

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um problema elíptico com expoente crítico de Sobolev

Cleiton de Lima Ricardo

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um problema elíptico com expoente crítico de Sobolev

por

Cleiton de Lima Ricardo

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

João Pessoa – PB
Julho de 2014

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Central

R488u Ricardo, Cleiton de Lima.
Um problema elíptico com expoente crítico de Sobolev/
Cleiton de Lima Ricardo - João Pessoa, 2014.
75f.

Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Soluções positivas. 3. Expoente
crítico - Sobolev. 4. Melhor constante - Sobolev.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Um problema elíptico com expoente crítico de Sobolev

por

Cleiton de Lima Ricardo ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 31 de Julho de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque – UEPB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto – UFCG
(Examinador Externo)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*A Deus, pela dádiva da
capacidade intelectual, ao
meu orientador e amigo
Bruno pelas diretrizes e me
ensinar amar a pesquisa
em matemática pura e a
minha querida Anne, por
todo apoio mesmo sem sa-
ber muita matemática*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Senhor Criador do céu e da terra pela provisão de saúde, disposição e capacidade para o desempenho deste trabalho.

Agradeço também a minha querida Anne e minha família, que sempre me apoiou. Ao meu orientador e amigo professor Bruno e sua esposa Elisandra que sempre acreditaram em mim desde a graduação. Aos meus colegas de turma Jarbas, Luan, Renato e Hudson.

Aos colegas do doutorado Gilson e Iane com os quais tivemos muitos momentos de discussão em pontos cruciais. Enfim a todos que me apoiaram direta ou indiretamente fica o meu muito obrigado e que Deus os retribua com louvor.

Resumo

Nesta dissertação procuramos abordar a existência de soluções positivas para um problema elíptico com expoente crítico de Sobolev

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. A não-linearidade de $f(x, u)$ possui crescimento subcrítico. Para isso mostraremos que o nível minimax fica abaixo de uma constante que depende apenas da dimensão do domínio e da melhor constante de Sobolev.

Palavras-chave: soluções positivas, expoente crítico de Sobolev, melhor constante de Sobolev.

Abstract

In this work we studied existence of positive solutions for an elliptic problem with critical Sobolev exponent

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

that vanishes on the boundary of a bounded domain of R^n . The nonlinearity $f(x, u)$ has subcritical growth. This is done by showing that the minimax level is below a constant that depends only on the dimension of the domain and the best Sobolev constant.

Keywords: positive solutions, critical Sobolev exponent, best Sobolev constant.

Sumário

Introdução	1
1 Problema crítico com perturbação linear	4
1.1 Caso $n \geq 4$	4
1.1.1 Melhor constante de Sobolev	5
1.2 Caso $n = 3$	17
1.3 Resultados de não-existência	25
1.3.1 Identidade de Pohozaev	25
1.3.2 Não-existência: caso $n \geq 3$	27
1.3.3 Não-existência: caso $n = 3$	29
2 Problema crítico com perturbação não-linear	34
2.1 Ferramenta geral	34
2.1.1 Problema auxiliar	37
2.1.2 Problema original	44
2.2 Estimativa do nível <i>minimax</i>	47
2.3 Aplicações	53
2.3.1 O caso $n \geq 5$	53
2.3.2 O caso $n = 4$	54
2.3.3 O caso $n = 3$	56
A Resultados preliminares principais	60
A.1 Resultados de convergências	60
A.2 Multiplicador de Lagrange	60
A.3 Princípios do máximo	61
A.4 Outros resultados	61
Referências Bibliográficas	63

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ denota o conjunto dos números Reais e Naturais, respectivamente;
- $B_{r_0}(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio r_0 em $\mathbb{R}^n$;
- B_r denota a bola aberta de centro na origem e raio r em $\mathbb{R}^n$;
- S_r denota a esfera de raio r e centro na origem.
- $\rightarrow, \rightharpoonup$ denota a convergência forte e fraca respectivamente;
- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto Ω ;
- q.t.p. significa "em quase todo ponto";
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de u em relação a x_i ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ o gradiente de u ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, o laplaciano de u ;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$ com $1 \leq p \leq \infty$;
- $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ norma no espaço $L^p(\Omega)$;
- $L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável}; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega \text{ para algum } C > 0 \}$;
- $C^k(\Omega)$ denota as funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω , para $k \in \mathbb{N}$;

- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\};$
- $W_0^{1,p}$ denota o complemento de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$;
- $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$;
- $p^* = \frac{np}{n-p}$ para $1 \leq p < n$ o expoente crítico de Sobolev;
- $f = o(g)$ quando $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- $f = O(g)$ quando $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq C$ para algum $C > 0$;
- H^{-1} denota o dual de $H_0^1(\Omega)$;
- E^* denota o dual de E ;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;

Introdução

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$. Este trabalho terá por objetivo mostrar a existência de soluções positivas para o problema elíptico não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

onde $p = 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$, $f(x, 0) = 0$ e $f(x, u)$ é de ordem inferior, ou seja satisfaz

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u^p} = 0.$$

Um exemplo típico é quando $f(x, u) = \lambda u$ onde λ é um parâmetro real.

Alguns fatores contribuíram muito para motivar a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar as dificuldades ante aos métodos variacionais padrão que estudamos no curso de tópicos. Seguindo estes métodos teríamos que as soluções do problema (1) correspondem aos pontos críticos do funcional

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} - \int_{\Omega} F(x, u)$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt$. Como 2^* é o expoente limite da imersão $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ e portanto esta imersão não é compacta e assim não temos como mostrar que o funcional φ satisfaz a condição (PS) para algum nível c via teorema do passo da montanha. Além disso, outra dificuldade que temos é um resultado de não-existência exposto por Pohozaev, o qual garante que se Ω é um domínio estrelado e $f(x, u) \equiv 0$ então não existe solução para o problema (1). Sendo assim que condições devemos colocar sobre a perturbação f para que (1) tenha solução.

Em segundo lugar a motivação pelo estudo deste problema cresceu quando participei do III WENLU(III Workshop em Equações Diferenciais Não-Lineares da UFPB) que aconteceu entre os dias 20 e 21 de fevereiro deste ano, quando em três das cinco primeiras preleções foi citado o artigo do Brezis-Nirenberg, [1], que é a principal referência deste trabalho.

E em ultimo lugar saber que a origem deste problema possui uma íntima ligação com o problema geométrico de Yamabe, o qual pode ser resumido assim, dado uma variedade riemanniana e uma diferenciável, queremos encontra uma métrica para a segunda conforme(múltiplo por uma função suave) a métrica da primeira que a torne riemanniana. Após alguns cálculos consiste em encontrar soluções para o problema

$$\begin{cases} -4\frac{(n-1)}{(n-2)}\Delta u = R'u^p + -R(x)u & em \quad M \\ u > 0 & em \quad M \end{cases},$$

para algum R' constante, M a variedade riemanniana n -dimensional, e $R(x)$ a curvatura escalar.

Esta dissertação estará organizada em dois capítulos.

No *Capítulo 1*, investigaremos a procura de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

com λ um parâmetro real. Os casos $n = 3$ e $n \geq 4$ serão tratados e têm conclusões diferentes.

(a) Quando $n \geq 4$ o problema (2) terá solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta$, mas ainda veremos que se $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ e Ω é um domínio estrelado então (2) não tem solução.

(b) Quando $n = 3$, o problema (2) é mais delicado e assim mostraremos uma solução apenas quando Ω é uma bola. E neste caso (2) possui solução se, somente se, $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$

Como faremos isto? Sabemos que as soluções de (2) correspondem aos pontos críticos não triviais do funcional

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} - \frac{1}{2} \lambda \int_{\Omega} u^2$$

Mas analisaremos primeiro os pontos críticos de

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda \int_{\Omega} u^2$$

na esfera $\|u\|_{2^*} = 1$. Tais pontos críticos satisfazem o problema

$$-\Delta u - \lambda u = \mu u^{2^*-1}$$

onde μ é o multiplicador de Lagrange, e daí obtemos uma solução para (2). Assim

mostraremos que para certos λ o ínfimo

$$S_\lambda = \inf_{\|u\|_{2^*}=1, u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega u^2 \right\}$$

é atingido. Veremos então que este ínfimo é atingido para certos λ , aqueles que nos dá a condição $S_\lambda < S$.

No *Capítulo 2* retomaremos o caso mais geral e abordaremos em termos de condições bem gerais mostrando a existência de soluções a partir de uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS).

Mas para tornar mais claro este resultado teremos um lema que garante através de algumas hipóteses, a condição crucial do teorema: é que o nível minimax esteja abaixo de uma constante ou seja,

$$c < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$$

onde S novamente é a melhor constante de Sobolev.

Concluindo, analisaremos quais são as implicações do teorema e lema em casos particulares, para $n \geq 5$, $n = 4$ e $n = 3$, e novamente destaque para o caso $n = 3$ por ser o mais delicado.

Finalmente, o *Apêndice* é dedicado aos resultados básicos utilizados durante a dissertação.

Capítulo 1

Problema crítico com perturbação linear

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, um domínio limitado. Nosso objetivo é mostrar a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

onde λ é uma constante real. Trataremos primeiro da existência de soluções para o problema (1.1) em duas seções, analisando o caso $n \geq 4$ e o caso $n = 3$ separadamente, por motivo das particularidades deste ultimo caso. Finalizaremos este capítulo trazendo alguns resultados de não existência para este problema.

1.1 Caso $n \geq 4$

Nesta seção, mostraremos a existência de (1.1) para o caso $n \geq 4$, que nos dará um intervalo maior para o parâmetro λ do problema, será o intervalo $(0, \lambda_1)$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta u$ em Ω , ou seja associado a λ_1 está a auto-função u_1 tal que $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$.

Assim nosso principal resultado será o teorema abaixo:

Teorema 1.1. *Se $n \geq 4$ então $\forall \lambda \in (0, \lambda_1)$ então existe solução para (1.1)*

Para demonstrá-lo precisaremos de duas proposições mas primeiramente vamos a algumas definições.

Definição 1.1. Seja $E = \{u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{2^*} = 1\}$

$$S_\lambda = \inf_E (||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2); \quad (1.2)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denotamos

$$S = S_0 = \inf_E (||\nabla u||_2^2) \quad (1.3)$$

Este ultimo corresponde à melhor constante da Imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

1.1.1 Melhor constante de Sobolev

Esta ultima definição será de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho pois ela possui algumas peculiaridades.

1. Primeiro como seu nome já diz é a melhor constante da Imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. De fato seja $u \in H_0^1(\Omega)$ então

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{||\nabla u||_2^2}{||u||_{2^*}^2} \Rightarrow S ||u||_{2^*}^2 \leq ||\nabla u||_2^2 \Rightarrow ||u||_{2^*}^2 \leq \frac{1}{S} ||\nabla u||_2^2 \\ &\Rightarrow ||u||_{2^*} \leq \sqrt{\frac{1}{S}} ||\nabla u||_2 = \sqrt{\frac{1}{S}} ||u||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Se o (1.3) for alcançado então encontramos a constante que torna a imersão contínua.

2. S é independente de Ω e depende apenas de n . Para isto mostraremos que $S(\Omega) = S(\mathbb{R}^n)$. De fato, sendo $H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$ então $S(\Omega) \geq S(\mathbb{R}^n)$

Reciprocamente, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\mathbb{R}^n)$ uma sequencia minimizante para $S(\mathbb{R}^n)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H_0^1(\mathbb{R}^n)$ usando argumentos de densidade podemos supor que $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. E dada u pertencente a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $\lambda > 0$ temos que $u_\lambda(x) = \lambda^{-\frac{n-2}{2}} u(\frac{x}{\lambda})$ satisfaz que

$$||\nabla u_\lambda||_2 = ||\nabla u||_2 \text{ e } ||u_\lambda||_{2^*} = ||u||_{2^*}.$$

Com efeito

$$||\nabla u_\lambda||_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda^{-\frac{n-2}{2}} \lambda^{-1} \nabla u(\frac{x}{\lambda})|^2 dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\frac{x}{\lambda})|^2 dx$$

fazendo a mudança de variável $y = \frac{x}{\lambda}$ o que implica $dx = \lambda^n dy$ obtemos

$$||\nabla u_\lambda||_2^2 = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\frac{x}{\lambda})|^2 dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^2 \lambda^n dy = ||\nabla u||_2^2$$

De modo análogo mostra-se que $\|u_\lambda\|_{2^*} = \|u\|_{2^*}$.

Tomando λ suficientemente grande podemos ter que o domínio de u_λ é um conjunto limitado Ω .

Sendo assim tomando u_{λ_n} associados a cada u_n da sequência minimizante temos que

$$S(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_{\lambda_n}\|_2^2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_2^2 = S(\mathbb{R}^n)$$

Mostrando assim a recíproca.

3. O ínfimo em (1.3) nunca é alcançado em um domínio limitado. Com efeito, suponhamos que S seja atingido para uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ e Ω limitado. Podemos assumir que $u \geq 0$ em Ω (caso contrário basta reescrever $|u|$ no lugar de u), então temos $\Omega \subset B(0, R) = B$, uma bola de raio R , centrada na origem. Assim podemos definir

$$v = \begin{cases} u & \text{em } \Omega \\ 0 & \text{em } B/\Omega \end{cases}.$$

Obtemos que S é alcançado também em B por v e assim pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange v é solução de do problema $-\nabla u = \mu u^{2^*-1}$ para algum $\mu > 0$; isto contradiz o resultado de Pohozaev (será mostrado na seção de não-existência) com $\lambda = 0$, pois B é estrelado.

4. Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, O ínfimo (1.3) é alcançado pela função

$$U(x) = C(1 + |x|^2)^{-\frac{n}{2^*}}$$

ou por qualquer das funções

$$U_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(\varepsilon + |x|^2)^{-\frac{n}{2^*}}$$

$\varepsilon > 0$, C e C_ε são constantes normalizadoras. Estas funções são conhecidas como funções de Talenti e podem ser encontradas mais detalhes sobre elas no artigo de Talenti [9].

Feito estas definições vamos as duas proposições necessárias à demonstração do teorema 1.1.

Proposição 1.2. Temos $S_\lambda < S$, $\forall \lambda > 0$.

Sem perda de generalidade assumiremos que $0 \in \Omega$. Desejamos estimar

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}$$

com

$$u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n}{2^*}}}$$

Onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \varphi(x) \leq 1$; $\forall x \in \Omega$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B(0, r) \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus B(0, 2r) \end{cases}$$

Tal que $B(0, 2r) \subsetneq \Omega$

Lema 1.3. Dadas as condições acima afirmamos então que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{n}{2^*}}} + O(1) \quad (1.4)$$

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n}{2^*}}} + O(1) \quad (1.5)$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}} + O(1) & \text{se } n \geq 5 \\ K_3 |\log \varepsilon| + O(1) & \text{se } n = 4 \end{cases} \quad (1.6)$$

Onde K_1, K_2 e K_3 denotada constantes positivas dependente somente de n e tal que $\frac{K_1}{K_2} = S$.

Prova: Verificação de (1.4):

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} &= \frac{\varphi_{x_i}(x)(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}} - \frac{n-2}{2}(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-4}{2}} 2x_i \varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^n - 2} \\ &= \frac{\varphi_{x_i}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(n-2)\varphi(x).x_i}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Então obtemos que

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{\nabla \varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{(n-2)\varphi(x).x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

1. Problema crítico com perturbação linear

Assim usando o fato que fora de $B(0, 2r)$, $\varphi(x) = 0$ e em $B(0, r)$, $\varphi(x) = 1$ (constante) então

$$\begin{aligned}
 \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \\
 &= \int_{B(0,r)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 + \int_{\Omega/B(0,2r)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \\
 &= \int_{B(0,r)} \frac{(n-2)^2 \varphi^2(x) \cdot |x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \\
 &= \int_{B(0,r)} \frac{(n-2)^2 \varphi^2(x) \cdot |x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + I_1.
 \end{aligned}$$

Vejamos a prova que $I_1 = O(1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Usaremos o fato que φ é C^∞ e portanto suas derivadas parciais são limitadas, portanto o gradiente de $\varphi(x)$ é limitado.

$$\begin{aligned}
 \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} &\leq C \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \\
 &\leq C \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{1}{|x|^{2n-4}} = O(1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(n-2)\varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot x}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-1}} &\leq \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(n-2)\varphi(x)|\nabla\varphi(x)|\cdot|x|}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-1}} \\
 &\leq C \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{|x|}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-1}} \\
 &\leq \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{1}{|x|^{2n-3}} = O(1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(n-2)^2 \varphi^2(x) \cdot |x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} &\leq C \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \\
 &\leq C \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{1}{|x|^{2n-2}} = O(1).
 \end{aligned}$$

E assim

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} - 2 \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(n-2)\varphi(x)\nabla\varphi(x)\cdot x}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-1}} \\
 &\quad + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{(n-2)^2 \varphi^2(x) \cdot |x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} = O(1)
 \end{aligned}$$

1. Problema crítico com perturbação linear

Visto isso e como em $B(0, r)$ temos $\varphi(x) \equiv 1$ então

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = (n-2)^2 \int_{B(0,r)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx + O(1) = (n-2)^2 I_2 + O(1)$$

Observando I_2 e fazendo uma mudança de Variável sendo $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ temos $dy = \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^n} dx$ portanto segue que

$$I_1 = \int_{B(0,r)} \frac{|\sqrt{\varepsilon}y|^2 (\sqrt{\varepsilon})^n}{(\varepsilon + |\sqrt{\varepsilon}y|^2)^n} dy = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_{B(0,r)} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} dy.$$

Com os argumentos que usamos acima que a $|x| > r$ podemos ver que

$$\int_{B(0,r)} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} dy - \int_{\mathbb{R}^n/B(0,r)} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^n} dy + O(1).$$

E assim chamando $K_1 = (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1 + |x|^2)^n} dx$ temos a verificação de (1.4).

Verificação de (1.5):

Notemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} &= \int_{\Omega} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} = \\ &= \int_{B(0,r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + \int_{\Omega/B(0,2r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n}, \end{aligned}$$

como $\varphi(x) = 0$ em $\Omega/B(0, 2r)$ segue que

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} = \int_{B(0,r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n}$$

Usando o fato que $\varphi(x) \leq 1$ e que $\int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} < \infty$ pois $|x| > r$ nesta integral. Temos

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} = \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{\varphi(x)^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} = \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^n} + O(1).$$

Fazendo novamente uma mudança de variável sendo $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ e $dy = (\sqrt{\varepsilon})^n dx$ temos

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \int_{B(0,r/\sqrt{\varepsilon})} \frac{1}{(1 + |y|^2)^n} dy.$$

Por outro lado sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r/\varepsilon)} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy - \int_{\mathbb{R}^n/B(0,r/\sqrt{\varepsilon})} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy + O(1). \end{aligned}$$

Assim

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy + O(1),$$

O que implica

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2^*}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy \right)^{\frac{2}{2^*}} + O(1),$$

assim temos

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n}{2^*}}} + O(1) \text{ com } K_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n} dy \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

Verificação de (1.6): Notemos que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{\Omega} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx \\ &= \int_{B(0,r)} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + \int_{B(0,2r)/B(0,r)} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + 0, \end{aligned}$$

isto porque $\varphi(x) = 0$ em $\Omega/B(0, 2r)$. Temos que em $B(0, 2r)/B(0, r)$ a φ é limitada e $|x| > r$, e ainda que em $B(0, r)$ a φ é constante igual a 1, portanto segue que

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + O(1).$$

Analisemos agora para $n \geq 5$.

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + O(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx - \int_{\mathbb{R}^n/B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + O(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + O(1) \end{aligned}$$

Usando o teorema da mudança de variável, sendo $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ e $dy = (\sqrt{\varepsilon})^n dx$ temos

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^{n-2}} dy + O(1) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^{n-2}} dy + O(1)$$

1. Problema crítico com perturbação linear

Portanto temos

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}} + O(1), \quad K_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^{n-2}} dy$$

Vamos analisar o caso $n = 4$ separado pois como se pode ver acima com o argumento acima a norma de u_ε não dependeria mais de ε . Então para $n = 4$ utilizaremos a fórmula da Coárea (vide Apêndice)

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^2} dx + O(1) \\ &= \int_0^r \int_{S_r} \frac{1}{(\varepsilon + s^2)^2} dt ds + O(1) \\ &= \int_0^r \frac{|S_s|}{(\varepsilon + s^2)^2} ds + O(1) \end{aligned}$$

Como em $\mathbb{R}^4$ temos que $|S_s| = s^3|S_1|$ assim temos que

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^2} dx = |S_1| \int_0^r \frac{s^3}{(\varepsilon + s^2)^2} ds.$$

Fazendo uma mudança de variável chamando agora $t = \varepsilon + s^2$ e $dt = 2s ds$, o que implica que $s^2 = t - \varepsilon$ assim temos

$$|S_1| \int_0^r \frac{s^3}{(\varepsilon + s^2)^2} ds = |S_1| \int_\varepsilon^{r^2+\varepsilon} \frac{s^2 \cdot s}{t^2 \cdot 2s} dt = \frac{|S_1|}{2} \int_\varepsilon^{r^2+\varepsilon} \frac{t - \varepsilon}{t^2} dt$$

Observemos agora que

$$\int_\varepsilon^{r^2+\varepsilon} \frac{t - \varepsilon}{t^2} dt = \int_\varepsilon^{r^2+\varepsilon} \frac{1}{t} dt - \int_\varepsilon^{r^2+\varepsilon} \frac{\varepsilon}{t^2} dt = \left[(\ln(r^2 + \varepsilon) - \ln \varepsilon) - \left(-\frac{\varepsilon}{r^2 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right].$$

Como a função $\ln(x)$ só explode no infinito e no zero então $\ln(r^2 + \varepsilon) = O(1)$ além disso claramente $\left(-\frac{\varepsilon}{r^2 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right) = O(1)$. Sendo assim usando o fato que para $0 < \varepsilon < 1$ temos $\ln \varepsilon < 0$ o que implica que $(-\ln \varepsilon) = |\ln \varepsilon|$ temos que $\int_\varepsilon^{r^2+\varepsilon} \frac{t - \varepsilon}{t^2} dt = |\ln \varepsilon| + O(1)$. Portanto

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{|S_1|}{2} |\ln \varepsilon| + O(1)$$

Chame K_3 de $\frac{|S_1|}{2}$ e temos (1.6).

Notemos agora que a função $U(x)$ citada na peculiaridade 4 sobre a melhor constante de Sobolev, na qual o ínfimo (1.3) é alcançado com constante $C = 1$ é $U(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{n}{2^*}}$ e assim podemos afirmar que $K_1 = \|\nabla U\|_2^2$ e $K_2 = \|U\|_{2^*}^2$ então podemos afirmar que $S = \frac{K_1}{K_2}$, provando assim o lema.

Prova da proposição 1.2 Prova:

Queremos agora estimar Q_λ usando as afirmações (1.4), (1.5) e (1.6). Então analisemos separadamente as razões $\frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2}$ e $\frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2}$.

$$\frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} = \frac{\frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1)}{\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1)} = \frac{K_1 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{K_1}{K_2} + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}).$$

Nesta ultima igualdade basta mostrar que

$$\frac{K_1 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{K_1}{K_2} - \frac{K_1}{K_2} + \frac{K_1 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{K_1 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{K_1}{K_2} &= \frac{K_1K_2 + K_2O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} - K_1K_2 - K_1O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2^2 + K_2O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} = \\ &= \frac{(K_2 - k_1)O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2^2 + K_2O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}, \end{aligned}$$

dividindo está expressão por $\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ temos que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a expressão é limitada, Logo segue que é $O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})$. Analisando agora a segunda razão para $n \geq 5$, de maneira análoga a que foi feita acima, basta trocar K_1 por εK_3 e temos

$$\begin{aligned} \frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} &= \frac{\frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}} + O(1)}{\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1)} = \frac{\varepsilon K_3 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \\ &= \frac{\varepsilon K_3}{K_2} - \frac{\varepsilon K_3}{K_2} + \frac{\varepsilon K_3 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{K_2 + O(1)\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \\ &= \frac{\varepsilon K_3}{K_2} + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) \end{aligned}$$

Com isso já podemos mostrar que $S_\lambda < S$ quando $n \geq 5$ pois para $n \geq 5$ temos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S - \lambda \frac{K_3}{K_2} \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})$$

Logo para ε próximo do zero temos que $\lambda \frac{K_3}{K_2} \varepsilon > C \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \geq O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})$ isso pois $n \geq 5$. Assim $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ e como $S_\lambda \leq Q_\lambda(u_\varepsilon)$ então

$$S_\lambda < S$$

Analisemos a segunda razão para $n = 4$.

$$\begin{aligned} \frac{\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} &= \frac{K_3 |\ln \varepsilon| + O(1)}{\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1)} = \frac{\varepsilon K_3 |\ln \varepsilon| + \varepsilon O(1)}{K_2 + \varepsilon O(1)} \\ &= \frac{\varepsilon K_3 |\ln \varepsilon|}{K_2} + \left(\frac{\varepsilon K_3 |\ln \varepsilon| + \varepsilon O(1)}{K_2 + \varepsilon O(1)} - \frac{\varepsilon K_3 |\ln \varepsilon|}{K_2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon K_3 |\ln \varepsilon|}{K_2} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

De fato, Basta usar o mesmo argumento que usamos na primeira razão trocando K_1 por $\varepsilon K_3 |\ln \varepsilon|$ e usar o fato que $\varepsilon O(1) = O(\varepsilon)$.

Assim

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S - \lambda \frac{K_3}{K_2} \varepsilon |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon)$$

quando $n = 4$. Portanto pelo fato que $\varepsilon |\ln \varepsilon| > \varepsilon M \geq O(\varepsilon)$, de fato $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\ln \varepsilon| = +\infty$, ou seja Dado M existe $\delta > 0$ tal que para $\varepsilon < \delta$ temos $|\ln \varepsilon| > M$ o que implica $\varepsilon |\ln \varepsilon| > \varepsilon M$. Segue que

$$S_\lambda \leq Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$$

■

Proposição 1.4. Se $S_\lambda < S$, então o ínfimo S_λ é alcançado.

Prova:

Prova: Seja $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para S_λ ou seja

$$\|u_j\|_{2^*} = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{1.7}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 - \lambda \int_\Omega |u_j|^2 = S_\lambda + o(1) \quad \text{quando } j \rightarrow \infty. \tag{1.8}$$

Podemos afirmar que (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito por (1.8) temos

$$\|\nabla u_j\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla u_j|^2 = S_\lambda + \lambda \int_\Omega |u_j|^2 + o(1)$$

pela imersão contínua $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos que $\|u_j\|_2^2 \leq C \|u_j\|_{2^*}^2 = C$ por (1.7), assim

$$\|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\nabla u_j\|_2^2 \leq S_\lambda + \lambda C + o(1).$$

Sabendo disso, como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que (u_j) converge fraco para u em $H_0^1(\Omega)$ a menos de subsequencia. Segue por imersão compacta de que (u_j) converge forte para u em $L^2(\Omega)$ e assim a menos de uma subsequencia temos

$$u_j \rightharpoonup u \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega.$$

Temos também que

$$\|u\|_{2^*} \leq 1.$$

De fato, temos que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é contínua, portanto $u_j \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(\Omega)$ e como a norma é uma função sequencialmente semi-contínua inferiormente temos que $\|u\|_{2^*} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{2^*} = 1$.

Afirmamos que $u \neq 0$.

De fato sabemos que $S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \leq \frac{\|\nabla u_j\|_2^2}{\|u_j\|_{2^*}^2}$, logo usando (1.8) obtemos

$$S - \lambda \|u_j\|_2^2 \leq \|\nabla u_j\|_2^2 - \lambda \|u_j\|_2^2 = S_\lambda + o(1),$$

assim como $S_\lambda < S$ segue que $0 < S - S_\lambda \leq \lambda \|u_j\|_2^2 + o(1) \rightarrow \lambda \|u\|_2^2 \Rightarrow u \neq 0$

Consideremos agora a sequência $(v_j) = (u_j - u)$. Então pela definição segue que $v_j \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e portanto $v_j \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ e segue que $v_j \rightarrow 0$ q.t.p em Ω .

Assim temos que de (1.8)

$$\|\nabla u_j\|_2^2 - \lambda \|u_j\|_2^2 = S_\lambda + o(1) \Rightarrow \|\nabla v_j + \nabla u\|_2^2 - \lambda \|v_j + u\|_2^2 = S_\lambda + o(1)$$

$$\Rightarrow \|\nabla v_j\|_2^2 + 2 \int_{\Omega} \nabla v_j \nabla u + \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|v_j\|_2^2 - 2\lambda \int_{\Omega} v_j u - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda + o(1)$$

Usando o fato que quando $j \rightarrow \infty$ temos que

$$\int_{\Omega} \nabla v_j \nabla u \leq \|\nabla v_j\|_2 \|\nabla u\|_2 \rightarrow \|\nabla 0\|_2 \|\nabla u\|_2 = 0$$

e $\|v_j\|_2 \rightarrow 0$ e ainda $\int_{\Omega} v_j u \leq \|v_j\|_2 \|u\|_2 \rightarrow 0$

Portanto temos

$$\|\nabla v_j\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 = S_\lambda + o(1) \quad (1.9)$$

Agora notemos por outro lado que pelo lema de Brezis-Lieb (vide Apêndice) temos

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{2^*}^{2^*} - \|u_j - u\|_{2^*}^{2^*} &= \|u\|_{2^*}^{2^*} + o(1) \\ \Rightarrow \|v_j + u\|_{2^*}^{2^*} - \|v_j\|_{2^*}^{2^*} &= \|u\|_{2^*}^{2^*} + o(1) \\ \Rightarrow 1 &= \|u_j\|_{2^*}^{2^*} = \|v_j + u\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|v_j\|_{2^*}^{2^*} + o(1). \end{aligned}$$

Como $\frac{2}{2^*} \leq 1$ então temos que $(\|v_j\|_{2^*}^{2^*} + \|u\|_{2^*}^{2^*} + o(1))^{\frac{2}{2^*}} \leq \|v_j\|_{2^*}^2 + \|u\|_{2^*}^2 + o(1)$ assim

$$1 \leq \|v_j\|_{2^*}^2 + \|u\|_{2^*}^2 + o(1).$$

Além disso temos que por definição $S \leq \frac{||\nabla v_j||_2^2}{||v_j||_{2^*}^2} \Rightarrow ||v_j||_{2^*}^2 \leq \frac{1}{S} ||\nabla v_j||_2^2$ Portanto unindo isto à desigualdade anterior obtemos

$$1 \leq ||u||_{2^*}^2 + \frac{1}{S} ||\nabla v_j||_2^2 + o(1). \quad (1.10)$$

Para mostrar que S_λ é alcançado, já temos que

$$S_\lambda \leq \frac{||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2}{||u||_{2^*}^2}.$$

De fato, basta observar que $\left\| \frac{u}{||u||_{2^*}} \right\|_{2^*} = 1$ e como S_λ é o ínfimo definido em (1.2), temos $S_\lambda \leq \left\| \nabla \frac{u}{||u||_{2^*}} \right\|_2^2 - \lambda \left\| \frac{u}{||u||_{2^*}} \right\|_2^2$ de onde segue a desigualdade. Basta mostra a desigualdade inversa agora. Faremos isso em dois casos.

Caso 1: Se $S_\lambda > 0$ então tomando (1.10) e multiplicando por S_λ temos

$$S_\lambda \leq S_\lambda ||u||_{2^*}^2 + \frac{S_\lambda}{S} ||\nabla v_j||_2^2 + o(1).$$

Unindo isto a (1.9) chegamos a

$$\begin{aligned} ||\nabla v_j||_2^2 + ||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2 &\leq S_\lambda ||u||_{2^*}^2 + \frac{S_\lambda}{S} ||\nabla v_j||_2^2 + o(1) \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{S_\lambda}{S}\right) ||\nabla v_j||_2^2 + ||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2 &\leq S_\lambda ||u||_{2^*}^2 + o(1). \end{aligned}$$

Como $S_\lambda < S$ então $(1 - \frac{S_\lambda}{S}) > 0$ portanto chegamos a desigualdade que queríamos

$$||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2 \leq S_\lambda ||u||_{2^*}^2 + o(1).$$

Caso 2: Se $S_\lambda \leq 0$ então obtemos de (1.9) e do fato que $S_\lambda \leq S_\lambda ||u||_{2^*}^2$ pois $||u||_{2^*} \leq 1$ e o fato que $||\nabla v_j||_2^2 \geq 0$ assim temos a desigualdade que queríamos

$$||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2 \leq S_\lambda ||u||_{2^*}^2 + o(1).$$

Assim concluímos a prova da proposição 1.4. ■

Prova: Prova do teorema 1.1: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ dada pelo lema acima, ou seja

$$||u||_{2^*} = 1 \quad e \quad ||\nabla u||_2^2 - \lambda ||u||_2^2 = S_\lambda$$

Podemos sem perda de generalidade assumir que $u \geq 0$ em Ω (caso contrário tomemos $|u|$ no lugar de u). Assim pelo teorema do multiplicador de Lagrange tomando

1. Problema crítico com perturbação linear

$F, G : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |v|^2 \quad e \quad G(v) = \frac{1}{2^*} \left(\int_{\Omega} |v|^{2^*} dx - 1 \right)$$

e definindo $M = \{v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{2^*} = 1\}$, temos que existe um $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(u)w = \mu G'(u)w; \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Em particular

$$F'(u)u = \mu G'(u)u \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 = \mu \int_{\Omega} |u|^{2^*}$$

Assim vemos claramente que $\mu = S_{\lambda}$ e $S_{\lambda} > 0$ pois $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Assim u é solução de

$$-\Delta u - \lambda u = \mu u^{2^*-1}$$

Mostremos que $w_0 = (S_{\lambda}^{\frac{1}{2^*-2}})u$ é solução de (1.1). Observe que dado $w \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w_0 \nabla w - \lambda \int_{\Omega} w_0 \cdot w &= (S_{\lambda}^{\frac{1}{2^*-2}}) \int_{\Omega} \nabla u \nabla w - (S_{\lambda}^{\frac{1}{2^*-2}}) \lambda \int_{\Omega} u \cdot w \\ &= S_{\lambda}^{\frac{1}{2^*-2}} \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla w - \lambda \int_{\Omega} u \cdot w \right) \\ &= S_{\lambda}^{\frac{1}{2^*-2}} (S_{\lambda} \int_{\Omega} u^{2^*-1} \cdot w) \\ &= \int_{\Omega} S_{\lambda}^{\frac{2^*-1}{2^*-2}} u^{2^*-1} \cdot w \\ &= \int_{\Omega} (S_{\lambda}^{\frac{1}{2^*-2}} u)^{2^*-1} \cdot w \\ &= \int_{\Omega} w_0^{2^*-1} \cdot w. \end{aligned}$$

Fazendo $w = w_0$ temos que w_0 é solução de (1.1) pois

$$\int_{\Omega} |\nabla w_0|^2 - \lambda \int_{\Omega} |w_0|^2 = \int_{\Omega} |w_0|^{2^*}$$

Além disso $w_0 \geq 0$, pois $u \geq 0$, suponha que $w_0(x) = 0$ para algum $x \in \Omega$ então w_0 atinge o ínfimo no interior de Ω , logo pelo Princípio do Máximo Forte (com $c = 0$) (Vide em no apêndice) w_0 seria constante ou seja $w_0 \equiv 0$ o que uma contradição. Portanto $w_0 > 0$ e assim é uma solução para (1.1).

Para a utilização do princípio do máximo forte é necessário que $w_0 \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ e isto de fato ocorre, basta usar argumentos de regularidades padrões Brezis-Kato (vide

em Apêndice), Agmon-Douglas-Nirenberg, Morrey e Schauder (vide [8]). O que não é nosso objetivo neste trabalho. ■

1.2 Caso $n = 3$

Na seção anterior vimos o caso $n \geq 4$ nesta veremos o caso $n = 3$ e na próxima seção veremos os resultados de não-existência para ambos os casos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado. Desejamos encontrar soluções positivas para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.11)$$

onde λ é um parâmetro real positivo.

Assumiremos que Ω é uma bola para termos claro o parâmetro do λ . O nosso resultado principal é:

Teorema 1.5. *Assumindo que Ω é uma bola; então existe solução para (1.11) se, somente se $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$.*

Para Simplificar tomaremos

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}.$$

Assim, $\lambda_1 = \pi^2$ (que corresponde a auto-função $|x|^{-1} \sin(\pi|x|)$) e faremos algo semelhante, provaremos primeiro que $S_\lambda < S$ para $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$, pois nos resultados de não existência provaremos que para $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$ não existe solução para (1.11).

Proposição 1.6. Temos $S_\lambda < S$ para todo $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$

De forma semelhante ao caso anterior desejaremos estimar a razão

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_6^2}$$

por

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ fazendo } r = |x| \text{ temos } u_\varepsilon(r) = \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.12)$$

onde φ é uma função suave e fixa tal que $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi(1) = 0$. Para isto provemos um lema semelhante ao da seção anterior.

Lema 1.7. Afiramos que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (1.13)$$

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (1.14)$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \varphi^2(r) dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad (1.15)$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas tal que $\frac{K_1}{K_2} = S$ e ω é a medida da esfera unitária de $\mathbb{R}^3$.

Verificação de (1.13): Partindo do fato que $u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} &= \frac{\frac{\varphi'(|x|) \cdot x_i}{|x|} \cdot (\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}} - \varphi(|x|) \cdot \frac{1}{2} (\varepsilon + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2|x| \cdot \frac{x_i}{|x|}}{(\varepsilon + |x|^2)} \\ &= \frac{\varphi'(|x|) \cdot x_i}{|x|(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi(|x|) \cdot x_i}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

deste modo temos que

$$\nabla u_\varepsilon = \left(\frac{\varphi'(|x|)}{|x|(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot x,$$

ortanto temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{B(0,1)} \left(\frac{\varphi'(|x|)}{|x|(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cdot |x|^2 dx.$$

Usando a fórmula da Coárea e usando o fato $|S_r| = 4\pi r^2 = \omega \cdot r^2$ temos

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= \int_0^1 \left(\int_{S_r} \left(\frac{\varphi'(r)}{r(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cdot r^2 ds \right) dr \\ &= \int_0^1 |S_r| \left(\frac{\varphi'(r)}{r(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cdot r^2 dr \\ &= \omega \int_0^1 \left(\frac{\varphi'(r)}{r(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cdot r^4 dr \\ &= \omega \int_0^1 \left(\frac{\varphi'(r)^2}{r^2(\varepsilon + r^2)} - \frac{2\varphi(r)\varphi'(r)}{r(\varepsilon + r^2)^2} + \frac{\varphi^2(r)}{(\varepsilon + r^2)^3} \right) \cdot r^4 dr \\ &= \omega \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr - \omega \int_0^1 \frac{2\varphi(r)\varphi'(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr + \omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \quad (1.16) \end{aligned}$$

1. Problema crítico com perturbação linear

Usando integração por partes com $u = \frac{r^3}{(\varepsilon + r^2)^2}$ e $v = \varphi^2(r)$ e o fato que $\varphi(1) = 0$ temos que

$$-\int_0^1 \frac{2\varphi(r)\varphi'(r)r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr = \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} dr - \int_0^1 \frac{4\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \quad (1.17)$$

substituindo (1.17) em (1.16), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2}{\omega} &= \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr + \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} dr - \int_0^1 \frac{4\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr + \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} dr - \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr + \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^2(\varepsilon + r^2)}{(\varepsilon + r^2)^3} dr - \int_0^1 \frac{3\varphi^2(r)r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr + 3\varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \end{aligned} \quad (1.18)$$

Usando o fato que $\varphi \in C^\infty([0, 1])$ conseqüentemente φ' é limitada afirmamos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr &= \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr - \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr \\ &= \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

de fato,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2 r^2}{(\varepsilon + r^2)} dr - \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr &= \varepsilon \int_0^1 \frac{\varphi'(r)^2}{(\varepsilon + r^2)} dr \\ &\leq \varepsilon C \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + r^2} dr \\ &= \varepsilon C \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &\leq K \varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Agora chamando de $I_5 = \int_0^1 \frac{\varphi^2(r)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr$ e escrevendo

$$I_5 = \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + \int_0^1 \frac{(\varphi^2(r) - 1)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr$$

afirmamos que

$$I_5 = \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}), \quad (1.20)$$

1. Problema crítico com perturbação linear

isto acontece pois $\varphi^2(r) - 1 \leq Cr$ onde C é uma constante, consequência de $\varphi'(0) = 0$ e ainda fazendo uma mudança de variável $s = r/\sqrt{\varepsilon}$ temos

$$\int_0^1 \frac{(\varphi^2(r) - 1)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \leq C \int_0^1 \frac{r^3}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = \frac{C\varepsilon^2}{\varepsilon^3} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{s^3}{(1 + s^2)^3} ds \leq K\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$$

Substituindo (1.20) e (1.19) em (1.18) temos

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr + \omega O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) + 3\omega\varepsilon \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(\varepsilon + r^2)^3} + 3\omega\varepsilon O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$$

Mas por outro lado fazendo a mudança de variável $s = r/\sqrt{\varepsilon}$ o que implica $ds = dr/\sqrt{\varepsilon}$ temos que

$$\int_0^1 \frac{r^2 dr}{(\varepsilon + r^2)^3} = \varepsilon^{-3} \int_0^1 \frac{r^2 dr}{\left(1 + \left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right)^3} = \varepsilon^{-3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{(s\sqrt{\varepsilon})^2 \sqrt{\varepsilon} ds}{(1 + s^2)^3} = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3}$$

Temos ainda que

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3} = \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3} - \underbrace{\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3}}_{O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})}$$

De fato, como $\frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3} < \frac{1}{s^4}$ e a como $\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \frac{1}{s^4} = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{3}$. Portanto multiplicando por $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ a igualdade acima obtemos que

$$\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3} = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3} + \varepsilon^{-\frac{3}{2}} O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = \frac{\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} + O(1)$$

Com isso a expressão

$$3\omega\varepsilon \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(\varepsilon + r^2)^3} = \frac{3\omega \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + 3\omega O(1)$$

Portanto, tomando $K_1 = 3\omega \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1 + s^2)^3} = \|\nabla U\|_2^2$, onde U é a função de Talenti

com contante igual a 1, onde o ínfimo (1.3) é alcançado, temos que:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &= \omega \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr + \omega O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) + \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + 3\omega O(1) + 3\omega O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega \int_0^1 |\varphi'(r)|^2 dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

o que verifica (1.13)

Verificação de (1.14) Usando a fórmula da coárea temos que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_6^6 &= \int_{B(0,1)} |u_\varepsilon(x)|^6 dx = \int_{B(0,1)} \frac{\varphi^6(|x|)}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{S_r} \frac{\varphi^6(r)}{(\varepsilon + r^2)^3} ds \right) dr \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi^6(r) |S_r|}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = \omega \int_0^1 \frac{\varphi^6(r) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\ &= \omega \int_0^1 \frac{(\varphi^6(r) - 1) r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + \omega \int_0^1 \frac{r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr = I_6 + I_7 \end{aligned}$$

Afirmção 1.1. $|\varphi^6(r) - 1| \leq Cr^2$ para todo $r \in [0, 1]$.

De fato, consideremos o limite abaixo e usemos Regra de L'Hospital e o fato que $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi^6(r) - 1}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6\varphi^5(r)\varphi'(r)}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{30\varphi^4(r)\varphi'(r)^2 + \varphi''(r) \cdot 6\varphi^5(r)}{2} = 3\varphi''(r),$$

logo dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < r < \delta$ temos

$$\left| \frac{\varphi^6(r) - 1}{r^2} - 3\varphi''(r) \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\varphi^6(r) - 1}{r^2} \right| < C_1$$

Por outro lado se $\delta \leq r \leq 1$ temos que

$$\left| \frac{\varphi^6(r) - 1}{r^2} \right| < C_2$$

Portanto, tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$ segue a afirmação.

1. Problema crítico com perturbação linear

Diante dessa afirmação e da mudança de variável temos

$$\begin{aligned}
 |I_6| &= \omega \int_0^1 \frac{(\varphi^6(r) - 1)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \leq \omega \int_0^1 \frac{Cr^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\
 &= C\varepsilon^{-3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{(s\sqrt{\varepsilon})^4 \cdot \sqrt{\varepsilon}}{(1 + s^2)^3} ds \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{s^4}{(1 + s^2)^3} \\
 &= C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{16} \pi = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})
 \end{aligned}$$

Portando $I_6 = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$

Por outro lado basta usar argumentos da mudança de variável, para ver que

$$I_7 = \omega \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds = \omega \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds - \int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds \right)$$

Com efeito $\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds = O(\varepsilon)$, pois $\frac{s^2}{(1 + s^2)^3} \leq \frac{1}{s^3}$ e como $\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^\infty \frac{1}{s^3} ds = 2\varepsilon$.

Portanto usando o fato que $O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} O(\varepsilon)$ chegamos que

$$\|u_\varepsilon\|_6^6 = \omega \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds + O(\varepsilon) \right)$$

Elevando ambos os membros a $1/3$ temos

$$\begin{aligned}
 \|u_\varepsilon\|_6^2 &= \omega^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds + O(\varepsilon) \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \omega^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds \right)^{\frac{1}{3}} + \omega^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

Com efeito esta ultima igualdade sai do fato que

$$(k + O(\varepsilon))^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}} = O(\varepsilon), \quad \forall k > 0$$

De fato basta observar que

$$O(\varepsilon) \leq C\varepsilon \Rightarrow O(\varepsilon) \leq 3C\varepsilon K^2 \Rightarrow O(\varepsilon) \leq 3C\varepsilon K^2 + 3C^2\varepsilon^2 K + C^3\varepsilon^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O(\varepsilon) + K^3 \leq 3C\varepsilon K^2 + 3C^2\varepsilon^2 K + C^3\varepsilon^3 + K^3 = (C\varepsilon + K)^3$$

$$\Rightarrow (O(\varepsilon) + K^3)^{\frac{1}{3}} \leq C\varepsilon + K \Rightarrow (O(\varepsilon) + K^3)^{\frac{1}{3}} - K \leq C\varepsilon = O(\varepsilon)$$

1. Problema crítico com perturbação linear

Chamemos $K^3 = K$ e temos a igualdade acima. Concluimos então a verificação, onde $K_2 = \left(\omega \int_0^\infty \frac{s^2}{(1+s^2)^3} ds \right)^{\frac{1}{3}} = \|U\|_6^2$ e U aquela função na qual o ínfimo (1.3) é atingido.

Verificação de (1.15)

Da definição de $u_\varepsilon(x)$ e usando a fórmula da coárea como fizemos acima temos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_2^2 &= \omega \int_0^1 \frac{\varphi^2(x)r^2}{\varepsilon + r^2} dr = \omega \left(\int_0^1 \frac{\varphi^2(x)r^2}{\varepsilon + r^2} dr + \int_0^1 \frac{\varphi^2(x)\varepsilon}{\varepsilon + r^2} dr - \int_0^1 \frac{\varphi^2(x)\varepsilon}{\varepsilon + r^2} dr \right) \\ &= \int_0^1 \varphi^2(x) dr - \int_0^1 \frac{\varphi^2(x)\varepsilon}{\varepsilon + r^2} dr \end{aligned}$$

Por outro lado usando o fato que $\varphi(x) \leq 1$ temos que

$$\int_0^1 \frac{\varphi^2(x)\varepsilon}{\varepsilon + r^2} dr \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon + r^2} dr = \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} dr$$

Fazendo mudança de variável $s = r/\sqrt{\varepsilon}$ segue

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} dr = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 + s^2} ds \leq \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 + s^2} ds = C\sqrt{\varepsilon}$$

Portanto concluimos que

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \omega \int_0^1 \varphi^2(r) dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

Antes de concluir a prova da proposição provemos mais um lema.

Lema 1.8. Se $A, B, \alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\frac{A}{B + O(\varepsilon^\alpha)} = \frac{A}{B} + O(\varepsilon^\alpha)$$

Prova: De fato, basta ver que $\frac{A}{B + O(\varepsilon^\alpha)} - \frac{A}{B} = \frac{AB - AB - AO(\varepsilon^\alpha)}{B^2 + BO(\varepsilon^\alpha)} = O(\varepsilon^\alpha)$, pois A e B são constantes e o denominador não é nulo quando $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Prova da proposição 1.6: Vamos estimar $Q_\lambda(u_\varepsilon)$.

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \frac{\frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \omega \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - \lambda \omega \int_0^1 \varphi^2(r) dr - O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{K_1}{K_2 + O(\varepsilon)} + \frac{\omega \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr}{K_2 + O(\varepsilon)} + \frac{O(\varepsilon)}{K_2 + O(\varepsilon)} - \frac{\lambda \omega \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \varphi^2(r) dr}{K_2 + O(\varepsilon)} \\ &= I_8 + I_9 + I_{10} - I_{11} \end{aligned}$$

Do lema 1.8 e dos fatos que $\frac{K_1}{K_2} = S$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) = O(\varepsilon)$ e tomando por fim $\varphi(r) = \cos(\frac{\pi r}{2})$ segue-se

$$I_8 = \frac{K_1}{K_2} + O(\varepsilon) = S + O(\varepsilon) \quad (1.21)$$

$$I_{10} = O(\varepsilon) \quad (1.22)$$

$$I_9 - I_{11} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \omega \left(\int_0^1 \varphi'(r)^2 dr - \lambda \int_0^1 \varphi^2(r) dr \right) \left(\frac{1}{K_2 + O(\varepsilon)} \right) \quad (1.23)$$

$$I_9 - I_{11} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \omega}{K_2} \left(\int_0^1 \varphi'(r)^2 dr - \lambda \int_0^1 \varphi^2(r) dr \right) + O(\varepsilon) \quad (1.24)$$

$$I_9 - I_{11} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \omega}{K_2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\lambda}{2} \right) + O(\varepsilon) \quad (1.25)$$

Logo segue por (1.21), (1.22) e (1.25) que

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= S + O(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \omega}{K_2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\lambda}{2} \right) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon) \\ &= S + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \omega}{K_2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \lambda \right) C + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

como $\lambda_1 = \pi^2$ e $\lambda > \frac{1}{4}\lambda_1$, temos para ε suficientemente pequeno que $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ como S_λ é o ínfimo dos $Q_\lambda(u)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ assim

$$S_\lambda < S$$

Prova do teorema 1.5

Com a proposição provaremos somente a volta do teorema 1.5 pois a volta contará com o resultado de não-existência que a princípio vamos apenas enunciar e provaremos na próxima seção

”Não existe Solução de (1.11) para $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$ ”

Assim se $\lambda \in (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$ temos pela proposição 1.6 que $S_\lambda < S$ e de forma análoga ao mostrado no primeiro teorema temos que o ínfimo S_λ é atingido e (1.11) possui solução. A ida do teorema é mostrada pela contra-positiva usando o resultado acima, se $\lambda \notin (\frac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1)$ então não há solução.

1.3 Resultados de não-existência

Nesta seção abordaremos alguns resultados de não existência para o problema (1.1) sob a variação do parâmetro real λ começaremos com a identidade de Pohozaev para este problema e seguiremos com os casos $n \geq 4$ e $n = 3$ com suas peculiaridades.

1.3.1 Identidade de Pohozaev

A identidade de Pohozaev, pode ser encontrada em sua forma mais geral em [6] e no apêndice. Aqui apresentaremos um resultado relacionado direto ao problema (1.1) seguindo as diretrizes de [7].

Teorema 1.9. *Sejam $n \geq 3$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução de (1.1). Então, a função u satisfaz a igualdade*

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) dx = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$$

onde $\nu(x)$ o vetor normal a $\partial\Omega$ em x

Prova:

Como u satisfaz (1.1), multiplicando tal igualdade por $\nabla u \cdot x$ e integrando, obtemos

$$- \int_{\Omega} \Delta u \nabla u \cdot x dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \nabla u \cdot x dx + \lambda \int_{\Omega} u \nabla u \cdot x dx \quad (1.26)$$

Sabemos por outro lado que $\operatorname{div}(\nabla u \cdot x \nabla u) = \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u + (\nabla u \cdot x) \Delta u$, pois o produto interno é bilinear e $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$. Assim pelo teorema do Divergente segue que

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x \nabla u) \cdot \nu(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u \cdot x \nabla u) dx = \int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u dx + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot x) \Delta u dx$$

O que implica que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot x) \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x \nabla u) \cdot \nu(x) dx - \int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u dx \quad (1.27)$$

Igualando (1.26) e (1.27) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x \nabla u) \cdot \nu(x) dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \nabla u \cdot x dx + \lambda \int_{\Omega} u \nabla u \cdot x dx \quad (1.28)$$

Note que

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x \nabla u) \cdot \nu(x) dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 (\nu(x) \cdot x) dx \quad (1.29)$$

Observemos também que

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u &= \nabla \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \nabla u \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left[\delta_{1,i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i} \right], \dots, \sum_{i=1}^n \left[\delta_{n,i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} \right] \right) \cdot \nabla u \\
&= |\nabla u|^2 + x_1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i} \right) + \dots + x_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} \right) \\
&= |\nabla u|^2 + x_1 \left(\frac{|\nabla|^2}{2} \right)_{x_1} + \dots + x_n \left(\frac{|\nabla|^2}{2} \right)_{x_n} \\
&= |\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{|\nabla|^2}{2} \right)_{x_j} \\
&= |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \nabla(|\nabla u|^2) \cdot x
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Integrando tal igualdade temos

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u dx = \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \nabla(|\nabla u|^2) \cdot x \right) dx \tag{1.31}$$

Mas como $\text{div}(|\nabla u|^2 \cdot x) = \nabla(|\nabla u|^2) \cdot x + |\nabla u|^2 n$ então pelo teorema do divergente

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx = \int_{\Omega} \nabla(|\nabla u|^2) \cdot x dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 n dx,$$

e assim por (1.31) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 n dx$$

que implica

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x) \nabla u dx = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx \tag{1.32}$$

Combinando (1.28), (1.29) e (1.32) temos então

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx - \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 (\nu(x) \cdot x) dx &= \\
&= \int_{\Omega} u^{2^*-1} \nabla u \cdot x dx + \lambda \int_{\Omega} u \nabla u \cdot x dx
\end{aligned}$$

Mas como pela regra da cadeia temos que $\nabla u \cdot u^{2^*-1} = \nabla \left(\frac{u^{2^*}}{2^*} \right)$ e $\nabla u \cdot u = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right)$ então

temos a igualdade

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx = \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} \nabla(u^{2^*}) \cdot x dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \nabla(u^2) \cdot x dx \quad (1.33)$$

Observemos também que $\operatorname{div}(u^{2^*} \cdot x) = \nabla(u^{2^*} \cdot x) + u^{2^*} n$ e assim pelo teorema do divergente

$$\int_{\partial\Omega} u^{2^*} \cdot x \cdot \nu(x) dx = \int_{\Omega} \nabla(u^{2^*} \cdot x) dx + \int_{\Omega} u^{2^*} n dx$$

notemos que o primeiro membro é nulo pois u se anula na fronteira, e portanto

$$\int_{\Omega} \nabla(u^{2^*} \cdot x) dx = - \int_{\Omega} u^{2^*} n dx$$

De modo semelhante e usando que $\operatorname{div}(u^2 \cdot x) = \nabla(u^2 \cdot x) + u^2 n$ concluimos que

$$\int_{\Omega} \nabla(u^2 \cdot x) dx = - \int_{\Omega} u^2 n dx.$$

Substituindo em (1.33) obtemos

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx = -\frac{n}{2^*} \int_{\Omega} u^{2^*} dx - \frac{\lambda n}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \quad (1.34)$$

Veja agora que como u satisfaz o problema (1.1), multiplicando por u e integrando temos

$$- \int_{\Omega} \Delta u \cdot u dx = \int_{\Omega} (u^{2^*} + \lambda u^2) dx$$

Porém $\operatorname{div}(\nabla u \cdot u) = \Delta u \cdot u + \nabla u \cdot \nabla u$ e como u se anula na fronteira concluimos que

$$- \int_{\Omega} \Delta u \cdot u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} (u^{2^*} + \lambda u^2) dx$$

Substituindo em (1.34) temos

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) \left[\int_{\Omega} u^{2^*} dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \right] - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx = -\frac{n}{2^*} \int_{\Omega} u^{2^*} dx - \frac{\lambda n}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

Mas como $\frac{n}{2^*} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ temos

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \cdot x \cdot \nu(x) dx = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$$

■

1.3.2 Não-existência: caso $n \geq 3$

Aqui exibiremos resultados de não existência para o problema (1.1) no caso em que $n \geq 3$, em particular servirá para o caso da primeira seção, $n \geq 4$. Mostraremos que se

$\lambda \notin (0, \lambda_1)$ não existe solução para (1.1) para todo $n \geq 3$. Aqui λ_1 denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta u$ em Ω , ou seja associado a λ_1 está a auto função u_1 tal que $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$.

Proposição 1.10. Não existe solução para (1.1) com $\lambda \geq \lambda_1$.

Prova: De fato, seja u solução de (1.1) então

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \lambda \int_{\Omega} u \cdot v + \int_{\Omega} u^{2^*-1} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e por outro lado se u_1 é tal que $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$ então

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v = \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 \cdot v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Substituindo v por u_1 na primeira igualdade e por u na segunda obtemos que:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} u \cdot u_1 + \int_{\Omega} u^{2^*-1} u_1 &= \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 \cdot u \\ \Rightarrow \lambda \int_{\Omega} u \cdot u_1 &< \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 \cdot u \Rightarrow \lambda < \lambda_1 \end{aligned}$$

Sendo assim para $\lambda \geq \lambda_1$ não existe solução para (1.1). ■

Para próxima proposição precisaremos de uma definição.

Definição 1.2. Dizemos que um conjunto aberto Ω é estrelado em relação a origem se para cada $x \in \overline{\Omega}$, o segmento de reta $\{\lambda x; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido em $\overline{\Omega}$.

Proposição 1.11. Não existe solução para (1.1) com $\lambda \leq 0$ e Ω uma domínio estrelado suave.

Prova: De fato pela Identidade de Pohozaev, se u é solução de (1.1) então:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot v(x) dx = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx$$

Por outro lado como Ω é estrelado, sem perda de generalidade, podemos considerar em relação a origem (a menos de uma translação), então a menos de um conjunto de medida nula em $\partial\Omega$, $x \cdot v(x) > 0$.

Sendo assim $\lambda < 0$ temos um absurdo, pois o primeiro lado da desigualdade teria que ser negativo e no caso de $\lambda = 0$ teríamos $|\nabla u|^2 = 0$ o que implicaria $\Delta u = 0$ e por (1.1) teríamos $u \equiv 0$. Portanto para $\lambda \leq 0$ não existe solução para (1.1). ■

Vale a pena salientar que a situação pode ser bem diferente se Ω não for estrelado, por exemplo, se Ω é um anel, existe solução radial de (1.1) para todo $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$.

Este fato foi apontado por Kazdam e Warner (Vide em[2]).

1.3.3 Não-existência: caso $n = 3$

Já vimos na subseção anterior que não temos solução para o problema (1.1) com $\lambda \geq \lambda_1$ e $\lambda \leq 0$, nesta subseção mostraremos que para $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$ não existe solução para (1.11), problema (1.1) quando $n = 3$. Neste caso tomaremos as condição da segunda seção deste capítulo e assim basta mostrar a seguinte proposição.

Proposição 1.12. Não existe solução de (1.11) para $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$

Prova: Suponhamos, por absurdo que exista $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que u é solução de (1.11) com $\lambda \leq \frac{1}{4}\lambda_1$.

Então pelo resultado de Gidas-Nirenberg(Teorema 2, pg.521 de [12]) temos que u é esfericamente simétrica. Assim escrevendo $u(x) = u(r)$, onde $r = |x|$, temos que u satisfaz

$$-u'' - \frac{2}{r}u' = u^5 + \lambda u \text{ em } (0, 1) \quad (1.35)$$

$$u'(0) = u(1) = 0 \quad (1.36)$$

De fato, como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} \right) \\ &= u''(|x|) \frac{x_i}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} + u'(|x|) \cdot \left(\frac{1 \cdot |x| - \frac{x_i \cdot x_i}{|x|}}{|x|^2} \right) \\ &= u''(|x|) \left(\frac{x_i}{|x|} \right)^2 + \frac{u'(|x|)}{|x|} - \frac{u'(|x|)x_i^2}{|x|^3} \\ &= \left(u''(|x|) - \frac{u'(|x|)}{|x|} \right) \left(\frac{x_i}{|x|} \right)^2 + \frac{u'(|x|)}{|x|}. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{3u'(|x|)}{|x|} + \left(u''(|x|) - \frac{u'(|x|)}{|x|} \right) \left(\frac{1}{|x|^2} \right) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= u''(r) + \frac{2u'(r)}{r} \end{aligned}$$

1. Problema crítico com perturbação linear

mostrando assim (1.35), para mostrar (1.36) basta usar o fato de que $u=0$ em $\partial\Omega$ e que $u'(0) = 0$, pois $\Omega = B(0, 1)$.

Mostraremos a seguir um lema que ajudará na demonstração da proposição.

Lema 1.13. Para toda função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ com $\psi(0) = 0$ vale a seguinte identidade

$$\int_0^1 u^2(\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi''')r^2dr = \frac{2}{3} \int_0^1 u^6(r\psi - r^2\psi')dr + \frac{1}{2}|u'(1)|^2\psi(1). \quad (1.37)$$

Prova: De fato, multiplicando (1.35) por $r^2\psi u'$ e integrando, obtemos

$$-\int_0^1 u''u'r^2\psi - 2\int_0^1 (u')^2r\psi = \int_0^1 u^5u'r^2\psi + \lambda \int_0^1 uu'r^2\psi, \quad (1.38)$$

usando o teorema de integração por partes em I_1 com

$$w = r^2\psi \quad dv = u'u''dr \quad \text{e} \quad dw = 2r\psi + r^2\psi'dr \quad v = \frac{(u')^2}{2}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 u''u'r^2\psi &= \left[r^2\psi \frac{(u')^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(u')^2}{2} (2r\psi + r^2\psi') \\ &= \frac{\psi(1)(u'(1)^2)}{2} - \int_0^1 (u')^2r\psi - \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2r^2\psi', \end{aligned} \quad (1.39)$$

de modo semelhante com

$$w = r^2\psi \quad dv = u^5u'dr \quad \text{e} \quad dw = 2r\psi + r^2\psi'dr \quad v = \frac{1}{6}u^6$$

temos

$$\int_0^1 u^5u'r^2\psi = - \int_0^1 \frac{1}{6}u^6(2r\psi + r^2\psi')dr, \quad (1.40)$$

e ainda em com

$$w = r^2\psi \quad dv = uu'dr \quad \text{e} \quad dw = 2r\psi + r^2\psi'dr \quad v = \frac{1}{2}u^2$$

temos

$$\int_0^1 uu'r^2\psi = - \int_0^1 \frac{1}{2}u^2(2r\psi + r^2\psi')dr. \quad (1.41)$$

1. Problema crítico com perturbação linear

Portanto substituindo (1.39), (1.40) e (1.41) em 1.38, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\psi(1)(u'(1))^2 + \int_0^1 (u')^2 r \psi dr + \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2 r \psi' dr - 2 \int_0^1 r \psi (u')^2 dr \\ & = - \int_0^1 \frac{1}{6} u^6 (2r\psi + r^2\psi') dr - \lambda \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 (2r\psi + r^2\psi') dr, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (u')^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr - \frac{1}{2} \psi(1) (u'(1))^2 \\ & = - \int_0^1 \frac{1}{6} u^6 (2r\psi + r^2\psi') dr - \lambda \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 (2r\psi + r^2\psi') dr. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Por outro lado multiplicando (1.35) por $(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi)u$ e integrando obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 u'' u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr - \int_0^1 \frac{r}{2} u' u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr \\ & = \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Usando o teorema de integração por partes em I_5 com

$$w = \frac{1}{2} r \psi' - \psi \quad dv = 2u u' dr \quad \text{e} \quad dw = \frac{1}{2} (r \psi'' - \psi') dr \quad v = u^2,$$

obtemos

$$\int_0^1 \frac{r}{2} u' u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr = -\frac{1}{2} \int_0^1 u^2 (r \psi'' - \psi') dr. \quad (1.44)$$

De modo semelhante com

$$w = \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) u \quad dv = u'' dr \quad \text{e} \quad dw = \left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' - \psi' \right) u + \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) u' dr \quad v = u',$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'' u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) dr &= - \int_0^1 u' \left[\left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' - \psi' \right) u + \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) u' \right] dr \\ &= - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' - \psi' \right) u u' dr - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi \right) (u')^2 dr, \end{aligned}$$

mas, usando integração por partes mais uma vez com

$$w = \left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' - \psi' \right) \quad dv = u u' dr \quad \text{e} \quad dw = \left(r \psi''' + \frac{\psi'' r^2}{2} - \psi' \right) dr \quad v = \frac{u^2}{2},$$

temos que

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi'' - \psi' \right) u u' dr = - \int_0^1 u^2 \left(r \psi'' + \frac{\psi''' r^2}{2} - \psi' \right) dr,$$

portanto

$$\int_0^1 u'' u \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) dr = \int_0^1 u^2 \left(r \psi'' + \frac{\psi''' r^2}{2} - \psi' \right) dr - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) (u')^2 dr. \quad (1.45)$$

Substituindo (1.44) e (1.45) em (1.43) obtemos

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) (u')^2 dr - \frac{1}{4} \int_0^1 \psi''' r^2 dr = \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) dr + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) dr. \quad (1.46)$$

Combinando (1.42) e (1.46) obtemos (1.37). De fato, Basta isolar no primeiro membro o termo em comum $\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) (u')^2 dr \right)$, e igualando os segundos membros teremos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u^6 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) dr + \lambda \int_0^1 u^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' - r \psi \right) dr + \frac{1}{4} \int_0^1 \psi''' r^2 dr = \\ & = \frac{1}{2} \psi(1) (u'(u))^2 - \int_0^1 \frac{1}{6} u^6 (2r\psi + r^2\psi') dr - \lambda \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 (2r\psi + r^2\psi'). \end{aligned}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[u^6 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' + \frac{1}{6} r^2 \psi' - r\psi + \frac{1}{3} r\psi \right) + \lambda u^2 \left(\frac{1}{2} r^2 \psi' + \frac{1}{2} r^2 \psi' - r\psi + r\psi \right) + \frac{1}{4} u^2 r^2 \psi''' \right] dr \\ & = \frac{1}{2} |u'(1)|^2 \psi(1). \end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^1 \left[u^6 \left(\frac{2}{3} r^2 \psi' - \frac{2}{3} r\psi \right) + \lambda u^2 r^2 \psi' + \frac{1}{4} u^2 r^2 \psi''' \right] dr = \frac{1}{2} |u'(1)|^2 \psi(1).$$

E assim segue (1.37). ■

Conclusão da proposição 1.12

Como já sabemos que para $\lambda \leq 0$ não existe solução para (1.11) tomemos $0 < \lambda \leq \frac{1}{4} \lambda_1$, ou seja, $0 < \lambda \leq \frac{1}{4} \pi^2$. Escolhendo $\psi(r) = \text{sen}((4\lambda)^{\frac{1}{2}} r)$ pois ψ é suave além de $\psi(0) = 0$ como em (1.37) então temos que

$$\psi'(r) = \cos(2\lambda^{\frac{1}{2}} r) \cdot 2\lambda^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \psi''(r) = -2\lambda^{\frac{1}{2}} \text{sen}(2\lambda^{\frac{1}{2}} r) \cdot 2\lambda^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{e} \quad \psi'''(r) = -4\lambda \cos(2\lambda^{\frac{1}{2}} r) \cdot 2\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\lambda\psi' + \frac{1}{4}\psi''' = 2\lambda\lambda^{\frac{1}{2}}\cos(2\lambda^{\frac{1}{2}}r) + \frac{1}{4}(-8\lambda\lambda^{\frac{1}{2}}\cos(2\lambda^{\frac{1}{2}}r)) = 0,$$

ou seja, um lado da identidade (1.37) é nulo.

Por outro lado note que $\sin(\theta) - \theta\cos(\theta) > 0 \forall \theta \in (0, \pi)$. Com efeito a função $g(\theta) = \sin\theta - \theta\cos\theta$ é crescente em $(0, \pi)$ pois $g'(\theta) = \cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta > 0$ assim como $g(0) = 0$ então $g(\theta) > 0 \forall \theta \in (0, \pi)$, com isso temos que

$$r\psi - r^2\psi' = r.\sin(2\lambda^{\frac{1}{2}}r) - r^2 2\lambda^{\frac{1}{2}}\cos(2\lambda^{\frac{1}{2}}r) = r(\sin(2\lambda^{\frac{1}{2}}r) - 2\lambda^{\frac{1}{2}}r\cos(2\lambda^{\frac{1}{2}}r)) > 0.$$

como u é solução positiva e $\psi(1) \geq 0$ então temos o outro lado da identidade (1.37) estritamente positivo, o que nos leva a uma contradição, portanto não existe solução para (1.11) com $\lambda \in (0, \frac{1}{4}\lambda_1]$ provando assim o lema. ■

Capítulo 2

Problema crítico com perturbação não-linear

Neste capítulo, estudaremos um problema mais geral, ou seja encontrar soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

com $f(x, u)$ uma perturbação de ordem inferior, $n \geq 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado.

Assumiremos que:

1) $f : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável em x e contínua em t .
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

2) $\sup_{x \in \Omega} |f(x, t)| < \infty$ para todo $M > 0$.
 $0 \leq t \leq M$

Além disso dizer que f é uma perturbação de ordem inferior a s^{2^*-1} significa que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(x, s)}{s^{2^*-1}} = 0.$$

2.1 Ferramenta geral

Nesta seção, apresentaremos condições ou ferramentas gerais para o estudo do problema (2.1) baseando-se em uma variação do teorema do passo da montanha. Assumiremos que $f(x, u)$ pode ser escrita:

$$f(x, u) = a(x)u + g(x, u), \quad (2.2)$$

com

$$a(x) \in L^\infty(\Omega) \quad (2.3)$$

$$g(x, u) = o(u) \text{ quando } u \rightarrow 0^+, \text{ uniformemente em } \Omega \quad (2.4)$$

$$g(x, u) = o(u^{2^*-1}) \text{ quando } u \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente em } \Omega. \quad (2.5)$$

Além disso ainda assumiremos que o operador $-\Delta - a(x)$ possui um menor autovalor positivo, ou seja,

$$\int \{|\nabla \varphi|^2 - a\varphi^2\} \geq \alpha \int |\nabla \varphi|^2, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (2.6)$$

o que implica

$$\int \{|\nabla \varphi|^2 - a\varphi^2\} \geq \alpha' \int \varphi^2, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

para algum $\alpha' > 0$.

Como $f(x, 0) = 0$, para todo $x \in \Omega$, e estamos interessados em soluções positivas para o problema (2.1), podemos assumir sem perda de generalidade que $f(x, u) = 0$, para todo $x \in \Omega$ e toda $u \leq 0$.

Sejam ainda $F(x, u) = \int_0^u f(x, t)dt$ para $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}$ e

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} |u|^{2^*} - F(x, u) \right\} dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (2.7)$$

o funcional associado ao problema (2.1).

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponhamos de (2.2)-(2.6) valem. Se existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, positiva não nula tal que*

$$\sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}} \quad (2.8)$$

então o problema (2.1) possui solução.

Diante deste teorema podemos fazer duas observações:

Observação 2.1. No caso de $f(x, u) = \lambda u$, assumir (2.6) corresponde a $\lambda < \lambda_1$.

De fato, temos de (2.6) que $\int \{|\nabla \varphi|^2 - a\varphi^2\} \geq \alpha' \int \varphi^2$ o que implica que

$$\begin{aligned} \int |\nabla \varphi|^2 \geq (\alpha' + \lambda) \int \varphi^2 &\Rightarrow \lambda_1 \int \varphi^2 \geq (\alpha' + \lambda) \int \varphi^2 \Rightarrow \lambda_1 \geq (\alpha' + \lambda) \Rightarrow \lambda \leq \lambda_1 + \alpha' \\ &\Rightarrow \lambda < \lambda_1 \end{aligned}$$

Observação 2.2. Ainda no caso $f(x, u) = \lambda u$, se assumirmos (2.8), equivale a

$$S_\lambda < S$$

Com efeito por (2.7) temos

$$\begin{aligned} \Psi(tv_0) &= \int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla(tv_0)|^2 - \frac{1}{2^*} |tv_0|^{2^*} - \lambda \frac{1}{2} |tv_0|^2 \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{t^2}{2} |\nabla v_0|^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} |v_0|^{2^*} - \frac{\lambda t^2}{2} |v_0|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} t^2 (||\nabla v_0||_2^2 - \lambda ||v_0||_2^2) - \frac{t^{2^*}}{2^*} ||v_0||_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2} t^2 A - \frac{t^{2^*}}{2^*} B. \end{aligned}$$

Assim derivando Ψ em relação a t temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = tA - t^{2^*-1}B$$

Como $2^* > 2$ segue que $2^* - 1 > 1$ então $tA - t^{2^*-1}B = 0$ implica que $t(A - t^{2^*-2}B) = 0$ segue então que os possíveis pontos críticos de Ψ é $t = 0$ ou $t = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$. Mas como $\Psi(tv_0) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ assim $\Psi(0) \leq \Psi\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)$, portanto segue que $t = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é o ponto máximo de Ψ . Segue então

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} A - \frac{1}{2^*} \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}} B \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{A^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{B^{\frac{2}{2^*-2}}} - \frac{1}{2^*} \frac{A^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{B^{\frac{2}{2^*-2}}} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \frac{A^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{B^{\frac{2}{2^*-2}}} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}} \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Observando da definição de $S_\lambda \left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}} \right) \geq S_\lambda$, segue de (2.8) que

$$\frac{1}{n} \left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}} \right)^{\frac{n}{2}} = \sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}},$$

donde $S_\lambda < S$.

Diante das observações (2.1) e (2.2) concluimos que o teorema 2.1 é uma generalização do teorema 1.1 do capítulo 1

Para provar o teorema utilizaremos uma variante do teorema do passo da montanha de Ambrosetti-Rabinowitz sem a condição (PS) e um problema auxiliar, depois voltaremos a problema original e concluiremos a prova.

Enunciaremos, apenas para facilitar a verificação das condições, a variante do teorema do passo da montanha.

Teorema 2.2. *Seja ϕ uma função de classe C^1 em um espaço de Banach E . ($\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$)*

Suponha que existe uma vizinhança U de zero e uma constante ρ tal que

$$\phi(u) \geq \rho \quad \forall u \in \partial U \quad (2.9)$$

$$\phi(0) < \rho \quad \text{e} \quad \phi(v) < \rho \quad \text{para algum } v \notin U \quad (2.10)$$

definimos

$$c = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \phi(w) \geq \rho \quad (2.11)$$

Onde $\mathcal{P}$ denota a classe de todos os caminhos contínuos de 0 a v .

Então existe $(u_j) \in E$ tal que

$$\phi(u_j) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \phi'(u_j) \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad E^* \quad (2.12)$$

A prova desse teorema é exatamente análogo a prova do teorema do passo da montanha sem a condição $(PS)_c$ e pode ser encontrado em Willem [11].

Vejamos agora o problema auxiliar.

2.1.1 Problema auxiliar

Mostraremos primeiro a existência de soluções para o problema

$$-\Delta u + \mu u = (u^+)^{2^*-1} + f(x, u^+) + \mu u^+ \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)^*. \quad (2.13)$$

Seu funcional associado é

$$\phi(u) = \int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \mu u^2 - \frac{1}{2^*} (u^+)^{2^*} - F(x, u^+) - \frac{1}{2} \mu (u^+)^2 \right\} dx.$$

Portanto mostremos que primeiro que ϕ satisfaz as hipóteses do teorema acima.

Notemos antes que usando (2.2) a (2.5), podemos fixar uma constante $\mu \geq 0$ suficientemente grande tal que

$$-f(x, u) \leq \mu u + u^{2^*-1} \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega \quad \forall u \geq 0 \quad (2.14)$$

(no caso $f(x, u) \geq 0$ isso $\forall u \geq 0$, tomemos $\mu = 0$) De fato, de (2.2) temos que

$$|f(x, u)| = |a(x)u + g(x, u)| \leq |a(x)||u| + |g(x, u)|$$

Por (2.3) temos que $|a(x)| \leq C$ e por (2.4) temos que $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(x, u)}{u} = 0$ isto quer dizer que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|u| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(x, u)}{u} \right| < \epsilon \Rightarrow |g(x, u)| < \epsilon |u|$$

Por outro lado temos de (2.5) temos que dado $\epsilon > 0$ existe um $M > 0$ tal que

$$|u| > M \Rightarrow \left| \frac{g(x, u)}{u^{2^*-1}} \right| < \epsilon \Rightarrow |g(x, u)| < \epsilon |u|^{2^*-1}.$$

No caso de $\delta \leq |u| \leq M$ temos que g é contínua em u e assim leva compacto em compacto, logo $|g(x, u)| \leq K$. Portanto para $1 \leq |u| \leq M$ temos $|g(x, u)| \leq K|u|$ e para $\delta \leq |u| < 1$ temos que $|g(x, u)| \leq \frac{K}{\delta}|u|$ assim tomando $\mu = \max(\frac{K}{\delta}, K) + C$ e tomando $\epsilon = 1$ temos

$$|f(x, u)| \leq \mu |u| + |u|^{2^*-1}.$$

Como $u \geq 0$ então $|u| = u$ assim $-Cu - \epsilon u^{2^*-1} - K \leq f(x, u)$ o que implica que $-\mu u - u^{2^*-1} \leq f(x, u)$ o que implica que

$$-f(x, u) \leq \mu u + u^{2^*-1}.$$

Primeiro com argumentos padrões temos que ϕ está bem definida e além disso é de classe C^1 . Verifiquemos agora a geometria do passo da montanha, ou seja as condições (2.9) e (2.10) do teorema 2.2.

Verificação de (2.9)

De (2.4) temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $g(x, u) \leq \epsilon u$ q.t.p. em Ω para todo $0 \leq u \leq \delta$. Por (2.5) temos que dado $\epsilon > 0$ existe M tal que $g(x, u) \leq \epsilon u^{2^*-1}$ para $u > M$ e para $\delta \leq u \leq M$ temos que g é contínua então $g(x, u) \leq K$ e assim de modo análogo ao que fizemos acima basta tomar $C = \max(K, \frac{k}{\delta^{2^*-1}})$ e temos que

$$g(x, u) \leq \epsilon u + Cu^{2^*-1} \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega,$$

2. Problema crítico com perturbação não-linear

para $u \geq 0$ e C depende de ϵ pois é função de δ que depende de ϵ .

Assim $f(x, u) \leq a(x)u + \epsilon u + Cu^{2^*-1}$ que integrando temos

$$F(x, u) \leq \int_0^u [a(x)t + \epsilon t + Ct^{2^*-1}] dt = \frac{a(x)u^2}{2} + \frac{\epsilon u^2}{2} + \frac{Cu^{2^*}}{2^*}.$$

Portanto com isso obtemos

$$\begin{aligned} \phi(u) &\geq \\ &\int \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\mu u^2 - \frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*} - \frac{a(x)(u^+)^2}{2} - \frac{\epsilon(u^+)^2}{2} - \frac{C(u^+)^{2^*}}{2^*} - \frac{1}{2}\mu(u^+)^2 \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{a(x)(u^+)^2}{2} - \frac{\epsilon(u^+)^2}{2} - \frac{(C+1)(u^+)^{2^*}}{2^*} - \frac{1}{2}\mu(u^+)^2 + \frac{1}{2}\mu u^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Usando o fato que $\int |\nabla u|^2 = \int (|\nabla u^+|^2 + |\nabla u^-|^2)$ temos que a integral acima será

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}|\nabla u^+|^2 - \frac{a(x)(u^+)^2}{2} - \frac{\epsilon(u^+)^2}{2} - \frac{(C+1)(u^+)^{2^*}}{2^*}}_{I_1} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{2}|\nabla u^-|^2 - \frac{1}{2}\mu(u^+)^2 + \frac{1}{2}\mu u^2}_{I_2} \right\} dx \end{aligned}$$

Note que $I_1 \geq \frac{\alpha}{2} \int |\nabla u^+|^2$ por (2.6).

Note também que usando o fato $\int u^2 = \int (u^+)^2 + \int (u^-)^2$ temos

$$I_2 = \int \left[\frac{1}{2}|\nabla u^-|^2 - \frac{1}{2}\mu(u^-)^2 + \frac{1}{2}\mu(u^-)^2 - \frac{1}{2}\mu(u^+)^2 + \frac{1}{2}\mu u^2 \right] \quad (2.15)$$

$$\geq \int \left[\frac{1}{2}|\nabla u^-|^2 - \frac{1}{2}\mu(u^-)^2 - \underbrace{\frac{1}{2}\mu(u^-)^2 - \frac{1}{2}\mu(u^+)^2 + \frac{1}{2}\mu u^2}_{zero} \right] \quad (2.16)$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}|\nabla u^-|^2 - \frac{1}{2}\mu(u^-)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Assim por (2.6) com uma constante β temos $I_2 \geq \frac{\beta}{2} \int |\nabla u^-|^2$.

Segue então que tomando $m = \min(\frac{\beta}{2}, \frac{\alpha}{2})$ temos

$$I_1 + I_2 \geq m \int |\nabla u|^2.$$

Portanto $\phi(u) \geq \int m|\nabla u|^2 - \int \frac{\epsilon(u^+)^2}{2} - \int \frac{(C+1)}{2^*}(u^+)^{2^*}$. Usando agora as imersões contínuas de Sobolev temos que $\|u\|_2 \leq K_1\|u\|_{H_0^1}$ e $\|u\|_{2^*} \leq K_2\|u\|_{H_0^1}$, assim

$$\phi(u) \geq m\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{K_1\epsilon}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{K_2(C+1)}{2^*}\|u\|_{H_0^1}^{2^*}$$

Assim para ϵ suficientemente pequeno e $\|u\|_{H_0^1} = r$ suficientemente pequeno também temos $\phi(u) \geq \rho > 0$ verificando portanto (2.9) com $U = B(0, r) \subset H_0^1(\Omega)$.

Verificação de (2.10) Para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$ e $u \neq 0$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(tu) = -\infty$$

Com efeito, já vimos que de (2.5) temos existem constantes R e M tal que $|g(x, u)| \leq \epsilon u^{2^*-1}$ quando $|u| > R$ e $|g(x, u)| \leq M$ quando $|u| \leq R$ assim temos que $|g(x, u)| \leq \epsilon u^{2^*-1} + M$ e como $|a(x)| \leq C$ então temos que

$$|f(x, u)| \leq Cu + \epsilon u^{2^*-1} + M$$

portanto $-F(x, u) \leq \frac{Cu^2}{2} + \frac{\epsilon u^{2^*}}{2^*} + Mu$ e daí segue

$$\phi(tu) \leq$$

$$\int \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{t^2\mu u^2}{2} - \frac{t^{2^*}(u^+)^{2^*}}{2^*} + \frac{t^{2^*}\epsilon(u^+)^{2^*}}{2^*} + \frac{t^2C(u^+)^2}{2} + tM(u^+) - \frac{t^2\mu(u^+)^2}{2} \right]$$

Tomando $\epsilon < 1$ temos que $\phi(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$

Assim existem muitos v 's satisfazendo (2.10). Contudo, será importante para a próxima proposição do teorema um certo v especial, a saber $v = t_0 v_0$ onde v_0 é dado por (2.8) ou seja tal que $\sup_{t \geq 0} \phi(tv_0) < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$ e $t_0 > 0$, suficientemente grande para que $v \notin U$ e $\phi(v) \leq 0$.

Definamos agora o nível minimax, ou seja a condição (2.11) Basta utilizar a hipótese (2.8) e temos que

$$\sup_{t \geq 0} \phi(tv) < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$$

e portanto

$$c < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} \tag{2.18}$$

para

$$c = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \phi(w)$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os caminhos que ligam 0 a v .

2. Problema crítico com perturbação não-linear

Assim aplicando o teorema, obtemos uma sequência $(u_j) \in H_o^1(\Omega)$ tal que $\phi(u_j) \rightarrow c$ e $\phi'(u_j) \rightarrow 0$ em $(H_o^1(\Omega))^*$. Ou seja

$$\int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_j|^2 + \frac{1}{2} \mu u_j^2 - \frac{1}{2^*} (u_j^+)^{2^*} - F(x, u_j^+) - \frac{1}{2} \mu (u_j^+)^2 \right\} = c + o(1) \quad (2.19)$$

e

$$-\Delta u_j + \mu u_j - (u_j^+)^{2^*-1} - f(x, u_j^+) - \mu u_j^+ = \zeta_j, \quad (2.20)$$

com $\zeta_j \rightarrow 0$ em $(H_o^1(\Omega))^*$. Definamos que $\langle \zeta_j, \varphi \rangle$ é o operador ζ_j aplicado na função φ para todo $\varphi \in H_o^1(\Omega)$. Com base nestas informações provemos os lemas a seguir

Lema 2.3. A sequência u_j obtida é limitada em $H_o^1(\Omega)$, ou seja,

$$\|u_j\|_{H_o^1} \leq C \quad (2.21)$$

Prova: Para provar este lema basta observar que por um lado se multiplicarmos (2.20) por u_j obtemos

$$\int \{ |\nabla u_j|^2 + \mu u_j^2 - (u_j^+)^{2^*} - f(x, u_j^+) - \mu (u_j^+)^2 \} = \langle \zeta_j, u_j \rangle \quad (2.22)$$

Fazendo agora diferença entre (2.19) e $\frac{1}{2} \langle \zeta_j, u_j \rangle$ de (2.22) temos

$$\int \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) (u_j^+)^{2^*} - F(x, u_j^+) + \frac{1}{2} f(x, u_j^+) u_j^+ \right\} = c + o(1) - \frac{1}{2} \langle \zeta_j, u_j \rangle$$

O que implica que

$$\int \left\{ \frac{1}{n} (u_j^+)^{2^*} - F(x, u_j^+) + \frac{1}{2} f(x, u_j^+) u_j^+ \right\} \leq c + o(1) + \|\zeta_j\|_{(H_o^1)^*} \|u_j\|_{H_o^1}$$

portanto temos

$$\frac{1}{n} \int (u_j^+)^{2^*} \leq \int \left\{ F(x, u_j^+) - \frac{1}{2} f(x, u_j^+) u_j^+ \right\} + c + o(1) + \|\zeta_j\|_{(H_o^1)^*} \|u_j\|_{H_o^1} \quad (2.23)$$

Por outro lado já vimos que (2.5) temos dado $\epsilon > 0$ existe M tal que $|g(x, u)| \leq \epsilon u^{2^*-1} + M$ sabendo agora que f é uma função de ordem inferior, ou seja possui a mesma propriedade (2.5), temos que $\forall \epsilon > 0, \exists C$ Tal que

$$|f(x, u)| \leq \epsilon u^{2^*-1} + C \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega \quad \forall u \geq 0 \quad (2.24)$$

De modo análogo e sabendo que F é uma ordem acima de f então temos que existe D

tal que

$$|F(x, u)| \leq \frac{\epsilon u^{2^*}}{2^*} + D \quad q.t.p. \quad \text{em } \Omega \quad \forall u \geq 0 \quad (2.25)$$

Portanto unindo (2.23) com (2.24) e (2.25) temos

$$\frac{1}{n} \int (u_j^+)^{2^*} \leq \int \left\{ \frac{\epsilon (u_j^+)^{2^*}}{2^*} - \frac{1}{2} \epsilon (u_j^+)^{2^*} \right\} + c + o(1) + \|\zeta_j\|_{(H_0^1)^*} \|u_j\|_{H_0^1} + C_2$$

Usando o fato que o ζ_j é convergente, logo limitada, então $\|\zeta_j\|_{(H_0^1)^*} \leq C_1$ e daí chegamos

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{\epsilon}{n} \right) \int (u_j^+)^{2^*} \leq C_3 + C_1 \|u_j\|_{H_0^1} + o(1)$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno e uma contante K adequada temos

$$\int (u_j^+)^{2^*} \leq K + K \|u_j\|_{H_0^1} + o(1) \quad (2.26)$$

Combinando (2.19) com (2.26) obtemos (2.21). De fato de (2.19) temos

$$\frac{1}{2} \int |\nabla u_j|^2 + \frac{1}{2} \mu \int u_j^2 - \frac{1}{2} \mu \int (u_j^+)^2 = c + o(1) + \frac{1}{2^*} \int (u_j^+)^{2^*} + \int F(x, u)$$

Usando (2.25) e (2.26) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_j\|_{H_0^1}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_j\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2} \mu \int (u_j^2 - (u_j^+)^2) \leq c + o(1) + \frac{1}{2^*} \int (u_j^+)^{2^*} + \int \left\{ \frac{\epsilon (u_j^+)^{2^*}}{2^*} + D \right\} \\ &\leq C_4 + C_5 \int (u_j^+)^{2^*} + o(1) \leq K_1 + K \|u_j\|_{H_0^1} \Rightarrow \frac{1}{2} \|u_j\|_{H_0^1}^2 \leq K_1 + K \|u_j\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Desigualdade que mostra (2.21), ou seja (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ ■

Lema 2.4. Dada a sequência u_j obtida temos que

$$\begin{aligned} (u_j^+)^{2^*-1} &\rightharpoonup (u^+)^{2^*-1}, \quad \text{converge fraco em } (L^{2^*}(\Omega))^*, \\ f(x, u_j^+) &\rightharpoonup f(x, u^+), \quad \text{converge fraco em } (L^{2^*}(\Omega))^*. \end{aligned}$$

Prova: Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo então podemos extrair um subsequência (u_j) tal que

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{em } H_0^1(\Omega)$$

O que implica pelas imersões compacta de Rellich-Kondrachov (vide teorema 9.16,

pg.285 de [4]) que

$$u_j \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \quad \forall q < 2^*$$

o que nos diz que

$$u_j \rightarrow u \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Sendo assim definimos a sequência de aplicações $h_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$h_j(x) = (u_j^+)^{2^*-1}(x)\varphi(x)$$

além disso seja h tal que $h(x) = (u^+)^{2^*-1}(x)\varphi(x)$. Mostremos que $\int h_j \rightarrow \int h$. Para isso utilizaremos o teorema de Vitali (vide Apêndice), logo basta mostrar que as h_j são integráveis, que h_j converge q.t.p. para h e que $\left(\int h_j\right)$ é uma sequência de integrais uniformemente absolutamente contínua. Então pelo teorema de Vitali temos o que desejamos.

De fato como $(u_j) \rightarrow u$ q.t.p. então $(u_j^+)^{2^*-1} \rightarrow (u^+)^{2^*-1}$ q.t.p. assim seja qual for φ temos que

$$(u_j^+)^{2^*-1}\varphi \rightarrow (u^+)^{2^*-1}\varphi \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

Temos também que as h_j são integráveis pois pela desigualdade de Holder com $p = \frac{2^*}{2^*-1}$ e $p' = 2^*$ assim

$$\left| \int h_j \right| \leq \int |(u_j^+)|^{2^*-1} |\varphi| \leq \left(\int (u_j^+)^{2^*} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int \varphi^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} < \infty \quad (2.27)$$

pois $u_j \in L^{2^*}$. E por fim mostraremos que as $\left(\int h_j\right)$ são absolutamente uniformemente contínuas. Observemos que por (2.27) temos dado $\epsilon > 0$ existe $\gamma > 0$ então

$$\left| \int_{\omega} h_j \right| \leq \|u_j^+\|_{2^*}^{2^*-1} \left(\int_{\omega} \varphi^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C \left(\int_{\omega} \varphi^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

E como φ é absolutamente contínua, dado $\epsilon > 0$, tome γ_0 tal que $\left| \left(\int_{\omega} \varphi^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \right| < \frac{\epsilon}{C}$. Assim, temos que $\left(\int h_j\right)$ são uniformemente absolutamente contínuas, logo pelo teorema de Vitali

$$\int_{\Omega} h_j \rightarrow \int_{\Omega} h$$

que significa que

$$(u_j^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1} \text{ converge fraco em } (L^{2^*}(\Omega))^*$$

De modo análogo mostramos que

$$\int_{\Omega} f(x, u_j^+) \varphi \rightarrow \int_{\Omega} f(x, u^+) \varphi \quad \forall \varphi \in (L^{2^*}(\Omega)),$$

ou seja

$$f(x, u_j^+) \rightharpoonup f(x, u^+) \text{ converge fraco em } (L^{2^*}(\Omega))^*.$$

■

2.1.2 Problema original

Agora usando o problema auxiliar vamos a prova do problema original.

Prova do teorema 2.1:

Passando o limite em (2.20) obtemos

$$-\Delta u + \mu u = (u^+)^{2^*-1} + f(x, u^+) + \mu u^+ \quad \text{em } H_0^1(\Omega). \quad (2.28)$$

Mas claramente por (2.14) temos que

$$-\Delta u + \mu u \geq (u^+)^{2^*-1} - (u^+)^{2^*-1} - \mu u^+ + \mu u^+ = 0.$$

Portanto pelo princípio máximo fraco $u \geq 0$ em Ω e assim u satisfaz

$$-\Delta u = u^{2^*-1} + f(x, u).$$

Para finalizar a prova basta mostrar que $u \not\equiv 0$ e consequentemente $u > 0$ em Ω pelo princípio máximo Forte. De fato suponha que $u = 0$, assim teríamos

$$\int f(x, u_j^+) u_j^+ \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

$$\int F(x, u_j^+) \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

pois de (2.24) e (2.25) deduzimos que

$$\left| \int f(x, u_j^+) u_j^+ \right| \leq \int (u_j^+)^{2^*} + C \int u_j^+$$

$$\left| \int F(x, u_j^+) \right| \leq \frac{\epsilon}{2^*} \int (u_j^+)^{2^*} + D \int u_j^+.$$

Assim como $u_j \rightarrow 0$ em L^2 e u_j é limitada em L^{2^*} obtemos (2.29) e (2.30).

Extraindo ainda uma subsequência podemos assumir que

$$\int |\nabla u_j|^2 \rightarrow l \quad (2.31)$$

para algum $l \geq 0$. Passando o limite em (2.22) e em (2.19) obtemos

$$\int (u_j^+)^{2^*} \rightarrow l \quad (2.32)$$

sendo assim $\frac{l}{2} - \frac{1}{2^*}l = c$ e como $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{n}$ temos

$$\frac{1}{n}l = c. \quad (2.33)$$

Por outro lado, temos

$$\|\nabla u_j\|_2^2 \geq S\|u_j\|_{2^*}^2 \geq S\|u_j^+\|_{2^*}^2 = S \left(\int (u_j^+)^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

e usando (2.32) e (2.31) encontramos o limite

$$l \geq Sl^{\frac{2}{2^*}}. \quad (2.34)$$

Segue então de (2.33) e (2.34) que

$$l \geq Sl^{\frac{2}{2^*}} \Rightarrow 1 \geq Sl^{\frac{2}{2^*}-1} = Sl^{\frac{-2}{n}} \Rightarrow l^{\frac{2}{n}} \geq S \Rightarrow l \geq S^{\frac{n}{2}} \Rightarrow n.c \geq S^{\frac{n}{2}}$$

O que implica em

$$c \geq \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$$

que contradiz (2.18), portanto $u \not\equiv 0$

Finalizaremos esta seção com uma observação interessante.

Observação 2.3. A solução u do problema (2.1) que obtemos tem uma propriedade adicional. Temos que ou

$$\phi(u) = c \quad (2.35)$$

ou

$$\phi(u) \leq c - \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} < 0 \quad (2.36)$$

Em alguns casos (2.36) não é satisfeita, quando por exemplo assumimos que

$$F(x, u) \leq \frac{1}{2}f(x, u)u + \frac{1}{n}u^{2^*}. \quad (2.37)$$

De fato, se u é solução de (2.1) então

$$\int |\nabla u|^2 = \int (u^{2^*} + f(x, u)u), \quad (2.38)$$

e então

$$\psi(u) = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}u^{2^*} - F(x, u) \right) = \int \left(\frac{1}{2}u^{2^*} + \frac{1}{2}f(x, u)u - \frac{1}{2^*}u^{2^*} - F(x, u) \right)$$

e agora por (2.37) temos

$$\phi(u) \geq \int \frac{1}{n}u^{2^*} + \frac{1}{2}f(x, u)u - \frac{1}{2}f(x, u)u - \frac{1}{n}u^{2^*} = 0,$$

excluindo assim a possibilidade de ocorrer (2.36).

Um exemplo de situação que cumpre (2.37) é quando $f(x, u) = a(x)u + \mu u^q$ com $a \in L^\infty, \mu \geq 0$ e $1 \leq q < 2^* - 1$.

Sendo assim claramente temos que quando assumimos (2.37) obtemos a condição $(PS)_c$ para todo c tal que $c < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$.

Verifiquemos então esta observação.

Considerando novamente a sequência u_j da prova do teorema temos

$$\int f(x, u_j^+)u_j^+ \rightarrow \int f(x, u^+)u^+ \quad \text{e} \quad \int F(x, u_j^+) \rightarrow \int F(x, u) \quad (2.39)$$

De fato, pela continuidade de f na segunda variável temos que $f(x, u_j^+) \rightarrow f(x, u^+)$ além disso $u_j \rightarrow u$ q.t.p em Ω e por fim basta observar que como f é de ordem inferior então

$$f(x, u_j^+)u_j^+ \leq \epsilon |u_j^+|^{2^*} + C$$

e como u_j é limitada em L^{2^*} temos a existência de uma função $h(x)$ tal que $f(x, u_j^+)u_j^+ \leq h(x)$ q.t.p. em Ω , portanto pelo teorema da convergência dominada temos (2.39).

Definimos agora $v_j = u_j - u$ e assim

$$\int |\nabla u_j|^2 = \int |\nabla u|^2 + \int |\nabla v_j|^2 + o(1) \quad (2.40)$$

e ainda do teorema de Brezis-Lieb (Vide Apêndice) deduzimos que

$$\int (u_j^+)^{2^*} = \int (u)^{2^*} + \int (v_j^+)^{2^*} + o(1) \quad (2.41)$$

Combinando (2.19) com (2.39),(2.40) e (2.41) temos

$$\int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} u^{2^*} - F(x, u) + \frac{1}{2} |\nabla v_j|^2 - \frac{1}{2^*} (v_j^+)^{2^*} \right\} = c + o(1). \quad (2.42)$$

E ainda combinando (2.22) com (2.39),(2.40) e (2.41) temos

$$\int \{ |\nabla u|^2 - u^{2^*} - f(x, u)u + |\nabla v_j|^2 - (v_j^+)^{2^*} \} = o(1) \quad (2.43)$$

reduzindo ainda mais com ajuda de (2.38) ficamos com

$$\int |\nabla v_j|^2 = \int (v_j^+)^{2^*} + o(1) \quad (2.44)$$

unindo agora (2.44) com (2.42) obtemos

$$\int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} u^{2^*} - F(x, u) \right\} + \int \frac{1}{n} |\nabla v_j|^2 = c + o(1) \quad (2.45)$$

e finalmente assumindo que para uma subsequência que

$$\int \frac{1}{n} |\nabla v_j|^2 \rightarrow k \quad e \quad \int (v_j^+)^{2^*} \rightarrow k \quad k \geq 0$$

então ou $k = 0$ ou $k > 0$, no segundo caso pela definição de S temos que

$$\|\nabla v_j\|_2^2 \geq S \|v_j^+\|_{2^*}^2 \Rightarrow k \geq S k^{\frac{2}{2^*}} \Rightarrow k(1 - \frac{2}{2^*}) \geq S \Rightarrow k^{\frac{2}{n}} \geq S$$

o que nos dá

$$k \geq S^{\frac{n}{2}}$$

Portanto com $k = 0$ por (2.45) obtemos (2.35) e se $k \geq S^{\frac{n}{2}}$, também por (2.45) obtemos (2.36). Isso conclui a verificação da observação.

2.2 Estimativa do nível *minimax*

Com o teorema (2.1) temos como resolver nosso problema, mas é necessário ter a condição crucial, (2.8). Sendo assim mostraremos nesta seção uma proposição que nos fornecerá algumas hipóteses para que esta condição seja satisfeita.

Proposição 2.5. Suponhamos que $f(x, u)$ satisfaça (2.2)-(2.5). Se além disso, existe alguma função $h(u)$ tal que

$$f(x, u) \geq h(u) \geq 0 \quad \text{q.t.p. } x \in \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0 \quad (2.46)$$

onde $\tilde{\Omega}$ é algum subconjunto aberto não vazio de Ω e $H(u) = \int_0^u h(t)dt$ cumpre

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] s^{n-1} ds = \infty, \quad (2.47)$$

então a condição (2.8) é satisfeita.

Prova: Primeiro lembremos que se $f(x, u) = \lambda u$, então da observação 2.2 a condição (2.8) significa que atinge o ínfimo S_λ em v_0 e

$$\frac{||\nabla v_0||_2^2 - \lambda ||v_0||_2^2}{||v_0||_{2^*}^2} < S.$$

Assim, é natural que se use para v_0 o mesmo tipo de função que usamos na proposição 1.2. Assumindo que $0 \in \tilde{\Omega}$ e fixando uma função $\varphi \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ tal que $\varphi(x) \equiv 1 \quad \forall x$ tal que $|x| < R$, com $R > 0$. Sejam

$$u_\epsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \quad \epsilon > 0 \quad (2.48)$$

e

$$v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{||u_\epsilon||_{2^*}} \quad (2.49)$$

Mostraremos que v_ϵ satisfaz a condição (2.8), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Para isto obteremos algumas estimações das provas da proposições 1.2 e proposição 1.6 do capítulo 1 que nos mostra de (1.5) e (1.14) que

$$||u_\epsilon||_{2^*} = \frac{K}{\epsilon^{\frac{n-2}{4}}} + O(1), \quad n \geq 3 \quad (2.50)$$

onde K depende apenas de n . Temos assim que $||\nabla v_\epsilon||_2^2 = \frac{||\nabla u_\epsilon||_2^2}{||u_\epsilon||_{2^*}^2}$ e usando as estimativas encontrada na prova destes lemas segue que

$$||\nabla v_\epsilon||_2^2 = S + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}), \quad n \geq 3 \quad (2.51)$$

e ainda de modo análogo obtemos

$$\|v_\epsilon\|_2^2 = \begin{cases} O(\epsilon) & \text{se } n \geq 5 \\ O(\epsilon |\ln \epsilon|) & \text{se } n = 4 \\ O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) & \text{se } n = 3 \end{cases} \quad (2.52)$$

Definimos agora $X_\epsilon = \|\nabla v_\epsilon\|_2^2$ e assim temos que

$$\Psi(tv_\epsilon) = \frac{1}{2}t^2 X_\epsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*} - \int_{\tilde{\Omega}} F(x, tv_\epsilon).$$

Como por hipótese $f(x, tv_\epsilon) \geq 0$ então $F(x, tv_\epsilon) \geq 0$ e portanto

$$\Psi(tv_\epsilon) \leq \frac{1}{2}t^2 X_\epsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*}$$

e assim $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(tv_\epsilon) = -\infty$. Portanto $\sup_{t \geq 0} \Psi(tv_\epsilon)$ é alcançado em algum $t_\epsilon \geq 0$. Caso $t_\epsilon = 0$, temos $\sup_{t \geq 0} \Psi(tv_\epsilon) = 0$ e não há o que provar. Vejamos quando $t_\epsilon > 0$. Observe que derivando a função $t \mapsto \Psi(tv_\epsilon)$ em $t = t_\epsilon$ temos

$$t_\epsilon X_\epsilon - t_\epsilon^{2^*-1} - \int_{\tilde{\Omega}} f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon = 0. \quad (2.53)$$

O que implica que $t_\epsilon X_\epsilon - t_\epsilon^{2^*-1} \geq 0 \Rightarrow X_\epsilon \geq t_\epsilon^{2^*-2}$, consequentemente

$$X_\epsilon^{\frac{1}{2^*-2}} \geq t_\epsilon. \quad (2.54)$$

Portanto a função $t \mapsto (\frac{1}{2}t^2 X_\epsilon - \frac{t^{2^*}}{2^*})$ é crescente no intervalo $[0, X_\epsilon^{\frac{1}{2^*-2}}]$. Seja

$$Y_\epsilon = \sup_{t \geq 0} \Psi(tv_\epsilon) = \Psi(t_\epsilon v_\epsilon).$$

Assim segue por (2.54)

$$\begin{aligned} Y_\epsilon &= \frac{1}{2}t_\epsilon^2 X_\epsilon - \frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*} - \int_{\tilde{\Omega}} F(x, t_\epsilon v_\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(X_\epsilon^{\frac{1}{2^*-2}} \right)^2 X_\epsilon - \frac{\left(X_\epsilon^{\frac{1}{2^*-2}} \right)^{2^*}}{2^*} - \int_{\tilde{\Omega}} F(x, t_\epsilon v_\epsilon) \\ &= \frac{1}{2} X_\epsilon^{\frac{2}{2^*-2}+1} - \frac{1}{2^*} X_\epsilon^{\frac{2^*}{2^*-2}} - \int_{\tilde{\Omega}} F(x, t_\epsilon v_\epsilon) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) X_\epsilon^{\frac{2^*}{2^*-2}} - \int_{\tilde{\Omega}} F(x, t_\epsilon v_\epsilon) \\ &= \frac{1}{n} X_\epsilon^{\frac{n}{2}} - \int_{\tilde{\Omega}} F(x, t_\epsilon v_\epsilon). \end{aligned}$$

Substituindo (2.51) temos que

$$Y_\epsilon \leq \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}} + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \int F(x, t_\epsilon v_\epsilon). \quad (2.55)$$

Agora afirmamos que

$$t_\epsilon \rightarrow S^{\frac{1}{2^*-2}} \quad \text{quando} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.56)$$

De fato de (2.53) segue-se que

$$X_\epsilon - t_\epsilon^{2^*-2} - \int \frac{f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon}{t_\epsilon} = 0.$$

Assim é suficiente mostrar

$$\int \frac{f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon}{t_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

Usando de (2.2) a (2.5) vemos que $\forall \delta > 0, \exists C > 0$ tal que

$$|f(x, u)| \leq \delta u^{2^*-1} + Cu \quad q.t.p. \text{ em } \Omega \quad \forall u \geq 0.$$

Logo,

$$\left| \int \frac{f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon}{t_\epsilon} \right| \leq \delta t_\epsilon^{2^*-1} \|v_\epsilon\|_{2^*}^2 + C \|v_\epsilon\|_2^2 = \delta t_\epsilon^{2^*-1} + C \|v_\epsilon\|_2^2.$$

De (2.52) temos que $\|v_\epsilon\|_2^2 \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ basta tomar $\delta = \frac{\gamma}{t_\epsilon^{2^*-1}}$ para qualquer

$\gamma > 0$ e temos $\left| \int \frac{f(x, t_\epsilon v_\epsilon) v_\epsilon}{t_\epsilon} \right| < \gamma$ o que mostra (2.57) e assim (2.56).

Segue agora de (2.46) e de (2.48)-(2.50) que

$$\begin{aligned} t_\epsilon v_\epsilon &= \frac{t_\epsilon}{\|u_\epsilon\|_{2^*}} \cdot \frac{t_\epsilon \varphi(x)}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \\ &= \frac{t_\epsilon \varphi(x)}{\frac{K}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} + O(1)} \cdot \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \\ &= \frac{t_\epsilon \varphi(x) \epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{K + O(\epsilon^{\frac{n-2}{4}})} \cdot \frac{1}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}. \end{aligned}$$

Chamando $A = \frac{t_\epsilon \varphi(x)}{K + O(\epsilon^{\frac{n-2}{4}})}$ temos $t_\epsilon v_\epsilon = \frac{A \epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$ assim

$$\int F(x, t_\epsilon v_\epsilon) \geq \int_{|x| < R} H \left(\frac{A \epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right). \quad (2.58)$$

Segue então de (2.55) e (2.58) que

$$Y_\epsilon \leq \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}} + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) - \int_{|x|<R} H \left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right). \quad (2.59)$$

E finalmente para concluirmos que $Y_\epsilon < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$ e assim provar o lema, basta mostrar que para ϵ próximo do zero temos $O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) < \int_{|x|<R} H(t_\epsilon v_\epsilon)$. Para isso, é suficiente que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_{|x|<R} H \left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) dx = \infty. \quad (2.60)$$

Chamando $I_1 = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_{|x|<R} H \left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) dx$ segue da regra da córea que

$$I_1 = \frac{|S_1^n|}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^R H \left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon + r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) r^{n-1} dr.$$

Pelo teorema da mudança de variável com $r = \epsilon^{\frac{1}{2}} s$ e $ds = \epsilon^{-\frac{1}{2}} dr$ e assim

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{|S_1^n|}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^R H \left(\frac{A\epsilon^{\frac{n-2}{4}}}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}} \left(1 + \left(\frac{r}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{n-2}{2}}} \right) r^{n-1} dr \\ &= \frac{|S_1^n|}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{R\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\frac{A\epsilon^{-\frac{n-2}{4}}}{(1 + s^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) \epsilon^{\frac{n}{2}} s^{n-1} ds \\ &= \frac{\epsilon^{\frac{n}{2}} |S_1^n|}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{R\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(A \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1 + s^2)} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) s^{n-1} ds \\ &= |S_1^n| \epsilon \int_0^{R\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(A \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{(1 + s^2)} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) s^{n-1} ds \end{aligned}$$

Agora reescalando ϵ através de constantes apropriadas vemos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 = \infty$ é equivalente a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1 + s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) s^{n-1} ds = \infty \quad (2.61)$$

para alguma constante $R' > 0$. No caso onde $R' \geq 1$ temos que (2.61) é cumprido por

(2.47), e isto porque o limite de (2.61) pode ser expresso

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) s^{n-1} ds + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) s^{n-1} ds = \infty$$

Por outro lado se $R' < 1$, basta mostrar que $Z_\epsilon := \epsilon \int_{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) s^{n-1} ds$ é limitada quando $\epsilon \rightarrow 0$ pois assim pelo mesmo argumento temos o cumprimento de (2.61).

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \frac{Z_\epsilon}{\epsilon} &= \underbrace{H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) \frac{s^n}{n} \Big|_{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}}_{I_4} \\ &\quad + \underbrace{\frac{n-2}{n} \epsilon^{-\frac{n-2}{4}} \int_{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \left\{ (1+s^2)^{-\frac{n}{2}} s^{n+1} \cdot h \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] \right\} ds}_{I_5}. \end{aligned}$$

Segue que

$$I_4 = H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+\epsilon^{-1}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) \frac{\epsilon^{-\frac{n}{2}}}{n} - H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+R'^2\epsilon^{-1}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) R'^n \frac{\epsilon^{-\frac{n}{2}}}{n}$$

fazendo $C_1 = \left(\frac{1}{\epsilon + R'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \geq \left(\frac{1}{\epsilon + 1} \right)^{\frac{n-2}{4}}$ temos $I_4 \leq \frac{\epsilon^{-\frac{n}{2}}}{n} 2H(C_1 \epsilon^{\frac{n-2}{4}})$
e ainda

$$I_5 = \int_{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{s^2}{1+s^2} \right)^{\frac{n}{2}} s \cdot h \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] \geq \int_{R'\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} k \epsilon^{-\frac{1}{2}} h \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right]$$

assim de integrando e raciocinando de modo semelhante ao I_4 temos que $I_5 \leq K \epsilon^{-\frac{1}{2}} 2H(C_1 \epsilon^{\frac{n-2}{4}})$. Segue com isso que

$$\frac{Z_\epsilon}{\epsilon} \leq \frac{\epsilon^{-\frac{n}{2}}}{n} 2H(C_1 \epsilon^{\frac{n-2}{4}}) + \frac{n-2}{n} \epsilon^{-\frac{n-2}{4}} k \epsilon^{-\frac{1}{2}} 2H(C_1 \epsilon^{\frac{n-2}{4}}) \leq CH(C \epsilon^{\frac{n-2}{4}}) \epsilon^{-\frac{n}{2}}$$

e portanto

$$Z_\epsilon \leq \epsilon CH(C \epsilon^{\frac{n-2}{4}}) \epsilon^{-\frac{n}{2}}$$

mostrando assim que Z_ϵ é limitada quando $\epsilon \rightarrow 0$. Assim, concluímos a prova da proposição. ■

2.3 Aplicações

Nesta seção abordaremos algumas aplicações da ferramenta geral e da proposição de estimativa do nível minimax em algumas situações específicas.

2.3.1 O caso $n \geq 5$

Neste momento assumiremos $n \geq 5$ e além disso contaremos com mais duas hipóteses adicionais:

$$f(x, u) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0 \quad (2.62)$$

e

$$f(x, u) \geq \mu > 0 \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \in I \quad (2.63)$$

onde $\tilde{\Omega}$ é algum subconjunto aberto de Ω , $I \subset (0, +\infty)$ um intervalo aberto e $\mu > 0$ alguma constante real.

Nosso objetivo é mostrar o corolário abaixo.

Corolário 2.6. Assumindo que (2.2) a (2.6), (2.62) e (2.63) se cumprem então o problema (2.1) possui solução.

Prova: Usaremos o teorema 2.1 com a proposição 2.5. Aplicando (2.62) e (2.63) nós vemos que

$$f(x, u) \geq \mu \chi_I(u) =: h(u) \quad \text{em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0$$

onde χ_I é a função característica de I . Assim,

$$H(u) = \int_0^u h(t) dt \geq \mu \int_0^u dt = \mu u \geq \beta \quad \forall u \geq B$$

com β e B constantes positivas. Verifiquemos agora a condição (2.47). Temos que $H \left(\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) \geq \beta$ para todo s tal que $\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \geq B^{\frac{2}{n-2}}$ ou seja $s \leq C\epsilon^{-\frac{1}{4}}$, portanto para ϵ pequeno obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] s^{n-1} ds \geq \beta \epsilon \int_0^{C\epsilon^{-\frac{1}{4}}} s^{n-1} ds = \frac{\beta \epsilon}{n} (C\epsilon^{-\frac{1}{4}})^n = \frac{\beta C^n}{n} \epsilon^{1-\frac{n}{4}}$$

que vai para $+\infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, pois $n \geq 5$. Portanto pela proposição 2.5, temos a condição (2.8) e assim pelo teorema 2.1 temos a demonstração do corolário. ■

Vejamos um exemplo em que podemos aplicar este corolário.

Exemplo 2.1. O caso em que $f(x, u) = f(u)$, onde $f(u) \in C^1$ em $[0, +\infty]$ tal que

$$f(0) = 0, \quad f(u) \geq 0 \quad \text{para todo } u \geq 0, \quad f \neq 0$$

$$f'(0) < \lambda_1 \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^{2^*-1}} = 0.$$

Neste exemplo se encaixa os casos quando temos $f(u) = \lambda u$ com $0 < \lambda < \lambda_1$ e $f(u) = \mu u^q$ com $\mu > 0$ e $1 < q < 2^* - 1$.

2.3.2 O caso $n = 4$

Nos assumiremos agora que $n = 4$ e além disso as hipóteses

$$f(x, u) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0 \quad (2.64)$$

e uma das hipóteses abaixo

$$f(x, u) \geq \mu u \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \in [0, A] \quad (2.65)$$

ou

$$f(x, u) \geq \mu u \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \in [A, +\infty) \quad (2.66)$$

onde $\tilde{\Omega}$ é algum subconjunto aberto de Ω e $\mu > 0$ e $A > 0$ são constantes.

Nosso objetivo é mostrar o corolário abaixo.

Corolário 2.7. Assumindo que (2.2) a (2.6), (2.64) e uma das hipóteses entre (2.65) ou (2.66) são cumpridas então (2.1) possui solução.

Prova: Novamente usaremos o teorema 2.1 e a proposição 2.5. Temos por hipótese que

$$f(x, u) \geq \mu u \chi_I(u) = h(u) \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0$$

onde I é ou $[0, A]$ ou $A, +\infty$. Portanto obtemos pelo teorema fundamental do cálculo que ou

$$H(u) = \int_0^u h(t) dt = \frac{1}{2} \mu u^2, \quad 0 \leq u \leq A \quad (2.67)$$

ou

$$H(u) = \int_A^u h(t) dt = \frac{1}{2} \mu (u^2 - A^2), \quad u \geq A. \quad (2.68)$$

Verifiquemos agora a condição (2.47). Observemos que no caso em que (2.67) se cumpre temos para ϵ pequeno que

$$I = \epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right) s^3 ds \geq \frac{1}{2} \mu \epsilon \int_{(A\epsilon^{-\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^2 s^3 ds.$$

O limite inferior a integral do lado direito sai do fato que para $\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right) \leq A$ temos que tomar $s \geq (A\epsilon^{-\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Usando integração por partes, com a mudança $v = 1 + s^2$, obtemos

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{1}{4} \mu \epsilon^{-1} \int_{A\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{1+\epsilon^{-1}} \left(\frac{1}{v} \right)^2 (v-1) dv \\ &= \frac{1}{4} \mu \int_{A\epsilon^{-\frac{1}{2}}}^{1+\epsilon^{-1}} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} \right) dv \\ &= \frac{1}{4} \mu \left(\ln |1 + \epsilon^{-1}| + \frac{1}{1 + \epsilon^{-1}} - \ln |A\epsilon^{-\frac{1}{2}}| - \frac{1}{A\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$ e assim $I \rightarrow +\infty$ mostrando assim a condição (2.47).

Já no caso em que se cumpre (2.68), vemos que para $\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right) \geq A$, ou seja, $s \leq A^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}$, e assim

$$\begin{aligned} I &= \epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right) s^3 ds \\ &\geq \epsilon \frac{1}{2} \mu \int_0^{A^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^2 - A^2 \right] s^3 ds \\ &\geq \epsilon \frac{1}{2} \mu \int_0^{A^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^2 s^3 ds - \epsilon \frac{1}{2} \mu \int_0^{A^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}} A^2 s^3 ds \\ &= \epsilon \frac{1}{2} \mu \int_0^{A^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^2 s^3 ds - \frac{A^4 \mu}{8} \end{aligned}$$

Usando a mesma mudança de variável do primeiro caso temos

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{\mu}{4} \int_1^{A\epsilon^{-\frac{1}{2}}+1} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2} \right) dv - \frac{A^4 \mu}{8} \\ &= \ln |A\epsilon^{-\frac{1}{2}} + 1| + 1 - \frac{1}{A\epsilon^{-\frac{1}{2}} + 1} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$, concluindo assim a prova do corolário pois, temos a condição (2.47)

cumprida e pela proposição 2.5 cumpre-se a condição (2.8), logo pelo teorema 2.1 temos que o problema (2.1) possui solução. ■

Vejamos agora um exemplo no qual utilizaremos o corolário.

Exemplo 2.2. O caso quando $f(x, u) = f(u)$, onde $f(u)$ é uma função de classe C^1 em $[0, +\infty)$ tal que

$$f(0) = 0, \quad f(u) \geq 0 \quad \forall u \geq 0, \quad f'(0) < \lambda_1, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^3} = 0$$

e

$$\text{ou } f'(0) > 0 \quad \text{ou } \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} > 0$$

Neste exemplo se encaixa os casos quando temos $f(u) = \lambda u$ com $0 < \lambda < \lambda_1$ e $f(u) = \mu u^q$ com $\mu > 0$ e $1 < q < 3$

2.3.3 O caso $n = 3$

Assumiremos o caso $n = 3$, que é bem mais delicado, sendo assim apresentaremos em dois resultados diferentes, dependendo das condições de $f(x, u)$ no infinito.

Para o primeiro resultado assumiremos que

$$f(x, u) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0 \quad (2.69)$$

e

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u^3} = +\infty \quad \text{uniformemente em } \tilde{\Omega} \quad (2.70)$$

onde $\tilde{\Omega}$ é algum subconjunto não vazio e aberto de Ω . O resultado é o corolário que segue.

Corolário 2.8. Assumindo que (2.2) a (2.6), (2.69) e (2.70) são cumpridas. Então o problema (2.1) possui solução

Prova: Mais uma vez aplicaremos o teorema 2.1 juntamente com a proposição 2.5. Seja $h(u) = \inf_{x \in \omega} f(x, u)$, tal que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{h(u)}{u^3} = +\infty$. Assim nosso objetivo é mostrar que $H(u) = \int_0^u h(t) dt$ satisfaz (2.47). Assim temos primeiro que para todo $\mu > 0$ existe um $A > 0$, tal que

$$H(u) \geq \mu u^4 \quad \forall u \geq A.$$

Com efeito como $\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq A$ implica $s \leq A^{-1}\epsilon^{\frac{1}{2}}$ temos que

$$\epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] s^2 ds \geq \mu \epsilon \int_0^{A^{-1}\epsilon^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^4 s^2 ds = \mu \int_0^{A^{-1}\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{s^2 ds}{(1+s^2)^2}.$$

Passando o $\liminf$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ e logo após usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} H \left[\left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}}{1+s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] s^2 ds &\geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \int_0^{A^{-1}\epsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{s^2 ds}{(1+s^2)^2} \\ &= \mu \int_0^{\infty} \frac{s^2 ds}{(1+s^2)^2} \\ &= \frac{s^3}{3(1+s^2)^2} \Big|_0^{\infty} + \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{s^4}{1+s^2} ds \\ &\geq \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{s^4 - 1}{1+s^2} ds \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} (s^2 - 1) ds = +\infty \end{aligned}$$

Mostrando assim que H satisfaz a condição (2.47) e portanto cumpre 2.8. Portanto, pelo teorema 2.1 o problema (2.1) possui solução. ■

Exemplo 2.3. Um exemplo de problema que satisfaz as hipóteses do corolário é quando $f(x, u) = f(u)$, onde $f(u)$ é uma função de classe C^1 em $[0, +\infty)$ tal que

$$f(0) = 0, \quad f(u) \geq 0 \quad \forall u \geq 0, \quad f'(0) < \lambda_1, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^3} = 0$$

e

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^5} = 0$$

Um exemplo de função que satisfaz as condições acima é $f(u) = \mu u^q$ com $\mu > 0$ e $3 < q < 5$.

Discutiremos agora o segundo resultado. É conveniente introduzirmos o parâmetro $\mu > 0$ e considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + a(x)u + \mu g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.71)$$

Assumiremos que

$$\begin{aligned} g(x, u) &\geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \geq 0 \\ g(x, u) &> 0 \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega} \quad \forall u \in I \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde $\tilde{\Omega}$ é algum aberto não vazio de Ω e I é um intervalo aberto de $(0, +\infty)$. Desejamos então provar o corolário abaixo.

Corolário 2.9. Suponhamos que (2.3) à (2.6) e (2.72) sejam satisfeitas. Então existe um $\mu_0 \geq 0$ tal que o problema (2.71) possui solução para cada $\mu \geq \mu_0$.

Prova: Agora usaremos o teorema 2.1 diretamente. Verificaremos a condição (2.8) sem invocar o lema 2.5. Fixemos $v_0(x) = \phi(x)|x|^{-k}$ e suponhamos $0 \in \omega$ com $0 < k < \frac{1}{2}$, $\phi \in C^\infty(\omega)$, $\phi(0) = 1$ e $\|v_0\|_6 = 1$. Assim temos que dado um $\mu > 0$ segue que

$$\Psi_\mu(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{6} u^6 - \frac{a(x)}{2} u^2 - \mu G(x, u) \right\} dx,$$

onde $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt$, é o funcional energia associado ao problema (2.71). Sendo assim temos para $t \geq 0$ que

$$\begin{aligned} \Psi_\mu(tv_0) &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla tv_0|^2 - \frac{1}{6} (tv_0)^6 - \frac{a(x)}{2} (tv_0)^2 - \mu G(x, tv_0) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} t^2 \int_{\Omega} (|\nabla v_0|^2 - a(x) v_0^2) dx - \frac{1}{6} t^6 \int_{\Omega} |v_0|^6 - \mu \int_{\Omega} G(x, tv_0) dx \\ &= \frac{1}{2} t^2 A - \frac{1}{6} t^6 - \mu \int_{\Omega} G(x, tv_0) dx \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) = 0. \quad (2.73)$$

Se (2.73) ocorre, então a condição (2.8) é satisfeita para um μ suficientemente grande, e o resultado segue do teorema (2.1).

Verifiquemos (2.73). Primeiramente, note que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi_\mu(tv_0) = -\infty.$$

Por hipótese, $\mu \int_{\Omega} G(x, tv_0) dx \geq 0$ e assim $\sup_{t \geq 0} \Psi_\mu(tv_0)$ é alcançado para algum t_μ tal que

$$\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial t}(t_\mu) = t_\mu A - t_\mu^5 - \mu \int_{\Omega} g(x, t_\mu v_0) v_0 = 0 \quad (2.74)$$

Assim,

$$t_\mu A - t_\mu^5 \geq 0 \Rightarrow t_\mu A \geq t_\mu^5 \Rightarrow A \geq t_\mu^4 \Rightarrow t_\mu \leq A^{\frac{1}{4}}$$

Logo t_μ é limitado e não vai para $+\infty$ ainda que $\mu \rightarrow +\infty$, donde

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} t_\mu = 0 \quad (2.75)$$

pois caso contrário existiria uma sequência (μ_j) tal que $t_{\mu_j} \rightarrow l > 0$ quando $\mu_j \rightarrow +\infty$ e por (2.74) teríamos $\int_\Omega g(x, v_0)v_0 = 0$ o que contradiz (2.72) e a escolha do v_0 .

Finalmente observemos que

$$\sup_{t \geq 0} \Psi_\mu(tv_0) \leq \frac{1}{2}At_\mu^2 - \frac{1}{6}t_\mu^6$$

Passando o limite com $\mu \rightarrow +\infty$ temos por (2.75) que

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) \leq 0,$$

mostramos (2.73). ■

Exemplo 2.4. Este corolário pode ser aplicado para o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^5 + \mu u^q & em & \quad \Omega & \quad com \quad 1 < q \leq 3 \\ u &> 0 & em & \quad \Omega, \\ u &= 0 & em & \quad \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.76)$$

E assim pelo corolário existe μ_0 que depende apenas de q e Ω tal que o problema é solucionável para cada $\mu \geq \mu_0$.

Conclusão

Assim finalizamos nosso trabalho, cumprindo o objetivo de trazer a luz apenas a ponta do iceberg, pois há muito o que se estudar sobre este assunto.

O artigo do Brezis-Nirenberg [1] de 1983 foi o pontapé inicial para o estudo dos problemas com expoente crítico de Sobolev e por isso nosso trabalho se torna uma ferramenta indispensável para aqueles que desejam enveredar por esta linha de pesquisa, já que tornamos o mais claro possível os principais argumentos do artigo.

Apêndice A

Resultados preliminares principais

A.1 Resultados de convergências

Teorema A.1. *(Teorema da convergência de Vitali) Seja Ω um conjunto de medida finita e seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, tais que $f_n \rightarrow f$ q.t.p., então f é integrável e $\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$ se, somente se $(\int f_n)$ são uniformemente absolutamente contínuas, ou seja dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $m(A) < \delta$ então $\left| \int_A f_n \right| < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Este resultado é apresentado e demonstrado de forma completa em [3].

Teorema A.2. *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções $(f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R})$ tais que $f_n \rightarrow f$ q.t.p.. Se existir uma função integrável $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p., então as funções f_n e f são integráveis e*

$$\int_{\Omega} f_n \rightarrow \int_{\Omega} f$$

Este resultado que pode ser encontrado sua demonstração em [3] ou em [4]

A.2 Multiplicador de Lagrange

Teorema A.3. *(Teorema do multiplicador de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, F e G funções de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, e $x_0 \in X$ um ponto crítico de F restrito ao conjunto*

$$M = \{x \in X; G(x) = 0\}.$$

Se $G'(x_0) \neq 0$ então existe $\mu \in \mathbb{R}$, tal que

$$F'(x_0) = \mu G'(x_0).$$

Isto é

$$F'(x_0)w = \mu G'(x_0)w; \quad \forall w \in X$$

Este resultado e até de forma mais geral pode ser encontrado em [5].

A.3 Princípios do máximo

As demonstrações de ambos os princípios podem ser encontradas em [8].

Teorema A.4. (*princípio do máximo fraco*) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $-\Delta u \geq 0$ ou $(-\Delta u \leq 0)$ em Ω . Então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \text{ou} \quad \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right)$$

respectivamente.

Teorema A.5. (*princípio do máximo forte*) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto. Seja L um operador estritamente elíptico tal que $c = 0$. Suponha que u satisfaz $Lu \geq 0$ [$Lu \leq 0$] em Ω . Se u atinge o seu máximo [mínimo] no interior de Ω , então u é constante.

Se $c \leq 0$ e u atinge um máximo não-negativo [mínimo não-positivo] no interior de Ω , então u é constante.

Independentemente do sinal de c , se u atinge um máximo igual a 0 [mínimo igual a 0] no interior de Ω , então u é constante.

A.4 Outros resultados

Teorema A.6. Se E é um espaço de Banach Reflexivo e (x_n) é uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente para algum $x \in E$.

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [4]

Lema A.7. Lema de Brezis-Lieb: Seja $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ limitada, com $1 \leq p \leq \infty$ tal que $u_k \rightarrow u$ q.t.p. em Ω então:

$$\text{i) } u \in L^p(\Omega) \quad \text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} (||u_k||_p^p - ||u_k - u||_p^p) = ||u||_p^p.$$

Este lema pode ser encontrado em [10].

Teorema A.8. (*Fórmula da Coárea*) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e integrável então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S_r} f(r) ds \right) dr$$

onde S_r é a esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio r .

A demonstração deste teorema bem como mais informações sobre casos mais gerais pode ser encontradas em [12]

Teorema A.9. (*integração por partes*) Sejam $w, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 então

$$\int_a^b w \cdot dv = (u \cdot v)(b) - (u \cdot v)(a) - \int_a^b v \cdot dw$$

Este teorema é facilmente demonstrado como uma aplicação direta do Teorema Fundamental do Cálculo e a utilização da derivada do produto e pode ser encontrado em alguns livros de Cálculo diferencia e integral, assim como o teorema da mudanças de variável que omitimos aqui por se tratar de um resultado bem conhecido.

Teorema A.10. (Rellich-Kondrachov) Suponhamos que Ω é limitado e de classe C^1 . Então temos as seguintes imersões compactas.

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*]; \quad \text{onde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{se} \quad p < N \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty); \quad \text{se} \quad p = N \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}). \quad \text{se} \quad p > N \end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersão compacta para todo p e todo N

A demonstração deste teorema pode ser vista em detalhes em [4] (teorema 9.16, pg.285)

Teorema A.11. (Identidade de Pohozaev) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com primitiva $G(u) = \int_0^u g(v)dv$ e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a solução do problema

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{A.1}$$

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \tag{A.2}$$

e o domínio $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$, então vale a identidade

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - n \int_{\Omega} G(u) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu do = 0$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior.

A demonstração deste teorema é encontra em [6] (Lema 1.4, Pg.171)

Referências Bibliográficas

- [1] BREZIS, H. e NIRENBERG, L., **Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents**, Communications on Pure and Applied Mathematics 36 (1983), no. 4, 437-477.
- [2] KAZDAN, J. e WARNER, F., **Remarks on some quasilinear elliptic equations**, Comm. Pure Appl.Math. 28, 1975, pp. 567-597.
- [3] ISNARD, C., **Introdução à medida e integração**, 2.ed.Rio de Janeiro:IMPA,2009
- [4] BREZIS, H.,**Functional Analysis,Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, New York:Springer, 2011.
- [5] COSTA D.G.,**An Invitation to Variational Methods In Differential Equations**, Boston:Birkhäuser, 2007
- [6] STRUWE, M., **Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems**, Springer, 4th Edition, 2008.
- [7] SAMUAYS M.A.,**O Problema de Brezis-Nirenberg**, Curitiba: UFPR, 2011 Dissertação (mestrado em matemática Aplicada)
- [8] GILBARG, D. e TRUDINGER, N. S., **Elliptic partial differential equations of second order**, vol. 224, Springer Verlag, 2001.
- [9] TALENTI, G., **Best constants in Soboleu inequality**. Annali di Mat. 110, 1976, pp. 353-372.
- [10] BREZIS, H. e LIEB E. H.,**A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals**, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), pp. 486-490.
- [11] WILLEM M., **Minimax theorems**, Boston:Birkhäuser, 1997.

- [12] EVANS L. C.. **Partial differential equations** (graduate studies in mathematics, vol. 19), American Mathematical Society, 2009.