Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Grupos de Divisibilidade e Reticulados

por

Andréa Maria Ferreira Moura
sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2010
João Pessoa - PB

M929g Moura, Andréa Maria Ferreira.
Grupos de divisibilidade e reticulados / Andréa Maria Ferreira Moura.- João Pessoa, 2010.
50f.
Orientador: Antônio de Andrade e Silva
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Grupos ordenados. 3. Grupos de divisibilidade.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Grupos de Divisibilidade e Reticulados

por

Andréa Maria Ferreira Moura

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans - IME-USP

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Sousa - UFPB

Prof. Dr. José Gomes de Assis - UFPB (Suplente)

Agosto/2010

Agradecimentos

Aos meus pais José Orismilde de Moura e Eva Maria de Fátima Moura pelo empenho que fizeram para me proporcionar uma educação de boa qualidade. Por terem me ensinado desde muito cedo o valor do estudo e me mostrado que a educação é a maior herança eles poderiam me deixar.

Aos meus irmãos Maria José Nogueira Moura, Maria de Fátima Nogueira Moura, José Orismilde de Moura Júnior e Daniela Maria Ferreira Moura pela união, incentivo e companheirismo que sempre esteve presente entre nós.

Ao Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva, que mesmo não tendo sido efetivamente meu professor me aceitou como sua orientanda, eu agradeço pela paciência, amizade e incentivo profissional.

A todos os professores da pós-graduação pelo conhecimento transmitido e por terem contribuindo diretamente no meu amadurecimento acadêmico. Em m especial ao Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino que num momento difícil me mostrou que um bom matemático é aquele que ver além dos números, obrigada pela confiança.

Ao Prof. Dr. João Montenegro de Miranda que mesmo após algum tempo afastada do meio acadêmico continuou me incentivando a ampliar os meus horizontes.

Ao Prof. Cleiton Batista Vasconcelos pelos ensinamentos matemáticos e não matemáticos e principalmente pelo exemplo de profissional que me transmitiu durante o período que tive a oportunidade de ser sua monitora.

A todos os amigos e colegas da pós-graduação pelas experiências trocadas e pela espírito família que permeava nosso convívio, sábia que sem vocês tudo teria sido mais difícil. Em especial a Anderson Valença, José Eduardo, Elano Diniz e Ana Cicília pela amizade.

Aos amigos Algebrista Pryscilla dos Santos (braços) Geraldo Júnior (cabeça) e Maikon Livi (pernas) pela paciência nas inúmeras horas de estudo.

Por fim agradeço a todas as pessoas que torceram por mim e que de alguma forma me apoiaram nos meus estudos.

Dedicatória

Aos amigos e companheiros de curso tão importantes nessa minha conquista.

Resumo

Apresentamos nesse trabalho uma classificação completa de sub-reticulados de $(\mathbb{Z}^n, +, \geq)$ que não são grupos de divisibilidade. Deste modo, nós fornecemos uma nova classe de grupos ordenados que são filtrados, mas não são grupos de divisibilidade. Os sub-reticulados aqui apresentados generaliza os exemplos de P. Jaffard e G. G. Bastos.

Palavras chave:

Grupos ordenados, grupos de divibilidade, reticulados.

Abstract

We present in this work a complete classification of the sublattices of $(\mathbb{Z}^n, +, \geq)$ which are not groups of divisibility. Thus we provide a new class of ordered filtered groups of which are not groups of divisibility. The sublattices presented here generalize the exemples of P.Jaffard and G. G. Bastos

Key words- Ordered groups, groups of divisibility, lattices.

Notação

[ ] - Indica referências.
G - Grupo.
W- Produto direto ordenado.
D - Domínio de integridade.
$G \simeq G'$ - Isomorfismo entre G e G'.
$\leq$ - Indica uma relação de ordem (parcial ou total).
G_+ - Conjunto dos elementos positivos do grupo G.
$U(D)$ - Indica o conjunto de todas as unidades de D.
$\mathcal{G}_k(D)$ - Grupo de divisibilidade de D em K.
$\prod$- Produtório.
v - Valorização.
A_v - Anel de valorização de v em K, onde K é corpo de frações de A.
$\frac{G}{H}$ - Grupo quociente de G por H.
Λ - Reticulado.
I - Conjunto de índices.
(a) - Ideal gerado pelo elemento a.
$\langle \ | \ \rangle$ Produto interno.

Sumário

Introdução

Histórico

O célebre Teorema de Krull-Jaffard-Ohm nos diz que qualquer l-grupo pode ser visto como um grupo de divisibilidade de um certo domínio de integridade D. Porém esse resultado não é válido quando trabalhamos com grupos filtrados. O próprio Jaffard foi responsável por nos apresentar um exemplo de um grupo filtrado que não é grupo de divisibilidade. A saber,

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Bastos em [1] (1988), a partir do exemplo de Jaffard, encontrou uma maneira de generalizar esses grupos filtrados que não são grupos de divisibilidade. Esses grupos foram denominados de Gurpos de Jaffard. Nesse mesmo trabalho, Bastos estudou os Grupo de Jaffard em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e conseguiu encontrar uma condição necessária e sulficiente para que um subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ seja um grupo de divisibilidade. Essa condição é que este subgrupo seja um l-grupos. A estrátegia utilizada por ele para alcançar este resultado foi mostrar que um subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um Grupo de Jaffard, se, somente se, não é um l-grupo. Porém esta técnica não se mostrou eficiente para generalizar esse resultado para o caso em que temos um subgrupo de $\mathbb{Z}^n$, com $n \geq 3$. A principal dificuldade encontrada foi que uma das condições presente na definição de Grupo de Jaffard dada por Bastos é feita apenas para $n = 2$ (a condição (J_2)).

Silva, Juriaans e Bastos em [11] (2008) generaliza o resultado obtido por Bastos. A estrátegia por eles escolhida não faz uso da definição de Grupos de Jaffard. O resultado foi obtido generalizando o contra-exemplo de Jaffard através de uma abordagem que relaciona grupos de divisivilidade e reticulados em $\mathbb{R}^n$. Um reticulado em $\mathbb{R}^n$ é um subgrupos aditivos discretos de $\mathbb{R}^n$, ou seja, um reticulado Λ em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto

$$\Lambda = \left\{ \sum_{j=1}^{m} z_j a_j : z_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

em que $a_1, \ldots, a_m$ são elementos de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\beta = \{a_1, \ldots, a_m\}$ é denominado base do reticulado Λ. Denotaremos por Λ_β a matriz em que a i-essima linha é o vetor a_i. Dentre os reticulados em $\mathbb{R}^n$ nos restringimos aos reticulados de $\mathbb{Z}^n$, mais especificamente, aos reticulados próprios que são aqueles que não possuem uma base, cuja matriz Λ_β seja diagonal. Os reticulados são conhecidos por terem um papel importante na teória algebrica dos números. No nosso caso, estudamos as suas conexões com os grupos de divisibilidade.

Descrição do trabalho

Esta dissertação é constituída de três capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos relativos a Teoria de Grupos Ordenados, pois estes conceitos permeam a maioria dos resultudaos abordados.

No Capítulo 2, exploramos um tipo de grupo ordenado de nosso interesse, os grupos de divisibilidade. Reservamos ainda, nesse capítulo uma seção para trabalharmos as valorizações, uma aplicação crucial para alcaçarmos nosso objetivo principal. Finalizamos com uma seção sobre os Grupos de Jaffard, pois como já dissemos, foi a partir deles que surgiu o problema motivador de nosso trabalho.

Finalmente, no Capítulo 3, apresentamos a definição de reticulados e demonstramos alguns resultados básicos relativos a este conceito, porém necessários para a boa compreensão das demonstrações dos principais teoremas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de grupos ordenados que serão necessários para os capítulos subsequentes. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [4].

1.1 Grupos ordenados

Um conjunto S, não vazio, é dito *parcialmente ordenado* se existir uma relação $\leq$ entre seus elementos satisfazendo aos seguintes axiomas:

1. Reflexividade: $a \leq a$, para todo $a \in S$.

2. Antissimetria: para todos $a, b \in S$, $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.

3. Transitividade: para todos $a, b, c \in S$, $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

O conjunto S é dito *totalmente ordenado* por $\leq$ se além dessas condições, a relação satisfaz ainda a:

4. Totalidade, Linearidade ou Lei da tricotomia:

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a, \ \forall \ a, b \in S.$$

Exemplo 1.1 *No produto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, *definamos*

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c \ \ e \ \ b \leq d).$$

Note que as propriedades: reflexiva, antissimétrica e transitiva são consequências direta da validade dessas propriedades em $\mathbb{R}$. *Já a totalidade não é válida, pois*

$$(0, 1) \not\leq (1, 0) \ \ e \ \ (1, 0) \not\leq (0, 1)$$

já que, $1 > 0$.

Um grupo G é dito *parcialmente ordenado* se $(G,+)$ é um grupo abeliano, sobre o qual foi definido uma relação de ordem parcial $\leq$ compatível com a estrutura de grupo. Essa compatibilidade é dada por:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \ \ \forall \ a, b, c \in G.$$

ou, equivalentemente,

$$a \leq b \ \text{ e } \ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d, \ \ \forall \ a, b, c, d \in G.$$

Como a definição de grupo ordenado é apenas para grupos abelianos, sempre que mencionarmos a palavra grupo estamos nos referindo a grupos abelianos.

Exemplo 1.2 *Observe que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é um grupo parcialmente ordenado pela ordem do Exemplo 1.1. Já vimos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, com esta ordem, é um conjunto parcialmente ordenado, portanto resta-nos mostrar apenas que ele é compativel com a estrutura de grupo. Com efeito, dados $a_i, b_\iota \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Se $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$, então*

$$(a_1, b_1) + (a_3, b_3) = (a_1 + a_3, b_1 + b_3) \leq (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_2, b_2) + (a_3, b_3).$$

Sejam G um grupo ordenado e S um conjunto. Denotaremos por G_+ o conjunto

$$G_+ = \{a \in G : a \geq 0\}.$$

onde 0 é o elemento neutro de G e por $-S$ o conjunto

$$-S = \{-x : x \in S\}.$$

Proposição 1.3 *Seja G um grupo abeliano. Se existir um subconjunto P de G tal que:*

1. $P + P \subseteq P$.
2. $P \cap -P = \{0\}$.

Então definindo sobre G a relação

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P$$

tem-se que G com a relação $\leq$ é um grupo ordenado e $G_+ = P$.

Prova. Temos que mostrar que $\leq$ define uma ordem em G. De fato,

$$a - a = 0 \in P.$$

Portanto, $a \leq a$ e a propriedade reflexiva é atendida. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então

$$(b - a) \in P \ \text{ e } \ (a - b) = -(b - a) \in P,$$

ou seja,

$$(b-a) \in P \cap -P = \{0\}.$$

Portanto, $a = b$ e temos a antissimetria. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então

$$(b-a) \in P \text{ e } (c-b) \in P.$$

Como

$$c - a = (c-b) + (b-a) \in P + P \subseteq P$$

segue que, $\leq$ é transitiva e consequentemente é uma ordem parcial. Note ainda que, se $a \leq b$ e $c \in G$, então

$$a + c \leq b + c,$$

pois

$$(b+c) - (a+c) = b - a \in P.$$

Logo, a relação definida é compatível com a estrutura de grupo. Finalmente se $a \in G$, tem-se

$$a \geq 0 \Leftrightarrow a \in P.$$

Portanto, $G_+ = P$. ■

Como acabamos de ver, quando temos um subconjunto P que atende as propriedades (1) e (2) da Proposição 1.3 é sempre possível definir uma relação de ordem em G induzida por P. Nesse caso, P será chamado o *cone positivo* de G. Portanto, quando G é um grupo ordenado temos que G_+ é seu cone positivo.

Observação 1.4 *Existe uma correspondência biunívoca entre as ordens de G e seus cones positivos.*

Exemplo 1.5 *Os $P_n = \{0, n, n+1, \ldots\}$, com $n \in \mathbb{Z}_+$, são subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que atendem as propriedades (1) e (2) da Proposição 1.3. Portanto é possível definir uma ordem em $\mathbb{Z}$ induzida por P_n qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}_+$. Note que a relação*

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P_1$$

é uma ordem para $\mathbb{Z}$ induzida por P_1, esta ordem é chamada de ordem usual *de $\mathbb{Z}$. Portanto com a ordem usual o cone positivo de $\mathbb{Z}$ é igual a P_1.*

Sejam G um grupo ordenado e H um subgrupo de G diremos que H é um subgrupo ordenado se H é um grupo ordenado com a mesma ordem de G. Neste caso H_+ representará o cone positivo de H.

Proposição 1.6 *Se G é um grupo ordenado e H é subgrupo de G, então $H_+ = G_+ \cap H$.*

Prova. Para mostrar que $H_+ = G_+ \cap H$, basta mostar que $G_+ \cap H$ satisfaz as condições acima. Com efeito, se

$$h \in (H \cap G_+) \cap [-(H \cap G_+)],$$

isto é,

$$h \in (H \cap G_+) \ \text{ e } \ -h \in (H \cap G_+)$$

então, $h \geq 0$ e $-h \geq 0$. Como G é ordenado, segue da propriedade antisimétrica que

$$h = 0.$$

Agora, tome

$$a, b \in H \cap G_+ \Rightarrow a, b \in H \ \text{ e } \ a, b \in G_+$$

Portanto,

$$a + b \in H \ \text{ e } \ a + b \in G_+ \Rightarrow a + b \in H \cap G_+.$$

Nesse caso, dizemos que H é um subgrupo ordenado de G. ■

Antes de seguirmos adiante achamos necessário apresentar algumas notações: Sejam S e T subconjuntos não vazios de um grupo ordenado G. Usaremos $a \leq S$ para indicar que a é *cota inferior* de S, ou seja,

$$a \leq b, \ \forall \ b \in S;$$

e $a \geq S$ para indicar que a é *cota superior* de S, ou seja,

$$a \geq b, \ \forall \ b \in S.$$

Chamaremos a de *supremo* de S em G, se a é a menor das cotas superiores e diremos que a é o *ínfimo* de S em G, se a é a maior das cotas inferiores. Para esses casos usaremos as seguintes notações:

$$a = \sup S \ \text{ e } \ a = \inf S.$$

É claro que quando existir, $\inf\{a, b\} = \inf(a, b)$. (analogamente para o supremo). Além do mais,

$$S + T = \{s + t : s \in S \ \text{ e } \ t \in T\}.$$

A proposição abaixo será uma ferramenta importante na demonstração de outros resultados, visto que reúne relações importantes sobre supremo e ínfimo de um conjunto.

Proposição 1.7 *Sejam S e T subconjuntos não vazios de um grupo ordenado G e $a, b \in G$.*

1. $\sup S$ *existe se, somente se,* $\inf(-S)$ *existe; nesse caso* $\sup S = -\inf(-S)$ *e* $\inf S = -\sup(-S)$.

2. $\sup S$ *existe se, somente se,* $\sup(a + S)$ *existe; e vale* $\sup(a + S) = a + \sup S$. *Esse resultado é válido também para ínfimo.*

3. Se $\sup S$ *e* $\sup T$ *existirem, então* $\sup(S+T)$ *existe e* $\sup(S+T) = \sup S + \sup T$*.*

4. $\inf(a,b)$ *existe se, somente se,* $\sup(a,b)$ *existe; neste caso,* $\sup(a,b) + \inf(a,b) = a+b$*.*

Prova. Provaremos apenas os itens (1) e (4): (1) Se $x = \sup S$, então

$$x \geq y \Rightarrow -x \leq -y, \ \forall \ y \in S.$$

Portanto, $-x$ é uma cota inferior de $-S$. Agora, tomemos d outra cota inferior de $-S$, ou seja,

$$d \leq b, \ \forall \ b \in -S \Rightarrow -b \leq -d, \ \forall \ -b \in S.$$

Segue que $-d$ é uma cota superior de S. Assim, por hipótese, temos que

$$x \leq -d \Rightarrow d \leq -x.$$

Logo $-x = \inf(-S)$. Analogamente mostramos a recíproca, ou seja, se $z = \inf S$, então $-z = \sup(-S)$. Note ainda que

$$-\inf(-S) = -(-x) = x = \sup S \ \text{ e } \ -\sup(-S) = -(-z) = z = \inf S.$$

(4) Mostraremos que se $c = \sup(a,b)$, então $a+b-c = \inf(a,b)$. Com efeito, como $c = \sup(a,b)$ temos que

$$a - c \leq 0 \ \text{ e } \ b - c \leq 0.$$

Assim,

$$a + b - c \leq b \ \text{ e } \ a + b - c \leq a.$$

Portanto, $a+b-c$ é uma cota inferior de (a,b). Agora provaremos que $a+b-c = \inf(a,b)$. Suponhamos que x é uma cota inferior de (a,b). Então usando o mesmo raciocínio, concluímos que $a+b-x$ é uma cota superior de (a,b). Consequentemente,

$$a + b - x \geq c \Rightarrow a + b - c \geq x.$$

Logo

$$a + b - c = \inf(a,b).$$

De forma análoga mostramos que se $d = \inf(a,b)$ então $a+b-d = \sup(a,b)$. Assim,

$$\sup(a,b) + \inf(a,b) = c + a + b - c = a + b,$$

que é o resultado desejado. ∎

1.2 Grupos filtrantes e l-grupos

Um grupo ordenado G é dito *filtrante* se, para quaisquer $a, b \in G$, existe $c \in G$ tal que

$$c \leq \{a, b\}.$$

Ou seja, um grupo filtrante é um grupo ordenado, no qual cada par de elementos pertencentes a G possui uma cota inferior. A definição de filtrante é válida também para cota superior.

Diremos ainda que G é um *l-grupo* se ele satisfaz uma das condições abaixo:

1. Para quaisquer $a, b \in G$, existe o $\inf(a, b) \in G$.

2. Para quaisquer $a, b \in G$, existe o $\sup(a, b) \in G$.

Nesse caso, vamos chamar a ordem parcial em G uma *l-ordem*. No caso em que a ordem é total diremos que G é *totalmente ordenado.*

Proposição 1.8 *Seja G um grupo ordenado. G é filtrante se, e somente se, G_+ gera G como grupo, ou seja,*

$$G = \langle G_+ \rangle = G_+ - G_+.$$

Prova. Suponhamos que G seja filtrante. Então, para cada $a \in G$, existe $c \in G$ tal que

$$c \geq \{0, a\}.$$

Portanto, c e $c - a$ pertencem a G_+. Como

$$a = c - (c - a)$$

temos que $a \in \langle G_+ \rangle$. Logo, $G = \langle G_+ \rangle$.

Reciprocamente, dados $a, b \in G$, existem $p, q, r, s \in G_+$ tais que $a = p - q$ e $b = r - s$, pois G_+ gera G. Assim,

$$a \leq a + q \leq p + r \ \text{ e } \ b \leq b + s \leq p + r.$$

Logo, $p + r \in G$ e é uma cota superior de a, b. Portanto, G é um grupo filtrante. ■

Exemplo 1.9 *Como comentamos anteriormente é o cone positivo de $\mathbb{Z}$ com a ordem usual é $P_n = \{0, n, n+1, \ldots\}$, com $n = 1$,ou seja*

$$\mathbb{Z}_+ = P_1.$$

Agora, note que $\mathbb{Z} = P_1 - P_1$, pois

$$a = |a| - 0 \ \text{ ou } \ a = 0 - |a|, \ \forall \ a \in \mathbb{Z}.$$

Portanto $\mathbb{Z}$ é filtrante com essa ordem.

Observação 1.10 *Segue da definição que todo l-grupo é um grupo filtrante, porém a recíproca não é verdadeira, como mostra o exemplo abaixo.*

Exemplo 1.11 (Jaffard) *Sejam $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com a ordem usual e*

$$H = \{(a, b) \in G : a + b \equiv 0 \pmod 2\},$$

um subgrupo ordenado de G. Então H é filtrante, mas não é l-grupo. Note que

$$\begin{aligned} G_+ &= \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a, b) \geq (0, 0)\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \geq 0 \ \text{ e } \ b \geq 0)\}. \end{aligned}$$

e

$$H = \{(a, b) \in G : a \equiv b \pmod 2\}.$$

Portanto,

$$H \cap G_+ = H_+ = \{(a, b) : a \geq 0, b \geq 0 \ \text{ e } \ a \equiv b \pmod 2\}.$$

Dado $(a, b) \in H$ existem $n, m \in \mathbb{Z}$ com $n, m \geq 0$ tal que $n + a \geq 0$, $m + b \geq 0$ e $n \equiv m \pmod 2$. Assim, $(n + a, m + b) \in H_+$ e como

$$(a, b) = (n + a, m + b) - (n, m) \in H_+ - H_+$$

temos pela Proposição 1.8 que H é filtrante. Entretanto, H não é l-grupo haja vista que

$$u = (1, 1), v = (0, 2) \in H \ \text{ e } \ \sup{}_G(u, v) = (1, 2).$$

e $\sup\{u, v\}$ não existe em H, pois se existisse $(a, b) \in H$ tal que $(a, b) = \sup\{u, v\}$, então $(a, b) \geq (1, 2)$. Como $(1, 1), (0, 2) \leq (1, 3)$ e $(1, 1), (0, 2) \leq (2, 2)$ temos que

$$a \leq 1 \ \text{ e } \ b \leq 2.$$

Assim, $(a, b) \leq (1, 2)$. Portanto, $(a, b) = (1, 2) \in H$, o que é uma contradição. ■

A proposição que será apresentada agora, nos mostra que ao acrescentarmos a hipótese, que quaisquer par de elementos do cone positivo possui ínfimo (ou supremo), temos a veracidade da recíproca da Observação 1.10.

Proposição 1.12 *Se G é filtrante e existir $\inf(a, b)$ (ou $\sup(a, b)$), para todos $a, b \in G_+$, então G é l-grupo.*

Prova. Dados $a, b \in G$. Como G é filtrante temos que existe $c \in G$ tal que

$$c \leq a, b \ \forall \ a, b \in G.$$

Segue que

$$a - c, b - c \in G_+.$$

Logo, por hipótese, existe $\inf(a-c, b-c)$. Pelo item (2) da Proposição 1.7 ,temos que

$$\inf\{a-c, b-c\} = \inf(a,b) - c.$$

Portanto, G é l-grupo. ■

Seja G um l-grupo e $a \in G$. O elemento $\sup(a,0)$ é dito a *parte positiva* de a e o elemento $-\inf(a,0)$ é dito a *parte negativa* de a. Já o elemento $\sup(a,-a)$ é dito o *valor absoluto* de a. Esses elementos possuem as seguintes notações:

$$\begin{aligned} a^+ &= \sup(a,0) \\ a^- &= -\inf(a,0) \\ |a| &= \sup(a,-a). \end{aligned}$$

Diremos que os elementos $a, b \in G$ são *disjuntos* se $\inf(a,b) = 0$ ou, equivalentemente, $\sup(a,b) = a+b$.

Proposição 1.13 *Sejam G um grupo ordenado e $a, b, c \in G_+$. Se c é disjunto de a e b, então c é disjunto de $a+b$.*

Prova. Como $a, b, c \in G_+$ temos que

$$a+b, c \geq 0.$$

Logo, 0 é uma cota inferior de $a+b$ e c. Tomemos $x \in G$ outra cota inferior de $a+b$ e c, ou seja,

$$x \leq a+b, c.$$

Como $a \in G_+$ temos que $x \leq a+c$. Portanto,

$$x \leq a+b, a+c.$$

Assim,

$$x - a \leq b, c.$$

Mas, por hipótese, $\inf(b,c) = 0$, portanto

$$x - a \leq 0 \Rightarrow x \leq a, c.$$

Novamente, pela hipótese, obtemos $x \leq 0$. Logo, $\inf(a+b, c) = 0$ e consequentemente, $a+b$ é disjunto de c. ■

Corolário 1.14 (Lema de Euclides) *Sejam G um grupo ordenado e $a, b, c \in G_+$. Se $c \leq a+b$ e c é disjunto de a, então $c \leq b$.*

Prova. Como $c \leq a+b$ temos que $c-b \leq a$. E do fato de $c, b \in G_+$, obtemos $c-b \leq c$. Logo $c-b$ é uma cota inferior de a e c. Pela hipótese de $\inf(a,c) = 0$, segue que $c-b \leq 0$. Portanto, $c \leq b$. ■

Proposição 1.15 *Sejam G um grupo ordenado e $a, x, y \in G$. Se* $\sup(a, 0)$ *existir e se $a = x - y$, com $x, y \in G_+$, então* $\inf(x, y)$ *existe e* $x = a^+ + \inf(x, y)$, *e* $y = a^- + \inf(x, y)$. *Em particular, $x \geq a^+$ e $y \geq a^-$ e se x e y são disjuntos, então $x = a^+$ e $y = a^-$, portanto, a^+ e a^- são disjuntos.*

Prova. Fazendo uso da Proposição 1.7 itens (1) e (2), temos que

$$a^+ = \sup(a, 0) = \sup(x - y, 0) = \sup(x - y, x - x) = x + \sup(-y, -x) = x - \inf(x, y).$$

Portanto $\inf(x, y)$ existe e $x = a^+ + \inf(x, y)$. A prova que $y = a^- + \inf(x, y)$ é similar. Como $x, y \in G_+$ temos que $\inf(x, y) \geq 0$. Assim,

$$x \geq a^+ \text{ e } y \geq a^-.$$

Agora se tivemos a hipótese que x e y são disjuntos, segue que $\inf(x, y) = 0$. Portanto, das igualdade

$$x = a^+ + \inf(x, y) \text{ e } y = a^- + \inf(x, y)$$

concluímos que $x = a^+$, $y = a^-$e a^+e a^- são disjuntos. ■

Proposição 1.16 *Se num grupo ordenado G, $a = x - y$, com $x, y \in G_+$ e* $\inf(x, y) = 0$, *então $a^+ = x$ e $a^- = y$.*

Prova. Pelo que vimos na Proposição 1.15 basta mostrar que $\sup(a, 0)$ existe e é igual a x. Com efeito

$$0 \leq x = a + y \geq a.$$

Portanto, $x \geq a, 0$. Logo, x é uma cota superior de a e 0. Tomemos $u \in G$ outra cota superior de a e 0, ou seja, $u \geq a, 0$. Então

$$u \geq x - y \Rightarrow u + y \geq x.$$

Como $\inf(x, y) = 0$, segue do Lema de Euclides, que $x \leq u$. Portanto, $x = \sup(a, 0)$. ■

A proposição abaixo resume algumas propriedades importantes de $a^-, a^+, |a|$.

Proposição 1.17 *Se G é um l-grupo e $a \in G$, então:*

1. $|-a| = |a|$.

2. $a = a^+ - a^-$ *e* $\inf(a^+, a^-) = 0$.

3. $|a| = a^+ + a^- \geq 0$.

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *e* $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Prova. Provaremos apenas o item (2), pois será um resultado bastante utilizado. Pelo item (4) da Proposição 1.7, temos que

$$a^+ - a^- = \sup(a,0) + \inf(a,0) = a + 0 = a. \tag{1.1}$$

Por definição, a^+, $a^- \geq 0$. Portanto 0 é uma cota inferior de a^+ e a^-. Por outro lado, seja $b \in G$ outra cota inferior de a^+ e a^-, ou seja

$$b \leq a^+,\ a^-. \tag{1.2}$$

De (1.1) temos que

$$a = \left(a^+ - b\right) - \left(a^- - b\right)$$

e de (1.2) temos que

$$\left(a^+ - b\right), \left(a^- - b\right) \geq 0.$$

Agora fazendo uso da Proposição 1.15 temos que

$$a^+ - b \geq a^+ \ \text{ e } \ a^- - b \geq a^-.$$

Portanto, $b \leq 0$ e consequentemente $\inf(a^+, a^-) = 0$. ■

A proposição que apresentaremos agora nos mostra uma condição necessária e suficiente para que um grupo ordenado G, seja respectivamente, um l-grupo e um grupo totalmente ordenado. No caso, de grupos filtrantes já conhecemos esta condição na Proposição 1.8.

Proposição 1.18 *Seja G um grupo ordenado. Então:*

1. *G é l-grupo se, e somente se, todo elemento de G é a diferença de dois elementos disjuntos de G_+.*

2. *G é totalmente ordenado se, e somente se, $G_+ \cup -G_+ = G$.*

Prova. (1) Dado $a \in G$, se G é l-grupo, então $\sup(a,0) = a^+$ existe. Do item (4) da Proposição 1.7 segue que, $\inf(a,0) = -a^-$ existe e $a = a^+ - a$. Agora, fazendo uso do item (2) da Proposição 1.17, temos que

$$\inf(a^+, a^-) = 0.$$

Portanto, a é escrito como a diferença de elementos disjuntos de G_+, pois como já dissemos a^+, $a^- \geq 0$.

Reciprocamente, se todo elemento de G é diferença de dois elementos disjuntos de G_+, então dado $a \in G$, existe $x, y \in G_+$ tal que

$$a = x - y, \ \text{ com } \ \inf(x,y) = 0.$$

Assim, pela Proposição 1.16, temos que

$$x = a^+ \ \text{ e } \ y = a^- \tag{1.3}$$

Segue de (1.3) que dados $a, b \in G$, existe

$$(a-b)^{+} = \sup(a-b, 0).$$

Agora, pela Proposição 1.7 item (2),

$$\sup(a-b+b, 0+b) = \sup(a-b, 0) + b.$$

Logo,

$$\sup(a, b) = \sup(a-b, 0) + b.$$

E assim G é um l-grupo.

(2) É imediato das definições. ■

1.3 Homomorfismos de grupos ordenados

Sejam $\{G_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma família de grupos ordenados não nulos. Então o produto direto dos grupos G_λ, em símbolos,

$$\Delta = \prod_{\lambda \in I} G_\lambda,$$

é o conjunto de todas as funções

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in I} G_\lambda, \text{ onde } f(\lambda_0) = a_{\lambda_0} \in G_{\lambda_0} \text{ e } \lambda_0 \in I,$$

isto é,

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = \left\{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in i} G_\lambda : f(\lambda_0) \in G_{\lambda_0} \right\}.$$

Definimos o *produto cardinal* ou *produto direto ordenado* dos G_λ como sendo o grupo

$$W = \prod_{\lambda \in I} G_\lambda,$$

com a seguinte ordem

$$a = (a_\lambda)_{\lambda \in I} \leq b = (b_\lambda)_{\lambda \in I} \Leftrightarrow a_\lambda \leq b_\lambda, \ \forall \ \lambda \in I.$$

E o cone positivo do produto direto ordenado dos G_λ como sendo

$$W_+ = \left\{ (a_\lambda)_{\lambda \in I} \in W : a_\lambda \geq 0, \ \forall \ \lambda \in I \right\}.$$

Já a *soma direta ordenada* dos G_λ, em símbolos,

$$H = \sum_{\lambda \in I} G_\lambda$$

é formada pelos elementos $a = (a_\lambda)_{\lambda \in I}$ tais que $a_\lambda \neq 0$ apenas para um número finito de $\lambda \in I$. Note que a soma direta ordenada é um o subgrupo ordenado do produto direto ordenado W, pois se

$$a = (a_\lambda)_{\lambda \in I}, b = (b_\mu)_{\mu \in I} \in H,$$

com $a_\nu = 0$, para todo $\nu > \lambda$ e $b_\xi = 0$, para todo $\xi > \mu$, então, pondo $\varsigma \geq \max\{\lambda, \mu\}$, obtemos

$$a_\tau + b_\tau = 0, \ \ \forall \ \tau \in I, \ \text{ com } \ \tau > \varsigma.$$

Logo, $a + b \in H$.

Observação 1.19 *Sejam G e G' grupos ordenados. Se tomarmos em $G \times G'$ a ordem dada por*

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c \ \ ou \ \ a = c \ \ e \ \ b \leq d$$

diremos que o grupo $G \times G'$ é ordenado lexicograficamente *e nesse caso usaremos a seguinte notação $G \oplus_L G'$.*

Sejam G, G' grupos ordenados e $\sigma : G \longmapsto G'$ um homomorfismo de grupos. Diremos que σ é um *homomorfismo de ordem* ou um *o-homomorfismo* se

$$a \leq b \ \text{ em } \ G \Rightarrow \sigma(a) \leq \sigma(b) \ \text{ em } \ G'.$$

Uma condição necessária e suficente para que um homomorfismo de grupo seja um o-homomorfismo é dada pela proposição que se segue.

Proposição 1.20 *Sejam G e G' grupos ordenados Um homomorfismo de grupos $\sigma : G \to G'$ é um o-homomorfismo se, somente se, $\sigma(G_+) \subseteq G'_+$*

Prova. Dado $b \in \sigma(G_+) \subset G'$, existe $a \in G_+$ tal que $b = \sigma(a)$. Logo,

$$b = \sigma(a) \geq \sigma(0_G) = 0_{G'}.$$

Portanto, $b \in G'_+$ e, consequentemente, $\sigma(G_+) \subseteq G'_+$.

Reciprocamente, suponhamos que $\sigma(G_+) \subseteq G'_+$. Então dados $a, b \in G$ com $a \leq b$, obtemos

$$b - a \in G_+.$$

Assim,

$$\sigma(b - a) \in \sigma(G_+) \subseteq G'_+.$$

Como σ é um homomorfismo temos

$$\sigma(b) - \sigma(a) = \sigma(b - a) \in G'_+ \Rightarrow \sigma(b) \geq \sigma(a).$$

Portanto, σ é um o-homomorfismo. ■

Observe que se $W = \prod_{\lambda \in I} G$, então para cada $\lambda \in I$ a função

$$\pi_\lambda : W \longrightarrow G_\lambda$$

definida por

$$\pi_\lambda \left((a_\lambda)_{\lambda \in i} \right) = a_\lambda$$

é claramente um o-homomorfismo sobrejetor, chamado a projeção de W sobre o grupo fator G_λ.

Um homomorfismo $\sigma : G \to G'$ entre grupos ordenado é dito um *isomorfismo de ordem,* ou um *o-isomorfismo* se σ é um isomorfismo e

$$\sigma(G) = G'_+$$

Note que essa definição pode ser vista como um colorário da Proposição 1.20.

Proposição 1.21 *Sejam G, G' grupos ordenados e $\varphi : G \longrightarrow G'$ um o-isomorfismo. Se G é l-grupo, então G' também é e vale*

$$\varphi(\inf(a,b)) = \inf(\varphi(a), \varphi(b)), \;\; \forall \;\, a, b \in G.$$

Reciprocamente, um isomorfismo entre l-grupos satisfazendo a condição acima é um o-isomorfismo.

Prova. Suponhamos que G seja um l-grupo, então dados $a, b \in G$ existe $c \in G$ tal que

$$c = \inf(a,b).$$

Portanto

$$c \geq d \;\; \forall \;\; d \leq a, b$$

Como $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um o-isomorfismo segue que

$$\varphi(c) \geq \varphi(d) \;\; \forall \;\; \varphi(d) \leq \varphi(a), \varphi(b).$$

Assim $\varphi(c) = \inf(\varphi(a), \varphi(b))$, mas por hipótese $\varphi(c) = \varphi \inf(a,b)$. Logo $\varphi(\inf(a,b)) = \inf(\varphi(a), \varphi(b)), \;\; \forall \;\, a, b \in G$.

Reciprocamente, como G, G' são l-grupos e $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um isomorfismo de grupos tal que

$$\varphi(\inf(a,b)) = \inf(\varphi(a), \varphi(b)), \quad \forall \;\, a, b \in G.$$

temos que

$$a \leq b \Rightarrow \inf\,(a,b) = a, \;\; \forall \;\, a, b \in G.$$

Assim,

$$\varphi(a) = \varphi\,(\inf\,(a,b)) = \inf(\varphi(a), \varphi(b)).$$

Logo, $\varphi\,(a) \leq \varphi\,(b)$. Agora, tome

$$\varphi(a) \leq \varphi(b) \;\text{ e }\; c = \inf(a,b),$$

obtemos

$$\varphi\left(c\right)=\varphi(\inf(a,b))=\inf(\varphi(a),\varphi(b))=\varphi\left(a\right).$$

Como φ é uma bijeção temos que $a=c\Rightarrow a\leq b$. Portanto, φ é um o-isomorfismo. ■

Sejam G um grupo ordenado e $a_0,a_1,\ldots,a_n\in G$. A expressão

$$a_0\geq\inf{}_G\{a_1,\ldots,a_n\}$$

significa que

$$a_0\geq a,\ \forall\ a\in G,\ \text{ com } a\leq a_1,\ldots,a_n. \tag{1.4}$$

Sejam G, G' grupos ordenados e $\sigma: G\longrightarrow G'$ um homomorfismo. Diremos que σ é um *V-homomorfismo* se

$$a_0\geq\inf{}_G\{a_1,\ldots,a_n\}\Rightarrow\sigma(a_0)\geq\inf{}_{G'}\{\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)\},\ \forall\ a_0,a_1,\ldots,a_n\in G.$$

Já um V-isomorfismo é um isomorfismo tal que ele e sua inversa são V-homomorfismo. Uma *V-imersão* de G em G' é um V-homomorfismo injetivo. Seguindo este raciocínio, um subgrupo H de G é um *V-subgrupo* se a aplicação inclusão é um V-homomorfismo.

Lema 1.22 *Seja $W=\prod_{\lambda\in I}G_\lambda$ um produto direto ordenado. Então a projeção π_λ de W sobre o grupo fator G_λ é um V-homomorfismo de W em G_λ, para todo $\lambda\in\Lambda$.*

Prova. Tome

$$b\in W=\prod_{\lambda\in I}G_\lambda,\ \text{ com } b\geq\inf{}_W\{(a_{\lambda_1}),\ldots,(a_{\lambda_n})\},\ \forall\ (a_{\lambda_j})\in W.$$

Segue de (1.4) que

$$b\geq a,\ \text{ com } a\leq(a_{\lambda_j}),\ \forall\ a\in W$$

Como a projeção é um o-homomorfismo temos que

$$\pi_\lambda(b)\geq\pi_\lambda(a),\ \text{ com } \pi_\lambda(a)\leq\pi_\lambda(a_{\lambda_j}),\ \forall\ (a_{\lambda_j})\in W. \tag{1.5}$$

Assim novamente por (1.4) temos que

$$\pi_\lambda(b)\geq\inf{}_{G_\lambda}\{\{\pi_\lambda(a_{\lambda_1}),\ldots,\sigma(a_{\lambda_n})\}.$$

Portanto, π_λ é um V-homomorfismo. ■

Sejam G um grupo ordenado e H um subgrupo ordenado de G. H é dito *subgrupo isolado* ou *convexo*, se

$$a\in H, b\in G\ \text{ e }\ 0\leq b\leq a\Rightarrow\ b\in H$$

ou, equivalentemente,

$$a,c\in H\ \text{ e }\ b\in G,\ a\leq b\leq c\Rightarrow b\in H.$$

Além disso H é dito *fortemente isolado* ou *fortemente convexo* se para cada $a\in H$ e $b\in G$ tivermos

$$a\leq b\Leftrightarrow b\in H\ \text{ ou }\ b>0.$$

Proposição 1.23 *Sejam G um grupo ordenado e H um subgrupo convexo de G, a relação abaixo*

$$\overline{a} \leq \overline{b} \Leftrightarrow \text{ existe } c \in H \text{ tal que } a \leq b + c$$

define uma ordem em $\frac{G}{H}$. Nesse caso, $\frac{G}{H}$ será chamado grupo ordenado quociente *de G por H.*

Prova. Note que $\overline{a} \leq \overline{a}$, pois $0 \in H$ e $a \leq a + 0$. Se

$$\overline{a} \leq \overline{b} \Rightarrow \text{ existe } c \in H \text{ tal que } a \leq b + c$$

e

$$\overline{b} \leq \overline{a} \Rightarrow \text{ existe } d \in H \text{ tal que } b \leq a + d.$$

Logo,

$$b - d \leq a \leq b + c \Rightarrow b \leq a + d - c \leq b.$$

Portanto

$$a + d - c = b \Rightarrow \overline{a} = \overline{b},$$

pois $(d - c) \in H$. Agora, se $\overline{a} \leq \overline{b}$ e $\overline{b} \leq \overline{c}$, então existem $d, e \in H$ tais que

$$a \leq b + d \text{ e } b \leq c + e \Rightarrow a \leq c + (d + e).$$

Logo, $\overline{a} \leq \overline{c}$. Finalmente, se $\overline{a} \leq \overline{b}$ e $c \in G$, então existe $d \in H$ tal que $a \leq b + d$. Como G é um grupo ordenado e $c \in G$ temos que

$$a + c \leq b + c + d.$$

Portanto

$$\overline{a + c} \leq \overline{b + c} \Rightarrow \overline{a} + \overline{c} \leq \overline{b} + \overline{c}.$$

que é o resultado desejado. ■

Proposição 1.24 *Sejam G um grupo ordenado, H um subgrupo ordenado de G e π o homomorfismo canônico de G sobre $\frac{G}{H}$. Então $\pi(G_+)$ é um cone positivo de $\frac{G}{H}$ se, somente se, H é subgrupo convexo de G.*

Prova. Dados $a \in H$ e $b \in G$ tais que $0 \leq b \leq a$. Então $\pi(a) = \overline{0} = \pi(0)$. Como

$$\pi(G_+) = \left(\frac{G}{H}\right)_+$$

temos que

$$\pi(0) \leq \pi(b) \text{ e } \pi(a - b) \geq \pi(0) \Rightarrow \pi(a) \geq \pi(b)$$

Assim

$$\pi(0) \leq \pi(b) \leq \pi(a)$$

Portanto

$$\pi(b) = \overline{0} \Rightarrow b \in H$$

Logo H é subgrupo convexo

A recíproca segue das definições. ■

Proposição 1.25 *Seja G um grupo totalmente ordenado. Se H e H' são subgrupos convexos de G. Então $H \subseteq H'$ ou $H' \subseteq H$.*

Prova. Sejam $a \in H$ e $b \in H'$. Como G é totalmente ordenado temos que

$$0 \leq a \leq b \text{ ou } 0 \leq b \leq a.$$

Pela hipótese, obtemos

$$a \in H' \text{ ou } b \in H,$$

que é o resultado desejado. ■

Sejam G um grupo ordenado. Chama-se *posto* de G o número de subgrupos convexos próprios de G. No caso em que esta quantidade não seja finita, diremos que G tem posto infinito.

Exemplo 1.26 *O posto do grupo $\mathbb{Z}$, com a ordem usual, é igual 1, pois $\{0\}$ é o único subgrupo convexo próprio de $\mathbb{Z}$.*

Note que, se G é um grupo totalmente ordenado, então G tem posto 1 se, e somente se, $G \neq \{0\}$ e os únicos subgrupos convexos de G são $\{0\}$ e G.

Proposição 1.27 (Ribenboim) *Seja G um grupo totalmente ordenado, com $G \neq \{0\}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O posto de G é igual a 1;*
2. *G é arquimediano, isto é, se $a, b \in G$ com $a > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$;*
3. *G é o-isomorfo a um subgrupo do grupo aditivo dos números reais.*

Capítulo 2

Grupos de Jaffard

Esse capítulo encontra-se dividido em três seções. Na primeira trabalharemos com um grupo ordenado específico, chamado grupos de divisibilidade. Na segunda abordaremos as valorizações, um tipo de aplicação que nos será bastante últil em resultados futuros. Finalizamos o capítulo com uma seção sobre grupos filtrantes que nunca são grupos de divibilidade, os chamados Grupos de Jaffard. Foi trabalhando com esses grupos que conheceu-se o resultado motivador desse trabalho.

2.1 Grupos de divisibilidade

Sejam K um corpo e D um subanel de K. Consideremos o conjunto quociente

$$\mathcal{G}_K(D) = \frac{K^*}{\mathcal{U}(D)} = \{\widetilde{x} : x \in K^*\},$$

com $\mathcal{U}(D)$ o grupo das unidades de D e

$$\widetilde{x} = x\mathcal{U}(D) = \{y \in K^* : xy^{-1} \in \mathcal{U}(D)\}.$$

Dados $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{G}_K(D)$, não é díficil verificar que $\mathcal{G}_K(D)$ munido com a operação

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{xy}$$

é um grupo abeliano aditivo.

Dados $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{G}_K(D)$, definimos

$$\widetilde{x} \leq \widetilde{y} \Leftrightarrow yx^{-1} \in D \Leftrightarrow yD \subseteq xD,$$

com

$$zD = \{za : a \in D\}$$

o D-submódulo cíclico de K gerado por z. Já que

1. $xD \subseteq xD$, para todo $x \in K$;

2. $xD \subseteq yD$ e $yD \subseteq xD \Rightarrow xD = yD$, para todos $x, y \in K$;

3. $xD \subseteq yD$ e $yD \subseteq zD \Rightarrow xD \subseteq zD$, para todos $x, y, z \in K$,

temos que $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial sobre $\mathcal{G}_K(D)$. Além disso,

$$yD \subseteq xD \Rightarrow yzD \subseteq xzD, \forall x, y, z \in K^*.$$

Logo, a relação $\subseteq$ é compatível com a operação de grupo. Neste caso, diremos que $\mathcal{G}_K(D)$ é o *grupo de divisibilidade de K em relação a D.*

O cone positivo de $\mathcal{G}_K(D)$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_K(D)_+ &= \{\widetilde{x} \in \mathcal{G}_K(D) : x \in K^* \text{ e } \widetilde{x} \geq \widetilde{1}\} \\ &= \{\widetilde{x} : x \in D\}. \end{aligned}$$

Seja G o grupo dos D-submódulos cíclicos não nulos de K, ou seja $G = \{xD : x \in K^*\}$. Note que a aplicação $\varphi : \mathcal{G}_K(D) \to G$, em que $\varphi(x\mathcal{U}(D)) = xD$, é um o-isomorfismo, Isto é,

$$\mathcal{G}_K(D) \cong_0 G.$$

Portanto, $\varphi(\mathcal{G}_K(D)_+) = \{xD : x \in D\}$ é o conjunto de ideais principais de D.

Observe que ao definirmos $\mathcal{G}_K(D)$ em nenhum momento exigimos que K fosse o corpo quociente de D. Porém, esse fato é de especial importância como veremos na proposição abaixo

Proposição 2.1 *$\mathcal{G}_K(D)$ é um grupo filtrante se, e somente se, K é o corpo quociente de D.*

Prova. Suponhamos que $\mathcal{G}_K(D)$ seja um grupo filtrante. Dado $x \in K$, existe $\widetilde{a} \in \mathcal{G}_K(D)$ tal que

$$\widetilde{x} \leq \widetilde{a} \text{ e } \widetilde{1} \leq \widetilde{a}.$$

Assim,

$$ax^{-1} \in D \text{ e } a \in D.$$

Logo, existe $b \in D$ tal que $a = bx$, ou seja, se $b \neq 0$, então

$$x = \frac{a}{b}.$$

Portanto, K é o corpo quociente de D.

Reciprocamente, dado $x \in K$, digamos $x = \frac{a}{b}$, onde $a, b \in D$ e $b \neq 0$, obtemos

$$\widetilde{x} = \widetilde{ab^{-1}} = \widetilde{a} + \widetilde{b^{-1}} = \widetilde{a} - \widetilde{b} \in \mathcal{G}_K(D)_+ - \mathcal{G}_K(D)_+,$$

pois $\widetilde{b^{-1}} = -\widetilde{b}$. Portanto, $\mathcal{G}_K(D)$ é filtrante. ■

Neste caso, $\mathcal{G}_K(D)$ é chamado apenas de *grupo de divisibilidade* de D e denotado simplesmente por $\mathcal{G}(D)$. De maneira mais geral, um grupo ordenado G é chamado um grupo de divisibidade se existir um domínio D tal que G é o-isomorfo $\mathcal{G}(D)$.

Exemplo 2.2 *Sejam D um domínio de fatoração única e K seu corpo quociente. Então $\mathcal{G}(D)$ é o-isomorfo a*

$$H = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \;\; G_\lambda = \mathbb{Z}.$$

Seja

$$\mathbf{P} = \{p \in D : p \;\; \textit{é um elemento irredutível}\}$$

Como D é um domínio de fatoração única temos que qualquer $x \in K^*$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$x = u \prod_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{n_\lambda}, \;\; p_\lambda \in \mathbf{P}, \;\; u \in \mathcal{U}(D) \;\; e \;\; n_\lambda \in \mathbb{Z}.$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{G}_K(D) & \to & H \\ & \widetilde{x} & \mapsto & (n_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \end{array}.$$

Então é fácil verificar que ϕ é um o-isomorfismo. ■

2.2 Valorização

Sejam D um domínio e K seu corpo quociente. O homomorfismo canônico

$$\begin{array}{rccc} \omega : & K^* & \longrightarrow & \frac{K^*}{\mathcal{U}(D)} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{x} \end{array}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\omega(xy) = \omega(x) + \omega(y)$, para todo $x, y \in K^*$.
2. $\omega(x+y) \geq \inf{}_{\omega(K^*)}\{\omega(x), \omega(y)\}$, para todos $x, y \in K^*$, com $x + y \neq 0$.
3. $\omega(-1) = \mathcal{U}(D)$.

Observe que

$$\omega(K^*) = \mathcal{G}(D) = \frac{K^*}{\mathcal{U}(D)}.$$

Isto motiva a seguite definição:

Definição 2.3 *Sejam K um corpo e G um grupo ordenado. Uma* semivaloriação *sobre K é uma função υ de K^* em G, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$\upsilon(xy) = \upsilon(x) + \upsilon(y)$, para todos $x, y \in K^*$.*
2. *$\upsilon(x+y) \geq \inf{}_{\upsilon(K^*)}\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$, para todos $x, y \in K^*$, com $x + y \neq 0$.*
3. *$\upsilon(-1) = 0$.*

Com o objetivo de estender a definição de semivalorização para o corpo K, vamos estender o grupo ordenado G adjuntando o elemento ∞, isto é, o *grupo ordenado estendido* de G é o conjunto $\widehat{G} = G \cup \{\infty\}$ munido com a adição de G estendida a $\widehat{G}$ por

$$g + \infty = \infty + g = \infty + \infty = \infty, \ \forall \ g \in G.$$

Além disso

$$\infty > g, \ \forall \ g \in G \text{ e } \infty \geq \infty$$

Neste caso, a função υ pode ser estendida para K, pondo

$$\upsilon(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0.$$

Note ainda que, as condições (2) e (3) podem ser substituídos por uma única condição:

(2') $\upsilon(x - y) \geq \inf_{\upsilon(K^*)}\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$.

Observação 2.4 *Sejam K um corpo, G um grupo ordenado e υ uma semivalorização de K em $\widehat{G}$.*

1. *Se G é um grupo totalmente ordenado e υ é sobrejetora, diremos que υ é uma* valoriação *sobre K. Neste caso, temos*

$$\upsilon(x + y) \geq \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}.$$

2. *Se G é um l-grupo e υ é sobrejetora, diremos que υ é uma* demivaloriação *sobre K. Neste caso, temos*

$$\upsilon(x + y) \geq \inf\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}.$$

3. *Se $G \cong \mathbb{Z}$, diremos que υ é uma* valoriação discreta *sobre K.*

Lema 2.5 *Sejam K um corpo, G um grupo ordenado e υ de K em G uma semivalorização. Então*:

1. *$\upsilon(1) = 0$, pois*

$$\upsilon(1) = \upsilon((-1).(-1)) = \upsilon(-1) + \upsilon(-1) = 0.$$

2. *$\upsilon(x^{-1}) = -\upsilon(x)$, pois*

$$0 = \upsilon(1) = \upsilon(\left(x^{-1}\right)(x)) = \upsilon\left(x^{-1}\right) + \upsilon(x) \Rightarrow \upsilon\left(x^{-1}\right) = -\upsilon(x)$$

3. *A restrição $\upsilon\,|_{K^*}$ é um homormofismo de grupos de K^* em G.*

Sejam K um corpo, G um grupo ordenado e υ uma semivalorização de K em $\widehat{G}$. Então o conjunto

$$A_\upsilon = \{x \in K : \upsilon(x) \geq 0\}$$

é claramente um subanel de K chamado de *anel de semivalorização* de υ. Note que

$$\upsilon(A_\upsilon) = G_+$$

Assim,

$$A_\upsilon = \upsilon^{-1}(G_+)$$

Além disso,

$$x \in \mathcal{U}(A_\upsilon) \Leftrightarrow \upsilon(x) = 0.$$

Dinate do já exposto a proposição abaixo é direta.

Proposição 2.6 *Sejam K um corpo e D um subanel de K. Então a função*

$$\begin{array}{rccc} \omega : & K & \longrightarrow & \frac{K^*}{\mathcal{U}(D)} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{x} \end{array}$$

com $\omega(0) = \infty$ é uma semivalorização sobre K. Além disso, K é o corpo quociente de D se, e somente se, G é um grupo filtrante. Neste caso, $\mathcal{G}(D)_+ = A_\omega$.

Uma semivalorização υ sobre K chama-se *semivalorização aditiva* se

$$\upsilon(x) < \upsilon(y) \Rightarrow \upsilon(x+y) = \upsilon(x), \ \forall \ x, y \in K.$$

Note que qualquer valorização sobre K é aditiva, pois se υ é uma valorização e $\upsilon(x) \neq \upsilon(y)$, então $\upsilon(x+y) = \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$.

Proposição 2.7 *Sejam A um domínio e K seu corpo quociente. Então uma semivalorização υ sobre K é aditiva se, e somente se, A_υ é um anel local.*

Prova. Suponhamos que υ seja uma semivalorização aditiva sobre K. O conjunto

$$M = \{x \in K^* : \upsilon(x) > 0\} = A_\upsilon - \mathcal{U}(A_\upsilon)$$

é um ideal maximal de A_υ. De fato, é fácil verificar que M é um ideal próprio em A_υ, pois $1 \notin M$. Seja J um ideal próprio de A_υ. Escolha $z \in J$ e suponhamos que $\upsilon(z) = 0$. Então

$$\upsilon\left(z^{-1}\right) = -\upsilon\left(z\right) = 0.$$

Assim,

$$z^{-1} \in A_\upsilon \ \text{ e } \ 1 = z \cdot z^{-1} \in J,$$

o que é impossível. Logo, $\upsilon(x) > 0$, para todo $x \in J$ e consequentemente $J \subseteq M$. Portanto, A_υ é um anel local.

Reciprocamente, suponhamos que A_v seja um anel local. Dados $x, y \in K^*$, com $x+y \in K^*$ e $v(x) < v(y)$, obtemos

$$v\left(\frac{y}{x}\right) = v(y) - v(x) > 0.$$

Assim, $\frac{y}{x} \in M$ e $1 + \frac{y}{x} \notin M$. Logo,

$$0 = v\left(1 + \frac{y}{x}\right) = v(x+y) - v(x),$$

isto é,

$$v(x+y) = v(x).$$

Portanto, v é aditiva. ■

Sejam D um domínio de fatoração única, $a \in D^*$ e p um elemento primo em D. Então existe um único $n_p \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$p^{n_p} \mid a \text{ mas } p^{n_p+1} \nmid a,$$

caso contário, para um $n = n_p \in \mathbb{Z}_+$ fixado, existe $b_n \in D$ tal que $a = p^n b_n$. Logo, $b_n = pb_{n+1}$, pois $a = p^{n+1}b_{n+1}$, de modo que

$$(b_0) \subset (b_1) \subset (b_2) \subset \cdots$$

é uma cadeia estritamente crescente de ideais em D, o que é uma contradição. Portanto, se K é o corpo quociente de D, então qualquer $x \in K^*$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$x = p^{n_p}\frac{a}{b} \text{ com } n_p \in \mathbb{Z} \text{ e } \operatorname{mdc}(p, a) = 1 = \operatorname{mdc}(p, b),$$

note que n_p depende de x. Neste caso, a função $v_p : K \to \widehat{\mathbb{Z}}$ definida por

$$v_p(x) = \begin{cases} n_p & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é uma valorização sobre K. De fato, dados $x, y \in K$, digamos

$$x = p^{m_p}\frac{a}{b} \text{ e } y = p^{n_p}\frac{c}{d},$$

obtemos

$$v_p(xy) = m_p + n_p = v_p(a) + v_p(b)$$

e

$$v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\},$$

pois, podemos supor, sem perda de generalidade, que $n_p \geq m_p$ e

$$x + y = \frac{p^{m_p}ad + p^{n_p}cb}{bd} = p^{m_p}\left(\frac{ad + p^{n_p - m_p}bc}{bd}\right).$$

Então
$$v_p(x+y) = m_p \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$
Finalmente,
$$A_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\} = \left\{\frac{a}{b} \in K : \text{mdc}(a,b) = 1 \text{ e } p \nmid b\right\}$$
e
$$\mathcal{U}(A_v) = \left\{\frac{a}{b} \in K : p \nmid a \text{ e } p \nmid b\right\}.$$
Assim,
$$M_p = A_v - \mathcal{U}(A_v) = \left\{\frac{a}{b} \in K : p \mid a \text{ e } p \nmid b\right\}$$
é seu ideal maximal. Portanto, obtemos uma família de valorizações.

Sejam v_1 e v_2 duas semivalorizações sobre K tendo grupos de semivalores G_1 e G_2, respectivamente. Diremos que v_1 e v_2 são *equivalentes* se existir um o-isomorfismo $\phi : G_1 \to G_2$ tal que o diagrama
$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{v_1} & G_1 \\ & \searrow^{v_2} & \downarrow \phi \\ & & G_2 \end{array}$$
comuta, isto é, $\phi \circ v_1 = v_2$.

Exemplo 2.8 *Sejam K um corpo e $v : K^* \to \mathbb{Z}$ uma valorização. Então $2v : K^* \to 2\mathbb{Z}$ é uma valorização equivalente a v, pois a função $\phi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ definida por $\phi(x) = 2x$ é um o-isomorfismo.*

Proposição 2.9 *Seja v uma semivalorização sobre K com grupo de semivalores G. Se β é um V-homomorfismo de G em um grupo ordenado G', então $\beta \circ v$ é uma semivalorização de K.*

Prova. Temos $\beta \circ v : K \to G'$ para todos $x, y \in K$. Portanto
$$(\beta \circ v)(xy) = \beta(v(x) + v(y)) = \beta(v(x)) + \beta(v(y)) = (\beta \circ v)(x) + (\beta \circ v)(y).$$
Como $v(x+y) \geq \inf_G \{v(x), v(y)\}$e β é um V-homomorfismo, temos
$$\begin{aligned} (\beta \circ v)(x+y) &\geq \inf{}_{G'} \{\beta(v(x)), \beta(v(y))\} \\ &= \inf{}_{G'} \{(\beta \circ v)(x), (\beta \circ v)(y)\}. \end{aligned}$$
Além disso, $(\beta \circ v)(-1) = \beta(v(-1)) = \beta(0) = 0$. Finalmente, $(\beta \circ v)(0) = \infty$. ∎

Exemplo 2.10 *Seja*
$$\mathbf{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ é um número primo}\}$$
Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de fatoração única temos que qualquer $x \in \mathbb{Q}^*$ pode ser escrito de modo único sob a forma
$$x = \pm \prod_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{n_\lambda}, \;\; p_\lambda \in \mathbf{P}, \;\; e \;\; n_\lambda \in \mathbb{Z}.$$

Sejam

$$H = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \;\; G_\lambda = \mathbb{Z},$$

e υ uma semivalorização sobre $\mathbb{Q}$ definida por $\upsilon(x) = a \in H$, com $a(\lambda) = n_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Agora, seja $\beta : H \to \mathbb{Z}$ um o-homomorfismo definido por

$$\beta(a) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda).$$

Então $\beta \circ \upsilon$ não é uma semivalorização, pois $(\beta \circ \upsilon)(4) = 2$, $(\beta \circ \upsilon)(9) = 2$ e $(\beta \circ \upsilon)(4 + 9) = 1$. Portanto, a recíproca da Proposição 2.9 é falsa.

Sejam υ e ω duas valorizações sobre K, com anéis de valorizações D_υ e D_ω, respectivamente. Diremos que υ e ω são *independentes* se $\{0\}$ é o único ideal primo de $D_\upsilon \cap D_\omega$ ou, equivalentemente, $K = D_\upsilon D_\omega$.

O teorema que apresentaremos agora será uma ferramenta importante na demonstração de resultados fulturos.

Teorema 2.11 (Teorema da Aproximação) [*4*, p.282] *Sejam $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ valorizações sobre K, independentes dois a dois $a_1 \in G_1, \ldots, a_n \in G_n$ e $x_1, \ldots, x_n \in K$. Então existe $x \in K$ tal que*

$$\upsilon_\lambda(x - x_\lambda) = a_\lambda,$$

para todo $\lambda = 1, \ldots, n$.

2.3 Grupos de Jaffard

Um anel D é um *domínio de Bèzout* se qualquer ideal finitamente gerado em D é principal.

Teorema 2.12 (Krull-Jaffard-Ohm) [*4*, p.215] *Seja G um l-grupo. Então existe um domínio de Bèzout D tal que G é, a menos de o-isomorfismo, o grupo de divisibilidade de D.*

Esse teorema teve sua primeira demonstração feita por Jaffard no início dos anos 50 e revela a conexão existente entre l-grupos e grupos de divisibilidade. Sua demonstração é algo muito bem elaborado. A grosso modo, podemos encará-la como uma extensão do método de Krull usado na prova do resultado que diz que todo grupo totalmente ordenado é grupo de divisibilidade de algum anel de valorização.

É sabido que todo l-grupo é um grupo filtrante. Assim sendo, temos um vasta quantidade de exemplo de grupos filtrantes que satisfazem também esta propriedade. Porém, a mesma não pode ser estendida para todos os filtrantes, pois o próprio Jaffard nos apresentou um exemplo de grupo filtrante que não pode ser isomorfo a um grupo de divisibilidade. Vejamos

Exemplo 2.13 *Seja*

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)\}.$$

Já vimos no Exemplo 1.11 que H é um grupo filtrando. Agora mostraremos que H não é grupo de divisibilidade. Suponhamos, por absurdo, que H seja um grupo de divisibilidade. Então existem um domínio D tal que H é o-isomorfo a $\mathcal{H}(D)$ e uma semivalorização ω de K em H, onde K é o corpo quociente de D e H o grupo de semivalores de ω. Sejam $x, y \in K$ tais que

$$\omega(x) = (2, 2) \;\; e \;\; \omega(y) = (3, 1).$$

Então

$$\begin{aligned} (c, d) &= \omega(x + y) \\ &\geq \inf\{(2, 2), (3, 1)\} \\ &\geq (1, 1), (2, 0). \end{aligned}$$

Assim, $c \geq 2$ e $d \geq 1$. Se $c = 2$, então $d \geq 2$. Se $d = 1$, então $c \geq 3$. Logo, em qualquer caso

$$\omega(x + y) \geq \omega(x) \;\; ou \;\; \omega(x + y) \geq \omega(y).$$

Portanto, temos a relação entre os ideais cíclicos

$$(x + y) \subseteq (x) \;\; ou \;\; (x + y) \subseteq (y),$$

consequentemente, $\omega(x) \geq \omega(y)$ ou $\omega(y) \geq \omega(x)$, o que é uma contradição. ■

A partir de agora apresentaremos uma generalização desse exemplo e os grupos que se enquadram a essa generalização foram denominados de Grupos de Jaffard.

Sejam $\{G_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma família de grupos totalmente ordenados, com $|I| \geq 2$, e

$$W = \prod_{\lambda \in I} G_\lambda$$

o produto direto ordenado. A função

$$\pi_\lambda : W \longrightarrow G_\lambda$$

definida por

$$\pi_\lambda((a_\lambda)_{\lambda \in I}) = a_\lambda$$

é um o-homomorfismo sobrejetor, com

$$\ker \pi_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda \in I} : a_\lambda = 0\}.$$

Sejam A um subgrupo qualquer de W. Então $A_\lambda = \pi_\lambda(A)$ é um subgrupo de G_λ, para todo $\lambda \in I$. Agora, para $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ fixados, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\lambda_1\lambda_2} : & W & \longrightarrow & G_{\lambda_1} \times G_{\lambda_2} \\ & a = (a_\lambda)_{\lambda \in I} & \longmapsto & \pi_{\lambda_1\lambda_2}(a) = (a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}) \end{array}$$

e

$$A_{\lambda_1\lambda_2} = \left\{ a = (a_\lambda)_{\lambda \in I} \in G : \left[A \cap \left(\bigcap_{\lambda \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right) \right] \neq \varnothing \right\}.$$

Proposição 2.14 *$A_{\lambda_1\lambda_2}$ é subgrupo de W contendo A.*

Prova. Dado $a = (a_\lambda)_{\lambda \in I} \in A$, obtemos

$$a \in \pi^{-1}(a_\lambda), \ \forall \ \lambda \in I.$$

Assim,

$$a \in \bigcap_{\lambda \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda).$$

Logo,

$$a \in A \cap \left(\bigcap_{\lambda \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right).$$

Portanto, $a \in A_{\lambda_1\lambda_2}$ e $A \subseteq A_{\lambda_1\lambda_2}$. Dados $a, b \in A_{\lambda_1\lambda_2}$, obtemos

$$\left[A \cap \left(\bigcap_{\lambda \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda) \right) \right] \neq \varnothing \text{ e } \left[A \cap \left(\bigcap_{\mu \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}} \pi_\mu^{-1}(b_\mu) \right) \right] \neq \varnothing.$$

Assim, existem $c, d \in W$ tais que

$$c, d \in A \text{ e } \pi_\lambda(c) = a_\lambda, \pi_\mu(d) = b_\mu, \ \forall \ \lambda, \mu \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Logo,

$$c - d \in A \text{ e } \pi_\lambda(c - d) = a_\lambda - b_\lambda, \ \forall \ \lambda \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Portanto,

$$c - d \in A \cap \left(\bigcap_{\lambda \in I - \{\lambda_1, \lambda_2\}} \pi_\lambda^{-1}(a_\lambda - b_\lambda) \right) \text{ e } a - b \in A_{\lambda_1\lambda_2},$$

ou seja, $A_{\lambda_1\lambda_2}$ é subgrupo de W. ■

Definição 2.15 *Um grupo filtrante G é dito um de* grupo de Jaffard *se G pode ser aplicado V-homomorficamente sobre um subgrupo A do produto direto ordenado W tal que, para cada par*

$$\lambda_k \in I, \ \ k = 1, 2,$$

os grupos G_{λ_k} são Arquimedianos e as três seguintes condições são satisfeitas:

J_1 *Para qualquer $r \in \mathbb{R}_+^*$, existe $a \in A$ tal que*

$$\pi_{\lambda_1}(a) \neq r\pi_{\lambda_2}(a).$$

J_2 *A é um V-subgrupo de $A_{\lambda_1\lambda_2}$.*

J_3 $\pi_{\lambda_1\lambda_2}(A) \not\subset \pi_{\lambda_1}(A) \times \pi_{\lambda_1}(A)$.

Um subgupo A de W será chamado de *subgrupo de Jaffard* de W, se a aplicação identidade de A que é um V-homomorfismo em A, se encaixa na definição de grupo de Jaffard para A.

Teorema 2.16 *Um grupo de Jaffard nunca é um grupo de divisibilidade.*

Prova. Seja G um grupo de Jaffard. Então existe um V-homomorfismo φ de G sobre um subgrupo A de W. Suponhamos, por absurdo, que G seja um grupo de divisibilidade. Então, pelo Proposição 2.6, existe um corpo K e uma semivalorização $\upsilon : K^* \to G$.e pela Proposição 2.9 temos que $\varphi \circ \upsilon$ é uma semivalorização. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $G = A$. Consideremos as funções

$$\begin{array}{rccc} \upsilon_{_K} : & K^* & \longrightarrow & G_{\lambda_k} \\ & x & \longmapsto & \pi_{\lambda_k}(\upsilon(x)), \end{array} \tag{2.1}$$

com $k = 1, 2$ e π_{λ_k} as projeções canônicas.

Afirmação. υ_1 e υ_2 são semivalorizações independentes.

De fato. Como $G = A$ é grupo de divisibilidade temos que A é filtrante. Assim, existe $a = (a_\lambda)_{\lambda\in I} \in A$ tal que

$$a \leq \upsilon(x), \upsilon(y), \ \forall \ x, y \in K^*.$$

Definimos

$$b_{\lambda_k} = \begin{cases} a_{\lambda_k} & \text{se } \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2 \\ \min\{\upsilon_k(x), \upsilon_k(y)\} & \text{se } k \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Então

$$b = (b_\lambda)_{\lambda\in I} \leq \upsilon(x), \upsilon(y), \ \forall \ x, y \in K^*.$$

Assim,

$$b \leq \inf\{\upsilon(x), \upsilon(y)\} \leq \upsilon(x + y).$$

Logo,

$$\upsilon_k(x + y) = \pi_{\lambda_k}(\upsilon(x + y)) \geq \pi_{\lambda_k}(b) = b_{\lambda_k} = \min\{\upsilon_k(x), \upsilon_k(y)\}.$$

Portanto υ_k são semivalorizações. Do fato

$$\upsilon_{_K}(K^*) = \pi_{\lambda_k}(\upsilon(K^*)) \subset G_{\lambda_k}.$$

temos

$$\upsilon_k(x + y) \geq \inf\ _A\{\upsilon_k(x), \upsilon_k(y)\}, \ \forall \ x, y \in K^*, \ \text{com } x + y \neq 0,$$

pois G_{λ_k} é totalmente ordenado. Além disso, observe que o resultado ainda é válido para $B = A_{\lambda_1\lambda_2}$, pois, a função

$$\begin{array}{rccc} \psi : & A & \longrightarrow & A_{\lambda_1\lambda_2} \\ & a & \longmapsto & \psi(a) = a \end{array}$$

é um V-homomorfismo por (J_2). Então

$$\psi(\upsilon(x)) = \upsilon(x), \ \ \forall \ \ x \in K^*.$$

Assim,

$$\upsilon_k(x+y) \geq \inf \ _B\{\upsilon_k(x), \upsilon_k(y)\}.$$

Agora tome $\upsilon(x) = (a_\lambda)_{\lambda \in I} \in A$, então, por (J_1),

$$\upsilon_1(x) = \pi_{\lambda_1}(\upsilon(x)) = \pi_{\lambda_1}((a_\lambda)_{\lambda \in I}) = a_{\lambda_1} \neq r a_{\lambda_2} = r\pi_{\lambda_2}(\upsilon(x)) = r\upsilon_2(x),$$

ou seja, υ_1 e υ_2 são semivalorizações independentes. Finalmente, dado

$$\alpha = (a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}) \in \pi_{\lambda_1}(A) \times \pi_{\lambda_2}(A),$$

existe, pelo Teorema 2.11, $x \in K^*$ tal que

$$\upsilon_k(x) = a_{\lambda_k}$$

Escolhendo $\upsilon(x) = (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in A$, obtemos

$$\begin{aligned}\pi_{\lambda_1\lambda_2}(\upsilon(x)) &= (a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}) = (\upsilon_1(x), \upsilon_2(x)) \\ &= (\pi_{\lambda_1}(\upsilon_1(x)), \pi_{\lambda_2}(\upsilon_2(x)) \in \pi_{\lambda_1}(A) \times \pi_{\lambda_2}(A),\end{aligned}$$

isto é,

$$\pi_{\lambda_1\lambda_2}(A) \subseteq \pi_{\lambda_1}(A) \times \pi_{\lambda_1}(A),$$

o que contradiz a condição (J_3). ∎

Bastos em [1] utiliza-se dos Grupos de Jaffard juntamente com a noção de reticulado, para concluir o seguinte resultado: "Seja A um subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Então A é um grupo de divisibilidade se, somente se, A é um l-grupo." Ainda em [1] Bastos chama a atenção para uma possível generalização desse resultado. Essa generalização é a motivação do nosso trabalho e será demonstrada no próximo capítulo, utilizando-se da noção de reticulado.

Capítulo 3

Reticulados e grupos de divisibilidade

Nesse capítulo encontra-se os nossos principais resultados. Iniciaremos definindo nosso objeto de estudo no momento, os reticulados. Dando seguimento apresentaremos algumas de suas propriedade básicas. Feito este alicerce passaremos à demonstração de uma série de resultados importantes, que culmina no nosso objetivo principal, a generalização do resultado obtido por Bastos em [1].

3.1 Reticulados

Sejam $a_1, \ldots, a_m$ vetores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes. O conjunto de todos os pontos

$$v = z_1 a_1 + \cdots + z_m a_m, \ \text{ onde } \ z_i \in \mathbb{Z},$$

chama-se um *reticulado* em $\mathbb{R}^n$ com base $a_{1,} \ldots, a_m$, ou seja, um reticulado Λ em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$\Lambda = [a_{1,} \ldots, a_m] = \left\{ \sum_{j=1}^{m} z_j a_j : z_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

em que os vetores $a_1, \ldots, a_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ e, portanto, $m \leq n$.

Denotaremos por

$$\beta = \{a_{1,} \ldots, a_m\}$$

a base do reticulado Λ em $\mathbb{R}^n$, e por Λ_β a matriz $m \times n$, cuja i-éssima linha é o vetor a_i, que será chamada *matrix geradora* do reticulado Λ.

Seja $\Lambda = [a_{1,} \ldots, a_n]$ um reticulado em $\mathbb{R}^n$ gerado por n vetores linearmente independentes $a_{1,} \ldots, a_n$ sobre $\mathbb{R}$. Se

$$a_i = (r_{i1}, \ldots, r_{in}) \ \text{ e } \ \Lambda_\beta = (a_i, 1 \leq i \leq n),$$

então os elementos do reticulado Λ consistem de todos os vetores $z\Lambda_\beta$, onde $z \in \mathbb{Z}^n$.

Sejam $\{b_1, \ldots, b_n\}$ e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ bases quaisquer sobre $\mathbb{Z}$ de $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existem únicos $v_{ij} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} a_i, \ \ 1 \leq j \leq n.$$

De modo análogo, existem únicos $u_{ij} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} b_i, \;\; 1 \leq j \leq n.$$

Logo,

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(u_{ij} \sum_{k=1}^{n} v_{ki} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij} v_{ki} \right) a_k.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij} v_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Se $\mathbf{M} = (u_{ij})$ é a matriz de mudança da base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sobre $\mathbb{Z}$ para a base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sobre $\mathbb{Z}$ e $\mathbf{N} = (v_{ij})$ é a matriz de mudança da base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sobre $\mathbb{Z}$ para a base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sobre $\mathbb{Z}$, então

$$\mathbf{MN} = \mathbf{I}_n,$$

com $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade. Logo,

$$\det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{MN}) = 1.$$

Portanto,

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{N}) = \pm\, 1.$$

Conclusão. Qualquer base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sobre $\mathbb{Z}$ de Λ pode ser obtida a partir de uma dada base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sobre $\mathbb{Z}$ de Λ, com

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} a_i, \;\; 1 \leq j \leq n,$$

onde $u_{ij} \in \mathbb{Z}$ e $\det(\mathbf{N}) = \pm 1$.

O *determinante* do reticulado Λ é o valor absoluto do determinante da matriz geradora Λ_β, isto é,

$$\det(\Lambda) = \left| \det(\Lambda_\beta) \right|.$$

Note, do exposto acima, que $\det(\Lambda)$ é independente da base sobre $\mathbb{Z}$ escolhida para Λ.

Sejam Λ um reticulado em $\mathbb{R}^n$, Γ um sub-reticulado de Λ, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base sobre $\mathbb{Z}$ de Λ e $\{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base sobre $\mathbb{Z}$ de Γ. Como $b_j \in \Lambda$, existem únicos $v_{ij} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} a_i, \;\; 1 \leq j \leq n.$$

Se $\mathbf{N} = (v_{ij})$, então

$$d = \left| \det(\mathbf{N}) \right| = \frac{\det(\Gamma)}{\det(\Lambda)}$$

é chamado de *índice* de Γ em Λ. Note que d depende somente de Λ e Γ, não das bases sobre $\mathbb{Z}$ escolhidas para Λ e Γ. Pela Regra de Cramer, obtemos

$$da_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} b_i, \ \ 1 \leq j \leq n,$$

onde $u_{ij} \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$d\Lambda \subseteq \Gamma \subseteq \Lambda,$$

em que $d\Lambda = \{da : a \in \Lambda\}$ é um reticulado em $\mathbb{R}^n$. Portanto, $\{da_1, \ldots, da_n\}$ é uma base sobre $\mathbb{Z}$ de $d\Lambda$.

Proposição 3.1 *Os elementos de um reticulado Λ formam um subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.2 *Qualquer reticulado em $\mathbb{R}$ é da forma $\mathbb{Z}\alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pode ser provado, por indução sobre n, que qualquer reticulado em $\mathbb{R}^n$ é da forma*

$$\Lambda = [a_1, \ldots, a_m] = \left\{ \sum_{j=1}^{m} z_j a_j : z_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

em que os vetores $a_1, \ldots, a_m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. com efeito, se $\Lambda \neq \{0\}$, então $\Lambda_+^* \neq \{0\}$, pois se $v \in \Lambda$ e $v \neq 0$, então $-v \in \Lambda$. Neste caso, $v > 0$ ou $-v > 0$. Seja $0 < \alpha = \inf \Lambda_+$.

Afirmação. $\alpha \in \Lambda_+$ e $\Lambda = \mathbb{Z}\alpha$.
De fato, se $\alpha \notin \Lambda_+$, então

$$\alpha < \alpha + \frac{\alpha}{2}.$$

Assim, por definição, existem $a, b \in \Lambda_+$ tais que

$$\alpha < a < b < \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow b - a < \frac{\alpha}{2} < \alpha.$$

Logo, $b - a \in \Lambda_+$, com $b - a < \alpha$, que é uma contradição. Como qualquer $x \in \Lambda$ pode ser escrito sob a forma

$$x = q\alpha + r, \ \text{ onde } q \in \mathbb{Z} \ \text{ e } 0 \leq r < \alpha,$$

temos, pela escolha de α, que $r = 0$, pois $r = x - q\alpha \in \Lambda$. Portanto, $x \in \mathbb{Z}u$, isto é, $\Lambda = \mathbb{Z}\alpha$.■

3.2 Reticulado em $\mathbb{Z}^n$

Consideremos o reticulado $\mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{R}^n$, com a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e sua ordem natural, ou seja,

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \leq w = (w_1, \ldots, w_n) \Leftrightarrow v_i \leq w_i, \ \ \forall \ i = 1, \ldots, n.$$

Tome Λ um sub-reticulado de $\mathbb{Z}^n$ e $\beta = \{a_1, \ldots, a_m\}$ uma base de Λ. Diremos que β é uma *base positiva* de Λ se

$$a_i > 0, \ \forall \quad i = 1, \ldots, m,$$

isto é

$$a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) > 0 \Leftrightarrow \alpha_{ij} > 0, \text{ para algum } j \text{ e } \alpha_{ij} \geq 0, \text{ para os demias.}$$

Diremos que Λ é um *reticulado completo* se ele contiver uma $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^n$, ou seja, se

$$m = n$$

Todos os resultados que serão apresentados a partir de agora tratam de reticulados em $\mathbb{Z}^n$, ou seja os elementos da base possui todas as entradas pertencentes a $\mathbb{Z}$. Iniciaremos com um resultado, que embora bastante conhecido achamos necessário a sua abordagem, por uma questão de completude.

Lema 3.3 *Seja Λ um reticulado completo em $\mathbb{Z}^n$. Então existe uma base β de Λ tal que:*

1. *β é uma base positivo.*
2. *$\Lambda_\beta = (x_{ij})$ é um matriz triangular inferior.*
3. *$0 \leq x_{ij} < x_{jj}$, se $1 \leq j < i \leq n$.*

Prova. Vamos usar indução sobre n. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ um reticulado completo e considere $\pi : \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ a projeção sobre as n últimas coordenadas. Ou seja

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbb{Z}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ & \alpha = (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & \pi(\alpha) = (x_2, \ldots, x_{n+1}) \end{array}$$

em que

$$\ker \pi = \{(x_1, 0, \ldots, 0) : x_1 \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$\operatorname{Im} \pi = \{(x_2, \ldots, x_{n+1}) : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \text{ para algum } x_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Assim

$$\Lambda_0 = \operatorname{Im} \pi(\Lambda) = \{(x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \Lambda \text{ para algum } x_1 \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$\Lambda_1 = \Lambda \cap \ker \pi = \{(x_1, 0, \ldots, 0) : (x_1, 0, \ldots, 0) \in \Lambda \text{ e } x_1 \in \mathbb{Z}\}$$

são sub-reticulados de $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Z}^{n+1}$, com Λ_1 isomorfo a $\mathbb{Z}$. Como Λ é completo, existe $d = d(\Lambda) > 0$ tal que $\{de_1, de_2, \ldots, de_{n+1}\}$ é uma base para $d\mathbb{Z}^{n+1} \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$. Em particular,

$$\{\pi(de_2), \ldots, \pi(de_{n+1})\} \text{ e } \{\pi(de_1)\}.$$

são bases para Λ_0 e Λ_1, respectivamente. Assim, existem bases $\beta_0 = \{\beta_2, \ldots, \beta_{n+1}\}$ e $\{a_1\}$ tais que

$$\Lambda_0 = [\beta_2, \ldots, \beta_{n+1}] \text{ e } \Lambda_1 = [a_1],$$

com Λ_{β_0} uma matriz triangular inferior. Pela definição de Λ_0, existem $a_2, \ldots, a_{n+1} \in \Lambda$ tais que

$$\beta_j = \pi(a_j), \ \ , j = 2, \ldots, n+1.$$

Portanto, $\beta = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$, onde $a_1 = (x_{11}, 0, \ldots, 0) \in \Lambda$ é uma base para Λ em que Λ_β é uma matriz triangular inferior, isto é,

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_{(n+1)1} & x_{(n+1)2} & x_{(n+1)3} & \cdots & x_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix}.$$

Agora, provaremos que a base triangular inferior $\beta = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é positiva. Mudando o sinal dos a_i, se necessário, obtemos

$$x_{ii} > 0.$$

Note que o conjunto $\beta^{''} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, em que

$$\theta_i = t_{i1}a_1 + \cdots + t_{i(i-1)}a_{i-1} + a_i, \ \text{ onde } \ t_{ij} \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ i, j = 1, \ldots n.$$

é uma nova base para Λ ainda traingular. Como podemos escolher os t_{ij} essa base pode ser positiva de acordo coma nossa escolha. Finalmente, observe que

$$\theta_2 = t_{21}a_1 + a_2 = (t_{21}x_{11} + x_{21}, x_{22}, 0, \ldots, 0).$$

Pelo Algoritmo da Divisão, obtemos

$$x_{21} = q_{21}x_{11} + r_{21}, \ \text{ com } \ 0 \leq r_{21} \leq x_{11}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \theta_2 &= (t_{21}x_{11} + q_{21}x_{11} + r_{21}, x_{22}, 0, \ldots, 0) \\ &= ((t_{21} + q_{21})x_{11} + r_{21}, x_{22}, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Assim, pondo $t_{21} = -q_{21}$, temos que

$$\theta_2 = (r_{21}, x_{22}, 0, \ldots, 0), \ \text{ com } \ 0 \leq r_{21} \leq x_{11}.$$

Contínuando com esse processo, construiremos a base desejada. ■

Observação 3.4 *Uma base que satisfaz as propriedades do Lema* 3.3 *é chamada de* base triangular positiva.

Definição 3.5 *Diremos que $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ é um reticulado não próprio se ele possuir uma base β tal que Λ_β é diagonal, ou seja, ele possui uma base cujo os elementos estão sobre os eixos. Caso contrário diremos que Λ é* próprio*.*

Proposição 3.6 *Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ um reticulado completo, $\beta \subset \Lambda$ uma base positiva e $1 \leq j_0 \leq n-1$. Suponhamos que:*

1. *$e_{j_0} \notin \Lambda$.*

2. *$\Lambda_\beta = (x_{ij})$ é uma matriz triangular inferior e existem $1 < l < k \leq n$ tais que o $\mathrm{mdc}(x_{lj_0}, x_{kj_0}) = 1$.*

Então Λ é um reticulado próprio.

Prova- Seja $\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base para Λ. Suponhamos, por absurdo, que Λ seja um reticulado não próprio. Então existe uma base para Λ da seguinte forma

$$\widehat{\beta} = \{y_1e_1, \ldots, y_ne_n\}, \text{ onde } y_i \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji}y_je_j, \ \ 1 \leq i \leq n,$$

ou seja,

$$b_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ii}, 0, \ldots 0) = v_{i1}y_1e_1 + \cdots + v_{ii}y_ie_i + v_{i,i+1}y_{i+1}e_{i+1} + \cdots + v_{in}y_ne_n,$$

onde $v_{ij} \in \mathbb{Z}$. Note que $v_{ij} = 0$, para todo $j \geq i$, pois Λ_β é uma matriz triangular inferior. Assim,

$$\begin{aligned} x_{i1}e_1 &= (v_{i1}y_1)e_1, \ \forall \ 1 \leq i \leq n \\ x_{i2}e_2 &= (v_{i2}y_2)e_2, \ \forall \ 2 \leq i \leq n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, cada x_{ij} é múltiplo de y_j, para todo i, com $j \leq i \leq n$, isto é,

$$y_j \mid x_{ij}, \ \forall \ j \leq i \leq n,$$

pois $x_{ij} = 0$, para $i < j$. Como $\det(\Lambda_\beta) = \det(\Lambda_{\widehat{\beta}})$ temos que

$$x_{11}x_{22}\cdots x_{nn} = y_1y_2\cdots y_n.$$

Sendo $x_{ii} = y_it_i$, para algum $t_i \in \mathbb{N}$, obtemos

$$(y_1t_1\cdots y_{j-1}t_{j-1})(x_{jj})(y_{j+1}t_{j+1}\cdots t_ny_n) = y_1y_2\cdots y_n.$$

Assim,

$$t_1 \cdots t_{j-1} x_{jj} t_{j+1} \cdots t_n = y_j,$$

ou seja,

$$x_{jj} \mid y_j.$$

Neste caso, $x_{jj} = y_j$. Portanto,

$$x_{jj} \mid x_{ij}, \ \ \forall \ j \leq i \leq n.$$

Como $e_{j_0} \notin \Lambda$ temos que $y_{j_0} \neq 1$, pois se $y_{j_0} = 1$, então $e_{j_0} = y_{j_0} e_{j_0} \in \Lambda$ contradição. Logo, $x_{j_0 j_0} = y_{j_0} \neq 1$ e

$$x_{j_0 j_0} \mid x_{l j_0} \text{ e } x_{j_0 j_0} \mid x_{k j_0}, \ \ \forall \ j_0 \leq l \leq n \text{ e } j_0 \leq k \leq n.$$

Portanto, $\text{mdc}(x_{l j_0}, x_{k j_0}) \neq 1$, o que é uma contradição. ■

Do desenvolvimento da prova da Proposição podemos tirar algumas conclusões: A primeira é que se Λ é não próprio e β é uma base triangular positiva de Λ, então $\{x_{11}e_1, \ldots, x_{nn}e_n\}$ é uma base para Λ cuja a matriz é diagonal. A segunda é que podemos usar o fato de

$$x_{jj} \mid x_{ij}, \ \ \forall \ j \leq i \leq n$$

para de decidir se uma dada matriz triangular inferior corresponde a um reticulado próprio. Por exemplo, considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e Λ o reticulado associado a $\mathbf{A}$. Se $\mathbf{A}$ fosse não-próprio, então $\{6e_1, 2e_2\}$ seria uma base para $\mathbf{A}$ e $x_{11} \mid x_{12}$, como $6 \nmid 4$ temos que $\mathbf{A}$ deve ser próprio.

Teorema 3.7 *Seja Λ sub-reticulado em $\mathbb{Z}^n$, com $n \geq 2$.*

1. *Se Λ é não-próprio, então é um l-grupo.*

2. *Se Λ é próprio, então ele é sempre filtrado, mas nunca l-grupo.*

Prova. (1) Seja Λ um reticulado em $\mathbb{Z}^n$, com k elementos na base e $k \leq n$. Então Λ é gerado por uma base da seguinte forma

$$\beta = \{y_1 e_1, \ldots, y_k e_k\}, \text{ onde } y_i \in \mathbb{N}.$$

Logo, Λ é o-isomorfo a $\mathbb{Z}^k$, para algum $1 \leq k \leq n$

(2) Primeiro mostraremos que se Λ é próprio, então é filtrante. Para tanto vamos completar a base de Λ com vetores da base canônica de modo a obter um reticulado completo $\widehat{\Lambda} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Observe que pela maneira que construimos a base de $\widehat{\Lambda}$ temos que Λ está contido nele e consequentemente como Λ é prório segue que $\widehat{\Lambda}$ também será próprio. Sem perda de generalidade

podemos supor que Λ é completo. Portanto, Λ é próprio e completo. Pelo Lema 3.3 temos que Λ possui uma base $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ triangular positiva. Assim, o conjunto

$$\left\{\sum z_i\alpha_i \in \Lambda : z_i \in \mathbb{Z}_+\right\} = \Lambda_+.$$

Agora, tomando $v \in \Lambda$, obtemos

$$v = \sum z_i\alpha_i, \text{ onde } z_i \in \mathbb{Z}.$$

E escolhendo $r_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$z_i + r_i \geq 0, \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Logo,

$$v = \sum z_i\alpha_i = \sum(z_i + r_i)\alpha_i - \sum r_i\alpha_i \in \Lambda_+ - \Lambda_+.$$

Portanto, Λ é filtrante.

Finalmente, como Λ é próprio temos que existe $1 \leq i_0 \leq n$ tal que

$$a_{i_0-1} = (0, \ldots 0, x_{(i_0-1)(i_{0-1})}, 0, \ldots, 0) \in [e_{i_0-1}]$$

e

$$a_{i_0} = (0, \ldots 0, x_{i_0(i_{0-1})}, x_{i_0(i_0}, 0, \ldots, 0) \notin [e_{i_0}], \text{ com } 0 \leq x_{i_0(i_{0-1})} < x_{(i_0-1)(i_0-1)}.$$

Suponhamos, por absurdo, que Λ seja l-grupo,

$$\alpha = \inf\ _{\mathbb{Z}^n}\{a_{i_0-1}, a_{i_0}\} \text{ e } v = \inf\ _{\Lambda}\{a_{i_0-1}, a_{i_0}\}.$$

Então, pela escolhas de β e i_0, obtemos

$$\alpha = (0, \ldots 0, x_{i_0(i_{0-1})}, 0, \ldots, 0), \text{ e } 0 \leq \alpha \leq v \leq a_{i_0-1}, a_{i_0}.$$

Por definição

$$v = (0, \ldots 0, r, 0, \ldots, 0), \text{ com } 0 \leq x_{i_0(i_{0-1})} \leq r \leq x_{i_0(i_{0-1})}$$

Assim, $\alpha = v$. Como $\Lambda \cap \left[e_{i_{0-1}}\right] = [a_{i_0-1}]$ temos que $\alpha \in [a_{i_0-1}]$ e do fato de $0 \leq x_{i_0(i_{0-1})} < x_{(i_0-1)(i_0-1)}$ concluímos que $v = 0$. Portanto $a_{i_0} \in [e_{i_0}]$, o que é uma contradição. Logo Λ não é um l-grupo. ■

Teorema 3.8 *Seja Λ um sub-reticulado próprio de $\mathbb{Z}^n$, com $n \geq 2$. Então Λ não um grupo de divisibilidade.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que Λ seja um grupo de divisibilidade e $\beta = \{a_1, \ldots, a_n\}$ uma base triangular positiva para Λ. Então existe um corpo K e uma semivalorização $v : K^* \longrightarrow \Lambda$. Se definirmos

$$v_i = \pi_i \circ v, \ \forall \ 1 \leq i \leq n,$$

em que π_i é a projeção sobre a i-esima coordenada, então pela Proposição 2.9, cada v_i é uma valorização.

Afirmação. As υ_i são independentes dois a dois.
De fato, caso contrário, existem $1 \leq i \leq j \leq n$ e $r \in \mathbb{Q}^*$ tal que

$$\upsilon_i(x) = r\upsilon_j(x), \ \ \forall \ x \in K,$$

ou seja,

$$\pi_i(\alpha) = r\pi_j(\alpha), \ \ \forall \ \alpha \in \Lambda.$$

Em particular,

$$\pi_i(a_k) = r\pi_j(a_k) \ \text{ com } \ = 1, \ldots, n.$$

Logo

$$x_{ii} = \pi_i(a_i) = r\pi_j(a_i) = rx_{ij} = r \cdot 0 = 0.$$

pois $x_{ij} = 0$, para todos $j \geq i$. Assim $\det(\Lambda_\beta) = 0$, que é uma contradição.

Consideremos a função

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \Lambda & \longrightarrow & \pi_1(\Lambda) \times \cdots \times \pi_n(\Lambda) = H \\ & \alpha & \mapsto & (\pi_1(\alpha), \ldots, \pi_n(\alpha)) \end{array}$$

Então, pelo Teorema da Aproximação, dado

$$u = (b_1, \ldots, b_n) \in \pi_1(\Lambda) \times \cdots \times \pi_n(\Lambda) = H,$$

existe $x \in K^*$ tal que

$$\upsilon_i(x) = b_i, \ \ \forall \ i = 1, \ldots, n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(\upsilon(x)) &= (\pi_1(\upsilon(x)), \ldots, \pi_n(\upsilon(x))) \\ &= (\upsilon_1(x), \ldots, \upsilon_n(x)) \\ &= (b_1, \ldots, b_n) = u. \end{aligned}$$

Logo, φ é um isomorfismos. Note que

$$\varphi(\Lambda_+) = H_+,$$

Assim, φ é um o-isomorfismos e Λ é um l- grupo, o que é uma contradição. ■

Diante do que apresentamos nos Teoremas 3.7 e 3.8 juntamente com o importante Teorema de Krull-Jaffard- Ohm obtemos a generalização motivadora do nosso trabalho que será enuncida no seguinte corolário.

Corolário 3.9 *Seja Λ um reticulado de $\mathbb{Z}^n$ com $n \geq 2$. Então Λ é um grupo de divisibilidade se, somente se, Λ é um l-grupo.*

Exemplo 3.10 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ e $p \in \mathbb{N}$ um primo fixado. Definimos*

$$\widehat{e} = \sum_{i=1}^{n} e_i \ \textit{com} \ \Lambda_{pn} = \{v \in \mathbb{Z}^n : \langle v \mid \widehat{e} \rangle \equiv 0 \pmod p\},$$

em que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ é o produto interno Então Λ_{pn} é um reticulado próprio. Portanto, Λ_{pn} não é um grupo de divibilidade.

Solução. Vamos primeira provar que Λ_{pn} tem uma base triangular positiva β da seguinte forma

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p-1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, em que α_i são as linhas de Λ_β e

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Lambda_{pn},$$

Então

$$v - \sum_{i=2}^{n} x_i e_i = \left(x_1 - (p-1) \sum_{i=2}^{n} x_i \right) e_1.$$

Como

$$x_1 - (p-1) \sum_{i=2}^{n} x_i \equiv 0 \pmod p$$

temos que existe $y_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$v - \sum_{i=2}^{n} x_i e_i = y_1 a_1 \Rightarrow v = y_1 a_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i e_i.$$

Portanto, β é uma base triangular positiva para Λ_{pn}. Consequentemente, pela Proposição 3.6, Λ_{pn} é um reticulado próprio e pelo Teorema 3.8 Λ_{pn} não é grupo de divisibilidade. ■

Observação 3.11 *Note que em momento algum fazemos uso do fato de p ser primo, portanto podemos considerar Λ_{mn}, com m não necessariamente primo e por meio do mesmo raciocínio concluirmos que Λ_{mn} é ainda próprio. Além disso, um problema interessante é: a partir do Teorema 3.8 classificar os reticulados de $\mathbb{Z}^n$, com $n \geq 2$, que são l-grupos.*

Referências Bibliográficas

[1] Bastos, G.G., "A new class of ordered abelian groups which are not groups of divisibility", *C.R. Acad. Sci. Paris*, 306, pp. 17-20, 1988.

[2] Bastos, G.G., "Tópicos de Álgebra Abstrata", *Ed. Livro Técnico. Fortaleza*, 2003.

[3] Cassels, J.W.S., *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, 1971.

[4] , R., *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.

[5] Jaffard, P., "Un exemple concernant les groups de divisibilité", *C.R. Acad. Sci. Paris*, 243, pp. 1264-1266, 1956.

[6] Jaffard, P., *Les systèmes d'idéaux*, Dunod, Paris, 1960.

[7] Larsen, M. D. and McCarthy, P. J., *Multiplicative Theory of Ideals*, Academic Press, New York, 1971.

[8] Ohm, J., "Semi-valuation and groups of divisibility", *Can. J. Math.*, 21, pp. 576-591, 1969.

[9] Ribenboim, P., *Théorie des groupes ordonnés*, Bahia Blanca, 1957.

[10] Ribenboim, P., *Le Thèoréme d' approximation pour les valuations de Krull, Math. Zeit.* 68 (1957), 1-18.

[11] Silva, A. A., Bastos, G. G. and Juriaans, S. O. "Lattices and Groups of Divisibility," *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications.* 12 (2008), 1-10.