Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade no Contexto de Aplicações Absolutamente Somantes

Anselmo Baganha Raposo Júnior

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade no Contexto de Aplicações Absolutamente Somantes

por

Anselmo Baganha Raposo Júnior

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

janeiro de 2010
João Pessoa-PB

Raposo Júnior, Anselmo Baganha.

Lineabilidade no contexto de aplicações absolutamente somantes / Anselmo Baganha Raposo Júnior.- João Pessoa: UFPB, 2010.

81f

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino

Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2010

1. Lineabilidade. 2. Análise Funcional. I. Pellegrino, Daniel II. Título

CDU: 517.98

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade no Contexto de Aplicações Absolutamente Somantes

por

Anselmo Baganha Raposo Júnior

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - UFU

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro - UFU

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Suplente)

À Késsia, João Pedro
e Heitor Gabriel.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade que colocou diante de mim e por ter me permitido chegar até aqui. Agradeço aos amigos Wellington, Daniel Peixoto, Osman, Rodolfo, Gustavo, Igor, Artur por estarem comigo desde os meus primeiros dias em João Pessoa e tornarem essa caminhada tão menos cansativa e por me ensinarem o real valor de uma amizade verdadeira. Agradeço ainda aos amigos e companheiros de mestrado Roberto, que me acolheu em João Pessoa, Juanice, pela amizade sincera e despretenciosa, Bruno, Thiago, Simeão, Adriano, Disson, Maurício, Diego, Elano, Elielson e os demais colegas, que colocaram o desejo de aprender e ensinar acima de qualquer possível competição medíocre de conhecimento e porque sempre desejaram verdadeiramente o sucesso do companheiro ao lado e por terem compreendido que todos temos os mesmos objetivos e que unidos somos mais fortes no que diz respeito a persegui-los. Agradeço ao amigo e professor Cleber Cavalcanti que sempre foi um dos meus principais insentivadores nesta jornada e um dos principais responsáveis pelo que alcancei até agora dentro da Matemática. Agradeço de forma especial ao amigo e orientador Daniel Pellegrino, que me acolheu desde o Verão de 2008 na instituição, pela dedicação total, extrema competência e pelas valorosas contribuições à minha formação enquanto matemático. Agradeço aos meus pais Anselmo Raposo, Francisca Matos, aos meus irmãos Armando, Artur, Haroldo e Álvaro pela total crença no meu sucesso, por nunca terem me abandonado nos momentos de dificuldade e por me fazerem ter orgulho de onde vim, por terem me ensinado os valores que carrego até hoje e que, se Deus permitir, hei de carregar durante toda a vida. Agradeço aos meus sogros Carlos e Janice, por terem tomado conta tão bem da minha família nos momentos em que estive longe deles. Agradeço a Késsia Fernanda, minha esposa, e aos meus filhos João Pedro e Heitor por serem a família que constituí, por serem a maior razão que eu tenho pra seguir sempre em frente e porque nunca deixaram que me arrependesse de nenhuma escolha que fiz. Meus filhos, papai os ama muito e se fiquei longe, se estive ausente foi pra que vocês pudessem ter orgulho do pai que têm.

Resumo

Neste trabalho estudamos resultados recentes envolvendo o conceito de lineabilidade e espaçabilidade e a teoria não-linear de aplicações absolutamente somantes.

Palavras chave: lineabilidade, polinômios, aplicações absolutamente somantes.

Abstract

In this work we investigate recent results involving lineability and spaceability and the nonlinear theory of absolutely summing mappings.

Key-Words: lineability, polynomials, absolutely summing mappings.

Sumário

Introdução

Análise Funcional, enquanto ramo da matemática surgiu nas primeiras décadas do século XX, inspirada principalmente pelo estudo das equações integrais. Desde então, é inegável o papel desempenhado pela Análise Funcional na matemática moderna bem como a quantidade e diversidade de conhecimentos que fazem parte de sua atual estrutura.

A teoria dos operadores absolutamente somantes surgiu por volta da década de 1950 através das idéias semeadas por A. Grothendieck em seu conhecido Resumé. Mas foi só ná década seguinte, através das contribuições de Joram Lindenstrauss, Aleksander Pelczynski e A. Pietsch que as idéias de A. Grothendieck foram lapidadas e tornadas mais acessíveis, o que proporcionou uma maior consolidação da teoria.

A partir da década de 1980, A. Pietsch e M. C. Matos sugerem abordagens não lineares à teoria dos operadores absolutamente somantes e, desde então, muitos autores tem se dedicado a essa linha de pesquisa.

O conceito de lineabilidade, teve seu surgimento nos trabalhos de Gurariy e Aron e verificamos no presente trabalho o estreitamento entre essa teoria e a teoria dos operadores absolutamente somantes, baseado, principalmente, no artigo *Lineability of summing sets of homogeneous polynomials* de G. Botelho, M. C. Matos e D. Pellegrino. Após definirmos o conjunto $(p;q)$-somante de polinômios homogêneos, são respondidas algumas questões como, por exemplo, em que condições o conjunto somante de um polinômio homogêneo é não-vazio e, no caso de ser não-vazio, quando ele contém um subespaço não trivial, quando este subespaço possui dimensão infinita e, quando além de dimensão infinita, este subespaço é fechado.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O trabalho é divido em dois capítulos e um apêndice.

No primeiro capítulo, dissertamos um pouco sobre a teoria linear dos operadores absolutamente somantes, definindo o que são e expondo alguns resultados clássicos desta teoria. Neste capítulo, abordamos também a teoria não-linear, evidenciando o conceito de operador r-regular e sua relação com a teoria dos operadores absolutamente somantes. São então desenvolvidas idéias de M.C. Matos.

O segundo capítulo trata do conceito de lineabilidade e sua relação com os polinômios m-homogêneos, estudando zeros de polinômios e o conceito de conjuntos somantes. Com o intuito de tornar o texto o mais auto-suficiente possível, primeiramente, serão expostos alguns resultados da teoria multilinear e polinomial que nos serão úteis ao desenvolvimento do assunto. Posteriormente, nos deteremos ao conceito de lineabilidade e exporemos alguns resultados que caracterizam os conjuntos somantes de polinômios homogêneos.

O apêndice traz uma discussão acerca da diferencial em espaços de Banach. Fez-se isso necessário, devido à ampla utilização desse conceito tanto em exemplos quanto em resultados referentes à teoria de lineabilidade.

Notação e Terminologia

A seguir fazemos uma lista de notações e terminologias utilizadas no decorrer do texto e damos os seus significados:

- As letras maiúsculas E, F e X representarão sempre espaços de Banach genéricos;
- O símbolo $\mathbb{K}$ representará o corpo $\mathbb{R}$ dos reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos;
- A letra P indicará sempre um polinômio m-homogêneo entre espaços de Banach;
- O símbolo $\check{P}$ representará a aplicação multilinear simétrica associada ao polinômio m-homogêneo P;
- As notações $B\left(a;\delta\right)_E$ e $\overline{B}\left(a;\delta\right)_E$ significarão, respectivamente, a bola aberta e fechada de centro em a e raio δ contida no espaço E. Quando não houver perigo de confusão, omitiremos o espaço e utilizaremos a notação $B_\delta\left(a\right)$ e $\overline{B}_\delta\left(a\right)$ para significar, respectivamente as bolas aberta e fechada centradas em a e de raio δ;
- Diremos que a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n$ é somável sempre que a sequência $\left(S_n\right)_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais da série for convergente;
- As expressões sup e inf significarão supremo e ínfimo, respectivamente.

As demais notações e terminologias presentes no trabalho terão sua significação expressa no decorrer do mesmo.

Capítulo 1

Aplicações Absolutamente Somantes

É bem sabido que uma série numérica é absolutamente somável se, e somente se, é incondicionalmente somável. É sabido também que o resultado equivalente para séries de elementos de um espaço de Banach de dimensão infinita não é válido. Por algum tempo conjecturou-se que, em todo espaço de Banach de dimensão infinita, deveria existir uma série que fosse incondicionalmente somável, mas não fosse absolutamente somável. Em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers provaram esta conjectura:

Teorema 1.0.1 (Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então, para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_2, existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se escolhermos $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_2 - \ell_1$, obtemos uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.*

Em 1956, A. Grothendieck deu uma prova diferente daquela concebida por Dvoretzky-Rogers e introduziu o conceito de operador linear absolutamente somante. Um operador linear T definido sobre um espaço de Banach E com valores em outro espaço de Banach F é **absolutamente somante** se $(T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente somável em F sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em E.

Neste mesmo artigo, A. Grothendieck provou um teorema, habilmente reformulado por J. Lindenstrauss e A. Pelczyński em 1968, mostrando que todo operador linear contínuo de ℓ_1 em ℓ_2 é absolutamente somante. Os operadores absolutamente $(p;q)$-somantes com $p, q \in \,]0, +\infty[$, foram desenvolvidos em meados dos anos 1960 por A. Pietsch, B. S. Mitjagin e A. Pelczyński. Antes de recordarmos este conceito, introduziremos alguma notação.

Neste trabalho E e F indicam espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e A é um subconjunto não vazio de E.

1.1 Sequências Incondicionalmente Somáveis

Definição 1.1.1 *Uma sequência (x_n) em um espaço vetorial normado E é dita* ***incondicionalmente somável*** *se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

converge, qualquer que seja a bijeção $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Neste caso, dizemos ainda que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

é incondicionalmente convergente.

Teorema 1.1.2 *Para uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ num espaço de Banach X, são equivalentes:*

(i) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável;*

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe um $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$, temos $\left\| \sum_{n\in M} x_n \right\| < \varepsilon$;*

(iii) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ converge;*

(iv) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, ou seja, para qualquer escolha de $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha que (ii) seja falso. Neste caso, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto finito $M_n \subset \mathbb{N}$, com

$$\min M_n > n \qquad \text{e} \qquad \left\| \sum_{k\in M_n} x_k \right\| \geq \delta.$$

Deste modo, podemos construir uma sequência (M_n) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\max M_n < \min M_{n+1} \qquad \text{e} \qquad \left\| \sum_{k\in M_n} x_k \right\| \geq \delta.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n \subset \mathbb{N}$ como sendo

$$A_n = \{k \in \mathbb{N};\, k \in [\min M_n, \min M_n + |M_n|)\},$$

onde, aqui, $|M_n|$ representa a quantidade de elementos de M_n. Note que $|A_n| = |M_n|$ e que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \emptyset$$

e, portanto,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Considere agora $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação de modo que $\sigma(A_n) = M_n$. Mostraremos agora que a sequência das somas parciais de $\left(x_{\sigma(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ não é de Cauchy. Com efeito, suponhamos que fosse. Assim, para o δ acima, existiria $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$r, s \geq n_\delta \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{s} x_{\sigma(i)} \right\| < \delta.$$

Escolha agora n suficientemente grande de modo que $\min M_n > n_\delta$ e faça então $r = \min M_n + |M_n|$ e $s = \min M_n - 1$. Assim, $r, s \geq n_\delta$ e

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{s} x_{\sigma(i)} \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\min M_n + |M_n|} x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{\min M_n - 1} x_{\sigma(i)} \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=\min M_n}^{\min M_n + |M_n|} x_{\sigma(i)} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k\in M_n} x_k \right\| \geq \delta,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, a sequência das somas parciais de $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ não é de Cauchy e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é, portanto, incondicionalmente somável.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Seja σ uma permutação dos naturais e consideremos a sequência (S_n) das somas parciais de $\left(x_{\sigma(n)}\right)$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha n_ε de modo que

$$\left\| \sum_{n\in M} x_n \right\| < \varepsilon$$

sempre que $M \subset \mathbb{N}$ é finito e $\min M > n_\varepsilon$. Nestas condições, podemos tomar $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\{1, \ldots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m_\varepsilon)\}$. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $q, p > m_\varepsilon$. Faça

$$\begin{aligned}
V_q &= \{\sigma(1), \ldots, \sigma(q)\} - \{1, \ldots, n_\varepsilon\} \\
V_p &= \{\sigma(1), \ldots, \sigma(p)\} - \{1, \ldots, n_\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S_q &= \sum_{i=1}^{q} x_{\sigma(i)} = \sum_{n\in\{\sigma(1),\ldots,\sigma(q)\}} x_n = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n + \sum_{n\in V_q} x_n \\
S_p &= \sum_{i=1}^{p} x_{\sigma(i)} = \sum_{n\in\{\sigma(1),\ldots,\sigma(p)\}} x_n = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n + \sum_{n\in V_p} x_n
\end{aligned}$$

Logo, sempre que $q, p > m_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}\|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{n\in V_q} x_n - \sum_{n\in V_p} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n\in V_q} x_n \right\| + \left\| \sum_{n\in V_p} x_n \right\| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

e, portanto, (S_n) é de Cauchy e, por conseguinte, convergente.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha m_ε de modo que $\left\| \sum_{n\in M} x_n \right\| < \varepsilon$ para todo subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ tal que $\min M > m_\varepsilon$. Agora, se (k_n) é uma sequência crescente de números naturais, então $k_n \geq n$, para todo n. Assim, se $q > p > m_\varepsilon$, então

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} x_{k_n} \right\| = \left\| \sum_{n\in\{k_p,\ldots,k_q\}} x_n \right\| < \varepsilon,$$

pois

$$\min\{k_p, \ldots, k_q\} = k_p \geq p > m_\varepsilon,$$

o que nos diz que a sequência das somas parciais de (x_{k_n}) é de Cauchy e, portanto, convergente.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sejam S^+ e S^- dois subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $\mathbb{N} = S^+ \cup S^-$ e seja (ε_n) uma sequência tal que

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in S^+ \\ -1, & \text{se } n \in S^- \end{cases}$$

Então, por hipótese, as séries $\sum_{n\in S^+} x_n$ e $\sum_{n\in S^-} x_n$ são convergentes. Fixe $\varepsilon > 0$. Note que, se p e q são números naturais, com $p < q$, fazendo $M^+ = \{n \in S^+; \, p \leq n \leq q\}$ e $M^- = \{n \in S^-; \, p \leq n \leq q\}$, então

$$\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n = \sum_{n\in M^+} \varepsilon_n x_n + \sum_{n\in M^-} \varepsilon_n x_n = \sum_{n\in M^+} x_n - \sum_{n\in M^-} x_n.$$

Das convergências de $\sum_{n\in S^+} x_n$ e $\sum_{n\in S^-} x_n$ segue, para p suficientemente grande, que

$$\left\| \sum_{n\in M^+} x_n \right\|, \left\| \sum_{n\in M^-} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, para este p, temos

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n\in M^+} x_n \right\| + \left\| \sum_{n\in M^-} x_n \right\| < \varepsilon$$

e (x_n) é sinal somável.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: Suponha que (ii) falha. Deste modo, existem um $\delta > 0$ e uma sequência (M_k) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ tais que

$$\max M_k < \min M_{k+1} \qquad \text{e} \qquad \left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| > \delta.$$

Tome

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \bigcup M_k \\ -1, & \text{se } n \notin \bigcup M_k \end{cases}.$$

Considere agora a sequência $S_n = \sum_{i=1}^{n} (1 + \varepsilon_i) x_i$ e seja m um natural qualquer. Tome então k suficientemente grande de modo que $\min M_k > m$. Assim,

$$\left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1 + \varepsilon_n) x_n \right\| = 2 \left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| > 2\delta$$

o que nos permite concluir que uma das séries

$$\sum x_n \qquad \text{ou} \qquad \sum \varepsilon_n x_n$$

não é de Cauchy, pois se ambas fossem de Cauchy, existiria $m \in \mathbb{N}$ de modo que, se $k > m$, então

$$\left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} x_n \right\| < \delta \qquad \text{e} \qquad \left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} \varepsilon_n x_n \right\| < \delta$$

o que nos daria

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1 + \varepsilon_n) x_n \right\| &= 2 \left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} x_n \right\| + \left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} \varepsilon_n x_n \right\| < 2\delta \end{aligned}$$

configurando, portanto, uma contradição. Isto nos permite concluir que (x_n) não é sinal somável. ∎

O próximo resultado mostra que sequências incondicionalmente somáveis, além de convergirem independentemente da ordem em que são somadas, sempre convergem para o mesmo limite.

Corolário 1.1.3 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável em um espaço de Banach X, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)},$$

para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Demonstração: Usando o teorema anterior, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando $M \subset \mathbb{N}$ é finito, com $\min M > n_\varepsilon$, então

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Agora, escolhemos L suficientemente grande, de tal sorte que

$$\{1, ..., n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), ..., \sigma(L)\}.$$

Assim, se $N > L$, escolhendo

$$M_1 = \{1, ..., N\} - \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\}$$

e

$$M_2 = \{\sigma(1), ..., \sigma(N)\} - \{1, ..., N\},$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} \right\| &= \left\| \sum_{n \in M_1} x_n - \sum_{n \in M_2} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M_2} x_n \right\| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

pois $\min M_1, \min M_2 > n_\varepsilon$. Como

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} \right) + \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)},$$

fazendo N tender a infinito, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

■

Observação 1.1.4 *Se usarmos que este resultado já é conhecido para o caso escalar, usando Hahn-Banach há uma demonstração mais simples do resultado acima (para detalhes, veja* [51]*).*

1.2 Teoria Linear

Definição 1.2.1 *Se* $0 < p \leq 1$*, uma* p***-norma*** *em um espaço vetorial* E *é uma função* $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ *satisfazendo:*

(i) $\|x\| \geq 0$, *para todo* $x \in E$ *e* $\|x\| = 0$ *se, e somente se* $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para todo* $x \in E$ *e para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$.

Se E *está munido de uma* p*-norma, dizemos que* E *é um* ***espaço vetorial*** p***-normado***.

Definição 1.2.2 *Se* $p \in]0, +\infty[$, *a sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de* E *é dita* ***absolutamente*** p***-somável*** *(ou* p***-somável****), e escrevemos* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, *quando*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.1}$$

Definição 1.2.3 *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de* E *é* ***fracamente*** p***-somável****, e escrevemos* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, *quando* $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ *para cada* φ *no dual topológico* E' *de* E.

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e $p \geq 1$, uma aplicação do Teorema de Banach-Steinhaus (ou do Teorema do Gráfico Fechado) mostra que

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definição 1.2.4 *Uma sequência fracamente* p*-somável* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de* E *é dita* ***incondicionalmente*** p***-somável****, e escrevemos* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, *se* $\lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{w,p} = 0$.

Observamos que $\|\cdot\|_{w,q}$ define uma norma se $q \geq 1$, ou uma q-norma, se $0 < q < 1$, sobre $\ell_q^w(E)$ e $\ell_q^u(E)$. Por outro lado, $\|\cdot\|_p$ define uma norma se $p \geq 1$, ou uma p-norma, se $0 < p < 1$, sobre $\ell_p(F)$. Em qualquer um dos casos, obtemos um espaço vetorial topológico completo metrizável.

Com o propósito de justificar a terminologia usada para o espaço $\ell_p^u(E)$, como veremos a seguir, no caso $p = 1$, esta definição é equivalente a requerer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ seja convergente em E para qualquer bijeção $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Lema 1.2.5 *Se* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de escalares tal que*

$$\left|\sum_{n\in M} \lambda_n\right| \leq 1$$

para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4.$$

Demonstração: Para todo $k \in \mathbb{N}$, considere

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{Re}}^{+} &= \{n \in \{1,\ldots,k\}; \mathrm{Re}\,(\lambda_n) > 0\}, \\ M_{\mathrm{Re}}^{-} &= \{n \in \{1,\ldots,k\}; \mathrm{Re}\,(\lambda_n) < 0\}, \\ M_{\mathrm{Im}}^{+} &= \{n \in \{1,\ldots,k\}; \mathrm{Im}\,(\lambda_n) > 0\}, \\ M_{\mathrm{Im}}^{-} &= \{n \in \{1,\ldots,k\}; \mathrm{Im}\,(\lambda_n) < 0\}. \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n| &\le \sum_{n=1}^{k} |\mathrm{Re}\,(\lambda_n)| + \sum_{n=1}^{k} |\mathrm{Im}\,(\lambda_n)| \\ &= \sum_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \mathrm{Re}\,(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{-}} (-\,\mathrm{Re}\,(\lambda_n)) + \sum_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \mathrm{Im}\,(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{-}} (-\,\mathrm{Im}\,(\lambda_n)). \end{aligned}$$

Como, por hipótese,

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \le 1$$

para qualquer M finito, se escolhermos $M = M_{\mathrm{Re}}^{+}, M_{\mathrm{Re}}^{-}, M_{\mathrm{Im}}^{+}$ e M_{Im}^{-}, obteremos

$$\begin{cases} \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \mathrm{Re}\,(\lambda_n) \right| = \left| \mathrm{Re} \left(\sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \lambda_n \right) \right| \le \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{+}} \lambda_n \right| \le 1, \\ \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{-}} (-\,\mathrm{Re}\,(\lambda_n)) \right| = \left| \mathrm{Re} \left(\sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{-}} \lambda_n \right) \right| \le \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Re}}^{-}} \lambda_n \right| \le 1, \\ \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \mathrm{Im}\,(\lambda_n) \right| = \left| \mathrm{Im} \left(\sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \lambda_n \right) \right| \le \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{+}} \lambda_n \right| \le 1, \\ \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{-}} (-\,\mathrm{Im}\,(\lambda_n)) \right| = \left| \mathrm{Im} \left(\sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{-}} \lambda_n \right) \right| \le \left| \sum\limits_{n \in M_{\mathrm{Im}}^{-}} \lambda_n \right| \le 1, \end{cases}$$

e, daí segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \le 4.$$

■

Proposição 1.2.6 *Em um espaço de Banach X uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^u(X)$.*

Demonstração: Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ seja incondicionalmente somável em X. Então, pelo Teorema 1.1.2-(ii), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| < \varepsilon \text{ para todo conjunto finito } M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \ldots\}.$$

Portanto, para todo $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ...\}$ finito e $\varphi \in B_{X'}$, temos

$$\left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\Psi \in B_{X'}} \left| \sum_{j \in M} \Psi(x_j) \right| = \left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| < \varepsilon,$$

onde na última igualdade foi usado o Teorema de Hahn-Banach.

Pelo Lema 1.2.5 segue que

$$\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| < 4\varepsilon,$$

e consequentemente

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,1} \leq \left\| (x_j)_{j=n_\varepsilon}^{\infty} \right\|_{w,1} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 4\varepsilon.$$

Portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^u(X)$.

Suponhamos agora que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^u(X)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,1} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \varepsilon.$$

Então para todo conjunto finito $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, ...\}$, usando novamente o Teorema de Hahn-Banach, temos

$$\left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j \in M} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema 1.1.2-(ii) segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. ■

Definição 1.2.7 *Se $p, q \in \,]0, +\infty[$, com $p \geq q$, uma aplicação linear T de E em F é* ***absolutamente*** $(p;q)$***-somante****, se $(T(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$. Se $p = q$ dizemos que T é* ***absolutamente*** p***-somante*** *(absolutamente somante no caso $p = 1$).*

Observação 1.2.8 *O caso $p < q$ não é considerado pois, nessa situação, o único operador linear contínuo absolutamente somante seria o operador identicamente nulo.*

A teoria de tais operadores teve grande desenvolvimento depois dos resultados iniciais de Pietsch, Mitjagin e Pelczynski. Além do Teorema de Dvoretzky-Rogers, enunciado na introdução, merecem destaque algumas contribuições de Grothendieck, Pietsch e Lindenstrauss-Pelczyński:

Teorema 1.2.9 (Desigualdade de Grothendieck) *Existe uma constante positiva* K_G *tal que, para todo espaço de Hilbert* H*, todo* $n \in \mathbb{N}$*, toda matriz* $(a_{ij})_{n\times n}$ *e quaisquer* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n$ *na bola unitária de* H*, vale a seguinte desigualdade:*

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j\rangle\right| \leq K_G \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j\right| ; |s_i|, |t_j| \leq 1\right\}. \tag{1.2}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *denota o produto interno.*

Teorema 1.2.10 (Teorema de Grothendieck) *Todo operador linear contínuo* $u\colon \ell_1 \to \ell_2$ *é absolutamente somante.*

As demonstrações dos dois teoremas acima podem ser encontradas em [23].

Definição 1.2.11 *Seja* E *um espaço de Banach. Uma sequência* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *de elementos de* E *é dita uma* ***base de Schauder*** *de* E *se todo* $x \in E$ *puder ser representado de maneira única como*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j, \tag{1.3}$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{K}$*, para todo* j*. A base de Schauder será dita incondicional se a convergência em* (1.4) *for incondicional.*

O resultado de Lindenstrauss e Pelczyński é uma espécie de recíproca do Teorema de Grothendieck, com a hipótese adicional da existência de uma base de Schauder incondicional no domínio.

Teorema 1.2.12 (Lindenstrauss-Pelczyński) *Se* E *tem base de Schauder incondicional,* $\dim E = \dim F = \infty$ *e*

$$\mathcal{L}_{as,1}(E;F) = \mathcal{L}(E;F),$$

onde $\mathcal{L}_{as,1}(E;F)$ *é o conjunto das transformações linerares contínuas definidas de* E *em* F *que são absolutamente* 1*-somantes, então* E *é isomorfo a* ℓ_1 *e* F *é isomorfo a um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.2.13 (Teorema da Dominação de Pietsch) *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $u : E \longrightarrow F$ *um operador linear contínuo. Então* u *é absolutamente* p*-somante se, e somente se, existem uma constante* $C > 0$ *e uma medida de probabilidade* μ *nos borelianos de* B_{E^*}*, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.4}$$

para cada $x \in E$*.*

1.3 Teoria Não-Linear

A teoria não linear começa com Pietsch em 1983, através de aplicações multilineares a valores escalares e polinômios definidos sobre espaços de Banach. Em 1996, M. C. Matos iniciou a investigação no contexto de aplicações holomorfas entre espaços de Banach e, em 1997, M. C. Matos anunciou novos resultados acerca de aplicações absolutamente p-somantes, não necessariamente holomorfas ou analíticas, entre espaços de Banach. Atualmente, a teoria não linear avançou em diferentes direções e tem aberto linhas de pesquisa bastante promissoras (mencionamos, por exemplo, [3], [6], [7], [8], [9], [13], [14], [16], [18], [19], [22], [24], [26], [31], [32], [33], [35], [36], [40], [42], [43], [44], [45], [46], [50]). Além disso, recentemente, aplicações da teoria não linear aparecereram nos artigos [20], [21] e [47].

Os resultados e definições dessa seção são devidos a M.C. Matos e aparecem em [34].

1.3.1 Aplicações Regularmente Somantes

Nesta seção E e F indicam espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e A é um subconjunto aberto não vazio de E.

Definição 1.3.1 *Sejam $p,q \in \,]0,+\infty[$. Uma aplicação f definida de A em F é denominada **regularmente** $(p;q)$**-somante** no ponto $a \in A$ se, para cada sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$, com $a + x_j \in A$ para todo $j \in \mathbb{N}$, segue que*

$$(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

*Se f é regularmente $(p;q)$-somante em cada ponto $a \in A$, dizemos que f é **regularmente** $(p;q)$**-somante sobre** A. No caso em que $p = q$, dizemos que f é regularmente p-somante sobre A e, quando $p = q = 1$, dizemos que f é regularmente somante sobre A.*

Definição 1.3.2 *Seja $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. Uma aplicação f de A em F é dita r**-regular no ponto** $a \in A$, se existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que a bola fechada de centro a e raio δ, $\overline{B}_\delta(a)$, está contida em A e*

$$\|f(a+x) - f(a)\|^r \leq M\|x\|,$$

*para todo $x \in \overline{B}_\delta(0)$. Dizemos que f é r**-regular sobre** A se f é r-regular em todo ponto de A. No caso $r = 1$, dizemos apenas que f é regular sobre A.*

Proposição 1.3.3 *Se uma aplicação f de A em F é r-regular no ponto $a \in A$, então f é regularmente $(p;q)$-somante em a, com $p = qr$ para qualquer $q > 0$.*

Demonstração: Uma vez que f é r-regular no ponto $a \in A$, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\overline{B}_\delta(a)$ está contida em A e

$$\|f(a+x) - f(a)\|^r \leq M\|x\|$$

para todo $x \in \overline{B}_\delta(0)$. Logo

$$\|f(a+x) - f(a)\|^{qr} \leq M^q \|x\|^q$$

para todo $x \in \overline{B}_\delta(0)$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de $\ell_q(E)$ e, deste modo, como $x_j \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $j > n_0$ então $x_j \in \overline{B}_\delta(0)$ e assim

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^\infty \|f(a+x_j) - f(a)\|^{qr} &= \sum_{j=1}^{n_0} \|f(a+x_j) - f(a)\|^{qr} + \sum_{j=n_0+1}^\infty \|f(a+x_j) - f(a)\|^{qr} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_0} \|f(a+x_j) - f(a)\|^{qr} + M^q \sum_{j=n_0+1}^\infty \|x_j\|^q < \infty\end{aligned}$$

e

$$(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F).$$

■

Este resultado pode ser usado para dar vários exemplos de aplicações regularmente somantes.

Exemplo 1.3.4 *Todo operador linear contínuo $T\colon E \to F$ é regular (portanto, regularmente p-somante para cada $p \in \left]0, +\infty\right[$) sobre E, uma vez que*

$$\|T(a+x) - T(a)\| = \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|, \text{ para todo } x \in E, \tag{1.5}$$

onde $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$.

Exemplo 1.3.5 *Todo polinômio n-homogêneo contínuo de E em F é regular (portanto, regularmente p-somante para cada $p \in \left]0, +\infty\right[$) sobre E.*

*Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é dita **n-linear (multilinear)** se é linear em cada uma de suas variáveis, isto é, se dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, a aplicação $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) : E_i \to F$ dada por*

$$T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)(y) = T(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

é linear, para todo $i = 1, \ldots, n$.

O espaço de todas as aplicações n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F é dado por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. O conjunto de todas as aplicações n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são contínuas constitui um subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e é denotado por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ consideraremos a norma do máximo ou seja, se $(x_1, \ldots, x_n) \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{\|x_i\|_{E_i}\right\}$. Quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, escreveremos simplesmente $L(^nE; F)$ e $\mathcal{L}(^nE; F)$ no lugar de $L(E, \ldots, E; F)$ e $\mathcal{L}(E, \ldots, E; F)$. Quando $n = 1$ escreveremos $L(E; F)$ e $\mathcal{L}(E; F)$ no *lugar de* $L\left({}^1E;F\right)$ *e* $\mathcal{L}\left({}^1E;F\right)$. *Quando* $F=\mathbb{K}$, *escreveremos apenas* $L\left({}^nE\right)$ *e* $\mathcal{L}\left({}^nE\right)$ *no lugar de* $L\left({}^nE;\mathbb{K}\right)$ *e* $\mathcal{L}\left({}^nE;\mathbb{K}\right)$.

Uma aplicação $T\in L\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$ *é denominada* ***multilinear simétrica*** *se, dado* $(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$, *tem-se que*

$$T\left(x_1,\ldots,x_n\right)=T\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$$

para qualquer permutação $\sigma\colon\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$. *O subespaço formado por todas as multilineares simétricas de* $E_1\times\cdots\times E_n$ *em* F *será denotado por* $L_s\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$ *e* $\mathcal{L}_s\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$ *denotará o subespaço formado por todas as multilineares simétricas de* $E_1\times\cdots\times E_n$ *em* F *que são contínuas. Quando* $E_1=\cdots=E_n=E$, *escreveremos simplesmente* $L_s\left({}^nE;F\right)$ *e* $\mathcal{L}_s\left({}^nE;F\right)$. *Quando* $n=1$ *escreveremos simplesmente* $L_s\left(E;F\right)$ *e* $\mathcal{L}_s\left(E;F\right)$ *e quando* $F=\mathbb{K}$ *apenas* $L_s\left({}^nE\right)$ *e* $\mathcal{L}_s\left({}^nE\right)$.

Nos espaços acima, consideraremos a seguinte norma:

$$\|T\|=\sup_{\substack{\|x_j\|\le 1\\ i=1,\ldots,n}}\left\|T\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right\|.$$

Note que, dado $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, *com* $x_j\neq 0$, $j=1,\ldots,n$,

$$\left\|T\left(\frac{x_1}{\|x_1\|},\ldots,\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\|\le\|T\|,$$

isto é,

$$\frac{1}{\|x_1\|\cdots\|x_n\|}\left\|T\left(x_{1,},\ldots,x_n\right)\right\|\le\|T\|$$

donde extraímos

$$\left\|T\left(x_{1,},\ldots,x_n\right)\right\|\le\|T\|\,\|x_1\|\cdots\|x_n\|. \tag{1.6}$$

Observe ainda que a desigualdade (1.6) *ainda é válida quando* $x_j=0$ *para algum* $j=1,\ldots,n$.

Uma aplicação $P\colon E\to F$ *é um* ***polinômio** n**-homogêneo*** *se existe uma aplicação* n*-linear* $T\colon E^n\to F$, *tal que,* $P(x)=T(x,\ldots,x)$, *para cada* $x\in E$. *Neste caso escrevemos* $P=\hat{T}$. *O espaço de todos os polinômios* n*-homogêneos de* E *em* F *será denotado por* $P\left({}^nE;F\right)$. *O conjunto de todos os polinômios* $P\in P\left({}^nE;F\right)$ *que são contínuos constiui um subespaço vetorial, o qual será denotado por* $\mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$.

Nestes espaços, consideraremos a seguinte norma:

$$\|P\|=\sup_{\|x\|\le 1}\left\|P(x)\right\|.$$

Para um dado polinômio n*-homogêneo* $P\colon E\to F$, *podemos considerar*

$$\check{P}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_nP\left(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n\right), \tag{1.7}$$

que define uma aplicação n-linear simétrica de E^n em F, tal que $\hat{\check{P}} = P$. Podemos ver que

$$P(a+x) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \check{P} a^{n-k} x^k, \tag{1.8}$$

onde $\check{P} a^{n-k} x^k = \check{P}(a, \ldots, a, x, \ldots, x)$, com a se repetindo $n-k$ vezes e x se repetindo k vezes. A correspondência $P \longleftrightarrow \check{P}$ estabelece um isomorfismo entre o espaço vetorial de todos os polinômios n-homogêneos e o espaço vetorial de todas as aplicações n-lineares simétricas. Além disso, P é contínuo se, e somente se, $\check{P}$ o é. Neste caso

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \leq \left\|\check{P}\right\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1} \left\|\check{P}(x_1, \ldots, x_n)\right\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|. \tag{1.9}$$

A desigualdade (1.9) *pode ser encontrada com maiores detalhes em* [39]. *Agora, podemos escrever*

$$\|P(a+x) - P(a)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left\|\check{P}\right\| \|a\|^{n-k} \|x\|^k \leq \|x\| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left\|\check{P}\right\| \|a\|^{n-k}, \tag{1.10}$$

para todo $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$. Isto mostra que P é regular em cada ponto a de E.

Quando $n = 1$, os espaços $\mathcal{L}(E, F)$ e $\mathcal{P}(E, F)$ coincidem. A fórmula em (1.7) é chamada de Fórmula de Polarização.

Exemplo 1.3.6 *Se $f \colon A \to F$ é diferenciável no sentido de Fréchet em cada ponto de A, então f é regular (portanto, regularmente p-somante para cada $p \in \left]0, +\infty\right[$) sobre A.*

A diferenciabilidade de f em $a \in A$ significa que existe uma aplicação linear contínua $df(a)$ de E em F tal que, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ satisfazendo

$$0 < \|x\| \leq \delta,\ a + x \in A \Rightarrow \frac{\|f(a+x) - f(a) - df(a)(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon. \tag{1.11}$$

Temos que

$$\|f(a+x) - f(a)\| - \|df(a)(x)\| \leq \|f(a+x) - f(a) - df(a)(x)\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

pois se V é um espaço vetorial normado qualquer, vale

$$\|\alpha\| = \|\alpha - \beta + \beta\| \leq \|\alpha - \beta\| + \|\beta\| \Rightarrow \|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha - \beta\|,$$

para todo α e β em V. Daí, considerando δ tão pequeno quanto necessário, temos que se $\overline{B}_\delta(a) \subset A$ e $x \in \overline{B}_\delta(0)$, então

$$\begin{aligned} \|f(a+x) - f(a)\| &\leq \|df(a)(x)\| + \varepsilon \|x\| \\ &= (\|df(a)\| + \varepsilon) \|x\| \end{aligned} \tag{1.12}$$

Isto mostra que f é regular em a.

Exemplo 1.3.7 *Se $r \geq 1$, a função $f(x) = x^{\frac{1}{r}}$ é r-regular (portanto, regularmente (qr, q)-somante, para cada $q \in]0, +\infty[$) sobre $]0, +\infty[$. De fato, para $a > 0$, podemos considerar $0 < \rho < a$, $|x| \leq \rho$ e utilizar o Teorema do Valor Médio para escrever*

$$\left|(a+x)^{\frac{1}{r}} - (a)^{\frac{1}{r}}\right|^r = \left|\frac{1}{r}c(x)^{\frac{1}{r}-1}\right|^r |x|^{r-1}|x|$$

onde $c(x)$ é um ponto no interior do intervalo cujas extremidades são $a+x$ e a. Uma vez que

$$\left|\frac{1}{r}c(x)^{\frac{1}{r}-1}\right|^r |x|^{r-1} \leq \left|\frac{1}{r}(a-\rho)^{\frac{1}{r}-1}\right|^r \rho^{r-1}$$

podemos escrever

$$\left|(a+x)^{\frac{1}{r}} - (a)^{\frac{1}{r}}\right|^r \leq \left|\frac{1}{r}(a-\rho)^{\frac{1}{r}-1}\right|^r \rho^{r-1}|x|,$$

para todo $|x| \leq \rho$.

Exemplo 1.3.8 *A função $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é regular em 0 e não é diferenciável neste ponto. Com efeito,*

$$|f(x) - f(0)| = \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

o que nos dá $M = 1$ e $\delta > 0$ qualquer. Agora, notemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

e, uma vez que o limite acima não existe temos que f não é diferenciável em 0.

O teorema a seguir será enunciado em ambientes mais gerais que espaços normados, pois esse novo contexto será útil adiante; a demonstração que apresentamos foi ligeiramente modificada da original em [34].

Teorema 1.3.9 *Sejam $p, q \in]0, +\infty[$. Então a aplicação f de $A \subset E$ em F, onde E é um espaço vetorial completo s-normado e F é um espaço vetorial completo r-normado, é regularmente $(p; q)$-somante no ponto a de A se, e somente se, f é (p/q)-regular em a.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) É a Proposição 1.3.3. Note que, embora estejamos num contexto mais geral, a demonstração da Proposição 1.3.3 pode ser repetida.

($\Rightarrow$) Suponha que f é regularmente $(p; q)$-somante no ponto a.

Se

$$g(x) = f(a+x) - f(a),$$

para

$$x \in A - a := \{y \in E; a + y \in A\},$$

vemos que $0 \in A - a$, $g(0) = 0$ e que g é regularmente $(p;q)$-somante em 0. Note ainda que $A - a$ é aberto em E. Suponha agora que g não seja (p/q)-regular em 0, isto é, que dados $M > 0$ e $\delta > 0$ de modo que $\overline{B}_\delta(0) \subset A - a$, existe $x \in \overline{B}_\delta(0)$ tal que

$$\|g(0+x) - g(0)\|^{\frac{p}{q}} > M\|x\|, \tag{1.13}$$

ou seja,

$$\|g(x)\|^p > M^q \|x\|^q. \tag{1.14}$$

Deste modo, seja $0 < \rho < 1$ tal que $\overline{B}_{\rho^{\frac{1}{q}}}(0) \subset A - a$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_j \in E$ de modo que

$$\|x_j\|^q \leq \frac{\rho}{j^3} \tag{1.15}$$

e

$$\|g(x_j)\|^p > j\|x_j\|^q. \tag{1.16}$$

Observa-se que a sequência x_j, assim obtida, pertence a $\ell_q(E)$ e, consequentemente, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g(x_j)\|^p < \infty \text{ (pois } g \text{ é, por hipótese, regularmente } (p;q)\text{-somante).} \tag{1.17}$$

Assim, de (1.16) e (1.17), segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\|x_j\|^q < \sum_{j=1}^{\infty} \|g(x_j)\|^p < \infty. \tag{1.18}$$

Seja $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de inteiros positivos tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} jk_j\|x_j\|^q < \infty. \tag{1.19}$$

Note que (1.19) acima acarreta no fato de que a sequência

$$(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots),$$

onde cada x_j aparece exatamente jk_j vezes, pertence a $\ell_q(E)$ e, por conseguinte, implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} jk_j\|g(x_j)\|^p < \infty, \tag{1.20}$$

pois como g é regularmente $(p;q)$-somante, a sequência

$$(g(x_1),\dots,g(x_1),g(x_2),\dots,g(x_2),\dots),$$

onde cada $g(x_j)$ aparece jk_j vezes, pertence a $\ell_p(F)$. Multiplicando ambos os membros de (1.16) por jk_j, segue, de (1.20), que

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 k_j \|x_j\|^q < \sum_{j=1}^{\infty} jk_j \|g(x_j)\|^p < \infty \tag{1.21}$$

sempre que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} jk_j \|x_j\|^q < \infty$. Para cada j natural, tomemos

$$k_j = \left[\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right] := \sup\left\{m \in \mathbb{N};\ m \le \frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right\}. \tag{1.22}$$

Note que, de (1.15) segue que

$$\frac{1}{j^3\|x_j\|^q} \ge \frac{1}{\rho} > 1 \tag{1.23}$$

e, portanto cada k_j está bem definido e

$$k_j = \left[\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right] \ge 1. \tag{1.24}$$

Uma vez que

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\left[\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right]\|x_j\|^q \le \sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right)\|x_j\|^q = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} < \infty, \tag{1.25}$$

devemos então ter (usando (1.21)),

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2\left[\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right]\|x_j\|^q < \infty. \tag{1.26}$$

Mas

$$\frac{1}{j^3\|x_j\|^q} - 1 \le \left[\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right] \le \frac{1}{j^3\|x_j\|^q} \tag{1.27}$$

e, multiplicando por $j^3\|x_j\|^q$,

$$1 - j^3\|x_j\|^q \le \left[\frac{1}{j^3\|x_j\|^q}\right] j^3\|x_j\|^q \le 1. \tag{1.28}$$

De (1.15), temos que

$$j^3\|x_j\|^q \le \rho \Rightarrow -j^3\|x_j\|^q \ge -\rho \Rightarrow 1 - j^3\|x_j\|^q \ge 1-\rho \tag{1.29}$$

e, assim, de (1.28) e (1.29), temos

$$\left[\frac{1}{j^3\left\|x_j\right\|^q}\right] j^3\left\|x_j\right\|^q \geq 1-\rho. \tag{1.30}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} j^2\left[\frac{1}{j^3\left\|x_j\right\|^q}\right]\left\|x_j\right\|^q &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left[\frac{1}{j^3\left\|x_j\right\|^q}\right] j^3\left\|x_j\right\|^q \\ &\overset{(1.30)}{\geq} \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-\rho}{j}=(1-\rho)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}=\infty \end{aligned}\tag{1.31}$$

e isto contradiz (1.26). Logo g é (p/q)-regular em 0, isto é, existem $M>0$ e $\delta>0$ tais que

$$\|g(x)\|^{\frac{p}{q}}=\|g(0+x)-g(0)\|^{\frac{p}{q}} \leq M\|x\|,\ \forall x\in \overline{B}_\delta(0) \tag{1.32}$$

e, consequentemente,

$$\|f(a+x)-f(a)\|^{\frac{p}{q}} \leq M\|x\|,\ \forall x\in \overline{B}_\delta(0) \tag{1.33}$$

e f é, portanto, (p/q)-regular em a. ■

Como veremos na próxima seção, este resultado tem consequências na teoria das aplicações absolutamente $(p;q)$-somantes.

Exemplo 1.3.10 *Não é verdade que uma aplicação f regular no ponto a é localmente Lipschitziana neste ponto. Dizemos que $f: A\to F$ é **localmente Lipschitziana em** $a\in A$, se existirem $M>0$ e $\delta>0$ tais que, $B_\delta(a)\subset A$ e*

$$\|f(x)-f(y)\| \leq M\|x-y\| \text{ quaisquer que sejam } x,y\in B_\delta(a). \tag{1.34}$$

Faça$E=\mathbb{R}$ e suponha f localmente Lipschitiziana em a. Podemos ver que, para todo $x\in B_{\frac{\delta}{2}}(a)$ fixado, temos

$$\frac{\|f(x)-f(y)\|}{|x-y|} \leq M \text{ para todo } y\in B_{\frac{\delta}{2}}(x),\ \text{com } y\neq x. \tag{1.35}$$

Portanto, se também supusermos que f é diferenciável em cada $x\neq a$, a desigualdade acima mostra que $\|f'(x)\|\leq M$, para todo $x\in B_{\frac{\delta}{2}}(a)$, $x\neq a$. A função f do Exemplo 1.3.8 *é regular em zero, diferenciável em cada ponto $x\neq 0$, mas não podemos ter $\|f'(x)\|\leq M$ para todo $x\in B_r(0)$, $x\neq 0$, não importa que valor escolhamos para $r>0$. Portanto, essa função não é localmente Lipschitziana em 0.*

1.3.2 Aplicações Absolutamente Somantes

Nesta seção, E e F denotam espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e A é um subconjunto aberto e não vazio de E.

Começamos com o conceito de aplicações absolutamente $(p;q)$-somantes.

Definição 1.3.11 *Se $p,q \in \,]0,+\infty[$, uma aplicação f de A em F é* ***absolutamente $(p;q)$-somante*** *no ponto $a \in A$, se $(f(a+x_j)-f(a))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ e $a+x_j \in A$, para cada $j \in \mathbb{N}$.*

Se f é absolutamente $(p;q)$-somante em cada ponto $a \in A$, a aplicação f é dita ***absolutamente $(p;q)$-somante sobre*** *A. Se $p=q$, a aplicação é dita absolutamente p-somante sobre A e, no caso de $p=1$, dizemos apenas que f é absolutamente somante sobre A.*

Note que, para $a \in A$, o conjunto

$$A-a := \{b-a;\, b \in A\}$$

é aberto em E e $0 \in A-a$. É fácil verificar que, se

$$f_a(x) := f(a+x)-f(a)$$

para $x \in A-a$, então f é absolutamente $(p;q)$-somante em a se, e somente se, f_a é absolutamente $(p;q)$-somante em 0. Se f é linear, temos $f=f_a$, para todo $a \in E$. Neste caso, podemos dizer que f é absolutamente $(p;q)$-somante sobre E, quando é absolutamente $(p;q)$-somante em algum ponto de E. Em geral, este resultado não é verdadeiro para aplicações não lineares.

Exemplo 1.3.12 *Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $0 \neq \varphi \in E'$. Consideremos o polinômio contínuo 2-homogêneo P de E em E, dado por*

$$P(x) = \varphi(x)\,x,$$

para cada $x \in E$. Para $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e $a \in E$, existe $M \geq 0$ satisfazendo $\|a+x_j\| \leq M$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Se $a \in \ker(\varphi)$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|P(a+x_j)-P(a)\|^p &= \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi(a+x_j)(a+x_j)-\varphi(a)\,a\|^p \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi(x_j)(a+x_j)\|^p \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \|a+x_j\|^p \\
&\leq M^p \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty.
\end{aligned}$$

Isto mostra que P é absolutamente p-somante em cada ponto do núcleo de φ. Por outro lado, se $b \notin \ker(\varphi)$, temos, utilizando a notação $P_b(x) = P(b+x) - P(b)$, que

$$P_b = \varphi(\cdot)\, b + \varphi(b)\, id_E + P.$$

Uma vez que P e $\varphi(\cdot)\, b$ são absolutamente p-somantes em 0, segue que P_b é p-somante em 0 se, e somente se, id_E é absolutamente p-somante em 0. Mas, sendo E de dimensão infinita, segue, do Teorema de Dvoretzky-Rogers, que id_E não pode ser absolutamente p-somante em 0. Logo, P não é absolutamente p-somante em b. Podemos então dizer que P não pode ser absolutamente p-somante em qualquer aberto não-vazio de E (pois todo subespaço próprio de um espaço vetorial tem interior vazio).

Exemplo 1.3.13 *Um raciocínio análogo mostra que a diferencial de Fréchet $dP(b)$ de P no ponto $b \notin \ker(\varphi)$ não pode ser absolutamente p-somante sobre um espaço de Banach E de dimensão infinita. Com efeito, mostrando que $dP(b) = \varphi(\cdot)\, b + \varphi(b)\, id_E$, a Versão Fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers que afirma que se E é um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então id_E é p-somante se, e somente se, E tem dimensão finita (para detalhes ver [5]), garante que se $b \notin \ker(\varphi)$ então $dP(b)$ não é absolutamente p-somante sobre E. Deste modo,*

$$\begin{aligned} P(b+v) - P(b) - \varphi(v)\, b - \varphi(b)\, v &= \varphi(b+v)(b+v) - \varphi(b)\, b - \varphi(v)\, b - \varphi(b)\, v \\ &= \varphi(b)\, b + \varphi(b)\, v + \varphi(v)\, b + \varphi(v)\, v - \varphi(b)\, b \\ &- \varphi(v)\, b - \varphi(b)\, v \\ &= \varphi(v)\, v. \end{aligned}$$

Basta mostrar agora então que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\varphi(v)\, v}{\|v\|} = 0.$$

Temos que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \left\| \frac{\varphi(v)\, v}{\|v\|} \right\| = \lim_{\|v\| \to 0} \left\| \varphi\left(\frac{v}{\|v\|}\right) v \right\| \leq \lim_{\|v\| \to 0} \|\varphi\| \, \|v\| = 0$$

e o resultado está provado.

1.4 Caracterização de Aplicações Não-Lineares Absolutamente Somantes

Assim como na seção anterior, os resultados desta seção são baseados em [34].

Definição 1.4.1 *Seja B um subconjunto de um espaço vetorial normado E. A* ***fronteira*** *do conjunto B, denotada por $fr(B)$, é o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que, $U \cap B \neq \emptyset$ e $U \cap (E - B) \neq \emptyset$, simultaneamente, para todo aberto U de E que contém x.*

Verificamos que, para cada $a \in A$,

$$V_{q,A}(a) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E) \, ; \, a + x_j \in A, \, \forall j \in \mathbb{N} \right\}$$

é um subconjunto aberto de $\ell_q^u(E)$. Com efeito, devemos mostrar que, dado $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ pertencente a $V_{q,A}(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $B\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, \delta\right)_{\ell_q^u(E)} \subset V_{q,A}(a)$. Temos que

$$\begin{aligned} B\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, \delta\right)_{\ell_q^u(E)} &= \left\{ (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E) \, ; \, \left\| (x_j - y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} < \delta \right\} \\ &= \left\{ (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E) \, ; \, \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j - y_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \delta \right\}. \end{aligned}$$

Seja $r > 0$ tal que $B(0; r)_E \subset A - a$ e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in V_{q,A}(a)$. Então, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_j \in B(0; r)_E \, , \text{ sempre que } j \geq j_0.$$

Considerando agora a bola $B\left(0; \frac{r}{2}\right)_E$, segue que existe $j_1 > j_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$j > j_1 \Rightarrow x_j \in B\left(0; \frac{r}{2}\right)_E.$$

Uma vez que $A - a$ é aberto e $x_j \in A - a$ para todo j, para cada $j = 1, \ldots, j_0$, existe $\rho_j > 0$ tal que

$$B(x_j; \rho_j)_E \subset A - a.$$

Considerando agora $j = j_0 + 1, \ldots, j_1$, seja $d_j = d(x_j, fr(B(0; r)_E))$. Note que $d_j > 0$, para todo $j = j_0 + 1, \ldots, j_1$, pois se $d_j = 0$ para algum $j \in \{j_0 + 1, ..., j_1\}$, então $x_j \in f_r(B(0; r)_E)$, pois $f_r(B(0; r)_E)$ é um conjunto fechado no espaço métrico E e, deste modo, teríamos $x_j \notin B(0; r)_E$, o que seria uma contradição. Seja $d_0 = \min_{j_0+1 \leq j \leq j_1} \{d_j\}$. Defina então

$$\rho_0 = \frac{d_0}{2}.$$

Assim, para todo $j > j_0$, temos

$$B(x_j, \rho_0)_E \subset B(0; r)_E \, .$$

Tome agora $\rho = \min \{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{j_0}\}$. Assim, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $B(x_j; \rho)_E \subset A - a$. Deste modo, tomando $\delta = \rho$, temos que, se $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B\left((x_j)_{j=1}^{\infty}; \delta\right)_{\ell_q^u(E)}$, temos, pelo Teorema de Hahn-Banach que

$$\delta > \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j - y_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j - y_j)| = \|x_j - y_j\| \, ,$$

o que significa que $y_j \in B(x_j;\delta)_E$ e, consequentemente, que $y_j \in A - a$. Logo, $B\left((x_j)_{j=1}^{\infty};\delta\right)_{\ell_q^u(E)} \subset V_{q,A}(a)$ que é, portanto, aberto.

Deste modo, se f é uma aplicação de A em F que é absolutamente $(p;q)$-somante no ponto a, temos a seguinte aplicação natural:

$$\begin{aligned}\psi_{a,p,q}(f) : V_{q,A}(a) &\to \ell_p(F)\\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\mapsto \psi_{a,p,q}(f)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty}\end{aligned}$$

O resultado a seguir mostra que essa aplicação tem uma propriedade muito especial.

Teorema 1.4.2 *Se $f\colon A \to F$ é uma aplicação absolutamente $(p;q)$-somante no ponto a, então $\psi_{a,p,q}(f)$ é regularmente $(p;q)$-somante no ponto $0 \in V_{q,A}(a)$.*

Demonstração: Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q\left(\ell_q^u(E)\right)$, com $X_j = \left(x_k^{(j)}\right)_{k=1}^{\infty} \in V_{q,A}(a)$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}\sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{j,k=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_k^{(j)}\right)\right|^q &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_k^{(j)}\right)\right|^q \leq\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_k^{(j)}\right)\right|^q =\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\|\left(x_k^{(j)}\right)_{k=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q =\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\|X_j\|_{w,q}\right)^q < \infty.\end{aligned}$$

Isto mostra que a sequência $\left(x_k^{(j)}\right)_{j,k=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_q^w(E)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que $x_k^{(j)} + a \in A$, para todo $j,k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\|X_j\|_{w,q}\right)^q \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.36}$$

Por outro lado, uma vez que $X_1,\ldots,X_{j_0} \in \ell_q^u(E)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\left(\left\|\left(x_k^{(j)}\right)_{k=k_0+1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q \leq \frac{\varepsilon}{2j_0}, \text{ para todo } j = 1,\ldots,j_0. \tag{1.37}$$

Logo, de (1.36) e (1.37), obtemos

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\left\|\left(x_k^{(j)}\right)_{k=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q + \sum_{j=1}^{j_0} \left(\left\|\left(x_k^{(j)}\right)_{k=k_0+1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.38}$$

Assim, fazendo $J = \{1, \ldots, j_0\} \times \{1, \ldots, k_0\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \left(x_k^{(j)} \right)_{(j,k)\notin J} \right\|_{w,q}^q &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{(j,k)\notin J}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q \\
&= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left[\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q + \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q \right] \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left[\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q \right] + \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left[\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q \right] \\
&\leq \left[\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q \right] + \left[\sum_{j=1}^{j_0} \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| \varphi(x_k^{(j)}) \right|^q \right] \\
&= \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\left\| \left(x_k^{(j)} \right)_{k=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^q + \sum_{j=1}^{j_0} \left(\left\| \left(x_k^{(j)} \right)_{k=k_0+1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^q \overset{(1.38)}{<} \varepsilon.
\end{aligned}$$

e, por conseguinte, segue que $\left(x_k^{(j)} \right)_{j,k=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$. Note que

$$\psi_{a,p,q}(f)(0) = f(0+a) - f(a) = 0$$

e, portanto,

$$\psi_{a,p,q}(f)(x+0) - \psi_{a,p,q}(f)(0) = \psi_{a,p,q}(f)(x) = f(x+a) - f(a).$$

Uma vez que f é absolutamente $(p;q)$-somante no ponto a, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\| \psi_{a,p,q}(f)(X_j) \right\|_p \right)^p = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \left\| f\left(a + x_k^{(j)} \right) - f(a) \right\|^p < \infty, \tag{1.39}$$

o que finaliza a demonstração. ■

Teorema 1.4.3 *Se f é uma aplicação de A em F e $a \in A$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) f é absolutamente $(p;q)$-somante no ponto a;

(ii) Existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\sum_{j=1}^{n} \|f(a+x_j) - f(a)\|^p \leq M^q \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q, \tag{1.40}$$

para todo n natural, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$, com $\left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q} \leq \delta$;

(iii) Existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq M^q \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q, \tag{1.41}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \delta$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (iii)$: Se f é absolutamente $(p;q)$-somante em $a \in A$, então o Teorema 1.4.2 garante que a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_{a,p,q}(f) : V_{q,A}(a) &\to \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\mapsto \psi_{a,p,q}(f)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \end{aligned}$$

é regularmente $(p;q)$-somante em 0. Do Teorema 1.3.9 segue que $\psi_{a,p,q}(f)$ é (p/q)-regular em 0, isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$, tais que $\overline{B}_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\left\|\psi_{a,p,q}(f)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|^{\frac{p}{q}} \leq M \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{B}_\delta(0)$, ou seja,

$$\left\|(f(a + x_j) - f(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p^p \leq M^q \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^q.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$. Então, existe m natural tal que

$$\left\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,q} < \delta.$$

Logo, por (iii), temos

$$\sum_{j=m}^{\infty} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq C \left\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,q}^q.$$

Logo, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p < \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ tal que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} < \delta.$$

É claro que nesse caso temos

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q} < \delta.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(a+x_j)-f(a)\|^p \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f(a+x_j)-f(a)\|^p \leq C \lim_{m\to\infty} \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}.$$

Como $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,q} < \varepsilon,$$

sempre que $m \geq n_0$. Nestas condições,

$$\begin{aligned}
\left|\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} - \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right| &= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} - \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} \\
&= \|(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots)+(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots)\|_{w,q} \\
&- \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} \\
&\leq \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} + \left\|(x_j)_{j=m+1}^{\infty}\right\|_{w,q} - \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} \\
&= \left\|(x_j)_{j=m+1}^{\infty}\right\|_{w,q} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

sempre que $m \geq n_0$, mostrando que

$$\lim_{m\to\infty} \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.$$

e, assim, o resultado segue.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ é imediata. ■

Observação 1.4.4 *Estas condições são implicadas por (iv) e (v) abaixo e, se $p \leq q$, (iv) e (v) são equivalentes às condições acima.*

(iv) *Existem $D > 0$ e $\delta \in (0,1]$ tais que $\overline{B}_\delta(a) \subset A$ e*

$$\left\|(f(a+x_j)-f(a))_{j=1}^m\right\|_p \leq D \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q}, \tag{1.42}$$

para todo $x_j \in E$, $j = 1,\ldots,m$, tal que, $a + x_j \in A$ e $\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,q} \leq \delta$;

(v) *Existem $D > 0$ e $\delta \in (0,1]$ tais que $\overline{B}_\delta(a) \subset A$ e*

$$\left\|(f(a+x_j)-f(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq D \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}, \tag{1.43}$$

para todo $x_j \in E$, $j \in \mathbb{N}$, tal que, $a + x_j \in A$ e $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \delta$.

(iv) ⇒ (i) : Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, *tal que* $a + x_j \in A$, *para todo* j. *Assim, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se* $n > n_0$ *então* $\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{w,q} < \delta$. *Deste modo, denotando por* I_{n_0-1} *o conjunto* $\{1, \ldots, n_0 - 1\}$, *temos*

$$\begin{aligned}
&\left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_p \\
&\quad \leq \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=n_0+1}^{\infty}\right\|_p \\
&\quad = \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + \sup\nolimits_{m\in\mathbb{N}-I_{n_0-1}} \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=n_0}^{m}\right\|_p \\
&\quad \leq \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + \sup\nolimits_{m\in\mathbb{N}-I_{n_0-1}} D\left\|(x_j)_{j=n_0}^{m}\right\|_{w,q} \\
&\quad = \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + D\sup\nolimits_{m\in\mathbb{N}-I_{n_0-1}} \left\|(x_j)_{j=n_0}^{m}\right\|_{w,q} \\
&\quad \leq \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + D\delta < \infty
\end{aligned}$$

e f *é, portanto, absolutamente* $(p;q)$*-somante em* a.

(v) ⇒ (i) : Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, *tal que* $a + x_j \in A$, *para todo* j. *Assim, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se* $n > n_0$ *então* $\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{w,q} < \delta$. *Deste modo,*

$$\begin{aligned}
\left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty}\right\|_p &\leq \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=n_0+1}^{\infty}\right\|_p \\
&\leq \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + D\left\|(x_j)_{j=n_0+1}^{\infty}\right\|_{w,q} \\
&\leq \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n_0}\right\|_p + D\delta < \infty.
\end{aligned}$$

No intuito de mostrar que (ii) ⇒ (iv) e (iii) ⇒ (v), quando $p \leq q$, *note que podemos considerar sempre* $\delta \leq 1$ *e, deste modo:*

(ii) ⇒ (iv) :

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} \|f(a+x_j) - f(a)\|^p \leq M^q \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left\|(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{n}\right\|_p \leq M^{\frac{q}{p}} \left(\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq M^{\frac{q}{p}} \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q},
\end{aligned}$$

pois

$$\frac{q}{p} \geq 1 \text{ e } \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q} \leq \delta \leq 1.$$

(iii) ⇒ (v) : Análogo ao caso acima.

1.5 Uma Abordagem Diferente Para a Demonstração do Teorema 1.4.3

O ingrediente principal da demonstração do Teorema 1.4.3 é a teoria de aplicações regularmente somantes, e a demonstração da parte $(i) \Rightarrow (iii)$ usa vários resultados desenvolvidos em seções anteriores sobre aplicações regularmente somantes. A seguir, apresentamos uma demonstração direta, sem fazer uso da teoria de aplicações regularmente somantes. Usaremos uma adaptação de um argumento (devido a A. Pietsch) usado em [15], que simplifica a ideia original de M. C. Matos:

Uma outra demonstração do Teorema 1.4.3: $(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha que (ii) não vale. Então, dado $k = 1, 2, \ldots$, podemos encontrar $x_1^{(k)}, \ldots, x_{m_k}^{(k)}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m_k} \left\| f\left(a + x_j^{(k)}\right) - f(a) \right\|^p > k^2 \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{m_k} \left| \varphi\left(x_j^{(k)}\right) \right|^q \tag{1.44}$$

e

$$\left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{m_k} \left| \varphi\left(x_j^{(k)}\right) \right|^q \leq \frac{1}{k^2}. \tag{1.45}$$

Seja n_k a parte inteira de $\dfrac{2}{k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q}$. Desta forma,

$$n_k \leq \frac{2}{k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q} < n_k + 1, \tag{1.46}$$

donde se extrai

$$n_k k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q \leq 2 < (n_k + 1) k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q. \tag{1.47}$$

De (1.45), obtemos

$$k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q \leq 1 \tag{1.48}$$

e, de (1.47) e (1.48), segue que

$$\begin{aligned} 2 &< (n_k + 1) k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q = n_k k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q + k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q \\ &\leq n_k k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q + 1 \end{aligned} \tag{1.49}$$

e, portanto, temos

$$n_k k^2 \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{w,q}^q > 1. \tag{1.50}$$

Note que, da desigualdade (1.50), concluímos também que $n_k > 0$. Agora, tomemos a sequência

$$\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)}, \ldots\right)$$

que contém cada $x_j^{(k)}$, precisamente n_k vezes. Então, se $\varphi \in B'_E$, temos

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{k=1}^{\infty} n_k \sum_{j=1}^{m_k} \left|\varphi\left(x_j^{(k)}\right)\right|^q \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} n_k \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{j=1}^{m_k} \left|\varphi\left(x_j^{(k)}\right)\right|^q \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{w,q}^q \\
&\overset{(1.47)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, a sequência construída é fracamente q-somável e, portanto, por (i), devemos ter

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} n_k \left\|f\left(a + x_j^{(k)}\right) - f(a)\right\|^p < \infty. \tag{1.51}$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} n_k \left\|f\left(a + x_j^{(k)}\right) - f(a)\right\|^p \overset{(1.44)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} n_k k^2 \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{w,q}^q \overset{(1.50)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty \tag{1.52}$$

o que é uma contradição. ■

O Teorema 1.4.3 implica no seguinte resultado, bastante conhecido na literatura:

Teorema 1.5.1 *Se $P\colon E \to F$ é um polinômio contínuo m-homogêneo, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) P é absolutamente $(p;q)$-somante em 0;

(ii) Existe $L > 0$ tal que,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}}, \tag{1.53}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Existe $L > 0$ tal que,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}}, \tag{1.54}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$;

(iv) Existe $L > 0$ *tal que,*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}}, \tag{1.55}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$*;*

Demonstração: Obviamente, temos que $(iii) \Rightarrow (i)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$, $(iv) \Rightarrow (i)$, $(iv) \Rightarrow (ii)$. Temos que $(iv) \Rightarrow (iii)$ pois $\ell_q^u(E) \subset \ell_q^w(E)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Observamos que se P é absolutamente $(p;q)$-somante na origem, então, pelo Teorema 1.4.3 ($(i) \Rightarrow (iii)$) a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_{0,p,q}(P) : \ell_q^u(E) &\to \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\mapsto \psi_{0,p,q}(P)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (P(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definida; além disso, note que $\psi_{0,p,q}(P)$ é um polinômio contínuo m-homogêneo. Desta forma

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|\psi_{0,p,q}(P)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\psi_{0,p,q}(P)\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^m \\ &= \|\psi_{0,p,q}(P)\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}}. \end{aligned}$$

Fazendo $L = \|\psi_{0,p,q}(P)\|$, segue o resultado.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é um sequência em $\ell_q^w(E)$ temos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}}\right] \\ &= L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q\right)\right]^{\frac{m}{q}} \\ &= L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Se P é um polinômio m-homogêneo absolutamente $(p;q)$-somante na origem, pode-se estabelecer uma relação entre o valor de L do Teorema 1.5.1 e os valores de M e δ do Teorema 1.4.3, como mostra o próximo resultado:

Proposição 1.5.2 *Se $P\colon E \to F$ é um polinômio m-homogêneo, de modo que, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p \leq M^q \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{J=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q, \tag{1.56}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \delta$, então

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(y_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{J=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^q\right)^{\frac{m}{q}} \tag{1.57}$$

para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, com $L = M^{\frac{q}{p}} \delta^{\frac{q}{p}-m}$. Isto implica que

$$\|\psi_{0,p,q}(P)\| \leq M^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{p}{q}-m}. \tag{1.58}$$

Demonstração: Observemos que a desigualdade da nossa hipótese pode ser escrita sob a forma

$$\left\|\psi_{0,p,q}(P)\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p^p \leq M^q \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^q \leq (M\delta)^q, \tag{1.59}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ tal que $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \delta$. Assim, para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, tal que $(y_j)_{j=1}^{\infty} \neq 0$, temos

$$\left\|\psi_{0,p,q}(P)\left(\frac{\delta (y_j)_{j=1}^{\infty}}{\left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}}\right)\right\|_p \leq (M\delta)^{\frac{q}{p}}. \tag{1.60}$$

Uma vez que $\psi_{0,p,q}(P)$ é m-homogêneo, podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\left\|\psi_{0,p,q}(P)\left((y_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq (M\delta)^{\frac{q}{p}} \delta^{-m} \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^m. \tag{1.61}$$

Sabendo que a desigualdade (1.61) é válida para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, obtemos, assim, o resultado desejado. ■

A seguir, usaremos a notação

$$f_a(t) = f(a+t) - f(a).$$

Definição 1.5.3 *Sejam f uma aplicação de A em F, $k > 0$ e $a \in A$. Dizemos que f é **sub k-homogênea** em a, se existe $\delta > 0$ tal que, $B_\delta(a) \subset A$ e*

$$\|f_a(\lambda t)\| \geq |\lambda|^k \|f_a(t)\|,$$

sempre que $\|\lambda t\| < \delta$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

De posse desta informação, pode-se então provar o seguinte resultado:

Teorema 1.5.4 *Seja $f\colon A \to F$ uma aplicação sub k-homogênea em $a \in A$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) *f é absolutamente $(p;q)$-somante em a;*

(*ii*) *Existem $D > 0$ e $\delta > 0$, tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e*

$$\left\|\left(f(a+x_j) - f(a)\right)_{j=1}^{n}\right\|_p \leq D \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{k}, \tag{1.62}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$, com $\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q} \leq \delta$;

(*iii*) *Existem $D > 0$ e $\delta > 0$, tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e*

$$\left\|\left(f(a+x_j) - f(a)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq D \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^{k}, \tag{1.63}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \delta$.

Demonstração: Obviamente, temos que (iii) implica em (i) e também que (iii) implica em (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Supondo a validade de (ii), temos, para $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \delta$, que

$$\begin{aligned}
\left\|\left(f(a+x_j) - f(a)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|f(a+x_j) - f(a)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} D \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{k} \\
&= D \lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{k} \\
&= D \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^{k}
\end{aligned}$$

e a implicação está provada.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Da condição (iii) do Teorema 1.4.3, extraímos que existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\left\|\left(f(a+\lambda x_j) - f(a)\right)_{j=1}^{n}\right\|_p \leq M^q \left\|(\lambda x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{q} = \left(M\left|\lambda\right| \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}\right)^q, \tag{1.64}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$, com $\left\| (\lambda x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q} \leq \delta$. Utilizando o fato de f ser sub k-homogênea em a, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \left(f\left(a+\lambda x_j\right)-f\left(a\right)\right)_{j=1}^n \right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^n \left\| f\left(a+\lambda x_j\right)-f\left(a\right)\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\sum_{j=1}^n |\lambda|^k \left\| f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.65) \\
&= |\lambda|^k \left\| \left(f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right)_{j=1}^n \right\|_p
\end{aligned}$$

Então, de (1.64) e (1.65), segue que

$$\left\| \left(f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right)_{j=1}^n \right\|_p \leq M^q \left|\lambda\right|^{q-k} \left(\left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q} \right)^q . \qquad (1.66)$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{\delta}{\left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q}}$, obtemos que (i) implica em (ii) (aqui $D = M^q \delta^{q-k}$). ■

Capítulo 2

Lineabilidade no Contexto de Aplicações Absolutamente Somantes

Neste capítulo, trataremos do tema lineabilidade e de como esse assunto aparece no contexto das aplicações absolutamente somantes. Basicamente, definiremos o conjunto somante de um polinômio e investigaremos algumas condições sob as quais este conjunto abriga ou não um subespaço vetorial, classificando-o de acordo com a dimensão de tal subespaço.

2.1 Alguns Resultados Auxiliares

2.1.1 Aplicações Absolutamente Somantes

A seguir, desenvolvemos alguns resultados da teoria das aplicações multilineares e da teoria polinomial que serão úteis ao nosso propósito de tornar o texto o mais auto-suficiente possível.

Definição 2.1.1 *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dita **absolutamente** $(p; q_1, \ldots, q_n)$**-somante em** $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ se, dadas sequências $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}(E_k)$, $k = 1, \ldots, n$, tivermos*

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{n}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

Denotamos por

$$\mathcal{L}_{as(p,q_1,\ldots,q_n)}^{(a)}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

o conjunto de todas as aplicações n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F contínuas que são $(p; q_1, \ldots, q_n)$-somantes em a. Quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, escrevemos $\mathcal{L}_{as(p,q_1,\ldots,q_n)}^{(a)}({}^nE; F)$ e, quando $F = \mathbb{K}$ escrevemos $\mathcal{L}_{as(p,q_1,\ldots,q_n)}^{(a)}(E_1, \ldots, E_n)$.

As próximas duas proposições aparecem em [4].

Proposição 2.1.2 *Sejam* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ *e* $T \in \mathcal{L}^{(a)}_{as(p,q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. *Então*

(i) $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}$ *é absolutamente* $(p, q_{k_1}, \ldots, q_{k_s})$*-somante na origem sempre que*

$$\{1, \ldots, n\} = \{j_1, \ldots, j_r\} \cup \{k_1, \ldots, k_s\},$$

com $k_1 \leq \cdots \leq k_s$ *e* $\{j_1, \ldots, j_r\} \cap \{k_1, \ldots, k_s\} = \emptyset$. *Aqui* $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}} : E_{k_1} \times \cdots \times E_{k_s} \to F$ *é a aplicação* s*-linear definida por* $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}) = T(y_1, \ldots, y_n)$, *onde* $(y_1, \ldots, y_n)$ *é o vetor que se obtém quando se ordena* $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}$ *pela ordem crescente dos índices.*

(ii) $T \in \mathcal{L}^{(b)}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *sempre que* b *pertence a*

$$\{(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n); \lambda_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Em particular, o conjunto de todos os pontos b *tais que* T *é* $(p; q_1, \ldots, q_n)$*-somante em* b *contém um subespaço de* $E_1 \times \cdots \times E_n$; *e, claramente,* T *é* $(p; q_1, \ldots, q_n)$*-somante na origem. Aqui devemos ter* $a \neq 0$.

Demonstração:

(i) : Para o operador linear $T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ é suficiente observar que

$$T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}\left(x_j^{(n)}\right) = T\left(a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_{n-1} + 0, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

onde $\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\ell_{q_n}(E_n)$. Os casos $T_{a_1,\ldots,a_{n-2},a_n}, \ldots, T_{a_2,\ldots,a_n}$ são todos análogos. Para a aplicação bilinear $T_{a_1,\ldots,a_{n-2}}$, observe que

$$\begin{aligned}
&T_{a_1,\ldots,a_{n-2}}\left(x_j^{(n-1)}, x_j^{(n)}\right) = \\
&= \left[T\left(a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_{n-2} + 0, a_{n-1} + x_j^{(n-1)}, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right] \\
&\quad - T\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_j^{(n)}\right) - T\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, x_j^{(n-1)}, a_n\right) \\
&= \left[T\left(a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_{n-2} + 0, a_{n-1} + x_j^{(n-1)}, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right] \\
&\quad - T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}\left(x_j^{(n)}\right) - T_{a_1,\ldots,a_{n-2},a_n}\left(x_j^{n-1}\right),
\end{aligned}$$

onde $\left(x_j^{(n-1)}\right)_{j=1}^{\infty}$ e $\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$ são sequências em $\ell_{q_{n-1}}(E_{n-1})$ e $\ell_{q_n}(E_n)$, respectivamente. Note que T é $(p; q_1, \ldots, q_n)$-somante em a por hipótese e, pelo caso anterior, sabemos que $T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ é $(p; q_n)$-somante na origem e $T_{a_1,\ldots,a_{n-2},a_n}$ é $(p; q_{n-1})$-somante. Então, segue que $T_{a_1,\ldots,a_{n-2}}$ é $(p; q_{n-1}, q_n)$-somante na origem. Os demais casos de aplicações bilineares são análogos. Procedendo com este argumento, a demonstração se completa.

(ii) : Seja $b = (\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n)$. Se $\lambda_j \neq 0$ para todo j, é suficiente notar que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(\lambda_1 a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, \lambda_n a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(\lambda_1 a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, \ldots, \lambda_n a_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_n} x_j^{(n)}\right) - T\left(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lambda_1 \cdots \lambda_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(a_1 + \frac{1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, \ldots, a_n + \frac{1}{\lambda_n} x_j^{(n)}\right) - T\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, faremos uso de (i) para provar o caso em que $\lambda_j = 0$, para algum j. O caso $n = 3$ é suficiente para ilustrar os argumentos utilizados: T é $(p; q_1, q_2, q_3)$-somante em $a = (a_1, a_2, a_3)$ por hipótese e, de (i), segue que, na origem, T é $(p; q_1, q_2, q_3)$-somante, T_{a_1} é $(p; q_2, q_3)$-somante, T_{a_2} é $(p; q_1, q_3)$-somante, T_{a_3} é $(p; q_1, q_2)$-somante, T_{a_1,a_2} é $(p; q_3)$-somante, T_{a_1,a_3} é $(p; q_2)$-somante, T_{a_2,a_3} é $(p; q_1)$-somante.

- Caso $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$: Segue de

$$\begin{aligned}
&T\left(\lambda_1 a_1 + x_j, \lambda_2 a_2 + y_j, z_j\right) - T\left(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, 0\right) \\
&\quad = \lambda_1 \lambda_2 \left[T\left(a_1 + \frac{x_j}{\lambda_1}, a_2 + \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) - T\left(a_1, a_2, 0\right)\right] \\
&\quad = \lambda_1 \lambda_2 \left[T\left(a_1, a_2, z_j\right) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, a_2, z_j\right) + T\left(a_1, \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right)\right] \\
&\quad = \lambda_1 \lambda_2 \left[T_{a_1,a_2}\left(z_j\right) + T_{a_2}\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, z_j\right) + T_{a_1}\left(\frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right) + T\left(\frac{x_j}{\lambda_1}, \frac{y_j}{\lambda_2}, z_j\right)\right].
\end{aligned}$$

- Casos $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$ e $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ são análogos.

- Caso $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$: Segue de

$$\begin{aligned}
T\left(\lambda_1 a_1 + x_j, y_j, z_j\right) - T\left(\lambda_1 a_1, 0, 0\right) &= \lambda_1 \left[T\left(a_1 + \frac{x_1}{\lambda_1}, y_j, z_j\right)\right] \\
&= \lambda_1 \left[T\left(a_1, y_j, z_j\right) + T\left(\frac{x_1}{\lambda_1}, y_j, z_j\right)\right] \\
&= \lambda_1 \left[T_{a_1}\left(y_j, z_j\right) + T\left(\frac{x_1}{\lambda_1}, y_j, z_j\right)\right].
\end{aligned}$$

- Casos $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ são análogos.

- Caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: já sabemos que T é $(p; q_1, q_2, q_3)$-somante na origem.

$\blacksquare$

Observação 2.1.3 *Se $P\colon E \to F$ é $(p;q)$-somante em $a \in E$, com $a \neq 0$, então P é absolutamente $(p;q)$-somante em λa, sempre que $\lambda \neq 0$. De fato,*

$$P(\lambda a + x_j) - P(\lambda a) = P\left(\lambda a + \frac{\lambda}{\lambda} x_j\right) - P(\lambda a) = \lambda\left[P\left(a + \frac{1}{\lambda} x_j\right) - P(a)\right]$$

e P é $(p;q)$-somante em λa.

Fazendo analogia com a notação introduzida no início dessa seção, denotaremos por $\mathcal{P}^{(a)}_{as,(p;q)}({}^nE;F)$ o conjunto de todos os polinômios $P \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ que são $(p;q)$-somantes em a. Quando $F = \mathbb{K}$ escrevemos simplesmente $\mathcal{P}^{(a)}_{as,(p;q)}({}^nE)$ e quando $p = q$, escrevemos $\mathcal{P}^{(a)}_{as,(p;p)}({}^nE;F) = \mathcal{P}^{(a)}_{as,p}({}^nE;F)$.

Proposição 2.1.4 *Sejam $P \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ e $a \in E$. Então P é $(p;q)$-somante em a se, e somente se, $\check{P}$ é $(p;q,\ldots,q)$-somante em $(a,\ldots,a) \in E^n$.*

Demonstração: Usando a fórmula de polarização, o caso $a = 0$ é imediato. Suponha que P é $(p;q)$-somante em $a = 0$, então para $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{n}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\check{P}\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} &= \left(\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{n}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \left(P\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{n}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\
&= \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \left(P\left(0 + \left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{n}\right)\right) - P(0)\right)_{j=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

que pertence a $\ell_p(F)$, pois $\left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{n}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ e P é $(p;q)$-somante em $a = 0$. Logo, $\check{P}$ é $(p;q,\ldots,q)$-somante em $(0,\ldots,0)$. Suponhamos então $a \neq 0$. Note que se $\check{P}$ é $(p,q,\ldots,q)$-somante em $(a,\ldots,a)$ é claro que P é $(p;q)$-somante em a. A prova da implicação contrária é dividida em dois casos: n ímpar e n par.

- <u>n é ímpar:</u>

Neste caso, a Fórmula de Polarização nos dá

$$\begin{aligned}
&n!2^n\left[\check{P}\left(a + x_j^{(1)},\ldots,a + x_j^{(n)}\right) - \check{P}(a,\ldots,a)\right] = \\
&= \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P\left(\varepsilon_1\left(a + x_j^{(1)}\right) + \cdots + \varepsilon_n\left(a + x_j^{(n)}\right)\right) \\
&\quad - \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P(\varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a) \\
&= \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\left[P\left((\varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a) + \left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right) - P(\varepsilon_1 a + \cdots + \varepsilon_n a)\right]. \\
&= \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\left[P\left(a(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) + \left(\varepsilon_1 x_j^{(1)} + \cdots + \varepsilon_n x_j^{(n)}\right)\right) - P(a(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n))\right].
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Uma vez que n é ímpar, temos $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) \neq 0$. Por hipótese, P é $(p;q)$-somante em a e, portanto, de acordo com a Observação 2.1.3, segue que P é $(p;q)$-somante em cada $a(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$. Logo, a Proposição 2.1.2 garante que $\check{P}$ é $(p;q)$-somante em $(a, \ldots, a)$.

- n é par:

Tome $\varphi \in E'$ de modo que $\varphi(a) = 1$ e defina $Q \in \mathcal{P}(^{n+1}E; F)$ dado por $Q(x) = \varphi(x) P(x)$. Como P é $(p;q)$-somante em a, verifica-se que Q é também $(p;q)$-somante em a. Como, neste caso, $n+1$ é ímpar, pelo caso anterior concluímos que $\check{Q}$ é $(p;q)$-somante em $(a, \ldots, a)$. Uma vez que $\check{Q}_a$ e φ são $(p;q)$-somantes na origem, de

$$\check{Q}_a(x, \ldots, x) = \check{Q}(a, x, \ldots, x) = \frac{(n-1)}{n} \check{P}(a, x, \ldots, x) \varphi(x) + \frac{1}{n} P(x),$$

concluímos que P é $(p;q)$-somante na origem. Agora, como na Proposição 2.1.2, a fórmula de polarização nos dá que $\check{P}$ é $(p;q)$-somante em $(a, \ldots, a)$, o que finaliza a demonstração. ■

Denotamos por $\Pi_{p;q}(E, F)$ o conjunto formado pelos operadores lineares absolutamente $(p;q)$-somantes (isto é, absolutamente $(p;q)$-somantes na origem) de E em F. Verifica-se facilmente que $\Pi_{p;q}(E, F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$.

Teorema 2.1.5 *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. São equivalentes:*

(i) T é $(p;q)$-somante;

(ii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.2}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in E$ e n natural;

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

para qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

Demonstração: Tome $m = 1$ na Proposição 1.5.1. ■

O ínfimo dos C que verificam a desigualdade (2.2) define uma norma em $\Pi_{p;q}(E;F)$ denotada por $\pi_{p;q}(\cdot)$ e além disso vale

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq \pi_{p;q}(T).$$

Para maiores detalhes veja [5] e [51].

2.1.2 Zeros de Polinômios

O estudo dos zeros de um polinômio complexo tem uma longa história, tendo esta teoria resultados que abrangem áreas da matemática tais como Análise Complexa, Geometria Algébrica e Análise Funcional.

O teorema e o lema que seguem são de autoria de Anatolij Plichko e Andriy Zagorodnyuk e estão presentes em [49].

Teorema 2.1.6 *Seja X um espaço vetorial complexo de dimensão infinita e sejam $n \in \mathbb{N}$ e $P\colon X \to \mathbb{C}$ um polinômio n-homogêneo. Então existe um subespaço X_0 de dimensão infinita tal que*

$$X_0 \subset \ker P.$$

Lema 2.1.7 *Suponha que o* Teorema 2.1.6 *seja válido para todo polinômio m-homogêneo com $m \leq n$. Então, para quaisquer $P_1, \ldots, P_k$ m-homogêneos, com $m \leq n$, existe um subespaço X_0 de dimensão infinita tal que*

$$X_0 \subset \ker P_1 \cap \cdots \cap \ker P_k.$$

Demonstração: Seja $X_1 \subset \ker P_1$ um subespaço de dimensão infinita. Então, considerando a restrição de P_2 a X_1 (denotando por $P_{2,1}$), existe um subespaço de dimensão infinita X_2 tal que

$$X_2 \subset \ker P_{2,1} = X_1 \cap \ker P_2.$$

Continuando este processo, obtemos o subespaço X_0 de modo que

$$X_0 = X_m \subset X_{m-1} \subset \cdots \subset X_1, \qquad X_0 \subset \ker P_1 \cap \cdots \cap \ker P_k$$

e $\dim X_0 = \infty$. ∎

Demonstração do Teorema 2.1.6: Iremos construir X_0 utilizando indução matemática. O teorema é claramente válido para funcionais lineares, pois como o funcional está definido em um espaço de dimensão infinita, então seu núcleo também possui dimensão infinita. Suponha, agora, a validade do teorema para todo polinômio m-homogêneo tal que $m < n$. Seja $x_1 \in X$ tal que $P(x_1) \neq 0$ (se tal x_1 não existir a proposição é automaticamente verdadeira). Pela hipótese de indução e pelo Lema 2.1.7 existe um subespaço $X_1 \subset X$ de dimensão infinita no qual todos os polinômios homogêneos

$$P_{x_1}(x) := \check{P}(x_1, x, \ldots, x),$$
$$P_{x_1^2}(x) := \check{P}(x_1, x_1, x, \ldots, x), \ldots, P_{x_1^{n-1}}(x) := \check{P}(x_1, \ldots, x_1, x)$$

se anulam, onde $\check{P}$ é a multilinear simétrica associada a P. Escolhamos agora $x_2 \in X_1$ de modo que $P(x_2) \neq 0$ (se tal elemento não existir, então $X_1 \subset \ker P$ e o teorema está demonstrado). Da hipótese de indução e do Lema 2.1.7 existe um subespaço de dimensão infinita $X_2 \subset X_1$ onde os polinômios

$$P_{x_1^{k_1},x_2^{k_2}}(x) := \check{P}\left(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x, \ldots, x\right), \qquad 0 \leq k_1, k_2 < n \text{ e } 0 < k_1 + k_2 < n$$

se anulam. Escolhamos agora $x_3 \in X_2$ de modo que $P(x_3) \neq 0$ (se tal elemento não existir, segue que $X_2 \subset \ker P$ e o teorema está demonstrado). Assim como antes, existe um subespaço de dimensão infinita $X_3 \subset X_2$ no qual os polinômios

$$P_{x_1^{k_1},x_2^{k_2},x_3^{k_3}}(x) := \check{P}\left(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, x_3^{k_3}, x, \ldots, x\right), \qquad 0 \leq k_1, k_2, k_3 < n \text{ e } 0 < k_1 + k_2 + k_3 < n$$

se anulam. Continuando com este processo, se ao final do i-ésimo passo tivermos $P(x_i) \equiv 0$, o teorema está provado. Caso contrário, se o processo não terminar, teremos então uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos com $P(x_j) \neq 0$ para todo j. O conjunto $\{x_1, \ldots, x_m, \ldots\}$, assim obtido, é um conjunto LI de vetores. Com efeito, seja $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$, com $n_1 < \cdots < n_k$, um subconjunto finito de $\{x_1, \ldots, x_m, \ldots\}$. Suponha que $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$ seja um conjunto LD de vetores e considere a combinação linear abaixo

$$\alpha_1 x_{n_1} + \cdots + \alpha_k x_{n_k} = 0,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots k.$$

Temos então que nem todos os coeficientes α_j, $j = 1, \ldots, k$, se anulam. Seja $\{\alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_r}\}$, o conjunto formado por todos os coeficientes da combinação acima que são não-nulos, organizado pela ordem em que aparecem. Assim,

$$\alpha_{m_1} x_{n_{m_1}} + \cdots + \alpha_{m_r} x_{n_{m_r}} = 0$$

e, consequentemente,

$$\alpha_{m_1} x_{n_{m_1}} = -\alpha_{m_2} x_{n_{m_2}} - \cdots - \alpha_{m_r} x_{n_{m_r}}.$$

Mas, $-\alpha_{m_2} x_{n_{m_2}} - \cdots - \alpha_{m_r} x_{n_{m_r}} \in X_{n_{m_2}-1}$ e perceba que, se $k_1 \leq k_2$ então $X_{k_2} \subset X_{k_1}$ e $x_{k_1} \notin X_{k_1}$ e, consequentemente, $x_{k_1} \notin X_{k_2}$, pois se $x \in X_{k_1}$ então $\check{P}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_1}, x) = 0$. Deste modo, concluímos que $\alpha_{m_1} x_{n_{m_1}} \in X_{n_{m_2}-1}$, o que é um absurdo. Logo, o conjunto $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$ é LI. Temos ainda que se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_j\}$ é um conjunto finito de escalares, então

$$\begin{aligned}
&P\left(\alpha_1 x_1 + (\alpha_2 x_2 \cdots + \alpha_j x_j)\right) \\
&= P(\alpha_1 x_1) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \check{P}\left((\alpha_1 x_1)^{n-k}, (\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j)^k\right) \\
&= P(\alpha_1 x_1) + P(\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \check{P}\left((\alpha_1 x_1)^{n-k}, (\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j)^k\right) \\
&= P(\alpha_1 x_1) + P(\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_1^n P_{x_1^{n-k}}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_j}{\alpha_{1\,j}} x_j\right).
\end{aligned}$$

Como cada $P_{x^{n-k}}$, $k = 1, \ldots, n-1$, se anula em X_1 e $\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j$, segue que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_1^n P_{x_1^{n-k}} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_j}{\alpha_{1\,j}} x_j \right) = 0.$$

Logo,

$$P\left(\alpha_1 x_1 + (\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j)\right) = P\left(\alpha_1 x_1\right) + P\left(\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_j x_j\right).$$

Procedendo desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned} P\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{j x_j}\right) &= P\left(\alpha_1 x_1\right) + \cdots + P\left(\alpha_j x_j\right) \\ &= \alpha_1^n P\left(x_1\right) + \cdots + \alpha_{j^n} P\left(x_j\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Faça

$$y_j = \frac{x_j}{\sqrt[n]{P\left(x_j\right)}},$$

para todo j. Então P se anula no espaço gerado pelos vetores

$$y_1 + \sqrt[n]{-1} y_2,\ y_3 + \sqrt[n]{-1} y_4,\ y_5 + \sqrt[n]{-1} y_6, \ldots,$$

onde $\sqrt[n]{-1}$ é uma raíz n-ésima fixada. De fato, se $\{n_1 < \cdots < n_k\}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, então por (2.3)

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(y_{n_j} + \sqrt[n]{-1} y_{n_j+1}\right)\right) &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n P\left(y_{n_j} + \sqrt[n]{-1} y_{n_j+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n \left[P\left(y_{n_j}\right) + \left(\sqrt[n]{-1}\right)^n P\left(y_{n_j+1}\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n \left[P\left(y_{n_j}\right) - P\left(y_{n_j+1}\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n \left[P\left(\frac{x_{n_j}}{\sqrt[n]{P\left(x_{n_j}\right)}}\right) - P\left(\frac{x_{n_j+1}}{\sqrt[n]{P\left(x_{n_j+1}\right)}}\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^n \left[\frac{P\left(x_{n_j}\right)}{P\left(x_{n_j}\right)} - \frac{P\left(x_{n_j+1}\right)}{P\left(x_{n_j+1}\right)}\right] = 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Definição 2.1.8 *Dizemos que um polinômio n-homogêneo $P\colon E \to \mathbb{R}$ é **positivo definido** se $P(x) > 0$, para todo $x \neq 0$.*

O teorema abaixo é de autoria de R. M. Aron, C. Boyd, R. A. Ryan e I. Zalduendo e pode ser encontrado em [1].

Teorema 2.1.9 *Seja E um espaço de Banach real de dimensão infinita que não admite um polinômio 2-homogêneo positivo definido. Então, para todo $P \in \mathcal{P}(^2E)$ existe um subespaço E de dimensão infinita sobre o qual P é identicamente nulo.*

Demonstração: Sejam E um espaço de Banach real que não admite um polinômio 2-homogêneo positivo definido e $P \in \mathcal{P}(^2E)$. Seja

$$\mathcal{S} = \{U;\, U \text{ é subespaço de } E \text{ e } P|_S \equiv 0\}.$$

Observe que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pois $\{0\} \in \mathcal{S}$. Defina em $\mathcal{S}$ a relação de ordem parcial dada pela inclusão, isto é,

$$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2.$$

Temos assim que, todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{S}$ possui uma cota superior. Com efeito, se $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ é totalmente ordenado, então defina $H_{\mathcal{I}}$ como sendo

$$H_{\mathcal{I}} := \bigcup_{U \in \mathcal{I}} U.$$

Note que $H_{\mathcal{I}}$ é realmente um subespaço de E, pois se $x, y \in H_{\mathcal{I}}$, então existem U_1 e U_2 em $\mathcal{I}$ tais que $x \in U_1$ e $y \in U_2$. Como $\mathcal{I}$ é totalmente ordenado segue que ou $U_1 \subseteq U_2$ ou $U_2 \subseteq U_1$, donde

$$x + \lambda y \in U_1 \subset H_{\mathcal{I}} \qquad \text{ou} \qquad x + \lambda y \in U_2 \subset H_{\mathcal{I}},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $H_{\mathcal{I}}$ é, portanto, subespaço de E. Utilizando agora o Lema de Zorn concluímos que $\mathcal{S}$ possui um elemento maximal que será denotado por U. Suponha que U tenha dimensão finita e seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para U. Seja também

$$V := \bigcap_{x \in U} \ker P_x = \bigcap_{i=1}^{n} \ker P_{v_i},$$

onde $P_x \colon E \to \mathbb{R}$ é o funcional linear que leva $y \in E$ em $\check{P}(x, y)$. Para ver que

$$\bigcap_{x \in U} \ker P_x = \bigcap_{i=1}^{n} \ker P_{v_i}$$

basta notar que, como $v_1, \ldots, v_n \in U$, então

$$\bigcap_{x \in U} \ker P_x \subset \bigcap_{i=1}^{n} \ker P_{v_i}$$

e, por outro lado, se $y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker P_{v_i}$ e $x \in U$, então

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

e assim,

$$\begin{aligned} P_x(y) &= \check{P}(x,y) = \check{P}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, y) \\ &= \lambda_1 \check{P}(v_1, y) + \cdots + \lambda_n \check{P}(v_n, y) = 0. \end{aligned}$$

Deste modo, $y \in \ker P_x$, para todo $x \in U$ e, portanto,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker P_{v_i} \subset \bigcap_{x \in S} \ker P_x$$

e a igualdade segue. Observemos que $U \subset V$. De fato, tome $y \in U$. Então, para todo $s \in U$, $s + y$ também está em U. Uma vez que

$$0 = P(s+y) = P(s) + 2P_s(y) + P(y) = 2P_s(y),$$

para todo $s \in U$, obtemos que $y \in T$. Tendo U dimensão finita, podemos então escrever

$$V = U \oplus Y,$$

para algum subespaço Y de V. Note que todos os zeros de $P|_V$ estão em U. De fato, se $a \in V$, temos que $a = s + y$ onde $s \in U$ e $y \in Y$. Uma vez que $y \in V$, temos (da definição de V) que $y \in \ker P_x$ para todo $x \in U$ e, portanto, em particular, $y \in \ker P_s$. Deste modo, se $P(a) = 0$, temos

$$0 = P(a) = P(s+y) = P(s) + 2P_s(y) + P(y) = P(y).$$

Se $y \neq 0$, uma vez que $y \notin U$, tomando W como o espaço gerado por $v_1, \ldots, v_n, y$, temos que $P|_V$ é identicamente nula e, além disso, $U \subset W$, fato que contradiz a maximalidade de U. Logo, devemos ter $y = 0$ e $a = s \in S$. Suponha agora que existam $y_1, y_2 \in Y$ tais que $P(y_1) < 0$ e $P(y_2) > 0$. Então y_1 e y_2 são LI, pois se fossem LD, teríamos $y_2 = \lambda y_1$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$P(y_2) = P(\lambda y_1) = \lambda^2 P(y_1) < 0,$$

o que seria um absurdo. Considere agora o segmento $[y_1, y_2] \subset Y$, isto é, o conjunto dos pontos $(1-\alpha) y_1 + \alpha y_2$, onde $\alpha \in [0,1]$. Uma vez que a restrição de P a $[y_1, y_2]$ é contínua (pois é uma restrição de uma aplicação contínua), $[y_1, y_2]$ é conexo e $P(y_1) < 0$ e $P(y_2) > 0$, segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$P((1-\theta) y_1 + \theta y_2) = 0.$$

Do que já foi mostrado acima, segue que

$$(1-\theta) y_1 + \theta y_2 = 0,$$

o que é um absurdo, pois y_1 e y_2 são LI e tanto $1-\theta$ quanto θ são diferentes de zero. Logo, devemos ter $P(y) < 0$, para todo $y \neq 0$ em Y ou $P(y) > 0$, para todo $y \neq 0$

em Y. Assim ou $P|_V$ é positivo definido sobre Y ou $-P|_V$ que o é. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $P|_V$ seja positivo definido sobre Y. Uma vez que U tem dimensão finita, podemos encontrar funcionais $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon E \to \mathbb{R}$ tais que $P + \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2$ é positivo definido sobre V. Para isto, tome $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de U e β uma base de V que contém $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e faça

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \beta - \{v_1, \ldots, v_n\} \\ \dfrac{j}{k} & \text{se } x = v_k, \text{ para algum } k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

A função

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{v_i}| : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |P_{v_i}(x)|$$

é claramente contínua e, sendo V imagem inversa de zero por esta função, segue que V é fechado em E e portanto, é um espaço de Banach. Seja π_V a projeção contínua de E sobre V. Então

$$\left(P + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2\right) \circ \pi_T + \sum_{i=1}^{n} P_{v_i}^2$$

é um polinômio positivo definido sobre E, contradizendo o fato de que E não admite tal polinômio. Logo, U tem dimensão infinita. ■

2.1.3 Derivadas

Seja $P : E \to F$ um polinômio m-homogêneo contínuo. A **derivada** de P é a aplicação $(m-1)$-linear simétrica associada a $\hat{d}P$ dado por

$$\hat{d}P : E \to \mathcal{L}(E; F)$$
$$\hat{d}P(a)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{P(a + tv) - P(a)}{t}.$$

Note que é fácil ver que $\hat{d}P\ (a)$ realmente é linear contínua e que $\hat{d}P$ é um polinômio $(m-1)$-homogêneo. De fato,

$$\begin{aligned} \hat{d}P(a)(v) &= \lim_{t \to 0} \frac{P(a + tv) - P(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\check{P}(a + tv)^m - \check{P}a^m}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\check{P}a^m + \binom{m}{1}\check{P}(a^{m-1}, tv) + \cdots + \binom{m}{m-1}\check{P}\left(a, (tv)^{m-1}\right) + \check{P}v^m - Pa^m}{t} = \\ &= \binom{m}{1}\check{P}\left(a^{m-1}, v\right) = \frac{(m)!}{(m-1)!}\check{P}\left(v, a^{m-1}\right). \end{aligned}$$

A continuidade segue do fato de que P é contínuo se, e somente se $\check{P}$ o é.

A derivada de P é denotada por dP. Então

$$\begin{aligned} dP : E \times \overset{(m-1)}{\cdots} \times E &\to \mathcal{L}(E;F) \\ dP(a^{m-1})(v) &= \hat{d}P(a)(v). \end{aligned}$$

A **segunda derivada** de P é a derivada de $\hat{d}P$, denotada por d^2P. Como $\hat{d}P$ é um polinômio $(m-1)$-homogêneo, o raciocínio anterior garante que d^2P é $(m-2)$-linear. O polinômio associado a d^2P é denotado por $\hat{d}^2P$. Note que

$$\begin{aligned} \hat{d}^2P : E &\to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)) = \mathcal{L}(^2E;F) \\ \hat{d}^2P(a)(v)(w) &= d(\widehat{d}P)(a^{m-2})(v)(w) \end{aligned}$$

Note que estamos usando a identificação

$$\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)) = \mathcal{L}(^2E;F).$$

Analogamente, a **terceira derivada** de P é a aplicação $d(\hat{d}^2P)$, denotada por d^3P. Como $\hat{d}^2P$ é um polinômio $(m-2)$-homogêneo, segue que d^3P é $(m-3)$-linear. O seu polinômio 3-homogêneo associado é denotado por $\hat{d}^3P$. Temos

$$\begin{aligned} \hat{d}^3P : E &\to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))) = \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(^2E;F)) = \mathcal{L}(^3E;F) \\ \hat{d}^3P(a)(v)(w)(z) &= d(\hat{d}^2P)(a^{m-3})(v)(w)(z) \end{aligned}$$

e assim por diante.

Teorema 2.1.10 *Sejam E e F espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então a derivada de ordem $k = 1, \ldots, m$ de P em $a \in E$ aplicada em $v \in E$ é dada por*

$$\hat{d}^kP(a)(v) = \frac{m!}{(m-k)!}\check{P}\left(a^{m-k}, v^k\right),$$

onde $\check{P}$ é a aplicação m-linear simétrica associada a P

Demonstração: O caso $k = 1$ já foi feito. Para $k = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\hat{d}^2 P(a)(v) &= \left[d(\hat{d}P)(a^{m-2})(v)\right](v) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\hat{d}P\,(a+tv) - \hat{d}P\,(a)}{t}\right)(v) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\hat{d}P\,(a+tv)\,(v) - \hat{d}P\,(a)\,(v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{m\check{P}\,(v,(a+tv)^{m-1}) - m\check{P}\,(v,a^{m-1})}{t} \\
&= m \lim_{t\to 0} \frac{\check{P}\,(v,(a+tv)^{m-1}) - \check{P}\,(v,a^{m-1})}{t} \\
&= m \lim_{t\to 0} \frac{\check{P}\,(v,a^{m-1}) + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} \check{P}\left(v, a^{m-1-k}, (tv)^k\right) - \check{P}\,(v,a^{m-1})}{t} \\
&= \frac{m(m-1)}{(m-2)!} \check{P}(v^2, a^{m-2}) \\
&= \frac{m!}{(m-2)!} \check{P}\left(a^{m-2}, v^2\right).
\end{aligned}$$

Continuando com este processo, obtemos resultado desejado. ■

2.2 Conjuntos Somantes

Esta seção foi baseada no artigo *Lineability of summing sets of homogeneous polynomials* de autoria de Geraldo Botelho, Mário Matos e Daniel Pellegrino. Aqui, introduziremos o conceito de conjunto somante de uma aplicação bem como o conceito de lineabilidade. Estabeleceremos ainda alguns resultados que caracterizam o conjunto somante de polinômios homogêneos em termos da lineabilidade. O conceito de lineabilidade teve seu surgimento nos trabalhos de Guraryi e Aron (veja [2, 30] e suas referências).

Definição 2.2.1 *O **conjunto** $(p;q)$**-somante** de uma aplicação f é dado por*

$$S_{p;q}\,(f) := \{a \in E;\ f \text{ é } (p;q)\text{-somante em } a\}\,.$$

Se $p = q$, escrevemos simplesmente $S_p\,(f)$.

Definição 2.2.2 *Um subconjunto A de um espaço vetorial topológico E é denominado:*

- *n-lineável, se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de E de dimensão n;*
- *Lineável, se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de E de dimensão infinita.*
- *Espaçável, se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de E fechado e de dimensão infinita.*

Definição 2.2.3 *Um espaço de Banach E tem a* ***propriedade de Orlicz*** *se o operador identidade, sobre E, é $(2;1)$-somante.*

Exemplo 2.2.4 *Os espaços ℓ_p e L_p com $1 \leq p \leq 2$ tem essa propriedade. Para maiores detalhes, consulte* [23].

Proposição 2.2.5 *Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $n \geq 2$. Se P é $(p;q)$-somante em $a \in E$, então P é $(p;q)$-somante em λa, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Demonstração: Ver Observação 2.1.3. ■

Segue diretamente da proposição acima o seguinte

Corolário 2.2.6 *Se $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $n \geq 2$, então ocorre uma das possibilidades:*

- $S_{p;q}(P) = \emptyset$
- $S_{p;q}(P) = \{0\}$
- $S_{p;q}(P)$ *é 1-lineável*

Proposição 2.2.7 *Sejam $n \geq 2$, E um espaço de Banach com a propriedade de Orlicz, F um espaço de Banach arbitrário e $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$. Então $0 \in S_1(P)$.*

Demonstração: Sejam $x_1, \ldots, x_k \in E$. Deste modo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \|P(x_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|P\| \|x_j\|^n \\
&= \|P\| \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^n \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n \\
&\leq \|P\| \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^n \\
&\leq \|P\| \pi_{1;1}(id_E) \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{w,1}^n
\end{aligned}$$

e o resultado está provado. ■

Proposição 2.2.8 *Seja $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ um polinômio de tipo finito, isto é, $P(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x)^n b_j$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$ e $b_1, \ldots, b_k \in F$. Então P é absolutamente $(p;q)$-somante na origem, quaisquer que sejam $1 \leq q \leq p$.*

Demonstração: Sejam $1 \leq p \leq q$ e $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$ de tipo finito. Defina, para $j = 1, \ldots, k$, $\Psi_j : E^n \to F$ dada por

$$\Psi_j(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_j(x_1) \cdots \varphi_j(x_n) b_j.$$

Observa-se facilmente que cada Ψ_j é n-linear. Mostraremos, que as Ψ_j são absolutamente $(p;q)$-somantes na origem, com $1 \leq j \leq k$. Com efeito, sejam $\left(x_\nu^{(m)}\right)_{\nu=1}^{\infty}$, $m = 1, \ldots, n$, sequências em $\ell_q^w(E)$. Deste modo, lembrando que $\ell_q^w(E) \subset \ell_\infty(E)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \Psi_j\left(x_\nu^{(1)}, ..., x_\nu^{(n)}\right) \right\|^p &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \varphi_j\left(x_\nu^{(1)}\right) \cdots \varphi_j\left(x_\nu^{(n)}\right) b_j \right\|^p \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\|b_j\| \, \|\varphi_j\|^{n-1} \left\|x_\nu^{(1)}\right\| \cdots \left\|x_\nu^{(n-1)}\right\| \left|\varphi_j\left(x_\nu^{(n)}\right)\right| \right)^p \\
&\leq C \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(x_\nu^{(n)}\right)\right|^p < \infty,
\end{aligned}$$

pois cada φ_j é sempre $(p;q)$-somante, quando $q \leq p$, e as Ψ_j são absolutamente $(p;q)$-somantes na origem. Agora, seja $(x_\nu)_{v=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_q^w(E)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{\infty} \|P(x_\nu)\|^p &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x_\nu)^n b_j \right\|^p \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(x_\nu, \ldots, x_\nu) \right\|^p \\
&= \left\| \left(\left(\sum_{j=1}^{k} \Psi_j \right)(x_\nu, \ldots, x_\nu) \right)_{\nu=1}^{\infty} \right\|_p^p \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \left\| (\Psi_j(x_\nu, \ldots, x_\nu))_{\nu=1}^{\infty} \right\|_p \right)^p < \infty
\end{aligned}$$

e P é absolutamente $(p;q)$-somante na origem. ■

Corolário 2.2.9 *Se $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é de tipo finito e $1 \leq q \leq p$, então P é absolutamente $(p;q)$-somante em todo ponto de E, isto é, $S_{p;q}(P) = E$.*

Demonstração: Seja $a \in E$. Nessas condições,

$$\begin{aligned}
P(a+x) - P(a) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\varphi_j (a+x)^n - \varphi(a)^n\right) b_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\tbinom{n}{1}\varphi_j(a)^{n-1}\varphi(x) + \cdots + \tbinom{n}{n-1}\varphi_j(a)\varphi(x)^{n-1} + \varphi(x)^n\right) b_j \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{1}\varphi_j(a)^{n-1}\varphi(x)\, b_j}_{\in \mathcal{L}(E;F)} + \cdots + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{n-1}\varphi_j(a)\varphi(x)^{n-1} b_j}_{\in \mathcal{P}(^{n-1}E;F)} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \varphi(x)^n b_j}_{\in \mathcal{P}(^{n}E;F)}
\end{aligned}$$

isto é, $P(a+x) - P(a)$ pode ser escrito como uma soma de polinômios de tipo finito e, portanto, o fato de cada um deles ser absolutamente $(p;q)$-somante na origem garante o resultado. ■

O Teorema de Defant-Voigt afirma que se E é um espaço de Banach e $n \geq 2$, então, para todo $P \in \mathcal{P}(^nE)$ segue que $0 \in S_1(P)$, isto é, P é absolutamente 1-somante na origem. Um raciocínio similar ao utilizado na demonstração do Corolário 2.2.9, mostra que, como consequência do Teorema de Defant-Voigt, segue que se E é um espaço de Banach e $n \geq 2$, então $S_1(P) = E$. Com efeito, sejam $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}(^nE)$. Temos que

$$\begin{aligned}
P(a+x) - P(a) &= \check{P}(a+x)^n - \check{P}a^n \\
&= \binom{n}{1}\check{P}\left(a^{n-1}, x\right) + \cdots + \binom{n}{n-1}\check{P}\left(a, x^{n-1}\right) + \check{P}x^n \\
&= \binom{n}{1}\check{P}_{a^{n-1}}x + \cdots + \binom{n}{n-1}\check{P}_a x^{n-1} + \check{P}x^n \\
&= \underbrace{\hat{d}P(a)(x)}_{\in E'} + \frac{1}{2!}\underbrace{\hat{d}^2P(a)(x)}_{\in \mathcal{P}(^2E)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\underbrace{\hat{d}^{n-1}P(a)(x)}_{\in \mathcal{P}(^{n-1}E)} + \underbrace{P(x)}_{\in \mathcal{P}(^nE)}
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

Definição 2.2.10 *Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é denominado* ***nuclear*** *quando existem uma sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ e sequências limitadas $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos de E' e $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos de F, tais que*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x)^n b_j, \tag{2.4}$$

para todo $x \in E$.

Proposição 2.2.11 *Seja $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ um polinômio nuclear. Então $0 \in S_1(P)$.*

Demonstração: Seja $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x)^n b_j$, com $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$, $\|\varphi_j\| < K$ e $\|b_j\| < M$, para todo j. Dado $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$, temos, para todo j, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_j(x_k)| = \|\varphi_j\| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}(x_k) \right| \leq K \left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{w,1}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \|P(x_k)\| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x_k)^n b_j \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda_j \varphi_j(x_k)^n b_j\| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \, |\varphi_j(x_k)|^n \, \|b_j\| \\
&\leq M \sum_{j=1}^{\infty} \left(|\lambda_j| \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_j(x_k)|^n \right) \\
&\leq M \sum_{j=1}^{\infty} \left[|\lambda_j| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_j(x_k)| \right)^n \right] \\
&\leq M K^n \left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{w,1}^n \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty
\end{aligned}$$

o que comprova que $0 \in S_1(P)$. ■

Observe que foi provado que 0 pertence ao conjunto 1-somante de qualquer polinômio homogêneo nuclear.

Corolário 2.2.12 *Se $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é um polinômio homogêneo nuclear, então $S_1(P) = E$.*

Demonstração: Seja $a \in E$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
P(a+x) - P(a) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(a+x)^n b_j - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(a)^n b_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j \left[\varphi_j(a+x)^n - \varphi_j(a)^n \right] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j \left[\tbinom{n}{1} \varphi_j(a)^{n-1} \varphi_j(x) + \cdots + \tbinom{n}{n-1} \varphi_j(a) \varphi_j(x)^{n-1} + \varphi_j(x) \right] \\
&= \tbinom{n}{1} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\lambda_j \varphi_j(a)^{n-1} \right] b_j \varphi_j(x) + \cdots + \tbinom{n}{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\lambda_j \varphi_j(a) \right] b_j \varphi_j(x)^{n-1} \\
&\quad + \tbinom{n}{1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j \varphi_j(x)^n,
\end{aligned}$$

isto é, $P(a+x) - P(a)$ pode ser escrito como uma soma de polinômios homogêneos nucleares e, portanto, o fato de cada um deles ser absolutamente 1-somante na origem garante o resultado. ■

Exemplo 2.2.13 *Considere o polinômio n-homogêneo ($n \geq 2$)*

$$P : \ell_2 \to \mathbb{K};\ P\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n.$$

Sejam $2 \leq q \leq p$ e $e_j \in \ell_2$ o vetor $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, onde o 1 aparece na j-ésima entrada. Uma vez que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2^w(\ell_2) \subseteq \ell_q^w(\ell_2)$ e $P(e_j) = 1$, para todo j, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |P(e_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty,$$

isto é, não existe para esta sequência $L > 0$ tal que

$$\left\|(P(e_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq L \left\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^m$$

e, portanto, do Teorema 1.5.1 *segue que P não é absolutamente $(p;q)$-somante em 0. Logo, pelo* Corolário 2.2.6, *$S_{p;q}(P) = \emptyset$, sempre que $2 \leq q \leq p$. Em particular, $S_p(P) = \emptyset$, sempre que $p \geq 2$.*

Exemplo 2.2.14 *Considere o polinômio n-homogêneo ($n \geq 2$)*

$$P : c_0 \to c_0;\ P\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\alpha_j^n\right)_{j=1}^{\infty}$$

e seja $1 \leq q \leq p$. Uma vez que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(c_0) \subseteq \ell_q^w(c_0)$ e $\|P(e_j)\| = \|e_j\| = 1$, para todo j, temos que P não é absolutamente $(p;q)$-somante na origem. Logo, pelo Corolário 2.2.6 *segue que $S_{p;q}(P) = \emptyset$. Em particular, $S_p(P) = \emptyset$.*

Teorema 2.2.15 *Sejam $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ e $a \in E$. Então $a \in S_{p;q}(P)$ se, e somente se $0 \in S_{p;q}\left(\hat{d}^k P(a)\right)$ para todo $k = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Suponha que $0 \in S_{p;q}\left(\hat{d}^k P(a)\right)$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Deste modo, dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, segue que $\left(\hat{d}^k P(a)(x_j)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$, para $k = 1, \ldots, n$. Para todo j, temos

$$P(a + x_j) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \check{P}\left(a^{n-k}, x_j^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a)(x_j),$$

e, portanto, uma vez que $\ell_p(F)$ é espaço vetorial, segue que $a \in S_{p;q}(P)$. Reciprocamente, sejam $a \in S_{p;q}(P)$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pela Proposição 2.1.4, sabemos que $\check{P}$ é $(p;q)$-somante em $(a, \ldots, a)$. Deste modo, da Proposição 2.1.2 segue que a aplicação

$$\begin{aligned} \check{P}_{a^{n-k}} &: E^k \to F \\ (x_1, \ldots, x_k) &\mapsto \check{P}_{a^{n-k}}(x_1, \ldots, x_k) = P\left(a^{n-k}, x_1, \ldots, x_k\right) \end{aligned}$$

é $(p;q)$-somante na origem. Utilizando mais uma vez a Proposição 2.1.4 temos que o polinômio gerado por esta aplicação k-linear é $(p;q)$-somante na origem. Mas este polinômio é um múltiplo de $\hat{d}^k P(a)$, o que significa que $\hat{d}^k P(a)$ é $(p;q)$-somante na origem, isto é, $0 \in S_{p;q}\left(\hat{d}^k P(a)\right)$. ■

Proposição 2.2.16 *Seja E um espaço de Banach com a propriedade de Orlicz. Então, $S_{2,1}(P) = E$ para todo n, para todo F e para todo $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$.*

Demonstração: O caso $n = 1$ é trivial. Suponhamos $n \geq 2$. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$. Deste modo, como E tem a propriedade de Orlicz, segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2(E)$. Assim,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\|P\| \|x_j\|^n\right)^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \|P\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2\right)^{\frac{n}{2}} < \infty.$$

Isto mostra que $0 \in S_{2,1}(P)$ para todo polinômio homogêneo P sobre E e, portanto, o Teorema 2.2.15 assegura o resultado, pois dados $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $a \in E$, teremos que $0 \in S_{p;q}\left(\hat{d}P(a)\right)$. ■

Agora, veremos um exemplo de polinômio n-homogêneo, para cada n, que só é absolutamente 1-somante em 0 e, portanto, não é nem ao menos 1-lineável.

Exemplo 2.2.17 *Considere o polinômio 2-homogêneo*

$$\begin{aligned} P\colon L_2([0,1];\mathbb{K}) &\to L_1([0,1];\mathbb{K}) \\ f &\mapsto P(f) = f^2. \end{aligned}$$

Vejamos que $S_1(P) = \{0\}$. Uma vez que $L_2([0,1];\mathbb{K})$ tem a propriedade de Orlicz temos, pela Proposição 2.2.7, *que $0 \in S_1$. Escolha uma sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$ e uma sequência ortonormal $(h_j)_{j=1}^{\infty} \in L_2([0,1];\mathbb{K})$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $|h_j(x)| = 1$ quase sempre (no sentido de Lebesgue) como, por exemplo, as funções de Rademacher que são dadas por*

$$\begin{aligned} r_n\colon [0,1] &\to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \\ t &\mapsto \mathit{sign}\left(\operatorname{sen} 2^n \pi t\right). \end{aligned}$$

Consideremos, agora, a sequência $(\alpha_j h_j)_{j=1}^{\infty}$. Se $g \in L_2([0,1];\mathbb{K})$, então a desigualdade de Bessel nos fornece

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, \alpha_j h_j\rangle| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \, |\langle g, h_j\rangle| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, h_j\rangle|\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\ell_2} \|g\|_{L_2}.$$

Isto mostra que $(\alpha_j h_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(L_2([0,1];\mathbb{K}))$. *Seja agora* $0 \neq f \in L_2([0,1];\mathbb{K})$ *Uma vez que*

$$\hat{d}P(f)(g) = 2\check{P}(f,g) = 2fg,$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\hat{d}P(f)(\alpha_j h_j)\right\|_{L_1} &= 2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 |f(t)|\,|\alpha_j|\,|h_j(t)|\,dt\\ &= 2\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|\int_0^1 |f(t)|\,|h_j(t)|\,dt\\ &= 2\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|\int_0^1 |f(t)|\,dt\\ &= 2\,\|f\|_{L_1}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j| = +\infty,\end{aligned}$$

o que mostra que $\hat{d}P(f)$ *não é* 1*-somante e, de acordo com o* Teorema 2.2.15, *segue que* $f \notin S_1(P)$.

Iremos agora lidar com o caso em que $n \geq 3$. Para cada $x \in [-\pi,\pi]$, consideremos o conjunto

$$J_x := \{t \in [-\pi,\pi]\,;\, x-t \in [-\pi,\pi]\} = \begin{cases} [x-\pi,\pi], & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ [-\pi,x+\pi], & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Sejam $f,g \in L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K})$. A convolução $f*g$ é definida sobre $[-\pi,\pi]$ por

$$f*g(x) = \int_{J_x} f(x-t)\,g(t)\,dt.$$

A **desigualdade de Young para convoluções** afirma que, se $f \in L_1$ e $g \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$, então $f*g(x)$ existe para todo x, $f*g \in L_p$ e $\|f*g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_p}$(para maiores detalhes, consulte [27]). Portanto, no nosso caso, temos $f*g \in L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K})$ e $\|f*g\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_2}$.

Proposição 2.2.18 *Assumindo que todas as integrais em questão existam, nós temos:*

(*i*) $f*g = g*f$

(*ii*) $(f*g)*h = f*(g*h)$

Demonstração: A prova de (*i*) é feita utilizando-se a substituição $s = x-t$:

$$f*g(x) = \int_{J_x} f(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{J_x} f(s)\,g(x-s)\,ds = g*f(x).$$

A prova de (ii) segue de (i) acima e do Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= (g * f) * h(x)\\ &\textstyle\int_{J_x} (g * f)(x - s)\, h(s)\, ds\\ &= \textstyle\int_{Jx}\int_{Jx} f(t)\, g(x - s - t)\, h(s)\, dtds\\ &= \textstyle\int_{Jx}\int_{Jx} f(t)\, g(x - s - t)\, h(s)\, dsdt\\ &= \textstyle\int_{Jx} f(t)\,(g * h)(x - t)\, dt\\ &= (g * h) * f(x)\\ &= f * (g * h)(x)\end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. ∎

Deste modo, de maneira indutiva, podemos definir

$$f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f := f \ast (f \ast \overset{(n-1)}{\cdots} \ast f).$$

Proposição 2.2.19 *Seja $n \geq 2$ e considere o polinômio $(n+1)$-homogêneo*

$$\begin{aligned}P \colon L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K}) &\to L_1([-\pi, \pi]; \mathbb{K})\\ f &\mapsto P(f) = (f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f) \cdot f.\end{aligned}$$

Nestas condições, $S_1(P) = \{0\}$.

Demonstração: Primeiro vejamos que P está bem definida. Se $f \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, pela Desigualdade de Young, segue que $f \ast f \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$. Logo, o mesmo procedimento repetidas vezes nos leva a concluir que $(f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f) \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$. Como $f \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, segue, pela Desigualdade de Hölder, que

$$(f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f) \cdot f \in L_1([-\pi, \pi]; \mathbb{K}).$$

Uma vez que $L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ tem a propriedade de Orlicz, a Proposição 2.2.7 nos garante que $0 \in S_1(P)$. Seja $f \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, com $f \neq 0$. A aplicação multilinear

$$\begin{aligned}T \colon L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})^{n+1} &\to L_1([-\pi, \pi]; \mathbb{K})\\ (f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) &\mapsto T(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) = (f_1 \ast \cdots \ast f_n) \cdot f_{n+1},\end{aligned}$$

claramente, define P. Deste modo, a aplicação multilinear simétrica associada a P é dada por

$$\begin{aligned}\check{P} \colon L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})^{n+1} &\to L_1([-\pi, \pi]; \mathbb{K})\\ (f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} T\left(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)}, f_{\sigma(n+1)}\right),\end{aligned}$$

onde S_{n+1} é o conjunto das permutações de $\{1, \ldots, n, n+1\}$. Assim, para toda $g \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$, temos

$$\begin{aligned}
\hat{d}P(f)(g) &= (n+1)\check{P}(f^n, g) \\
&= \frac{(n+1)}{(n+1)!}\left[n!T(g, f, \ldots, f) + n!T(f, g, f \ldots, f) + \cdots + n!T(f, \ldots, f, g)\right] \\
&= \frac{1}{n!}\left[n!T(f, \ldots, f, g) + n \cdot n!T(f, \ldots, f, g, f)\right] \\
&= T(f, \ldots, f, g) + nT(f, \ldots, f, g, f) \\
&= (f * \overset{(n)}{\cdots} * f) \cdot g + n(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f * g) \cdot f
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Afirmação 1: O operador linear

$$\begin{aligned}
u \colon L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K}) &\to L_1([-\pi, \pi]; \mathbb{K}) \\
g &\mapsto u(g) = (f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f * g) \cdot f
\end{aligned}$$

é 1-somante.

Prova da Afirmação 1: Para $x \in [-\pi, \pi]$, defina $h_x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{K}$ dada por

$$h_x(t) = \begin{cases} \overline{(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f)(x-t)}, & \text{se } t \in J_x \\ 0, & \text{se } t \notin J_x \end{cases}.$$

onde a barra representa a notação usual para o complexo conjugado. Temos que $h_x \in L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ e

$$\begin{aligned}
\|h_x\|_{L_2} &= \left\|(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f) * f\right\|_{L_2} \\
&\leq \left\|f * \overset{(n-2)}{\cdots} * f\right\|_{L_1} \|f\|_{L_2} \\
&= \left\|(f * \overset{(n-3)}{\cdots} * f) * f\right\|_{L_1} \|f\|_{L_2} \\
&\leq \left\|f * \overset{(n-3)}{\cdots} * f\right\|_{L_1} \|f\|_{L_2}^2 \\
&\leq \cdots \leq \|f * f\|_{L_1} \|f\|_{L_2}^{n-3} \\
&\leq \|f\|_{L_1} \|f\|_{L_2}^{n-2} \leq \|f\|_{L_2}^{n-1}
\end{aligned}$$

Interpretando h_x como um funcional linear sobre $L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K})$, para todo $g \in L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K})$, obtemos

$$\begin{aligned}
h_x(g) &= \langle g, h_x \rangle \\
&= \textstyle\int_{J_x} g(t)\overline{h_x(t)}dt \\
&= \textstyle\int_{J_x} g(x)\left(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f\right)(x-t)\,dt \\
&= \left(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f * g\right)(x).
\end{aligned}$$

Concluímos que u é 1-somante observando que, para $g_1,\ldots,g_k \in L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K})$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\|u(g_j)\| &= \sum_{j=1}^{k}\left\|\left(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f * g_j\right)\cdot f\right\|_{L_1} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f * g_j\right)(x)\right||f(x)|\,dx \\
&= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left|\left(f * \overset{(n-1)}{\cdots} * f * g_j\right)(x)\right||f(x)|\right)dx \\
&= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k}|h_x(g_j)|\,|f(x)|\right)dx \\
&= \textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\|h_x\|_{L_2}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{h_x}{\|h_x\|_{L_2}}(g_j)\right||f(x)|\right)dx \\
&\le \|f\|_{L_2}^{n-1}\|f\|_{L_1}\left\|(g_j)_{j=1}^{k}\right\|_{w,1}
\end{aligned}$$

$\square$

Afirmação 2: Se $f \neq 0$, o operador linear

$$\begin{aligned}
v\colon L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K}) &\to L_1([-\pi,\pi];\mathbb{K}) \\
g &\mapsto v(g) = \left(f * \overset{(n)}{\cdots} * f\right)\cdot g
\end{aligned}$$

não é 1-somante.

Prova da Afirmação 2: Seja $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência ortonormal em $L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K})$ tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $|h_j(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$ em quase toda parte. Escolha uma sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$. O argumento utilizado no Exemplo 2.2.17 mostra que

$(\alpha_j h_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w (L_2([-\pi,\pi];\mathbb{K}))$. Assim v não é 1-somante pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|v(\alpha_j h_j)\| &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \left(f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f\right) \cdot \alpha_j h_j \right\|_{L_1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f\right)(x) \right| |\alpha_j| \, |h_j(x)| \, dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |\alpha_j| \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f\right)(x) \right| dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\| \left(f \ast \overset{(n)}{\cdots} \ast f\right) \right\|_{L_1} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = +\infty\end{aligned}$$

□

Das afirmações 1 e 2, juntamente com (2.5) concluímos que $\hat{d}P(f)$ não é 1-somante e, do Teorema 2.2.15, segue que $f \notin S_1(P)$. ■

Teorema 2.2.20 *Sejam E e F espaços de Banach, $P \in \mathcal{P}(^2E;F)$ e $1 \leq q \leq p$. Então, uma das alternativas seguintes ocorre:*

- $S_{p;q}(P) = \emptyset$;
- $S_{p;q}(P) = \left\{ a \in E;\ \hat{d}P(a) \text{ é } (p;q)\text{-somante} \right\}$.

Além disso, se $S_{p;q}(P)$ é não vazio, então $S_{p;q}(P)$ é um subespaço vetorial de E.

Demonstração: Suponha que $S_{p;q}(P)$ seja não vazio. Assim, a Proposição 2.2.5 assegura que P é $(p;q)$-somante na origem e, neste caso, o Teorema 2.2.15 garante que $a \in S_{p.q}(P)$ se, e somente se, $\hat{d}P(a)$ é $(p;q)$-somante, provando assim a primeira afirmação. Temos, portanto, que

$$S_{p;q}(P) = \left(\hat{d}P\right)^{-1} (\Pi_{p,q}(E,F)). \tag{2.6}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \hat{d}P \colon E &\to \mathcal{L}(E;F) \\ a &\mapsto \hat{d}P(a) \end{aligned}$$

é linear. Com efeito, se u, v, w são elementos quaisquer de E e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} \hat{d}P(u+\lambda v)(w) &= 2\check{P}(u+v,w) \\ &= 2\check{P}(u,w) + 2\lambda \check{P}(v,w) \\ &= \hat{d}P(u)(w) + \lambda \hat{d}P(v)(w). \end{aligned}$$

Deste modo, de (2.6), do fato de $\Pi_{p,q}(E,F)$ ser subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$ e do fato de $\hat{d}P$ ser linear obtém-se a segunda afirmação. ■

Corolário 2.2.21 *Se $P \in \mathcal{P}(^2E)$, então ou $S_{p;q}(P) = \emptyset$ ou $S_{p;q}(P) = E$.*

Demonstração: Para qualquer $a \in E$, $\hat{d}P(a)$ é um funcional linear contínuo e, portanto, $(p;q)$-somante. ■

Proposição 2.2.22 *Sejam E um espaço de Banach, $P \in \mathcal{P}(^3E)$ e $1 \leq q \leq p$. Então uma das possibilidades ocorre:*

- *$S_{p;q}(P) = \emptyset$;*
- *$S_{p;q}(P)$ é um subespaço vetorial de E.*

Demonstração: Suponha que $S_{p;q}(P) \neq \emptyset$ e seja $a \in E$. Pela Proposição 2.2.5 sabemos que P é absolutamente $(p;q)$-somante na origem. Por ser um funcional linear, segue que $\hat{d}P(a)$ é absolutamente $(p;q)$-somante. Do Teorema 2.2.15 segue que $a \in S_{p;q}(P)$ se, e somente se, $\hat{d}^2P(a)$ é absolutamente $(p;q)$-somante na origem. Denotamos o espaço de todos os polinômios 2-homogêneos a valores escalares sobre E que são absolutamente $(p;q)$-somantes na origem por $\mathcal{P}_{as(p;q)}(^2E)$. Logo

$$S_{p;q}(P) = \left(\hat{d}^2P\right)^{-1}\left(\mathcal{P}_{as(p;q)}\left(^2E\right)\right)$$

e é, portanto, um subespaço vetorial de E, pois $\hat{d}^2P : E \to \mathcal{P}(^2E)$ é um operador linear. ■

Teorema 2.2.23 *Sejam E e F espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(^nE)$ e $g\colon E \to F$ uma aplicação contínua. Se $S_{p;q}(P) = E$, então $S_{p;q}(P \cdot g) = \ker P \cup S_{p;q}(g)$.*

Demonstração: Dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, temos que $g(x_j) \to g(0)$, pois $x_j \to 0$ e, por hipótese, g é contínua. Segue então que $(g(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada e, portanto, existe $M > 0$ tal que $\|g(x_j)\| \leq M$, para todo j. Primeiramente, mostremos que $S_{p;q}(P \cdot g) \neq \emptyset$. Uma vez que $S_{p;q}(P) = E$ temos que $(P(x_j))_{j=1}^{\infty}$é p-somável e, sendo assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|(P \cdot g)(x_j)\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |P(x_j)|^p \|g(x_j)\|^p \leq M^p \sum_{j=1}^{\infty} |P(x_j)|^p < \infty,$$

o que mostra que $0 \in S_{p;q}(P \cdot g)$. Seja $a \in E$. Para todo j,

$$\begin{aligned}(P \cdot g)(a + x_j) - (P \cdot g)(a) &= P(a + x_j)\, g(a + x_j) - P(a)\, g(a) \\ &= P(a + x_j)\left(g(a + x_j) - g(a)\right) + g(a)\left(P(a + x_j) - P(a)\right).\end{aligned}$$

Sabemos que $(P(a + x_j) - P(a))_{j=1}^{\infty}$ é p-somável, pois $S_{p;q}(P) = E$. Portanto, $a \in S_{p;q}(P \cdot g)$ se, e somente se, $P(a + x_j)(g(a + x_j) - g(a))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente p-somável. Por hipótese, $a \in S_{p;q}(P)$ e, deste modo, o Teorema 2.2.15 garante que $\hat{d}^kP(a)$

é absolutamente $(p;q)$-somante na origem para todo $k = 1, \ldots, n$. Agora, associando isso ao fato de que a sequência $\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, pois $a + x_j \to a$ e g é contínua, segue de

$$\begin{aligned}
P\left(a+x_j\right)\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\check{P}\left(a^{n-k},x_j^k\right)\right)\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right) \\
&= P\left(a\right)\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right) \\
&+ \left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\check{P}\left(a^{n-k},x_j^k\right) \\
&= P\left(a\right)\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right) \\
&+ \left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\hat{d}^kP\left(a\right)\left(x_j\right),
\end{aligned}$$

para todo j, que $a \in S_{pq}\left(P\cdot g\right)$ se, e somente se, $\left(P\left(a\right)\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente p-somável. Assim, se $a \in \ker P$ então $P\left(a\right) = 0$ e $\left(P\left(a\right)\left(g\left(a+x_j\right)-g\left(a\right)\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ é trivialmente absolutamente p-somável e, consequentemente, $\ker P \subseteq S_{p;q}\left(P\cdot g\right)$ e se $a \notin \ker P$, temos que $a \in S_{p;q}\left(P\cdot g\right)$ se, e somente se $a \in S_{p;q}\left(g\right)$ e o resultado segue. ■

Corolário 2.2.24 *Sejam E e F espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}\left({}^nE\right)$ e $g\colon E \to F$ uma aplicação contínua. Então, $S_1\left(P\cdot g\right) = \ker P \cup S_1\left(g\right)$.*

Demonstração: Do comentário acerca do Teorema de Defant-Voigt, sabemos que $S_1\left(P\right) = E$. Assim o Teorema 2.2.23 garante o resultado. ■

Corolário 2.2.25 (i) (Caso Complexo) *Sejam E e F espaços de Banach complexos sendo E de dimensão infinita. Sejam P e g como no* Teorema 2.2.23. *Então $S_1\left(P\cdot g\right)$ é espaçável.*

(ii) (Caso Real) *Sejam E e F espaços de Banach reais sendo E de dimensão infinita. Pelo menos uma das seguintes possibilidades ocorre:*

(a) *Existe $P \in \mathcal{P}\left({}^3E, E\right)$ tal que $S_1\left(P\right) = \{0\}$;*

(b) *Para todo P e g como no* Teorema 2.2.23 *com $n = 2$, $S_1\left(P\cdot g\right)$ é espaçável.*

Demonstração: (i) : Do Teorema 2.2.23 sabemos que $\ker P \subseteq S_1\left(P\right)$ e, do Teorema 2.1.6, sabemos que existe um subespaço G de dimensão infinita, tal que

$$G \subseteq \ker P.$$

Mas $\ker P = P^{-1}\left(0\right)$ e, uma vez que P é contínua e $\{0\}$ é um conjunto fechado, temos que $\ker P$ é fechado e, deste modo,

$$\overline{G} \subseteq \overline{\ker P} = \ker P \subseteq S_1\left(P\cdot g\right).$$

(ii) : Suponha que E admita um polinômio 2-homogêneo positivo $Q \in \mathcal{P}(^2E)$. Definindo $P \in \mathcal{P}(^3E; E)$ por $P(x) = Q(x)x$, temos, pelo Teorema 2.2.23, que $S_1(P) = \ker P = \{0\}$, provando que (ii) ocorre neste caso. Se E não admite um polinômio 2-homogêneo positivo, do Teorema 2.1.6, sabemos que para todo $P \in \mathcal{P}(^2E)$, $\ker P$ contém um subespaço de dimensão infinita de E. Repetindo a prova de (i), observamos que ocorre então (ii). ■

Exemplo 2.2.26 *(O conjunto somante de um polinômio 3-homogêneo pode não ser um subespaço vetorial) Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Fixemos $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$ de modo que $\ker\varphi_1 \nsubseteq \ker\varphi_2$ e $\ker\varphi_2 \nsubseteq \ker\varphi_1$. Para isto, basta apenas tomar $a, b \in E$ vetores linearmente independentes e definir φ_1 e φ_2 em E' de modo $\varphi_1(a) = \varphi_2(b) = 0$ e $\varphi_2(a) = \varphi_1(b) = 1$. Consideremos agora o polinômio $P \in \mathcal{P}(^3E, E)$ dado por*

$$P(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)x.$$

O Teorema de Dvoretzky-Rogers *garante que se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então o operador identidade nunca é absolutamente somante e, deste modo, temos que $S_1(id_E) = \emptyset$. Do* Corolário 2.2.24 *extraímos que*

$$S_1(P) = \ker(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cup S_1(id_E) = \ker(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \ker\varphi_1 \cup \ker\varphi_2.$$

Logo, tanto a quanto b são elementos de $S_1(P)$. Suponha que $(a+b) \in S_1(P)$. Então $(a+b) \in \ker\varphi_1$ ou $(a+b) \in \ker\varphi_2$ o que significa que $b = (a+b) - a \in \ker\varphi_1$ ou $a = (a+b) - b \in \ker\varphi_2$, o que é uma contradição. Deste modo, provamos que $(a+b) \notin S_1(P)$, o qual não é, portanto, subespaço vetorial de E. Note que, no entanto, $S_1(P)$ é espaçável, pois $\ker\varphi_1 \subset S_1(P)$.

Proposição 2.2.27 *Sejam $n \geq 4$ e $2 \leq q \leq p$. Então, existe um polinômio P n-homogêneo a valores escalares tal que $S_{p;q}(P) \neq \emptyset$, mas $S_{p;q}(P)$ não é subespaço vetorial.*

Demonstração: Sejam $n \geq 4$ e $2 \leq q \leq p$. Seja também E um espaço de Banach que admite um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^{n-2}E)$ tal que $S_{p;q}(Q) = \emptyset$. Como exemplo, basta tomar $E = \ell_2$ e $Q : \ell_2 \to \mathbb{K}$ dada por

$$Q\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{n-2}$$

(para maiores detalhes, conferir Exemplo 2.2.13). Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$ tais que $\ker\varphi_1 \nsubseteq \ker\varphi_2$ e $\ker\varphi_2 \nsubseteq \ker\varphi_1$. Defina agora $P \in \mathcal{P}(^nE)$ dado por

$$P(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)Q(x).$$

A Proposição 2.2.8 garante que $S_{p;q}(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = E$ e, portanto, do Teorema 2.2.23 segue que

$$S_{p;q}(P) = \ker(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \cup S_{p;q}(Q) = \ker(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \ker\varphi_1 \cup \ker\varphi_2$$

e, portanto, $S_{p;q}(P)$ não é subespaço vetorial de E. $\blacksquare$

Seja G um subespaço completo de um espaço de Banach E. Então a projeção de E em G é p-somante se, e somente se, G tem dimensão finita. Com efeito, seja $\pi_G\colon E \to G$ a projeção de E em G. Suponha que π_G seja p-somante; deste modo, a restrição de π_G a G é a identidade id_G e, portanto, do Teorema de Dvoretzky-Rogers temos que G tem dimensão infinita. Reciprocamente, se G tem dimensão finita, uma vez que π_G é linear segue que, dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos $(\pi_G(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(G)$.

No entanto, observamos que, se $q < p$, então a projeção de E sobre um subespaço G de dimensão infinita pode ser $(p;q)$-somante, pois se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$ temos que $(\pi_G(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(G) \subset \ell_p(G)$.

O lema abaixo nos ajudará na demonstração da proposição seguinte.

Lema 2.2.28 *Seja $T\colon E \to F$ um operador linear contínuo e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Então $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(F)$.*

Demonstração: De fato, se φ é um funcional linear contínuo definido sobre F, então $\varphi \circ T$ é um funcional linear contínuo definido sobre E e, portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(T(x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi \circ T)(x_j) < \infty.$$

$\blacksquare$

Definição 2.2.29 *Seja E um espaço de Banach. Um operador $P\colon E \to E$, linear e contínuo, é uma **projeção** se $P \circ P = P$.*

Definição 2.2.30 *Um subespaço G de um espaço de Banach E é dito **complementado** se existe uma projeção $P\colon E \to E$ tal que $P(E) = G$.*

Proposição 2.2.31 *Seja G um subespaço complementado de E tal que a projeção de E sobre G é $(p;q)$-somante. Se existe um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ tal que $S_{p;q}(P) = \{0\}$ e $n \geq 2$, então existe um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^nE;F)$ tal que $S_{p;q}(Q) = G$.*

Demonstração: Seja H o complementar topológico de G, isto é, $E = G \oplus H$. Denotaremos por $\pi_H, \pi_G\colon E \to E$ as projeções de E sobre H e G, respectivamente. Defina

$$Q := P \circ \pi_H \in \mathcal{P}(^nE, F).$$

Dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, o Lema 2.2.28 nos garante que $(\pi_H(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Assim, uma vez que $0 \in S_{p;q}(P)$, temos que $(Q(x_j))_{j=1}^{\infty} = (P(\pi_H(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$. Dado $a \in G$, temos que $\pi_H(a) = 0$ e

$$\begin{aligned}(Q(a + x_j) - Q(a))_{j=1}^{\infty} &= (P(\pi_H(a + x_j)) - P(\pi_H(a)))_{j=1}^{\infty} \\ &= (P(\pi_H(x_j)))_{j=1}^{\infty} = (Q(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)\end{aligned}$$

o que mostra que $a \in S_{p;q}(Q)$. Provamos então que $G \subseteq S_{p;q}(Q)$. Consideremos agora $a \notin G$. Neste caso, $\pi_H(a) \neq 0$ o que significa que $\pi_H(a) \notin S_{p;q}(P)$. Logo, existe uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$ tal que

$$P(\pi_H(a) + x_j) - P(\pi_H(a))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(F).$$

Uma vez que

$$P(\pi_H(a) + x_j) - P(\pi_H(a)) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, x_j^k\right),$$

existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\left(\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, x_j^k\right)\right)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(F)$. Como, para todo $x \in E$, temos que $x = \pi_H(x) + \pi_G(x)$, segue que

$$\begin{aligned}
\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, x_j^k\right) &= \check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, (\pi_H(x_j) + \pi_G(x_j))^k\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^{k-i}, \pi_G(x_j)^i\right).
\end{aligned}$$

Logo, $\left(\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^{k-i}, \pi_G(x_j)^i\right)\right)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(F)$, para algum $i \in \{0, \ldots, k\}$. Suponha que tenhamos $i \neq 0$. Por hipótese, π_G é $(p;q)$-somante o que nos dá $\sum_{j=1}^{\infty} \|\pi_G(x_j)\|^p < \infty$. Seja $K > 0$ tal que $\|x_j\| \leq K$, para todo j. Temos então que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^{k-i}, \pi_G(x_j)^i\right)\right\|^p = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^{k-i}, \pi_G(x_j)^{i-1}, \pi_G(x_j)\right)\right\|^p \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\check{P}\right\|^p \|\pi_H(a)\|^{(n-k)p} \|\pi_G(x_j)\|^{(i-1)p} \|\pi_G(x_j)\|^p \|\pi_H(x_j)\|^{(k-i)p} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\check{P}\right\|^p \|\pi_H\|^{(n-i)p} \|a\|^{(n-k)p} \|\pi_G\|^{(i-1)p} \|x_j\|^{(i-1)p} \|\pi_G(x_j)\|^p \|x_j\|^{(k-i)p} \\
&\leq \left\|\check{P}\right\|^p \|\pi_H\|^{(n-i)p} \|a\|^{(n-k)p} \|\pi_G\|^{(i-1)p} K^{(k-1)p} \sum_{j=1}^{\infty} \|\pi_G(x_j)\|^p < \infty
\end{aligned}$$

mostrando assim que $\left(\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^{k-i}, \pi_G(x_j)^i\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$, o que é uma contradição. Segue, portanto, que devemos ter $i = 0$, ou seja,

$$\left(\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^k\right)\right)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_p(F).$$

Mas

$$\check{P}\left(\pi_H(a)^{n-k}, \pi_H(x_j)^k\right) = \check{Q}\left(a^{n-k}, x_j^k\right) = \frac{(n-k)!}{n!} \hat{d}^k Q(a)(x_j)$$

o que mostra que $0 \notin S_{p;q}\left(\hat{d}^k Q(a)\right)$ e, portanto, do Teorema 2.2.15, obtemos que $a \notin S_{p;q}(Q)$. ■

Apêndice A

Aplicações Diferenciáveis em Espaços de Banach

Definição A.0.32 *Sejam E e F espaços de Banach sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e U um aberto em E. Dizemos que uma aplicação $f\colon U \to F$ é **diferenciável** sobre U se, para cada ponto $a \in U$, existe uma aplicação $A \in \mathcal{L}(E;F)$, satisfazendo*

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0. \tag{A.1}$$

Uma aplicação diferenciável no sentido acima é também denominada de aplicação **Fréchet diferenciável**.

Observação A.0.33 *Seja U um subconjunto aberto de E. Então:*

(i) Toda aplicação diferenciável $f\colon U \to F$ é contínua. Com efeito

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| &\le \lim_{x\to a}\|x-a\|\left[\frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|}+\frac{\|A(x-a)\|}{\|x-a\|}\right]\\ &\le \lim_{x\to a}\|x-a\|\left[\frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|}+\|A\|\right]=0.\end{aligned}$$

*(ii) A aplicação A que aparece na definição acima é determinada unicamente por f e a. É denominada a **diferencial** de f em a sendo denotada por $Df(a)$. Portanto, uma aplicação diferenciável $f\colon U \to F$ induz uma aplicação*

$$Df\colon U \to \mathcal{L}(E;F). \tag{A.2}$$

(iii) Se E e F são espaços de Banach, então existe uma distinção entre a diferenciabilidade complexa de $f\colon U \subset E \to F$ e a diferenciabilidade real de $f\colon U \subset E_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$. Obviamente, a diferenciabilidade complexa implica na diferencibilidade real, mas a recíproca não é verdadeira. Com efeito, a função

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \bar{z}$ é $\mathbb{R}$-diferenciável, mas não é $\mathbb{C}$-diferenciável, pois, sobre $\mathbb{R}$, a aplicação f é linear e, sobre $\mathbb{C}$, não. Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\overline{a+tv} - \overline{a}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\overline{a} + \overline{tv} - \overline{a}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\overline{t}}{t}\overline{v} \\
&= \overline{v} \lim_{t\to 0} \frac{\overline{t}}{t} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

e este limite não existe para qualquer $a, v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$ e, como veremos adiante, a existência desse limite era necessária para que f fosse $\mathbb{C}$-diferenciável. Para ver que este limite não existe, basta tomar os caminhos $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ dados por $\gamma_1(\lambda) = \lambda$ e $\gamma_2(\lambda) = i\lambda$ e ver que

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\overline{\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \ \ e \ \ \lim_{\lambda\to 0} \frac{\overline{i\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{-i\lambda}{\lambda} = -i$$

pois, como se sabe, para que o limite em (A.3) *existisse, seria necessário que os limites acima fossem iguais.*

Exemplo A.0.34 *Se $f\colon E \to F$ é uma aplicação constante, então f é diferenciável e $Df(a) = 0$ para todo $a \in E$. Se $A \in \mathcal{L}(E; F)$, então A é diferenciável e $DA(a) = A$, para todo $a \in E$.*

Teorema A.0.35 (Regra da Cadeia) *Sejam E, F e G espaços de Banach sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Sejam $U \subset E$ e $V \subset F$ conjuntos abertos e sejam $f\colon U \to F$ e $g\colon V \to G$ duas aplicações diferenciáveis de modo que $f(U) \subset V$. Então, a composição $g \circ f\colon U \to G$ é também uma aplicação diferenciável e*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a), \qquad \text{(A.4)}$$

para todo $a \in U$.

Demonstração: Tome $a \in U$ e faça $b = f(a) \in V$. Faça $A = Df(a) \in \mathcal{L}(E; F)$ e $B = Dg(b) \in \mathcal{L}(F; G)$. Deste modo, para todo $x \in U$ e $y \in V$, podemos escrever

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x - a) \qquad \text{(A.5)}$$

e

$$\psi(y) = g(y) - g(b) - B(y - b), \qquad \text{(A.6)}$$

onde

$$\lim_{x\to a} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x - a\|} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to b} \frac{\|\psi(y)\|}{\|y - b\|} = 0. \qquad \text{(A.7)}$$

Daí,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + B(f(x) - f(a)) + \psi(f(x)) \\ &= g(f(a)) + B[A(x-a) + \varphi(x)] + \psi(f(x)) \\ &= g(f(a)) + (B \circ A)(x-a) + \rho(x), \end{aligned}$$

onde $\rho(x) = B(\varphi(x)) + \psi(f(x))$. Assim,

$$\frac{\|\rho(x)\|}{\|x-a\|} \leq \|B\| \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x-a\|} + \frac{\|\psi(x)\|}{\|f(x) - f(a)\|} \cdot \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x-a\|}$$

e, uma vez que

$$\frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x-a\|} = \frac{\|A(x-a) + \varphi(x)\|}{\|x-a\|} \leq \|A\| + \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x-a\|},$$

temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|\rho(x)\|}{\|x-a\|} = 0, \tag{A.8}$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema A.0.36 (Desigualdade do Valor Médio) *Seja U um subconjunto aberto de E e seja $f\colon U \to F$ diferenciável. Se o segmento $[a, a+v]$ está totalmente contido em U, então*

$$\|f(a+v) - f(a)\| \leq \|v\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|Df(a + \lambda v)\|. \tag{A.9}$$

Demonstração: Tendo em vista a Observação A.0.33-(*iii*) podemos, sem perda de generalidade, assumir que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pois aqui estamos nos restringindo ao segmento $[a, a+v]$ e λ é real. Então, para cada $\psi \in F'$, consideremos a função $g_\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g_\psi(\lambda) = \psi \circ f(a + \lambda v)$. Então g_ψ é contínua sobre $[0,1]$, diferenciável sobre $(0,1)$, sendo

$$\begin{aligned} g'_\psi(\lambda) &= D[\psi \circ f \circ (a + \lambda v)] \\ &= D\psi(f(a + \lambda)) \circ D[f \circ (a + \lambda v)] \\ &= \psi[Df(a + \lambda v) \circ D(a + \lambda v)] \\ &= \psi[Df(a + \lambda v)(v)], \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in (0,1)$. Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, temos

$$|g_\psi(1) - g_\psi(0)| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \left|g'_\psi(\lambda)\right|,$$

isto é,

$$|\psi(f(a+v) - f(a))| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|\psi[Df(a + \lambda v)](v)\|,$$

para todo $\psi \in F'$. Deste modo, utilizando o Teorema de Hahn-Banach, temos

$$\begin{aligned}
\|f(a+t)-f(a)\| &= \sup_{\|\psi\|\leq 1} |\psi(f(a+v)-f(a))| \\
&\leq \sup_{\|\psi\|\leq 1}\left(\sup_{0\leq\lambda\leq 1}\|\psi[Df(a+\lambda v)](v)\|\right) \\
&= \sup_{0\leq\lambda\leq 1}\left(\sup_{\|\psi\|\leq 1}\|\psi[Df(a+\lambda v)](v)\|\right) \\
&= \sup_{0\leq\lambda\leq 1}\|Df(a+\lambda v)(v)\| \\
&\leq \|v\| \sup_{0\leq\lambda\leq 1}\|Df(a+\lambda v)\|
\end{aligned}$$

e o resultado desejado é obtido. ■

Corolário A.0.37 *Seja U um subconjunto aberto de E e seja $f\colon U\to F$ uma aplicação diferenciável. Se o segmento $[a,a+t]$ está totalmente contido em U, então*

$$\|f(a+t)-f(a)-Df(a)(t)\| \leq \|t\| \sup_{0\leq\lambda\leq 1}\|Df(a+\lambda t)-Df(a)\|. \tag{A.10}$$

Demonstração: Seja $g\colon U\to F$ a aplicação dada por

$$g(x) = f(x) - Df(a)(x-a).$$

Logo, pelo Teorema A.0.36

$$\|g(a+t)-g(a)\| \leq \|t\| \sup_{0\leq\lambda\leq 1}\|Dg(a+\lambda t)\|,$$

ou seja,

$$\|f(a+v)-f(a)-Df(a)(v)\| \leq \|v\| \sup_{0\leq\lambda\leq 1}\|Df(a+\lambda v)-Df(a)\|.$$

■

Definição A.0.38 *Seja U um subconjunto aberto de E. Dizemos que a aplicação $f\colon U\to F$ é* ***continuamente diferenciável*** *ou que é de* ***classe*** *C^1 se f é diferenciável e a aplicação $Df\colon U\to\mathcal{L}(E;F)$ é contínua.*

Definição A.0.39 *Seja $f\colon U\subset E_{\mathbb{R}}\to F_{\mathbb{R}}$ e seja $a\in U$. Dizemos que f possui uma* ***derivada na direção de*** *$v\in E$* ***em*** *a se o limite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \tag{A.11}$$

existe. A este elemento de F, damos o nome de ***derivada direcional de*** *f* ***em*** *a* ***na direção de*** *v e denotamos por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a). \tag{A.12}$$

Se f é uma aplicação tal que todas as suas derivadas direcionais existem, dizemos que f é ***Gâteaux diferenciável****.*

Proposição A.0.40 *Se $f\colon U \subset E_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ é diferenciável em $a \in U$, então a derivada direcional de f em a na direção de v existe, para todo $v \in E$ e é dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v). \tag{A.13}$$

Demonstração: Seja $\alpha\colon (-\lambda, \lambda) \to U$ o caminho diferenciável dado por $\alpha(t) = a + tv$. Seja ainda $g : (-\lambda, \lambda) \to F$ a aplicação dada por $g(t) = (f \circ \alpha)(t)$. Deste modo, fazendo uso da Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \frac{dg}{dt}(0) = Df(\alpha(0))(\alpha'(0)) = Df(a)(v), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Definição A.0.41 *Seja U um subconjunto aberto de E. A aplicação $f\colon U \to F$ é dita* ***duas vezes diferenciável*** *se f é diferenciável e a diferencial $Df\colon U \to \mathcal{L}(E; F)$ é também diferenciável.*

Se U é um subconjunto aberto de E e $f\colon U \to F$ é uma aplicação duas vezes diferenciável, então a diferencial da aplicação Df em um ponto $a \in U$ é chamada a diferencial de segunda ordem e será denotada por $D^2 f$. Deste modo, $D^2 f(a)$ pode ser encarada como um elemento de $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ que pode ser identificado com $\mathcal{L}(^2E; F)$. Se a aplicação induzida $D^2 f\colon U \to \mathcal{L}(^2E; F)$ é contínua, então f é dita **duas vezes continuamente diferenciável** ou de **classe** C^2.

Definição A.0.42 *Seja U um subconjunto aberto de E. Por indução sobre k, dizemos que $f\colon U \to F$ é k* ***vezes diferenciável*** *se f é $k-1$ vezes diferenciável e a diferencial de ordem $k-1$ $D^{k-1}f : U \to \mathcal{L}\left(^{k-1}E; F\right)$ é diferenciável. Se $D^k f$ é contínua então, dizemos ainda que f é k* ***vezes continuamente diferenciável*** *ou de* ***classe*** *C^k. Uma aplicação f é dita i**nfinitamente diferenciável** ou de **classe** C^∞, quando é k vezes diferenciável qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.*

Observe que nesta definição fizemos uso da identificação $\mathcal{L}\left(E; \mathcal{L}\left(^{k-1}E; F\right)\right) \simeq \mathcal{L}\left(^kE; F\right)$.

Referências Bibliográficas

[1] R.M. Aron, C. Boyd, R.A. Ryan e I. Zalduendo, *Zeros of polynomials on Banach spaces: the real story*, Positivity 7 (2003), pp. 285-295.

[2] R. M. Aron, V. I. Gurariy e J. B. Seoane. *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 795-803.

[3] R.M. Aron, M. Lacruz, R. Ryan e A. Tonge, *The generalized Rademacher functions*, Note Mat. 12 (1992), 15-25.

[4] J.A. Barbosa, G. Botelho, D. Diniz e D. Pellegrino, *Spaces of absolutely summing polynomials*, Math. Scand. 101 (2007), pp. 219-237.

[5] A. T. L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Aplicações Entre Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[6] F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*, Q. J. Math. 55 (2004), 441-450.

[7] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proc. Roy. Irish Acad Sect. A 97 (1997), 145-153.

[8] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math. 177 (2006), 43-65.

[9] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, *Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 991-1000.

[10] G. Botelho, M.C. Matos e D. Pellegino, *Lineability of summing sets of homogeneous polynomials*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (2010), 61-74.

[11] G. Botelho e D. Pellegrino, *Scalar-valued dominated polynomials on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 1743-1751.

[12] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials*, J. Funct. Anal. 243 (2007), 257-269.

[13] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), 1139-1155.

[14] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *Summability and estimates for polynomials and multilinear mappings*, Indag. Math. (N.S.) 19 (2008), 23-31.

[15] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *A nonlinear Pietsch domination theorem.* Monatshefte für Mathematik (Print) 158 (2009), 247-257.

[16] E. Çaliskan e D. Pellegrino, *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*, Rocky Mountain J. Math. 37 (2007), 1137-1154.

[17] D. Carando e V. Dimant. *On summability of bilinear operators*, Math. Nachr. 259 (2003), 3-11.

[18] Y. S. Choi, S. G. Kim, Y. Meléndez e A. Tonge, *Estimates for absolutely summing norms of polynomials and multilinear maps*, Quarterly J. Math. 52 (2001), 1-12.

[19] R. Cilia e J. Gutiérrez, *Dominated, diagonal polynomials on ℓ_p spaces*, Arch. Math. 84 (2005), 421-431.

[20] A. Defant, D. García, M. Maestre e D. Pérez-García, *Bohr's strip for vector valued Dirichlet series*, Math. Ann. 342 (2008), 533-555.

[21] A. Defant e D. Pérez-García, *A tensor norm preserving unconditionality for L_p-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 3287-3306.

[22] A. Defant e P. Sevilla-Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's* 4/3-*inequality*, J. Funct. Anal. 256 (2009), 1642-1664.

[23] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[24] V. Dimant, *Strongly p-summing multilinear mappings*, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 182-193.

[25] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, London, 1999.

[26] K. Floret e M. C. Matos, *Application of a Khinchine inequality to holomorphic mappings*, Math. Nachr. 176 (1995), 65-72.

[27] G. Folland, *Real Analisis - Moderns Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, Nova York, 1984.

[28] D.J.H. Garling, *Diagonal mappings between sequence spaces*, Studia Math. 51 (1974), pp. 129-138.

[29] S. Geiss, *Ideale multilinearer Abbildungen*, Diplomarbeit, 1985.

[30] V. Gurariy e L. Quarta. *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal Appl. **294** (2004), 62-72.

[31] H. Jarchow, C. Palazuelos, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Hahn-Banach extension of multilinear forms and summability*, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007), 1161-1177.

[32] H. Junek, M. C. Matos e D. Pellegrino, *Inclusion theorems for absolutely summing holomorphic mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3983-3991.

[33] M. C. Matos, *On multilinear mappings of nuclear type*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 6 (1993), 61-81.

[34] M.C. Matos, *Nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Nachr. 258 (2003), pp. 71-89.

[35] M. C. Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collectanea Math. 54 (2003), 111-136.

[36] M. C. Matos e D. Pellegrino, *Fully summing mappings between Banach spaces*, Studia Math. 178 (2007), 47-61.

[37] Y. Meléndez e A. Tonge, *Polynomials and the Pietsch Domination Theorem*, Proc. Roy. Irish Acad Sect. A 99 (1999), 195-212.

[38] J. Mujica, *Complex Analisis in Banach Spaces - Holomorphic Functions and Domains of Holomorphy in Finite and Infinite Dimensions*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[39] L. Nachbin, *Topologia dos Espaços de Aplicações Holomorfas*, 6^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1967.

[40] D. Pellegrino, *Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in L_p spaces*, Studia Math. 157 (2003), 121-131.

[41] D. Pellegrino, *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Proc. R. Ir. Acad. 105A (2005), pp. 75-91.

[42] D. Pellegrino e M. Souza, *Fully and strongly fully almost summing multilinear mappings*, Rocky Mountain J. Math. 38 (2006), 683-698.

[43] D. Pérez-García, *The inclusion theorem for multiple summing operators*, Studia Math. 165 (2004), 275-290.

[44] D. Pérez-García, *A composition theorem for multiple summing operators*, Monatsh. Math. 146 (2005), 257-261.

[45] D. Pérez-García, *The trace class is a Q-algebra*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), 287-295.

[46] D. Pérez-García e I. Villanueva, *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 285 (2003), 86-96.

[47] D. Pérez-García, M. M. Wolf, C. Palazuelos, I. Villanueva e M. Junge, *Unbounded violation of tripartite Bell inequalities*, Commun. Math. Phys. 279 (2008), 455-486.

[48] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals, *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics*, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[49] A. Plichko e A. Zagorodnyuk, *On Automatic Continuity and Three Problems of "The scottish book" concerning the boundedness of polynomial functionals*, J. Math. Anal. Appl. 220 (1998), pp. 447-494.

[50] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators*, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009), 360-368.

[51] J. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.