$

onde $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ é o ideal gerado pelas componentes f_i de f em 0 . Dizemos que f é finito se $\mu_0[f] < \infty$.

Dada uma aplicação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $g = (g_1, \dots, g_n)$ com cada g_i sendo um polinômio homogêneo tal que 0 é isolado em $g^{-1}(0)$, temos que $\mu_0[g] = \prod_{i=1}^n d_i$, onde d_i é o grau de cada g_i .

Proposição 1.15 ([16]). Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, um germe finito. Considere $f = (f_1, \dots, f_n)$ e $f_i = f_i^{k_i} + q$, onde $f_i^{k_i}$ é a parte homogênea de f_i com grau k_i e $j^{k_i}q(0) = 0$. Então:

- i) $\mu_0[f] \geq \prod_{i=1}^n k_i$.
- ii) $\mu_0[f] = \prod_{i=1}^n k_i$ se, e somente se, o sistema $f_i^{k_i} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ tem apenas solução trivial em \mathbb{C}^n .

Definição 1.16. Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe. A \mathcal{R}_e -codimensão de f , denotada por $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e)$ é definida como:

$$\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) = \mu_0[\nabla f].$$

A \mathcal{R}_e -codimensão, que foi definida acima, pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.17 ([8]). Sejam dois germes f e g em \mathcal{E}_n . Temos que,

- i) Se f e g são \mathcal{R} -equivalentes então $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) = \text{cod}(g, \mathcal{R}_e)$.
- ii) $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) = 0$ se, e somente se, 0 é um valor regular de f .

1.1.1 Classificação dos germes de codimensão ≤ 5

Definição 1.18. Um germe $f \in m_n^2$ (isto é, a origem é um ponto singular) é não degenerado quando a matriz Hessiana $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$ é não singular.

Lema 1.19 (Lema de Morse). Seja $f \in m_n^2$. Então, $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) = 1$ se, e somente se, f é não degenerado. Neste caso f será \mathcal{R} -equivalente a um germe da forma

$$x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Definição 1.20. Sejam $f \in m_n^2$ e $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) \geq 2$. Dizemos que f tem coposto c se o posto da matriz Hessiana é $n - c$.

Observação 1.21. O coposto das funções de Morse é nulo.

Lema 1.22 (Lema da Separação). Seja $f \in m_n^2$ um germe finitamente determinado de coposto c . Então, f é \mathcal{R} -equivalente a um germe

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow g(x_1, \dots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

com $g \in m_c^3$.

Proposição 1.23. Sejam $f \in m_n^2$ de coposto 1 e $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) = k$. Então, f é \mathcal{R} -equivalente ao germe

$$(x_1, \dots, x_k) \rightarrow \pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Este germe é chamado de singularidade A_k .

Demonstração: Ver referência [8] ■

Lema 1.24. Seja $f \in m_n^2$ um germe de \mathcal{R}_e -codimensão finita e de coposto c , então $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) \geq \frac{c(c+1)}{2} + 1$.

Pelo lema acima, temos que para classificar os germes de codimensão ≤ 5 , considera-se apenas os germes de coposto ≤ 2 .

Proposição 1.25 ([8]). *Seja $f \in m_n^2$ de coposto 2 e $\text{cod}(f, \mathcal{R}_e) \leq 5$. Então, f é equivalente a um dos seguintes germes*

$$\begin{aligned} & \pm(x_1^3 - x_1x_2^2) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2 \\ & \pm(x_1^3 + x_2^3) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2 \\ & \pm(x_1^2x_2 + x_2^4) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2. \end{aligned}$$

Teorema 1.26 (Teorema de Thom). *Seja $f \in m_n^2$ de modo que $1 \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}_e) \leq 5$. Então, a menos da soma de uma forma quadrática nas outras variáveis, e multiplicação por ± 1 , f é \mathcal{R} -equivalente a um dos seguintes germes listados na tabela abaixo.*

Símbolo	Nome	Germe	Coposto	$\text{cod}(f, \mathcal{R}_e)$
A_1	Morse	x^2	0	1
A_2	Dobra	x^3	1	2
A_3	Cúspide	x^4	1	3
A_4	Rabo de andorinha	x^5	1	4
A_5	Borboleta	x^6	1	5
D_{4-}	Umbílico elíptico	$(x^3 - xy^2)$	2	4
D_{4+}	Umbílico hiperbólico	$(x^3 + y^3)$	2	4
$D_{\pm 5}$	Umbílico parabólico	$(x^2y + y^4)$	2	5

Tabela 1.1: singularidades

1.2 Variedade Riemanniana

Transversalidade é uma idéia importante e profunda no estudo da teoria das singularidades. Grandes resultados sobre genericidade em conjuntos foram obtidos combinando-se os teoremas demonstrados por René Thom com a idéia de transversalidade entre subvariedades. Neste trabalho a transversalidade aparecerá diversas vezes.

Definição 1.27. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

1. $\bigcup_{\alpha} x_{\alpha}(U_{\alpha}) = M$.
2. Para todo par α, β com $x_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap x_{\beta}(U_{\beta}) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_{\alpha}^{-1}(W)$ e $x_{\beta}^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_{\beta}^{-1} \circ x_{\alpha}$ são suaves.
3. A família $\{(U_{\alpha}, x_{\alpha})\}$ é máxima relativamente às condições 1 e 2.

O par (U_{α}, x_{α}) (ou aplicação x_{α}) com $p \in x_{\alpha}(U_{\alpha})$ é chamado de *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $x_{\alpha}(U_{\alpha})$ é então chamada uma vizinhança coordenada de p . Uma família $\{(U_{\alpha}, x_{\alpha})\}$ satisfazendo 1 e 2 é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Definição 1.28. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Definição 1.29. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva diferenciável em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$.

O conjunto $T_p M$, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n e é chamado o espaço tangente de M em p . Para maiores detalhes veja [4].

Observação 1.30. *Seja M uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$. O conjunto TM munido de uma estrutura diferenciável será chamado fibrado tangente de M . Para maiores detalhes veja [4].*

Definição 1.31. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Definição 1.32. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.*

Proposição 1.33. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Consideremos o conjunto*

$$M = \{p \in U; f(p) = c \text{ e } df_p : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ sobrejetora}\}$$

Então,

- (i) M é aberto em $f^{-1}(c)$.
- (ii) Supondo que M é não vazio, M é uma variedade suave de dimensão m do \mathbb{R}^{m+n} , e
- (iii) $T_p M = \ker(df)_p$ para todo $p \in M$.

Definição 1.34. *Sejam M e N sendo variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ sendo uma aplicação suave. Considere S sendo uma subvariedade de N e seja $x \in M$. Então f intersecta S transversalmente em x se;*

- i) $f(x) \notin S$ ou
 - ii) $f(x) \in S$ e $(df)_x(T_x M) + T_{f(x)} S = T_x N$.
- onde $T_x M$ é o espaço tangente à M em x .

Diremos que f é transversal a S , denotado por $f \pitchfork S$, quando, para todo $x \in M$, f for transversal a S na ponto x .

Teorema 1.35. *(Transversalidade de Thom) Para toda subvariedade fechada S de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, o conjunto das aplicações F em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tal que $j^k F \pitchfork S$ é aberto e, portanto denso na C^r -topologia, qualquer que seja $r \geq k + 1$.*

Como consequência do teorema de transversalidade de Thom, temos os seguinte resultado:

Lema 1.36. *O conjunto de todas as funções de Morse é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Definição 1.37. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V .*

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

As definições e os resultados sobre conexão podem ser encontrados em [4].

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M .

Definição 1.38. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

$$ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.39. *Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ e $p \in \mathbb{R}^n$, a conexão em \mathbb{R}^n será dada por*

$$(\nabla_X Y)(p) = (dY)_p(X(p)).$$

Corolário 1.40. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.41. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 1.42 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes condições:*

- a) ∇ é simétrica.
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão Riemanniana* (ou de *Levi-Civita*) de M .

Seja $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão de uma variedade suave M de dimensão n em uma variedade Riemanniana de dimensão $n + m$. A métrica Riemanniana de \bar{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M : se $v_1, v_2 \in T_p M$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Nesta situação a aplicação f é uma imersão isométrica de M em \bar{M} . Note que f é localmente um mergulho, isto é, existe uma vizinhança

$U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um mergulho, o qual implica que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de \bar{M} . Denotamos $f(U) = M$. Agora, iremos introduzir a segunda forma fundamental considerando-a relativamente a um campo ξ normal a M . Nossa variedade M será munida da conexão riemanniana ∇ induzida da conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$ de \bar{M} .

Sejam X, Y campos locais de vetores em M . Denotamos por \bar{X}, \bar{Y} as extensões locais dos campos X e Y a \bar{M} , respectivamente. A conexão riemanniana ∇ em M é definida como

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$ é a projeção ortogonal do campo de vetores $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ no espaço tangente de M .

Definição 1.43. *Sejam X e Y campos locais de vetores em M . Definimos o campo local de vetores em \mathbb{R}^4 normal a M . Como*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N.$$

O campo local de vetores $B(X, Y)$ não depende das extensões \bar{X}, \bar{Y} .

Vamos indicar por $\mathcal{X}(M)^\perp$ os campos de vetores suaves normais a $f(U)$.

Proposição 1.44. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, então a aplicação $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Observação 1.45. *O valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.*

Seja $p \in M$ e $\xi \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $K_\xi : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$K_\xi(x, y) = \langle B(x, y), \xi \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é pela proposição acima, uma forma bilinear e simétrica.

Definição 1.46. *Seja $x \in T_p M$. A forma quadrática II_ξ definida em $T_p M$ por*

$$II_\xi(x) = K_\xi(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor ξ .

Se $x, y \in T_{f(q)}f(M) \subset T_{f(q)}\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e \overline{M} , respectivamente. Para maiores detalhes sobre a curvatura seccional veja [4]. O teorema abaixo exprime as diferenças das curvaturas seccionais de M e \overline{M} por meio de expressões construídas a partir da segunda forma fundamental.

Teorema 1.47 (Gauss). *Sejam $q \in M$ e x, y vetores ortonormais de $T_{f(q)}f(M)$. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - \|B(x, y)\|^2.$$

Demonstração: Veja [4] ■

1.3 Conjuntos singulares

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave. O conjunto singular $\Sigma(f)$ é o conjunto de todos os pontos singulares de f . A imagem de $\Sigma(f)$, $f(\Sigma(f))$, é chamado de discriminante ou conjunto de bifurcação.

Exemplo 1.48. *A aplicação cúspide de Whitney no plano é uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \mapsto (u, v)$ onde $u = x$, $v = y^3 - xy$. O conjunto singular é o conjunto de todos os pontos onde a matriz Jacobiana tem $\text{rank} < 2$, isto é a parábola $x = 3y^2$. E o conjunto bifurcação é a imagem desta parábola sob f , ou seja, a cúbica cuspidal que tem a equação $4u^3 - 27v^2 = 0$.*



Figura 1.1: Parabóla e Cúspide.

Definição 1.49. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave. Para cada $i = 1, \dots, \min\{n, p\}$, o conjunto de singularidades de primeira ordem $\Sigma^i(f)$ é definido da seguinte maneira:*

$$\Sigma^i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \dim(\ker(df_x)) = i\}.$$

Exemplo 1.50. *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ definida por $f(x, y) = (x^2, y^2)$, vamos calcular $\Sigma^i(f)$, $i = 0, 1, 2$.*

Primeiramente, temos

$$df_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

e daí, notemos que $\dim(\ker(df_{(x,y)})) = 2$ se, e somente se, $(x, y) = (0, 0)$. Desta forma, $\Sigma^2(f) = \{(0, 0)\}$. O conjunto $\Sigma^1(f)$ é determinado pelas equações $x \neq 0$ e $y = 0$ ou $x = 0$ e $y \neq 0$. Portanto, $\Sigma^1(f) = \{(x, 0)\} \cup \{(0, y)\} - \{(0, 0)\}$.

E finalmente temos que $\Sigma^0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\}$, pois, para esses pontos $\dim(\ker(df_{(x,y)})) = 0$.

Observe que todos os $\Sigma^i(f)$ deste exemplo são subvariedades do \mathbb{R}^2 .

Definição 1.51. *Dada uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ temos os conjuntos de singularidades de primeira ordem $\Sigma^i(f)$. Se esses são subvariedades podemos introduzir*

os conjuntos de singularidades de segunda ordem $\Sigma^{i,j}(f) = \Sigma^j(f|\Sigma^i(f))$. E este processo pode ser continuado. Se esses conjuntos são subvariedades podemos introduzir os conjuntos de singularidades de terceira ordem $\Sigma^{i,j,k}(f) = \Sigma^k(f|\Sigma^{i,j}(f))$. E assim por diante. Os conjuntos obtidos dessa maneira são os conjuntos de singularidade de ordem superior de f .

Exemplo 1.52. Dado um $\varepsilon > 0$ considere uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (u, v)$ onde $u = x^2 - y^2 + 2\varepsilon x$ e $v = 2xy - 2\varepsilon y$.

A matriz jacobiana de f é

$$\begin{bmatrix} 2x + 2\varepsilon & -2y \\ 2y & 2x - 2\varepsilon \end{bmatrix},$$

que tem $\text{rank} < 2$ quando seu determinante se anula, ou seja, no círculo $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$. Então, tal círculo é o conjunto singular de f . Se parametrizarmos o conjunto singular, colocando

$$x = \varepsilon \cos \theta \quad y = \varepsilon \sin \theta$$

então obtemos uma parametrização do discriminante na forma

$$u = \varepsilon^2(\cos 2\theta + 2 \cos \theta) \quad v = \varepsilon^2(\sin 2\theta - 2 \sin \theta)$$

que é uma representação usual de um hipociclóide tricuspidal.

Na verdade nosso círculo $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ é precisamente o conjunto $\Sigma^1(f)$ de singularidades de primeira ordem, pois note que a matriz jacobiana não pode ter $\text{rank} = 0$. Temos que existem três pontos no círculo que precisam ser distinguidos dos outros na medida em que são levados por f a cúspides no hipociclóide.

Analisaremos agora a restrição $f|\Sigma^1(f)$. Vamos calcular o rank da restrição num ponto (x, y) no círculo. Relembre que a diferencial da restrição é a restrição da diferencial de f para a reta tangente ao círculo. Agora a reta tangente ao círculo num ponto (x, y) é a reta que passa pela origem perpendicular a este vetor. Um vetor tangente unitário será $(-y/\varepsilon, x/\varepsilon)$ e a imagem deste sob a diferencial de f em (x, y)



Figura 1.2: Hipociclóide.

será obtida através da aplicação da matriz jacobiana a ele, obtendo-se o vetor

$$\begin{bmatrix} 2x + 2\varepsilon & -2y \\ 2y & 2x - 2\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y/\varepsilon \\ x/\varepsilon \end{bmatrix} = 2/\varepsilon \begin{bmatrix} -2xy - \varepsilon y \\ -y^2 + x^2 - \varepsilon x \end{bmatrix}.$$

A diferencial da restrição certamente tem $\text{rank} \leq 1$; e ela tem $\text{rank} 0$ somente quando este último vetor for nulo, ou seja, exatamente nas raízes cúbicas de ε^3 . Em outras palavras nossos três pontos são distinguidos precisamente pelo fato que eles são pontos $\Sigma^1(f)$ para a restrição $f|_{\Sigma^1(f)}$, ou seja, pontos $\Sigma^{1,1}(f)$.

1.4 Contato entre subvariedades

Sejam U e V duas subvariedades em \mathbb{R}^n , definidas localmente através da imersão $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e da submersão $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $U = f(\mathbb{R}^m)$ e $V = g^{-1}(0)$, com $p \in U \cap V$, ou seja, $p = f(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $g \circ f(x_0) = 0$. Supondo $m \geq k$, consideramos que existe *contato* entre U e V em p se as duas subvariedades *não são transversais* nesse ponto. Isto equivale a dizer que a diferencial $d_{x_0}(g \circ f)$ não é sobrejetiva [11]; portanto a aplicação $g \circ f$ tem uma singularidade ou um ponto crítico em x_0 .

O tipo de contato entre as subvariedades U e V será determinado pelo tipo de singularidade que a aplicação $g \circ f$ tem no ponto x_0 . Este é o motivo que a denominamos de aplicação de contato.

Segue abaixo a definição de K-equivalência (ou equivalência de contato).

Definição 1.53. (*Montaldi*) Dados dois germes $f, g : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ dizemos que f e g são k -equivalentes e denotamos por $f \stackrel{K}{\sim} g$, se existem difeomorfismos de germes $h : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ e $H : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$ tais que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{(I_{\mathbb{R}}^m, f)} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \\ \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow H \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{(I_{\mathbb{R}}^m, g)} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0)), \end{array}$$

ou seja, $H(x, 0) = (h(x), 0)$ e $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, localmente definida por $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, onde $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão. Os contatos de M de com hiperplanos e hiperesferas são determinados pelo subconjunto $\psi^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, onde $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão.

Se a subvariedade é um hiperplano de vetor normal unitário $v \in S^{n-1}$ e distância à origem $\rho \in \mathbb{R}^+$. A submersão será dada por

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + \rho.$$

Portanto, os contatos de M com a família de hiperplanos são dados pelas singularidades da família de **funções altura**:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi) : \mathbb{R}^2 \times S^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), v) &\mapsto \lambda(\phi)((x, y), v) = \langle \phi(x, y), v \rangle. \end{aligned}$$

Definição 1.54. Sejam $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ imersão e $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ submersão que definem localmente as subvariedades $U = \phi(\mathbb{R}^m)$ e $V = \psi^{-1}(0)$. Dizemos que U e V tem contato de ordem ≥ 2 em $p \in U \cap V$ se, e somente se, todas derivadas de $\psi \circ \phi$ de ordem ≤ 2 se anulam em p , ou seja se, e somente se,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi \circ \phi}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial \psi \circ \phi}{\partial x_m}(p) = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_1^2}(p) = \dots = \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_m^2}(p) = \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_1 \partial x_2}(p) = \dots = \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_{m-1} \partial x_m}(p) = 0 \end{array} \right. .$$

1.5 As equações de Estrutura

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja e_1, \dots, e_n campos de vetores diferenciáveis tal que para cada produto interno

$$\langle e_i(p), e_j(p) \rangle_p = \delta_{ij},$$

onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. O conjunto de campo de vetores e_1, \dots, e_n é chamado um referencial móvel em U . Dado um referencial móvel $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, podemos definir 1-formas ω_i pela condição

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij}, i = 1, \dots, n;$$

ou seja, em cada p , a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual de $\{(e_i)_p\}$. O conjunto das formas $\{\omega_i\}$ é chamado o correferencial associado ao referencial móvel $\{e_i\}$.

Cada campo de vetores e_i é uma aplicação suave $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para cada p e cada $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_{j=1}^n (\omega_{ij})_p(v) e_j(p).$$

Note que, as expressões $(\omega_{ij})_p(v) = \langle (de_i)_p(v), e_j(p) \rangle$, definidas acima, dependem linearmente de v . Portanto $(\omega_{ij})_p$ é uma aplicação linear em \mathbb{R}^n e, desde que e_i é um campo de vetores diferenciável, ω_{ij} é uma 1-forma diferencial. Sabendo disso, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j.$$

As formas ω_{ij} assim definidas são chamadas as formas de conexão de \mathbb{R}^n no referencial móvel $\{e_i\}$.

Observe que, se diferenciarmos $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obtemos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

isto é, as formas de conexão $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ são antisimétricas nos índices i, j . O ponto crucial no método do referencial móvel é que as formas ω_i, ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan.

Proposição 1.55 (As equações de estrutura do \mathbb{R}^n). *Seja $\{e_i\}$ um referencial móvel em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja ω_i um correferencial associado associada a e_i e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial e_i . Então*

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^n \omega_k \wedge \omega_{ki}, \quad (1.2)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Demonstração: Ver [6]. ■

Lema 1.56 (Lema de Cartan). *Seja M uma variedade. Considere $\dim M = n \geq k$ e sejam $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-formas em M que são linearmente independentes em cada ponto. Suponha que existam 1-formas $\theta_1, \dots, \theta_k$ tal que*

$$\sum_{i=1}^k \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Então existe uma matriz simétrica $k \times k$ de funções suaves (A_{ij}) tal que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^k A_{ij} \omega_j \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

Agora, iremos calcular as equações de estrutura de uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ de uma variedade diferenciável M de dimensão 2 em \mathbb{R}^4 .

Para $q \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de q tal que a restrição $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um mergulho, ou seja, a imersão é localmente um mergulho. Desta forma, seja $V \subset \mathbb{R}^4$ uma vizinhança de $f(q)$ em \mathbb{R}^4 tal que $V \cap f(M) = f(U)$. Suponha que existe um referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ em V com a propriedade que, quando restrito a $f(U)$, os vetores e_1, e_2 são tangentes a $f(U)$; um tal referencial móvel é dito ser um referencial adaptado.

Em V temos, associado ao referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, as formas ω_i e ω_{ij} que satisfazem as equações de estrutura (1.2) e (1.3). Os índices $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Agora, dado $v \in T_{f(q)}f(U)$ temos que $v = \lambda_1 e_1(p) + \lambda_2 e_2(p)$, onde $f(q) = p$ e λ_1, λ_2 são escalares.

Logo, $(\omega_3)_p(v) = (\omega_3)_p(\lambda_1 e_1(p) + \lambda_2 e_2(p)) = 0$ e analogamente $(\omega_4)_p(v) = 0$. Portanto $\omega_3 = \omega_4 = 0$ para todo $p \in f(U)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_3 = \omega_{31} \wedge \omega_3 + \omega_{32} \wedge \omega_2, \\ 0 &= d\omega_4 = \omega_{41} \wedge \omega_1 + \omega_{42} \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Como ω_1 e ω_2 são independentes. Segue-se do lema de Cartan, que

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2, \\ \omega_{14} &= e\omega_1 + f\omega_2, \\ \omega_{24} &= f\omega_1 + g\omega_2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A função N definida pela fórmula:

$$d\omega_{34} = -N\omega_1 \wedge \omega_2,$$

é chamada de curvatura normal.

Para calcular N usaremos 1.3 e as equações dadas por 1.4, assim temos que

$$\begin{aligned} d\omega_{34} &= \omega_{31} \wedge \omega_{14} + \omega_{32} \wedge \omega_{24} \\ &= [(-a\omega_1 - b\omega_2) \wedge (e\omega_1 + f\omega_2)] + [(-b\omega_1 - \omega_2) \wedge (f\omega_1 + g\omega_2)] \\ &= -[(a - c)f - (e - g)b]\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N = (a - c)f - (e - g)b.$$

Capítulo 2

Superfícies em \mathbb{R}^4

Neste capítulo estudaremos a geometria diferencial das superfícies em \mathbb{R}^4 , analisando a elipse curvatura e os invariantes associados a essas superfícies. Também estudaremos as formas quadráticas associadas a elipse curvatura.

2.1 Elipse curvatura

Sejam N uma variedade suave, compacta, 2-dimensional e $f : N \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão de N em \mathbb{R}^4 . A métrica Riemanniana euclidiana de \mathbb{R}^4 induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em N : se $v_1, v_2 \in T_p M$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Nesta situação a aplicação f é uma imersão isométrica de N em \mathbb{R}^4 . Note que f é localmente um mergulho, isto é, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um mergulho, o qual implica que $f(U) \subset \mathbb{R}^4$ é uma subvariedade de \mathbb{R}^4 . Denotamos $f(U) = M$.

Definição 2.1. Dado $m \in M$, para cada $v \in S^1 \subset T_m M$ seja $\gamma(s)$ uma curva em M parametrizada pelo comprimento de arco que passa por $f(m)$ e escolhida de modo que o vetor tangente a γ em $f(m)$ é v . O vetor curvatura normal $\eta(v)$ é definido como sendo a projeção de $\frac{d^2\gamma}{ds^2}(m)$ em $N_m M$. A imagem de η é chamada de elipse curvatura de M em m .

Veremos mais adiante que a definição acima é independente da escolha da curva γ . Assim, podemos escolher a curva como intersecção de M com o hiperplano em $f(m)$ composto pela soma direta do plano normal $N_m M$ e a reta na direção tangente representada por v . Uma tal curva é chamada a seção normal de M na direção v .

Agora, note que:

$$B(v, v) = (\nabla_{\gamma'} \gamma')^N = \eta(v).$$

Para calcular $B(v, v)$ usaremos o referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, com $e_1, e_2 \in T_m M$ e as formas ω_i e ω_{ij} que satisfazem as equações abaixo

$$\begin{aligned}\omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2, \\ \omega_{14} &= e\omega_1 + f\omega_2, \\ \omega_{24} &= f\omega_1 + g\omega_2,\end{aligned}$$

ambas associadas ao mergulho, e introduzidas no capítulo 1.

Assim, $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ e o vetor curvatura normal no ponto m coincide com:

$$\eta(v) = \langle B(v, v), e_3 \rangle e_3 + \langle B(v, v), e_4 \rangle e_4,$$

Como B é bilinear e simétrica, então

$$B(v, v) = \cos^2 \theta B(e_1, e_1) + 2 \cos \theta \sin \theta B(e_1, e_2) + \sin^2 \theta B(e_2, e_2)$$

onde $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ ($e_1 e_2$ é uma base tangente fixada). Note que $\langle B(v, v), e_3 \rangle$ e $\langle B(v, v), e_4 \rangle$ ambas determinam formas quadráticas, e abaixo calcularemos os coeficientes de $\langle B(X, X), e_3 \rangle$.

- $$\begin{aligned} \bullet \quad \langle B(e_1, e_1), e_3 \rangle &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^N, e_3 \right\rangle \\ &= \left\langle [(de_1)_p(e_1)]^N, e_3 \right\rangle \\ &= \left\langle [\omega_{11}(e_1)e_1 + \omega_{12}(e_1)e_2 + \omega_{13}(e_1)e_3 + \omega_{14}(e_1)e_4]^N, e_3 \right\rangle \\ &= \langle \omega_{13}(e_1)e_3 + \omega_{14}(e_1)e_4, e_3 \rangle \\ &= \langle [a\omega_1(e_1) + b\omega_2(e_1)]e_3 + [e\omega_1(e_1) + f\omega_2(e_1)]e_4, e_3 \rangle = a \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet \quad \langle B(e_1, e_2), e_3 \rangle &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_1} e_2)^N, e_3 \right\rangle \\ &= \left\langle [(de_2)_p(e_1)]^N, e_3 \right\rangle \\ &= \left\langle [\omega_{21}(e_1)e_1 + \omega_{22}(e_1)e_2 + \omega_{23}(e_1)e_3 + \omega_{24}(e_1)e_4]^N, e_3 \right\rangle \\ &= \langle \omega_{23}(e_1)e_3 + \omega_{24}(e_1)e_4, e_3 \rangle \\ &= \langle [b\omega_1(e_1) + c\omega_2(e_1)]e_3 + [f\omega_1(e_1) + g\omega_2(e_1)]e_4, e_3 \rangle = b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet \quad \langle B(e_2, e_2), e_3 \rangle &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_2} e_2)^N, e_3 \right\rangle \\ &= \left\langle [(de_2)_p(e_2)]^N, e_3 \right\rangle \\ &= \left\langle [\omega_{21}(e_2)e_1 + \omega_{22}(e_2)e_2 + \omega_{23}(e_2)e_3 + \omega_{24}(e_2)e_4]^N, e_3 \right\rangle \\ &= \langle \omega_{23}(e_2)e_3 + \omega_{24}(e_2)e_4, e_3 \rangle \\ &= \langle [b\omega_1(e_2) + c\omega_2(e_2)]e_3 + [f\omega_1(e_2) + g\omega_2(e_2)]e_4, e_3 \rangle = c \end{aligned}$$

Analogamente a $\langle B(v, v), e_3 \rangle$ podemos calcular os coeficientes de $\langle B(v, v), e_4 \rangle$ e assim temos que

- $\langle B(e_1, e_1), e_4 \rangle = e$
- $\langle B(e_1, e_2), e_4 \rangle = f$
- $\langle B(e_2, e_2), e_4 \rangle = g$

Logo, $B(e_1, e_1) = ae_3 + ee_4$, $B(e_1, e_2) = be_3 + fe_4$, $B(e_2, e_2) = ce_3 + ge_4$. Portanto,

$$\eta(v) = (a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)e_3 + (e\cos^2\theta + 2f\cos\theta\sin\theta + g\sin^2\theta)e_4.$$

Esta equação mostra que a elipse curvatura não depende da escolha da curva parametrizada.

Note que $\eta : S^1 \rightarrow N_mM$ é uma aplicação de S^1 em N_mM .

O vetor curvatura média da elipse de curvatura, que será denotado por H , é dado por

$$H = \frac{1}{2}(a + c)e_3 + \frac{1}{2}(e + g)e_4.$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad e \quad \cos\theta\sin\theta = \frac{\cos 2\theta}{2},$$

podemos escrever

$$\eta(\theta) = \left(\frac{1}{2}(a - c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta\right)e_3 + \left(\frac{1}{2}(e - g)\cos 2\theta + f\sin 2\theta\right)e_4 + H. \quad (2.1)$$

Como matriz (2.1) tem a seguinte forma

$$(\eta - H)(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a - c) & b \\ \frac{1}{2}(e - g) & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}.$$

Note que $\det(\eta - H) = 1/2N$, onde N é a curvatura normal definida no capítulo 1.

Mostraremos abaixo que a imagem do círculo por $(\eta - H)$ é uma elipse.

Proposição 2.2. *Supondo que $\det(\eta - H) \neq 0$, temos que a imagem do círculo por $(\eta - H)$ é uma elipse no plano normal.*

Demonstração: Seja $p \in M$, vamos considerar θ como sendo uma direção variando de 0 à 2π em $S^1 \subset T_{f(p)}f(M)$ e (x, y) as coordenadas de $(\eta - H)(\theta)$ em $N_{f(p)}f(M)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-c) & b \\ \frac{1}{2}(e-g) & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-c) & b \\ \frac{1}{2}(e-g) & f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-c) & b \\ \frac{1}{2}(e-g) & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-c) & b \\ \frac{1}{2}(e-g) & f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\eta-H)} \begin{bmatrix} f & -b \\ -\frac{1}{2}(e-g) & \frac{1}{2}(a-c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ = & \frac{1}{1/2N} \begin{bmatrix} fx - by \\ -\frac{1}{2}(e-g)x + \frac{1}{2}(a-c)y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$, temos que

$$\frac{1}{(1/2N)^2} [(fx - by)^2 + (-\frac{1}{2}(e-g)x + \frac{1}{2}(a-c)y)^2] = 1.$$

o que implica

$$\frac{1}{(1/2N)^2} [f^2 + \frac{1}{4}(e-g)^2)x^2 + 2(-fb - \frac{1}{4}(e-g)(a-c))xy + (b^2 + \frac{1}{4}(a-c)^2)y^2] = 1. \quad (2.2)$$

Sejam $A = f^2 + \frac{1}{4}(e-g)^2$, $B = -fb - \frac{1}{4}(e-g)(a-c)$ e $C = b^2 + \frac{1}{4}(a-c)^2$. A cônica será uma elipse quando $A > 0$ e $AC - B^2 > 0$ ver referência [5]. Abaixo será mostrado que estas condições são satisfeitas.

i) $A = f^2 + \frac{1}{4}(e-g)^2 > 0$

pois

$$\det(\eta - H) = \frac{1}{2}(a-c)f - \frac{1}{2}(e-g)b \neq 0.$$

ii) $C = b^2 + \frac{1}{4}(a - c)^2 > 0$, $\det(\eta - H) \neq 0$.

iii) $AC - B^2 > 0$, pois

$$\begin{aligned}
 AC - B^2 &= (f^2 + \frac{1}{4}(e - g)^2)(b^2 + \frac{1}{4}(a - c)^2) - f^2b^2 - \frac{1}{2}fb(e - g)(a - c) \\
 &\quad - \frac{1}{16}(e - g)^2(a - c)^2 \\
 &= f^2b^2 + \frac{1}{4}f^2(a - c)^2 + \frac{1}{4}(e - g)^2b^2 + \frac{1}{16}(e - g)^2(a - c)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}fb(e - g)(a - c) - \frac{1}{16}(e - g)^2(a - c)^2 \\
 &= \frac{1}{4}f^2(a - c)^2 - \frac{1}{2}fb(e - g)(a - c) + \frac{1}{4}(e - g)^2b^2 \\
 &= (\frac{1}{2}(a - c)f - \frac{1}{2}(e - g)b)^2 = (\det(\eta - H))^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Portanto concluímos que (2.2) define uma elipse. ■

Observação 2.3. 1) Geometricamente, o vetor curvatura média H da expressão (2.1) da elipse de curvatura, representa o vetor com extremos em p e no centro de $\eta(\theta)$.

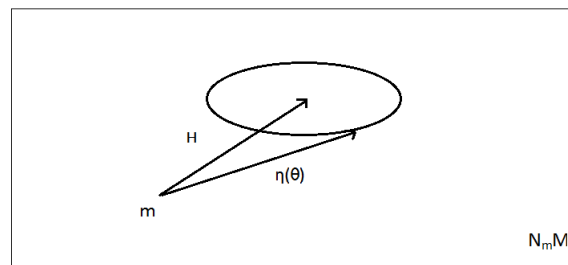


Figura 2.1: Vetor curvatura

2) A definição 2.1 também pode ser introduzida para superfície imersa em \mathbb{R}^3 . Neste caso, o espaço normal a M em m é uma reta e a "elipse de curvatura" é um segmento

de reta ou é apenas um ponto. Veja a figura abaixo.

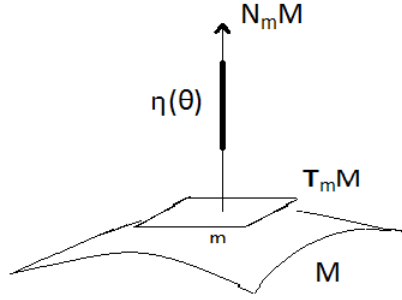


Figura 2.2: Superfície M em \mathbb{R}^3

Vamos utilizar o **Teorema 1.47** acima para calcular a curvatura Gaussiana da superfície M que será denotada por k . Como a curvatura seccional de \mathbb{R}^4 é nula temos,

$$\begin{aligned} k(e_1, e_2) &= \langle B(e_1, e_1), B(e_2, e_2) \rangle - \|B(e_1, e_2)\|^2 \\ &= \langle (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^N, (\bar{\nabla}_{e_2} e_2)^N \rangle - \langle (\bar{\nabla}_{e_1} e_2)^N, (\bar{\nabla}_{e_1} e_2)^N \rangle \\ &= \langle (de_1(e_1))^N, (de_2(e_2))^N \rangle - \langle (de_2(e_1))^N, (de_2(e_1))^N \rangle. \end{aligned}$$

No cálculo dos coeficientes da segunda forma fundamental vimos que,

$$\begin{aligned} (de_1(e_1))^N &= \omega_{13}(e_1)e_3 + \omega_{14}(e_1)e_4, \\ (de_2(e_2))^N &= \omega_{23}(e_2)e_3 + \omega_{24}(e_2)e_4, \\ (de_2(e_1))^N &= \omega_{23}(e_1)e_3 + \omega_{24}(e_1)e_4, \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 k(e_1, e_2) &= \left\langle (de_1(e_1))^N, (de_2(e_2))^N \right\rangle - \left\langle (de_2(e_1))^N, (de_2(e_1))^N \right\rangle \\
 &= \omega_{13}(e_1)\omega_{23}(e_2) + \omega_{14}(e_1)\omega_{24}(e_2) - ((\omega_{23}(e_1))^2 + (\omega_{24}(e_1))^2) \\
 &= (a\omega_1(e_1) + b\omega_2(e_1))(b\omega_1(e_2) + c\omega_2(e_2)) + (e\omega_1(e_1) + f\omega_2(e_1))(f\omega_1(e_2) + g\omega_2(e_2)) \\
 &\quad - [(b\omega_1(e_1) + c\omega_2(e_1))^2 + (f\omega_1(e_1) + g\omega_2(e_1))^2] \\
 &= ac + eg - b^2 - f^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$k = ac - b^2 + eg - f^2.$$

A curvatura Gaussiana também pode ser calculada da seguinte forma:

Observação 2.4. A curvatura Gaussiana k da variedade M é dada pela igualdade

$$d\omega_{12} = -k\omega_1 \wedge \omega_2.$$

De fato, usando 1.3 e as equações 1.4, teremos

$$\begin{aligned}
 d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \omega_{14} \wedge \omega_{42} \\
 &= [(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge (-b\omega_1 - c\omega_2)] + [(e\omega_1 + f\omega_2) \wedge (-f\omega_1 - g\omega_2)] \\
 &= -[ac - b^2 + eg - f^2]\omega_1 \wedge \omega_2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$k = ac - b^2 + eg - f^2.$$

2.2 Os Invariantes de Superfícies em \mathbb{R}^4

Usando a elipse de curvatura podemos detectar invariantes escalares. A elipse de curvatura como um conjunto de pontos do plano normal é independente de rotações no espaço tangente.

Proposição 2.5. *O vetor curvatura média $H = (a + c)e_3 + (e + g)e_4$ é um vetor invariante.*

Demonstração: A prova segue observando que $(a + c)$ é o traço da forma quadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ e $(e + g)$ o traço de $ex^2 + 2fxy + cy^2$. ■

Trataremos agora de um invariante que determina a posição da origem de N_pM em relação à elipse de curvatura. Este invariante é

$$\Delta = \frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} a & 2b & c & 0 \\ e & 2f & g & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ 0 & e & 2f & g \end{bmatrix}.$$

Antes de mostrarmos que Δ é um invariante será útil desenvolver duas formas quadráticas invariantes. Escreva $e = xe_1 + ye_2$ e considere

$$\langle de, e_3 \rangle \wedge \langle de, e_4 \rangle.$$

Agora $de = xde_1 + dx e_1 + yde_2 + dy e_2$ de modo que

$$\begin{aligned} \langle de, e_3 \rangle &= x\omega_{13} + y\omega_{23} \\ \langle de, e_4 \rangle &= x\omega_{14} + y\omega_{24} \end{aligned}.$$

Assim, usando as equações (1.4), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle de, e_3 \rangle \wedge \langle de, e_4 \rangle &= [x\omega_{13} + y\omega_{23}] \wedge [x\omega_{14} + y\omega_{24}] \\ &= [x(a\omega_1 + b\omega_2) + y(b\omega_1 + c\omega_2)] \wedge [x(e\omega_1 + f\omega_2) + y(f\omega_1 + g\omega_2)] \\ &= [(af - be)x^2 + (ag - ce)xy + (bg - cf)y^2]\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Desta maneira, temos uma forma quadrática em x e y , que denotaremos por $\mathcal{Q}(x, y)$, ou seja

$$\mathcal{Q}(x, y) = (af - be)x^2 + (ag - ce)xy + (bg - cf)y^2.$$

Sabemos que, dada uma forma quadrática temos uma matriz simétrica associada a esta forma, logo para a forma acima temos a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} (af - be) & \frac{1}{2}(ag - ce) \\ \frac{1}{2}(ag - ce) & (bg - cf) \end{bmatrix}.$$

O traço e o determinante de Q são funções escalares definidas na variedade. Note que o traço de Q , $(af - be) + (bg - cf)$, é igual a curvatura normal N .

Com alguns cálculos podemos mostrar que

$$\Delta = \det Q$$

Portanto, isto mostra que Δ é um invariante.

Teorema 2.6. *Seja m identificada com a origem de $N_m M$ e $\det(\eta - H) \neq 0$, então:*

- a) $\Delta < 0 \Rightarrow m$ está fora da elipse de curvatura (tal ponto é chamado um ponto hiperbólico de M);*
- b) $\Delta > 0 \Rightarrow m$ está dentro da elipse de curvatura (ponto elíptico);*
- c) $\Delta = 0 \Rightarrow m$ está sobre a elipse de curvatura (ponto parabólico);*

Demonstração: Veja [2]. ■

Quando $\det(\eta - H)(\theta) = 0$, a elipse de curvatura pode degenerar-se em um segmento de reta radial, caso em que $f(m)$ é conhecido como um *ponto de inflexão* da superfície. O ponto de inflexão é do tipo real quando $f(m)$ pertence à elipse de curvatura, e do tipo imaginário quando não pertence. Um ponto de inflexão é do tipo *flat* ou degenerado quando $f(m)$ é um ponto final da elipse de curvatura. A torção τ_θ de γ_θ em $f(m)$ é chamada a torção normal de $f(M)$ na direção θ em $f(m)$. Uma direção θ_0 em $T_{f(m)}f(M)$ para a qual $\eta(\theta_0)$ e $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\theta_0)$ são paralelos é chamada uma *direção assintótica*. Consideremos a matriz

$$\alpha(m) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}.$$

Ao invés de mostrarmos o **Teorema 2.6**, vamos provar a proposição abaixo:

Proposição 2.7. *Em um ponto hiperbólico existem exatamente duas direções assintóticas, em um ponto elíptico não existe direção assintótica e, em um ponto parabólico uma única (a menos que o ponto seja um ponto de inflexão, caso em que todas as direções são assintóticas).*

Demonstração: Usando (2.1) temos

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\theta) = ((c - a) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta)e_3 + ((g - e) \sin 2\theta + 2f \cos 2\theta)e_4$$

O vetor $\eta(\theta)$ é paralelo a $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\theta)$ se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(a - c) \cos 2\theta + b \sin 2\theta + \frac{1}{2}(a + c)\right)((g - e) \sin 2\theta + 2f \cos 2\theta) \\ & + ((a - c) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta) \left(\frac{1}{2}(e - g) \cos 2\theta + b \sin 2\theta + \frac{1}{2}(e + g)\right) = 0 \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(a - c)(g - e) \cos 2\theta \sin 2\theta + (a - c)f \cos^2 2\theta + (g - e)b \sin^2 2\theta \\ & + 2bf \cos 2\theta \sin 2\theta + \frac{1}{2}(a + c)(g - e) \sin 2\theta + \frac{1}{2}(a + c)2f \cos 2\theta \\ & + \frac{1}{2}(a - c)(e - g) \cos 2\theta \sin 2\theta + (a - c)f \sin^2 2\theta + \frac{1}{2}(a - c)(e + g) \sin 2\theta \\ & - b(e - g) \cos^2 2\theta - 2bf \cos 2\theta \sin 2\theta - b(e + g) \cos 2\theta = 0. \end{aligned}$$

O que implica

$$(a - c)f + (g - e)b + \left[\frac{1}{2}(a + c)(g - e) + \frac{1}{2}(a - c)(e + g)\right] \sin 2\theta + [(a + c)f - b(e + g)] \cos 2\theta = 0$$

Ou ainda,

$$[(a - c)f + (g - e)b](\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2(ag - ce) \sin \theta \cos 2\theta + [(af - be) - (bg - cf)](\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0.$$

Resultando em

$$2[(af - be)\cos^2\theta + (ag - ce)\cos\theta\sin\theta + (bg - cf)\sin^2\theta] = 0.$$

A matriz associada a forma quadrática acima entre os colchetes temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} (af - be) & \frac{1}{2}(ag - ce) \\ \frac{1}{2}(ag - ce) & (bg - cf) \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é $(af - be)(bg - cf) - \frac{1}{4}(ag - ce)^2$ que é exatamente o Δ . Portanto a forma quadrática terá duas, uma ou zero soluções, assim como $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$ respectivamente. ■

Um estudo mais detalhado do item *c* do **Teorema 2.6** permite distinguir as seguintes possibilidades:

Proposição 2.8. :

i) $\Delta(m) = 0, k(m) > 0 \Rightarrow f(m)$ é um ponto de inflexão do tipo imaginário.

ii) $\Delta(m) = 0, k(m) < 0$ e $\begin{cases} \text{rank}\alpha(m) = 2 \Rightarrow a \text{ elipse de curvatura é não degenerada.} \\ \text{rank}\alpha(m) = 1 \Rightarrow f(m) \text{ é um ponto de inflexão do tipo real.} \end{cases}$

iii) $\Delta(m) = 0, k(m) = 0 \Rightarrow f(m)$ é um ponto de inflexão do tipo flat.

Demonstração: Δ é o resultante de dois polinômios $az^2 + 2bz + c$ e $ez^2 + 2fz + g$. Desta forma, temos que $\Delta(m) = 0$ implica que $az^2 + 2bz + c = 0$ e $ez^2 + 2fz + g = 0$ têm pelo menos uma raiz não trivial em comum. Assim vemos que se a elipse passa pelo origem segue que $\eta(\theta) = 0$ para algum $\theta \in [0, 2\pi]$ então os dois polinômios tem uma raiz comum, ou seja $\cos\theta/\sin\theta$, de modo que $\Delta = 0$. De fato, neste caso a raiz não trivial comum é real. Desde que raízes de uma forma quadrática são ambas reais ou ambas imaginárias, elas tem uma raiz real comum se, e somente se, todas as quatro raízes são reais. A condição para isto é que $b^2 - ac \geq 0, f^2 - eg \geq 0$.

Consequentemente $k \leq 0$ para que a elipse passe pela origem.

Aplicando à $k(p) < 0$, temos:

rank $\alpha(p) = 2 \Rightarrow$ a elipse é não degenerada e passa pelo ponto $f(m)$.

rank $\alpha(p) = 1 \Rightarrow$ a elipse é degenerada em um segmento de reta radial. (Teorema 1.2, pag. 269-270, [10]).

Note que $k(m) = 0 \Rightarrow \text{rank } \alpha(m) \leq 1$. (Teorema 1.2, pag. 269-270, [10]).

Dessa forma, $\eta(\theta) = (a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)e_3 + (e\cos^2\theta + 2f\sin\theta\cos\theta + g\sin^2\theta)e_4 = (e_3 + \lambda e_4)(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta) = (\sqrt{|a|}\cos\theta + \sqrt{|c|}\sin\theta)^2(e_3 + \lambda e_4)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Observe que $(\sqrt{|a|}\cos\theta + \sqrt{|c|}\sin\theta)^2 \geq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, logo, a elipse de curvatura se degenera em segmento de reta radial tendo $f(m)$ como ponto extremo. ■

Segue abaixo uma tabela ilustrativa do comportamento da elipse de curvatura em relação à $f(m)$ de acordo com valores de $\Delta(m)$, $\alpha(m)$ e $k(m)$.

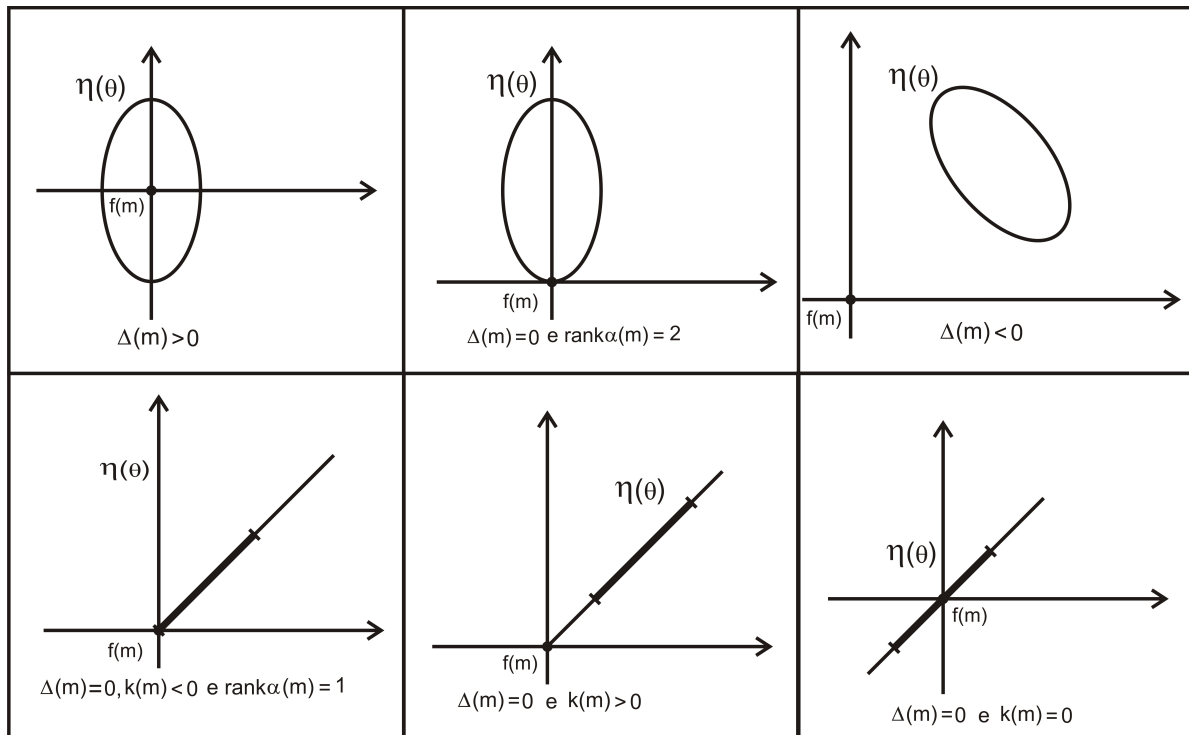


Figura 2.3: Elipse de curvatura

2.3 Formas Quadráticas Degeneradas

Um forma quadrática é dada por $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Denotamos por $H^2(2, 1)$ o espaço de todas as formas quadráticas. Sejam $q_1, q_2 \in H^2(2, 1)$. Um feixe de formas quadráticas gerado por q_1 e q_2 é um subespaço de $H^2(2, 1)$ definido por

$$[q_1, q_2] = \{\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

Observe que o feixe $[q_1, q_2]$ pode ser um plano que atravessa a origem, uma reta que passa na origem, ou apenas a própria origem. Note que $H^2(2, 1)$ pode ser identificado com \mathbb{R}^3 pela identificação da forma quadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ com o ponto (a, b, c) de \mathbb{R}^3 . Os vários tipos de formas quadráticas são separados exatamente pelo cone $D = b^2 - ac = 0$.

Sob a ação do grupo $GL(2) \times GL(1)$, obtemos as seguintes 4 órbitas de $H^2(2, 1)$:

- (i) O cone $b^2 = ac$, cone D , compreende as formas de rank 1 (tipo parabólico).
- (ii) A origem representa a forma nula de rank 0 (tipo simbólico).

O restante do espaço compreende as formas quadráticas de rank 2:

- (iii) As que estão dentro do cone correspondem as formas de semi-índice 0 (tipo elíptico).
- (iv) As de fora do cone são as formas de semi-índice 1 (tipo hiperbólico).

As quatro orbitas acima são representadas na figura abaixo:

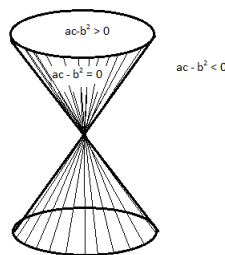


Figura 2.4:

Para maiores detalhes veja [8]

Proposição 2.9. *Consideremos $p \in M$ e seja (q_1, q_2) a segunda forma fundamental de M em p .*

1. *Se $\Delta(p) < 0$, $[q_1, q_2]$ é um plano que intercepta o cone D em duas retas.*
2. *Se $\Delta(p) > 0$, $[q_1, q_2]$ é um plano que não intercepta o cone D .*
3. *Se $\Delta(p) = 0$ e $\text{rank}\alpha(p) = 2$, o plano $[q_1, q_2]$ é tangente ao cone.*
4. *Se $\text{rank}\alpha(p) = 1$ e:*
 - (a) *$k(p) > 0$ então $[q_1, q_2]$ é uma reta dentro do cone.*
 - (b) *$k(p) < 0$ então $[q_1, q_2]$ é uma reta fora do cone.*
 - (c) *$k(p) = 0$ então $[q_1, q_2]$ é uma reta sobre o cone.*

Demonstração: Ver [7]. ■

Capítulo 3

Contatos de Superfícies em \mathbb{R}^4 com hiperplanos

Neste capítulo estudamos a geometria das superfícies em \mathbb{R}^4 através da função altura associada. Na seção 3.1, introduzimos a variedade canal associada \mathbb{R}^4 . Uma das propriedades desta variedade é que é uma hipersuperfície em \mathbb{R}^4

3.1 Variedade canal de uma superfície em \mathbb{R}^4

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, $n \geq 4$, uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão 2 em \mathbb{R}^4 . Para cada $v \in S^3$, a função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ de f na direção v é dada por

$$\langle f(x, y), v \rangle.$$

A família de funções altura é dada por

$$\lambda(f) : M \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(m, v) \mapsto \langle f(m), v \rangle = f_v(m)$$

Escolhendo um sistema de coordenadas em M , temos o seguinte: $m \in M$ é um

ponto singular de f_v se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_v}{\partial x}(m) = 0 \\ \frac{\partial f_v}{\partial y}(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \frac{\partial f}{\partial x}(m), v \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial f}{\partial y}(m), v \rangle = 0 \end{cases},$$

se, e somente se, $v \in N_{f(m)}f(M)$.

Proposição 3.1. *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 . Dados m um ponto em M e v um vetor não nulo em N_mM , as formas quadráticas $II_v(m)$ e $Hess(f_v)(m)$ coincidem.*

Observe que, por M não ser uma hipersuperfície em \mathbb{R}^4 a aplicação normal de Gauss sobre M não está definida de maneira usual. Entretanto, utilizamos o conceito da 3-variedade canal, denotada por CM , para desenvolver uma técnica que permite obter informações geométricas sobre M a partir de CM .

A 3-variedade canal da superfície $CM \subset \mathbb{R}^4$ é definida como $CM = \{f(m) + \varepsilon v \in \mathbb{R}^4 : m \in M \text{ e } v \in N_{f(m)}f(M) \text{ sendo } v \text{ unitário}\}$, aqui ε é um número real positivo suficientemente pequeno escolhido tal que CM seja mergulhada em \mathbb{R}^4 .

Denotamos por \tilde{f} o mergulho natural de CM em \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : CM &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (m, v) &\mapsto \tilde{f}(m, v) = f(m) + \varepsilon v, \end{aligned}$$

e por (m, v) o ponto $f(m) + \varepsilon v \in CM$. Do teorema de Looijenga's [9], segue que existe um subconjunto residual de mergulhos $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, tal que a família de funções altura:

$$\begin{aligned} \lambda(f) : M \times S^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, v) &\mapsto \langle f(m), v \rangle = f_v(m) \end{aligned}$$

seja localmente estável como uma família de funções em M com parâmetros em S^3 . Além disso, a família de funções altura $\lambda(\tilde{f})$ na variedade canal é também genérica. De fato as singularidades de $\lambda(f)$ e $\lambda(\tilde{f})$ são totalmente relacionados [15].

Essas podem ser, para um f genérico, de um dos seguintes tipos: $A_1, A_2, A_3, A_4, D_4^+$ e D_4^- . Além disso, as singularidades da aplicação normal de Gauss, $\Gamma : CM \rightarrow S^3$ (também chamada generalização da aplicação de Gauss sobre M) podem ser descritas em termos destas como as seguintes:

Lema 3.2. *Dado um ponto crítico $m \in M$ da função altura f_v :*

(a) *m é um ponto crítico não degenerado de $f_v \Leftrightarrow (m, v)$ é um ponto regular de Γ .*

Ou equivalentemente,

(a') *m é um ponto crítico degenerado de $f_v \Leftrightarrow (m, v)$ é um ponto singular de Γ .*

Demonstração: Ver [7]. ■

Seja $\mathcal{K}_c : CM \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura Gaussiana em CM . O conjunto parabólico, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$, de CM é o conjunto singular de Γ , pois $\mathcal{K}_c(m, v) = \det(d\Gamma(m, v))$ [7]. Pode ser mostrado [14] que para um mergulho genérico de M , $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é uma superfície regular exceto por um número finito de pontos (m, v) que são singularidades do tipo $\Sigma^{2,0}(\Gamma)$.

Seja $\xi : CM \rightarrow M$ a projeção de CM em M , ou seja, $\xi(m, v) = m$. O próximo lema prova que a imagem do conjunto de pontos parabólicos $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ por ξ é o conjunto $\{m \in M; \Delta(m) \leq 0\}$, que será denotado por $\Delta \leq 0$. Mais precisamente:

Lema 3.3. (1) *Se $\Delta(m) > 0$, então m é um ponto crítico não degenerado de $f_v, \forall v \in N_{f(m)}f(M)$.*

(2) *Se $\Delta(m) < 0$, então existem dois vetores $b_1, b_2 \in N_{f(m)}f(M)$, tal que m é um ponto crítico degenerado de f_{b_i} .*

(3) *Se $\Delta(m) = 0$, então existe um único vetor $b \in N_{f(m)}f(M)$ tais que m é um ponto crítico degenerado de f_b .*

Demonstração: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão localmente dada pelo mergulho

$$f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

onde f_1 e f_2 são função diferenciáveis satisfazendo $\frac{\partial f_i}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_i}{\partial y}(0,0) = 0$, para todo $i \in \{1, 2\}$, e seja

$$f_v : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

$$(x, y) \mapsto f_v(x, y) = v_1x + v_2y + v_3f_1(x, y) + v_4f_2(x, y)$$

a função altura na direção v , onde $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in S^3$.

Vamos identificar m com $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, e com isso temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (1, 0, 0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = (0, 1, 0, 0), \quad \frac{\partial f_v}{\partial x}(0,0) = v_1 \quad e \quad \frac{\partial f_v}{\partial y}(0,0) = v_2.$$

Se $(0,0)$ é um ponto crítico da função altura f_v , teremos que $v_1 = v_2 = 0$ e $(0, 0, v_3, v_4) \in N_{f(m)}f(M)$. Usando a **Proposição 3.1** que afirma que as formas quadráticas $II_v(m)$ e $Hess(f_v)(m)$ coincidem, veremos que o determinante da matriz Hessiana de f_v em $(0,0)$ é dado por:

$$\det H(f_v)(0,0) = (ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3v_4 + (eg - f^2)v_4^2,$$

onde (a, b, c) , (e, f, g) são os coeficientes da segunda forma fundamental de M em $(0,0)$. Veja que, $\det H(f_v)(0,0)$ nos dá uma forma quadrática nas variáveis v_3, v_4 e associada a tal forma quadrática temos uma matriz simétrica, cujo o determinante será

$$\Delta = (ac - b^2)(eg - f^2) - \frac{1}{4}(ag + ce - 2bf)^2.$$

Logo, estudando as possíveis raízes reais de $(ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3v_4 + (eg - f^2)v_4^2 = 0$, obtemos que:

a) se $\Delta(m) > 0$ então $(ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3v_4 + (eg - f^2)v_4^2 \neq 0$ para todo $v \in N_{f(m)}f(M)$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto crítico não degenerado de f_v , $\forall v \in N_{f(m)}f(M)$.

b) se $\Delta(m) < 0$, a equação $(ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3v_4 + (eg - f^2)v_4^2 = 0$

possui duas raízes reais e diferentes, que é equivalente a afirmar que existem dois vetores $b_1, b_2 \in N_{f(m)}f(M)$, tais que $(0,0)$ é um ponto crítico degenerado de f_{b_i} , $i \in \{1, 2\}$.

c) se $\Delta(m) = 0$, a equação $(ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3v_4 + (eg - f^2)v_4^2 = 0$ admite apenas uma raiz com multiplicidade 2, o que equivale a dizer que existe um único vetor $b \in N_{f(m)}f(M)$ tal que $(0,0)$ é um ponto crítico degenerado de f_b . ■

Observação 3.4. Quando m é um ponto crítico degenerado de f_b , o hiperplano H_b , ortogonal a b tem contato de ordem superior com $f(M)$ em $f(m)$. Assim, por analogia com curvas em \mathbb{R}^4 , diremos que b é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(m)$ e H_b um hiperplano osculador. Como já vimos, uma função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma singularidade degenerada em m se, e somente se, v é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(p)$.

Seja $\bar{\xi}$ a restrição de ξ para a superfície $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \sum^2(\Gamma)$, e denote por $M_- = \{m \in M : \Delta(m) < 0\}$ e $B = \{(m, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0) : m \in M_-\}$.

Proposição 3.5. (i) $\bar{\xi}|_B : B \rightarrow M_-$ é um difeomorfismo local, mais precisamente; ele é um recobrimento duplo.

(ii) $\Delta(m) = 0$ e m não é um ponto de inflexão \Leftrightarrow existe $v \in S^3$ tal que (m, v) é um ponto singular (dobra) de $\bar{\xi}$.

Demonstração: Seja $(m, v) \in B$. Então, podemos escolher coordenadas para CM tal que $m = (0, 0)$ e $v = (0, 0, 0, 1)$. Agora, isto é suficiente para notar que se v é uma direção degenerada então

$$\begin{aligned} \det H(f_v)(0, 0) &= (ac - b^2)v_3^2 + (ag + ce - 2bf)v_3 + (eg - f^2) \\ &= \mathcal{K}_c(m, v_3) = 0. \end{aligned}$$

Então:

(i) $v_3 = 0$ é uma raiz simples de $\mathcal{K}_c(m, v_3) = 0 \Leftrightarrow (\partial\mathcal{K}_c/\partial v_3)(0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow \bar{\xi}$ é um difeomorfismo local.

(ii) $v_3 = 0$ é uma raiz dupla de $\mathcal{K}_c(m, v_3) = 0 \Leftrightarrow (\partial\mathcal{K}_c/\partial v_3)(0, 0) = 0$ e $(\partial^2\mathcal{K}_c/\partial v_3^2)(0, 0) \neq 0 \Leftrightarrow (m, v)$ é um ponto de dobra para $\bar{\xi}$. ■

Observação 3.6. Em cada ponto de $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \sum^2(\Gamma)$ existe um única direção principal de curvatura nula para CM . Esta direção é tangente a superfície $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ sobre uma curva formada de pontos do tipo $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$.

Proposição 3.7. A imagem das direções principais de curvatura nula no conjunto $\mathcal{K}_c^{-1}(0) - \sum^2(\Gamma)$ sob $\bar{\xi}$ são direções assintóticas sobre M .

Demonstração: A seguinte expressão para o vetor curvatura $\eta(\theta)$ é dada no capítulo 2 desta dissertação:

$$\eta(\theta) = \left(\frac{1}{2}(a - c) \cos 2\theta + b \sin 2\theta\right)e_3 + \left(\frac{1}{2}(e - g) \cos 2\theta + f \sin 2\theta\right)e_4 + H,$$

onde $H = \frac{1}{2}(a + c)e_3 + \frac{1}{2}(e + g)e_4$, é o vetor curvatura média, também definido no capítulo 2. Agora podemos escolher um sistema de coordenadas locais para M tal que

$$\alpha(m) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta escolha implicará que $e_1 = (1, 0, 0, 0) \in T_{(m,v)}CM$ é a direção de curvatura nula, e $d\xi_{(m,v)}(e_1) = e_1 \in T_mM$. Então, temos que $\eta(0) = ae_3$ e $(\partial\eta/\partial\theta)(0) = 2be_3$, ou seja, $\eta(0)$ e $(\partial\eta/\partial\theta)(0)$ são paralelos. ■

Seja $(m, v) \in \mathcal{K}_c^{-1}(0)$ e $U \times V$ uma vizinhança de (m, v) , como na Proposição II.5.5, página 37, [7]. A matriz de $d\Gamma(m, v)$ é simétrica de ordem 3 em cada ponto (m, v) de $U \times W$ e, portanto diagonalizável. Os auto-valores correspondem às curvaturas principais, seus auto-vetores às direções principais de curvatura e seu determinante em cada ponto sua curvatura Gaussiana. Então, podemos escrever:

$$d\Gamma(m, v) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (m, v)$$

para $\lambda_j \in C^\infty(U \times W)$, $j \in \{1, 2\}$. Dessa forma, $\lambda_j(m, v)$ são os auto-valores e denotamos os autovetores por $e_j(m, v)$, $e_j \in C^\infty(U \times W, T\tilde{f}(U \times W))$. Então, temos:

a) $(m, v) \in \Sigma^1(\Gamma) \Leftrightarrow \text{coposto } d\Gamma(m, v) = 1$. Podemos supor $\lambda_1(m, v) = 0$ e $\lambda_2(m, v) \neq 0$. Além disso, diminuindo U , se necessário, podemos assumir que λ_2 não se anula em $U \times W$. Portanto, podemos definir $\Sigma^1(\Gamma)$, localmente, pela equação $\lambda_1 = 0$ e a restrição $\lambda_2(m, u) \neq 0$.

Em todos os casos genéricos, $\Sigma^1(\Gamma)$ define uma subvariedade de $U \times W$ de dimensão menor igual à 2.

O conjunto $\Sigma^1(\Gamma)$, (q, u) estará em $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ ou $\Sigma^{1,0}(\Gamma)$ conforme a direção principal de curvatura $e_1(q, u)$ estiver em $T_{(q,u)}\Sigma^1(\Gamma)$ ou não. Isto define, outra vez, uma subvariedade $\Sigma^{1,1}(\Gamma)$ de $\Sigma^1(\Gamma)$, de dimensão ≤ 1 . Podemos definir indutivamente $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}, 0}(\Gamma)$ e $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^i}(\Gamma)$ como segue: um ponto $(q, u) \in \Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}}(\Gamma)$ está em $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}, 0}(\Gamma)$ se $e_1(q, u)$ não é tangente a $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^{i-1}}(\Gamma)$ e está em $\Sigma^{\overbrace{1, \dots, 1}^i}(\Gamma)$, caso contrário.

b) Um ponto $(m, v) \in U \times W$ está em $\Sigma^2(\Gamma) \Leftrightarrow d\Gamma(m, v)$ tem coposto 2 (pontos umbílicos). Como no caso a), podemos assumir que $\Sigma^2(\Gamma)$ é, localmente, dado por $\lambda_1(m, v) = 0$ e $\lambda_2(m, v) = 0$.

3.2 Caraterização geométrica das singularidades de funções altura

Temos visto que uma função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem uma singularidade degenerada em m se, somente se, v é um vetor binormal de $f(M)$ em $f(m)$. Nesta seção caracterizaremos os tipos de singularidades que ocorrem genericamente.

Denote por γ a seção normal de M tangente na direção assintótica θ em $f(M)$ associado ao vetor binormal v , e seja χ a curva formada de pontos do tipo $\Sigma^{1,1}$ (isto é, cúspides e caudas de andorinha de Γ).

Lema 3.8. *Dado $m \in M$ e uma função altura $f_v : M \rightarrow \mathbb{R}$, temos que:*

- (i) m é uma singularidade de dobra de $f_v \Leftrightarrow (m, v) \in \Sigma^{1,0}(\Gamma)$.
- (ii) m é uma singularidade de cúspide de $f_v \Leftrightarrow (m, v) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$.
- (iii) m é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow (m, v) \in \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma)$.
- (iv) m é um ponto umbílico de $f_v \Leftrightarrow (m, v) \in \Sigma^{2,0}(\Gamma)$.

Teorema 3.9. Para $m \in M$ tal que $\Delta(m) < 0$: m é singularidade de dobra de $f_v \Leftrightarrow \gamma$ tem torção normal não-nula em m . Agora, se γ tem torção normal nula em m , $m \in \bar{\xi}(\chi)$ e temos que:

- (i) m é uma singularidade de cúspide de $f_v \Leftrightarrow \theta$ é transversal a $\bar{\xi}(\chi)$.
- (ii) m é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow \theta$ é tangente a $\bar{\xi}(\chi)$ com contato de ordem 1 em m .

Demonstração: Como antes, podemos escolher um sistema de coordenadas local tal que f é dada em forma de Monge, e a direção degenerada v é $(0, 0, 0, 1)$. Isto é,

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, 0) &\xrightarrow{f} (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + M_1x^3 + 3M_2x^2y + \dots \\ f_2(x, y) &= y^2 + P_1x^3 + 3P_2x^2y + 3P_3xy^2 + P_4y^3 + Q_1x^4 + \dots \end{aligned}$$

Então, a curvatura Gaussiana \mathcal{K}_c é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0 &\xrightarrow{\mathcal{K}_c} \mathbb{R}, 0 \\ (x, y, v_3) &\mapsto \mathcal{K}_c(x, y, v_3) = A_0(x, y)v_3^2 + A_1(x, y)v_3 + A_2(x, y) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_0(x, y) &= f_{1_{xx}}(x, y) \cdot f_{1_{yy}}(x, y) - f_{1_{xy}}^2(x, y) \\ A_1(x, y) &= f_{1_{xx}}(x, y) \cdot f_{2_{xx}}(x, y) + f_{1_{yy}}(x, y) f_{1_{xx}}(x, y) \\ &\quad - 2f_{1_{xy}}(x, y) \cdot f_{2_{xy}}(x, y) \\ A_2(x, y) &= f_{2_{xx}}(x, y) \cdot f_{2_{yy}}(x, y) - f_{2_{xy}}^2(x, y). \end{aligned}$$

A direção de curvatura nula de CM em (m, v) nessas coordenadas é o eixo x . Então $d\bar{\xi}_{(m,v)}(e_1) = e_1 = \theta$ (Proposição anterior). A seção normal γ pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma : (\mathbb{R}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ s &\mapsto \gamma(s) = (s, 0, as^2 + \dots, P_1s^3 + \dots) \end{aligned}$$

Logo, segue que γ tem torção não nula $\Leftrightarrow P_1 \neq 0$.

Vamos mostrar que $P_1 \neq 0 \Leftrightarrow m$ é um ponto de dobra de f_v .

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} h : (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y) &\mapsto (h_1(x, y), h_2(x, y)), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= \frac{\partial f_v}{\partial x}(x, y) = 3P_1x^2 + 6P_2xy + 3P_3y^2 + 4Q_1x^3 + \dots \\ h_2(x, y) &= \frac{\partial f_v}{\partial y}(x, y) = 2y + 3P_2x^2 + 6P_3xy + 3P_4y^2 + \dots \end{aligned}$$

Observe que o sistema abaixo

$$\begin{cases} h_1^{k_1} = 3P_1x^2 + 6P_2xy + 3P_3y^2 = 0 \\ h_2^{k_2} = 2y = 0 \end{cases}.$$

tem apenas a solução trivial em $\mathbb{C}^2 \Leftrightarrow P_1 \neq 0$. Daí temos que $\text{cod}(f_v, \mathcal{R}_e) = 2 \Leftrightarrow P_1 \neq 0$. Pela tabela de singularidades do capítulo 1 temos que, se m for um ponto de dobra de f_v então $\text{cod}(f_v, \mathcal{R}_e) = 2$. Portanto, concluímos que $P_1 \neq 0 \Leftrightarrow m$ é um ponto de dobra de f_v .

Agora, se $P_1 = 0, (m, v) \in \Sigma^{1,1}(\Gamma)$. Então

(i) m é um ponto de cúspide de $f_v \Leftrightarrow (m, v) \in \Sigma^{1,1,0}(\Gamma) \Leftrightarrow$ a direção de curvatura nula é tangente a $K_c^{-1}(0)$ e transversal a curva $\Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$.

(ii) m é uma singularidade rabo de andorinha de $f_v \Leftrightarrow (m, v) \in \Sigma^{1,1,1,0}(\Gamma) \Leftrightarrow$ a direção principal nula não é tangente a $\Sigma^{1,1,1}(\Gamma) \Leftrightarrow$ a direção principal nula é tangente a

$\Sigma^{1,1,0}(\Gamma)$ com contato de primeira ordem.

Desde que $\bar{\xi} : B \rightarrow M_-$ é um difeomorfismo local, θ é transversal a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1,0}(\Gamma))$ em (i) e tangente a $\bar{\xi}(\Sigma^{1,1,0}(\Gamma))$, com contato de primeira ordem em (ii). ■

Observação 3.10. (i) *Genericamente, as curvas de M composta de pontos tendo uma singularidade mais degenerada que uma dobra não podem encontrar a curva $\Delta^{-1}(0)$ em um ponto rabo de andorinha.*

A caracterização das singularidades das funções altura sobre a curva $\Delta^{-1}(0)$ é dada pelo teorema abaixo:

Teorema 3.11. (i) *Se $\Delta(m) = 0$, e m não é um ponto de inflexão de M , então m é uma dobra ou uma cúspide de f_v e:*

- *m é uma singularidade de dobra de $f_v \Leftrightarrow \theta$ é transversal a curva $\Delta^{-1}(0)$ de pontos parabólicos de $f(M)$.*
- *m é uma singularidade de cúspide de $f_v \Leftrightarrow \theta$ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$.*

(ii) *m é um ponto umbílico de $f_v \Leftrightarrow m$ é um ponto de inflexão de M . Além disso,*

- *m é um ponto de cruzamento normal de $\Delta^{-1}(0) \Leftrightarrow m$ é um ponto de inflexão do tipo real;*
- *m é um ponto de inflexão isolado de $\Delta^{-1}(0) \Leftrightarrow m$ é um ponto de inflexão do tipo imaginário.*

Demonstração: Com a mesma escolha de coordenadas como no teorema anterior, temos:

$$\mathcal{K}_c = A_0(x, y)v_3^2 + A_1(x, y)v_3 + A_2(x, y),$$

onde

$$\begin{aligned} A_0(x, y) &= -4b^2 + 12[(cM_1 - 2bM_2)x + (cM_2 - 2bM_3)y] + \dots, \\ A_0(0, 0) &\neq 0 \\ A_1(x, y) &= 12[(M_1 + cP_1 - 2bP_2)x + (M_2 + cP_2 - 2bP_3)y] + \dots, \\ A_2(x, y) &= 12(P_1x + P_2y) + [24Q_1 + 36(P_1P_3 - P_2^2)]x^2 \\ &\quad + [48Q_2 + 36(P_1P_4 - P_2P_3)]xy \\ &\quad + [24Q_3 + 36(P_2P_4 - P_3^2)]y^2 \\ &\quad + [40R_1 + 72(P_1Q_3 + P_3Q_1 - 2P_2Q_2)]x^3 + \dots \end{aligned}$$

Ainda, nessas coordenadas, a função $\Delta : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem a seguinte representação local

$$\begin{aligned} \Delta : (\mathbb{R}^2, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, y) &\mapsto \Delta(x, y) = \frac{1}{16}[A_0(x, y)A_2(x, y) - \frac{1}{4}A_1^2(x, y)]. \end{aligned}$$

Agora, o conjunto discriminante de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$, é dado por:

$$\{(x, y) / \exists v_3 : K_c(x, y, v_3) = 0 \text{ e } (\partial K_c / \partial v_3)(x, y, v_3) = 0\}.$$

Temos que $\frac{\partial K_c}{\partial v_3}(x, y, v_3) = 2A_0(x, y)v_3 + A_1(x, y) = 0 \Rightarrow v_3 = \frac{-A_1(x, y)}{2A_0(x, y)}$ ($A_0(0, 0) \neq 0$).

Desta forma,

$$\begin{aligned} A_0(x, y) \left[\frac{-A_1(x, y)}{2A_0(x, y)} \right]^2 + A_1(x, y) \left[\frac{-A_1(x, y)}{2A_0(x, y)} \right] + A_2(x, y) &= 0 \Leftrightarrow \\ &= \frac{-A_1^2(x, y) + 4A_0(x, y)A_2(x, y)}{4A_0(x, y)} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$A_0(x, y)A_2(x, y) - \frac{1}{4}A_1^2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Delta(x, y) = 0$, ou seja, a curva $\Delta = 0$ é o conjunto discriminante de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$. Então:

(a) m é um ponto de dobra de $f_v \Leftrightarrow (\partial A_2 / \partial x)(0, 0) = 12P_1 \neq 0 \Leftrightarrow$ a direção assintótica e_1 é transversal a curva $\Delta = 0$.

(b) Em um ponto de cúspide, $\Delta_x(0, 0) = -4b^2P_1 = 0$, $\Delta_y(0, 0) = -4b^2P_2 \neq 0$, e assim a direção assintótica e_1 é tangente a curva $\Delta = 0$. ■

Como consequência deste teorema temos a seguinte observação:

Observação 3.12. *Se f é um mergulho genérico de M em \mathbb{R}^4 , então cada uma das componentes conexas de $\Delta^{-1}(0)$ pode ser de um dos seguintes tipos:*

- (1) *curva mergulhada;*
- (2) *curva imersa com um número finito de auto-intersecções transversais, e*
- (3) *ponto isolado.*

Corolário 3.13. *Se f é um mergulho genérico de M em \mathbb{R}^4 , então $\Delta^{-1}(0) \cap k^{-1}(0) = \emptyset$.*

Corolário 3.14. *Dado um mergulho genérico f de M em \mathbb{R}^4 sem pontos de inflexão, o conjunto de pontos parabólicos, $\Delta^{-1}(0)$ é uma união disjunta de círculos.*

Corolário 3.15. *Dado um mergulho genérico f de M em \mathbb{R}^4 sem pontos de inflexão então:*

- (1) $H_0(M_-) = H_0(\mathcal{K}_c^{-1}(0))$
- (2) $H_0(\Delta^{-1}(0)) = H_0(\mathcal{K}_c^{-1}(0)) + g(\mathcal{K}_c^{-1}(0))$, onde g denota o gênero e H_j o j -ésimo grupo de homologia com coeficientes inteiros.

Demonstração: Como o mergulho genérico f é sem pontos de inflexão temos pelo Corolário 3.14 que $\Delta^{-1}(0)$ é uma união disjunta de círculos, neste caso, cada uma das componentes conexas de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ se projeta sobre uma componente conexa de M_- . Além disso, cada componente com genus g de $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ dá origem a $g + 1$ componentes de $\Delta^{-1}(0)$, Isto mostra o corolário. ■

Definição 3.16. *Dizemos que T é um hiperplano suporte local de $f(M)$ em $f(p)$ se existe uma vizinhança V de p tal que $f(V)$ fica de um mesmo lado de T .*

Se para todo $p \in M$, $f(M)$ possui um hiperplano suporte local em $f(p)$, dizemos que M é localmente convexa.

Corolário 3.17. *Seja f um mergulho genérico de M em \mathbb{R}^4 . Então, M é localmente convexa se, e somente se, $\Delta \leq 0$ e $\Delta^{-1}(0)$ consiste de pontos de inflexão isolados de M .*

Demonstração: Consideremos f dada na forma de monge, $(x, y) \mapsto (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))$, e seja (q_1, q_2) a 2ª forma fundamental de M em p , onde q_1, q_2 são respectivamente os 2-jatos de f_1, f_2 . Note que o 2-jato da função altura f_v é $v_3q_1 + v_4q_2$

Afirmamos que M não é localmente convexa em ponto p tal que $\Delta(p) > 0$. De fato, neste caso pela **Proposição 2.9** temos que o feixe $[q_1, q_2]$ intersecta o cone D apenas na origem. Implicando, que não existe forma quadrática $q \in [q_1, q_2]$ definida positiva (ou negativa). Logo, todas as funções altura tem uma sela não-degenerada em p . Portanto a afirmação é provada. Por outro lado, se $\Delta(p) < 0$ temos pela **Proposição 2.9** que o feixe $[q_1, q_2]$ intersecta D em duas retas. Daí, temos que existem números reais α e β tais que $q = \alpha q_1 + \beta q_2$ está dentro do cone D , ou seja, q é uma forma quadrática definida positiva (ou negativa). Desta maneira a função altura f_v onde $v = (0, 0, \alpha, \beta)$ tem um máximo (ou mínimo) local em p , $\det H(f_v)(p) \neq 0$, pois, note que $H(f_v)(p)$ é a matriz associada a forma quadrática $q = \alpha q_1 + \beta q_2$, esta por sua vez é definida positiva (ou negativa) e, portanto o hiperplano ortogonal a v é um hiperplano suporte local.

Agora, se p é um ponto de inflexão do tipo imaginário, temos que $\Delta(p) = 0$, $k(p) > 0$ e $\text{rank}\alpha(p) = 1$, logo, segue da **Proposição 2.9** que o feixe $[q_1, q_2]$ é uma reta dentro do cone D , implicando que f_v tem um máximo (ou mínimo) local em p , onde $v = (0, 0, 0, 1)$. Assim o hiperplano ortogonal a v é um hiperplano suporte local. ■

Corolário 3.18. *Seja $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um mergulho genérico convexo. Então, S^2 tem pontos de inflexão.*

Demonstração: Suponha que f não tem pontos de inflexão. Então, pelo **Corolário 3.15**, $H_0(M_-) = H_0(\mathcal{K}_c^{-1}(0))$. Como M é convexa, segue do Corolário 3.17 que o conjunto $\Delta^{-1}(0)$ é vazio. Então, pela **Proposição 3.5**, $\mathcal{K}_c^{-1}(0)$ é difeomorfo a duas copias disjuntas de S^2 , a qual é uma contradição com o **Corolário 3.15**. ■

Referências Bibliográficas

- [1] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S Ruas.: *The Geometry of Surfaces in 4-space from a Contact Viewpoint*. Geometriae Dedicata. 54, (1995), 323 - 332.
- [2] Barreiro, R.M.S.: *Propriedades genéricas de superfícies do \mathbb{R}^4 dotado de forma bilinear*. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, (1981).
- [3] Carmo, Manfredo P. do.: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. Rio de Janeiro. SBM, 2005.
- [4] Carmo, Manfredo P. do.: *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [5] Lima, E. L.: *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [6] Carmo, Manfredo P. do.: *Differential Forms And Applications*. Springer, Rio de Janeiro, 1994.
- [7] Mochida, D. K. H.: *Geometria genérica de subvariedades em codimensão maior que 1 em \mathbb{R}^n* . Tese de Doutorado, ICMCSC-USP, 1993.
- [8] C. G. Gibson.: *Singular points of smooth mappings*. Research Notes in Math. 25, Pitman, London (1979).
- [9] Looijenga, E. J. N.: *Structural stability of smooth families of C^∞ -functions*, Thesis, University of Amsterdam, 1974.

- [10] Little, J. A.: *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean space*. Ann. Mat. Pura Appl. (Ser.4A) 83 (1969), 261-336.
- [11] Golubitsky M., Guillemin V.: *Stable mappings and their singularities*. Graduate text in mathematics, 14.
- [12] Lima, E. L.: *Variiedades Diferenciáveis*. IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [13] LU, Yung-chen.: *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory*. Universitext, 1976.
- [14] Romero Fuster, M. C.: *Sphere stratifications and the Gauss map*. Proc. Royal Society of Edinburg, 95 A (1983), 115-136.
- [15] Smith, M. I. N.: *Curvature, singularities and projections of smooth maps*, Thesis, Durham, 1971.
- [16] A. Cima, A. Gasull and J. Torregrosa.: *On the Relation between Index and Multiplicity*. Journal of the London Mathematical Society. 57, (1998), 757 - 768.