

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Propriedade Alternada do Operador de Dirichlet-Neumann

José Eduardo Jesus da Silva

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Propriedade Alternada do Operador de Dirichlet-Neumann

por

José Eduardo Jesus da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas

22 de julho de 2010
João Pessoa-PB

Propriedade Alternada do Operador de Dirichlet-Neumann

por

José Eduardo Jesus da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

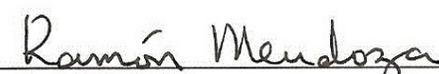
Aprovada por:



Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa -UFPB



Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada - UFPE

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

22 de julho de 2010

S586p *Silva, José Eduardo Jesus da.*

Propriedade alternada do operador de Dirichlet-Neumann / José Eduardo Jesus da Silva. -- João Pessoa: [s.n.], 2010.

66 f.: il.

Orientador: Pedro Antonio Gómez Venegas.

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Propriedade alternada. 3. Funcional de Dirichlet-Neumann. 4. Princípio do Máximo. 5. Núcleo.

Empurrai a minha porta,
a tranca já retirei,
não tem chave de fechar.
Vinde essa brasa apagar,
nesse fogo vos queimar,
trazei um pouco de amor
que eu muito tenho pra dar.

(Lamento de Glória.)

(Jorge Amado - Gabriela, Cravo e Canela.)

*Aos meus amores:
Pedro, Ida e Jemya.*

Agradecimentos

À Deus, em quem acredito piamente como Criador da vida e da estrutura à qual chamamos Universo. A este, Ele nos possibilita desvendar de forma que nos achamos maravilhados.

Aos meus pais, *Cassiano* e *Celina*, meus maiores exemplos de vida. Agradeço-os pelos ensinamentos, pelo imenso amor e apoio contínuo em minha trajetória, principalmente pela coragem e amor explicitados ao se privarem de estar comigo na minha adolescência, em prol de meus estudos.

Ao meu professor e orientador *Pedro Antonio Gómez Venegas*, pela qualidade da orientação, que se mostrou, principalmente, na disponibilidade de esclarecer sempre as minhas dúvidas.

À minha tia Edylmar Messeder e ao meu tio Irenio Lopes por me receberem em sua casa na minha adolescência, proporcionando as condições para que eu pudesse iniciar os meus estudos. Na ausência dessa contribuição, dificilmente eu conheceria a Escola Oficial ou uma Universidade.

Aos meus amados irmãos Elenilton Silva, Jociane Silva e Luciana Silva pelas demonstrações sinceras de carinho, amizade e amor.

Ao casal de amigos Cláudia Celeste e Gustavo Veloso, pelo apoio constante à mim e à minha família, durante esses dois anos, principalmente em momentos de dificuldades extremas.

Aos professores da graduação na UESC - BA, especialmente Erinalva Calasans, José Reis e Eduardo Oliveira pelos primeiros ensinamentos de Matemática.

À UESB-BA e aos colegas do Departamento de Química e Exatas (DQE- UESB) pelo incentivo e presteza em proporcionar de modo transparente as condições para a minha liberação para a Pós-Graduação, em especial aos amigos Cláudia Lopes, Edson Cardoso (in memorian), Márcia graci, Pepeu e demais membros da Área de Matemática.

Ao Colégio Estadual Luiz Viana Filho, em especial ao professor Robson Costa, pelas contribuições decisivas para a minha liberação para a Pós-Graduação.

Aos professores da Pós-Graduação *Daniel Marinho Pellegrino*, *João Marcos do Ó*, *José Gomes de Assis*, *Lizandro Sanchez Challapa*, *Pedro Antonio Hinojosa Vera* e *Uberlândio Batista Severo*, pelo aprendizado proporcionado durante o curso, muitos dos quais, em belas exposições de aulas que estarão em minha memória durante as minhas exposições futuras.

À Graça, secretária da Pós-Graduação, pelo carinho e bom trato nas questões administrativas.

Aos professores da Banca Examinadora, pelo aceite ao convite e pelas sugestões apresentadas.

A todos os meus colegas da pós-graduação, pelos ensinamentos em conversas, companheirismo e discussões de muitas dúvidas durante o curso. Em especial: Adriano Medeiros, Ana Cecília, Andréa Moura, Diego Souza, Luís Saria, Marcos Ferreira, Maurício Cardoso, Pitágoras Carvalho, Simeão Targino e Thiago Velanga.

Por fim, aos amigos de república: Anderson Valença, Disson Prazeres, Elielson Pires e Francisco Elano. Afirmo que aprendi bastante compartilhando matemática, diversidade cultural, brigas, brincadeiras, risos e "frescuras" diferenciadas.

Resumo

Neste trabalho dissertamos sobre Propriedades do Funcional de Dirichlet-Neumann para uma equação de condutividade numa variedade diferenciável bidimensional com bordo. Utilizamos várias vezes o Princípio do Máximo para concluir que esse Funcional tem uma Propriedade Alternada. À partir dessa propriedade, verificamos que o Núcleo do Funcional satisfaz um conjunto específico de desigualdades. Por fim, verificamos que essas desigualdades implicam na Propriedade Alternada do Núcleo do Funcional.

Palavras-Chave: Propriedade Alternada. Núcleo. Funcional de Dirichlet-Neumann. Princípio do Máximo.

Abstract

In this work we talk about properties of the Dirichlet-to-Neumann map for the conductivity equation in a smooth manifold with boundary of \mathbb{R}^2 . We use several times the Maximum Principle to conclude a Alternating Property of the Dirichlet-to-Neumann map. Using this property, we find that the Kernel satisfies a given set of inequalities. Finally, we note that these inequalities imply the Alternating Property of the Kernel of the Dirichlet-to-Neumann map.

Key-Words: Alternating Property Kernel. Dirichlet-to-Neumann Map. Maximum Principle.

Sumário

1	Resultados preliminares	1
1.1	O Operador de Laplace-Beltrami	1
1.2	O funcional de Dirichlet-Neumann	4
2	Principais Resultados	10
2.1	Teorema Principal	10
2.2	A Propriedade Alternada	12
2.3	A desigualdade Fraca	15
2.4	A desigualdade Forte	21
2.5	O Lema de Hopf	26
2.6	A propriedade de Variação Decrescente	28
A	Variedade Diferenciável	42
A.1	Variedade com Bordo	43
A.2	Variedade Riemanniana	46
A.3	Resultados Clássicos	50

Notação e Terminologia

Neste trabalho faremos uso da seguinte simbologia:

- \mathbb{R}^n o espaço euclidiano.
- \mathbb{H}^n denotará o semi-espaço superior do \mathbb{R}^n .
- M, N, Ω variedades diferenciáveis.
- O espaço tangente a uma variedade M em um ponto $p \in M$ será denotado por $T_p M$
- Representaremos por TM o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M e por T^*M o fibrado cotangente.
- g denotará uma métrica Riemanniana sobre uma variedade M .
- F^*g representará o pull-back de uma métrica Riemanniana g .
- Δ_g representará o operador de Laplace-Beltrami.
- id_X denotará o operador identidade em X .
- Denotaremos por $C^\infty(M)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis de M em \mathbb{R} .
- $C_0^\infty(M)$ denotará o espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre M , cujo suporte é compacto.
- Λ_g denotará o operador de Dirichlet-Neumann.
- $\partial\Omega$ denotará a fronteira da variedade Ω .
- $\bar{\Omega}$ denotará o fecho do conjunto Ω , isto é, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Introdução

A presente dissertação tem como referência principal o Artigo de D. Ingerman e J. Morrow [9]. Nela, estudamos a propriedade alternada do funcional de Dirichlet-Neumann para uma variedade bidimensional Ω , conexa e com fronteira $\partial\Omega$, C^∞ .

Em geral, o funcional de Dirichlet-Neumann, Λ , conforme definição na página 4, está associado a um operador de modo que dada uma condição de fronteira, resolvemos o problema de Dirichlet e, para a única solução, associamos a condição de Neumann.

Em particular, para cada g métrica Riemanniana em $\bar{\Omega}$, podemos associar o operador de Laplace-Beltrami, Δ_g , o qual induz o funcional de Dirichlet-Neumann, Λ_g de Δ_g sobre $\partial\Omega$.

No problema inverso é conhecido o operador Λ_g em C^∞ . Pergunta-se: será que podemos determinar a métrica g em Ω ?

Esse problema está ligado diretamente aos estudos de Calderón, veja [3]. Possui grande importância, não apenas na Matemática, mas também, em muitas situações na medicina e na indústria de petróleo, onde se procura a utilização de testes não-invasivos para fazer estudos do interior de uma determinada região.

Existem basicamente dois modelos para o estudo dos problemas inversos: o discreto (sobre grafos) e o contínuo (sobre variedades).

Aqui, estamos interessados no modelo contínuo, em particular, no estudo de propriedades do funcional de Dirichlet-Neumann e de seu Núcleo de Schwartz.

As Propriedades que estudamos, as quais serão explicitadas no decorrer do texto, tem como motivação os estudos de Ingerman em [6] para o modelo discreto. Entretanto, não chegamos a fazer comparações entre esses modelos. O leitor interessado em situações desse tipo poderá consultar [8].

Objetivando tornar suave a leitura do texto, preferimos organizá-lo da seguinte forma:

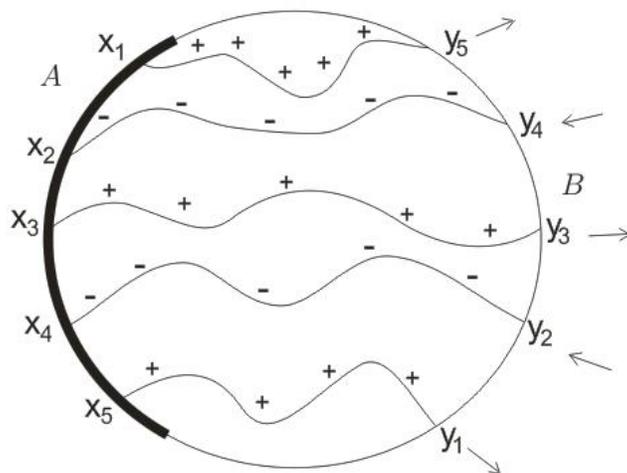
Deixamos todos os pré-requisitos sobre o estudo de variedades, bem como os resultados clássicos necessários à leitura do texto para o apêndice.

No Capítulo 1, apresentamos a definição do operador de Laplace-Beltrami numa variedade riemanniana e o funcional de Dirichlet-Neumann com suas propriedades associadas à métrica riemanniana. Além disso, definimos o Núcleo de Schwartz do funcional, apresentamos algumas de suas caracterizações e guiamos o leitor interessado em aprofundar detalhes à uma bibliografia conveniente.

No Capítulo 2, dissertamos sobre os resultados principais do trabalho. Subdividimos o capítulo em seis seções, conforme o artigo em [9]. Assim, na primeira seção

apresentamos as definições iniciais e o teorema principal a ser tratado. Na segunda, apresentamos a Propriedade Alternada, onde se utiliza do Princípio Máximo várias vezes para a prova.

A figura a seguir, uma adaptação de [8], dá uma ideia do procedimento utilizado para a demonstração. Na figura, A e B são arcos conexos disjuntos de um círculo do \mathbb{R}^2 e o suporte da função f está contido no arco A . Ao confeccionar a figura, preferimos alterar, em relação ao enunciado no teorema 2.2.1, a maneira como a função se alterna, a fim de não levar o leitor a pensar que estamos tratando especificamente de um círculo. De qualquer forma, de maneira construtiva, conseguimos encontrar curvas que não se interceptam ligando os arcos B e A .



Nas seções 2.3 e 2.4 dissertamos sobre a demonstração do Teorema Principal. Tal demonstração também é construtiva. Todavia, é relativamente longa. Portanto, aconselhamos o leitor a prestar atenção nos detalhes da técnica utilizada. À partir daí, de posse dos resultados obtidos, apresentamos duas consequências importantes do Teorema Principal. A última delas, mostra que o núcleo de Schwartz do funcional de Dirichlet-Neumann tem a propriedade alternada.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo dissertamos sobre o operador de Laplace e sobre o funcional de Dirichlet-Neumann. Quanto ao operador de Laplace, começamos com a definição usual que conhecemos para o \mathbb{R}^n e prosseguimos abordando os objetos necessários à sua caracterização para uma variedade riemanniana qualquer. Em seguida, definimos o funcional de Dirichlet-Neumann e apresentamos algumas de suas propriedades.

1.1 O Operador de Laplace-Beltrami

Desejamos definir o *operador de Laplace-Beltrami* ou *Laplaciano* para funções C^∞ sobre uma variedade riemanniana qualquer. Nesse caso, se faz necessário que a nossa definição não dependa do sistema de coordenadas escolhido. Para tanto, a nossa definição considerará os operadores gradiente e divergente em uma variedade riemanniana de forma que, em \mathbb{R}^n , a definição coincidirá com a usual.

Definição 1.1.1 *Dada uma variedade riemanniana (M, g) , defina o mapa fibrado*

$$\begin{aligned} \widehat{g}: TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto \widehat{g}(X) = g_p(X, Y) \end{aligned} \text{ ,}$$

onde $X, Y \in T_pM$ e

$$\begin{aligned} \widehat{g}(X): T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Y &\longmapsto \widehat{g}(X)(Y) = g_p(X, Y) \end{aligned} \text{ ,}$$

Aqui, dizer que \widehat{g} é um mapa fibrado significa que estamos considerando os fibrados vetoriais C^∞ :

$$\pi: TM \longrightarrow M \text{ e } \pi^*: T^*M \longrightarrow M$$

De modo que $\pi = \pi^* \circ \widehat{g}$. Os conjuntos U e V são abertos de M e a linearidade de $\widehat{g}|_{\pi^{-1}(U)}$ ocorre para todo $p \in M$ com $p \in U$.

Além disso, não é difícil verificar que \widehat{g} é um isomorfismo de espaços vetoriais. Assim, \widehat{g} é um isomorfismo entre TM e T^*M .

Vamos utilizar o isomorfismo canônico \widehat{g} para definir o campo vetorial gradiente sobre uma variedade riemanniana (M, g) .

Definição 1.1.2 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Dada $f \in C^\infty(M)$, definimos o campo de vetores $\text{grad}_g f$, chamado gradiente de f , por $\text{grad}_g f = \widehat{g}^{-1}(df)$, onde df é o diferencial de f .*

Proposição 1.1.3 *Em coordenadas locais, o operador gradiente é dado por:*

$$\text{grad}_g f = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \text{ onde } g^{ij} \text{ é a inversa de } g_{ij}.$$

Demonstração: Seja $X \in T_p M$. Então, dada $f \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}_g f|_p, X \rangle_g &= g_p \langle \text{grad}_g f|_p, X \rangle = \widehat{g}(\text{grad}_g f)_p(X) \\ &= \widehat{g}(\widehat{g}^{-1}(df)_p)(X) = df_p(X) = X_p(f). \end{aligned}$$

Assim, $\text{grad} f$ é o único campo de vetores que satisfaz $g(\text{grad} f, X) = X(f)$. Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} \text{grad}_g f &= \widehat{g}^{-1}(df) \\ &= \widehat{g}^{-1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \widehat{g}^{-1}(dx^i) = \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

■

Agora, apresentamos o operador divergente.

Definição 1.1.4 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana de dimensão n . Chamamos divergente ao operador que a cada campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ associa uma função $C^\infty(M)$. Em coordenadas locais, o divergente é dado por:*

$$\begin{aligned} \text{div}_g : TM &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \text{div}_g(X) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det(g)}) \end{aligned}$$

Verifica-se ainda que o operador divergente é independente da escolha de coordenadas. Isto é, dadas as coordenadas locais $\alpha = (x^1, \dots, x^n)$ e $\beta = (y^1, \dots, y^n)$ em um aberto $U \subset M$, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det(g)}) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial y^j} (Y^j \sqrt{\det(g)}),$$

onde $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$.

De posse das definições dos operadores gradiente e divergente, definimos o operador de Laplace-Beltrami.

Definição 1.1.5 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Chamamos de Operador de Laplace-Beltrami ao operador Δ_g , dado por:*

$$\begin{aligned} \Delta_g : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \Delta_g f = -\operatorname{div}_g \circ \operatorname{grad}_g f \end{aligned}$$

Como os operadores gradiente e divergente são independentes da escolha de coordenadas, Δ_g também é. Assim, em coordenadas locais, o operador de Laplace-Beltrami é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= -\operatorname{div}_g \circ \operatorname{grad}_g f \\ &= -\operatorname{div}_g \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \sqrt{\det(g)} \end{aligned}$$

O operador de Laplace-Beltrami é linear. De fato. Dados $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \Delta_g (af_1 + bf_2) &= -\operatorname{div}_g \circ \operatorname{grad}_g (af_1 + bf_2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} (af_1 + bf_2) \sqrt{\det(g)} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(a \sum_i g^{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x^i} + b \sum_i g^{ij} \frac{\partial f_2}{\partial x^i} \right) \sqrt{\det(g)} \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i g^{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x^i} \sqrt{\det(g)} \right) - \frac{b}{\sqrt{\det(g)}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i g^{ij} \frac{\partial f_2}{\partial x^i} \right) \sqrt{\det(g)} \\ &= a\Delta_g f_1 + b\Delta_g f_2 \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos dois resultados importantes do operador de Laplace-Beltrami com relação às métricas λg e f^*g .

Proposição 1.1.6 *Seja (Ω, g) uma variedade riemanniana bidimensional, compacta e orientável, com bordo C^∞ , $\lambda \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$. Então, $\Delta_{\lambda g} = \lambda^{-1} \Delta_g$.*

Demonstração: Seja $u \in C^\infty(\Omega)$. Então, calculando $\Delta_{\lambda g}$, temos:

$$\Delta_{\lambda g} u = \frac{-1}{\sqrt{\det(\lambda g)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} ((\lambda g)^{ij} \sqrt{\det(\lambda g)} \frac{\partial}{\partial x^j} u)$$

Como $\det(\lambda g) = \lambda^2 \det(g)$ e $(\lambda g)^{ij} = \lambda^{-1} g^{ij}$, segue que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda g} u &= \frac{-1}{\sqrt{\lambda^2 \det(g)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} (\lambda^{-1} g^{ij} \sqrt{\lambda^2 \det(g)} \frac{\partial}{\partial x^j} u) \\ &= \frac{-1}{\lambda \sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} (\lambda^{-1} g^{ij} \lambda \sqrt{\det(g)} \frac{\partial}{\partial x^j} u) \\ &= \frac{-1}{\lambda \sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ij} \sqrt{\det(g)} \frac{\partial}{\partial x^j} u) \\ &= \frac{1}{\lambda} \Delta_g u \end{aligned}$$

■

Proposição 1.1.7 *Sejam Ω_1 e Ω_2 variedades diferenciáveis orientadas, compactas e com fronteira C^∞ , $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ um difeomorfismo e $g \in \mathcal{M}(\Omega_2)$. Então*

$$\Delta_{f^*g} = f^* \circ \Delta_g \circ (f^{-1})^*$$

Demonstração: Para uma prova, consulte [11] ou [16].

■

1.2 O funcional de Dirichlet-Neumann

Seja Ω uma variedade diferenciável, compacta e com bordo, $Op(\partial\Omega)$ o conjunto dos operadores lineares de $C^\infty(\partial\Omega) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega)$ e $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço das métricas riemannianas sobre Ω . Então, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.1 *O funcional de Dirichlet-Neumann é a aplicação*

$$\Lambda : \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow Op(\partial\Omega) \\ g \longmapsto \Lambda_g \quad ,$$

tal que:

$$\Lambda_g(f) = \frac{\partial u}{\partial \nu_g}$$

onde v_g é o vetor normal unitário exterior em $\partial\Omega$ e u é a única solução do problema de Dirichlet para o Δ_g com condição de fronteira f . Isto é:

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0, & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (1.1)$$

Seja \mathcal{W} o espaço das funções $C^\infty(\Omega)$ que se anulam em $\partial\Omega$. Então, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.2 *Seja Ω uma variedade diferenciável bidimensional. Então*

$$\Lambda_{e^{2\varphi}g} = \Lambda_g \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{W}.$$

Essa proposição dá uma condição para que as métricas g e $e^{2\varphi}g$ estejam relacionadas.

Demonstração: Para uma prova consulte [11] ou [16]. ■

Definição 1.2.3 *Sejam Ω uma variedade diferenciável bidimensional e $C_0^\infty(\Omega)$ o subespaço de $C^\infty(\Omega)$ das funções que possuem suporte compacto em Ω . Chamamos espaço das distribuições sobre Ω e indicamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ ao espaço dual topológico $(C_0^\infty(\Omega))'$.*

A definição nos diz que uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo $T : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para qualquer sequência $(\varphi_n) \rightarrow \varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$, temos que:

$$T((\varphi_n)) \rightarrow T(\varphi)$$

A convergência no espaço $C_0^\infty(\Omega)$ deve ser entendida no seguinte sentido:

Uma sequência de funções (φ_n) , $n \in \mathbb{N}$ converge para φ quando as φ_n 's e a φ tem todos os seus suportes contidos num compacto $K \subset \Omega$ e $D^\alpha \varphi_n$ converge uniformemente em K para $D^\alpha \varphi$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^p$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ é um multi-índice e D^α é a derivada parcial:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_p}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}$$

Para mais detalhes sobre a teoria de distribuições, consulte [17].

Definição 1.2.4 *O núcleo de um mapa contínuo de Dirichlet-Neumann é a distribuição $K(\phi, \theta)$, $K \in [C_0^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega)]'$, tal que:*

$$\Lambda f(\phi) = \int_0^{2\pi} K(\phi, \theta) f(\theta) d\theta.$$

A existência de K é garantida pelo fato de Λ ser um operador pseudo-diferencial.

Para mais detalhes sobre operadores pseudo-diferenciais consulte [20].

A seguir, apresentamos sem prova, dois resultados de [11].

Lema 1.2.5 *Seja $\bar{\Omega}$ uma variedade compacta de dimensão 2 e com bordo C^∞ . Sejam $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $F \in D(\bar{\Omega})$ e $g \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$. Então:*

$$\Lambda_{F^*e^{2\varphi}g} = F^* \circ e^{-\varphi} \circ \Lambda_g \circ (F^{-1})^*.$$

onde F^* denota o pullback de F e $D(\bar{\Omega})$ representa o grupo dos difeomorfismos de $\bar{\Omega}$.

Lema 1.2.6 *Seja K_g o núcleo de Schwartz do operador Λ_g . Então, para qualquer variedade compacta $\bar{\Omega}$ de dimensão 2 e com bordo C^∞ , temos:*

$$K_{F^*e^{2\varphi}g}(x, y) = e^{-\varphi \circ F(x)} K_g(F(x), F(y)) F'(y).$$

onde F' representa a única função de valor real sobre $\partial\Omega$ tal que $F_*E = F'E \circ F$, F_* o push-forward de F e E é um campo vetorial unitário para a métrica g sobre $\partial\Omega$.

Para uma demonstração desses dois Lemas consulte [11].

A seguir, considerando a variedade \mathbb{R} , apresentamos um exemplo do cálculo de $F_*E = F'E \circ F$ para um campo vetorial unitário E em $T_p\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.7 *Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $E = \frac{d}{dt}$ um campo vetorial unitário em \mathbb{R} . Determinar f_*E .*

Solução 1.2.8 *Como estamos trabalhando com uma função definida em \mathbb{R} , temos que $f_*E = \lambda E \circ f$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Queremos determinar λ . Assim, usando a definição de push-forward em A.3, temos que: $f_*E|_p : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, para toda função $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, segue que:*

$$(f_*E|_p)h = E|_p(h \circ f).$$

Seja $p = t_0$. Tomando a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = t$ e uma curva $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) = t_0 + t$, temos por um lado que:

$$\begin{aligned} (f_*E|_{t_0})h &= f_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)h \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(h \circ f) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}h(f(t_0 + t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(t_0 + t) \\ &= f'(t_0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(f(t_0))h &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=f(t_0)}\right)h \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(h(f(t_0) + t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(t_0) + t) = 1 \end{aligned}$$

Isso conclui que $\lambda = f'(t_0)$.

Logo, mostramos que $f_*E|_{t_0} = f'(t_0)(E \circ f)(t_0)$.

O Núcleo de Schwartz do operador Λ_g está determinado pela Função de Green $G(w, z)$ do Laplaciano Δ_g com condição de Dirichlet sobre $\partial\Omega$ pela seguinte identidade:

Lema 1.2.9 *O Núcleo de Schwartz $K_g(w, z)$ do operador Λ_g , sendo g uma métrica, é dado para $w, z \in \partial\Omega$, $w \neq z$ por:*

$$K_g(w, z) = \partial_\nu \partial_{\nu'} G(W, Z)|_{W=w, Z=z}.$$

em que ∂_ν , $\partial_{\nu'}$ são, respectivamente, os campos vetoriais unitários apontando para o interior no bordo nas variáveis W e Z .

Demonstração: Veja [12]. ■

Observação 1.2.0.1 *Quando Ω é o disco unitário no plano, e g a métrica euclidiana, a função de Green para Δ_u é:*

$$G(re^{i\theta}, se^{i\beta}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r^2 - 2rs \cos(\theta - \beta) + s^2).$$

que podemos escrever

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(d_g(x, y)),$$

onde $d_g(x, y)$ é a distância geodésica entre x e y .

Assim, o núcleo de Schwartz de Λ_u é:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=1; r=1} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \cos(\theta - \beta)}.$$

A seguir apresentamos alguns resultados de [4] para o núcleo de Schwartz do operador Λ_g .

Primeiramente, apresentamos um resultado de [1], que dá uma fórmula explícita para a função de Green do anel $A_R = \{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{R} < |z| < R\}$. Seja g_0 uma métrica que

é conforme à métrica euclidiana sobre A_R . Em coordenadas polares g_0 pode ser escrita da forma:

$$g_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2). \quad (1.2)$$

Então a derivada normal de $u \in C^\infty(\bar{A}_R)$ com respeito a g_0 sobre $|z| = R$ é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{g_0}} \Big|_{\rho=R} = \frac{2R^2}{1+R^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}.$$

Analogamente, a derivada normal de u com respeito a g_0 sobre $|z| = \frac{1}{R}$ é:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{g_0}} \Big|_{\rho=\frac{1}{R}} = \frac{-2R^2}{1+R^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\frac{1}{R}}.$$

Portanto, a função de Green de \bar{A}_R é dada por:

$$\begin{aligned} G(\rho e^{i\theta}, r e^{i\alpha}) &= \ln(rR) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n + (-r)^n}{R^n} \frac{\rho^n + (-\rho)^{-n}}{R^n + (-R)^{-n}} \cos n(\theta - \alpha) \\ &\quad - \ln |\rho e^{i\theta} - r e^{i\alpha}| - \ln \left| \frac{1}{\rho} e^{i(\theta+\pi)} - r e^{i\alpha} \right|, \end{aligned}$$

em que $\frac{1}{R} \leq \rho \leq R$, $\frac{1}{R} < r < R$, $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \alpha < 2\pi$.

Lema 1.2.10 *O Núcleo de Schwartz do operador Λ_{g_0} , onde $g_0 \in \mathcal{M}(\bar{A}_R)$ é dada na forma 1.2 é dado por:*

$$\begin{aligned} K_{g_0}(R e^{i\theta}, R e^{i\alpha}) &= \frac{4R^2}{(1+R^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{R^n - (-R)^{-n}}{R^n} \frac{R^n - (-R)^{-n}}{R^n + (-R)^{-n}} \cos n(\theta - \alpha) \\ &\quad + \frac{2R^2}{(1+R^2)^2} \frac{1}{1 - \cos(\theta - \alpha)} - \frac{4R^4}{(1+R^2)^2} \frac{R^{-4} \cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta - \alpha) + 2R^{-2}}{(R^{-2} + 2 \cos(\theta - \alpha) + R^2)^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ou ainda por:

$$\begin{aligned} K_{g_0}(R^{-1} e^{i\theta}, R^{-1} e^{i\alpha}) &= \frac{4R^2}{(1+R^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\left(\frac{1}{R}\right)^n - \left(-\frac{1}{R}\right)^{-n}}{R^n} \frac{\left(\frac{1}{R}\right)^n - \left(-\frac{1}{R}\right)^{-n}}{R^n + (-R)^{-n}} \cos n(\theta - \alpha) \\ &\quad + \frac{2R^2}{(1+R^2)^2} \frac{1}{1 - \cos(\theta - \alpha)} - \frac{4}{(1+R^2)^2} \frac{R^4 \cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta - \alpha) + 2R^{-2}}{(R^2 + 2 \cos(\theta - \alpha) + R^{-2})^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

A igualdade acima deve ser vista no sentido das distribuições.

Observação 1.2.11 *Assim, o Núcleo de Schwartz do operador Λ_{g_0} pode ser escrito como:*

$$K_{g_0}(Re^{i\theta}, Re^{i\alpha}) = H(Re^{i\theta}, Re^{i\alpha}) - \frac{2R^2}{(1+R^2)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)} \text{ sobre } |z| = R.$$

e

$$K_{g_0}(Re^{i\theta}, Re^{i\alpha}) = H(R^{-1}e^{i\theta}, R^{-1}e^{i\alpha}) - \frac{2R^2}{(1+R^2)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos(\theta-\alpha)} \text{ sobre } |z| = \frac{1}{R}$$

onde H é uma função C^∞ dada por:

$$H(Re^{i\theta}, Re^{i\alpha}) = \frac{4R^2}{(1+R^2)^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n(\theta-\alpha) - \frac{R^{-2} \cos(\theta-\alpha) + R^2 \cos(\theta-\alpha) + 2}{(R^{-2} + 2 \cos(\theta-\alpha) + R^2)^2} \right\}.$$

Capítulo 2

Principais Resultados

Nesse capítulo dissertamos sobre a caracterização do núcleo do funcional de Dirichlet-Neumann para uma região planar. Começamos com algumas definições e apresentamos o principal teorema do trabalho.

2.1 Teorema Principal

Seja Ω um conjunto relativamente compacto, simplesmente conexo em \mathbb{R}^2 com bordo C^∞ . Seja $\gamma : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $\gamma(p) > 0$. Seja f uma função definida sobre $\partial\Omega$. Então existe uma única função u definida sobre $\overline{\Omega}$, tal que

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \quad (2.1)$$

O problema(2.1) é conhecido como a *equação de condutividade* e está diretamente associado aos estudos de Calderón em [3]. Uma função u que satisfaz (2.1) é chamada uma função γ -harmônica.

Seja $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p)$ a *derivada direcional* de u na direção do *vetor unitário normal exterior* ν no ponto $p \in \partial\Omega$. Então, o mapa de Dirichlet-Neumann Λ é definido pela expressão:

$$\Lambda f(p) = \gamma(p) \frac{\partial u}{\partial \nu}(p). \quad (2.2)$$

Nesse caso, estamos considerando a métrica usual sobre a variedade. Todavia, se considerarmos g uma *métrica riemanniana* qualquer, os mesmos resultados do texto são válidos para o problema:

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} .$$

E a *derivada direcional* de u na direção do *vetor unitário normal exterior* v_g no ponto $p \in \partial\Omega$ passaria a ser representada por $\frac{\partial u}{\partial v_g}(p)$.

O mapa de Dirichlet-Neumann Λ é um operador pseudo-diferencial de ordem 1 e, como tal, possui um núcleo, $K(x, y)$, definido como uma distribuição. Isto é,

$$K \in [C_0^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega)]'.$$

Esse núcleo dá uma representação de Λ pela expressão:

$$\Lambda f(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) f(y) dy, \quad (2.3)$$

onde x e y são coordenadas de comprimento de arco sobre $\partial\Omega$. Para o operador pseudo-diferencial Λ , o núcleo K é uma função simétrica, isto é, $K(x, y) = K(y, x)$. Além disso, para um valor fixo $x \in \partial\Omega$, $\lim_{y \rightarrow x} |K(x, y)| = \infty$. Mais precisamente:

$$K(x, y) = \frac{k(x, y)}{|x - y|^2} + D(x, y), \quad (2.4)$$

onde k é contínua sobre $\partial\Omega \times \partial\Omega$. Além disso, k é simétrica e $k(x, x) \neq 0$. D é uma distribuição suportada sobre a diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in \partial\Omega\}$. O termo $|x - y|$ é a separação, em comprimento de arco, dos pontos com coordenadas de comprimento de arco x e y e o termo contínuo dessa expansão tem sido incorporado ao termo

$$\frac{k(x, y)}{|x - y|^2}.$$

Se $x \notin \text{supp}(f)$, então a integral é uma integral ordinária. Visto que estaremos interessados no comportamento de $K(x, y)$ para $x \neq y$, ignoraremos D . Portanto, pretendemos que:

$$K(x, y) = \frac{k(x, y)}{|x - y|^2}. \quad (2.5)$$

O bordo $\partial\Omega$ é uma curva de Jordan e, portanto, é homeomorfa a um círculo.

Definição 2.1.1 *Escolha uma orientação sobre $\partial\Omega$. Dizemos que $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ é um par circular se existem pontos $p, q \in \partial\Omega$ que dividem $\partial\Omega$ em duas componentes conexas A e B , tais que $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$ e $\{y_1, \dots, y_n\} \subset B$ e $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ estão em ordem circular sobre $\partial\Omega$.*

Aqui, quando dizemos que $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ estão ordem circular significa que quando escolhermos uma orientação em $\partial\Omega$ temos os x_j 's e os y_i 's na sequência $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

Usaremos essa definição no decorrer das demais seções. Estaremos interessados em provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.2 *Seja $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ um par circular sobre $\partial\Omega$. Seja $L = (l_{ij})$ uma matriz de ordem $n \times n$, com entradas definidas por $l_{ij} = K(x_i, y_j)$. Então*

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(L) > 0 \quad (2.6)$$

Esse é o principal teorema deste trabalho. Ele afirma que o núcleo K atua num par circular produzindo a matriz

$$L = \begin{bmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ K(x_n, y_1) & \dots & K(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

que satisfaz (2.6).

A sua prova será dada nas seções 2.3 e 2.4. Antes disso, apresentamos na seção 2.2 um teorema que é conhecido como: *a propriedade alternada*. Mais tarde será mostrado que o nosso teorema principal implica nessa propriedade.

2.2 A Propriedade Alternada

Suponha que $\partial\Omega = I \cup J$, onde I e J são arcos conexos disjuntos. Então, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 (*Propriedade Alternada*). *Seja f uma função C^∞ sobre $\partial\Omega$ tal que $f = 0$ sobre I . Suponha que existe uma sequência de pontos $\{p_1, \dots, p_n\} \subset I$ em ordem circular tal que*

$$(-1)^{i+1} \Lambda f(p_i) > 0 \quad (2.7)$$

Então existe uma sequência de pontos $\{q_1, \dots, q_n\} \subset J$ em ordem circular tal que

$$(-1)^n \Lambda f(p_i) f(q_i) > 0 \quad (2.8)$$

Demonstração: A prova é dada de maneira construtiva. Utilizamos várias vezes o Princípio do Máximo (A.4). Primeiro, afirmamos que (2.8) é equivalente a:

$$\Lambda f(p_i) f(q_{n+1-i}) < 0 \quad (2.9)$$

De fato. Para n par, podemos usar (2.7) e (2.8) para calcular os sinais de $\Lambda f(p_i)$, $f(q_i)$ e $f(q_{n+1-i})$, obtendo a tabela:

	$\Lambda f(p_i)$	$f(q_i)$	$f(q_{n+1-i})$	$(-1)^n \Lambda f(p_i) f(q_i)$
i par	-	-	+	+
i ímpar	+	+	-	+

Analogamente, para n ímpar, temos por (2.7) e (2.8) que:

	$\Lambda f(p_i)$	$f(q_i)$	$f(q_{n+1-i})$	$(-1)^n \Lambda f(p_i) f(q_i)$
i par	-	+	+	+
i ímpar	+	-	-	+

Portanto, multiplicando os sinais de $\Lambda f(p_i)$ e $f(q_{n+1-i})$, respectivamente, na primeira e segunda linhas das tabelas acima, provamos a equivalência.

O sinal do fator $f(q_{n+1-i})$ é obtido da seguinte forma:

Quando n é par. Para i par, obtemos de (2.8) que $f(q_i) < 0, \forall i, i = 2k, k \in \mathbb{N}$. Analogamente, para $i = j$ ímpar, obtemos de (2.8) que $f(q_j) > 0, \forall j, j = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$. Logo, $f(q_n) < 0$. Sendo que n par, segue que $n + 1$ é ímpar. Assim, $n + 1 - 2k$ é ímpar. Então, concluímos que $f(q_{n+1-i}) > 0$. Semelhantemente, para $i = j$ ímpar, segue que $n + 1 - j$ é par. Daí, $f(q_{n+1-j}) < 0$.

O procedimento é análogo para n ímpar.

Consideremos agora a nossa hipótese. Descrevemos, inicialmente, como escolher o ponto q_n .

Seja u a solução de (2.1) tal que $u = f$ sobre $\partial\Omega$.

Usando (2.2) em (2.7), obtemos:

$$(-1)^{1+1} \Lambda f(p_1) > 0 \implies \Lambda f(p_1) > 0 \implies \gamma(p) \frac{\partial u}{\partial \nu}(p_1) > 0.$$

Visto que $\gamma(p) > 0$, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(p_1) > 0.$$

Como Ω é relativamente compacta e conexa, existe um pequeno intervalo aberto $\alpha \subset \Omega$, tal que p_1 é uma extremidade de α . Além disso,

$$p_1 \in I \subset \partial\Omega. \text{ Então, } u(p_1) = f(p_1) = 0.$$

Agora, segue da definição de derivada na direção da normal (veja [13]) que existe uma curva

$$\alpha : [0, \delta) \longrightarrow \bar{\Omega} \\ t \longmapsto \alpha(t) \quad ,$$

satisfazendo $\alpha(0) = p_1$ e $\alpha'(0) = -\nu$, onde $\delta > 0$ e ν é o vetor normal exterior em p_1 . Então,

$$0 < \frac{\partial u}{\partial \nu}(p_1) = -\frac{\partial u}{\partial(-\nu)}(p_1) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\alpha(t)) - u(\alpha(0))}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\alpha(t))}{t}$$

Como $0 < t < \delta$, segue que:

$$u(\alpha(t)) < 0$$

Seja W a componente conexa do conjunto $X = \{z \in \Omega; u(z) < 0\}$ e que contém α .

Tomando $z \in \overline{W}$, existe uma seqüência (z_n) em W tal que $(z_n) \rightarrow z$. Como u é contínua, segue que

$$u(z_n) \rightarrow u(z)$$

Suponha que $\overline{W} \cap J = \emptyset$. Então $u = 0$ sobre ∂W .

De fato. Seja $z_0 \in \partial W$. Afirmamos que $u(z_0) = 0$. Caso contrário, como existe uma seqüência (z_n) em W tal que $(z_n) \rightarrow z_0$ e u é contínua, então existiria um aberto B contendo z_0 tal que $u(z_0) < 0$. Como B é conexo e contém pontos de W , poderíamos construir um caminho ligando um ponto z_1 de W a um ponto y_1 de B com $y_1 \notin W$. Assim, existiria uma outra componente conexa W_0 contendo α com $W \subsetneq W_0$, o que é um absurdo.

Tadavia, $u = 0$ sobre ∂W contradiz o Princípio do Máximo em W , haja vista que W não é vazio, u é solução do problema (2.1). Então, $v = u|_{\overline{W}}$ também é solução e $u < 0$ em W .

Portanto, $\overline{W} \cap J \neq \emptyset$. Então, usando novamente o argumento anterior, concluímos que $u = 0$ em todo ponto na ∂W que está em Ω .

Considerando, agora, que $u|_{\partial\Omega} = f$ e que $J \subset \partial\Omega$ e usando o Princípio do Máximo (A.4) novamente em W , temos que existe um ponto $q_n \in \overline{W} \cap J$ tal que $f(q_n) < 0$. Agora, tomando o ponto q_n e considerando que W também é conexo e relativamente compacto, concluímos que existe um pequeno intervalo $\beta \subset W$ tal que q_n é uma extremidade de β .

Pela conexidade de W , podemos ligar as extremidades de α e β que estão dentro de W por uma curva C^∞ em W . Portanto, existe uma curva diferenciável C_1 tal que C_1 é difeomorfa a um segmento de reta, C_1 tem extremidades p_1 e q_n , e $C_1 - p_1 - q_n \subset W$. Como apenas $u(p_1) = 0$, segue imediatamente que $u(z) < 0, \forall z \in C_1 - p_1$.

Como $\Lambda f(p_1) > 0$ e $f(q_{n+1-1}) = f(q_n) < 0$, segue que para $i = 1$, vale (2.9).

Quando $i = 2$, usamos novamente (2.2) e (2.7), e obtemos:

$$(-1)^{2+1} \Lambda f(p_2) > 0 \implies \gamma(p_2) \frac{\partial u}{\partial \nu}(p_2) < 0 \implies \frac{\partial u}{\partial \nu}(p_2) < 0,$$

pois $\gamma > 0$.

Como $p_2 \in I \subset \Omega$, segue que $u(p_2) = f(p_2) = 0$ e, usando novamente o argumento do caso $i = 1$, concluímos que existe um pequeno intervalo $\alpha_2 \subset \Omega$ tal que $u(\alpha_2) > 0$.

Considerando V a componente conexa do conjunto $Y = \{z \in \Omega; u(z) > 0\}$ e que contém α_2 e usando um procedimento inteiramente análogo ao caso $i = 1$, obtemos que $\overline{V} \cap J \neq \emptyset$. Então, visto que $u|_{\partial\Omega} = f$ e que $J \subset \partial\Omega$ e usando o Princípio do Máximo em V , obtemos um ponto $q_{n-1} \in \overline{V} \cap J$ tal que $f(q_{n-1}) > 0$. Isso nos permite obter um pequeno intervalo β_2 com extremidade em q_{n-1} e, à partir daí, encontrar uma curva diferenciável C_2 de extremidades p_2 e q_{n-1} , e $C_2 - p_2 - q_{n-1} \subset V$ de forma que $u(z) > 0, \forall z \in C_2 - p_2$.

Observe agora que $\Lambda f(p_2) < 0$ e, portanto, $\Lambda f(p_2)f(q_{n-1}) < 0$, satisfazendo (2.9).

Podemos repetir esse argumento para produzir curvas C_j tais que C_j conecta os pontos $p_j \in I$ aos pontos $q_{n+1-j} \in J$, $C_j - p_j - q_{n+1-j} \subset \Omega$ e $(-1)^{j+1}u(z) < 0$ para todo $z \in C_j - p_j$.

Observamos ainda que o processo de obtenção das curvas nos permite afirmar que elas não se interceptam. Pelo Teorema das Curvas de Jordan os pontos $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ estão em ordem circular sobre $\partial\Omega$ e, claramente, satisfazem (2.9).

■

Essa propriedade será utilizada ainda na próxima seção, a fim de mostrarmos a primeira parte do teorema principal. Assim, à partir daqui começamos a prova do principal teorema, que será dividida em duas partes: a primeira, chamamos de desigualdade fraca e a segunda, de desigualdade forte.

2.3 A desigualdade Fraca

Teorema 2.3.1 (A desigualdade fraca). *Seja $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ um par circular sobre $\partial\Omega$. Seja $L = (l_{ij})$ uma matriz do tipo $n \times n$ com entradas definidas por $l_{ij} = K(x_i, y_j)$. Então*

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(L) \geq 0 \quad (2.10)$$

Demonstração: A prova será dada por indução sobre a ordem da matriz n . Consideremos primeiro o caso $n = 1$. A prova segue por contradição. Observe que fazendo $n = 1$ em (2.10), precisamos mostrar que $\det(L) \leq 0$.

Suponha, então, que existam pontos $p, q \in \partial\Omega$ com $p \neq q$ e $\det(L) = K(p, q) > 0$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $p \notin D_\epsilon = \{y; |y - q| < \epsilon\}$ e $K(p, y) > 0$ para $y \in D_\epsilon$. Note que isto decorre da continuidade de K em (2.5).

Seja f uma função contínua sobre $\partial\Omega$ tal que $\text{supp}(f) \subset D_\epsilon$, $f(q) > 0$ e $f(s) \geq 0$, $\forall s \in \partial\Omega$.

Note que uma tal função existe, veja [13]. O fato de que $f(q) > 0$ decorre de que $q \in (\text{supp}f)^0$. A continuidade da f é obtida fazendo o valor de $f(s)$ se aproximar de zero suavemente.

Agora, por (2.2) e (2.4), temos:

$$\gamma(p) \frac{\partial u}{\partial \nu}(p) = \Lambda f(p) = \int_{\partial\Omega \cap D_\epsilon} K(p, y) f(y) dy > 0,$$

visto que K é estritamente positiva e f é não-nula no seu suporte.

Ora, sabemos que u satisfaz (2.1), $u(s) = f(s)$, $s \in \partial\Omega$ e $\gamma(p) > 0$. Então, segue que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) > 0$. Agora, pela definição de derivada na direção da normal (veja [13]), existe uma curva α , tal que:

$$\alpha : [0, \delta) \longrightarrow \bar{\Omega} \\ t \longmapsto \alpha(t) \quad ,$$

satisfazendo $\alpha(0) = p_1$ e $\alpha'(0) = -\nu$, onde $\delta > 0$ e ν é o vetor normal exterior em p_1 .

Então,

$$0 < \frac{\partial u}{\partial \nu}(p_1) = -\frac{\partial u}{\partial(-\nu)}(p_1) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\alpha(t)) - u(\alpha(0))}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\alpha(t))}{t}$$

Portanto, temos que:

$$u(\alpha(t)) < 0$$

Isso significa que deve existir um ponto z próximo de p tal que $u(z) < 0$. Mas isso contradiz o Princípio do Máximo (A.4), pois $u(s) = f(s) \geq 0, \forall s \in \partial\Omega$.

Observe que a nossa contradição resultou quando supomos a existência de pontos $p, q \in \partial\Omega$ com $p \neq q$ e $K(p, q) > 0$. Assim, concluímos que para $n = 1, K(p, q) \leq 0$. Daí, $\det(L) \leq 0$ e, portanto, a nossa desigualdade é verdadeira.

Hipótese de indução: assumimos que o resultado é verdadeiro para quaisquer matrizes do tipo $(n - 1) \times (n - 1)$. Isto é:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(L_{ij}) \geq 0 \tag{2.11}$$

e provemos que o resultado vale para $n \times n$ matrizes.

Aqui, L_{ij} representa um (i, j) menor de L qualquer. A prova também seguirá por contradição.

Suponha que o resultado não vale. Então, deve existir um par circular $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \in \partial\Omega$ tal que:

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det(L) < 0 \tag{2.12}$$

Portanto, L é uma matriz invertível. Considere então a matriz L^{-1} com entradas (h_{ij}) . Sabemos da Regra de Cramer para a resolução de sistemas lineares [14] que:

$$h_{ij} = (-1)^{j+i} \frac{\det(L_{ji})}{\det(L)}, \forall i, j = 1, \dots, n \tag{2.13}$$

onde L_{ji} é o transposto do (i, j) menor de L . Agora, antes de passarmos ao passo de indução, apresentamos um resultado que será utilizado no decorrer do mesmo. ■

Demonstração:

Observação 2.3.2 Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos a igualdade:

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{2.14}$$

Com efeito. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $(-1)^{\frac{-n(n-1)}{2}}$, temos:

$$(-1)^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+n} \cdot (-1)^{\frac{-n^2}{2}+\frac{n}{2}} = 1.$$

De posse desse resultado, passemos, portanto, ao passo de indução:

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+1}h_{ij} &= (-1)^{i+j} \cdot (-1)^{\frac{n^2-n+n^2+n}{2}} \cdot (-1)^1 h_{ij} \\ &= (-1)^{i+j+n^2+1} h_{ij} \end{aligned}$$

Substituindo $(-1)^{n^2}$ nessa última igualdade, obtemos que:

$$(-1)^{i+j+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+1}h_{ij} = (-1)^{i+j+n+1}h_{ij}$$

Agora, usando (2.13) no segundo membro dessa igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j+n+1}h_{ij} &= (-1)^{i+j+n+1} \cdot (-1)^{i+j} \frac{\det(L_{ji})}{\det(L)} \\ &= (-1)^{2(i+j)} \cdot (-1)^{n+1} \frac{\det(L_{ji})}{\det(L)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\det(L_{ji})}{\det(L)} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det(L_{ji})}{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \det(L)} \\ &= \frac{(-1) \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n} \cdot \det(L_{ji})}{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \det(L)} \\ &= \frac{(-1) \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \det(L_{ji})}{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \det(L)}. \end{aligned}$$

onde a passagem da penúltima para a última linha foi obtida através do uso de (2.14). Por conseguinte, utilizando a nossa hipótese de indução (2.11) no numerador da última expressão e (2.12) no denominador, concluímos que:

$$(-1)^{i+j+n+1}h_{ij} \geq 0. \tag{2.15}$$

Agora, considerando que a matriz L é não-singular, fixando uma linha i , deve existir algum j para o qual

$$(-1)^{i+j+n+1}h_{ij} > 0. \tag{2.16}$$

Lembre-se que os números h_{ij} são as entradas da matriz L^{-1} . Portanto, $h_{ij} \neq 0$ para algum j e todo i .

Prosseguindo, consideremos $w = [1 \quad -1 \quad 1 \quad \dots \quad (-1)^{n+1}]^T$ um vetor n dimensional com sinais alternados, onde T significa transposto.

Seja ainda o vetor $z = L^{-1}w$. Visto que $L^{-1} = (h_{ij})$ e w é uma matriz alternada do tipo $n \times 1$, segue que:

$$\begin{aligned}
 L^{-1}w &= [h_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n h_{1j}(-1)^{j+1} \\ \sum_{j=1}^n h_{2j}(-1)^{j+1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n h_{nj}(-1)^{j+1} \end{bmatrix} \\
 &\implies z_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} h_{ij}, \forall i, i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (-1)^{i+n} z_i &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot (-1)^{i+n} h_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j+n+1} h_{ij}
 \end{aligned}$$

Agora, aplicando (2.15) e (2.16) nessa última igualdade, encontramos:

$$(-1)^{i+n} z_i > 0, \forall i, i = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

Resumindo, $L^{-1}w$ nos fornece um vetor z tal que:

$$z = L^{-1}w \implies Lz = w$$

Como as entradas da matriz L são dadas por $K(x_i, y_j)$, temos:

$$\begin{bmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K(x_n, y_1) & \dots & K(x_n, y_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Assim, a i -ésima linha da matriz produto Lz é dada por:

$$K(x_i, y_1)z_1 + \dots + K(x_i, y_n)z_n = \sum_{j=1}^n K(x_i, y_j)z_j.$$

Portanto, concluímos que:

$$\sum_{j=1}^n K(x_i, y_j) z_j = w_i = (-1)^{i+1} \quad (2.18)$$

Lembrando que $K(x_i, y_j) = l_{ij}$ (entradas da matriz L) e, trabalhando com (2.17) obtemos:

$$\begin{aligned} (-1)^{i+n} z_i > 0 &\implies (-1) \cdot (-1)^{i+n} z_i < 0 \\ &\implies (-1)^{i+1} \cdot (-1)^n z_i < 0 \end{aligned}$$

Usando (2.18) nessa última desigualdade, encontramos:

$$(-1)^n z_i w_i < 0 \implies (-1) \cdot (-1)^n z_i w_i > 0$$

Portanto, concluímos que:

$$(-1)^{n+1} z_i w_i > 0 \quad (2.19)$$

Agora, escolha pequenos intervalos D_j em torno dos pontos y_j de forma que os D_j sejam disjuntos e não contenham nenhum dos pontos x_i . Observe aqui que essa escolha é bastante natural, haja vista que o par circular em $\partial\Omega$ está fixo. Além disso, os pontos x_i e y_j estão em arcos disjuntos e o termo intervalo é utilizado no sentido de fazermos uma identificação natural de $\partial\Omega$ com o intervalo $[0, S)$ da reta.

Escolha os D_j suficientemente pequenos de maneira que:

$$|K(x_i, y) - K(x_i, y_j)| < \epsilon, \quad y \in D_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

Escolha ainda funções f_j tais que:

$$\text{supp}(f_j) \subset D_j, \quad z_j f_j(y) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{D_j} f_j = z_j \quad (2.21)$$

Seja $f = \sum_{j=1}^n f_j$. Então:

$$\begin{aligned}
|\Lambda f(x_i) - w_i| &= \left| \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) f(y) dy - \sum_{j=1}^n K(x_i, y_j) z_j \right| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) \sum_{j=1}^n f_j(y) dy - \sum_{j=1}^n K(x_i, y_j) \int_{D_j} f_j(y) dy \right| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) [f_1(y) + \dots + f_n(y)] dy \right. \\
&\quad \left. - [K(x_i, y_1) \int_{D_1} f_1(y) dy + \dots + K(x_i, y_n) \int_{D_n} f_n(y) dy] \right| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) f_1(y) dy + \dots + \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) f_n(y) dy \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_{D_1} K(x_i, y_1) f_1(y) dy + \dots + \int_{D_n} K(x_i, y_n) f_n(y) dy \right] \right| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) f_1(y) dy + \dots + \int_{\partial\Omega} K(x_i, y) f_n(y) dy \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_{\partial\Omega} K(x_i, y_1) f_1(y) dy + \dots + \int_{\partial\Omega} K(x_i, y_n) f_n(y) dy \right] \right| \\
&= \left| \int_{\partial\Omega} [K(x_i, y) - K(x_i, y_1)] f_1(y) dy + \dots + \int_{\partial\Omega} [K(x_i, y) - K(x_i, y_n)] f_n(y) dy \right| \\
&\leq \int_{\partial\Omega} |[K(x_i, y) - K(x_i, y_1)] f_1(y)| dy + \dots + \int_{\partial\Omega} |[K(x_i, y) - K(x_i, y_n)] f_n(y)| dy \\
&= \int_{\partial\Omega} |K(x_i, y) - K(x_i, y_1)| \cdot |f_1(y)| dy + \dots + \int_{\partial\Omega} |K(x_i, y) - K(x_i, y_n)| \cdot |f_n(y)| dy
\end{aligned}$$

Aplicando (2.20) nessa última expressão, obtemos:

$$|\Lambda f(x_i) - w_i| \leq \varepsilon \cdot \int_{\partial\Omega} |f_1(y)| dy + \dots + \varepsilon \cdot \int_{\partial\Omega} |f_n(y)| dy$$

Como, por (2.21), z_j e $f_j(y)$ possuem o mesmo sinal, segue que $\int_{\partial\Omega} |f_j(y)| dy = |z_j|$. Portanto, obtemos:

$$|\Lambda f(x_i) - w_i| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^n |z_j| \tag{2.22}$$

Assim, concluímos que para ε suficientemente pequeno, $\Lambda f(x_i)$ tem o mesmo sinal que w_i . Portanto, pela propriedade alternada (Teorema 2.2.1) deve existir um conjunto de n pontos t_i em ordem circular tal que:

$$(-1)^n w_i f(t_i) > 0$$

Para um tal conjunto de pontos deveríamos ter $t_i \in D_i$ e, portanto, $f(t_i)$ teria o mesmo sinal que z_i . Mas isso contradiz (2.19).

Isso conclui a nossa demonstração. ■

2.4 A desigualdade Forte

Na seção anterior, provamos a primeira parte do teorema principal, à qual denominamos *desigualdade fraca*. Nesta seção, concluiremos a prova desse teorema mostrando que a igualdade em (2.6) produz uma contradição. Isso nos permitirá concluir a desigualdade estrita do teorema, à qual nomeamos por *desigualdade forte*. Para a prova utilizaremos como ponto de partida a *desigualdade fraca* e, portanto, faremos também o uso de indução. Faremos ainda uso de um Lema de (3). Para a demonstração do Lema faremos uso do complemento de Shur, o qual definimos a seguir:

Definição 2.4.1 *Suponha que M é uma matriz quadrada e D é uma submatriz quadrada invertível de M . Apenas por conveniência assuma que M tem a seguinte estrutura em bloco:*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Chamamos complemento de Shur de D em M à matriz $M/D = A - BD^{-1}C$.

Proposição 2.4.2 *O complemento de Schur satisfaz a seguinte identidade:*

$$\det M = \det(M/D) \cdot \det D \tag{2.23}$$

Demonstração: Consulte [6]. ■

Agora, colocamos algumas condições e enunciemos o Lema.

Vamos assumir que o comprimento de arco de $\partial\Omega$ é S e que pontos sobre $\partial\Omega$ são parametrizados por números no intervalo $[0, S)$. Seja $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ um par circular. Assumimos que as coordenadas sobre $\partial\Omega$ sejam escolhidas de forma que

$$0 \leq x_1 < \dots < x_n < y_1 < \dots < y_n < S$$

Seja L a matriz com entradas i, j iguais a $K(x_i, y_j)$. Usaremos a notação:

$$k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \det(L)$$

Lema 2.4.3 *Seja $(a_1, \dots, a_{n+1}; b_1, \dots, b_{n+1})$ um par circular. Então*

$$\begin{aligned}
 & k(a_1, \dots, a_{n+1}; b_1, \dots, b_{n+1})k(a_1, \dots, a_{n-1}; b_3, \dots, b_{n+1}) = \\
 & k(a_1, \dots, a_n; b_1, b_3, \dots, b_{n+1})k(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}; b_2, \dots, b_{n+1}) \\
 & -k(a_1, \dots, a_n; b_2, \dots, b_{n+1})k(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}; b_1, b_3, \dots, b_{n+1})
 \end{aligned}$$

Antes da demonstração do Lema, devemos explicar a notação utilizada. Para tanto, consideremos $\det(A) = k(a_1, \dots, a_{n+1}; b_1, \dots, b_{n+1})$. Assim, a notação utilizada nos dá, no lado esquerdo da igualdade, o produto de dois determinantes, sendo o primeiro determinante, da matriz original A de ordem $n + 1$ e o segundo, de uma sua submatriz de ordem $n - 1$ em que foram retiradas da matriz original as duas últimas linhas e as duas primeiras colunas. Esse produto pode ser decomposto como uma diferença, onde o primeiro termo é o produto de determinantes de submatrizes de ordem $n - 1$ de A , onde no primeiro fator se exclui a última linha e a coluna 2 e no segundo se exclui a penúltima linha e a coluna 1. No segundo termo temos o produto de determinantes de submatrizes de ordem $n - 1$ de A , onde no primeiro fator se exclui a última linha e a coluna 1 e no segundo se exclui a penúltima linha e a coluna 2.

Após tais considerações, passemos à demonstração do Lema.

Demonstração: Com o objetivo de simplificar os cálculos e deixar a demonstração mais enxuta, vamos usar a seguinte notação: A é a matriz do tipo $(n + 1) \times (n + 1)$, $A[h, i; j, k]$ significa uma submatriz do tipo $(n - 1) \times (n - 1)$ de A , obtida por retirar as linhas h e i e as colunas j e k de A . $A[h; j]$ significa uma submatriz do tipo $n \times n$ de A , obtida por retirar a linha h e a coluna j . $A[i; k]$ significa uma submatriz do tipo $n \times n$ de A , obtida por retirar a linha i e a coluna k . $A[h; k]$ significa uma submatriz do tipo $n \times n$ de A , obtida por retirar a linha h e a coluna k . $A[i; j]$ significa uma submatriz do tipo $n \times n$ de A , obtida por retirar a linha i e a coluna j . Em todos esses casos vamos admitir que $1 \leq h < i \leq n + 1$ e que $1 \leq j < k \leq n + 1$. Isto significa que essa nossa simplificação produzirá uma demonstração mais forte de que o nosso Lema, sendo ele, portanto, um caso particular.

Agora, não há perda de generalidade se reordenarmos as linhas e colunas da matriz A , de modo a obter $(h, i) = (1, 2)$ e $(j, k) = (1, 2)$. Portanto, consideremos $B = A[1, 2; 1, 2]$. Então, a matriz A toma a forma em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & S \\ c & d & T \\ W & Z & B \end{bmatrix}.$$

em que S e T são submatrizes do tipo $1 \times (n - 1)$ de A e W e Z são submatrizes do tipo $(n - 1) \times 1$. Assuma que fizemos a reordenação de maneira que B seja invertível. Então, podemos escrever o complemento de Shur de B em A por:

$$A/B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} B^{-1} [W \ Z].$$

Observe que a primeira matriz à direita na expressão acima é do tipo 2×2 . A segunda é do tipo $2 \times (n - 1)$. A matriz B^{-1} é do tipo $(n - 1) \times (n - 1)$ e a matriz $[W \ Z]$ é do tipo $(n - 1) \times 2$. Logo, o produto acima está definido. Portanto, resolvendo o produto e a subtração na expressão A/B , obtemos a matriz do tipo 2×2 dada por:

$$A/B = \begin{bmatrix} a - SB^{-1}W & b - SB^{-1}Z \\ c - TB^{-1}W & d - TB^{-1}Z \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz A/B , encontramos:

$$\det(A/B) = (a - SB^{-1}W).(d - TB^{-1}Z) - (b - SB^{-1}Z).(c - TB^{-1}W).$$

Aplicando a definição do complemento de Schur em (2.4.1) nesse determinante, obtemos:

$$\det(A/B) = \det(A[2; 2]/B). \det(A[1; 1]/B) - (\det A[1; 2]/B).(\det A[2; 1]/B).$$

Multiplicando essa igualdade por $\det B$ e usando a identidade do determinante em (2.23), encontramos:

$$\det A = \det(A[2; 2]). \det(A[1; 1]/B) - (\det A[1; 2]).(\det A[2; 1]/B).$$

Multiplicando novamente por $\det B$ e usando a identidade do determinante em (2.23), chegamos a:

$$\det A. \det B = \det(A[2; 2]). \det(A[1; 1]) - (\det A[1; 2]).(\det A[2; 1]).$$

Por último, temos que essa igualdade representa uma relação polinomial que vale para $(n + 1)^2$ valores das entradas de A . Além disso, é uma identidade nos coeficientes de A . Portanto, isso conclui a nossa demonstração. ■

Passemos então à prova do teorema (2.6).

Demonstração: Quando $n = 1$, suponha que exista um par de pontos x_1, y_1 com $0 \leq x_1 < y_1$ e $K(x_1, y_1) = 0$. Então, por (2.4), não existe uma sequência de pontos z_j tais que:

$$x_1 < z_j < y_1, \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = x_1 \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} K(x_1, z_j) = 0.$$

Observe que essa conclusão decorre do fato de que em (2.4) o $\lim_{y \rightarrow x} |K(x, y)| = \infty$. Assim, se considerarmos a existência de uma sequência nessas condições, teríamos $\lim_{z_j \rightarrow x_1} K(x_1, z_j) = 0$ (Uma contradição). Portanto, afirmamos que existe um ponto η_2 com $x_1 < \eta_2 < y_1$ tal que

$$K(x_1, \eta_2) = 0 \text{ e } K(x_1, \eta) < 0, \text{ para } x_1 < \eta < \eta_2$$

De fato. Negar a existência de um ponto η_2 satisfazendo essas condições é justamente afirmar que existiria uma sequência z_j , $x_1 < z_j < y_1$, z_j convergindo para x_1 , com $K(x_1, z_j)$ convergindo para 0, conforme (2.10).

Seja x um número qualquer tal que $x_1 < x < \eta_2$ e escolha η_1 tal que $x < \eta_1 < \eta_2$. Assim, temos $x_1 < x < \eta_1 < \eta_2$. Então, $(x_1, x; \eta_1, \eta_2)$ é um par circular e, portanto

$$\begin{vmatrix} K(x_1, \eta_1) & K(x_1, \eta_2) \\ K(x, \eta_1) & K(x, \eta_2) \end{vmatrix} \leq 0$$

Note que $K(x_1, \eta_2) = 0$ implica em que esse determinante é dado por $K(x_1, \eta_1).K(x, \eta_2)$. Portanto, segue que

$$K(x_1, \eta_1).K(x, \eta_2) \leq 0.$$

Como $K(x_1, \eta_1) < 0$, podemos dividir a desigualdade por $K(x_1, \eta_1)$, obtendo que $K(x, \eta_2) \geq 0$.

Todavia, $K(x, \eta_2) > 0$ é inconsistente com o caso $n = 1$. Assim, segue que

$$K(x, \eta_2) = 0.$$

Mostramos que para todo x , com $x_1 < x < \eta_2$, $K(x, \eta_2) = 0$. Portanto, obtemos que $\lim_{x \rightarrow \eta_2} K(x, \eta_2) = 0$. Contradizendo, portanto, (2.4).

Observe que a contradição foi produzida quando supomos que existia um par de pontos x_1, y_1 com $0 \leq x_1 < y_1$ e $K(x_1, y_1) = 0$. Concluímos, portanto que a nossa desigualdade vale para o caso $n = 1$.

Suponha, agora, que o resultado seja verdadeiro para quaisquer submatrizes do tipo $(n - 1) \times (n - 1)$ e provemos que o resultado vale para a nossa matriz L , de ordem n . Assuma que

$$k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = 0$$

para algum par circular.

Primeiro, provamos a seguinte afirmação: não existe uma sequência de pontos z_j tais que

$$x_n < z_j < y_1, \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = x_n \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} k(x_1, \dots, x_n; z_j, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Haja vista que isso implica a existência de constantes c_k (independentes de j) tais que

$$K(x_n, z_j) = \sum_{k < n} c_k K(x_k, z_j) + V_j. \tag{2.24}$$

E, portanto:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} K(x_n, z_j) = \sum_{k < n} c_k K(x_k, x_n). \quad (2.25)$$

Contradizendo (2.4).

De fato. Consideremos $k(x_1, \dots, x_n; z_j, y_2, \dots, y_n) = \lambda_j$, onde λ_j é um número real que depende de j e $\lambda_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Como as entradas de $\det(L)$ são dadas por $K(x_i, y_j)$, temos:

$$\begin{vmatrix} K(x_1, z_j) & K(x_1, y_2) & \dots & K(x_1, y_n) \\ K(x_2, z_j) & K(x_2, y_2) & \dots & K(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(x_n, z_j) & K(x_n, y_2) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix} = \lambda_j.$$

Fazendo o desenvolvimento desse determinante pela primeira coluna, temos:

$$K(x_1, z_j)M_{1j} - K(x_2, z_j)M_{2j} + \dots + (-1)^{i+j}K(x_i, z_j)M_{ij} + \dots + (-1)^{n+j}K(x_n, z_j)M_{nj} = \lambda_j,$$

onde os M_{ij} são os determinantes das submatrizes de ordem $n - 1$ de L , que obtemos excluindo de L a linha i e coluna 1. Como a hipótese de indução assegura que os M_{ij} são todos diferentes de zero, podemos isolar $K(x_n, z_j)$ nessa equação, obtendo:

$$\begin{aligned} K(x_n, z_j) &= \frac{\lambda_j}{(-1)^{n+j}M_{nj}} - \frac{K(x_1, z_j)M_{1j}}{(-1)^{n+j}M_{nj}} + \frac{K(x_2, z_j)M_{2j}}{(-1)^{n+j}M_{nj}} + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^{n-1+j}K(x_{n-1}, z_j)M_{(n-1)j}}{(-1)^{n+j}M_{nj}} \end{aligned}$$

Note agora, que os números reais M_{ij} , com $i = 1, \dots, n - 1$ e j fixo para a sequência z_j são independentes de j , haja vista que foram obtidos pela exclusão da coluna que depende da sequência z_j . Portanto, fazendo:

$$\frac{\lambda_j}{(-1)^{n+j}M_{nj}} = V_j, \quad -\frac{M_{1j}}{(-1)^{n+j}M_{nj}} = C_1, \dots, \frac{M_{kj}}{(-1)^{n+j}M_{nj}} = C_k, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

a menos de sinal, obtemos (2.24). Por último, passando ao limite quando $j \rightarrow \infty$, temos que $\lambda_j \rightarrow 0$ e, assim, obtemos (2.25).

Agora, o mesmo argumento do caso $n = 1$ nos permite concluir que existe um número η_1 com $x_n < \eta_1 < y_1$ tal que:

$$k(x_1, \dots, x_n; \eta_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad (2.26)$$

e

$$k(x_1, \dots, x_n; \eta, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \text{ para } x_n < \eta < \eta_1. \quad (2.27)$$

Seja x tal que $x_n < x < \eta_1$. Então existe um número η tal que $x < \eta < \eta_1$ e, portanto, $(x_1, \dots, x_n, x; \eta, \eta_1, y_2, \dots, y_n)$ é um par circular.

Considerando a alternância de sinal de $\det(L)$ na *desigualdade fraca* (2.3.1), temos:

$$k(x_1, \dots, x_n, x; \eta, \eta_1, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}; y_2, \dots, y_n) \leq 0 \quad (2.28)$$

Por alternância de sinal, estamos dizendo que nessa desigualdade, no primeiro fator aparece um determinante de uma matriz de ordem $n + 1$, enquanto que no segundo aparece o determinante de uma submatriz de ordem $n - 1$. Considerando que ambos os determinantes satisfazem a *desigualdade fraca* (2.3.1) e que o fator $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ da *desigualdade fraca* oscila entre $+1$ e -1 de dois em dois; necessariamente, os determinantes se alternam em sinal ou pelo menos um deles é nulo. Portanto, o produto é menor ou igual a zero.

Aplicando em (2.28) o *Lema* (2.4.3), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq k(x_1, \dots, x_n, x; \eta, \eta_1, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}; y_2, \dots, y_n) \\ &= k(x_1, \dots, x_n; \eta, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}, x; \eta_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad - k(x_1, \dots, x_n; \eta_1, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}, x; \eta, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aplicando (2.26) na segunda linha dessa última igualdade, encontramos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq k(x_1, \dots, x_n, x; \eta, \eta_1, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}; y_2, \dots, y_n) \\ &= k(x_1, \dots, x_n; \eta, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}, x; \eta_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Prosseguindo, observe que no segundo membro da igualdade anterior aparecem dois determinantes da matriz L , pois ambos possuem ordem n . Logo, aplicando em (2.30) a *desigualdade fraca* (2.3.1), obtemos:

$$0 \leq k(x_1, \dots, x_n; \eta, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}, x; \eta_1, y_2, \dots, y_n) \leq 0$$

Portanto,

$$k(x_1, \dots, x_n; \eta, y_2, \dots, y_n)k(x_1, \dots, x_{n-1}, x; \eta_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Finalmente, usando (2.27) nessa igualdade, obtemos:

$$k(x_1, \dots, x_{n-1}, x; \eta_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \text{ para } x_n < x < \eta_1.$$

Como no caso $n = 1$, isso contradiz (2.4) e prova o teorema. ■

2.5 O Lema de Hopf

Mostramos agora como o fato de $K(x, y) < 0$ para $x \neq y$ implica o Lema de Hopf para a equação de condutividade.

Teorema 2.5.1 *Seja u uma solução não constante do problema*

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} .$$

Seja $p \in \partial\Omega$ um ponto onde u assume um valor mínimo. Então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) < 0 \tag{2.31}$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $u(p) = 0$. Visto que u não é constante e $u|_{\partial\Omega} = f$, segue que $\text{supp}(f)$ não é vazio. Assim, existe um intervalo aberto D em torno de p na $\partial\Omega$ tal que $\text{supp}(f) - D$ também não é vazio. Note que $\text{supp}(f) - D$ é um conjunto fechado. Assim, pela proposição (A.3.2) existe uma função diferenciável ψ definida em $\partial\Omega$ com $0 \leq \psi(x) \leq 1$, e ψ satisfazendo:

$$\psi = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \text{supp}(f) - D \\ 0, & \text{se } x \in V_p \end{cases} , \text{ onde } V_p \text{ é um intervalo em torno de } p$$

Consideremos a função $h = \psi f$ e seja w a solução do problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla w) = 0 & \text{em } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = h \end{cases}$$

Observe que para $x \in \text{supp}(f) - D$, $h(x) = f$, $h \equiv 0$ em V_p e, como $0 \leq \psi(x) \leq 1$, segue que $f \geq h$.

Portanto, considerando essa desigualdade e a unicidade da solução, obtemos que $u \geq w$. Além disso, $h \geq 0$. Finalmente, como h se anula em V_p , temos que $p \notin \text{supp}(h)$. Utilizando então a hipótese de que $K(p, y) < 0$, juntamente com o fato de que $h \geq 0$, obtemos:

$$\int_{\partial\Omega} K(p, y)h(y)dy < 0. \tag{2.32}$$

Agora, considerando a desigualdade $f \geq h \geq 0$ e multiplicando por $K(p, y)$, obtemos:

$$K(p, y)f(y) \leq K(p, y)h(y).$$

Integrando essa desigualdade em $\partial\Omega$, encontramos:

$$\int_{\partial\Omega} K(p, y)f(y)dy \leq \int_{\partial\Omega} K(p, y)h(y)dy.$$

Aplicando, (2.2), (2.3) e (2.32) nessa desigualdade, chegamos ao resultado:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) \leq \frac{\partial w}{\partial \nu}(p) < 0.$$

Em que ν é o vetor normal em p . Isso completa a demonstração. ■

Na próxima seção mostramos como o Teorema Principal (2.6) implica na Propriedade Alternada (2.2.1). A demonstração desse resultado faz uso de dois lemas, sendo que o primeiro deles é conhecido como a *propriedade de variação decrescente* para um núcleo M .

2.6 A propriedade de Variação Decrescente

Usamos a seguinte notação:

Seja $M(x, y) : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Consideramos nos intervalos $[c, d]$ e $[a, b]$ as partições $c \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq d$ e $a \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq b$. Seja a matriz de ordem $n \times n$ com entradas i, j determinadas por $M(x_i, y_j)$. Consideremos

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \det(T)$$

Então, enunciamos o seguinte Lema:

Lema 2.6.1 *Seja f uma função contínua, não identicamente nula, definida no intervalo $[a, b]$, tal que f muda o seu sinal nesse intervalo não mais que $n - 1$ vezes. Seja $M(x, y)$, com $x, y \in [c, d] \times [a, b]$ um núcleo contínuo com a propriedade de que*

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) > 0 \tag{2.33}$$

sempre que $c \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq d$ e $a \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq b$. Então, a função

$$g(x) = \int_a^b M(x, y)f(y)dy$$

se anula em $[c, d]$ não mais que $n - 1$ vezes.

Aqui, dizer que a função f muda o seu sinal k vezes no intervalo $[a, b]$ significa que existem $k + 1$ pontos $y_1 < y_2 < \dots < y_{k+1}$ em $[a, b]$, tais que para $i = 1, 2, \dots, k$

$$f(y_i)f(y_{i+1}) < 0 \tag{2.34}$$

Demonstração: Observe que o fato de f ser contínua e mudar de sinal não mais que $n - 1$ vezes garante que f não possui mais que $n - 1$ zeros. Então, pela hipótese, existem pontos $a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = b$ tal que em cada intervalo aberto (s_{i-1}, s_i) , com $i = 1, 2, \dots, n$ a função f não muda o seu sinal, nem é identicamente nula. De fato. Basta tomarmos os s_i s como os zeros da função f . Assim, em cada (s_{i-1}, s_i) a função f terá sinal constante. Para $i = 1, 2, \dots, n$, consideremos a função

$$g_i(x) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} M(x, y)f(y)dy. \tag{2.35}$$

Então, adicionando as funções $g_i(x)$, com $i = 1, 2, \dots, n$, obtemos:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x). \quad (2.36)$$

Fazemos primeiramente a seguinte afirmação: Para quaisquer

$$c \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq d,$$

o determinante $\det(\{g_i(x_j)\})$ é tal que:

$$\det(\{g_i(x_j)\}) = \int_{s_{n-1}}^{s_n} \dots \int_{s_0}^{s_1} \mu(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) f(y_1) \dots f(y_n) dy_1 \dots dy_n. \quad (2.37)$$

Mostramos esse fato por indução. Para o caso $n = 2$, temos o par circular $(x_1, x_2; y_1, y_2)$. Assim:

$$\det(T) = \begin{vmatrix} M(x_1, y_1) & M(x_1, y_2) \\ M(x_2, y_1) & M(x_2, y_2) \end{vmatrix} = \mu(x_1, x_2; y_1, y_2).$$

Por outro lado, o determinante $\det(\{g_i(x_j)\})$, com $i, j = 1, 2$, é dado por:

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) \end{vmatrix} = g_1(x_1)g_2(x_2) - g_1(x_2)g_2(x_1).$$

Aplicando (2.35), encontramos:

$$\begin{aligned} \det(\{g_i(x_j)\}) &= \int_{s_0}^{s_1} M(x_1, y_1) f(y_1) dy_1 \cdot \int_{s_1}^{s_2} M(x_2, y_2) f(y_2) dy_2 \\ &\quad - \int_{s_0}^{s_1} M(x_2, y_1) f(y_1) dy_1 \cdot \int_{s_1}^{s_2} M(x_1, y_2) f(y_2) dy_2 \end{aligned}$$

Note que em cada termo da diferença acima, a integral no 1º fator é constante em relação à 2ª integral, visto que no 1º fator a variável de integração é y_1 , enquanto que no 2º fator a variável de integração é y_2 . Portanto, inserindo essas constantes nos respectivos integrandos e usando propriedades de integração, encontramos:

$$\begin{aligned}
 \det(\{g_i(x_j)\}) &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_0}^{s_1} M(x_1, y_1) f(y_1) dy_1 \cdot M(x_2, y_2) f(y_2) dy_2 \\
 &\quad - \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_0}^{s_1} M(x_2, y_1) f(y_1) dy_1 \cdot M(x_1, y_2) f(y_2) dy_2 \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_0}^{s_1} M(x_1, y_1) M(x_2, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2 \\
 &\quad - \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_0}^{s_1} M(x_2, y_1) M(x_1, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2 \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_0}^{s_1} [M(x_1, y_1) M(x_2, y_2) - M(x_2, y_1) M(x_1, y_2)] f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2
 \end{aligned}$$

Por último, observando que na última igualdade o termo nos colchetes é $\det(T)$, temos o resultado desejado:

$$\det(\{g_i(x_j)\}) = \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_0}^{s_1} \mu(x_1, x_2; y_1, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2, \text{ com } i, j = 1, 2.$$

Base de indução: admitimos que a afirmação seja verdadeira para quaisquer matrizes de ordem $(n-1) \times (n-1)$ e mostramos que também é verdadeira para matrizes de ordem $n \times n$.

Seja T a matriz de ordem $n \times n$. Então, fazendo o desenvolvimento de $\det(T)$ pela 1ª coluna, temos:

$$\det(T) = M(x_1, y_1)T_{11} - M(x_2, y_1)T_{21} + \dots + (-1)^{n+1}M(x_n, y_1)T_{n1}. \quad (2.38)$$

onde os números T_{i1} , com $i = 1, \dots, n$ são os determinantes das submatrizes de ordem $(n-1) \times (n-1)$ de T , obtidas por retirar a linha i e a coluna 1.

Por outro lado, tomando a matriz:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix},$$

e fazendo o desenvolvimento de $\det(\{g_i(x_j)\})$ através da primeira coluna, encontramos:

$$\det(\{g_i(x_j)\}) = g_1(x_1) \begin{vmatrix} g_2(x_2) & \dots & g_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_2(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} g_1(x_n) \begin{vmatrix} g_2(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_2(x_{n-1}) & \dots & g_n(x_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Nomeando os determinantes das submatrizes por D_{11}, \dots, D_{n1} e fazendo uso da hipótese de indução, encontramos:

$$g_1(x_1)D_{11} = \int_{s_0}^{s_1} M(x_1, y_1) f(y_1) dy_1 \int_{s_{n-1}}^{s_n} \dots \int_{s_1}^{s_2} \mu(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) f(y_2) \dots f(y_n) dy_2 \dots dy_n.$$

$$g_1(x_2)D_{21} = \int_{s_0}^{s_1} M(x_2, y_1) f(y_1) dy_1 \int_{s_{n-1}}^{s_n} \dots \int_{s_1}^{s_2} \mu(x_1, x_3, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) f(y_2) \dots f(y_n) dy_2 \dots dy_n.$$

Prosseguindo, temos:

$$g_1(x_n)D_{n1} = \int_{s_0}^{s_1} M(x_n, y_1) f(y_1) dy_1 \int_{s_{n-1}}^{s_n} \dots \int_{s_1}^{s_2} \mu(x_1, \dots, x_{n-1}; y_2, \dots, y_n) f(y_2) \dots f(y_n) dy_2 \dots dy_n.$$

Observamos que em cada uma dessas igualdades a integral externa é constante em relação à cadeia de integrais no segundo fator, visto que a sua variável de integração é y_1 , que não aparece no segundo fator. Portanto, inserindo a constante no integrando em cada uma das igualdades, arrumando e comparando os fatores $\mu(x, y)$ com os T_{i1} acima, bem como os fatores $M(x_j, y_1)$, concluímos a igualdade desejada. Isso prova a nossa afirmação.

Agora, analisando o integrando em (2.37), concluímos que $\det(\{g_i(x_j)\}) \neq 0$, visto que $f(y_i)$ não se anula no intervalo (s_{i-1}, s_i) e tem sinal constante, isto é, $f(y_i) < 0$ ou $f(y_i) > 0$. Além disso, $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$.

A conclusão de que o $\det(\{g_i(x_j)\}) \neq 0$, mostra que o sistema linear homogêneo nas variáveis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ abaixo só admite a solução trivial.

$$\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, não existe uma combinação linear não-trivial dos g_i 's se anulando nos n pontos. Então, por (2.36), $g(x)$ não pode se anular em n pontos.

Isso conclui a nossa demonstração. ■

Notamos que nessa demonstração foi utilizado fortemente o fato de que $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$ tem sinal constante. A seguir, apresentamos o segundo Lema.

Seja $K(x, y)$ um núcleo sobre $\partial\Omega \times \partial\Omega$. Assumimos que $K(x, y)$ é contínuo quando $x \neq y$. Todavia, não assumimos coisa alguma sobre K na diagonal de $\partial\Omega \times \partial\Omega$. Seja $k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \det(L)$, onde L é a matriz L_{ij} com entradas determinadas por K , conforme a seção 2.4.

Lema 2.6.2 *Suponha que $k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ nunca se anula e tem sinal constante para todos n -pares circulares $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$. Seja $\partial\Omega = I \cup J$ onde I e J são arcos conexos disjuntos. Seja f uma função contínua sobre $\partial\Omega$, com $\text{supp}(f) \subset J$. Seja*

$$g(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y)f(y)dy. \quad (2.39)$$

Então, se existe uma sequência de $n + 1$ pontos em I em ordem circular na qual g alterna em sinal, então existe uma sequência de pelo menos $n + 1$ pontos em J , em ordem circular, na qual f alterna em sinal.

Demonstração: A prova será dada por contradição. Para tanto, utilizamos o Lema anterior. Suponha, então, que não exista uma sequência de $n + 1$ pontos em J , em ordem circular, na qual f alterna em sinal. Então, da observação em (2.34) segue que f pode mudar o seu sinal não mais que $n - 1$ vezes em J . Assim, aplicando o lema (2.6.1), concluímos que g pode se anular não mais que $n - 1$ vezes em I . Mas, assumimos na hipótese, que g tem $n + 1$ alternâncias de sinal em I e, portanto, pelo menos n zeros em I . Isso contradiz a prova do lema (2.6.1) e, portanto, conclui a demonstração. ■

Agora, provamos que o Teorema (2.6) implica na Propriedade Alternada. Usaremos a notação do Lema (2.6.1).

Teorema 2.6.3 *Suponha que $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) > 0$ para todo $n > 0$ e para todos n -pares circulares $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$. Seja f uma função contínua sobre $\partial\Omega$ com $\text{supp}(f) \subset J$. Seja*

$$g(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y)f(y)dy. \quad (2.40)$$

Suponha que exista uma sequência de pontos $\{p_1, \dots, p_n\} \subset I$ em ordem circular tal que

$$(-1)^{i+1}g(p_i) > 0. \quad (2.41)$$

Então, existe uma sequência de pontos $\{q_1, \dots, q_n\} \subset J$ em ordem circular tal que

$$(-1)^n g(p_i)f(q_i) > 0. \quad (2.42)$$

Demonstração: A prova será dada por contradição. Primeiro, observando que as hipóteses do Teorema satisfazem o Lema (2.6.2), concluímos que existe uma sequência de pontos em J na qual f alterna em sinal em pelo menos n pontos. Suponha que não exista sequência de pontos em J com a propriedade alternada (2.42). Então J é uma união disjunta de subintervalos J_i em ordem circular.

De fato. Usando (2.41) concluímos que $g(p_i) > 0$ quando i é ímpar e $g(p_i) < 0$ quando i é par. Assim, se J não fosse uma união disjunta dos $J_{i'}$ s, necessariamente, a função f se alternaria em sinal mais do que n vezes. Consideremos, portanto, dois subintervalos J_k e J_{k+1} onde f se alterna em sinal e seja \bar{J}_k e \bar{J}_{k+1} as respectivas componentes conexas de J_k e J_{k+1} . Como f é contínua, segue que necessariamente, f

possui pelo menos uma alternância de sinal entre \bar{J}_k e \bar{J}_{k+1} . Então, como conhecemos o sinal de $g(p_i)$, poderíamos facilmente controlar o sinal de $(-1)^n g(p_i)$ e escolher convenientemente o sinal de $f(q_i)$ em um dos subintervalos entre \bar{J}_k e \bar{J}_{k+1} de modo que (2.42) ocorresse.

Agora, decorre imediatamente dessa conclusão e do Lema (2.6.2) que:

- (1) f não é identicamente nula em cada J_i , $i = 1, \dots, n$.
- (2) f não muda o seu sinal sobre J_i , $i = 1, \dots, n$.

Além disso, considerando que J é união disjunta dos J_i e que estamos supondo que (2.42) não ocorre para toda sequência $\{q_1, \dots, q_n\} \subset J$, conseguimos mostrar que:

- (3) Para algum $z_i \in J_i$,

$$(-1)^{n+i} f(z_i) > 0. \quad (2.43)$$

Com efeito. Sabemos que a função g se alterna da seguinte forma: $g(p_1) > 0$, $g(p_2) < 0$, $g(p_3) > 0$ e, assim, sucessivamente. Então, se n é par e (2.42) não ocorre, segue que $f(z_1) < 0$ e daí, $(-1)^{n+1} f(z_1) = (-1) \cdot f(z_1) > 0$. Portanto, (2.43) vale para $i = 1$ e, conseqüentemente, para os demais i 's, pois f é alternada. Analogamente, se n é ímpar e (2.42) não ocorre, segue que $f(z_1) > 0$ e então, $(-1)^{n+1} f(z_1) = 1 \cdot f(z_1) > 0$. Segue também que (2.43) vale para $i = 1$ e, conseqüentemente, para os demais i 's.

Observe que as afirmações (1) e (2) nos permite utilizar a idéia do Lema (2.6.1). Assim, em cada J_i a função f terá sinal constante. Para $i = 1, 2, \dots, n$, consideremos a função

$$g_i(x) = \int_{J_i} K(x, y) f(y) dy. \quad (2.44)$$

Então, adicionando as funções $g_i(x)$, com $i = 1, 2, \dots, n$, obtemos:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x). \quad (2.45)$$

Por outro lado, temos que os $g_i(x_j)$ nos dão a matriz:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Seja u o vetor do \mathbb{R}^n tal que $u_i = 1$, com $i = 1, \dots, n$. Então, usando (2.45), temos:

$$Gu = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Agora, usamos (2.43), juntamente com a condição:

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) > 0 \text{ para todo } n > 0,$$

do Teorema, para mostrar que os sinais das entradas do vetor u são todos negativos. Essa contradição provará o Teorema. Para tanto, precisamos calcular os sinais das entradas da matriz G^{-1} , cuja existência é garantida pela demonstração do Lema (2.6.1). Isso também ficará evidente durante a demonstração. Utilizamos indução sobre a ordem n da matriz G .

Quando $n = 3$, decorre de (2.43) que $f(y) \geq 0$ em J_1 , $f(y) \leq 0$ em J_2 e $f(y) \geq 0$ em J_3 . Como estamos interessados nos sinais dos elementos de G^{-1} , calcularemos os sinais de $\det(G)$ e dos cofatores de G . Assim, temos:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{bmatrix}.$$

Usando a notação do Lema (2.6.1), encontramos:

$$\det(G) = \int_{J_1} \int_{J_2} \int_{J_3} k(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) f(y_1) f(y_2) f(y_3) dy_1 dy_2 dy_3.$$

À partir daí, usando $n = 3$ na hipótese do Teorema, obtemos que $k(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) > 0$. Como $y_1 \in J_1$, $y_2 \in J_2$ e $y_3 \in J_3$, segue que $f(y_1) \geq 0$, $f(y_2) \leq 0$ e $f(y_3) \geq 0$. Finalmente, por (1) em (2.43), temos que f não se anula em quaisquer dos J_i , $i = 1, \dots, 3$. Portanto, analisando o sinal do integrando, obtemos que $\det(G) < 0$.

Agora, continuamos com o cálculo dos sinais dos cofatores de G , a fim de determinarmos os sinais das entradas da matriz G^{-1} . Como na seção 3, fazemos uso da expressão:

$$(G^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\{g_i(x_j)\})}{\det(G)}. \quad (2.48)$$

Assim, calculando os sinais dos cofatores de $g_1(x_1)$, $g_2(x_1)$ e $g_3(x_1)$ na 1ª linha de G , temos:

$$G_{11} = \begin{vmatrix} g_2(x_2) & g_3(x_2) \\ g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix} = \int_{J_2} \int_{J_3} k(x_2, x_3; y_2, y_3) f(y_2) f(y_3) dy_2 dy_3.$$

Note que aqui $n = 2$. Portanto, usando a hipótese do Teorema, obtemos que $k(x_2, x_3; y_2, y_3) < 0$. Segue ainda de (2.43) que $f(y_2) \leq 0$ e $f(y_3) \geq 0$ e f não se anula em quaisquer dos J_i , $i = 1, 2$. Assim, analisando o sinal do integrando, obtemos que $G_{11} > 0$. Então, aplicando (2.48), obtemos que $(G^{-1})_{11} < 0$.

$$G_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} g_1(x_2) & g_3(x_2) \\ g_1(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix} = (-1) \int_{J_1} \int_{J_3} k(x_2, x_3; y_1, y_3) f(y_1) f(y_3) dy_1 dy_3.$$

2.6. A PROPRIEDADE DE VARIAÇÃO DECRESCENTE

Novamente, pela hipótese do Teorema, $k(x_2, x_3; y_1, y_3) < 0$ e por (2.43), $f(y_1) \geq 0$ e $f(y_3) \geq 0$. Então, analisando o sinal do integrando e multiplicando pelo fator externo (-1) , obtemos $G_{12} > 0$. Por último, aplicando (2.48), obtemos que $(G^{-1})_{21} < 0$.

$$G_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} g_1(x_2) & g_2(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) \end{vmatrix} = \int_{J_1} \int_{J_2} k(x_2, x_3; y_1, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2.$$

De modo análogo ao item anterior, $k(x_2, x_3; y_1, y_2) < 0$ e por (2.43), $f(y_1) \geq 0$ e $f(y_2) \leq 0$. Então, analisando o sinal do integrando, obtemos $G_{13} > 0$. Por último, aplicando (2.48), obtemos que $(G^{-1})_{31} < 0$.

De modo análogo, na 2ª linha de G , a hipótese do Teorema nos dá:

$$k(x_1, x_3; y_2, y_3) < 0, k(x_1, x_3; y_1, y_3) < 0 \text{ e } k(x_1, x_3; y_1, y_2) < 0.$$

Então, calculando os sinais dos cofatores de $g_1(x_2)$, $g_2(x_2)$ e $g_3(x_2)$, temos:

$$G_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_2(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix} = (-1) \cdot \int_{J_2} \int_{J_3} k(x_1, x_3; y_2, y_3) f(y_2) f(y_3) dy_2 dy_3.$$

Como $k(x_1, x_3; y_2, y_3) < 0$, $f(y_2) \leq 0$ e $f(y_3) \geq 0$, a análise do sinal do integrando nos dá $G_{21} < 0$. Portanto, aplicando (2.48), encontramos $(G^{-1})_{12} > 0$.

$$G_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_3) & g_3(x_3) \end{vmatrix} = \int_{J_1} \int_{J_3} k(x_1, x_3; y_1, y_3) f(y_1) f(y_3) dy_1 dy_3.$$

No integrando temos $k(x_1, x_3; y_1, y_3) < 0$, $f(y_1) \geq 0$ e $f(y_3) \geq 0$. Então, $G_{22} < 0$. Portanto, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{22} > 0$.

$$G_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) \end{vmatrix} = (-1) \cdot \int_{J_1} \int_{J_2} k(x_1, x_3; y_1, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2.$$

Como $k(x_1, x_3; y_1, y_2) < 0$, $f(y_1) \geq 0$ e $f(y_2) \leq 0$, a análise do sinal do integrando nos dá $G_{23} < 0$. Portanto, aplicando (2.48), encontramos $(G^{-1})_{32} > 0$.

Até agora, concluímos que a primeira coluna de G^{-1} tem sinais negativos e a segunda coluna possui sinais positivos. Fazendo, então, os cálculos dos cofatores de G na terceira linha, temos:

$$G_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} g_2(x_1) & g_3(x_1) \\ g_2(x_2) & g_3(x_2) \end{vmatrix} = \int_{J_2} \int_{J_3} k(x_1, x_2; y_2, y_3) f(y_2) f(y_3) dy_2 dy_3.$$

Analogamente aos casos anteriores, a hipótese do Teorema nos dá:

$$k(x_1, x_2; y_2, y_3) < 0.$$

2.6. A PROPRIEDADE DE VARIAÇÃO DECRESCENTE

Como $f(y_2) \leq 0$ e $f(y_3) \geq 0$, a análise de sinal do integrando nos dá $G_{31} > 0$. Portanto, por (2.48) $(G^{-1})_{13} < 0$.

$$G_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_3(x_1) \\ g_1(x_2) & g_3(x_2) \end{vmatrix} = (-1) \cdot \int_{J_1} \int_{J_3} k(x_1, x_2; y_1, y_3) f(y_1) f(y_3) dy_1 dy_3.$$

Como $k(x_1, x_2; y_1, y_3) < 0$, $f(y_1) \geq 0$ e $f(y_3) \geq 0$, segue que $G_{32} > 0$. Assim, por (2.48), $(G^{-1})_{23} < 0$.

Finalmente,

$$G_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) \end{vmatrix} = \int_{J_1} \int_{J_2} k(x_1, x_2; y_1, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2.$$

De modo análogo, $k(x_1, x_2; y_1, y_2) < 0$, $f(y_1) \geq 0$ e $f(y_2) \leq 0$. Então, $G_{33} > 0$. Logo, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{33} < 0$.

Isso conclui que as entradas da terceira coluna de G^{-1} tem sinais negativos. Portanto, encontramos que a matriz dos sinais de G^{-1} é da forma:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} - & + & - \\ - & + & - \\ - & + & - \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, usando (2.47) e a hipótese (2.41), encontramos que os sinais de Gu são tais que:

$$Gu = \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto por G^{-1} , obtemos que:

$$G^{-1}.Gu = \begin{bmatrix} - & + & - \\ - & + & - \\ - & + & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = u. \quad (2.49)$$

Essa contradição, mostra o Teorema para o caso $n = 3$.

O caso $n = 3$ mostra de modo simples o que ocorre com a matriz G^{-1} quando n é um número natural ímpar. Observe que as colunas da matriz G^{-1} se alternam entre $-$ e $+$, com primeira e últimas colunas negativas. Para o caso geral, vamos supor, que n é um número natural par. Tal hipótese será importante para evitar que os cálculos fiquem demasiadamente grandes e não causará perda de generalidade. Assim, temos duas situações a considerar:

a) $k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) > 0$. Nesse caso, a hipótese

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) > 0 \text{ para todo } n > 0$$

2.6. A PROPRIEDADE DE VARIAÇÃO DECRESCENTE

do Teorema, implica que $\frac{n(n-1)}{2}$ também é par e, portanto, qualquer (j, i) menor do tipo $(n-1) \times (n-1)$ de G tem determinante positivo. Isto é, $k(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \widehat{y}_i, \dots, y_n) > 0$, onde $(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \widehat{y}_i, \dots, y_n)$ é um $(n-1)$ par circular. Isto é, em outras palavras, a combinação das duas condições implica que $n = 4k$. o símbolo $\widehat{}$ indica que os termos x_j e y_i foram omitidos.

b) $k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) < 0$. Aqui, a hipótese do Teorema impõe que $\frac{n(n-1)}{2}$ é ímpar. Então, qualquer (j, i) menor do tipo $(n-1) \times (n-1)$ de G tem determinante negativo. Isto é, $k(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \widehat{y}_i, \dots, y_n) < 0$, onde $(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \widehat{y}_i, \dots, y_n)$ é um $(n-1)$ par circular. Estamos dizendo, na realidade, que nesse caso $n = 2k$, com $n \neq 4k$.

Vamos analisar os casos (a) e (b) separadamente. No caso (a), temos:

$$\det(G) = \int_{J_1} \int_{J_2} \dots \int_{J_n} k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) f(y_1) \dots f(y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

Usando (2.43), obtemos que $(-1)^{4k+i} f(y) \geq 0 \implies (-1)^i f(y) \geq 0$, $y \in J_i$. Portanto, $f(y) \leq 0$ em J_1 , $f(y) \geq 0$ em J_2 e, de modo geral, $f(y) \leq 0$ em J_i para $i = 2k-1$ e $f(y) \geq 0$ em J_i para $i = 2k$. Observe então que o produto $f(y_1) \dots f(y_n)$ no integrando, possui $4k$ fatores onde o primeiro é negativo, o segundo é positivo e assim, sucessivamente, até o último, que é positivo. Logo, existe um número par de fatores negativos e, portanto, $\det(G) > 0$. Agora, fazemos os cálculos dos sinais dos cofatores de G , a fim de determinarmos os sinais dos $(G^{-1})_{ij}$.

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix}.$$

Assim, calculando os sinais dos cofatores na primeira linha de G , temos:

$$G_{11} = (-1)^{1+1} \det(\{g_1(x_1)\}) = \int_{J_2} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) f(y_2) \dots f(y_n) dy_2 \dots dy_n.$$

Observe que no integrando, $k(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) > 0$, conforme foi mostrado no início desse ítem, visto que esse determinante tem ordem $(n-1) \times (n-1)$. Com respeito ao produto $f(y_2) \dots f(y_n)$, temos que ele representa o produto do integrando de $\det(G)$ sem o fator $f(y_1) < 0$. Portanto, $f(y_2) \dots f(y_n) < 0$ e $G_{11} < 0$. Aplicando, então (2.48), obtemos $(G^{-1})_{11} < 0$.

Continuando, temos:

$$\begin{aligned} G_{12} &= (-1)^{1+2} \det(\{g_2(x_1)\}) \\ &= - \int_{J_1} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_2, \dots, x_n; y_1, y_3, \dots, y_n) f(y_1) f(y_3) \dots f(y_n) dy_1 dy_3 \dots dy_n. \end{aligned}$$

2.6. A PROPRIEDADE DE VARIAÇÃO DECRESCENTE

Como no caso anterior, $k(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) > 0$ e, com respeito ao produto $f(y_1)f(y_3)\dots f(y_n)$, segue que o mesmo é positivo, visto que o único fator ausente, quando comparado com o integrando de $\det(G)$, é $f(y_2) \geq 0$. Portanto, considerando o fator externo (-1) , obtemos que $G_{12} < 0$. Aplicando (2.48), encontramos $(G^{-1})_{21} < 0$. Observe que os sinais dos demais cofatores G_{1i} da primeira linha de G , se comportarão como G_{11} ou como G_{12} . Isto é, quando i for ímpar, o produto $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})\dots f(y_n)$ no integrando de G_{1i} não conterà a função $f(y_i) \leq 0$, conforme (2.43). Como o fator $(-1)^{1+i} = 1$, teremos $G_{1i} < 0$, visto que haverá um número ímpar de fatores negativos no integrando. Então, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{i1} < 0$. Por outro lado, quando i for par, o produto $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})\dots f(y_n)$ no integrando de G_{1i} não conterà a função $f(y_i) \geq 0$, conforme (2.43). Como o fator $(-1)^{1+i} = -1$, teremos $G_{1i} < 0$, visto que haverá um número par de fatores negativos no integrando, fazendo com que o mesmo fique positivo, mas, ao ser multiplicado pelo fator externo negativo, teremos $G_{1i} < 0$. Então, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{i1} < 0$. Isso conclui que a primeira coluna da matriz G^{-1} tem todas as entradas negativas.

Continuando, calculamos os cofatores na segunda linha de G .

$$\begin{aligned} G_{21} &= (-1)^{2+1} \det(\{g_1(x_2)\}) \\ &= - \int_{J_2} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_2, y_3, \dots, y_n) f(y_2) f(y_3) \dots f(y_n) dy_2 dy_3 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Note que o único fator do integrando de $\det(G)$ ausente no produto $f(y_2)f(y_3)\dots f(y_n)$ é $f(y_1) \leq 0$. Portanto, existe nesse produto um número ímpar de fatores negativos. Então $f(y_2)f(y_3)\dots f(y_n) < 0$. Como o fator externo é (-1) , segue que $G_{21} > 0$. Assim, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{12} > 0$.

$$\begin{aligned} G_{22} &= (-1)^{2+2} \det(\{g_2(x_2)\}) \\ &= \int_{J_1} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_1, y_3, \dots, y_n) f(y_1) f(y_3) \dots f(y_n) dy_2 dy_3 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Como na análise do sinal de G_{12} acima, observe que o produto $f(y_1)f(y_3)\dots f(y_n) > 0$. Assim, $G_{22} > 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{22} > 0$. Por fim, usando um argumento semelhante ao que foi utilizado acima, para a primeira linha de G , concluímos que os demais G_{2i} de G são positivos e, portanto, os $(G^{-1})_{i2} > 0$. Isso conclui que a segunda coluna de G^{-1} possui entradas todas positivas.

Continuando o processo, conseguimos caracterizar os sinais das colunas de G^{-1} da seguinte forma:

Fixando uma linha j da matriz G , suponha primeiro que j seja par. Como $k(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_n) > 0$, não afetará o sinal do integrando. Assim, se i for ímpar, o produto $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})\dots f(y_n)$ no integrando de G_{ji} não conterà a função $f(y_i) \leq 0$, conforme (2.43). Logo, o produto $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})\dots f(y_n) < 0$, haja vista que haverá um número ímpar de fatores negativos no produto. Como o

2.6. A PROPRIEDADE DE VARIAÇÃO DECRESCENTE

fator $(-1)^{i+j} = -1$, teremos $G_{ji} > 0$. Então, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} > 0$. Caso i seja par, o produto $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})\dots f(y_n) > 0$, visto que apenas o fator $f(y_i) \geq 0$ não estará no produto que, por sua vez, continuará com um número par de fatores negativos. Como $(-1)^{i+j} = (-1)^{2k+2a} = 1$, teremos $G_{ji} > 0$. Assim, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} > 0$. Isso significa que todas as colunas pares da matriz G^{-1} terão entradas positivas.

Agora, suponha que a linha j fixada seja ímpar. Então, argumentamos de forma semelhante ao caso anterior, com a diferença de que o fator $(-1)^{i+j}$ será positivo quando i for ímpar, fazendo com que $G_{ji} < 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} < 0$. Quando i for par, $(-1)^{i+j}$ será negativo, fazendo novamente com que $G_{ji} < 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} < 0$. Portanto, todas as colunas ímpares da matriz G^{-1} terão entradas negativas.

Observe ainda que a n -ésima coluna de G^{-1} é par e, então, será positiva. Finalmente, utilizando (2.47) e a hipótese (2.41), obtemos para os sinais de G_u uma matriz de n linhas com entradas ímpares positivas e entradas pares negativas. Isto é:

$$G_u = [+ \quad - \quad + \quad \dots \quad + \quad -]^T.$$

Portanto, multiplicando por G^{-1} , obtemos a mesma contradição de (2.49).

Agora, analisamos o caso (b). Calculamos inicialmente o $\det(G)$:

$$\det(G) = \int_{J_1} \int_{J_2} \dots \int_{J_n} k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) f(y_1) \dots f(y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

Como no caso (a), usando (2.43), obtemos que $(-1)^{2k+i} f(y) \geq 0 \implies (-1)^i f(y) \geq 0$, $y \in J_i$. Portanto, $f(y) \leq 0$ em J_1 , $f(y) \geq 0$ em J_2 e, de modo geral, $f(y) \leq 0$ em J_i para $i = 2k - 1$ e $f(y) \geq 0$ em J_i para $i = 2k$. Observe então que o produto $f(y_1)\dots f(y_n)$ no integrando, possui $2k$ fatores onde o primeiro é negativo, o segundo é positivo e assim, sucessivamente, até o último, que é positivo. Lembre-se que $n \neq 4k$. Logo, existe um número ímpar de fatores negativos e, portanto, o produto $f(y_1)\dots f(y_n) < 0$. Como $k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) < 0$, segue que $\det(G) > 0$. Agora, fazemos os cálculos dos sinais dos cofatores de G , a fim de determinarmos os sinais dos $(G^{-1})_{ij}$. Novamente, representamos primeiro a matriz G :

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{bmatrix}.$$

Então, calculando os cofatores na primeira linha de G , temos:

$$G_{11} = (-1)^{1+1} \det(\{g_1(x_1)\}) = \int_{J_2} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) f(y_2) \dots f(y_n) dy_2 \dots dy_n.$$

Como foi visto ao colocarmos o caso (b), o fator no integrando

$$k(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) < 0,$$

haja vista que esse determinante tem ordem $(n-1) \times (n-1)$. Com respeito ao produto $f(y_2)\dots f(y_n)$, temos que ele representa o produto do integrando de $\det(G)$ sem o fator $f(y_1) < 0$. Como $f(y_1)\dots f(y_n) < 0$, segue que, $f(y_2)\dots f(y_n) > 0$ e, portanto, $G_{11} < 0$. Aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{11} < 0$.

Com relação ao cofator de $g_2(x_1)$, temos:

$$\begin{aligned} G_{12} &= (-1)^{1+2} \det(\{g_2(x_1)\}) \\ &= - \int_{J_1} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_2, \dots, x_n; y_1, y_3, \dots, y_n) f(y_1) f(y_3) \dots f(y_n) dy_1 dy_3 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Sabemos que $k(x_2, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) < 0$ e que o produto $f(y_1) f(y_3) \dots f(y_n) < 0$, visto que ele foi obtido através da retirada do fator $f(y_2) > 0$ do produto $f(y_1) \dots f(y_n) < 0$. Portanto, considerando o fator externo (-1) , obtemos que $G_{12} < 0$, já que o mesmo pode ser visto como o produto de três números positivos. Aplicando (2.48), encontramos $(G^{-1})_{21} < 0$. Uma argumentação quase que inteiramente análoga ao caso (a) conclui que a primeira coluna da matriz G^{-1} tem entradas todas negativas. Por exemplo, o sinal do cofator de G_{1n} é tal que:

$$\begin{aligned} G_{1n} &= (-1)^{1+n} \det(\{g_n(x_1)\}) \\ &= - \int_{J_1} \int_{J_2} \dots \int_{J_{n-1}} k(x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-1}) f(y_1) \dots f(y_{n-1}) dy_1 \dots dy_{n-1}. \end{aligned}$$

Como n é par, $(-1)^{1+n} = -1$. O produto $f(y_1) \dots f(y_{n-1}) < 0$, visto que apenas $f(y_n) > 0$ foi retirado de um produto que já era negativo. Além disso, $k(x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-1}) < 0$. Logo, $G_{1n} < 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{n1} < 0$.

Continuando o processo, calculamos os cofatores na segunda linha de G .

$$\begin{aligned} G_{21} &= (-1)^{2+1} \det(\{g_1(x_2)\}) \\ &= - \int_{J_2} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_2, y_3, \dots, y_n) f(y_2) f(y_3) \dots f(y_n) dy_2 dy_3 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Aqui, temos que $f(y_2) f(y_3) \dots f(y_n) > 0$, visto que o produto $f(y_1) \dots f(y_n) < 0$ e, no primeiro produto, não aparece o fator $f(y_1) < 0$. Como $k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_2, y_3, \dots, y_n) < 0$, obtemos que $G_{21} > 0$, já que com respeito ao sinal, pode ser visto como o produto de dois números negativos. Assim, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{12} > 0$.

$$\begin{aligned} G_{22} &= (-1)^{2+2} \det(\{g_2(x_2)\}) \\ &= \int_{J_1} \int_{J_3} \dots \int_{J_n} k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_1, y_3, \dots, y_n) f(y_1) f(y_3) \dots f(y_n) dy_2 dy_3 \dots dy_n. \end{aligned}$$

2.6. A PROPRIEDADE DE VARIAÇÃO DECRESCENTE

Nesse caso, $f(y_1)f(y_3)\dots f(y_n) < 0$, já que $f(y_1)\dots f(y_n) < 0$ e $f(y_2) > 0$. Como $k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_1, y_3, \dots, y_n) < 0$, o integrando na igualdade anterior é positivo. Então, $G_{22} > 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{22} > 0$. Observamos assim, que o sinal de qualquer G_{2i} é determinado pelo produto do sinal de três objetos: $k(x_1, x_3, \dots, x_n; y_1, y_3, \dots, y_n) < 0$, da potência $(-1)^{2+i}$ e $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})$, com $(n-1)$ fatores. Quando i for ímpar, $(-1)^{2+i} = -1$ e o produto

$$f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1}) > 0,$$

o que implica que $G_{2i} > 0$. Quando i for par, $(-1)^{2+i} = 1$ e o produto finito de $(n-1)$ fatores $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1}) < 0$, o que implica que $G_{2i} > 0$. Portanto, em qualquer que seja a situação, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{i2} > 0$. Isto é, todas as entradas da segunda coluna de G são positivas.

Continuando o processo, argumentamos de modo análogo ao caso (a), a fim de caracterizar os sinais das colunas de G^{-1} . Lembre-se que aqui, $k(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) < 0$. Assim, sempre afetará o sinal do integrando, diferentemente do caso (a) estudado. Portanto:

Fixando uma linha j da matriz G , suponha primeiro que j seja par. Assim, se i for ímpar, o produto, de $(n-1)$ fatores, $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1})$ no integrando de G_{ji} não conterà a função $f(y_i) \leq 0$ e não é nula, conforme (2.43). Logo, o produto $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1}) > 0$, haja vista que haverá um número par de fatores negativos no produto. Como o fator $(-1)^{i+j} = -1$, teremos $G_{ji} > 0$, pois, $k(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) < 0$. Então, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} > 0$. Caso i seja par, o produto, de $(n-1)$ fatores, $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1}) < 0$, visto que apenas o fator $f(y_i) \geq 0$ e não nulo estará ausente no produto que, por sua vez, continuará com um número ímpar de fatores negativos. Como $(-1)^{i+j} = (-1)^{2k+2a} = 1$, teremos $G_{ji} > 0$. Assim, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} > 0$. Isso significa que todas as colunas pares da matriz G^{-1} terão entradas positivas.

Agora, suponha que a linha j fixada seja ímpar. Então, argumentamos de forma análoga ao caso anterior, com a diferença de que o fator $(-1)^{i+j}$ será positivo quando i for ímpar, fazendo com que $G_{ji} < 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} < 0$. Quando i for par, o fator $(-1)^{i+j}$ será negativo. O produto, de $(n-1)$ fatores, $f(y_1)\dots f(y_{i-1})f(y_{i+1}) < 0$. Visto que $k(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n; y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n) < 0$, teremos novamente que $G_{ji} < 0$ e, aplicando (2.48), obtemos $(G^{-1})_{ij} < 0$. Portanto, todas as colunas ímpares da matriz G^{-1} terão entradas negativas.

Observe também que a n -ésima coluna de G^{-1} é par e, então, será positiva. Novamente, como no caso anterior, utilizamos (2.47) e a hipótese (2.41), para obter os sinais de Gu , isto é, uma matriz de n linhas com entradas ímpares positivas e entradas pares negativas.

$$Gu = [+ \quad - \quad + \quad \dots \quad + \quad -]^T.$$

Portanto, fazendo também o produto G^{-1} por Gu , obtemos a mesma contradição de (2.49). Isto é, um vetor com todas as entradas negativas que, claramente é diferente do vetor $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$. Isso conclui a nossa demonstração. ■

Apêndice A

Variedade Diferenciável

Definição A.0.4 : Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:

- (i) $\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.
- (ii) Para todo par α, β , com $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ são diferenciáveis.
- (iii) A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições (i) e (ii).

O par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ com $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *carta coordenada* ou *vizinhança coordenada* de M em p . As composições $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ e $(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ são chamadas de *mudanças de coordenadas* ou *mapa de transição*.

Uma família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

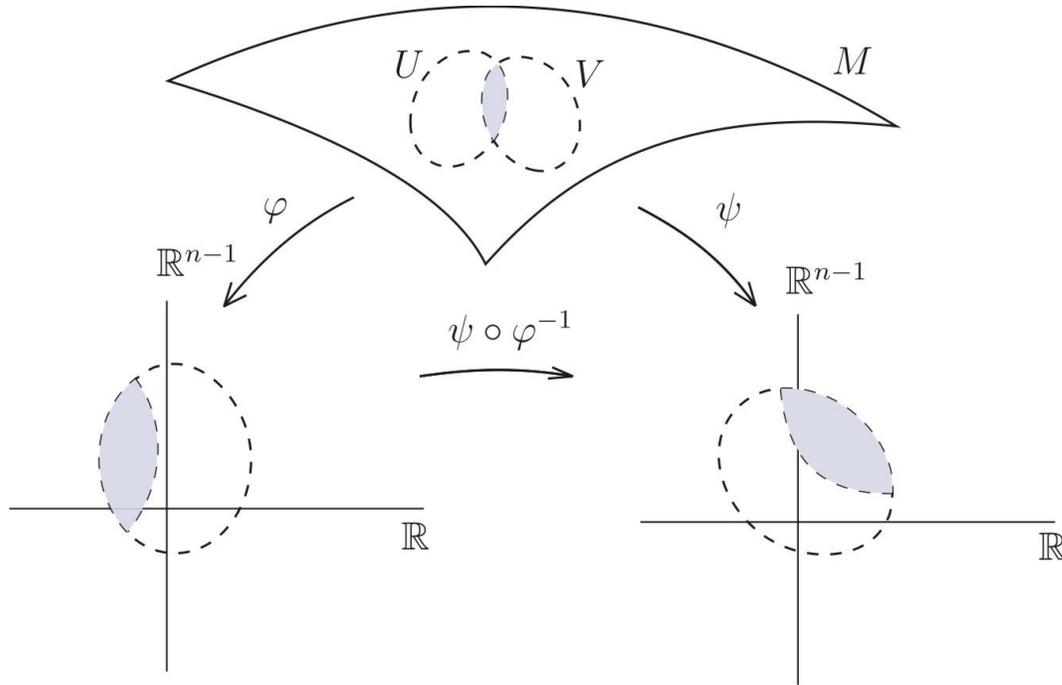
Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de maneira natural uma topologia em M . Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de \mathbb{R}^n para todo α . Observe ainda que a topologia é definida de maneira que os conjuntos $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações φ_α são contínuas.

Exemplo A.0.5 Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Considere $\{E_i\}_{i=1}^n$ base de V . Tomando $\{U, \varphi\}$, com $U = \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \varphi(x) = x^i E_i \end{aligned}$$

Segue que φ é o isomorfismo linear canônico. Portanto, V é uma variedade diferenciável.

A figura abaixo mostra uma variedade diferenciável M de dimensão n com o mapa de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$. Observe que as aplicações biunívocas ψ e φ aparecem com sentido inverso ao apresentado na definição acima. Todavia, as situações são equivalentes.



A fim de incluímos no nosso estudo estruturas como a semi-esfera do \mathbb{R}^2 , o disco fechado $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, etc., ampliaremos o nosso conceito de variedade diferenciável. Além disso, faremos à partir daqui uma restrição sobre a topologia de uma variedade diferenciável M . Tal restrição será importante, por exemplo, para garantirmos que uma variedade diferenciável M possui *métrica Riemanniana*. Portanto, exigiremos que:

Dados dois pontos p, q de M , com $p \neq q$, existam vizinhanças desses dois pontos que não se interceptam. Isto é, M é Hausdorff.

A variedade M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas. Isto é, M é Segundo Contável.

A.1 Variedade com Bordo

Ao conjunto \mathbb{H}^n de \mathbb{R}^n dado por $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ chamamos de semi-espaço superior \mathbb{H}^n .

O subconjunto $\{x \in \mathbb{H}^n; x_n = 0\}$ é chamado bordo de \mathbb{H}^n . Notação: $\partial\mathbb{H}^n$.

Um ponto $q \in \partial\mathbb{H}^n$ é chamado ponto de fronteira, enquanto que um ponto $p \in \mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ é chamado ponto interior de \mathbb{H}^n . Notação: $int(\mathbb{H}^n)$.

Definição A.1.1 : Dizemos que um espaço topológico M é uma variedade com bordo quando, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de M e um homeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, onde V_α é um conjunto aberto de \mathbb{H}^n , a mudança de coordenadas:

$$f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ é } C^\infty.$$

Quando dizemos que V_α é um aberto de \mathbb{H}^n , estamos usando em \mathbb{H}^n a topologia induzida do \mathbb{R}^n .

A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ define uma estrutura diferenciável sobre M .

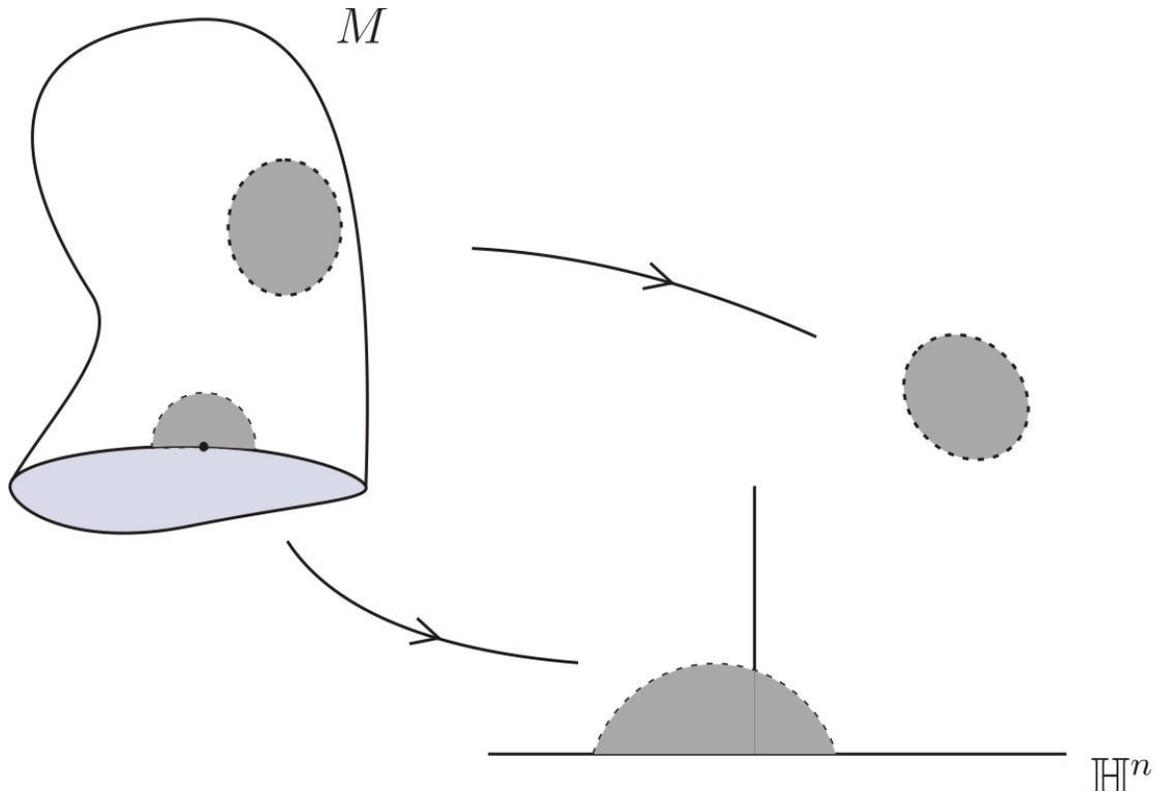
O conjunto dos pontos $p \in U_\alpha$ que são levados por φ_α para $\partial\mathbb{H}^n$ é chamado de bordo de M . Notação: ∂M .

Se $\partial M = \emptyset$, temos uma variedade diferenciável M de acordo com a definição anterior.

Definição A.1.2 *Seja M uma variedade com bordo. Dizemos que $p \in M$ é um ponto de fronteira de M se uma escolha adequada de um homeomorfismo $\varphi: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, como acima, leva p para um ponto $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. Um ponto $p \in M$ é dito ponto interior de M , notação: $\text{int}(M)$, se o homeomorfismo $\varphi: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ leva p para um ponto $\varphi(p) \in \text{int}(\mathbb{H}^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$*

Dessa definição percebemos que um ponto $p \in M$ não pode, simultaneamente, pertencer à fronteira de M e ao interior de M . Isto é, $M = \partial M \cup \text{int}(M)$.

A figura seguinte mostra uma variedade com bordo M com os dois tipos de abertos básicos.



Exemplo A.1.3 *O disco unitário fechado $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ é uma variedade com bordo.*

Demonstração: Sabemos que $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ e que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Como \mathbb{D}^2 é um subespaço topológico de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^2 é Hausdorff e segundo contável, segue que \mathbb{D}^2 também é. Portanto, precisamos apenas encontrar o homeomorfismo.

Mostraremos primeiro que um ponto arbitrário de \mathbb{D}^2 será um ponto de fronteira de \mathbb{D}^2 se, e somente se, o vetor e_1 da base canônica de \mathbb{R}^2 é um ponto de fronteira. Em outras palavras, que $S^1 = \partial\mathbb{D}^2$.

Para tanto, usaremos a ação da matriz de $O(2)$ (grupo das matrizes ortogonais de ordem 2) sobre o \mathbb{R}^2 .

Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ a matriz de $O(2)$, onde $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (c, d)$ são vetores unitários e ortogonais.

Então $A(e_1) = (a, b)$. Como (a, b) é unitário, segue que

$$a^2 \leq a^2 + b^2 = \|A(e_1)\|^2 = 1. \quad (\text{A.1})$$

$$\implies -1 \leq a \leq 1$$

Como $\cos \theta : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ é uma função contínua, segue que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos \theta$

Agora, usando A.1, temos que $b = \sin \theta$. Observe que não perdemos generalidade em excluir a possibilidade de b ser negativo, visto que v_1 é uma coluna da matriz $A \in O(2)$.

Assim, $v_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$. Como v_2 é unitário e v_1 e v_2 são ortogonais, segue que $v_2 = \pm(-\sin \theta, \cos \theta)$

Concluimos que existem duas possibilidades para a matriz A de $O(2)$:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Note agora que $A(e_1)$ é a primeira coluna da matriz $A \in O(2)$ e que $A(e_2)$ é a segunda coluna de A .

Por último, considerando que $O(2)$ age transitivamente sobre S^1 , temos que todo vetor unitário $v \in S^1$ ocorre como a 1ª coluna de alguma matriz $B \in O(2)$ e que $B^{-1} = B^T$, segue que $B^{-1}(v) = e_1, \forall v \in S^1$.

Isso conclui a nossa primeira parte.

Considere agora em \mathbb{D}^2 a vizinhança U de e_1 definida por $U = \{(x, y) \in \mathbb{D}^2; x > 0\}$.

Então a aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (y, x - \sqrt{1 - y^2})$ é tal que:

Dado $u \in U$ unitário, segue do uso de coordenadas polares que:

$$\varphi(u) = \varphi(\cos \theta, \sin \theta) = (\sin \theta, \cos \theta - \sqrt{1 - \sin^2 \theta}) = (\sin \theta, 0).$$

Isto é,

$$\varphi(u) \subset \partial\mathbb{H}^2. \quad (\text{A.2})$$

Além disso, é claro que se $u \in U$ não é unitário, então $\varphi(u) \subset \text{int}(\mathbb{H}^2)$.

Como φ é contínua e $\varphi^{-1}(a, b) = (b + \sqrt[3]{1 - a^2}, a)$ também é contínua, segue que φ é um homeomorfismo.

Ora, decorre de A.2 que $\varphi(S^1) \subset \partial\mathbb{H}^2$ e, sabendo que a bola aberta do \mathbb{R}^2 é dada por

$$\mathbb{D}^2 \setminus S^1 = B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\},$$

temos que:

$$\varphi(B^2) \subset \text{int}(\mathbb{H}^2).$$

Por último, como qualquer um outro homeomorfismo ψ se comporta de maneira análoga a φ , teremos que as mudanças de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \varphi^{-1}$ são C^∞ .

Isso conclui a nossa demonstração. ■

Proposição A.1.4 *Sejam M e N duas variedades de mesma dimensão n e com bordo ∂M e ∂N , respectivamente. Se $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então:*

- (i) : $\varphi(\partial M) = \partial N$.
- (ii) : $\varphi(\text{int}(M)) = \text{int}(N)$.

Demonstração: Sabemos que φ é um difeomorfismo. Em particular, φ é um difeomorfismo local. Assim, $\forall p \in \text{int}(M)$, existe um aberto $U \subset M$ em torno de p tal que $\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U)$ ainda é um difeomorfismo e $\varphi(U)$ é um aberto de N . Logo, $\varphi(p) \in \text{int}(N)$. Como isso ocorre para todo $p \in \text{int}(M)$, segue que $\varphi(\text{int}(M)) \subset \text{int}(N)$. Agora, usando o fato de que φ e φ^{-1} são aplicações abertas, temos que $\varphi(\partial M) \subset \partial N$ e $\varphi^{-1}(\partial N) \subset \partial M$, visto que ∂M é fechado em M e ∂N é fechado em N . De maneira análoga, temos que $\varphi^{-1}(\text{int}(N)) \subset \text{int}(M)$. Isso mostra os resultados. ■

A.2 Variedade Riemanniana

Estamos interessados na idéia de fazer medições sobre uma variedade diferenciável M . Fazemos isso através de um objeto que chamamos métrica Riemanniana. Para tanto, precisamos de algumas definições.

Definição A.2.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Dado $p \in M$, uma aplicação linear*

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow X_f \end{aligned} ,$$

satisfazendo a propriedade:

$$X(fg) = f(p)X_g + g(p)X_f, \forall f, g \in C^\infty(M).$$

é chamada derivação em p .

O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em $p \in M$ é um espaço vetorial chamado espaço tangente a M em p , denotado por T_pM . Um elemento $X \in T_pM$ é chamado um vetor tangente a M em p . O espaço dual de T_pM , denotado por T_p^*M é denominado espaço cotangente a M em p . Seus elementos são chamados de covetores em p .

Agora, apresentamos a definição de métrica Riemanniana.

Consideremos $\mathcal{S}_{ym}^2(M)$ o fibrado das aplicações bilineares simétricas de TM . Isto é,

$$\mathcal{S}_{ym}^2(M) = \cup_{p \in M} \mathcal{S}_{ym}^2(T_pM) = \{(p, B); p \in M \text{ e } B \in \mathcal{S}_{ym}^2(T_pM)\}.$$

Definição A.2.2 *Uma métrica Riemanniana sobre uma variedade diferenciável M é uma secção do fibrado $\mathcal{S}_{ym}^2(M)$. Isto é, um mapa $C^\infty(M, \mathcal{S}_{ym}^2(M))$ tal que:*

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow \mathcal{S}_{ym}^2(M) \\ p &\longmapsto g_p \end{aligned} ,$$

de forma que:

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longmapsto g_p(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

onde $g_p(X_p, Y_p)$ é uma forma bilinear simétrica e positiva definida.

Considerando os atlas $\mathcal{A} = \{C_\alpha\}$ de M e $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ de $\mathcal{S}_{ym}^2(M)$, definidos, respectivamente, por:

$$C_\alpha(\pi_B) = x \text{ e } B_\alpha(B) = (C_\alpha(\pi_B), B_p(\partial_\alpha^i|_p, \partial_\alpha^j|_p)) \in \tilde{U}_\alpha \times S_n,$$

onde S_n é o conjunto das matrizes simétricas de ordem n . Temos que, em coordenadas locais, g se escreve por:

$$\tilde{g}(x) = B_\alpha \circ g \circ C_\alpha^{-1}(x) = (x, G_\alpha(x)),$$

onde $G_\alpha \in C^\infty(\tilde{U}_\alpha, S_n)$ e $G_\alpha(x) = [g_p(\partial_\alpha^i|_p, \partial_\alpha^j|_p)]$.

Definição A.2.3 *Uma variedade Riemanniana é um par (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica Riemanniana sobre M .*

O fato de podermos associar uma métrica Riemanniana a uma variedade diferenciável está sustentado na seguinte proposição:

Proposição A.2.4 *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Demonstração: Para ver uma prova consultar [5] ou [13]. ■

Definição A.2.5 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$, chamamos de push-forward associado com F ao operador:*

$$F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N \text{ definido por } (F_* X)(f) = X(f \circ F). \quad (\text{A.3})$$

onde $f \in C^\infty(N)$.

Observação A.2.6 *O operador $F_* X$ é linear e é uma derivação em $F(p)$.*

De fato. Note que $X(f \circ F)$ tem sentido, visto que $f \in C^\infty(N) \implies f \circ F \in C^\infty(M)$. Sendo $X, Y \in T_p M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ a linearidade segue do fato de que X e Y são derivações. Isto é:

$$\begin{aligned} F_*(X + \lambda Y)(f) &= (X + \lambda Y)(f \circ F) \\ &= X(f \circ F) + \lambda(Y)(f \circ F) \\ &= F_* X + \lambda F_* Y \end{aligned}$$

Não há dificuldades em verificar que o operador $F_* X$ satisfaz a propriedade que caracteriza uma derivação.

Definição A.2.7 *Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Suponha $p \in M$ um ponto arbitrário. O operador*

$F^ : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ definido por $(F^* \xi)(X) = \xi(F_* X)$ para $\xi \in T_{F(p)}^* N$ e $X \in T_p M$ é chamado de pullback associado com F .*

Dizemos que o pullback F^* é produzido pelo push-forward F_* através de uma dualização deste. O pullback é de fundamental importância, visto que ele nos permite a recuperação da métrica. Essa propriedade está explicitada na seguinte proposição:

Proposição A.2.8 *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo e g uma métrica sobre N . Então $F^* g$ é uma métrica em M .*

Demonstração: Verificaremos primeiro que F^*g é bilinear.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in TM$. Então:

$$F^*g(\alpha X, \beta Y)_p = g(F(p))(dF_p(\alpha X_p), dF_p(\beta Y_p)).$$

Como dF_p é linear, temos:

$$F^*g(\alpha X, \beta Y)_p = g(F(p))(\alpha dF_p(X_p), \beta dF_p(Y_p)).$$

Usando o fato de que g é uma métrica, obtemos:

$$F^*g(\alpha X, \beta Y)_p = \alpha \cdot \beta \cdot g(F(p))(dF_p(X_p), dF_p(Y_p)).$$

Portanto, isso conclui que:

$$F^*g(\alpha X, \beta Y)_p = \alpha \cdot \beta \cdot F^*g(X, Y)_p.$$

Considere agora os campos $X^1, Y^1, X^2, Y^2 \in TM$. Então:

$$F^*g(X^1 + X^2, Y^1 + Y^2)_p = g(F(p))(dF_p(X_p^1 + X_p^2), dF_p(Y_p^1 + Y_p^2)).$$

Usando a linearidade de dF_p encontramos:

$$F^*g(X^1 + X^2, Y^1 + Y^2)_p = g(F(p))(dF_p(X_p^1) + dF_p(X_p^2), dF_p(Y_p^1) + dF_p(Y_p^2)).$$

Agora, considerando que g é uma métrica, segue que:

$$\begin{aligned} F^*g(X^1 + X^2, Y^1 + Y^2)_p &= g(F(p))(dF_p(X_p^1), dF_p(Y_p^1)) + g(F(p))(dF_p(X_p^1), dF_p(Y_p^2)) \\ &\quad + g(F(p))(dF_p(X_p^2), dF_p(Y_p^1)) + g(F(p))(dF_p(X_p^2), dF_p(Y_p^2)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$F^*g(X^1 + X^2, Y^1 + Y^2)_p = F^*g(X^1, Y^1)_p + F^*g(X^2, Y^1)_p + F^*g(X^2, Y^1)_p + F^*g(X^2, Y^2)_p.$$

Isso conclui que F^*g é bilinear.

Agora, vamos verificar a positividade de F^*g . Seja $X_p \neq 0$. Então:

$$F^*g(X, X)_p = g(F(p))(dF_p(X_p), dF_p(X_p)).$$

Mas, $dF_p(X_p) \neq 0$, visto que dF_p é um isomorfismo linear. Além disso, g é uma métrica. Portanto,

$$g(F(p))(dF_p(X_p), dF_p(X_p)) > 0.$$

Isso garante que $F^*g(X, X)_p > 0$ e, de maneira análoga, que:

$$F^*g(X, X)_p = 0 \Leftrightarrow X_p = 0.$$

Por último, dados $X, Y \in TM$, usamos o fato de g ser uma métrica para obter:

$$\begin{aligned} F^*g(X, Y)_p &= g(F(p))(dF_p(X_p), dF_p(Y_p)) \\ &= g(F(p))(dF_p(Y_p), dF_p(X_p)) \\ &= F^*g(Y, X)_p. \end{aligned}$$

Isso garante a simetria. Portanto, concluímos que F^*g é uma métrica em M . ■

A.3 Resultados Clássicos

Teorema A.3.1 (*Princípio do Máximo*). *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω . Suponha que:*

$$Lu \geq 0 \quad (Lu \leq 0) \text{ em } \Omega. \tag{A.4}$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então o máximo (mínimo) de u é atingido sobre $\partial\Omega$, isto é:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u)$$

Demonstração: Consultar [7]. ■

Nesse Teorema, o operador Lu pode estar na forma divergente. Isto é:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n D_j(a^{ij} D_i u).$$

O operador L é chamado elíptico quando a matriz $[a^{ij}(x)]$ é positiva para todo $x \in \Omega$. D_j indica $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Para o caso $n = 2$, temos que:

$$Lu = D_1[a^{11}D_1u + a^{21}D_2u] + D_2[a^{12}D_1u + a^{22}D_2u].$$

Ou seja, a matriz $[a^{ij}(x)]$ é dada por:

$$[a^{ij}] = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}.$$

Supondo $a^{ij} = 0$ para $i \neq j$, temos:

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1} [a^{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}] + \frac{\partial}{\partial x_2} [a^{22} \frac{\partial u}{\partial x_2}].$$

Quando $a^{11} = a^{22} = \gamma$, podemos escrever Lu da forma:

$$Lu = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \gamma(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \right) \right\rangle.$$

Ou seja:

$$Lu = \nabla \cdot (\gamma \nabla u).$$

Concluimos apresentando uma proposição importante.

Proposição A.3.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Para qualquer conjunto fechado $A \subset M$ existe um conjunto aberto U contendo A e existe uma função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi \in C^\infty(M)$, tal que $\psi \equiv 1$ em A e $\text{supp}(\psi) \subset U$.*

A demonstração da proposição acima utiliza o teorema da existência de partição da unidade. Para ver detalhes consulte [10].

Referências Bibliográficas

- [1] Bârza, I. and Guisa, D. Explicit Formulas for Green's Functions on the Annulus and on Möbius Strip. *Acta Applicandae Mathematicae* 54: 289-302.
- [2] Bishop, Richard L and Golberg, Samuel L. *Tensor Analysis On Manifolds*. Dover Publications. New York, 1980.
- [3] Calderón, A. P. On an Inverse Boundary-value Problem. *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1980.
- [4] Cardoso, Fernando A. F. Gómez, P. and Mendoza, R. Injectivity of the Dirichlet-to-Neumann Functional and the Schwarzian Derivative. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences* (Submetido).
- [5] Carmo, Manfredo Perdigão do. *Geometria Riemanniana*. IMPA. Rio de Janeiro, 1979.
- [6] E.B.Curtis, D. Ingerman and J. Morrow, Circular Planar Graphs and Resistor Networks, *Linear Algebra and Its Applications*, 283 (1998) 115-150.
- [7] Gilbarg, David. and Trudinger, Neil S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2^a edition. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] D. Ingerman. Discrete and Continuous Inverse Boundary Problems on a Disc. Ph.D Thesis University of Washington, 1997.
- [9] D. Ingerman and J. A. Morrow. On a Characterization of the Kernel of the Dirichlet-to-Neumann Map for a Planar Region. *SIMMA*. Vol. 29 Number 1 pp. 106-115, 1998.
- [10] Figueiredo, Djairo Guedes. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA. Rio de Janeiro, 1977.
- [11] Gómez, P. Mendoza, R. Uniqueness for the Dirichlet-Neumann elliptic functional. *Inverse Problems*, 22 (2006) 1575-1578.
- [12] Guillarmou, C. and Sá Barreto, A. Inverse Problems for Einstein Manifolds. *Inverse Problem and Imaging*. 3 (2009). 1-15.

- [13] Lee, John. M. Introduction to Smooth Manifolds. Springer. New York, 2000.
- [14] Lima, Elon Lages. Álgebra Linear. 6^a edição. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [15] Lima, Elon Lages. Curso de Análise. Vol.2. IMPA. Rio de Janeiro, 2005.
- [16] Lima, Victor Hugo Cavalcanti. Métricas do Disco e o Funcional de Dirichlet-Neumann. Março/2000. João Pessoa. 50 p. Dissertação (Mestrado em Matemática - UFPB - Campus I).
- [17] Medeiros, L.A. Miranda, M. M. Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos), IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [18] Spivak, Michael. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol 1. Publish or Perish. Houston, 1979.
- [19] Stefan Bergman and M. Schiffer. Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. Academic Press. New York, 1953.
- [20] Taylor, Michael E. Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations. Springer-Verlag. New York, 1996.
- [21] Uhlmann, G. Recent Progress in the Anisotropic Electrical Impedance Problem. J. Diff. Eq. Conf. 06 (2001). 301-311.
- [22] Weintraub, Steven H. Differential Forms: A Complement to Vector Calculus. Academic Press. San Diego, 1997.