Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Soluções Fracas para um Sistema Não-Linear Envolvendo o Operador p-Laplaciano

Por

**André Francisco Santos Siqueira**

João Pessoa-Paraíba

Agosto 2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Soluções Fracas para um Sistema Não-Linear Envolvendo o Operador p-Laplaciano

Por

**André Francisco Santos Siqueira**

sob orientação do

**Prof. Dr. Nélson Nery de Oliveira Castro**

João Pessoa-Paraíba

Agosto 2010

S618s Siqueira, André Francisco Santos.
Soluções fracas para um sistema não-linear envolvendo o operador p-Laplaciano / André Francisco Santos Siqueira - João Pessoa, 2010.
83f.
Orientador: Nélson Nery de Oliveira Castro
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Soluções fracas. 3. Pseudo-Laplaciano. 4. Evolução não-linear. 5. Método de Faedo-Galerkin.

UFPB/BC CDU: 51(043)

# Soluções Fracas para um Sistema Não-Linear Envolvendo o Operador p-Laplaciano

Por

**André Francisco Santos Siqueira**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro(Orientador)

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos

**Universidade Federal da Paraíba**

**Centro de Ciências Exatas e da Natureza**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

Agosto 2010

# Dedicatória

*Àqueles que*
*me ajudaram e incentivaram.*

# Agradecimentos

- Aos meus pais, Etelmar Siqueira e Maria do Rosário, que através do exemplo me ensinaram a maior parte do que sei. A Giovana Santos pelo apoio sempre constante e incondicional.

- Ao Professor Marcondes Clark pela ajuda em momentos importantes e pela constante atenção. Ao Professor Nelson Nery por sua disposição em me ensinar, orientar e por suas correções no texto desta dissertação. Ao Professor Marivaldo Matos pela disposição em fazer parte da banca examinadora, pelas correções e sugestões à dissertação.

- Aos amigos de conversa fiada e estudo, Marcos Ferreira, Elano Diniz ( *Excelente* piadista...), Maicon Livi, dentre outros. Aos meus dois grandes amigos de graduação e pós-Graduação Diego Souza e Maurício Cardoso pela ajuda prestada em minha chegada a João Pessoa.

- Ao povo brasileiro que, por meio da Coordenação de Aperfeiçoamente de pessoal de Ensino Superior(Capes), financiou este trabalho.

# Resumo

Neste trabalho provaremos a existência de soluções fracas para um problema misto de equações diferenciais parciais não-lineares do tipo Klein-Gordon envolvendo o operador pseudo-Laplaciano. Com esse fim, usaremos o método de Faedo-Galerkin juntamente com argumentos de compacidade e monotonicidade.

**Palavras-chave:** Soluções Fracas, Pseudo- Laplaciano, Problema de Evolução Não-Linear, Método de Faedo-Galerkin.

# Abstract

In this work we'll prove existence of weak solutions to a coupled mixed problem of nonlinear partial diferential equation in the class of systems of nonlinear Klein-Gordon equations involving pseudo-Laplacian operator. For proving existence of weak solutions we use Faedo-Galerkin's method with compacity and monotonicity properties.

**Keywords:** Weak-Solutions, Pseudo-Laplacian, Non-Linear Evolution Problem, Faedo-Galerkin's Method.

# Sumário

# Introdução

O sistema de equações diferenciais não-lineares do tipo Klein-Gordon:

$$\begin{cases} Bu + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ Bv + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0, \end{cases}$$

onde $B = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$ é o operador D'Alambertiano, $g, h, \alpha$ e $\beta$ são constantes, foi utilizado por Segal [23] para descrever o movimento de mésons carregados em um campo eletromagnético.

Em 1985, Medeiros-Miranda [18] estudaram a existência e unicidade de soluções fracas de uma generalização do sistema anterior, a saber:

$$\begin{cases} Bu + |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u = f_1 \\ Bv + |u|^{\rho+2} |v|^{\rho} v = f_2, \qquad \rho > -1. \end{cases}$$

Naquele trabalho, os autores provaram e existência de soluções para $n \geq 1$ e a unicidade para $n = 1, 2, 3;$, onde $n$ é a dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$.

Em 1990, A. Biazutti [2] estudou a existência de soluções para uma equação mais geral, do tipo:

$$\left\{ u''(t) + Au(t) + B(t)u'(t) + Gu'(t) = f(t), \right.$$

onde $A$ é um operador não-linear, $B(t)$é linear e limitado e $G$ é não-linear.

Nesse mesmo trabalho, Biazutti estudou a exstência e o comportamento assintótico para o sistema:

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) - \Delta u'(t) + G_1(u', v') = f_1 \\ v''(t) + Av(t) - \Delta v'(t) + G_2(u', v') = f_2, \end{cases}$$

onde $A$ é o operador p-Laplaciano e $G_1$ e $G_2$ são operadores não-lineares.

Além desses trabalhos, outros sistemas semelhantes foram estudados em [5],[6] e [10], dentre outros.

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções fracas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} u'' + Au - \Delta u' + \left(|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|u|^{\rho}\, u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + \left(|u|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|v|^{\rho}\, v = f_2 \\ w'' + Aw - \Delta w' + \left(|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2}\right)|w|^{\rho}\, w = f_3 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0 \\ u'(0) = u_1, v'(0) = v_1, w'(0) = w_1. \end{cases} \tag{1}$$

onde cada equação interage com as outras duas. Esse fato pode ser notado quando observamos os termos não lineares das nossas equações.

Esta Dissertação está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo I serão dadas algumas definições e resultados básicos, para tornar a leitura clara e auto-suficiente.

- No Capítulo II daremos resultados que serão bastante úteis para dar sentido a algumas dualidades e quando formos limitar $\rho$ e $u_m v_m$, quando $u_m, v_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

- No capítulo III formulamos e demonstramos o teorema de existência, principal resultado desta dissertação. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de soluções fracas para um problema em dimensão finita associado ao sistema (1). Posteriormente, faremos alguma estimativas *a priori* e como consequência, obteremos uma convergência a fim de *passar ao limite* e resolver o problema original. Nesta etapa, usaremos algumas propriedades do operador p-Laplaciano.

## Notações

Notações necessárias para o melhor entendimento desta dissertação:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado e bem regular;

- $Q = \Omega \times (0,T),\ T > 0$ é o cilindro em $\mathbb{R}^{n+1}$ com base $\Omega$ e altura $T$;

- $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ é a fronteira lateral de $Q$, onde $\Gamma$ é a fronteira de $\Omega$.

Além disso, $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano, e $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ é o operador pseudo-Laplaciano definido por:

$$\begin{array}{rcl} A : W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & Au \end{array}$$

onde $Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$.
No apêndice provaremos que A tem as seguintes propriedades:

- A é monótono, hemicontínuo, coercivo e limitado.
- $\langle Au(t), u(t) \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u(t)\|_0^p$;
- $\langle Au(t), u'(t) \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u\|_0^p$, onde ' indica $\frac{d}{dt}$;
- $\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \le C\|u\|_0^{p-1}$.

- $\|.\|_0$ $-$Norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\|.\|, ((.))$ $-$ Norma e produto interno em $H_0^1(\Omega)$, respectivamente;

- $|.|, (.)$ $-$ Norma( ocasionalmente $|.|$ denotará o valor absoluto, e o contexto deixará claro a distinção) e produto interno em $L^2(\Omega)$;

- $V^*, V'$, em geral, denotam o espaço dual de $V$;

- $V \hookrightarrow H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ denotam imersão contínua e densa e imersão compacta, respectivamente, de $V$ em $H$.

Por fim, $\rho$ é um número real variando em um intervalo a ser determinado posteriormente.

# Capítulo 1

# Terminologia e Resutados Preliminares

O objetivo deste capítulo é listar algumas definições e notações básicas da Teoria das Equações diferenciais Parciais afim de Apresentar os resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento do cerne deste trabalho. Entretanto, não nos preocupamos, neste capítulo, em demonstrar os resultados enunciados, apenas mencionaremos as referências bibliográficas onde os mesmos podem ser encontrados.

## 1.1 Resultados de Convergência

**Teorema 1.1** (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_n$ uma sequência fortemente limitada em $X^*$(dual de X). Então $(f_n)_n$ tem uma subsequência $(f_{nk})_k$ que converge fraco-$\star$, isto é, $f_{nk} \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $X^*$.

*Demonstração.* Ver [3] □

**Teorema 1.2** (Kakutani)**.** Sejam X um espaço de Banach. X é reflexivo se, e somente se, $(x_n)_n$ fortemente limitada em X possui uma subsequência $(x_{nk})$ que converge fraco, isto é, $x_{nk} \rightharpoonup x$ em X.

*Demonstração.* Ver [3] □

**Teorema 1.3.** *(Aubin-Lions)* Sejam $X, Y$ e $B$ espaços de Banach, $X$ reflexivo e $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. Suponha que $(u_n)_n$ seja uma sequência uniformemente limitada em

$L^p(0,T;X)$ tal que $(\dfrac{du_n}{dt})_n = (u'_n)_n$ seja limitada em $L^p(0,T;Y)$, para algum $p > 1$. Então existe uma subsequência de $(u_n)_n$ que converge fortemente em $L^2(0,T;B)$.

*Demonstração.* Ver [8] $\square$

**Teorema 1.4** (Lebesgue)**.** Seja $(u_n)_n$ uma sequência de funções integráveis em $(a,b)$, que converge quase sempre para uma função $u$. Se existir uma função integrável $u_0$ tal que $|u_n(t)| \leq u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $u$ será integrável e tem-se que

$$\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$$

*Demonstração.* Ver [16] $\square$

**Teorema 1.5** (Lema de Fatou)**.** Seja $(u_n)_n$ uma sequência de funções integráveis tal que

$$u_n(t) \to u(t) \;\; em \; X, \;\; q.s. \;\; em \; (a,b)$$

Suponhamos que exista uma constante positiva C tal que $\displaystyle\int_a^b \|u_n(t)\|\,dt \leq C$, $\forall n$. Então $u$ é integrável e

$$\int_a^b \|u(t)\|\,dt \leq \liminf \int_a^b \|u_n(t)\|\,dt$$

*Demonstração.* Ver [16] $\square$

**Lema 1.1** (Lions)**.** Sejam $\Omega$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $g$ e $g_j$ funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tais que

$$\|g_j\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \;\; para \; todo \; j,$$

e

$$g_j \to g, \;\; q.s. \;\; em \; \Omega.$$

Então

$$g_j \rightharpoonup g, \;\; em \; L^q(\Omega).$$

*Demonstração.* Ver [8] $\square$

**Proposição 1.1.** Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $X^*$. Então, $f_n \rightharpoonup f$ em $X^*$.

*Demonstração.* Ver [8] $\square$

## 1.2 Desigualdades

- Desigualdade de Gronwall

  Sejam $C$ uma constante não-negativa, $\varphi : (s,T) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa, $u : (s,T) \to \mathbb{R}^n$ integrável com $u \geq 0$ q.s. em $(s,T)$ tal que
  $$\varphi \leq C + \int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad \forall t \in [s,T].$$
  Então
  $$\varphi(t) \leq C \exp(\int_s^t u(\xi)d\xi), \quad t \in [s,T].$$

  *Demonstração.* Seja $\psi(t) = C + \displaystyle\int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad t \in [s,T].$
  Então
  $$\frac{d\psi(t)}{dt} = u(t)\varphi(t) \leq u(t)\psi(t), \quad \text{q.s. em } (s,T).$$
  Daí,
  $$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-\displaystyle\int_s^t u(\xi)d\xi}\right) \leq 0,, \quad \text{q.s. em } (s,T).$$
  Logo,
  $$e^{-\displaystyle\int_s^t u(\xi)d\xi} \leq \psi(s) = C.$$
  Portanto,
  $$\psi(t) \leq Ce^{\displaystyle\int_s^t u(\xi)d\xi}, \quad \forall t \in [s,T].$$
  Ou seja,
  $$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq Ce^{\displaystyle\int_s^t u(\xi)d\xi}, \quad \forall t \in [s,T].$$
  $\square$

- Desigualdade de Gronwall Generalizada

  Sejam $v, f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funções integráveis e não-negativas e $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa tal que
  $$v(t) \leq v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t a(s)v(s)ds,$$

onde $v_0$ é uma constante não-negativa. Então

$$v(t) \leq (v_0 + \int_0^t f(s)ds)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

- Desigualdade de Poincaré

  Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

  $$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_0, \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

  As provas dessas desigualdades podem ser vistas em [8].

- Desigualdade de Young.

  Sejam $p > 1, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

  $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0.$$

  *Demonstração.* Prova: Ver [3]. □

- Desigualdade de Hölder

  Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e

  $$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

  *Demonstração.* Prova: Ver [3] □

- Desigualdade de Minkowsky

  Sejam $f, g \in L^p, p \geq 1$. Então $f + g \in L^p$ e

  $$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^q}.$$

  *Demonstração.* Prova: Ver [3]. □

## 1.3 Resultados de Existência

**Teorema 1.6.** Sejam $V$ e $H$ dois espaços de Hilbert tais que $V \subset H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Então existe uma base espectral $\{w_j\}$ de $V$, formando um sistema ortonormal completo em H.

*Demonstração.* Ver [15] □

**Lema 1.2** (Browder-B. An Ton)**.** Seja $W$ um espaço de Banach separável e reflexivo. Existe um espaço de Hilbert $H$, separável, tal que $H \subset W$, com imersão contínua e densa.

*Demonstração.* Ver [4] □

**Teorema 1.7** (Representação de Riesz)**.** Sejam $1 < p < \infty$ e $p'$ o expoente conjugado de $p$. Dado $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, existe uma única $u \in L^{p'}(\Omega)$, tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u f dx, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega),$$

e $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

*Demonstração.* Ver [22] □

**Teorema 1.8.** Todo espaço de Hilbert possui base ortonormal.

*Demonstração.* Ver [12] □

**Teorema 1.9.** Se $H$ é um espaço de Hilbert separável, então todo conjunto ortonormal completo em $H$ é enumerável.

*Demonstração.* Ver [12] □

Seja $D$ um subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$, cujos elementos são denotados por $(t, x)$, onde $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ e considere $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ não necessariamente contínua. Se existir uma função absolutamente contínua $x(t)$, definida em algum intervalo $I$ da reta, tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

para quase todo $t \in I$, então, dizemos que $x(t)$ é uma solução de (1.1) sobre $I$. Se $(t_0, x_0) \in D$, associado a (1.1) tem-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

Dizemos que uma solução $x(t)$ de (1.2) é uma solução de (1.1) tal que $x(t_0) = x_0$.

**Definição 1.1** (Condições de Carathéodory)**.** Sejam $D$ um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$. Então $f$ satisfaz as condições de Carathéodory se:

1. $f(t,x)$ é mensurável em $t$ para cada $x$ fixo;

2. $f(t,x)$ é contínua em $x$ para cada $t$ fixo;

3. Para cada compacto $U$ em $D$, existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que:

$$|f(t,x)| \leq m_U(t), \quad \forall (t,x) \in U.$$

**Teorema 1.10** (Carathéodory)**.** Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $\mathbf{R}$. Então existe uma solução $x(t)$ de (1.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta, \beta > 0$, onde $\mathbf{R}$ é o retângulo definido por:

$$\mathbf{R} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \qquad \textit{com } a > 0, b > 0.$$

*Demonstração.* Ver [19] □

**Corolário 1.1.** Sejam $D$ um aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f$ uma função satisfazendo as Condições de Carathéodory sobre $D$. Então o problema (1.2) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.

*Demonstração.* Ver [19] □

**Teorema 1.11.** Seja $D$ um aberto limitado e conexo do $\mathbb{R}^{n+1}$ e suponha que $f$ satisfaça as duas primeiras condições de Carathéodory sobre $D$ e que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$, para todo $(t,x) \in D$. Seja $\varphi$ uma solução de (1.1) sobre o intervalo aberto (a,b). Então:

1. *Existem os limites laterais* $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$;

2. *Se* $(b, \varphi(b-0)) \in D$, *então* $\varphi$ *pode ser prolongada até (a,b+*$\delta$*] para algum* $\delta > 0$. *Resultado análogo é válido para a extremidade a.*

3. *Se* $\partial D$ *denota a fronteira de D, então* $\varphi(t)$ *pode ser prolongada até um intervalo* $(\gamma, \omega)$ *tal que* $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$;

4. *Se* $f$ *estende-se até* $\overline{D}$ *preservando suas propriedades, então* $\varphi(t)$ *pode ser prolongada até um intervalo* $[\gamma, \omega]$ *tal que* $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.

*Demonstração.* Ver [19] □

**Corolário 1.2.** Seja $D = [0, T] \times \Omega,\ T > 0, \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$, e $f$ nas condições do teorema anterior. Seja $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0, \quad |x_0| \leq b \end{cases}$$

Suponha que em um intervalo qualquer $I$, onde $\varphi(t)$ está definida, tenhamos $|\varphi(t)| \leq C, \forall\, t \in I, M$ independente de $I$ e $C < b$. Então $\varphi$ tem um prolongamento até [0,T].

*Demonstração.* Ver [19] □

**Teorema 1.12** (Princípio da Extensão)**.** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach , M um subespaço denso de $X$ e $T : M \to Y$ linear tal que:

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in M, C > 0 \text{ } constante\ .$$

Então existe um único $\overline{T} : X \to Y$ linear e contínuo tal que

$$\overline{T} \mid M = T \text{ } e \text{ } \left\|\overline{T}(x)\right\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

*Demonstração.* Ver [3] □

## 1.4 Espaço das Distribuições Escalares

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. O *suporte* de $u$ é, por definição, o fecho em $\Omega$, do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Este conjunto será representado por *supp(u).* Segue diretamente da definição que o suporte é o menor fechado fora do qual $u$ se anula, e valem as seguintes relações:

- *supp(u+v)* $\subset$ *supp u + supp v;*
- *supp(uv)* $\subset$ *supp u* $\cap$ *supp v;*
- *supp*$(\lambda v)$ = *supp v.* $\lambda \neq 0$.

Se $u \in L^p(\Omega)$, definimos o suporte de $u$, o qual ainda denotamos por *supp* $u$, como o conjunto obtido pela interseção de todos os subconjuntos fechados em $\Omega$ fora dos quais $u$ se anula quase sempre. Notemos que se $u \in C(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ então as noções de suporte definidas para funções contínuas em $\Omega$ e para funções de $L^p(\Omega)$ coicidem.

Aqui, usaremos inicialmente o espaço das funções infinitamente diferenciáveis cujo suporte é um conjunto compacto contido em $\Omega$, com notação $C_0^\infty(\Omega)$.

Um multi-índice é uma *n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., n$. Escrevemos $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e representaremos $D^\alpha$ o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} .... \partial^{\alpha_n}}.$$

Observemos que, para $\alpha = (0, ...., 0)$ temos $D^0 u = u$. Notemos também, que *supp*$(D^\alpha u) \subset$ *supp*$(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, quando $u$ for suficientemente diferenciável.

Aqui também é importante darmos a noção de convergência no espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$. Tal convergência torna $C_0^\infty(\Omega)$ um espaço topológico. Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se:

- Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:

$$\textit{supp}(\varphi) \subset K \text{e } \textit{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N};$$

- $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$, uniformemente em $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima, será denotado por $D(\Omega)$ e denominado de espaço das funções testes. Notemos que, se $\varphi_n \to \varphi$ em $D(\Omega)$ então $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, em $D(\Omega)$.

Uma distribuição sobre $\Omega$ é uma forma linear e contínua $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ com respeito à topologia de $D(\Omega)$. Assim, se uma sequência $(\varphi_n)_n$ convergir para $\varphi$ em $D(\Omega)$, então $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$, cujo valor de $T$ aplicada a $\varphi$ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Denotamos por $D'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições escalares sobre $\Omega$.

Considere $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, $u$ é integrável a Lebesgue sobre todo compacto $K \subset \Omega$. O funcional $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

é linear e contínuo. Logo uma distribuição sobre $\Omega$. Para mais detalhes veja [11]. A distribuição $T_u$ é dita gerada pela função localmente integrável $u$.

Observe que se $T_u = T_v$, então $u = v$ (Ver [11]), logo $T$ é univocamente determinada por $u$, portanto, neste sentido, podemos identificar $u$ com a distribuição $T_u$.

**Exemplo 1.1.** Dado $x_0 \in \Omega$, o funcional $\delta_{x_0}$ definida por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \varphi \in D(\Omega)$$

é uma distribuição sobre $\Omega$, denominada distribuição delta de Dirac centrada em $x_0$. Prova-se (Ver [11]) que a distribuição $\delta_{x_0}$ não é definida por uma função localmente integrável, isto é, não existe uma função $u \in L^1_{loc}$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Logo, o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ não é igual ao espaço $D'(\Omega)$, uma vez que existem distribuições sobre $\Omega$ que não são geradas por uma função integrável.

### 1.4.1 Convergência e Derivação em $D'(\Omega)$

Dizemos que a sequência de distribuições escalares $(T_n)$ converge para $T$ em $D'(\Omega)$ se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Com essa noção de convergência, $D'(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial topológico, e temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, necessitamos do conceito de derivada distribucional, uma vez que isso se faz necessário para o estudo dos espaços de Sobolev, que veremos a seguir.

O que motivou a definição de derivada fraca e consequentemente a derivada distribucional foi a fórmula de integração por partes do cálculo. De fato, em dimensão 1, temos a fórmula de integração:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx,$$

e quando $\varphi \in D(a,b)$ temos

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx.$$

Motivado pela igualdade acima, Sobolev definiu a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(a,b)$ como sendo a distribuição $v \in L^1_{loc}(a,b)$, caso exista, tal que:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Esse conceito foi generalizado (por Schwarz) para distribuições quaisquer, em $D'(\Omega)$, da seguinte maneira: Dados $T \in D'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos a derivada distribucional de ordem $\alpha$ de $T$ como a forma linear $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição (Ver [11]).

## 1.5 Distribuições Vetoriais

Dado um número real positivo $T$ e um espaço de Banach $X$, representamos por $L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$, o espaço das funções $u : (0,T) \to X$ que são mensuráveis e tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$, o funcional

$$\|.\|_{L^p(0,T;X)} : L^p(0,T;X) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt)^{\frac{1}{p}},$$

é uma norma, m relação a qual $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach.
No caso $p = \infty$, a norma em $L^\infty(0,T;X)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess \, \|\mathrm{u(t)}\|_{\mathrm{X}},$$

e $L^\infty(0,T;X)$ com esta norma é um espaço de Banach.

A cada $u \in L^p(0,T;X), 1 \leq p \leq \infty$, associamos a função vetorial $T_u : D(0,T) \to X$, definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)ds, \quad \forall\, \varphi \in D(0,T),$$

onde a integral é entendida como sua integral de Bochner em $X$. Prova-se que $T_u$ é linear e contínua(Ver [14]). Diz-se então que $T_u$ é uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ à valores em $X$, definida por uma função $u \in L^p(0,T;X)$, e escreve-se

$$T_u \in \mathcal{L}(D(0,T),X).$$

O espaço $\mathcal{L}(\mathrm{D}(0,\mathrm{T}),\mathrm{X})$ denomina-se espaço vetorial das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ a valores em $X$ e contém, em particular, as distribuições vetoriais definidas pelas funções de $L^p(0,T,X)$. O espaço $\mathcal{L}(\mathrm{D}(0,\mathrm{T}),\mathrm{X})$ será denotado por $D'(0,T;X)$.

## 1.6 Espaços de Sobolev

### 1.6.1 Os espaços $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$.

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, $p$ um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e $m$ um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$, o espaço vetorial:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m\},$$

com norma definida por

$$\|u\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}.$$

Com essa norma $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$ são ditos espaços de Sobolev de ordem $m$ sobre $\Omega$. Quando $p=2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são normalmente denotados por $H_0^m(\Omega)$, isto é,:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Verifica-se que $H^m(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$(u,v) = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

e norma definida por:

$$\|u\|_{m,2} = \|u\| = \left( \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $(.)_{L^2(\Omega)}$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

É possível definir espaços análogos aos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, onde $k$ é um número real arbitrário. Para $p = 2$, os espaços de Sobolev de ordem fracionária $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, podem ser definidos usando a transformada de Fourier (usando o fato de que a transformada de Fourier é uma transformação unitária) do seguinte modo:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} |\, \|f\|_{H^s}^s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

No caso em que $\Omega$ é um aberto, limitado e bem-regular, temos a seguinte definição:

$$H^s(\Omega) = \{f|_\Omega; f \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

### 1.6.2 Os espaços $W^{m,\infty}(\Omega)$

Dado $m \in \mathbb{N}$, representaremos por $W^{m,\infty}(\Omega)$ o espaço vetorial

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m\},$$

munido da norma

$$\|u\|_\infty^m = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Com essa norma $W^{m,\infty}(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach.

### 1.6.3 Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$

Note que o espaço das funções testes, $C_0^\infty(\Omega)$, é denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ (Ver [11]). Porém, não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Como consequência da desigualdade de Poincaré, a expressão

$$\|u\|_0 = \sum_{0<|\alpha|\leq m} (\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma natural para esse espaço.
No caso particular $m = 1$,

$$\|u\|_0 = (\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

e

$$\|u\|_{1,p} = (\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Prova-se que

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_{1,p} \leq \|u\|_0, \quad \forall\ u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Existem outras caracterizações para tal espaço, veja por exemplo [11].
Uma atenção especial deve ser dada ao espaço dual de $W^{1,p}_0(\Omega), 1 \leq p < \infty$, denotado por $W^{-1,q}(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que é constituído pelos funcionais lineares contínuos

$$T : W^{m,p}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Mostra-se que, se $T \in D'(\Omega)$, então $T \in W^{-1,q}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega), |\alpha| \leq m$, tais que

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Veja a demonstração em [11], por exemplo.

## 1.7 Teoremas de Imersão

A seguir enunciamos alguns resultados de imersão, cujas demonstrações podemos encontrar em [2] ou [12]. Para maior clareza, separamos os casos em $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\Omega$ é aberto. limitado com fronteira bastante regular.

- 1º Caso: $\Omega = \mathbb{R}^n$

**Teorema 1.13.** *Se* $1 \leq p < n$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

*para* $q = \dfrac{np}{n - mp} > 0$

**Teorema 1.14.** *Se $n > mp$ e $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$ então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

**Teorema 1.15.** *Se $n > kp$ e $q_k = \dfrac{np}{n-kp}$ então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-k,p}(\Omega)$$

**Teorema 1.16.** *Se $1 \leq p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ com $n \geq 2$ então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \geq 1$$

**Teorema 1.17.** *Sejam $\alpha = m - \frac{n}{p} > 0$ e $k \in \{1, ....\}$ tais que $k < \alpha \leq k+1$. então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$$

.

- 2º Caso: $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e bem-regular.

**Teorema 1.18.** *Suponha que $n > mp$. Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

*para $q \leq \dfrac{np}{n-mp}$. Tem-se ainda,*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

*para $q = \dfrac{np}{n-mp}$.*

**Teorema 1.19.** *Se $k \leq m$ e $n > (m-k)p$, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega),$$

*desde que $q \leq \dfrac{np}{n-(m-k)p}$. Além disso,*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega),$$

*desde que $q = \dfrac{np}{n-(m-k)p}$*

**Teorema 1.20.** *Se $mp = n$. Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty).$$

**Teorema 1.21.** *Se $mp > n$. Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{0,\mu}(\overline{\Omega}),$$

*para,*

$$\mu = m - \frac{n}{p}, \ \text{se } m - \frac{n}{p} < 1,$$
$$\mu < 1, \ \text{se } m - \frac{n}{p} = 1,$$
$$\mu = 1, \ \text{se } m - \frac{n}{p} > 1.$$

**Teorema 1.22** (Rellich-Kondrachov)**.** Seja $\Omega$ um subconjunto aberto, limitado e bem-regular do $\mathbb{R}^n$, n$\geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:

(i) $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega); \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-p}, \quad$ *se $p < n$*,

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega); \quad 1 \leq q < +\infty, \quad$ *se $p = n$*,

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega}), \quad$ *se $p > n$*.

**Observação 1.1.** As imersões no teoremas acima, caso $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, permanecem verdadeiras quando se considera $\Omega$ limitado e se substitui $W^{m,p}(\Omega)$ por $W_0^{m,p}(\Omega)$.

As demonstrações desses teoremas podem ser vistas em [11].
Seja $I$ um intervalo real, isto é, $I = (0, T)$ ou $I = [0, T]$, com $T > 0$. Consideremos $X$ um espaço de Banach e denotemos por $C(0, T; X)$ o espaço das funções contínuas definidas em $I = (0, T)$ à valores em $X$, isto é,

$$u \in C(0, T; X) \Leftrightarrow u : (0, T) \to X, \text{ é contínua},$$

onde a continuidade é definida no seguinte sentido: "Se $t \to t_0$ em $(0, T)$ então $u(t) \to u(t_0)$ na norma de $X$."

**Lema 1.3.** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach, tais que $X$ está imerso contínua e densamente em $Y$. Suponha que $u \in L^p(0, T; X)$ e $u' \in L^p(0, T; Y), \quad 1 \leq p \leq \infty$. Então $u \in C(0, T; Y)$.

*Demonstração.* Ver [15]. □

**Teorema 1.23.** O espaço das funções $\sum \varphi_i(t)v_i(x)$, soma finita, com $\varphi_i \in D(0,T)$, nula numa vizinhança de $T$, $v_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$, é denso no espaço

$$V = \{v \in L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

*Demonstração.* Ver [14] □

**Teorema 1.24** (Hellinger-Toeplitz)**.** Se um operador linear $T$ é definido sobre todo um espaço de Hilbert $H$ e satisfaz $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todo $x, y \in H$, então $T$ é limitado.

*Demonstração.* Ver [12] □

# Capítulo 2

# Resultados Auxiliares

A fim de encontrar um espaço de dimensão finita $V_m$ para trabalharmos o problema aproximado, será demonstrado o lema abaixo. Ele será utilizado no próximo capítulo para explicitar tal espaço.

**Lema 2.1.** Se $s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1$, então $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$.

*Demonstração.* Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach separável e reflexivo, tem-se, via lema de Browder-B. An Ton, a existência de um espaço de Hilbert separável com imersão contínua e densa em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Construiremos um tal espaço.
Mediante as imersões de Sobolev, tem-se:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m-k,q_k}(\Omega), \quad \text{onde } \frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \quad k > 0.$$

Considere, $m - k = 1$, $q_k = p$ em $W_0^{m-k,q_k}(\Omega)$ e $p = 2$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Daí, temos

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{n}.$$

De $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{n}$, temos

$$\frac{m-1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow m - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow m = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1.$$

Logo

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \text{ para } m = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1.$$

Tomando-se $s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1$, temos:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sendo $H^s(\Omega)$ um espaço de Hilbet separável e $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, segue-se que $H_0^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com imersão contínua e densa em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

**Lema 2.2.** Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, e $2 < p < n$. Se $-1 < \rho \leq \frac{4(1-n+p)}{2(n-p-1)+np}$. Então:

(i) $\rho < \dfrac{4}{np-2}$.

(ii) $\dfrac{4n+2}{np-2} \leq \dfrac{np}{n-p}$.

*Demonstração:*

(i) $2 < p < n \Rightarrow np(n-p) > 0$. Daí,

$$np(n-p) > 0 \Leftrightarrow np^2 - n^2p < 0 \Leftrightarrow$$

$$np - n^2p + np^2 - 2 + 2.n - 2p < np - 2 + 2.n - 2p \Leftrightarrow$$

$$np(1-n+p) - 2(1-n+p) < 2(n-p-1) + np \Leftrightarrow$$

$$(np-2)(1-n+p) < 2(n-p-1) + np \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-n+p}{2(n-p-1)+np} < \frac{1}{np-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4(1-n+p)}{2(n-p-1)+np} < \frac{4}{np-2}.$$

(ii)

$$2 < p \Rightarrow 21p^2 > 42p \Rightarrow 36p - 12p^2 < 9p^2 - 6p \Rightarrow$$

$$4np(n-p) < np(np-2).$$

Sendo $p < n$, segue o resultado.

**Lema 2.3.** Sejam $p$ e $\rho$ como no lema anterior e consideremos

$$\theta = \frac{2np(\rho+2)}{(np-2)(\rho+2) + 2np(\rho+1)}, \qquad \gamma = \frac{2np(\rho+2)}{(np-2)(\rho+2) - 2np(\rho+1)}.$$

Então:

(i) $1 < \theta < \dfrac{\rho+2}{\rho+1}$

(ii) $1 < \gamma \leq \dfrac{np}{n-p}$

(iii) $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\gamma} = 1$

*Demonstração.* Imediata. □

**Lema 2.4.** Sejam $n, p, \rho$ como nos lems anteriores e defina

$$\alpha = \frac{\rho+2}{(\rho+1)\theta}, \quad \beta = \frac{\rho+2}{(\rho+2)-(\rho+1)\theta}.$$

Então:

(i) $\alpha > 1, \quad \beta > 1,$

(ii) $\theta\beta = \dfrac{2np}{np-2},$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1.$

*Demonstração.* Imediata □

Devido à sua importância no desenvolvimento deste trabalho, daremos uma demonstração clara do lema a seguir. Analisaremos os casos onde $p < n, p = n$ e $p > n$.

**Lema 2.5.** *Sejam* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*Então:*

(i) $uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$;

(ii) $|v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u$ pertence a $L^{\theta}(\Omega)$.

*Demonstração:*

(i)$_1$ Caso $p > n$:

Por Rellich-Kondrachov, temos:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}), \quad p > n.$$

Daí, como $C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \geq 1$, segue que

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega), \quad \text{se } \rho > -1$$

Assim,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega).$$

Agora,

$$\int_\Omega |uv|^{\rho+2}\,dx = \left(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Em virtude de

$$\left(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ e } \left(\int_\Omega |v|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

pois $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$.

(i)$_2$ Caso $p = n$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

Em Particular, temos $2(\rho+2) > 1$, se $\rho > -1$.
Logo

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega).$$

Analogamente ao caso (a), $uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$.

(i)$_3$ Caso $p < n$ :
Temos, pelo Lema (2.2), que $-1 \le \rho < \frac{4}{np-2}$, $\frac{4np}{np-2} \le \frac{np}{n-p}$.Assim,

$$2(\rho+2) < \frac{4np}{np-2} \le \frac{np}{n-p}.$$

Logo, pelo teorema de Imersão de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^{(\rho+2)}(\Omega)$.
Analogamente,

$$uv \in L^{\rho+2}(\Omega).$$

Do mesmo modo, nas três ocasiões, temos:

$$uw, vw \in L^{\rho+2}(\Omega).$$

(ii)$_1$ Caso $p > n$
Por Rellich-Kondrachov, se $p > n$ então:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

Como

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega).$$

Temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega).$$

Que implica

$$(L^\gamma(\Omega))' \hookrightarrow W^{1,p'}(\Omega).$$

Portanto:

$$L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$$

Como $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, tem-se:

$$u, v \in C^0(\overline{\Omega})$$

Sendo $\theta > 1$, segue que

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\theta(\Omega),$$

donde

$$|v|^{\rho+2} |u|^\rho u \in L^\theta(\Omega).$$

(ii)$_2$ Caso $p = n$

$$\begin{aligned} \int_\Omega | \, |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \,|^\theta \, dx &= \int_\Omega |v|^{(\rho+2)\theta} |u|^{(\rho+1)\theta} \, dx = \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta} |v|^\theta \, dx \\ &\leq \left( \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} . \left( \int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx \right)^{\frac{1}{\beta}} . \end{aligned}$$

Sendo $(\rho + 1)\theta\alpha = (\rho + 2)$, segue, via (i), que:

$$\left( \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left( \int_\Omega |uv|^{(\rho+2)} \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$$

Agora, sendo $1 < \beta\theta = \frac{2np}{np-2} < \frac{np}{n-p}$, segue, pelo teorema de imersão de Sobolev, que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta\theta}(\Omega)$.
Dessa forma,

$$\left( \int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx \right)^{\frac{1}{\beta}} = \|v\|^\theta_{L^{\beta\theta}(\Omega)} \leq c \, \|v\|_0^\theta < \infty.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\, |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \,|^\theta \, dx \le \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} \, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty.$$

(ii)$_3$ Caso $p < n$.

Segue das imersões de Sobolev, que:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \forall 1 < r \le \frac{np}{n-p} := q$$

Em particular,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Nosso objetivo é colocar $|v|^{\rho+2} |u|^\rho u$ em $L^\theta(\Omega)$. Logo temos que ter

$$\int_\Omega \left| |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \right|^\theta dx < \infty.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \right|^\theta dx &= \int_\Omega |v|^{(\rho+2)\theta} |u|^{(\rho+1)\theta} dx \\
&= \int_\Omega |v|^{(\rho+1)\theta} |v|^\rho |u|^{(\rho+1)\theta} dx \\
&= \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta} |v|^\theta dx
\end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta} |v|^\theta dx \le \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} \, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

resta-nos mostrar que

$$\int_\Omega |v|^{\theta\beta} dx < \infty.$$

Como $1 < \theta\beta = \dfrac{2np}{np-2} < \dfrac{np}{n-p}$, segue que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta\beta}(\Omega)$ e $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta\beta}(\Omega)$. Dessa forma,

$$\left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} = \|v\|^\theta_{L^{\theta\beta}(\Omega)} \le C \, \|v\|_0^\theta < \infty.$$

Logo

$$\int_\Omega \left| |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \right|^\theta dx < \infty.$$

Analogamente faz-se o cálculo com as outras partes não-lineares.

# Capítulo 3

# Dedução e Demonstração do Teorema Principal

Neste capítulo deduziremos formalmente um teorema que nos assegura a existência de soluções fracas para o sistema abaixo, que é o principal resultado desta dissertação.

$$\begin{cases} u'' + Au - \Delta u' + \left(|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|u|^{\rho} u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + \left(|u|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|v|^{\rho} v = f_2 \quad \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ w'' + Aw - \Delta w' + \left(|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2}\right)|w|^{\rho} w = f_3 \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \\ v(0) = v_0, v'(0) = v_1, \qquad \text{em } \Omega, \\ w(0) = w_0, w'(0) = w_1 \\ u = 0, v = 0, w = 0 \qquad \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{3.1}$$

A demonstração do teorema principal será feita usando o método de Faedo-Galerkin, que consiste em aproximar o problema inicial por sistemas aproximados equivalentes, porém em dimensão finita. Além disso, serão usados argumentos de compacidade e monotonicidade.

**Observação 3.1.** Depois de Feita a demonstração do teorema principal, resultará do Lema 1.3 e de $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, e de $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, que $u' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, logo faz sentido o cálculo de $u(0)$ e $u'(0)$. Analogamente, faz sentido $v(0)$ e $v'(0)$, assim como $w(0)$ e $w'(0)$.

## 3.1 Espaços de Funções

Nesta seção mostraremos, a partir do problema dado, quais os espaços adequados para trabalharmos. Para se usar o método de Faedo-Galerkin, encontraremos um espaço de dimensão finita $V_m$, a fim de que, para $u_m(t), v_m(t)$ e $w_m(t)$ em $V_m$, tenhamos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} (u_m''(t), z) + \langle Au_m(t), z\rangle + \langle -\Delta u_m'(t), z\rangle + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), z\right\rangle \\ = (f_1(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (v_m''(t), z) + \langle Av_m(t), z\rangle + \langle -\Delta v_m'(t), z\rangle + \left\langle \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|v_m(t)|^{\rho}\, v_m(t), z\right\rangle \\ = (f_2(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (w_m''(t), z) + \langle Aw_m(t), z\rangle + \langle -\Delta w_m'(t), z\rangle + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)|w_m(t)|^{\rho}\, w_m(t), z\right\rangle \\ = (f_3(t), z) \quad \forall z \in V_m \end{cases} \tag{3.2}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto -\Delta u, \end{aligned}$$

e, para dar sentido às dualidades $\langle Au_m, z\rangle, \langle Av_m, z\rangle, \langle Aw_m, z\rangle$, é suficiente tomarmos $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, sendo $p > 2$, temos $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, logo as dualidades $\langle -\Delta u_m'(t), z\rangle, \langle -\Delta v_m'(t), z\rangle, \langle -\Delta w_m'(t), z\rangle$ fazem sentido, para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por outro lado temos, via capítulo 2, que $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, com $H_0^s(\Omega)$ imerso densa e contínuamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $n = 1, 2, ...$ e $s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1$. Daí, existe uma base espectral $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $H_0^s(\Omega)$ ortonormal completa em $L^2(\Omega)$, ou seja:

- Todo subconjunto finito $\{z_i\}$ é L.I.;
- As combinações lineares finitas de combinações lineares finitas dos $z_j$ são densas em $H_0^s(\Omega)$

Assim, podemos tomar $V_m$ como o espaço gerado pelos $m$ primeiros vetores da base $\{z_j\}_{z\in\mathbb{N}}$, isto é,

$$V_m = Span\{z_1, ..., z_m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Note que, como $u_m(t), v_m(t), w_m(t)$ foram tomados em $V_m \subset H_0^s(\Omega)$, concluímos então que $u''_m(t), v''_m(t)$ e $w''_m(t)$ estão em $V_m$. Faz sentido, pois, tomarmos $(u''_m(t), z)$, $(v''_m(t), z)$ e $(w''_m(t), z)$ como produtos interno em $L^2(\Omega)$ já que, para $p > 2$, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, espaço esse que pode ser identificado com seu dual.

Se tomarmos $f_1(t), f_2(t)$ e $f_3(t)$ em $L^2(\Omega)$, temos $(f_1(t), z)$,$(f_2(t), z)$,$(f_3(t), z)$ como produtos internos em $L^2(\Omega)$. Como consequência dessas deduções, ocorre a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$

Como consequência do teorema da representação de Riesz para espaços $L^2(\Omega)$, temos a seguinte dualidade:

$$\langle -\Delta u'_m(t), z\rangle = \int_\Omega -\Delta u'_m(t).z, \qquad \forall z \in V_m.$$

Pelo teorema da divergência de Gauss, segue que:

$$\langle -\Delta u'_m(t), z\rangle = \int_\Omega -\Delta u'_m(t).z = \int_\Omega \nabla u'_m \nabla z = ((u'_m, z)).$$

No capítulo 2 demos sentido às dualidades:
$\left\langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), z\right\rangle, \left\langle |u_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^\rho v_m(t), z\right\rangle, \left\langle |w_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), z\right\rangle,$
$\left\langle |w_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^\rho v_m(t), z\right\rangle, \left\langle |v_m(t)|^{\rho+2} |w_m(t)|^\rho w_m(t), z\right\rangle$ e $\left\langle |u_m(t)|^{\rho+2} |w_m(t)|^\rho w_m(t), z\right\rangle.$

## 3.2 Existência de Soluções para o Problema Aproximado

Queremos encontrar funções $u_m(t), v_m(t)$ e $w_m(t)$ em $V_m$ tais que:

$$\begin{cases} (u''_m(t), z) + \langle Au_m(t), z\rangle + ((u'_m(t), z))+ \\ + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), z\right\rangle = (f_1(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (v''_m(t), z) + \langle Av_m(t), z\rangle + ((v'_m(t), z))+ \\ + \left\langle \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|v_m(t)|^{\rho}\, v_m(t), z\right\rangle = (f_2(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (w''_m(t), z) + \langle Aw_m(t), z\rangle + ((w'_m(t), z))+ \\ + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)|w_m(t)|^{\rho}\, w_m(t), z\right\rangle = (f_3(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ em } L^2(\Omega); \\ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), v'_m(0) = v_{1m} \to v_1 \text{ em } L^2(\Omega); \\ w_m(0) = w_{0m} \to w_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), w'_m(0) = w_{1m} \to w_1 \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

Temos que $u_m(t), v_m(t)$ e $w_m(t)$ pertencem a $V_m$, logo:

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i, \quad v_m(t) = \sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i, \quad w_m(t) = \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i$$

$$u_{0m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) z_i, \quad v_{0m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t) z_i, \quad w_{0m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t) z_i$$

$$u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(t) z_i, \quad v_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(t) z_i, \quad w_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) z_i$$

Fazendo $z = z_j$ em (3.3), com $j = 1, ..., m$, vemos que $a_{im}(t), b_{im}(t)$ e $c_{im}(t)$ são soluções do sistema:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{m} a''_{im}(t)(z_i, z_j) + \langle Au_m(t), z_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} a'_{im}(z_i, z_j) + \\
+ \left\langle \left( |\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m}(t) a_{im} z_i, z_j \right\rangle \\
= (f_1(t), z_j), \\
\sum_{i=1}^{m} b''_{im}(t)(z_i, z_j) + \langle Av_m(t), z_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} b'_{im}(z_i, z_j) + \\
+ \left\langle \left( |\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m} b(t) z_i, z_j \right\rangle \\
= (f_2(t), z_j), \\
\sum_{i=1}^{m} c''_{im}(t)(z_i, z_j) + \langle Aw_m(t), z_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} c'_{im}(z_i, z_j) + \\
+ \left\langle \left( |\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m} c(t) z_i, z_j \right\rangle \\
= (f_3(t), z_j), \\
a_{im}(0) = \alpha_i \text{ e } a'_{im}(0) = \theta_i; \qquad i = 1, ..., m \\
b_{im}(0) = \beta_i \text{ e } b'_{im}(0) = \phi_i; \qquad i = 1, ..., m \\
c_{im}(0) = \gamma_i \text{ e } c'_{im}(0) = \varphi_i, \qquad i = 1, ..., m
\end{array}
\right.
\tag{3.4}
$$

Obviamente, assegurando a existência de $a_{im}(t), b_{im}(t)$ e $c_{im}(t)$, estaremos mostrando que $(u_m(t), v_m(t), w_m(t))$ será solução, em $V_m$, para o problema aproximado. Transforma-lo-emos, agora, em sistemas vetoriais equivalentes.

Definindo:

- $C = [(z_i, z_j)]_{m\times m}; B = [((z_i, z_j))]_{m\times m};$
- $K = [a_{1m}, ..., a_{mm}]^*; L = [b_{1m}, ..., b_{mm}]^*;$
  $M = [c_{1m}, ..., c_{mm}]^*;$
- $F = [(f_1(t), z_1), ..., (f_1(t), z_m)]^*; G = [(f_2(t), z_1), ..., (f_2(t), z_m)]^*;$
  $H = [(f_3(t), z_1), ..., (f_3(t), z_m)]^*.$

onde * denota a matriz transposta, o sistema (3.4) assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} CK'' + BK' = F - [\langle Au_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ CL'' + BL' = G - [\langle Av_m, z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m b_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ CM'' + BM' = H - [\langle Aw_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m c_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ K(0) = K_0, \qquad K'(0) = K_1, \\ L(0) = L_0, \qquad L'(0) = L_1, \\ M(0) = M_0, \qquad M'(0) = M_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Como $\{w_j\}$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, o sistema

$$\begin{cases} K'' + BK' = F - [\langle Au_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ L'' + BL' = G - [\langle Av_m, z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m b_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ M'' + BM' = H - [\langle Aw_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m c_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ K(0) = K_0, \qquad K'(0) = K_1, \\ L(0) = L_0, \qquad L'(0) = L_1, \\ M(0) = M_0, \qquad M'(0) = M_1. \end{cases} \tag{3.6}$$

é equivalete a (3.5).

Agora, tomando

$$X = \begin{bmatrix} K \\ K' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad Y = \begin{bmatrix} L \\ L' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad Z = \begin{bmatrix} M \\ M' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad D = \begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & -B \end{bmatrix}_{2m\times m+1}.$$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \overline{P} \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad Q = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \overline{Q} \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad R = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \overline{R} \end{bmatrix}_{2m\times 1}.$$

onde

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} [F - \langle Au_m(t), z_j\rangle \\ +\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j\right\rangle] \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} [G - \langle Av_m, z_j\rangle + \\ +\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m b_{im}(t)z_i, z_j\right\rangle] \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} [H - \langle Aw_m(t), z_j\rangle + \\ +\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m c_{im}(t)z_i, z_j\right\rangle] \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

e $\overline{0}$ é a matriz nula $m \times 1$,o sistema (3.6) assume a seguinte forma equivalente

$$\begin{cases} X' = \Phi(t, X) = DX + P \\ Y' = \Psi(t, Y) = DY + Q \\ Z' = \Theta(t, Z) = DZ + R \\ X(0) = X_0, \\ Y(0) = Y_0, \\ Z(0) = Z_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde

$$X_0 = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z_0 = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar agora que $\Phi(t, X)$ satisfaz as condições de Carathéodory.

1. Fixado $X$, observemos que os termos $a_{ij}(t)$, com $j = 1, 2..., m$, tornam-se constantes

   - As matrizes $D$ e $X$ são constantes, acarretando $DX$ constante e, portanto, mensurável;
   - $F = \{(f_1(t), z_i)\}, \quad i = 1, ..., m$, é mensurável, já que $f_1(t) \in L^2(\Omega)$;

- Fixado $X$, as funções $\left\langle\left(|\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right)|\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t)z_i|^{\rho}\sum_{i=m}^{m} a_{im}(\right.$ e $\langle Au_m(t), z_i\rangle$ tornam-se mensuráveis, tornando,assim, $P$ mensurável.

Portanto, fixando $X$, $\Psi(t, X) = DX + P$ é mensurável.

2. Fixado $t$, vamos analisar a continuidade de $\Psi(t, X)$.

   (a) Analisemos $DX$.
   Notemos que
   $$DX = \begin{bmatrix} K' \\ -BK' \end{bmatrix}$$
   Consideremos as aplicações :
   - Projeção, $\Pi : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m$, dada por $\Pi(X) = K'$;
   - $\Gamma : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m$, dada por $\Gamma(X) = -BK'$.

   Assim, $\Gamma(X) = -B\Pi(X)$.
   Como a aplicação projeção é contínua, temos que:
   $$\|\Pi(X)\|_m \leq C\,\|X\|_{2m}$$
   Logo,
   $$\|\Gamma(X)\|_m = \|-B\Pi(X)\|_m \leq C\,\|-B\|\,\|X\|_{2m}$$
   Desta forma, $\Gamma$ é contínua e, consequentemente, $DX$ também o é.

   (b) Analisemos $P$. Observemos que :
   $$A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$
   $$u_m(t) \longmapsto Au_m(t) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
   $$z_i \quad \longmapsto \langle Au_m(t), z_i\rangle\,.$$
   Consideremos as aplicações:

- $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow V_m$, dada por $T(y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j z_j = u$, onde $y = (y_1, ..., y_m)$.. Então $T$ é contínua.
- $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y) = \langle Au_m(t), u\rangle$ é contínua, uma vez que é composta de funções contínuas. De fato, $\varphi = T \circ (Au_m(t))$.

Por outro lado, $\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, \sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i$ e $\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i$ são funções lineares em dimensão finita, então $|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^\rho$, $|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2}$ e $|\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}$ são funções contínuas.
Consequentemente,

$$\left\langle \left( \left|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i\right|^{\rho+2} + \left|\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i\right|^{\rho+2} \right) \left|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i\right|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle$$

é contínua, o que acarreta a continuidade de $P$.
Assim, fixado $t$, $\Phi(t, X)$ é contínua, uma vez que é soma de funções contínuas.
De forma análoga, mostramos que $\Psi(t, Y)$ e $\Theta(t, Z)$ são funções contínuas.

(c) Dado um compacto $K$ de $\mathbb{R}^{2m}$, como $DX$ e
$\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle$
são contínuas, existem constantes $L_1$ e $M$ tais que
$\|DX\|_{2m} \leq L_1$
e
$\left|\left\langle \left( |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right|$
$\leq M$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&| \, F - \langle Au_m(t), z_j\rangle + \\
&+ \left\langle \left( |\textstyle\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle \, | \\
&\leq \|F\|_{\mathbb{R}^m} + |\langle Au_m(t), z_j\rangle| \\
&+ \left|\left\langle (|\textstyle\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right| \\
&\leq |(f_1(t), z_i)| + N + M \\
&\leq |f_1(t)| \, \|z_i\|_0 + N + M
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{|f_1(t)|^2}{2} + \frac{\|z_i\|_0^2}{2} + N + M$$
$$\leq |f_1(t)|^2 + C_1.$$

Portanto,

$$|\Phi(t,X)| = |DX + P| \leq |DX| + |P| \leq L_1 + |f_1(t)|^2 = \phi_1(t).$$

De maneira semelhante, encontramos que:

$$|\Psi(t,Y)| = |DY + Q| \leq |DY| + |Q| \leq L_2 + |f_2(t)|^2 = \phi_2(t).$$

e

$$|\Theta(t,Z)| = |DZ + R| \leq |DZ| + |R| \leq L_3 + |f_3(t)|^2 = \phi_3(t).$$

Como $f_1(t), f_2(t)$ e $f_3(t) \in L^2(\Omega)$, então $|f_1(t)|^2, |f_2(t)|^2$ e $|f_3(t)|^2 \in L^1(\Omega)$ logo são integráveis. Consequentemente, $\phi_1(t), \phi_2(t)$ e $\phi_3(t)$ também o são.

Agora, consideremos $S = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$, então $S(0) = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$ e $S' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$ Daí, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} S' = \Xi(t,S) = \begin{bmatrix} \Phi(t,X) \\ \Psi(t,Y) \\ \Theta(t,Z) \end{bmatrix} \\ S(0) = S_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

- Para $S$ fixo, $\Xi(t,S)$ é mensurável, pois $\Phi(t,X), \Psi(t,Y)$ e $\Theta(t,Z)$ são mensuráveis;
- Para $t$ fixo, temos que $\Xi(t,S)$ é contínua, pois $\Phi(t,X), \Psi(t,Y)$ e $\Theta(t,Z)$ são contínuas;
- Dado um compacto $K'$ temos que:

$$|\Xi(t,S)| \leq \phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) = \phi_4(t)$$

é integrável, uma vez que $\phi_1(t), \phi_2(t)$ e $\phi_3(t)$ são integráveis.
O sistema (3.3) satisfaz, pois, as condições de Carathéodory. Logo existe uma solução $\{u_m(t), v_m(t), w_m(t)\}$ em $[0, t_m)$, $t_m < T$ satisfazendo (3.3).

## 3.3 Estimativas *a Priori I*

Serão estendidas ao intervalo [0,T] as soluções encontradas na seção anterior. Para isso, faremos algumas estimativas *a priori* . Consideremos, primeiramente, $z = u'_m(t)$ em $(3.3)_1$, então segue-se que:

$$\begin{cases} (u''_m(t), u'_m(t)) + \langle Au_m(t), u'_m(t)\rangle + ((u'_m(t), u'_m(t)))+ \\ + \left\langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), u'_m(t)\right\rangle = (f_1(t), u'_m(t)) \qquad \forall z \in V_m \end{cases} \tag{3.9}$$

Note que

- $(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2;$
- $\langle Au_m(t), u'_m(t)\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|_0^p;$
- $((u'_m(t), u'_m(t))) = \left\|u'_m(t)\right\|^2;$
- $\left\langle |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), u'_m(t)\right\rangle = \int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t).u'_m(t)dx = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\, \frac{d}{dt}\, |u_m(t)|^{\rho+2}\, dx.$
- $\left\langle |w_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), u'_m(t)\right\rangle = \int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t).u'_m(t)dx = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\, \frac{d}{dt}\, |u_m(t)|^{\rho+2}\, dx.$

Substituindo essas identidades em (3.9), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|_0^p + \left\|u'_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}\, |u_m(t)|^{\rho+2}\, dx \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2 = (f_1(t), u'_m(t)) \le |(f_1(t), u'_m(t))| \le |f_1(t)|\, |u'_m(t)| \overset{1}{\le} \frac{1}{2}(|f_1(t)|^2 + |u'_m(t)|^2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Analogamente, fazendo $z = v'_m(t)$ e $z = w'_m(t)$ em $(3.3)_2$ e $(3.3)_3$, tem-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|_0^p + \left\|v'_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}\, |v_m(t)|^{\rho+2}\, dx \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v'_m(t)\right|^2 = (f_2(t), v'_m(t)) \le |(f_1(t), v'_m(t))| \le |f_2(t)|\, |v'_m(t)| \le \frac{1}{2}(|f_2(t)|^2 + |v'_m(t)|^2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

e

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w_m(t)\|_0^p + \|w'_m(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'_m(t)|^2 = (f_3(t), w'_m(t)) \le |(f_3(t), w'_m(t))| \le |f_3(t)|\,|w'_m(t)| \le \frac{1}{2}(|f_3(t)|^2 + |w'_m(t)|^2). \tag{3.12}$$

Somando (3.10),(3.11) e (3.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}|v'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}|w'_m(t)|^2) + \frac{1}{p}(\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_0^p + \frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_0^p + \frac{d}{dt}\|w_m(t)\|_0^p)\\
&+\|u'_m(t)\|^2 + \|v'_m(t)\|^2 + \|w'_m(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2}(\int_\Omega [\left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx\\
&+\left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2} + \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}]dx\\
&\le \frac{1}{2}(|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 + |f_3(t)|^2) + \frac{1}{2}(|u'_m(t)|^2 + |v'_m(t)|^2 + |w'_m(t)|^2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Note que

- $\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2}\,dx$
$= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)v_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}.$

- $\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx$
$= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)w_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}.$

- $\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx$
$= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|v_m(t)w_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}.$

Portanto, 3.13 torna-se:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m'(t)\right|^2+\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|_0^p+\left\|u_m'(t)\right\|^2+\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)v_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m'(t)\right|^2+\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|_0^p+\left\|v_m'(t)\right\|^2+\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w_m'(t)\right|^2+\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|w_m(t)\right\|_0^p+\left\|w_m'(t)\right\|^2+\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\\
\leq\frac{1}{2}\left|f_1(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|+\frac{1}{2}\left|f_2(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|v_m'(t)\right|+\frac{1}{2}\left|f_3(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|w_m'(t)\right|.
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

Integrando (3.14) de 0 a $t$, $t<T$,temos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\left|u_m'(t)\right|^2+\left|v_m'(t)\right|^2+\left|w_m'(t)\right|^2)+\frac{1}{p}(\left\|u_m(t)\right\|_0^p+\left\|v_m(t)\right\|_0^p+\left\|w_m(t)\right\|_0^p)\\
&+\int_0^t(\left\|u_m'(s)\right\|+\left\|v_m'(s)\right\|+\left\|w_m'(s)\right\|)ds+\frac{1}{\rho+2}[\left\|u_m(t)v_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\\
&+\left\|u_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\left\|v_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}]\leq\frac{1}{2}\int_0^T(\left|f_1(s)\right|^2+\left|f_2(s)\right|^2+\left|f_3(s)\right|^2)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t(\left|u_m'(s)\right|^2+\left|v_m'(s)\right|^2+\left|w_m'(s)\right|^2)ds+\frac{1}{2}\left|u_m'(0)\right|^2+\frac{1}{2}\left|v_m'(0)\right|^2+\frac{1}{2}\left|w_m'(0)\right|^2\\
&+\frac{1}{p}\left(\left\|u_m(0)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\left\|v_m(0)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}+\left\|w_m(0)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right)+\frac{1}{\rho+2}[\left\|u_m(0)v_m(0)\right\|\\
&+\left\|u_m(0)w_m(0)\right\|+\left\|v_m(0)w_m(0)\right\|]
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Apartir de agora extrairemos os dados que fazem parte do principal teorema desta dissertação. Tomando,

(I) $f_1, f_2$ e $f_3\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$;

(II) $u_m(0)\to u_0, v_m(0)\to v_0, w_m(0)\to w_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(III) $u_m'(0)\to u_1, v_m'(0)\to v_1, w_m'(0)\to w_1$ em $L^2(\Omega)$.

Segue-se que:

- $\int_0^T(\left|f_1(t)\right|^2+\left|f_2(t)\right|^2+\left|f_3(t)\right|^2)dt$ é limitada;
- $\left\|u_m(0)\right\|_0\leq C, \left\|v_m(0)\right\|_0\leq C$ e $\left\|w_m(0)\right\|_0\leq C, \quad\forall m$;

- $|u'_m(0)| \leq C, |v'_m(0)| \leq C$ e $|w'_m(0)| \leq C, \quad \forall m.$

Além disso, pelo lema (2.5), $\{u_m(0)v_m(0)\}_{m=1}^{\infty}, \{v_m(0)w_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{u_m(0)w_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ são limitados em $L^{\rho+2}(\Omega)$. Temos também, da desigualdade (3.15) que:

$$\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|w'_m(t)|^2 \leq C + \frac{1}{2}\int_0^t (|u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 + |w'_m(s)|^2)ds.$$

Segue-se, via desigualdade de Gronwall que $u'_m, v'_m$ e $w'_m$ são limitadas. Consequentemente, (3.15) assume a seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|w'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|w_m(t)\|_0^p \\ +\frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2}\|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \\ +\int_0^t \|u'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|v'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|w'_m(s)\|\,ds \leq C, \end{array}\right. \tag{3.16}$$

onde $C$ é uma constante independente de $t \geq 0$ e $m$.

Da desigualdade (3.16) e via resultados de prolongamento, segue-se que podemos estender as soluções $\{u_m(t), v_m(t), w_m(t)\}$ ao intervalo $[0,T]$.Daí

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|w'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|w_m(t)\|_0^p \\ +\frac{1}{\rho+2}\left(\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right) \\ +\int_0^t \|u'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|v'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|w'_m(s)\|\,ds \leq C, \end{array}\right. \tag{3.17}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0,T]$.
De (3.17) concluímos que:

$$\|u_m(t)\|_0 + \|v_m(t)\|_0 + \|w_m(t)\|_0 \leq C, \tag{3.18}$$

$$|u'_m(t)| + |v'_m(t)| + |w'_m(t)| \leq C, \tag{3.19}$$

$$\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} \leq C, \tag{3.20}$$

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|^2\,dt + \int_0^T \|v'_m(t)\|^2\,dt + \int_0^T \|w'_m(t)\|^2\,dt < C, \tag{3.21}$$

onde as desigualdades (3.18)-(3.21) ocorrem para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0,T]$.

Dessas últimas conclusões, deduz-se que:

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \|w_m\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C \tag{3.22}$$

$$\|u'_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|v'_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|w'_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \tag{3.23}$$

$$\|u_m v_m\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} + \|u_m w_m\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} + \|v_m w_m\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} \leq C \tag{3.24}$$

Por outro lado, de (3.21) segue-se

$$\|u'_m\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} + \|v'_m\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} + \|w'_m\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{3.25}$$

De (3.22) a (3.25) temos:

$$(u_m)_m, (v_m)_m, (w_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)); \tag{3.26}$$

$$(u'_m)_m, (v'_m)_m, (w'_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.27}$$

$$(u'_m)_m, (v'_m)_m, (w'_m)_m, \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \tag{3.28}$$

$$(u_m v_m)_m, (u_m w_m)_m, (v_m w_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{3.29}$$

Além disso, $A$ é limitado, portanto:

$$(Au_m)_m, (Av_m)_m, (Aw_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{3.30}$$

## 3.4 Estimativas *a Priori II*

Mostraremos que $(u''_m)_m, (v''_m)_m$ e $(w''_m)_m$ são limitadas em $L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))$. Seja $P_m : L^2(\Omega) \to V_m \subset H_0^s(\Omega)$, o operador projeção sobre $L^2(\Omega)$, dado por

$$P_m(h) = \sum_{j=1}^{m} (h, z_j) z_j.$$

Temos que

1. $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ e $P_m = P_m^*$, onde * denota a adjunta de $P_m$

2. $P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega))$

3. $P_m(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in V_m$.

Com efeito,

1. Pela linearidade do produto interno em $L^2(\Omega)$, segue que $P_m$ é linear. Agora, para todo $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}(P_m(h_1), h_2) = (\sum_{j=1}^{m}(h_1, z_j)z_j, h_2) &= \sum_{j=1}^{m}((h_1, z_j)(z_j, h_2) \\ &= \sum_{j=1}^{m}(h_1, z_j)z_j, h_1) = (h_1, P_m(h_2))\end{aligned} \tag{3.31}$$

Logo, pelo teorema de Hellinger-Toeplitz,$P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ e $P_m = P_m^*$.

2. Seja $h \in H_0^s(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}\|P_m(h)\|_{H_0^s(\Omega)} = \left\|\sum_{j=1}^{m}(h, \omega_j)\omega_j\right\|_{H_0^s(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^{m}\|(h, \omega_j)\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{m}|(h, \omega_j)|\,\|\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^{m}|h|\,|\omega_j|\,\|\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \\ &\leq C\,\|h\|_{H_0^s(\Omega)}\sum_{j=1}^{m}\|\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde, $P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega))$.

3. Seja $\omega \in V_m$. Então, $\omega = \sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i$. Assim,

$$P_m(\omega) = P_m(\sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} C_i P_m(\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=1}^{m}(\omega_i, \omega_j)\omega_j = \sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i = \omega. \tag{3.33}$$

Temos que

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega),$$

e, pelo Lema (2.5), $L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$. Logo, segue da equação aproximada $(3.3)_1$, que

$$\left\langle u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t) - f_1(t), \omega\right\rangle = 0$$

$$\left\langle u''_m(t) + Au_m(t) - \Delta u'_m(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) - f_1(t), P_m(\omega)\right\rangle = 0$$

para todo $\omega \in V_m$, onde $\langle , \rangle$ denota a dualidade $H^{-s}(\Omega) \times H_0^s(\Omega)$. Logo

$$(u''_m(t)+Au_m(t)-\Delta u'_m(t)+(|v_m(t)|^{\rho+2}+|w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t)-f_1(t), P_m(\omega)) = 0$$

para todo $w \in V_m$. Daí, sendo $P_m = P_m^*$, segue que

$$P_m^*(u''_m(t) + Au_m(t) - \Delta u'_m(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) - f_1(t)) = 0$$

em $V_m$.

O teorema da extensão de Hahn-Banach afirma que se $X$ é um espaço normado, $Y$ é um espaço de Banach, $M$ um subespaço denso de $X$ e $T : M \subset X \to Y$ é uma transformação linear limitada, então existe uma única transformação linear limitada $\overline{T} : X \to Y$ tal que $\overline{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in M$, e $\left\|\overline{T}(x)\right\| = \|T(x)\|$.

Usando este resultado, obtemos

$$P_m^*(u''_m(t) + Au_m(t) - \Delta u'_m(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) - f_1(t)) = 0$$

em $H_0^s(\Omega)$.Daí, pela linearidade de $P_m^*$ e do fato de que $u''_m(t) \in V_m$, segue que

$$\begin{aligned} u''_m(t) = -P_m^*(Au_m(t)) + P_m^*(\Delta u'_m(t)) - P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) \\ +P_m^*(f_1(t)), \end{aligned}$$

em $H^{-s}(\Omega)$. Aplicando a norma em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} &\|u''_m(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \|P_m^*(Au_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|P_m^*(\Delta u'_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \\ &+ \left\|P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t))\right\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|P_m^*(f_1(t))\|_{H^{-s}(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Mas, $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ e $W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Logo $P_m^* \in \mathcal{L}(W^{-1,p'}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ e, então,

$$\|P_m^*(Au_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C\,\|Au_m(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C\,\|u_m(t)\|_0^{p-1} \tag{3.35}$$

Temos ainda $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ e $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$.Assim $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ e daí obtemos

$$\|P_m^*(\Delta u'_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \|\Delta u'_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|u'_m(t)\|. \tag{3.36}$$

Também, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$ e $L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Assim, como $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$, segue que $P_m^* \in \mathcal{L}(L^\theta(\Omega), H^{-s}(\Omega))$. Obtemos então

$$\begin{aligned}
&\left\|P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t))\right\|_{H^{-s}(\Omega)} \\
&\leq C\left\||v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t))\right\|_{L^\theta(\Omega)} \\
&\leq C_2.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

pois $(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t)$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))$.

Por fim, sendo $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ e $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$, segue que $P_m^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^{-s}(\Omega))$. Assim,

$$\|P_m^* f_1(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C\,|f_1(t)|\,, \quad f_1(t) \in L^2(\Omega). \tag{3.38}$$

Levando em consideração as limitações (3.35)-(3.38), concluímos, via expressão (3.34), que

$$(u_m''(t))_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)) \tag{3.39}$$

Um raciocínio semelhante, usando as equações aproximadas $(3.3)_2$ e $(3.3)_3$, conduz a

$$(v_m''(t))_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)) \tag{3.40}$$

e

$$(w_m''(t))_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)) \tag{3.41}$$

## 3.5 Estimativas *a Priori III*

Foi visto anteriormente, mediante utilização do operador projeção sobre $L^2(\Omega)$, que:

$$\|u_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|v_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|w_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C.$$

e, portanto:

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))} + \|v_m''\|_{L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))} + \|w_m''\|_{L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))} \leq C, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.42}$$

Já pelo lema (2.5), foi visto que se $u_m(t), v_m(t), w_m(t)$ pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$, então $|v_m(t)|^{\rho+2}\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t) \in L^\theta(\Omega)$ em qualquer situação estudada. Logo:

$$\left\| |v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m \right\|_{L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))} \leq C, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{3.43}$$

donde

$$(|v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.44}$$

Analogamente, todas as outras partes não lineares do problema (1.1) são limitadas em $L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))$. Além disso, de (3.42), segue que:

$$(u''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)); \tag{3.45}$$

$$(v''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)); \tag{3.46}$$

$$(w''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)). \tag{3.47}$$

Formularemos agora o conceito de solução.

Seja $\Psi(x,t) = w(x)\theta(t),\ w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\theta \in D(0,T)$. Multiplicando a equação $(1.1)_1$ por $\Psi(x,t)$, temos:

$$u''.\Psi + Au.\Psi - \Delta u'\Psi + (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})|u|^\rho u.\Psi = f_1.\Psi,$$

e integrando em $Q$, tem-se

$$\int_Q u''.\Psi + \int_Q Au.\Psi - \int_Q \Delta u'\Psi + \int_Q (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})|u|^\rho u.\Psi = \int_Q f_1.\Psi.$$

Utilizando o teorema de Green, temos

$$-\int_Q u'.\Psi' + \int_Q Au.\Psi + \int_\Omega \nabla u'\nabla\Psi + \int_Q (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})|u|^\rho u.\Psi = \int_Q f_1.\Psi. \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^T \theta' \left(\int_Q u'.wdx\right) dt + \int_0^T \theta \left(\int_Q Au.wdx\right) dt + \int_0^T \theta \left(\int_Q \nabla u'\nabla wdx\right) dt$$

$$+ \int_0^T \theta \left(\int_Q (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})|u|^\rho u.wdx\right) dt = \int_0^T \theta \left(\int_Q f_1.wdx\right) dt. \Leftrightarrow$$

$$\int_0^T \theta \frac{d}{dt}\left(\int_Q u'.wdx\right) dt + \int_0^T \langle Au, w\rangle \theta dt + \int_0^T ((u',w))\theta dt +$$

$$+ \int_0^T \left\langle (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})|u|^\rho u, w\right\rangle \theta dt = \int_0^T (f_1,w)\theta dt, \quad \forall \theta \in D(0,T). \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(u',z) + \langle Au, z\rangle + ((u',z)) + \left\langle (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})|u|^\rho u, z\right\rangle = (f_1,z), \tag{3.48}$$

$$\forall\ z \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \text{ em } D'(0,T).$$

Analogamente,

$$\frac{d}{dt}(v',z) + \langle Av, z\rangle + ((v',z)) + \left\langle (|u|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2})\,|v|^{\rho}\, v, z\right\rangle = (f_2, z), \tag{3.49}$$
$$\forall\ z \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \text{ em } D'(0,T).$$

e

$$\frac{d}{dt}(w',z) + \langle Aw, z\rangle + ((w',z)) + \left\langle (|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2})\,|w|^{\rho}\, w, w\right\rangle = (f_3, z), \tag{3.50}$$
$$\forall\ z \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \text{ em } D'(0,T).$$

**Definição 3.1.** Uma solução de (3.1) é uma trinca de funções reais $\{u = u(x,t), v = v(x,t) \text{ e } w = w(x,t))\}$ definida em todo $(x,t) \in Q$, onde $Q = \Omega \times (0,T)$, para $T > 0$ fixado, tais que:

$$u, v, w \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)),$$
$$u', v', w' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

satisfazendo (3.48), (3.49) e (3.50).

Das estimativas (I), (II) e (III), temos

- $f_1, f_2, f_3 \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$;
- $u_0, v_0, w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$;
- $u_1, v_1, w_1 \in L^2(\Omega)$.

E de (II) e (3.16) , segue-se:

$$u'_m, v'_m \text{ e } w'_m \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{3.51}$$

ainda por (3.16), temos:

$$u_m, v_m, w_m \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{3.52}$$

Assim, devido a essas observações, podemos enunciar o teorema principal desta monografia.

### 3.5.1 Teorema Principal

Sejam $n, p$ e $\rho$ como no capítulo 2 e suponha que

$$
\begin{aligned}
f_1, f_2, f_3 &\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
u_0, v_0, w_0 &\in W_0^{1,p}(\Omega),\\
u_1, v_1, w_1 &\in L^2(\Omega).
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Então existem $u, v, w : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$
\begin{aligned}
u, v, w &\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),\\
u', v', w' &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

e para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se

$$
\frac{d}{dt}(u'(t),z) + \langle Au(t),z\rangle + ((u'(t),z)) + \left\langle \left[|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right]|u(t)|^\rho u(t), z\right\rangle = (f_1(t),z), \tag{3.55}
$$

$$
\frac{d}{dt}(v'(t),z) + \langle Av(t),z\rangle + ((v'(t),z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right]|v(t)|^\rho v(t), z\right\rangle = (f_2(t),z), \tag{3.56}
$$

$$
\frac{d}{dt}(w'(t),z) + \langle Aw(t),z\rangle + ((w'(t),z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}\right]|w(t)|^\rho w(t), z\right\rangle = (f_3(t),z) \tag{3.57}
$$

e as igualdades (3.55),(3.56) e (3.57) são entendidas no sentido de $D'(0,T)$.
Além disso

$$
\begin{cases}
u(0) = u_0, u'(0) = u_1,\\
v(0) = v_0, v'(0) = v_1,\\
w(0) = w_0, w'(0) = w_1.
\end{cases}
\tag{3.58}
$$

## 3.6 Passagem do Limite

Observe que, considerando X um espaço de Banach reflexivo, temos que $L^\infty(0,T;X) = (L^1(0,T,X'))'$ e $L^2(0,T;X) = (L^2(0,T,X'))'$. Logo, das limitações obtidas de (3.26) a (3.28),(3.30) e de (3.45) a (3.47), segue, via teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a existência de subsequências $(u_\nu)_\nu, (v_\nu)_\nu$ e $(w_\nu)_\nu$ de $(u_m)_m, (v_m)_m$ e $(w_m)_m$, respectivamente, tais que:

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u, v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v, w_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w, \text{ em } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{3.59}$$

$$u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u', v'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v', w'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w', \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.60}$$

$$u'_\nu \rightharpoonup u', v'_\nu \rightharpoonup v', w'_\nu \rightharpoonup w', \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.61}$$

$$u''_\nu \rightharpoonup u'', v''_\nu \rightharpoonup v'', w''_\nu \rightharpoonup w'', \text{ em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)), \tag{3.62}$$

$$Au_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi, Av_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \eta, Aw_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ em } L^\infty(0,T,W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{3.63}$$

**Observação:** Note que se $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ e $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então, como $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset D'(0,T;L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset D'(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset D'(0,T;L^2(\Omega))$, tem-se que

$$u_\nu \to u, \qquad u'_\nu \to w$$

em $D'(0,T;L^2(\Omega))$, e pela continuidade da derivada distribucional, se $u_\nu \to u$ e $u'_\nu \to w$ deduzimos $w = u'$, donde (3.61) faz sentido. De modo semelhante, analisa-se as outras situações.

Consideremos a equação aproximada $(3.3)_1$ na forma:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_m(t),z) + \langle Au_m(t),z\rangle + ((u'_m(t),z)) \\ + \left\langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}) \, |u_m(t)|^\rho \, u_m(t), z \right\rangle = (f_1(t),z), \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$.

Agora, multiplicando-a por $\varphi \in D(0,T)$, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t),z)\varphi + \langle Au_\nu(t),z\rangle \varphi + ((u'_\nu(t),z))\varphi + \\ + \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}) \, |u_\nu(t)|^\rho \, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi = (f_1(t),z)\varphi, \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$. Integrando-se 0 a $T$, temos:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (u_\nu''(t), z)\varphi dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u_\nu'(t), z))\varphi dt + \\ \displaystyle + \int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}) \, |u_\nu(t)|^\rho \, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$.
Daí, via integração por partes, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle -\int_0^T (u_\nu'(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u_\nu'(t), z))\varphi dt + \\ \displaystyle + \int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}) \, |u_m(t)|^\rho \, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt. \end{array} \right. \tag{3.64}$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$.

Como $u_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) = (L^1(0,T, L^2(\Omega)))'$ então

$$\langle u_\nu', \phi\rangle \to \langle u', \phi\rangle, \qquad \forall \phi \in L^1(0,T,L^2(\Omega)). \tag{3.65}$$

Daí, sendo $\langle u_\nu', \phi\rangle = \displaystyle\int_0^T (u_\nu'(t), \phi(t))dt$, temos, para $\psi(x,t) = z(x)\psi(t)$ que:

$$\int_0^T (u_\nu'(t), \phi(t))dt = \int_0^T (u_\nu'(t), z(x))\psi(t))dt, \quad \forall\ z \in L^2(\Omega), \forall\ \psi \in L^1(0,T).$$

Donde, de (3.65),

$$\int_0^T (u_\nu'(t), z(x))\varphi'(t))dt \to \int_0^T (u'(t), z(x))\varphi'(t))dt, \quad \forall\ z \in L^2(\Omega), \forall\ \psi \in L^1(0,T). \tag{3.66}$$

Em particular,

$$\int_0^T (u_\nu'(t), z(x))\psi(t)dt \to \int_0^T (u'(t), z(x))\psi(t)dt, \tag{3.67}$$

$$\forall\ z \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad \forall\ \psi = \varphi', \quad \varphi \in D(0,T) \subset L^1(0,T).$$

Analogamente temos, de (3.63), que

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t), z(x)\rangle\, \psi(t)dt \to \int_0^T \langle \chi(t), z(x)\rangle\, \psi(t)dt, \tag{3.68}$$

$$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall \psi \in L^1(0,T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t), z(x)\rangle\, \varphi(t)dt \to \int_0^T \langle \chi(t), z(x)\rangle\, \varphi(t)dt, \tag{3.69}$$

$$\forall z \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega), \forall\ \varphi\ \in D(0,T) \subset L^1(0,T).$$

De (3.61) segue que:

$$\int_0^T \langle u_\nu'(t)dt, s(x)\rangle\, \psi(t)dt \to \int_0^T \langle u'(t)dt, s(x)\rangle\, \psi(t)dt, \tag{3.70}$$

$$\forall s \in H^{-1}(\Omega), \quad \forall \psi \in L^2(0,T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u_\nu'(t)dt, -\Delta z(x)\rangle\, \varphi(t)dt \to \int_0^T \langle u'(t)dt, \Delta z(x)\rangle\, \varphi(t)dt, \tag{3.71}$$

$$\forall z \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad \forall \psi = \varphi', \quad \varphi \in D(0,T) \subset L^2(0,T).$$

Assim,

$$\int_0^T ((u_\nu'(t), z(x)))\varphi(t)dt \to \int_0^T ((u'(t), z(x)))\varphi(t)dt, \tag{3.72}$$

$\forall z \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad \forall \psi = \varphi', \quad \varphi \in D(0,T) \subset L^2(0,T).$

De (3.44) temos que $(|v_m|^{\rho+2}\, |u_m|^\rho\, u_m)_m$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))$. Portanto $(|v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^\rho\, u_m(t))_m$ é limitada em $L^\theta(\Omega)$, ou seja:

$$\left\| |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^\rho\, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(\Omega)} \le C, \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.73}$$

donde,

$$\int_0^T \left\| |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^\rho\, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(\Omega)}^\theta dt \le C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.74}$$

Logo,

$$\left\| |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^\rho\, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega))} \le C, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.75}$$

e portanto, $(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^\rho u_m)_m$ é limitada em $L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega))$. De (3.44) existe uma subsequência $(|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu)_\nu$ de $(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^\rho u_m)_m$ tal que

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda, \text{ em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.76}$$

Por (3.75) temos

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda, \text{ em } L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.77}$$

Sendo $L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega))$ reflexivo, segue que

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^\rho u_\nu \rightharpoonup \lambda, \text{ em } L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.78}$$

Como, de (3.26) e (3.27)

$$(u'_m)_m, \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$(u_m)_m, \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

e como

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega),$$

temos, mediante o teorema de Aubin-Lions, a existência de uma subsequência $(u_\nu)_\nu$ tal que

$$u_\nu \to u, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{3.79}$$

$$u_\nu \to u, \text{q.s. em } Q. \tag{3.80}$$

Como as sequências $(w_m)_m, (w'_m)_m, (v_m)_m$ e $(v'_m)_m$ estão nas mesmas condições acima, existem subsequências $(w_\nu)_\nu$ e $(v_\nu)_\nu$ tais que

$$w_\nu \to w, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{3.81}$$

$$w_\nu \to w, \text{q.s. em } Q. \tag{3.82}$$

e

$$v_\nu \to v, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{3.83}$$

$$v_\nu \to v, \text{q.s. em } Q. \tag{3.84}$$

De (3.80), (3.82) e (3.84), temos:

$$|v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \to |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ q.s. em } Q, \tag{3.85}$$
$$|w_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \to |w|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ q.s. em } Q. \tag{3.86}$$

Agora, de (3.75) e (3.85) temos, via Lema de Lions, que

$$|v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \rightharpoonup |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ em } L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.87}$$

Disso e de (3.78) segue que

$$\lambda = |v|^{\rho+2} |u|^\rho u$$

e

$$|v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.88}$$

Analogamente, segue que

$$|w_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} |w|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.89}$$

A convergência em (3.88) acarreta

$$\int_0^T \left\langle |v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu, z(x)\right\rangle \psi(t)dt \to \int_0^T \left\langle |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, z(x)\right\rangle \psi(t)dt, \tag{3.90}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\gamma(\Omega), \quad \forall \psi \in L^1(0,T),$
Em particular,

$$\int_0^T \left\langle |v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu, z(x)\right\rangle \varphi(t)dt \to \int_0^T \left\langle |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, z(x)\right\rangle \varphi(t)dt, \tag{3.91}$$

$\forall z \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\gamma(\Omega), \quad \forall \varphi \in D(0,T) \subset L^1(0,T).$

Tomando o limite quando $\nu \to \infty$ em (3.64) e utilizando (3.67), (3.68), (3.71) e (3.91), temos

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (u'(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'(t), z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), z\right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.92}$$

para todo $z \in V_m$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.
Com raciocínio semelhante, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (v'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \eta(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((v'(t),z))\varphi dt + \\ + \int_0^T \left\langle (|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |v(t)|^{\rho}\, v(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_2(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.93}$$

para todo $z \in V_m$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.
e

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (w'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \xi(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((w'(t),z))\varphi dt + \\ + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |u(t)|^{\rho+2})\, |w(t)|^{\rho}\, w(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_3(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.94}$$

para todo $z \in V_m$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.

Usando a definição de base e o fato de que $V_m$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então (3.92),(3.93) e (3.94) assumem as seguintes formas:

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (u'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'(t),z))\varphi dt + \\ + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^{\rho}\, u(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.95}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (v_\nu'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \eta(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((v'(t),z))\varphi dt + \\ + \int_0^T \left\langle (|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |v(t)|^{\rho}\, v(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_2(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.96}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.
e

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (w'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \xi(t),z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((w'(t),z))\varphi dt + \\ + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |u(t)|^{\rho+2})\, |w(t)|^{\rho}\, w(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_3(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.97}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.

Note que, sendo $t \mapsto (u'(t),z), t \mapsto (v'(t),z)$ e $t \mapsto (w'(t),z)$ funções de $L^\infty(0,T)$, elas definem distribuições sobre (0,T).Logo (3.95),(3.96) e (3.97) podem ser postos na seguintes formas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u'(t),z) \;&+\; \langle \chi(t),z\rangle + ((u'(t),z)) + \\ &+\; \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^{\rho}\, u(t), z \right\rangle = (f_1,z), \end{aligned} \tag{3.98}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$ em $D'(0,T)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v'(t),z) \;&+\; \langle \eta(t),z\rangle + ((v'(t),z)) + \\ &+\; \left\langle (|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |v(t)|^{\rho}\, v(t), z \right\rangle = (f_2,z), \end{aligned} \tag{3.99}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$ em $D'(0,T)$. e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w'(t),z) \;&+\; \langle \xi(t),z\rangle + ((w'(t),z)) + \\ &+\; \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |u(t)|^{\rho+2})\, |w(t)|^{\rho}\, w(t), z \right\rangle = (f_3,z), \end{aligned} \tag{3.100}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$ em $D'(0,T)$.

### 3.6.1 Condições iniciais

- $u(0) = u_0$

De (3.59) e (3.60) temos $u \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Logo, sendo $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e portanto faz sentido o cálculo de $u(0)$.

$$\int_0^T \langle u_\nu, z(x)\rangle \psi(t)dt \to \int_0^T \langle u, z(x)\rangle \psi(t)dt, \quad \forall\, z \in W^{-1,p'}(\Omega), \forall\, \psi \ \in L^1(0,T).$$

Tomando $z \in L^2(\Omega)$, a dualidade $\langle u_\nu, z(x)\rangle$ torna-se um produto interno em $L^2(\Omega)$. Portanto, a convergência torna-se:

$$\int_0^T (u_\nu, z(x))\psi(t)dt \to \int_0^T (u, z(x))\psi(t)dt, \quad \forall\, z \in L^2(\Omega), \forall\, \psi \in L^1(0,T). \tag{3.101}$$

Consideremos agora $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.
Daí, $\varphi' \in C^0([0,T]) \subset L^1(0,T)$; Logo, e, em particular, tomando $\psi = \varphi'$, temos de (3.101) que

$$\int_0^T (u_\nu, z(x))\varphi'(t)dt \to \int_0^T (u, z(x))\varphi'(t)dt, \tag{3.102}$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Como $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ por (3.59), temos

$$\int_0^T (u'_\nu, z(x))\psi(t)dt \to \int_0^T (u', z(x))\psi(t)dt, \quad \forall\, z \in L^2(\Omega), \forall\, \psi \in L^1(0,T).$$

Em particular, para toda $\varphi \in C^1([0,T]) \subset L^1([0,T])$ com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, temos

$$\int_0^T (u'_\nu, z(x))\varphi(t)dt \to \int_0^T (u', z(x))\varphi(t)dt, \tag{3.103}$$

Somando (3.102) e (3.103) obtemos

$$\int_0^T (u_\nu, z(x))\varphi'(t)dt + \int_0^T (u'_\nu, z(x))\varphi(t)dt \to \int_0^T (u, z(x))\varphi'(t)dt + \int_0^T (u', z(x))\varphi(t)dt,$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Segue que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_\nu, z(x))\varphi(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u, z(x))\varphi(t)dt, \tag{3.104}$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Logo, de (3.104), obtém-se:

$$(u_\nu(T), z)\varphi(T) - (u_\nu(0), z)\varphi(0) \to (u(T), z)\varphi(T) - (u(0), z)\varphi(0), \qquad \forall\ z \in L^2(\Omega),$$

donde

$$(u_\nu(0), z) \to (u(0), z), \qquad \forall\ z \in L^2(\Omega).$$

Desse modo,

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.105}$$

Por outro lado, temos que $u_\nu(0) \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos $u_\nu(0) \to u_0$ em $L^2(\Omega)$, donde

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.106}$$

De (3.105) e (3.106) e pela unicidade do limite fraco tem-se

$$u(0) = u_0$$

- $\mathbf{u'(0) = u_1}$

De (3.61) e (3.62), temos $u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u'' \in L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$. Logo, $u' \in C([0, T]; H^{-s}(\Omega))$ e portanto faz sentido o cálculo de $u'(0)$. Note que, sendo $u''_\nu \rightharpoonup u''$ em $L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$, temos:

$$\int_0^T \langle u''_\nu, z(x)\rangle\, \psi(t)dt \to \int_0^T \langle u'', z(x)\rangle\, \psi(t)dt, \tag{3.107}$$

$$\forall\ z \in H_0^s(\Omega),\ \forall\ \psi \in L^2(0, T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u''_\nu, z(x)\rangle\, \varphi(t)dt \to \int_0^T \langle u'', z(x)\rangle\, \varphi(t)dt, \tag{3.108}$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0, T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Entretanto, é sabido que $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, donde segue, via (3.104), que

$$\int_0^T (u'_\nu, z(x))\varphi'(t)dt \to \int_0^T (u', z(x))\varphi'(t)dt,$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0)=1$ e $\varphi(T)=0$.

Em Particular,

$$\int_0^T \langle u_\nu', z(x)\rangle \varphi'(t)dt \to \int_0^T \langle u', z(x)\rangle \varphi'(t)dt, \tag{3.109}$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0)=1$ e $\varphi(T)=0$.

Somando (3.108) e (3.109) obtemos:

$$\int_0^T \langle u_\nu'', z(x)\rangle \varphi(t)dt + \int_0^T \langle u_\nu', z(x)\rangle \varphi'(t)dt \to \int_0^T \langle u'', z(x)\rangle \varphi(t)dt + \int_0^T \langle u', z(x)\rangle \varphi'(t)dt,$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0)=1$ e $\varphi(T)=0$.

Donde

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\langle u_\nu', z(x)\rangle \varphi(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\langle u', z(x)\rangle \varphi(t)dt, \tag{3.110}$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, e toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0)=1$ e $\varphi(T)=0$.

Logo,

$$(u_\nu'(T), z)\varphi(T) - (u_\nu'(0), z)\varphi(0) \to (u'(T), z)\varphi(T) - (u'(0), z)\varphi(0), \quad z \in H_0^s(\Omega).$$

Sendo $\varphi(0)=1$ e $\varphi(T)=0$, temos

$$\langle u_\nu'(0), z\rangle \to \langle u'(0), z\rangle, \quad \forall\, z \in H_0^s(\Omega). \tag{3.111}$$

Daí,

$$u_\nu'(0) \to u'(0) \text{ em } H^{-s}(\Omega). \tag{3.112}$$

Por outro lado, de $(3.3)_4$, temos $u_\nu'(0) \to u_1$ em $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ temos que $u_\nu'(0) \rightharpoonup u_1$ em $H^{-s}(\Omega)$, donde

$$u_\nu'(0) \rightharpoonup u_1 \text{ em } H^{-s}(\Omega). \tag{3.113}$$

De (3.112) e (3.113) e pela unicidade do limite fraco, temos que

$$u'(0) = u_1.$$

De modo análogo se mostra que

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1.$$

e

$$w(0) = w_0, w'(0) = w_1.$$

### 3.6.2 $Au(t) = \chi(t)$, $Av(t) = \eta(t)$ e $Aw(t) = \xi(t)$

Nesta seção será explorada, essencialmente, a monotonicidade e hemicontinuidade do operador pseudo-Laplaciano $A$ e propriedadaes do $\limsup$.

Como $A$ é monótono, temos

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t) - Az, u_\nu(t) - z\rangle \, dt \geq 0, \quad \forall\, z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle \, dt - \int_0^T \langle Az, u_\nu(t) - z\rangle \, dt, \quad \forall\, z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Daí, tomando o $\limsup$ na desigualdade acima, temos:

$$0 \leq \limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \, dt - \int_0^T \langle Az, u(t) - z\rangle \, dt, \tag{3.114}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Consideremos a equação aproximada $(3.3)_1$ com $m = \nu$ e $z = u_\nu(t)$, então

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t), u_\nu(t)) + \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle + ((u'_\nu(t), u_\nu(t))) + \\ \left\langle \left(|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}\right) |u_\nu(t)|^\rho \, u_\nu(t), u_\nu(t) \right\rangle = (f_1(t), u_\nu(t)) \end{array} \right.$$

Observando que

- $(u''_\nu(t), u_\nu(t)) = \dfrac{d}{dt}(u'_\nu(t), u_\nu(t)) - |u'_\nu(t)|^2$
- $((u'_\nu(t), u_\nu(t))) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt} \|u_\nu(t)\|^2$
- $\left\langle \left(|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}\right) |u_\nu(t)|^\rho \, u_\nu(t), u_\nu(t) \right\rangle = \|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$

Logo,

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(u'_\nu(t), u_\nu(t)) - |u'_\nu(t)|^2 + \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u_\nu(t)\|^2 \\ + \|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} = (f_1(t), u_\nu(t)) \end{array} \right.$$

Daí, integrando de 0 a $T$, temos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle\, dt = (u'_\nu(0), u_\nu(0)) - (u'_\nu(T), u_\nu(T)) + \int_0^T |u'_\nu(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\|u_\nu(0)\|^2 \\ \displaystyle -\frac{1}{2}\|u_\nu(T)\|^2 - \int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt + \int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt. \end{array} \right. \tag{3.115}$$

Vamos analizar agora cada parcela da equação anterior.

- Temos: $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Logo, como $u_\nu(0) \to u(0)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se $u_\nu(0) \to u(0)$ em $L^2(\Omega)$.Por outro lado, $u'_\nu(0) \to u'(0)$ em $L^2(\Omega)$. Portanto
$$(u'_\nu(0), u_\nu(0)) \to (u'(0), u(0)). \tag{3.116}$$

- De (3.18), $(u_m(T))_m$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De (3.19), $(u'_m(T))_m$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Como, para $p > 1$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo e $(u_m(T))_m$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos, via teorema de *Kakutani* que existe uma subsequência $(u_\nu(T))_\nu$ tal que $u_\nu(T) \rightharpoonup u(t)$, em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Analogamente, $L^2(\Omega)$ é reflexivo, logo existe uma subsequência $(u'_\nu(T))_\nu$ de $(u'_m(T))_m$ tal que $u'_\nu(T) \rightharpoonup u(t)$, em $L^2(\Omega)$. Segue que:
$$(u'_\nu(T), u_\nu(T)) \to (u'(T), u(T)). \tag{3.117}$$

- Em (3.28) e (3.45) foi visto que:
$$(u'_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega));$$
$$(u''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-s}(\Omega)).$$
Além disso, note-se:
$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$
Logo, pelo teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $(u'_\nu)_\nu$ de $(u'_m)_m$ tal que $u'_\nu \to u'$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$. Desse modo

$$\int_0^T |u_\nu'(t)|^2\, dt \to \int_0^T |u'(t)|^2\, dt \tag{3.118}$$

- Temos também que, $u_\nu(0) \to u(0)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, logo $u_\nu(0) \to u(0)$ em $H_0^1(\Omega)$. Daí,

$$\|u_\nu(0)\| \to \|u(0)\| \tag{3.119}$$

**OBS.:** A identificação $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$ é feita via teorema de Fubini. De fato, dada, $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tem-se, para cada $t \in [0,T]$, que $u(t) \in L^2(\Omega)$ e portanto $u(t)$ é uma função de $\Omega \to \mathbb{R}$, cujo valor em $x$ é $u(x,t)$. Assim

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2\, dxdt = \int_Q |u(x,t)|^2\, dQ = \|u\|_{L^2(Q)}^2 .$$

Com isto, estabelecemos uma tal isometria.

- Sendo $(u_m(T))_m$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, temos que $(u_m(t))_m$ limitada em $H_0^1(\Omega)$. Logo, pela reflexividade de $H_0^1(\Omega)$, mediante o teorema de Kakutani, existe uma subsequência $(u_\nu(T))_\nu$ de $(u_m(T))_m$ tal que $u_\nu(T) \rightharpoonup u(T)$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim

$$\|u(T)\|^2 \leq \liminf \|u_\nu(T)\|^2 . \tag{3.120}$$

- Finalmente, por (3.29),$(u_m v_m)_m$ e $(u_m w_m)_m$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))$. Podemos extrair, pois, subsequências $(u_\nu v_\nu)_\nu$ de $(u_m v_m)_m$ e $(u_\nu w_\nu)_\nu$ de $(u_m w_m)_m$ tais que

$$u_\nu v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma \text{ em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.121}$$

$$u_\nu w_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \tau \text{ em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.122}$$

Ainda por (3.29) e por $L^\infty(Q) \equiv L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)) \equiv L^{\rho+2}(Q)$ em qualquer das situações estudadadas no capítulo 2, temos

$$\|u_\nu v_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C\,\|u_\nu v_\nu\|_{L^\infty(Q)}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \tag{3.123}$$

$$\|u_\nu w_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C\,\|u_\nu v_\nu\|_{L^\infty(Q)}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \tag{3.124}$$

De (3.80),(3.82)e (3.84) segue que

$$u_\nu v_\nu \to uv \text{ q.s. em } Q, \tag{3.125}$$

$$u_\nu w_\nu \to uw \text{ q.s. em } Q. \tag{3.126}$$

De(3.123)-(3.126) e do Lema de Lions, temos que

$$u_\nu v_\nu \rightharpoonup uv \text{ em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.127}$$

$$u_\nu w_\nu \rightharpoonup uw \text{ em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.128}$$

Donde $\sigma = uv$ e $\tau = uw$. Além disso

$$u_\nu v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} uv \text{ em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.129}$$

$$u_\nu w_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} uw \text{ em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.130}$$

De (3.127) e (3.128), temos

$$\|uv\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2} \leq \liminf \|u_\nu v_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}, \tag{3.131}$$

$$\|uw\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2} \leq \liminf \|u_\nu w_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}. \tag{3.132}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|uv\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2}\,dt \leq \liminf \int_0^T \|u_\nu v_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}\,dt, \tag{3.133}$$

$$\int_0^T \|uw\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2}\,dt \leq \liminf \int_0^T \|u_\nu w_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}\,dt. \tag{3.134}$$

Tomando o limite superior em (3.115), usando (3.116)-(3.119), (3.133) e (3.134), obtemos:

$$\left| \begin{aligned} &\limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle\,dt \leq (u_\nu'(0), u_\nu(0)) - (u_\nu'(T), u_\nu(T)) + \int_0^T |u_\nu'(t)|^2\,dt \\ &+\frac{1}{2}\|u_\nu(0)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_\nu(T)\|^2 - \int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2})dt \\ &+\int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt. \end{aligned} \right. \tag{3.135}$$

Através de (3.135), (3.114) torna-se

$$\left| \begin{array}{l} 0 \le (u'(0), u(0)) - (u'(T), u(T)) + \displaystyle\int_0^T |u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 \\ - \displaystyle\int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle\, dt \\ - \displaystyle\int_0^T \langle Az, u(t) - z\rangle\, dt + \int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt, \qquad \forall\ z\ \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.136}$$

Buscaremos agora uma expressão para $\int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt$. Voltemos à equação aproximada:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t), z) + \langle Au_\nu(t), z\rangle + ((u'_\nu(t), z)) + \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z \right\rangle = \\ = (f_1(t), z), \quad \forall z \in V_m, \quad \nu \ge m. \end{array} \right.$$

Multiplicando-a por $\varphi \in C^1([0,T])$ obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t), z)\varphi + \langle Au_\nu(t), z\rangle\, \varphi + ((u'_\nu(t), z))\varphi + \\ \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi = (f_1(t), z)\varphi, \quad \forall z \in V_m, \quad \nu \ge m. \end{array} \right.$$

Integrando de 0 a $T$, temos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (u''_\nu(t), z)\varphi dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle\, \varphi dt + \int_0^T ((u'_\nu(t), z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \ge m$. Daí, via integração por partes, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (u'_\nu(T), z)\varphi(T) - (u'_\nu(0), z)\varphi(0) - \displaystyle\int_0^T (u'_\nu(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle\, \varphi dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'_\nu(t), z))\varphi dt + \int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \quad \forall z\ \in V_m, \quad \forall \varphi\ \in\ C^1([0,T]), \nu \ge m. \end{array} \right.$$

Agora, observando (3.66), (3.68) e (3.90), juntamente com $u'_\nu(T) \rightharpoonup u'(T)$, $u'_\nu(0) \rightharpoonup u'(0), w'_\nu(T) \rightharpoonup w'(T)$ e $w'_\nu(0) \rightharpoonup w'(0)$, todas essas convergências em

$L^2(\Omega)$, é possível tomar o limite na expressão acima quando $\nu \to +\infty$.

Assim, quando $\nu \to +\infty$, obtemos:

$$\left|\begin{array}{l} (u'(T),z)\varphi(T) - (u'(0),z)\varphi(0) - \displaystyle\int_0^T (u'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \varphi dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'(t),z))\varphi dt + \int_0^T \left\langle \left(|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right)|u(t)|^{\rho} u(t), z\right\rangle \varphi dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t),z)\varphi dt, \quad \forall z \in V_m, \quad \forall \varphi \in C^1([0,T]). \end{array}\right.$$

Pela definição de base e argumentos de densidade, temos que

$$\left|\begin{array}{l} (u'(T),z)\varphi(T) - (u'(0),z)\varphi(0) - \displaystyle\int_0^T (u'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \varphi dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'(t),z))\varphi dt + \int_0^T \left\langle \left(|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right)|u(t)|^{\rho} u(t), z\right\rangle \varphi dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t),z)\varphi dt, \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \varphi \in C^1([0,T]). \end{array}\right. \tag{3.137}$$

Observando que o conjunto das combinações lineares finitas do tipo $\omega\varphi$ com $\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi \in C^1([0,T])$ é denso no espaço

$$V = \{v \in L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\},$$

Segue que (3.136) é verdadeira no espaço $V$.

Observe que, de (3.59) e (3.60) tem-se

$$u \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo, $u \in V$ e (3.137) toma a forma

$$\left|\begin{array}{l} (u'(T),u(T)) - (u'(0),u(0)) - \displaystyle\int_0^T (u'(t),u'(t)) dt + \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'(t),u(t))) dt + \int_0^T \left\langle \left(|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right)|u(t)|^{\rho} u(t), u(t)\right\rangle dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t),u(t)) dt. \end{array}\right. \tag{3.138}$$

Substituindo (3.138) em (3.136),temos:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq (u'(0), u(0)) - (u'(T), u(T)) - \int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt \\
&+ \int_0^T |u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \, dt - \int_0^T \langle Az, u(t) - z\rangle \, dt \\
&+(u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \int_0^T (u'(t), u'(t))dt + \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle \, dt \\
&+ \int_0^T ((u'(t), u(t)))dt + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^\rho\, u(t), u(t)\right\rangle dt
\end{aligned}
\tag{3.139}
$$

Observando que:

- $((u'(t), u(t))) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u(t)\|^2$;
- $\displaystyle\int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^\rho\, u(t), u(t)\right\rangle dt$

$$= \int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt,$$

a expressão acima se escreve como

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi(t), u(t) - z\rangle \, dt - \int_0^T \langle Az, u(t) - z\rangle \, dt, \quad \forall\, z \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Considere $z = u(t) + \lambda v(t)$[2], $\lambda > 0$. Logo, substituindo $z$ na desigualdade acima, temos

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi(t), -\lambda v(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle Au(t) + \lambda v(t), \lambda v(t)\rangle \, dt, \quad \forall\, v \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Dividindo esta desigualdade por $\lambda > 0$, temos,

$$0 \leq -\int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle Au(t) + \lambda v(t), v(t)\rangle \, dt, \quad \forall\, v \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Fazendo $\lambda \to 0$ temos, pela hemicontinuidade do operador $A$ que

$$0 \leq -\int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle Au(t), v(t)\rangle \, dt, \quad \forall\, v \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

[2] u,v $\in L^\infty(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$

Desse modo,

$$\int_0^T \langle (Au(t) - \chi(t)), v(t)\rangle \, dt \geq 0, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.140}$$

Em particular, para $-v(t)$, tem-se:

$$\int_0^T \langle (Au(t) - \chi(t)), v(t)\rangle \, dt \leq 0, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.141}$$

Donde, de (3.140) e (3.141), segue que

$$0 \leq \int_0^T \langle (Au(t) - \chi(t)), v(t)\rangle \, dt \leq 0, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja,

$$Au(t) = \chi(t), \text{q.s. em [0,T]}.$$

Analogamente mostra-se que

$$Av(t) = \eta(t), \text{q.s. em [0,T]}.$$

e

$$Aw(t) = \xi(t), \text{q.s. em [0,T]}.$$

Portanto, de (3.59)-(3.61),(3.90)-(3.100) e das condições iniciais, temos

$$u, v, w \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega));$$
$$u', v', w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega));$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), z) + \langle Au(t), z\rangle + ((u'(t), z)) + \left\langle \left[|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right] |u(t)|^\rho\, u(t), z\right\rangle$$
$$= (f_1(t), z), \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

no sentido de $D'(0, T)$.

$$\frac{d}{dt}(v'(t), z) + \langle Av(t), z\rangle + ((v'(t), z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right] |v(t)|^\rho\, v(t), z\right\rangle$$
$$= (f_2(t), z), \ \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

no sentido de $D'(0, T)$.

$$\frac{d}{dt}(w'(t), z) + \langle Aw(t), z\rangle + ((w'(t), z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}\right] |w(t)|^\rho\, w(t), z\right\rangle$$
$$= (f_3(t), z), \ \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

no sentido de $D'(0,T)$.

$$\begin{aligned}
&u(0) = u_0, u'(0) = u_1,\\
&v(0) = v_0, v'(0) = v_1,\\
&w(0) = w_0, w'(0) = w_1.
\end{aligned}$$

O que encerra a demonstração do teorema.

# Apêndice A

# Propriedades do Operador p-Laplaciano A

## A.1 Definições e Resultados

**Definição A.1.** Dado um espaço de Banach $X$ e um funcional $J : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}[J(u+\lambda v) - J(u)] = J'(u)(v).$$

Se para cada $u \in X$ fixado, $J'(u)(v)$ é uma forma linear contínua em $v$, então dizemos que o funcional $J$ é derivável no sentido de Gateaux, e sua derivada é $J'(u)$.

**Notação:** $J'(u,v) = \langle J'(u), v\rangle = J'(u)(v)$.

**Exemplo A.1.** Seja $X = L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $1 \leq p < \infty$.

Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça:

1. $|g(s)| \leq \alpha\, |s|^p\, , \alpha > 0$.
2. $g$ é continuamente diferenciável e existe $\beta > 0$ tal que $|g'(s)| \leq \beta\, |s|^{p-1}$ .

Considere o funcional $J : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \int_\Omega g(v(x))dx.$$

Tem-se, usando o teorema do valor médio, que

$$\begin{aligned} J(u+\lambda v) - J(u) &= \int_\Omega g(u(x)+\lambda v(x)) - g(v(x)))dx \\ &= \int_\Omega g'(u(x)+\theta\lambda v(x))\lambda(v(x))dx \end{aligned}$$

onde $\theta = \theta(x), 0 < \theta < 1$. Daí, se $\lambda \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\lambda}[J(u+\lambda v) - J(u)] = \int (g'(u(x)+\theta\lambda v(x)))v(x)dx.$$

Tomando o limite quando $\kappa \to \infty$ e usando a continuidade de $g'$, obtemos

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega g'(u(x))v(x)dx. \tag{A.1}$$

**Observação A.1.** As integrais anteriores existem em virtude das hipóteses sobre $g$ e $g'$.

Considera-se, a seguir, um caso geral do exemplo anterior, do qual obter-se-á um operador significativo para o que se tem em mente estudar.

**Exemplo A.2.** Seja $A : D(A) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ um operador linear onde

$$D(A) = \{v \in L^p(\Omega); Av \in L^p(\Omega)\}.$$

O espaço vetorial $D(A)$ com a norma do gráfico de $A$, isto é

$$\|v\|^p_{D(A)} = \|v\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Av\|^p_{L^p(\Omega)}$$

é um subespaço de Banach de $L^p(\Omega)$. O funcional

$$J(u) = \int_\Omega g(Au(x))dx, \qquad u \in D(A)$$

está bem definido em $D(A)$ e pelo mesmo método anterior constata-se que $J$, assim definido, possui derivada de Gateaux. De fato, o funcional $J'(u)$ dado por

$$J'(u).v = \int_\Omega g'(A(x)).Av(x)dx \tag{A.2}$$

*é linear. Para provar que ele é limitado, observamos que*

**Observação A.2.** Resta apenas provar que $J'(u)$ é uma forma linear limitada em $D(A)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle J'(u), v\rangle &\leq \int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid\mid Av(x) \mid dx \\
&\leq (\int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}} \int_\Omega \mid Au(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid^{(p-1)p'} dx)^{\frac{1}{p'}} \int_\Omega \mid Au(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&= C(\int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid^{p} dx)^{\frac{1}{p'}} . \parallel A(v) \parallel_{L^p} (\Omega) \\
&\leq C \parallel v \parallel_{D(A)} .
\end{aligned}$$

Logo $J'(u)$ é limitado em $D(A)$

**Exemplo A.3.** Seja $\Omega$ um aberto, limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$. Tomemos o espaço $W_0^{1,p}$ com a norma $\parallel . \parallel_0$ e seja $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, o funcional dado por

$$J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^p dx.$$

Pelo exemplo anterior, com $A = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2...., n,$ e $g(s) = |s|^p$, então $g'(s) = p \mid s \mid^{p-2}$, $p > 2$ e, portanto:

$$\langle J'(u), v\rangle = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Em Particular, para $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega [\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})]\varphi dx.$$

Portanto,

$$J'(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})]\varphi, \quad p \geq 2,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
J' : W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\
u &\mapsto J'(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}).
\end{aligned}$$

Daí, concluimos que a derivada de Gateaux do funcional

$$J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^p dx, \quad 2 \leq p < \infty,$$

é o operador

$$J'(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}), \quad p \geq 2.$$

Este operador, que denotamos por $A$, é o operador do nosso sistema, isto é,

$$A(u) = J'(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}), \quad p \geq 2,$$

denominado de operador p-Laplaciano. Note que

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega)$$

$u \mapsto A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})$, temos que $Au : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é linear e contínuo. Além disso, como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)(Ver[10])$, e

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\langle J'(u), w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx,$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

**Definição A.2.** Seja $V$ um espaço de Banach e $V'$ seu dual. Dizemos que $A : V \to V'$ é um operador **hemicontínuo** se, para $u, v, w$ em $V$, a função $\lambda \longrightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle$ é contínua de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

**Definição A.3.** Diz-se que um operador $A : V \to V'$ é **monótono** se

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

Onde $\langle , \rangle$, denota a dualidade $V' \times V$.

**Proposição A.1.** Se $J : V \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo, então sua derivada de Gateaux $J' : V' \to V'$ é um operador monótono.

*Demonstração.* Sendo $J$ convexo, temos

$$J[(1-\theta)u+\theta v] \leq (1-\theta)J(u)+\theta J(v), \quad 0<\theta<1,$$

isto é:

$$J[u+\theta(v-u)]-J(u) \leq \theta[J(v)-J(u)],$$

dividindo por $\theta \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\theta}J[u+\theta(v-u)]-J(u) \leq [J(v)-J(u)],$$

fazendo $\theta \to 0$ tem-se

$$\langle J'(u), v-u\rangle \leq J(u)-J(v).$$

Agora, trocando $u$ por $v$, temos

$$\langle J'(v), u-v\rangle \leq J(v)-J(u)$$

Daí,

$$\langle J'(u), u-v\rangle + \langle J'v, v-u\rangle \leq 0,$$

donde concluímos que

$$\langle J'(u)-J'(v), u-v\rangle \geq 0.$$

□

**Definição A.4.** Dizemos que um operador $A : V \to V'$ é **coercivo** , se

$$\lim_{\|u\|_V \to +\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} = +\infty$$

## A.2 Propriedades do operador p-Laplaciano

### A.2.1 A é hemicontínuo

De fato, dados $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

$$\langle A(u+\lambda v), w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} (\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i}dx.$$

Observe que

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} (\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i} \leq 2^{p-3}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}+\lambda^{p-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2})(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

e

$$\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \to \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda_0\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|,\ q.s. \text{ em } \Omega,\ \text{quando } \lambda\to\lambda_0$$

Observando que as funções do segundo membro da desigualdade acima são integráveis, temos, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\langle A(u+\lambda v), w\rangle = \langle A(u+\lambda_0 v), w\rangle .$$

Logo $A$ é hemicontínuo.

### A.2.2 A é monótono

De fato, observando que o funcional $J(u)$ é convexo, uma vez que a função $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p, p>2$, é convexa, temos, da *Proposição A.1*, que $A$ é monótono, pois $A$ é a derivada de Gateaux desse funcional.

### A.2.3 $\langle Au, u\rangle = \|u\|_0^p$

De fato,

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \|u\|_0^p .$$

### A.2.4 A é coercivo

Temos $\langle Au, u\rangle = \|u\|_0^p$, logo

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_0} = \|u\|_0^{p-1},$$

donde

$$\lim_{\|u\|_0\to\infty}\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_0} = \infty.$$

### A.2.5 A é limitado

A limitação aqui, é no sentido que $A$ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. De fato, temos

$$\|Au\|_{1,p'} = \sup_{v\neq 0} \frac{\langle Au, v\rangle}{\|v\|_0}.$$

Como,

$$\begin{aligned}
|\langle Au, v\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_0^{p-1} \|v\|_0 ,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_0} \leq \|u\|_0^{p-1}.$$

Portanto,

$$\sup_{v\neq 0} \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_0} \leq \|u\|_0^{p-1},$$

isto é,

$$\|Au\|_{-1,p'} \leq \|u\|_0^{p-1}.$$

### A.2.6 $\langle Au, u'\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^p$

De fato, observe que, se $u : (0,T) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $u'(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\langle Au, u'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i} dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^p &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{-1}\frac{\partial u'}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i} \\
&= \langle Au, u'\rangle\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle Au, u'\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^p\,.$$

# Referências Bibliográficas


[1] Adams,R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press,1975.

[2] Biazuti,A.: *Sobre uma Equação não Linear de Vibrações: Existência de Soluções Fracas e comportamento Assintótico*. Tese de Doutorado.IM/UFRJ

[3] Brézis,Haim: *Análise Functionelle:Teoria e Aplicaciones*, Masson Paris,1984.

[4] Browder,F.E.,Tom,Buy An: *Nonlinear functional equations in Banach Spaces and elliptic super regularization*, Math Zeitsch. 105(1968),177-195.

[5] Clark,M.R.,Maciel,A: *On a mixed problem for a nonlinear kxk system*. International Journal of Apllied Mathematics,Vol 9 nº 2,2002,207-218.

[6] Clark,M.R.;Clark,H.R.;Lima,O.A.: *On a Nonlinear Coupled System*. International Journal of Apllied Mathematics,Vol 20 nº1,2005, 81-95.

[7] Evans,L.C.: *Partial Differential Equations*. Graduate Sudies in Mathematics, Vol 19, AMS, 1998.

[8] Castro, N.N. de O.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano*. João Pessoa:Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.

[9] Castro, N.N. de O.: *Existence and Asyntotic Behaviour of Solutions of a Nonlinear Evolution Problem*. Apllied Mathematics, 42(1997) nº 6, 411-420.

[10] Castro, N.N. de O.: *Weak Solutions to a Coupled Nonlinear System With the p-Laplacian Operator:Asymtotic Behaviour*. Advances in Differential Equations and Control Process, Vol 1, nº2, 2008, 163-170.

[11] Cavalcante, M.M.;Cavalcante,V.N.D.: *Introdução à Teoria das Distribuições e aos espaços de Sobolev*. Vol 1 e 2. Maringá: Universidade Estadual de Maringá. Notas de Aulas,2000.

[12] Kreyszig, E.: *Introductory Functional Analysis with Apllications*. New York. John Wiley and Sons.

[13] Lions, J.L.: *Quelques Méthodes de Résolution des Probléms aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Paris,1969.

[14] Lions, J.L.: *Equations Differentielles Operationnelles et Probléms aux Limites*. Springer-Verlag, Berlim.Göttingen.Heidelberg, 1961.

[15] Medeiros. L.A.,Miranda,M.M.: *Introdução aos espaço de Sobolev e às equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1989.

[16] Medeiros, L.A.,Miranda,M.M.,Malta,S.: *Tópicos de Equações Differenciais Parciais* Rio de Janeiro: Editora da UFRJ,1998.

[17] Medeiros,L.A.,Melo, E.A.: *Teoria da Integração*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ.1989.

[18] Medeiros,L.A.;Miranda,M.M.: *Weak Solutions for a System of Nonlinear Klein-Gordon equations*. Analli di Matemática Pura ed Apllicata, IV (CXLVI), 173-183.

[19] Medeiros,L.A.,P.H. Rivera Rodrigues, P.H.: *Espaços de Sobolev e EDP*. Rio de Janeiro:Editora da UFRJ.1975.

[20] Miranda,M.M.: *Análise Espectral em Espaços de Hilbert: Notas de Aula*. Rio de Janeiro, IM-UFRJ;1990.

[21] Oliveira,A. M.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano no* $\mathbb{R}^3$. João Pessoa, UFPB;2006.

[22] Ray, William O.: *Real Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1988.

[23] Segal,I.: *Nonlinear Partial Differential Equations in Quantum Field Theory*. Proc. Symp. Appl. Math, 17(1965), 210-226.