

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

**Soluções para uma Classe de Equações de
Schrödinger Quase Lineares via Método de Nehari**

por

Hudson Umbelino dos Anjos

João Pessoa-PB
2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Soluções para uma Classe de Equações de Schrödinger Quase Lineares via Método de Nehari

por

Hudson Umbelino dos Anjos

Dissertação apresentada ao
Corpo Docente do Programa de Pós-
Graduação em Matemática - CCEN
- UFPB, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em
Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Uberlandio
Batista Severo.

João Pessoa-PB

2010

A599e Anjos, Hudson Umbelino dos.
Soluções para uma Classe de Equações de Schrödinger
Quase Lineares via Método de Nehari// Hudson Umbelino dos
Anjos. – João Pessoa, 2010.

70f. :il.

Orientador: Uberlandio Batista Severo
Dissertação (Mestrado) – UFPb - CCEN

1.Equações de Schrödinger. 2. Método de Nehari – Soluções.

UFPb/BC

CDU: 517.9 (043)

Responsável pela catalogação: Maria de Fátima dos Santos Alves - CRB-15/149

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Soluções para uma Classe de Equações de Schrödinger Quase Lineares via Método de Nehari

por

Hudson Umbelino dos Anjos¹

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

25 de Agosto de 2010

Área de Concentração: Análise/EDP.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - Orientador (UFPB)

Prof. Dr. Gilberto Fernandes Vieira - Membro (UFCG)

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - Membro (UFPB)

¹O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação. Proc.: 136111/2008-4

A minha esposa Jucimara
Aos meus filhos Caio e Cauê

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. *“O Senhor é meu auxílio, não temerei; que me poderá fazer o homem?” Hb 13.6 (RA).*

Aos meus pais, José Umbelino e Marise Madalena, e aos meus sogros, José Costa e Sonia Queiroz, pelo apoio, incentivo e confiança.

A minha esposa Jucimara Carvalho dos Anjos, por ter vindo comigo e estado ao meu lado durante todo o tempo dando-me força e carinho, e tido paciência nos momentos difíceis.

Aos meus filhos, Caio e Cauê, pelos momentos de descontração maravilhosos que me proporcionaram durante este período.

Sou muito grato, também, ao meu irmão Ulisses Umbelino e a sua família por terem desde o início me apoiado, incentivado e colaborado para que minha estadia na cidade de João Pessoa fosse a mais agradável possível.

Ao meu orientador Uberlandio Batista Severo, por ter acreditado em minha capacidade e pelas discussões e sugestões que possibilitaram que este trabalho fosse finalizado.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática do CCEN-UFPB e em especial, aos professores José Gomes de Assis, Daniel Marinho Pellegrino, Pedro Antonio Hinojosa Vera, Pedro Antonio Gomes Venegas, João Marcos Bezerra do Ó e Everaldo Souto de Medeiros por muito contribuírem com minha formação matemática.

Aos professores Gilberto Fernandes Vieira e Elisandra de Fátima Gloss de Moraes, por terem aceitado participar da banca examinadora e pelas oportunas correções e sugestões.

Aos colegas do curso de mestrado, pela troca de experiências, numa convivência prazerosa. Sucesso a todos!

Enfim, ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a existência de soluções positivas e mudando de sinal (tendo exatamente dois domínios nodais) para uma classe de equações de Schrödinger quase lineares, as quais modelam fenômenos físicos, por exemplo, em Física dos Plasmas. Na obtenção dos resultados, foi usado, principalmente, o método de Nehari, bem como teoria de regularidade elíptica e o Princípio de Concentração-Compacidade de P. L. Lions.

Palavras-chave: Equações de Schrödinger Quase Lineares, Soluções Positivas e Mudando de Sinal, Método de Nehari.

Abstract

In this dissertation, we study existence of both one-sign and nodal positive solutions (with exactly two nodal domains) for a class of quasilinear Schrödinger equations, which model physic phenomena, for example, in plasma physics. To obtain the results, it was used, mainly, the Nehari method, as well as, regularity theory of elliptic and Concentration-Compactness Principle.

Keywords: Standing waves, Quasilinear Schrödinger equations, One-sign and nodal solutions, The Nehari method.

Sumário

Notações	2
Introdução	4
1 Resultados Preliminares	9
1.1 Lemas Preliminares	9
1.2 Resultados de Existência em Domínios Limitados	20
2 Existência de Solução Fraca Positiva	26
2.1 Demonstração do Teorema 1	35
3 Existência de Solução Fraca Mudando de Sinal	37
3.1 Demonstração do Teorema 2	44
Apêndice	46
A.1 Cálculo da Derivada Direcional	46
A.2 Alguns Resultados de Análise Funcional e de Espaços de Sobolev . .	49
A.3 Teorema de Existência de Miranda e Resultados de P. L. Lions . . .	52
A.4 Regularidade de Soluções	54
Referências Bibliográficas	63

Notações

Neste trabalho, faremos uso da seguinte simbologia:

- $C, C_0, C_1, \dots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- $\text{supp } f$ denota o suporte da função f ;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio R e B_R quando estiver centrada na origem;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denotam convergências fraca e forte, respectivamente, em um espaço normado X ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dualidade entre o espaço X e o seu dual X' ;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ and $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente da função u ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u ;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$, em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω ;
- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até ordem k estão em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- Para $1 \leq p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right]^{1/p}$$

e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma acima. Quando $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) =: H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) =: H_0^1(\Omega)$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i =: \partial u / \partial x_i$. E se $u \in H^1(\Omega)$, denotaremos $\|u\|_{1,2} =: \|u\|$.

- Para $1 \leq p < N$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Introdução

Nesta dissertação, estudamos a existência de soluções fracas positivas e mudando de sinal (tendo exatamente dois domínios nodais) para a seguinte equação do tipo Schrödinger quase linear

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}\Delta(u^2)u = \lambda|u|^{p-1}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

onde $4 < p + 1 < 2(2^*)$, $\lambda > 0$, $V = V(x)$, com $x \in \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), é um potencial dado satisfazendo a seguinte condição:

(V1) V é localmente Hölder contínua e existem constantes positivas V_0 e V_∞ tais que

$$V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq V_\infty := \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \quad \text{e} \quad V \not\equiv V_\infty.$$

Entende-se por domínio nodal de um função $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, um subconjunto conexo limitado do $\mathbb{R}^N$ onde u não muda de sinal.

Equações do tipo (1) modelam vários problemas da Física-Matemática e têm sido objetos de estudos durante os últimos anos. Por exemplo, as soluções de (1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quase lineares da forma

$$i\partial_t z = -\Delta z + V(x)z - f(z^2)z - \kappa\Delta(h(z^2))h'(z^2)z \quad (2)$$

onde $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, é um potencial dado, κ é uma constante real e f , h são funções reais essencialmente da forma de potências puras. Equações do tipo

(2), aparecem mais naturalmente na Física-Matemática e cada fenômeno físico corresponde a um tipo de h . Aqui, tratamos o caso em que $h(s) = s$, o qual foi usado na obtenção da equação da membrana de superfluido em Física dos Plasmas por Kurihara [15], Para $h(s) = (1 + s)^{1/2}$, a Equação (2) modela a canalização de um laser ultra-curto de alta potência na matéria, veja [4, 5, 9, 32]. A Equação (2) também surge em Física dos Plasmas e Mecânica dos Fluidos em [15, 16, 20, 26, 28], na Teoria de Heisenberg do ferromagnetismo em [2, 14, 17, 29, 35], na Mecânica Quântica Dissipativa [13] e na Teoria da Matéria Condensada [24]. O caso semilinear, correspondente a $\kappa = 0$, já foi bastante estudado nos últimos anos, veja por exemplo, [3, 11, 30, 34] e algumas de suas referências.

Nesta dissertação tratamos o caso $\kappa > 0$ na equação (2). Assumimos sem perda de generalidade $\kappa = \frac{1}{2}$. Considerando $f(s) = \lambda s^{\frac{p-1}{2}}$, com $p > 1$ e $\lambda > 0$, e buscando soluções do tipo onda estacionária para (2), a saber, soluções da forma

$$z(t, x) = e^{-i\omega t} u(x), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} u\omega e^{-i\omega t} &= -e^{-i\omega t} \Delta u + V(x) u e^{-i\omega t} - \lambda |u|^{p-1} u e^{-i\omega t} - \frac{1}{2} \Delta(u^2) u e^{-i\omega t} \\ u\omega &= -\Delta u + V(x) u - \lambda |u|^{p-1} u - \frac{1}{2} \Delta(u^2) u \\ \lambda |u|^{p-1} u &= (V(x) - \omega) u - \Delta u - \frac{1}{2} \Delta(u^2) u \end{aligned}$$

e renomeando $V - \omega$ por V segue que

$$\lambda |u|^{p-1} u = -\Delta u + V(x) u - \frac{1}{2} \Delta(u^2) u.$$

A formulação fraca de (1) é provar a existência de u em um espaço de funções apropriado e satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \phi dx. \quad (3)$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para discutirmos a existência de solução, utilizamos métodos variacionais, ou seja, analisamos o funcional energia associado a (1) no que diz respeito à obtenção de pontos críticos. Definamos o funcional I por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \frac{\lambda}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \quad (4)$$

Observemos que o termo não linear $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx$ não está bem definido em todo o $H^1(\mathbb{R}^N)$ exceto para $N = 1$, pois neste caso, $H^1(\mathbb{R})$ está imerso em $L^\infty(\mathbb{R})$. Isto torna difícil lidar diretamente com (4). Assim, o espaço de funções natural para trabalharmos é

$$X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\},$$

onde, em particular, temos que se $u \in X$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Formalmente, o problema tem uma estrutura variacional. Dado $u \in X$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, a derivada de I em u na direção de ϕ , denotada por $\langle I'(u), \phi \rangle$ e definida por $\lim_{t \rightarrow 0^+} [I(u + t\phi) - I(u)]/t$, é dada por

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u^2) \nabla u \nabla \phi + u |\nabla u|^2 \phi + V u \phi - \lambda |u|^{p-1} u \phi] dx. \quad (5)$$

(veja o Apêndice A.1). Daí, $u \in X$ é solução fraca de (1) se, e somente se, esta derivada é zero em toda direção $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

A existência de solução positiva foi provada, primeiramente, por Poppenberg et al. [27], sendo o primeiro resultado de existência que conhecemos para (1). Eles se restringiram ao caso $N = 1$ ou ao caso radialmente simétrico. Em [21], Liu e Wang usaram um argumento de minimização com vínculos e obtiveram uma solução positiva com um multiplicador de Lagrange desconhecido λ em frente do termo não linear. Em Liu et al. [22], por uma mudança de variável o problema quase linear foi transformado em um semilinear e os autores trabalharam em um espaço de Orlicz adequado, e conseguiram provar a existência de soluções positivas de (1) para qualquer $\lambda > 0$, aplicando o Teorema do Passo da Montanha. O mesmo método de mudança de variável foi usado também por Colin e Jeanjean [10]. Usando-se este procedimento de mudança de variável, pode-se procurar também soluções que mudam de sinal. Mas, o método depende fortemente de uma estrutura especial dos termos quase lineares e, em geral, este procedimento não pode ser usado para tratar de problemas quase lineares mais gerais, envolvendo operadores mais complexos. Nesta dissertação, abordamos o problema por um caminho diferente, a saber, utilizando o método de Nehari. Trabalhamos diretamente com o funcional I , apesar de sua falta de diferenciabilidade.

Esta dissertação está baseada no artigo "**Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method**" dos autores Liu, Wang e Wang (veja [23]),

onde eles obtiveram dois resultados de existência de solução para a equação (1): um que estabelece a existência de solução positiva e outro que fornece a existência de solução nodal tendo exatamente dois domínios nodais. As soluções de energia mínima mudando de sinal podem ser formuladas como mínimos de um problema de minimização com duplo vínculo. Desta forma, as soluções de sinal definido e que mudam de sinal podem ser tratadas de uma forma unificada.

O método de Nehari foi usado recentemente por Castro et al. [7] e Cerami et al. [8], para soluções que mudam de sinal em domínios limitados, e em Ambrosetti e Wang [1], para soluções positivas de (1), com $N = 1$.

As seguintes notações serão usadas para a equação (1). Nosso método é independente de $\lambda > 0$, e, portanto, podemos considerar $\lambda = 1$ de agora em diante. Para $u \in X$, definimos

$$\gamma(u) = \langle I'(u), u \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1}]dx, \quad (6)$$

$$S = \{u \in X \setminus \{0\} : \gamma(u) = 0\},$$

$$S^* = \{u \in S : u^+ \in S, u^- \in S\},$$

onde $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. Em seguida, definimos também

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u),$$

$$c^* = \inf_{u \in S^*} I(u).$$

Observamos que, usando (4) e (6) segue que $I|_S > 0$, ou seja, I é limitado inferiormente em S ; o mesmo vale para $I|_{S^*}$. Soluções positivas e que mudam de sinal são construídas como mínimos do funcional I sobre S e S^* , respectivamente. Seja $2^* = \frac{2N}{N-2}$ com $N \geq 3$. Para obtermos uma solução mudando de sinal vamos, também, considerar outra hipótese sobre o potencial, a saber: **(V2)** Existem constantes positivas M , A e m tais que, para $|x| \geq M$,

$$V(x) \leq V_\infty - \frac{A}{1 + |x|^m}.$$

Os principais resultados que estudamos neste trabalho são os seguintes:

TEOREMA 1 *Seja $4 < p + 1 < 22^*$ e assuma (V1). Então o funcional I assume seu ínfimo c^0 sobre S em uma função u que é uma solução fraca positiva de (1).*

TEOREMA 2 *Seja $4 < p + 1 < 22^*$ e assuma (V1) e (V2). Então o funcional I assume seu ínfimo c^* sobre S^* em uma função u que é uma solução fraca de (1), mudando de sinal, tendo exatamente dois domínios nodais.*

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 1, provamos alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo da dissertação, e provamos também a existência de soluções sobre domínios limitados, que serão usadas como sequências minimizantes do funcional I . No Capítulo 2, analisamos estas sequências minimizantes pelo Princípio de Concentração-Compacidade de Lions e provamos o Teorema 1. No Capítulo 3, provamos um resultado de regularidade para as soluções de (1) que será necessário para provarmos o Teorema 2. O Apêndice está composto por quatro seções. A primeira seção contém a derivada direcional do funcional I . A segunda apresenta alguns resultados de Análise Funcional e Espaços de Sobolev que foram usados com frequência. A terceira seção contém os enunciados dos teoremas de C. Miranda e P. L. Lions usados em algumas demonstrações. Finalmente, na última seção, uma mudança de variável e o princípio do máximo foram usados para mostrarmos que as soluções obtidas são, de fato, clássicas e estritamente positivas.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, estabeleceremos alguns resultados importantes sobre o funcional I e sobre o conjunto X definidos na introdução. Mostraremos também alguns resultados em domínios limitados que serão frequentemente usados nas demonstrações dos resultados principais dos capítulos seguintes.

1.1 Lemas Preliminares

Aqui, mostraremos alguns lemas que serão essenciais para o trabalho com o funcional I . Por exemplo, estabeleceremos algumas características do domínio X de I , que não é um subespaço do $H^1(\mathbb{R}^N)$, mas sob uma certa condição, podemos ter $u + v \in X$, para $u, v \in X$.

Lema 1.1 *Para $u \in S$, $t \in (0, \infty)$ e $t \neq 1$, temos que $I(tu) < I(u)$.*

Prova. Defina a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = I(tu)$, isto é,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [1 + (tu)^2] |\nabla(tu)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(tu)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |tu|^{p+1} dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx + \frac{t^4}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= t \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx + 2t^3 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - t^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \\ &= t^3 \left(\frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - t^{p-3} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right). \end{aligned}$$

Desde que $p - 3 > 0$ e pelo fato de $u \in S$, temos

$$f'(1) = \gamma(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2u^2)|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - |u|^{p+1}] dx = 0.$$

Para $0 < t < 1$ temos, $\frac{1}{t^2} > 1$ e $t^{p-3} < 1$, o que implica que

$$f'(t) > t^3 \gamma(u) = 0. \quad (1.1)$$

Agora, para $t > 1$ temos, $\frac{1}{t^2} < 1$ e $t^{p-3} > 1$ donde

$$f'(t) < t^3 \gamma(u) = 0. \quad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2) segue que $f(t) < f(1)$, isto é, $I(tu) < I(u)$, para $t \in (0, \infty)$ e $t \neq 1$.

■

O próximo lema garante que algum múltiplo de $u \in X$, $u \neq 0$ está em S .

Lema 1.2 *Suponha que $u \in X$, $u \neq 0$. Então, existe um único $t > 0$ tal que $tu \in S$.*

Prova. Sejam $u \in X$, $u \neq 0$ e $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como na prova anterior. Para t suficientemente pequeno, $\frac{1}{t^{p-1}}$ e $\frac{2}{t^{p-3}}$ tornam-se grande o suficiente de modo que

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^p \left(\frac{1}{t^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx + \frac{2}{t^{p-3}} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, para t suficientemente grande, $\frac{1}{t^{p-1}}$ e $\frac{2}{t^{p-3}}$ tornam-se pequeno o suficiente de modo que

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^p \left(\frac{1}{t^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx + \frac{2}{t^{p-3}} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema do valor intermediário, existe $t > 0$ tal que $f'(t) = 0$. Como $u \neq 0$ temos $tu \neq 0$ e

$$\begin{aligned}\gamma(tu) &= \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2(tu)^2)|\nabla(tu)|^2 + V(x)(tu)^2 - |tu|^{p+1}]dx \\ &= t \left(t \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx + 2t^3 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - t^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right) \\ &= tf'(t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $tu \in S$. Agora, suponha que $0 < t_1 < t_2$ sejam tais que $t_1 u \in S$ e $t_2 u \in S$. Pelo Lema 1.1,

$$I\left(\frac{t_2}{t_1}t_1 u\right) < I(t_1 u)$$

e

$$I\left(\frac{t_1}{t_2}t_2 u\right) < I(t_2 u),$$

o que é absurdo, mostrando a unicidade de t . ■

O próximo lema exhibe a imersão de X nos espaços de Lebesgue. Lembremos que $22^* = 2\frac{2N}{N-2}$ para $N \geq 3$.

Lema 1.3 *Se $u \in X$ então $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 22^*$. Além disso, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{22^*} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Prova. Pelo teorema de imersão de Sobolev, já sabemos que $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$. Utilizando o teorema de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, segue que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u^2|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u^2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{22^*} dx \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} < \infty,$$

ou seja, $u \in L^{22^*}(\mathbb{R}^N)$. Da desigualdade de interpolação nos espaços de Lebesgue, segue que $u \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 22^*$. ■

No lema que segue, conseguimos obter, a partir de uma sequência em X , uma sequência em S onde cada termo da nova sequência é um múltiplo do termo correspondente da sequência dada e, além disso, os coeficientes convergem para 1.

Lema 1.4 *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(u_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = c > 0.$$

Então, existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n u_n \in S$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$.

Prova. Basta provarmos somente o limite de (t_n) quando $n \rightarrow \infty$, pois, em vista do Lema 1.2, a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, para cada u_n existe um único $t_n > 0$ tal que $t_n u_n \in S$. Sejam

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx, \quad b_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \quad \text{e} \quad c_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \gamma(u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \\ &= a_n + 2b_n - c_n. \end{aligned}$$

Temos que $c_n \rightarrow c > 0$ e $\gamma(u_n) \rightarrow 0$. Portanto, as sequências (a_n) e (b_n) são limitadas. Passando a uma subsequência, podemos assumir que $a_n \rightarrow a \geq 0$ e $b_n \rightarrow b \geq 0$. Desde que

$$\gamma(u_n) = a_n + 2b_n - c_n \rightarrow 0,$$

temos

$$a + 2b - c = 0. \tag{1.3}$$

Afirmamos que $a > 0$. Do contrário, $a_n \rightarrow 0$ e tomando $\theta = \frac{(p-1)(N-2)}{2(N+2)}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4(N+2)-2(p-1)(N-2)}{2(N+2)}} \cdot |u_n|^{\frac{4N(p-1)}{2(N+2)}} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4(N+2)-2(p-1)(N-2)}{2(N+2)} \cdot \frac{1}{1-\theta}} dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4N(p-1)}{2(N+2)} \cdot \frac{1}{\theta}} dx \right)^{\theta} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4N}{N-2}} dx \right)^{\theta} \\
&\leq C_1 \left(\frac{1}{V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V_0 u_n^2 dx \right)^{1-\theta} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \right]^{\theta} \\
&\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 + V(x) u_n^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{\theta N}{N-2}}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

implicando que $c_n \rightarrow 0$, o que é uma contradição. Temos, então, de (1.3) que $0 \leq 2b < c$ e, para n suficientemente grande, podemos supor $u_n \neq 0$. Pelo Lema 1.2, podemos encontrar $t_n > 0$ tal que

$$\gamma(t_n u_n) = a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} = 0. \tag{1.5}$$

Afirmamos que (t_n) é limitada, ou seja, existem constantes T_1 e T_2 tais que $0 < T_1 \leq t_n \leq T_2$. De fato, por (1.5) temos $a_n + 2b_n t_n^2 - c_n t_n^{p-1} = 0$ e caso $t_n \rightarrow 0$ obteremos $a = 0$, o que é um absurdo. Por outro lado, se $t_n \rightarrow \infty$, por (1.5) temos

$$\frac{a_n}{t_n^{p-1}} + \frac{2b_n}{t_n^{p-3}} - c_n = 0$$

implicando que $c = 0$, o que é um absurdo. Assim, tomando uma subsequência se necessário, $t_n \rightarrow t^* > 0$. Passando o limite em (1.5), obtemos

$$a(t^*)^2 + 2b(t^*)^4 - c(t^*)^{p+1} = 0.$$

Observemos que a equação $at^2 + 2bt^4 - ct^{p+1} = 0$ tem $t = 1$ como única solução positiva. De fato, defina $g(t) = at^2 + 2bt^4 - ct^{p+1}$ para $t > 0$ e relembremos que $2b < c$, $p+1 > 4$ e $a+2b-c=0$. Observemos que $g(1) = 0$. Para $t > 1$, temos

$$g'(t) = 4t^3 \left(\frac{a}{2t^2} + 2b - \frac{c(p+1)t^{p-3}}{4} \right) < 4t^3(a+2b-c) = 0$$

ou seja, g é estritamente decrescente. E para $0 < t < 1$, temos

$$g(t) = t^{p+1} \left(\frac{a}{t^{p-1}} + \frac{2b}{t^{p-3}} - c \right) > t^{p+1}(a+2b-c) = 0.$$

Com isso, temos então que $t^* = 1$ e $t_n \rightarrow 1$. ■

Agora, mostraremos que dada $u \in X$, $u \neq 0$, qualquer combinação linear da parte positiva de u com a parte negativa de u também pertencerá a X .

Lema 1.5 *Seja $u \in X$, então $tu^+ + su^- \in X$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Em particular, $u^+, u^-, |u| \in X$.*

Prova. Sabemos que $u^\pm \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u^\pm \leq |u|$ e $|\nabla u^\pm| \leq |\nabla u|$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u^\pm)^2 |\nabla u^\pm|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Temos também

$$(tu^+ + su^-)^2 |\nabla(tu^+ + su^-)|^2 = [t^2(u^+)^2 + s^2(u^-)^2] [t^2|\nabla u^+|^2 + s^2|\nabla u^-|^2],$$

pois $(u^+)(u^-) = 0$ e $\nabla u^+ \nabla u^- = 0$. Daí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (tu^+ + su^-)^2 |\nabla(tu^+ + su^-)|^2 dx &= t^4 \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^2 |\nabla(u^+)|^2 dx \\ &\quad + s^4 \int_{\mathbb{R}^N} (u^-)^2 |\nabla(u^-)|^2 dx < \infty, \end{aligned}$$

pois $u^\pm |\nabla u^\mp| = 0$. ■

O próximo resultado estabelece uma comparação entre os números c^* e c^0 .

Lema 1.6 $c^0 > 0$ e $c^* \geq 2c^0$.

Prova. Indicando ρ^2 por

$$\rho^2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx,$$

de (1.4) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{\theta N}{N-2}} \\ &\leq C_2 (\rho^2)^{1-\theta} (\rho^2)^{\frac{\theta N}{N-2}} \\ &= C_2 \rho^{2 + \frac{N(p-1) - (N-2)(p-1)}{N+2}} \\ &= C_2 \rho^{2 + \frac{2(p-1)}{N+2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \rho^2 - C \rho^{2+\frac{2(p-1)}{N+2}}. \end{aligned}$$

Desde que $\frac{2(p-1)}{N+2} > 0$, escolhemos ρ pequeno de modo que

$$\frac{1}{2} \rho^2 - C \rho^{2+\frac{2(p-1)}{N+2}} = \rho^2 \left(\frac{1}{2} - C \rho^{\frac{2(p-1)}{N+2}} \right) \geq \frac{1}{4} \rho^2 =: m > 0. \quad (1.6)$$

Agora, suponha $u \in S$. Considerando $\lambda > 0$, temos que

$$\rho^2(\lambda u) = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x) u^2) dx + \lambda^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx$$

e façamos λ pequeno tal que $\rho^2(\lambda u)$ satisfaça a condição (1.6). Logo, pelo Lema 1.1,

$$I(u) > I(\lambda u) \geq m.$$

Daí, concluimos que

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u) \geq m > 0.$$

Para qualquer $u \in S^*$, temos $u^+, u^- \in S$. Observando que $|u^+ - u^-|^{p+1} = |u^+|^{p+1} + |u^-|^{p+1}$, $(u^+)(u^-) = 0$, $\nabla u^+ \cdot \nabla u^- = 0$, $u^\pm |\nabla u^\mp| = 0$ e expandindo $I(u^+ - u^-)$ obtemos

$$I(u) = I(u^+) + I(u^-) \geq c^0 + c^0 = 2c^0,$$

o que mostra que

$$c^* = \inf_{u \in S^*} I(u) \geq 2c^0.$$

■

Mostraremos agora outra propriedade do conjunto X . É fácil ver que o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ está contido em X . O lema abaixo nos diz que, dado $u \in X$, o produto de u por uma função η de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ estará também em X .

Lema 1.7 *Se $u \in X$ e $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $\phi = \eta u \in X$. Além disso,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty.$$

Prova. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\eta u)^2 |\nabla(\eta u)|^2 dx &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 (\eta^2 |\nabla u|^2 + u^2 |\nabla \eta|^2) dx \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx + C_3 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx < \infty \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\eta u)^2 |\nabla u|^2 dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx < \infty, \\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla(\eta u)|^2 dx &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx < \infty, \end{aligned}$$

o que mostra o lema. ■

Como já observamos, X não é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois se $u, v \in X$ não temos necessariamente $u + v \in X$. Mas, temos a seguinte propriedade.

Lema 1.8 *Sejam $u, \phi \in X$ tais que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty$. Então $tu + s\phi \in X$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Prova. Basta observarmos que

$$\begin{aligned} (tu + s\phi)^2 |\nabla(tu + s\phi)|^2 &\leq C(t^2 u^2 + s^2 \phi^2) (t^2 |\nabla u|^2 + s^2 |\nabla \phi|^2) \\ &\leq Ct^4 (u^2 |\nabla u|^2) + Ct^2 s^2 (u^2 |\nabla \phi|^2) + Ct^2 s^2 (\phi^2 |\nabla u|^2) \\ &\quad + Cs^4 (\phi^2 |\nabla \phi|^2). \end{aligned}$$

■

Lema 1.9 *Sejam $u, \phi \in X$ satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty,$$

$t_n, \sigma_n \in \mathbb{R}$ com $t_n \rightarrow 1$ e $\sigma_n \rightarrow 0$. Então,

$$\langle I'(t_n u + \sigma_n \phi), \phi \rangle \rightarrow \langle I'(u), \phi \rangle.$$

Prova. Seja $w_n = t_n u + \sigma_n \phi$. Afirmamos que $w_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\|t_n u + \sigma_n \phi - u\|_{H^1} \leq |t_n - 1| \|u\|_{H^1} + |\sigma_n| \|\phi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Com isso, e argumentando como na prova do Lema 1.3 temos que $w_n \rightarrow u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s \leq 22^*$. Além disso $\nabla w_n \rightarrow \nabla u$ em $[L^2(\mathbb{R}^N)]^N$.

Consequentemente, $w_n \rightarrow u$ e $\nabla w_n \rightarrow \nabla u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, $|w_n| \leq h_s$ para todo n e quase sempre em $\mathbb{R}^N$ com $h_s \in L^s(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq s \leq 22^*$ e $|\nabla w_n| \leq H$ para todo n e quase sempre em $\mathbb{R}^N$ com $H \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Por cálculos análogos aos do Apêndice A.1, temos

$$\langle I'(w_n), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + w_n^2) \nabla w_n \nabla \phi + w_n |\nabla w_n|^2 \phi + V(x) w_n \phi - |w_n|^{p-1} w_n \phi] dx.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla \phi dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi dx, \\ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) w_n \phi dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx \end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p-1} w_n \phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \phi dx.$$

Observamos, agora, que

$$\begin{aligned} |w_n^2 \nabla w_n \nabla \phi| &\leq w_n^2 |\nabla w_n| |\nabla \phi| \\ &\leq C(t_n^2 u^2 + \sigma_n^2 \phi^2)(|t_n| |\nabla u| + |\sigma_n| |\nabla \phi|) |\nabla \phi| \\ &\leq (C_1 u^2 + C_2 \phi^2)(C_3 |\nabla u| + C_4 |\nabla \phi|) |\nabla \phi| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u^2 |\nabla u| |\nabla \phi| &\leq \frac{u^2 |\nabla u|^2}{2} + \frac{u^2 |\nabla \phi|^2}{2}, \\ \phi^2 |\nabla u| |\nabla \phi| &\leq \frac{\phi^2 |\nabla u|^2}{2} + \frac{\phi^2 |\nabla \phi|^2}{2}. \end{aligned}$$

Das desigualdades acima, e novamente pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_n^2 \nabla w_n \nabla \phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \nabla u \nabla \phi dx.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} |w_n |\nabla w_n|^2 \phi| &\leq C(|t_n| |u| + |\sigma_n| |\phi|)(t_n^2 |\nabla u|^2 + \sigma_n^2 |\nabla \phi|^2) |\phi| \\ &\leq (C_1 |u| + C_2 |\phi|)(C_3 |\nabla u|^2 + C_4 |\nabla \phi|^2) |\phi| \end{aligned}$$

e

$$|u| |\nabla u|^2 |\phi| \leq \frac{u^2 |\nabla u|^2}{2} + \frac{\phi^2 |\nabla u|^2}{2},$$

$$|u||\nabla\phi|^2|\phi| \leq \frac{u^2|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\phi^2|\nabla\phi|^2}{2},$$

de onde segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_n |\nabla w_n|^2 \phi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla u|^2 \phi dx.$$

Finalmente, das cinco convergências acima concluímos que

$$\langle I'(w_n), \phi \rangle \rightarrow \langle I'(u), \phi \rangle.$$

■

Lema 1.10 *Suponha que $u \in S$ e $I(u) = c^0$, ou $u \in S^*$ e $I(u) = c^*$. Então u é uma solução fraca de (1). Além disso, a igualdade (3) vale para qualquer $\phi \in X$ com a propriedade que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla\phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty$.*

Prova. Provaremos o caso para c^* , o outro caso ($I(u) = c^0$) segue de maneira análoga. Vamos proceder usando um argumento de contradição. Suponha que $u \in S^*$ e $I(u) = c^*$, mas a conclusão do lema não seja verdadeira. Então, podemos encontrar uma função $\phi \in X$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla\phi|^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty,$$

mas

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u^2) \nabla u \nabla \phi + u |\nabla u|^2 \phi + V(x) u \phi - |u|^{p-1} u \phi] dx \leq -1.$$

Observamos que o lado direito da desigualdade acima poderia ser qualquer constante $c \neq -1$. Basta que $c \neq 0$, pois se $\langle I'(u), \phi \rangle = c$, faríamos $\psi = -c\phi \in X$ e obteríamos $\langle I'(u), \psi \rangle = -1$.

Podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\langle I'(tu^+ - su^- + \sigma\phi), \phi \rangle \leq -\frac{1}{2}, \quad \text{para todo } |t-1| + |s-1| + |\sigma| \leq 3\epsilon. \quad (1.7)$$

De fato, tal escolha é possível, pois se não existisse tal $\epsilon > 0$, seria possível construirmos sequências (t_n) , (s_n) e (σ_n) tais que $t_n \rightarrow 1$, $s_n \rightarrow 1$, $\sigma_n \rightarrow 0$ e

$$\langle I'(t_n u^+ - s_n u^- + \sigma_n \phi), \phi \rangle > -\frac{1}{2}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ nessa expressão e utilizando o Lema 1.9, obtemos

$$-\frac{1}{2} < \lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'(t_n u^+ - s_n u^- + \sigma_n \phi), \phi \rangle = \langle I'(u), \phi \rangle \leq -1,$$

o que é um absurdo.

Seja $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função “cut-off” definida por

$$\eta(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t - 1| \leq \frac{1}{2}\epsilon \text{ e } |s - 1| \leq \frac{1}{2}\epsilon; \\ 0, & \text{se } |t - 1| \geq \epsilon \text{ ou } |s - 1| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Vamos estimar o número $\sup_{t,s>0} I(tu^+ - su^- + \epsilon\eta(t, s)\phi)$. Se $|t - 1| \leq \epsilon$ e $|s - 1| \leq \epsilon$, então, pelo teorema fundamental do cálculo e (1.7)

$$\begin{aligned} I(tu^+ - su^- + \epsilon\eta(t, s)\phi) &= I(tu^+ - su^-) \\ &\quad + \int_0^1 \langle I'(tu^+ - su^- + \zeta\epsilon\eta(t, s)\phi), \epsilon\eta(t, s)\phi \rangle d\zeta \\ &\leq I(tu^+ - su^-) - \frac{1}{2}\epsilon\eta(t, s). \end{aligned}$$

Para $|t - 1| \geq \epsilon$ ou $|s - 1| \geq \epsilon$, $\eta(t, s) = 0$, a desigualdade acima é trivial. Agora, desde que $u \in S^*$, para $(t, s) \neq (1, 1)$, temos que $I(tu^+ - su^-) < I(u^+) + I(u^-) = I(u)$. Daí,

$$I(tu^+ - su^- + \epsilon\eta(t, s)\phi) \leq I(tu^+ - su^-) < I(u), \quad \text{para todo } (t, s) \neq (1, 1).$$

Por outro lado, para $(t, s) = (1, 1)$,

$$I(tu^+ - su^- + \epsilon\eta(t, s)\phi) \leq I(u) - \frac{1}{2}\epsilon < I(u).$$

Logo, em qualquer um dos casos, temos

$$I(tu^+ - su^- + \epsilon\eta(t, s)\phi) < I(u) = c^*.$$

Mostraremos que, de fato, podemos encontrar $(a, b) \in (0, 2) \times (0, 2)$ tal que

$$\tilde{u} = au^+ - bu^- + \epsilon\eta(a, b)\phi \in S^* \quad \text{e} \quad I(\tilde{u}) < c^*.$$

Seja $G = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : |t - 1| < \epsilon, |s - 1| < \epsilon\}$. Definimos $h : \overline{G} \rightarrow X$ por

$$h(t, s) = tu^+ - su^- + \epsilon\eta(t, s)\phi.$$

Definimos também a função $F : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(t, s) = (\gamma(h(t, s)^+), \gamma(h(t, s)^-)).$$

É fácil verificar que $\gamma(h(t, s)^+)$ e $\gamma(h(t, s)^-)$ são contínuas em $\overline{G}$. Basta argumentar como no Lema 1.9 e usar o Lema 1.8. Assim, F é contínua. Além disso, se $|t-1| = \epsilon$ ou $|s-1| = \epsilon$, então $\eta(t, s) = 0$ e $h(t, s) = tu^+ - su^-$. Desse modo,

$$F(t, s) = (\gamma(tu^+), \gamma(su^-)).$$

Observe que se $t = 1 - \epsilon$ então $\frac{1}{t^2} > 1$ e $t^{p-3} < 1$, donde

$$\begin{aligned} \gamma(tu^+) &= \langle I'(tu^+), tu^+ \rangle \\ &= t^4 \left(\frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^+|^2 + V(x)(u^+)^2) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^2 |\nabla u^+|^2 dx \right. \\ &\quad \left. - t^{p-3} \int_{\mathbb{R}^N} |u^+|^{p+1} dx \right) \\ &> t^4 \gamma(u^+) = 0. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos para $t = 1 + \epsilon$ que $\gamma(tu^+) < 0$ e $\gamma(tu^-) < 0$, e para $t = 1 - \epsilon$ que $\gamma(tu^-) > 0$. Assim $F(t, s) \neq (0, 0)$ para todo $(t, s) \in \partial G$. Usando o teorema de existência de Miranda (veja Apêndice A.3) temos que existe $(a, b) \in G$ tal que $F(a, b) = (0, 0)$, implicando que $h(a, b) \in S^*$. Tomando $\tilde{u} = h(a, b)$ segue que

$$I(\tilde{u}) < I(u) = c^*,$$

o que é uma contradição, e o lema está provado. ■

1.2 Resultados de Existência em Domínios Limitados

Nesta seção, vamos considerar o problema correspondente em domínios limitados. Neste caso, as soluções obtidas serão usadas como sequências minimizantes para o problema no $\mathbb{R}^N$. Para $R > 0$, sejam $B_R = B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$,

$$S_R = S \cap H_0^1(B_R), \quad S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R),$$

$$c_R^0 = \inf_{u \in S_R} I(u), \quad c_R^* = \inf_{u \in S_R^*} I(u).$$

Lembramos que se $u \in H_0^1(B_R)$, então a função

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B_R; \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R \end{cases}$$

pertence a $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e, neste caso, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ em B_R .

Lema 1.11 c_R^0 e c_R^* ambos decrescem quando R aumenta e $c_R^0 \rightarrow c^0$, $c_R^* \rightarrow c^*$ quando $R \rightarrow \infty$.

Prova. É claro que c_R^0 e c_R^* são monótonas decrescente em R pela propriedade de ínfimo, e $c_R^0 \geq c^0$ e $c_R^* \geq c^*$. Mostraremos que $c_R^* \rightarrow c^*$; o caso $c_R^0 \rightarrow c^0$ é provado de maneira análoga. Para $\epsilon > 0$, existe $u \in S^*$ tal que $I(u) \leq c^* + \epsilon$. Seja $u_R = \eta_R u$ onde η_R é uma função “cut-off” definida por

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq \frac{1}{4}R; \\ 0, & \text{se } |x| \geq \frac{3}{4}R. \end{cases}$$

Usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos, quando $R \rightarrow \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_R^\pm|^{p+1} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u^\pm|^{p+1} dx > 0, \\ \gamma(u_R^\pm) \rightarrow \gamma(u^\pm) = 0.$$

Pelo Lema 1.4, encontramos (t_R) , (s_R) tais que $t_R \rightarrow 1$ e $s_R \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow \infty$, $t_R u_R^+ \in S$ e $s_R u_R^- \in S$. Agora, considerando $\tilde{u}_R = t_R u_R^+ - s_R u_R^- \in S_R^*$, e

$$\begin{aligned} c_R^* &\leq I(\tilde{u}_R) = I(t_R u_R^+ - s_R u_R^-) \\ &\leq I(t_R u^+ - s_R u^-) + C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} [(1 + u^2)|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + |u|^{p+1}] dx \\ &\leq I(u^+ - u^-) + o(1) \leq c^* + \epsilon + o(1), \end{aligned}$$

onde $o(1) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Desde que ϵ é arbitrário, segue que $\lim_{R \rightarrow \infty} c_R^* = c^*$. ■

O lema seguinte vai mostrar que, para cada $R > 0$, existe $\tilde{u} \in S_R^*$ tal que $I(\tilde{u}) = c_R^*$. E, também, existe $\bar{u} \in S_R$ tal que $I(\bar{u}) = c_R^0$.

Lema 1.12 Os ínfimos c_R^0 e c_R^* são atingidos.

Prova. Provaremos o lema para c_R^* . O caso c_R^0 segue de maneira análoga. Seja $(u_n) \subset S_R^*$ uma sequência minimizante, isto é, $I(u_n) \rightarrow c_R^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Observemos que $u_n^\pm \in S_R$ e, portanto, $u_n^\pm \neq 0$ e $\gamma(u_n^\pm) = 0$, para todo $n \geq 1$. Afirmamos que $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^\pm|^2 dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx$ são todas limitadas.

Temos que

$$\begin{aligned} I(u_n^\pm) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^\pm|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (u_n^\pm)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma(u_n^\pm) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^\pm|^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (u_n^\pm)^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$I(u_n) = I(u_n^+) + I(u_n^-) \quad \text{e} \quad \gamma(u_n) = \gamma(u_n^+) + \gamma(u_n^-).$$

De (1.9), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^\pm|^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (u_n^\pm)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx. \quad (1.10)$$

Se, pelo menos, uma das três parcelas do lado esquerdo dessa desigualdade não fosse limitada, substituindo em (1.8), obteríamos

$$\begin{aligned} I(u_n^+) + I(u_n^-) &= \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^+|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^-|^2 dx \right) \\ &\quad + \frac{p-3}{2(p+1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^2 |\nabla u_n^+|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^-)^2 |\nabla u_n^-|^2 dx \right) \\ &\quad + \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) (u_n^+)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) (u_n^-)^2 dx \right) \\ &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.11)$$

o que é um absurdo, pois $I(u_n) \rightarrow c_R^* > 0$. Temos também que $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx \geq m$ para algum $m > 0$ e para todo n , pois se $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^\pm|^{p+1} dx \rightarrow 0$ teríamos, usando (1.10) e (1.11),

$$I(u_n) = I(u_n^+) + I(u_n^-) \rightarrow 0,$$

o que não pode ocorrer. Assim, $(u_n^\pm)$ é limitada em $H_0^1(B_R)$. Portanto, podemos assumir que $u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm$ em $H_0^1(B_R)$. Desde que estamos em um domínio limitado, podemos usar o teorema de imersão de Rellich e a desigualdade de interpolação e assumir que $u_n^\pm \rightarrow u^\pm$ para $L^s(B_R)$ com $1 \leq s < 22^*$. É claro que $u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm$ em $L^2(B_R)$.

Afirmamos que $\nabla u_n^\pm \rightharpoonup \nabla u^\pm$ em $L^2(B_R, \mathbb{R}^N)$. De fato, como

$$\left\| \frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i} \right\|_2^2 \leq \|u_n^\pm\|_{H_0^1}^2 < \infty,$$

temos que

$$\frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i} \rightharpoonup w_i^\pm \quad \text{em } L^2(B_R),$$

o que implica que

$$\int_{B_R} \frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i} v dx \rightarrow \int_{B_R} w_i^\pm v dx \quad \text{para toda } v \in L^2(B_R).$$

Em particular, esta convergência vale para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$. Desde que

$$\int_{B_R} \left| u_n^\pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - u^\pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \leq C \int_{B_R} |u_n^\pm - u^\pm| dx \rightarrow 0,$$

obtemos

$$\int_{B_R} u_n^\pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \rightarrow \int_{B_R} u^\pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Portanto, temos, da definição de derivada fraca, que para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$

$$\int_{B_R} u^\pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{B_R} \frac{\partial u^\pm}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{B_R} w_i^\pm \varphi dx$$

o que implica que $\frac{\partial u^\pm}{\partial x_i} = w_i^\pm$. Temos também que $\nabla [(u_n^\pm)^2] \rightharpoonup \nabla [(u^\pm)^2]$ em $L^2(B_R, \mathbb{R}^N)$. Com efeito, sabemos que $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^\pm)^2 |\nabla u_n^\pm|^2 dx$ é limitado. Isso implica que

$$2u_n^\pm \frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i} \rightharpoonup v_i^\pm \quad \text{em } L^2(B_R),$$

ou seja,

$$\int_{B_R} 2u_n^\pm \frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i} v dx \rightarrow \int_{B_R} v_i^\pm v dx \quad \text{para todo } v \in L^2(B_R).$$

Em particular, temos que a convergência anterior válida para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$.

Como $u_n^\pm$ e $u_n^\pm \frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i}$ pertencem a $L_{\text{loc}}^1(B_R)$, temos que $\frac{\partial (u_n^\pm)^2}{\partial x_i} = 2u_n^\pm \frac{\partial u_n^\pm}{\partial x_i}$. Observemos que vale

$$\int_{B_R} (u_n^\pm)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \rightarrow \int_{B_R} (u^\pm)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx,$$

pois

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \left| (u_n^\pm)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - (u^\pm)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx &\leq C \int_{B_R} |u_n^\pm - u^\pm| |u_n^\pm + u^\pm| dx \\ &\leq C \left(\int_{B_R} |u_n^\pm - u^\pm|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |u_n^\pm + u^\pm|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u_n^\pm - u^\pm\|_2 (\|u_n^\pm\|_2 + \|u^\pm\|_2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim, novamente pela definição de derivada fraca, para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$ obtemos

$$\int_{B_R} (u^\pm)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{B_R} 2u^\pm \frac{\partial u^\pm}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{B_R} v_i^\pm \varphi dx$$

o que mostra que $2u^\pm \frac{\partial u^\pm}{\partial x_i} = v_i^\pm$.

Assim, de toda a argumentação acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |u_n^\pm|^{p+1} dx &\rightarrow \int_{B_R} |u^\pm|^{p+1} dx, \\ \int_{B_R} V(x)(u_n^\pm)^2 dx &\rightarrow \int_{B_R} V(x)(u^\pm)^2 dx, \\ \nabla u_n^\pm \rightharpoonup \nabla u^\pm &\Rightarrow \int_{B_R} |\nabla u^\pm|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} |\nabla u_n^\pm|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\nabla [(u_n^\pm)^2] \rightharpoonup \nabla [(u^\pm)^2] \Rightarrow \int_{B_R} |\nabla [(u^\pm)^2]|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} |\nabla [(u_n^\pm)^2]|^2 dx.$$

Pelo Lema 1.2, existem $t, s > 0$ tal que $tu^+, su^- \in S$, ou seja, $\gamma(tu^+) = \gamma(su^-) = 0$.

Fazendo $\tilde{u} = tu^+ - su^-$, então $\tilde{u} \in S_R^*$ e usando a argumentação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \inf_{u \in S_R^*} I(u) = c_R^* &\leq I(\tilde{u}) = I(tu^+) + I(su^-) \\ &\leq \liminf I(tu_n^+) + \liminf I(su_n^-) \\ &\leq \liminf [I(tu_n^+) + I(su_n^-)] \\ &\leq \liminf I(u_n^+ - u_n^-) = \lim I(u_n) = c_R^*. \end{aligned}$$

Assim, $I(\tilde{u}) = c_R^*$, e a prova está concluída. ■

Lema 1.13 *Suponha que $u \in S_R$ e $I(u) = c_R^0$ ou $u \in S_R^*$ e $I(u) = c_R^*$. Então, u é uma solução fraca da equação quase linear correspondente no domínio limitado B_R , isto é, para toda $\phi \in C_0^\infty(B_R)$ vale*

$$\int_{B_R} (1 + u^2) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{B_R} u |\nabla u|^2 \phi dx + \int_{B_R} V(x) u \phi dx = \int_{B_R} |u|^{p-1} u \phi dx.$$

Além disso, a equação acima vale para qualquer $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ com a propriedade de que $\int_{B_R} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{B_R} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty$.

Prova. A prova é idêntica a do Lema 1.10. ■

Prosseguindo, precisamos estudar o funcional limite, o qual é definido usando-se o limite do potencial $V(x)$ no infinito. Para $u \in X$, considere

$$I^\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \quad (1.12)$$

Da mesma forma, definimos

$$\begin{aligned} \gamma^\infty(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \\ S^\infty &= \{u \in X \setminus \{0\} : \gamma^\infty(u) = 0\} \\ c^\infty &= \inf_{u \in S^\infty} I^\infty(u). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Além disso, para os domínios limitados B_R , definimos

$$S_R^\infty = S^\infty \cap H_0^1(B_R), \quad c_R^\infty = \inf_{u \in S_R^\infty} I^\infty(u).$$

Usando as provas dos Lemas 1.11 e 1.12, segue que $c_R^\infty \rightarrow c^\infty > 0$ quando $R \rightarrow \infty$ e o ínfimo c_R^∞ é atingido.

Capítulo 2

Existência de Solução Fraca Positiva

Neste capítulo, vamos provar o Teorema 1. Para isto, necessitamos antes de alguns lemas. Para mostrarmos o próximo resultado, usaremos o Princípio de Concentração-Compacidade de P. L. Lions (veja Apêndice A.3).

Lema 2.1 *Seja $u_R \in S_R$ uma solução fraca da equação (1) no domínio limitado B_R , isto é,*

$$\int_{B_R} (1 + u_R^2) \nabla u_R \nabla \phi dx + \int_{B_R} u_R |\nabla u_R|^2 \phi dx + \int_{B_R} V(x) u_R \phi dx = \int_{B_R} |u_R|^{p-1} u_R \phi dx, \quad (2.1)$$

para toda $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ com a propriedade que

$$\int_{B_R} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty \quad e \quad \int_{B_R} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Suponha que $\int_{B_R} (1 + u_R^2) |\nabla u_R|^2 dx$, $\int_{B_R} V(x) u_R^2 dx$ e $\int_{B_R} |u_R|^{p+1} dx$ sejam limitados, para todo R . Além disso, assuma para uma subsequência $R_n \rightarrow \infty$, que

$$\int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx \rightarrow A \in (0, \infty), \quad (2.2)$$

onde $u_n \equiv u_{R_n}$. Então, existem $\beta \in (0, 1]$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo: para cada

$\epsilon > 0$, existe $r_\epsilon > 0$ tal que se $r' \geq r \geq r_\epsilon$ então

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\geq \beta A - \epsilon, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\geq (1 - \beta)A - \epsilon. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Além disso, se $\beta < 1$ então $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq c^0 + c^\infty$.

Prova. Para obtermos a existência do número $\beta \in (0, 1]$, vamos usar o Princípio de Concentração-Compacidade de P. L. Lions. Primeiro, observemos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois, por hipótese, temos que $\int_{B_{R_n}} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx$ e $\int_{B_{R_n}} V(x) u_n^2 dx$ são limitadas. Com isso, vamos mostrar que o item (2) do Teorema A.3.2 (Anulamento) não pode ocorrer.

Fazendo

$$\rho_n = \frac{|u_n^2|^{\frac{p+1}{2}}}{\int_{B_{R_n}} |u_n^2|^{\frac{p+1}{2}} dx} \geq 0,$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1.$$

Se o Anlamente ocorresse, teríamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} \rho_n dx \right) = 0, \quad \text{para todo } R < \infty.$$

Pelo lema de Lions (Lema A.3.3), $u_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $4 < s < 22^*$ o que é absurdo. Então, os itens (1)(Compacidade) ou (3)(Dicotomia) do Teorema A.3.2 deve ocorrer. Suponha que (1) ocorra. Assim, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $r_\epsilon > 0$ tal que

$$\int_{B_{r_\epsilon}(x_n)} \rho_n dx \geq 1 - \frac{\epsilon}{A},$$

ou seja,

$$\int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \int_{B_{r_\epsilon}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \left(1 - \frac{\epsilon}{A}\right) \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx, \quad \text{se } r \geq r_\epsilon.$$

Tomando o liminf, obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \left(1 - \frac{\epsilon}{A}\right) A = A - \epsilon,$$

donde

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1 - \beta)A - \epsilon, \quad \text{se } r' \geq r.$$

Assim, temos a conclusão do lema para $\beta = 1$.

Consideremos, agora, que (3) ocorra. Então, existe $\beta \in (0, 1)$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existem $n_0 \geq 1$, $x_n \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \rho_{1,n}(x) &= \rho_n(x) \chi_{B_r(x_n)}, \\ \rho_{2,n}(x) &= \rho_n(x) \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} \end{aligned}$$

com $r' \geq r \geq R_n$, satisfazendo, para $n \geq n_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1,n}(x) dx \geq \beta - \frac{\epsilon}{A}, \quad (2.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{2,n}(x) dx \geq (1 - \beta) - \frac{\epsilon}{A}. \quad (2.5)$$

De (2.4), temos que

$$\int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \beta \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx - \frac{\epsilon}{A} \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx.$$

Tomando o liminf, obtemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \beta A - \epsilon,$$

e de (2.5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1 - \beta) \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx - \frac{\epsilon}{A} \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx.$$

Tomando o liminf, concluimos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1 - \beta)A - \epsilon.$$

Assim, obtemos o resultado para $\beta \in (0, 1)$.

Agora suponha $\beta < 1$. Escolhemos $\epsilon_n \rightarrow 0$ e $r'_n \geq r_n \rightarrow \infty$ tais que, a menos de subsequência, tenhamos

$$\int_{B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \beta A - \epsilon_n, \quad (2.6)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1 - \beta)A - \epsilon_n.$$

Seja ξ uma função “cut-off” definida por

$$\xi(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 1 \text{ ou } s \geq 4; \\ 1, & 2 \leq s \leq 3, \end{cases}$$

e satisfazendo $|\xi'(s)| \leq 2$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Tendo em vista o Lema 1.7, podemos tomar $\phi_n(x) = \xi\left(\frac{|x-x_n|}{r_n}\right) u_n(x)$ na igualdade (2.1), reescrevendo-a da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_{B_{2r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} [(1 + u_n^2) \nabla u_n \nabla \phi_n + u_n |\nabla u_n|^2 \phi_n + V u_n \phi_n - |u_n|^{p-1} u_n \phi_n] dx \\ & + \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} [(1 + 2u_n^2) |\nabla u_n|^2 + V u_n^2 - |u_n|^{p+1}] dx \\ & + \int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{3r_n}(x_n)} [(1 + u_n^2) \nabla u_n \nabla \phi_n + u_n |\nabla u_n|^2 \phi_n + V u_n \phi_n - |u_n|^{p-1} u_n \phi_n] dx \\ & = 0. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \\ &= \int_{B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx + \int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{4r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Por (2.2), dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$-\epsilon < \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx - A < \epsilon.$$

Logo,

$$\int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx < A + \epsilon - \int_{B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{4r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx.$$

Fazendo $r'_n = 4r_n$ em (2.6), temos

$$\begin{aligned} \int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx &\leq A + \epsilon - \beta A + \epsilon_n - A + \beta A + \epsilon_n \\ &= \epsilon + 2\epsilon_n. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário e $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx = o(1). \quad (2.7)$$

Disto e usando a estimativa

$$\begin{aligned}
|(1 + u_n^2)u_n \nabla u_n \nabla \xi| &\leq |1 + u_n^2||u_n||\nabla u_n||\nabla \xi| \\
&\leq \frac{|\xi'|}{r_n} |1 + u_n^2||u_n||\nabla u_n| \\
&\leq \frac{1}{r_n} (|1 + u_n^2|^2 + u_n^2 |\nabla u_n|^2)
\end{aligned}$$

e o fato que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} (1 + u_n^2) \nabla u_n \nabla \phi_n dx &= \int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} \xi (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx \\
&+ \int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} (1 + u_n^2) u_n \nabla u_n \nabla \xi dx,
\end{aligned}$$

obtemos, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} [(1 + u_n^2) \nabla u_n \nabla \phi_n + u_n |\nabla u_n|^2 \phi_n + V u_n \phi_n] dx \\
&= \int_{B_{4r_n}(x_n) \setminus B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} \xi \left(\frac{|x - x_n|}{r_n} \right) dx = o(1)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, de (2.7) e (2.8), concluimos

$$\int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} [(1 + 2u_n^2) |\nabla u_n|^2 + V u_n^2 - |u_n|^{p+1}] dx = o(1). \tag{2.9}$$

Considerando outra função “cut-off”, η , definida por

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 2; \\ 0, & s \geq 3, \end{cases}$$

e satisfazendo $|\eta'(s)| \leq 2$, consideremos

$$w_n(x) = \eta \left(\frac{|x - x_n|}{r_n} \right) u_n(x) \quad \text{e} \quad v_n(x) = \left(1 - \eta \left(\frac{|x - x_n|}{r_n} \right) \right) u_n(x).$$

Por (2.6), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx = \int_{B_{3r_n}(x_n)} |\eta u_n|^{p+1} dx \geq \int_{B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \beta A - \epsilon_n \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r_n}(x_n)} |(1 - \eta) u_n|^{p+1} dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{3r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1 - \beta) A - \epsilon_n.
\end{aligned}$$

Denotemos

$$\Upsilon(u_n) = \frac{1}{2}(1 + u_n^2)|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2}V(x)u_n^2 - \frac{1}{p+1}|u_n|^{p+1}.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Upsilon(u_n) dx \\ &= \int_{B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(u_n) dx + \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{3r_n}(x_n)} \Upsilon(u_n) dx \\ &= I(w_n) - \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(w_n) dx + \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(u_n) dx + \\ &\quad I(v_n) - \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(v_n) dx. \end{aligned}$$

De (2.7), segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} |w_n|^{p+1} dx &= o(1), \\ \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} |v_n|^{p+1} dx &= o(1). \end{aligned}$$

Assim, raciocinando de forma análoga a (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(w_n) dx &= o(1), \\ \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} \Upsilon(v_n) dx &= o(1). \end{aligned}$$

Logo, $I(u_n) = I(w_n) + I(v_n) + o(1)$. Observemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'(u_n), w_n \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u_n^2)\nabla u_n \nabla w_n + u_n |\nabla u_n|^2 w_n + V u_n w_n - |u_n|^{p-1} u_n w_n] dx \\ &= \int_{B_{2r_n}(x_n)} [(1 + 2w_n^2)|\nabla w_n|^2 + V w_n^2 - |w_n|^{p+1}] dx + \\ &\quad \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} [(1 + u_n^2)\nabla u_n \nabla w_n + u_n |\nabla u_n|^2 w_n + V u_n w_n - |u_n|^{p-1} u_n w_n] dx \\ &= \gamma(w_n) - \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} [(1 + 2w_n^2)|\nabla w_n|^2 + V w_n^2 - |w_n|^{p+1}] dx + \\ &\quad \int_{B_{3r_n}(x_n) \setminus B_{2r_n}(x_n)} [(1 + u_n^2)\nabla u_n \nabla w_n + u_n |\nabla u_n|^2 w_n + V u_n w_n - |u_n|^{p-1} u_n w_n] dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\phi = w_n$ e usando (2.1) e (2.9), concluímos que

$$\gamma(w_n) = \langle I'(u_n), w_n \rangle + o(1) = o(1).$$

Com a mesma argumentação anterior, também vale

$$\gamma(v_n) = \langle I'(u_n), v_n \rangle + o(1) = o(1).$$

Pelo Lema 1.4, existem sequências (t_n) e (s_n) tais que $t_n \rightarrow 1$, $s_n \rightarrow 1$, $\bar{w}_n = t_n w_n \in S$ e $\bar{v}_n = s_n v_n \in S$.

Suponha que (x_n) seja limitada, ou seja, $|x_n| \leq M$ para algum $M > 0$. Neste caso,

$$\text{supp } \bar{v}_n \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \frac{|x - x_n|}{r_n} > 2 \right\} = \mathbb{R}^N \setminus B_{2r_n}(x_n)$$

e

$$\text{supp } u_n \subset B_{R_n}.$$

Podemos considerar $2r_n \geq R_n > M$. Seja $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y| \leq R_n - M$. Assim,

$$\frac{|y - x_n|}{r_n} \leq \frac{|y| + |x_n|}{r_n} \leq \frac{R_n - M + M}{r_n} \leq 2.$$

Logo, $\text{supp } \bar{v}_n$ está fora da bola B_{R_n-M} . Então,

$$\begin{aligned} I(\bar{v}_n) &= I^\infty(\bar{v}_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty) \bar{v}_n^2 dx \\ &= I^\infty(\bar{v}_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_n-M}} (V(x) - V_\infty) \bar{v}_n^2 dx \\ &= I^\infty(\bar{v}_n) + o(1), \end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \gamma^\infty(\bar{v}_n) &= \gamma(\bar{v}_n) + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) \bar{v}_n^2 dx \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Além disso, de (2.10), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{v}_n|^{p+1} dx = C \neq 0.$$

Assim, pelo Lema 1.4, existe $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\sigma_n \rightarrow 1$ e $\sigma_n \bar{v}_n \in S^\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} I(\bar{v}_n) &= I^\infty(\bar{v}_n) + o(1) \\ &= I^\infty(\sigma_n \bar{v}_n) + I^\infty(\bar{v}_n) - I^\infty(\sigma_n \bar{v}_n) + o(1) \\ &\geq c^\infty + o(1), \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\bar{v}_n) \geq c^\infty.$$

Além disso,

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\bar{w}_n).$$

Agora, se (x_n) é não limitada,

$$\text{supp } \bar{w}_n \subset B_{3r_n}(x_n) \quad \text{e} \quad \text{supp } u_n \subset B_{R_n}.$$

Note que podemos considerar $|x_n| \geq 2r_n$. Assim,

$$\begin{aligned} I(\bar{w}_n) &= I^\infty(\bar{w}_n) + \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty) \bar{w}_n^2 dx \\ &= I^\infty(\bar{w}_n) + \int_{B_{3r_n}(x_n) \cap B_{R_n}} (V(x) - V_\infty) \bar{w}_n^2 dx \\ &= I^\infty(\bar{w}_n) + o(1), \end{aligned}$$

e temos

$$\begin{aligned} \gamma^\infty(\bar{w}_n) &= \gamma(\bar{w}_n) + \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) \bar{w}_n^2 dx \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 1.4, existe $(\tau_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\tau_n \rightarrow 1$ e $\tau_n \bar{w}_n \in S^\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} I(\bar{w}_n) &= I^\infty(\bar{w}_n) + o(1) \\ &= I^\infty(\tau_n \bar{w}_n) + I^\infty(\bar{w}_n) - I^\infty(\tau_n \bar{w}_n) + o(1) \\ &\geq c^\infty + o(1), \end{aligned}$$

donde

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(\bar{w}_n) \geq c^\infty.$$

Além disso,

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\bar{v}_n).$$

De maneira geral,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= I(w_n) + I(v_n) + o(1) \\ &= I(t_n w_n) + I(s_n v_n) + o(1), \end{aligned}$$

desde que $I(w_n) - I(t_n w_n) = o(1)$ e $I(v_n) - I(s_n v_n) = o(1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(t_n w_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} I(s_n v_n) + o(1) \\ &\geq c^0 + c^\infty, \end{aligned}$$

o que finaliza a prova do lema. ■

Lema 2.2 *O ínfimo c^∞ é atingido e se $I^\infty(u) = c^\infty$, podemos assumir $u(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}^N$.*

Prova. Seja (u_n) uma sequência tal que $u_n \in S_n^\infty$, $I^\infty(u_n) = c_n^\infty$ e $c_n^\infty \rightarrow c^\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Desde que $\gamma^\infty(u_n) = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I^\infty(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u_n^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx + \\ &\quad \left(\frac{V_\infty}{2} - \frac{V_\infty}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx. \end{aligned}$$

Como $I^\infty(u_n)$ é limitado, concluímos que

$$\int_{B_{R_n}} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx, \quad \int_{B_{R_n}} u_n^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitados, em n . Caso contrário, usando as igualdades acima, chegaríamos a uma contradição, isto é, se pelo menos uma das parcelas não fosse limitada, então $I^\infty(u_n)$ não seria.

Note que, a menos de subsequência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = A \in (0, \infty).$$

Caso contrário, $I^\infty(u_n) \rightarrow 0$ ou $I^\infty(u_n) \rightarrow \infty$, o que seria um absurdo. Logo, pelo Lema 2.1, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ satisfazendo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \epsilon.$$

Observe que se $I^\infty(u_n) \rightarrow c^\infty$ então devemos ter $\beta = 1$. Pela invariância por translação do problema, ou seja, se $I^\infty(u) = c^\infty$ e se definirmos $\bar{u}(x) = u(x + y)$ então $I^\infty(\bar{u}) = I^\infty(u)$, podemos assumir que (x_n) é limitada ($|x_n| \leq M < R_n$). Daí $(u_n) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e, além disso, é limitada. Logo, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Também temos $u_n \rightarrow u \neq 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ e $\nabla(u_n^2) \rightharpoonup \nabla(u^2)$ em $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, pelo mesmo argumento usado no Lema 1.12.

Pelo Lema 1.2, encontramos $t > 0$ tal que $\gamma^\infty(tu) = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
 c^\infty &\leq I^\infty(tu) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [1 + (tu)^2] |\nabla(tu)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(tu)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |tu|^{p+1} dx \\
 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(tu_n)|^2 dx + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (tu_n)^2 |\nabla(tu_n)|^2 dx + \\
 &\quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty(tu_n)^2 dx - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |tu_n|^{p+1} dx \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(tu_n) \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^\infty = c^\infty.
 \end{aligned}$$

Logo, $I^\infty(tu) = c^\infty$.

Podemos supor que as funções u_n sejam não negativas (podemos trocar u_n por $|u_n|$, se necessário). Assim, $u \geq 0$. Pelo Teorema A.4.1 do Apêndice segue que $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, finalizando a prova. ■

2.1 Demonstração do Teorema 1

Nesta seção, apresentaremos a demonstração do Teorema 1, cujo enunciado é:

TEOREMA 1 *Seja $4 \leq p+1 < 22^*$ e assuma (V1). Então, o funcional I assume seu ínfimo c^0 sobre S em uma função u que é uma solução fraca positiva de (1).*

Relembramos que a condição (V1) é dada por: V é localmente Hölder contínua e existem constantes positivas V_0 e V_∞ tais que

$$V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq V_\infty := \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \quad \text{e} \quad V \not\equiv V_\infty.$$

Para iniciarmos a prova do Teorema 1, primeiro afirmamos que $c^0 < c^\infty$. Em vista do Lema 2.2, seja $u \in X$ tal que $I^\infty(u) = c^\infty$ e $\gamma^\infty(u) = 0$. Desde que u é

estritamente positiva, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx,$$

pois $V \not\equiv V_\infty$. Pelo Lema 1.2, existe $t > 0$ tal que $\gamma(tu) = 0$ e, pelo Lema 1.1,

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u) \leq I(tu) < I^\infty(tu) < I^\infty(u) = c^\infty.$$

Prosseguindo, seja (u_n) uma sequência tal que $u_n \in S_n$, $I(u_n) = c_n^0 \rightarrow c^0$ quando $n \rightarrow \infty$. Usando o fato que $(I(u_n))$ é limitada e $\gamma(u_n) = 0$, obtemos que

$$\int_{B_{R_n}} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx, \quad \int_{B_{R_n}} u_n^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitados em n . Além disso, a menos de subsequência,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = A \in (0, \infty).$$

Logo, pelo Lema 2.1, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ satisfazendo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \epsilon.$$

Novamente, observamos que $I(u_n) \rightarrow c_0$ o que implica $\beta = 1$. Então (x_n) deve ser limitada. Do contrário,

$$\gamma^\infty(u_n) = \gamma(u_n) + o(1).$$

Assim, usando Lema 1.4, existe (t_n) tal que $t_n \rightarrow 1$ e $\gamma^\infty(t_n u_n) = 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} c^\infty = \inf_{u \in S^\infty} I^\infty(u) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(t_n u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(u_n) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) + o(1) = c^0 \end{aligned}$$

o que é uma contradição com nossa afirmação inicial.

Pelo fato de (x_n) ser limitada ($|x_n| \leq M < R_n$), temos que $(u_n) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e, além disso, é limitada. Logo, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Procedendo da mesma forma como no Lema 2.2, existe um $t > 0$ tal que $\gamma(tu) = 0$, $I(tu) = c^0$ com $u(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}^N$, o que prova o Teorema 1. ■

Capítulo 3

Existência de Solução Fraca Mudando de Sinal

Neste capítulo, iremos provar o Teorema 2. Antes disso, necessitamos de alguns resultados iniciais. Primeiro, mostraremos que uma solução fraca de (1) pertence aos espaços de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \geq 2$.

Lema 3.1 *Seja u uma solução fraca de (1). Então $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \geq 2$.*

Prova. Seja $u \in X$ uma solução fraca de (1), ou seja, u satisfaz (3) para toda $\phi \in X$ com a propriedade

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Em particular, podemos fazer $\phi = |u_M|^{q_0-p-1} u_M$, onde $M > 0$ e

$$u_M(x) = \begin{cases} M, & \text{se } u(x) > M; \\ u(x), & \text{se } |u(x)| \leq M; \\ -M, & \text{se } u(x) < -M. \end{cases}$$

Provaremos o que desejamos usando o método de iteração de Moser. Se $q_0 = \frac{4N}{N-2}$, então, pelo Lema 1.3, $u \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$. Note que

$$|u_M| \leq M \quad , \quad |u_M| \leq |u| \quad , \quad u_M^2 \leq u_M u \leq u^2$$

e

$$\nabla u_M = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } |u(x)| \leq M; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $\nabla \phi = (q_0 - p)|u_M|^{q_0-p-1}\nabla u_M$. Assim, usando ϕ em (3), temos

$$\begin{aligned} & (q_0 - p) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)|u_M|^{q_0-p-1}\nabla u \nabla u_M dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2|u_M|^{q_0-p-1}u_M dx + \int_{\mathbb{R}^N} V u|u_M|^{q_0-p-1}u_M dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u|u_M|^{q_0-p-1}u_M dx, \\ & (q_0 - p) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)|u_M|^{q_0-p-1}|\nabla u_M|^2 dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} |u_M|^{q_0-p+1}|\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V|u_M|^{q_0-p+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_0} dx < \infty. \end{aligned}$$

Note que $q_0 - p > 1$. Logo, fazendo $M \rightarrow \infty$ e usando o lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)|u|^{q_0-p-1}|\nabla u|^2 dx < \infty, \\ & \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{q_0-p+1} dx < \infty, \\ & \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_0-p+1}|\nabla u|^2 dx < \infty, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left(|u|^{\frac{q_0-p+3}{2}} \right) \right|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\frac{q_0-p+3}{2} \right) |u|^{\frac{q_0-p+3}{2}-1} \frac{u}{|u|} \nabla u \right|^2 dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_0-p+1} |\nabla u|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, segue que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{q_0-p+3}{2} \cdot \frac{2N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{2N}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \left(|u|^{\frac{q_0-p+3}{2}} \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

o que implica que $u \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$, onde $q_1 = \frac{N(q_0-p+3)}{N-2} > q_0$. Daqui em diante, fazendo iterações, podemos concluir que $u \in L^{q_i}$ onde

$$q_i = \frac{N(q_{i-1} - p + 3)}{N - 2} \quad \text{e} \quad q_{i+1} - q_i = \frac{N}{N - 2}(q_i - q_{i-1}).$$

Portanto, $q_i \rightarrow \infty$. Em particular, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \geq 2$. ■

Agora, vamos obter um resultado que mostra um certo tipo de decaimento no infinito para a solução de (1).

Lema 3.2 *Seja u uma solução fraca de (1). Então, u juntamente com suas derivadas apresentam o seguinte decaimento exponencial no infinito*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C e^{-\delta R},$$

para algumas constantes positivas C, δ .

Prova. Seja $u \in X$ uma solução fraca de (1), ou seja, u satisfaz (3) para toda $\phi \in X$ com a propriedade $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty$. Em particular, podemos fazer $\phi = \eta u$ com $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Tomemos $\phi(x) = \eta_R^2(|x|)u(x)$, onde η_R é uma função “cut-off” definida por

$$\eta_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq R; \\ 1, & \text{se } s \geq R+1. \end{cases}$$

Então, usando (3), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) \nabla u \nabla (\eta_R^2 u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \eta_R^2 dx &+ \\ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \eta_R^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \eta_R^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 \eta_R^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} 2(1 + u^2) u \eta_R \nabla u \nabla \eta_R dx \\ + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} V(x) u^2 \eta_R^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u|^{p+1} \eta_R^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} [(1 + 2u^2) |\nabla u|^2 \eta_R^2 + V(x) u^2 \eta_R^2 - |u|^{p-1} u^2 \eta_R^2] dx &+ \\ \int_{B_{R+1} \setminus B_R} 2(1 + u^2) u \eta_R \nabla u \nabla \eta_R dx &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para R suficientemente grande e observando que $0 < u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ (ver Teorema A.4.1 no Apêndice),

$$V(x) - |u|^{p-1} \geq V_0 - |u|^{p-1} \geq \frac{V_0}{2} \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_R.$$

De (3.1), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \left[(1 + 2u^2) |\nabla u|^2 \eta_R^2 + \frac{V_0}{2} u^2 \eta_R^2 \right] dx &+ \\ \int_{B_{R+1} \setminus B_R} 2(1 + u^2) u \eta_R \nabla u \nabla \eta_R dx &\leq 0. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e o fato que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ver Teorema A.4.1 no Apêndice),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx &\leq C_1 \int_{B_{R+1} \setminus B_R} u \eta_R \nabla u \nabla \eta_R dx \\ &\leq C_2 \int_{B_{R+1} \setminus B_R} |u| |\nabla u| dx \\ &\leq C_3 \int_{B_{R+1} \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx. \end{aligned}$$

Definimos a sequência $a_n = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_n}} (u^2 + |\nabla u|^2) dx$, $R_n = R + n$. Então, $a_{n+1} \leq a_n \leq C(a_n - a_{n+1})$, donde segue que $a_{n+1} \leq \theta a_n$, para n grande e $\frac{C}{C+1} = \theta = e^{-\delta} < 1$, $\delta > 0$. Daí, temos $a_n \leq C\theta^n$ para algum C independente de n . Isto implica o decaimento. ■

Agora, se $u \in S$ com $I(u) = c^0$ e se $\psi \in S^\infty$ com $I^\infty(\psi) = c^\infty$, podemos assumir que u e ψ são positivas. Pelo Lema 1.10, u e ψ satisfazem as suas igualdades correspondentes, (3), para qualquer $\phi \in X$ satisfazendo $\int_{\mathbb{R}^N} (u \text{ ou } \psi)^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla(u \text{ ou } \psi)|^2 dx < \infty$. Pelo Lema 3.2, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C e^{-\delta R},$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (\psi^2 + |\nabla \psi|^2) dx \leq C e^{-\delta R},$$

para algumas constantes positivas C e δ . Definimos $\psi_R(x) = \psi(x + 2Re_1)$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$.

Lema 3.3 *O ínfimo $c^* \leq \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} I(\alpha u + \beta \psi_R) < c^0 + c^\infty$, desde que R seja grande o suficiente.*

Prova. A prova deste lema foi dividida em três passos.

PASSO 1: Quando expandimos $I(\alpha u + \beta \psi_R)$, todos os termos mistos envolvendo u e ψ_R têm decaimento exponencial. Isto é, todos os termos como $\int_{\mathbb{R}^N} u \psi_R dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \psi_R| dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla \psi_R| dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \psi_R |\nabla u| dx$ são da ordem $O(e^{-\delta R})$ quando

$R \rightarrow \infty$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u\psi_R &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u\psi_R + \int_{B_R} u\psi_R \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \psi_R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} \psi_R^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x + 2Re_1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \psi_R^2 = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(2Re_1)} \psi^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 = C_1.$$

Observando que $y \in B_R(2Re_1)$ implica que $y \in \mathbb{R}^N \setminus B_R$, temos

$$\int_{B_R} \psi_R^2 = \int_{B_R(2Re_1)} \psi^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \psi^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u\psi_R &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \psi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ce^{-\delta R}. \end{aligned}$$

PASSO 2: Existem $R_0 > 0$ e $r_0 > 0$ tais que, para todo $R \geq R_0$, e todo $\alpha^2 + \beta^2 = r^2 > r_0^2$,

$$I(\alpha u + \beta \psi_R) \leq 0.$$

Seja $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{r}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta}{r}$ e $\bar{w} = \bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R$. Primeiro encontramos um $R' > 0$ tal que, para $R > R'$, temos que $\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1} dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^2 |\nabla \bar{w}|^2 dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{w}|^2 dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \bar{w}^2 dx$ são limitados em R por cima e por baixo por duas constantes positivas. De fato, como $u > 0$ e $\psi > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{\alpha}^2 u^2 + 2\bar{\alpha}\bar{\beta}u\psi_R + \bar{\beta}^2 \psi_R^2) dx \\ &\geq C_1 - C_2 e^{-\delta R} + C_3 \end{aligned}$$

Logo, para R suficientemente grande, $\int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^2 dx \geq C$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^2 dx &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{\alpha}^2 u^2 + \bar{\beta}^2 \psi_R^2) dx \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + C_3 \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 dx \leq C \end{aligned}$$

O mesmo raciocínio vale para $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{w}|^2 dx$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^2 |\nabla \bar{w}|^2 dx$. Vejamos agora, para $\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1} dx$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx + \int_{B_1} |\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \\ &\geq \left[\left(\int_{B_1} |\bar{\alpha}u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} - \left(\int_{B_1} |\bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^{p+1}. \end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx &= \int_{B_1} |\bar{\beta}\psi(x + 2Re_1)|^{p+1} dx \\ &= \int_{B_1(2Re_1)} |\bar{\beta}\psi|^{p+1} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{p+1} \chi_{B_1(2Re_1)} dx \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $R \rightarrow \infty$. Logo, para R grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1} dx \geq C.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{\alpha}u + \bar{\beta}\psi_R|^{p+1} dx \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{p+1} dx \leq C. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} I(\alpha u + \beta \psi_R) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (r^2 + r^4 \bar{w}^2) |\nabla \bar{w}|^2 dx + \frac{1}{2} r^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \bar{w}^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} r^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

É fácil ver que $I(\alpha u + \beta \psi_R) \leq 0$ para todo $\alpha^2 + \beta^2 = r^2 > r_0^2$, pois a potência r^{p+1} domina na igualdade acima.

PASSO 3: Daremos a estimativa para $\sup_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} I(\alpha u + \beta \psi_R)$. Pelo Passo 2, podemos assumir $\alpha^2 + \beta^2$ limitado. Logo, pelo Passo 1,

$$I(\alpha u + \beta \psi_R) = I(\alpha u) + I(\beta \psi_R) + O(e^{-\delta R}).$$

Temos $\gamma(\psi_R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. De fato,

$$\begin{aligned}\gamma(\psi_R) &= \gamma^\infty(\psi_R) + \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty) \psi_R^2 dx \\ &= \int_{B_r} (V(x) - V_\infty) \psi_R^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} (V(x) - V_\infty) \psi_R^2 dx.\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\left| \int_{B_r} (V(x) - V_\infty) \psi_R^2 dx \right| \leq C \int_{B_r} \psi_R^2 dx = C \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 \chi_{B_r(2Re_1)} dx \rightarrow 0 \text{ quando } R \rightarrow \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $|V(x) - V_\infty| < \epsilon$ se $|x| \geq r$. Daí,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} (V(x) - V_\infty) \psi_R^2 dx \right| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} \psi_R^2 dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 dx. \quad (3.2)$$

Disto, e como ϵ é arbitrário, obtemos $\lim_{R \rightarrow \infty} |\gamma(\psi_R)| \leq o(1) + \epsilon C = 0$.

É fácil ver que $\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_R|^{p+1} dx \rightarrow C > 0$. Pelo Lema 1.4, existe $t_R > 0$ tal que $t_R \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow \infty$, $t_R \psi_R \in S$ e $\gamma(t_R \psi_R) = 0$. Usando o Lema 1.1, obtemos que

$$I\left(\frac{\beta}{t_R} t_R \psi_R\right) \leq I(t_R \psi_R).$$

Assim,

$$\begin{aligned}I(\alpha u + \beta \psi_R) &= I(\alpha u) + I(\beta \psi_R) + O(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(\alpha u) + I(t_R \psi_R) + O(e^{-\delta R}) \\ &\leq I(u) + I^\infty(t_R \psi_R) + \frac{t_R^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty) \psi_R^2 dx \\ &\quad + O(e^{-\delta R}).\end{aligned} \quad (3.3)$$

Novamente pelo Lema 1.1, (3.2) e (3.3) concluímos

$$\begin{aligned}I(\alpha u + \beta \psi_R) &\leq I(u) + I^\infty(\psi_R) - \frac{t_R^2}{2} \int_{B_1} (V_\infty - V(x - Re_1)) \psi^2(x) dx \\ &\quad + O(e^{-\delta R})\end{aligned} \quad (3.4)$$

Para finalizar, usando a condição **(V2)** em (3.4) segue-se

$$\begin{aligned}I(\alpha u + \beta \psi_R) &\leq c^0 + c^\infty - C_1 \int_{B_1} \frac{\psi^2(x)}{1 + |x - Re_1|^m} dx + \frac{O(e^{-\delta R})}{e^{-\delta R}} e^{-\delta R} \\ &< c^0 + c^\infty,\end{aligned}$$

desde que R seja grande o suficiente.

Utilizando a mesma argumentação do Lema 1.10 e o teorema de existência de Miranda, encontramos $\alpha > 0$, $\beta < 0$ tais que $\alpha u + \beta \psi_R \in S^*$. Daí $c^* < c^0 + c^\infty$. ■

3.1 Demonstração do Teorema 2

Agora, estamos em condições de mostrar o Teorema 2, cujo enunciado é:

TEOREMA 2 *Seja $4 \leq p+1 < 22^*$ e assuma (V1) e (V2). Então o funcional I assume seu ínfimo c^* sobre S^* em uma função u que é uma solução fraca de (1), mudando de sinal, tendo exatamente dois domínios nodais.*

Prova. Seja (u_n) é uma sequência tal que $u_n \in S_n^*$, $I(u_n) = c_n^*$ com $c_n^* \rightarrow c^*$ quando, $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 3.3, $c^* < c^0 + c^\infty$. Usando que $I(u_n)$ é limitada e $\gamma(u_n) = 0$, temos que

$$\int_{B_n} (1 + u_n^2) |\nabla u_n|^2 dx, \quad \int_{B_n} V(x) u_n^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$$

são limitadas em n . Pelos Lemas 2.1 e 3.3, existe uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \epsilon,$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = A$. Afirmamos que (x_n) deve ser limitada. Do contrário, $\gamma^\infty(u_n^\pm) \rightarrow 0$, $I(u_n^\pm) - I^\infty(u_n^\pm) = o(1)$, quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 1.4, existem t_n, s_n tais que $t_n \rightarrow 1$, $s_n \rightarrow 1$ e $\gamma^\infty(t_n u_n^+) = 0$, $\gamma^\infty(s_n u_n^-) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} c^0 + c^\infty < 2c^\infty &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(t_n u_n^+ - s_n u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I^\infty(u_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \\ &= c^*. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Obtemos $c^0 + c^\infty < c^*$, uma contradição. Portanto (x_n) é limitada e que implica $(u_n) \subset H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e, além disso, (u_n) é limitada. Logo, a menos de subsequência,

$u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Procedendo da mesma forma que no Lema 2.2, provamos que c^* é atingido por algum $u \in S^*$. Finalmente, nós afirmamos que o número de domínios nodais de u deve ser dois. Do contrário, se u tivesse mais de dois domínios nodais, digamos, D_1 e D_2 domínios nodais positivos, e D_3 um domínio nodal negativo. Como $\gamma(u) = 0$, temos $\gamma(u|_{D_1}) = \gamma(u|_{D_2}) = \gamma(u|_{D_3}) = 0$. Então $u|_{D_1 \cup D_3} \in S^*$ e $u|_{D_2} \in S$, e assim, como $c^* \leq I(u|_{D_1 \cup D_3})$ e $c^0 \leq I(u|_{D_2})$, segue-se $I(u) \geq c^* + c^0$, o que é uma contradição, e isto finaliza a prova. ■

Apêndice

Este apêndice está dividido em quatro seções. A seção A.1 contém o cálculo da derivada direcional do funcional I . Na seção A.2, dispomos alguns resultados de Análise Funcional e de Espaços de Sobolev que foram utilizados com frequência no decorrer do trabalho. Na seção A.3, enunciamos os resultados de P. L. Lions e C. Miranda. E na seção final, provamos um resultado de regularidade de soluções para o nosso problema, mostrando que, de fato, as soluções que obtemos são clássicas. Este resultado foi essencial em alguns argumentos usados em nosso trabalho.

A.1 Cálculo da Derivada Direcional

Consideremos o funcional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V u^2 dx - \frac{\lambda}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx,$$

onde

$$X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

Dado $u \in X$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, a derivada direcional de I em u na direção de ϕ , denotada por $\langle I'(u), \phi \rangle$, é definida por

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{I(u + t\phi) - I(u)}{t}.$$

Vamos calcular a derivada da cada parcela separadamente.

(i) Para a primeira, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{1}{2} \int |\nabla(u + t\phi)|^2 - \frac{1}{2} \int |\nabla(u)|^2}{t} &= \frac{1}{2t} \left[\int |\nabla u|^2 + 2t \int \nabla u \nabla \phi + t^2 \int |\nabla \phi|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \int |\nabla u|^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2t} \left[t \left(2 \int \nabla u \nabla \phi + t \int |\nabla \phi|^2 \right) \right] \\
 &= \int \nabla u \nabla \phi + \frac{t}{2} \int |\nabla \phi|^2 \\
 &= \int \nabla u \nabla \phi \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2t} \left[\int (u + t\phi)^2 |\nabla(u + t\phi)|^2 - \int u^2 |\nabla u|^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2t} \left[\int (u^2 + 2tu\phi + t^2\phi^2) (|\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla \phi + t^2|\nabla \phi|^2) - \int u^2 |\nabla u|^2 \right] \\
 &= \int u^2 \nabla u \nabla \phi + \int u\phi |\nabla u|^2 \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2t} \left[\int V(x)(u + t\phi)^2 - \int V(x)u^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2t} \left[\int V(x)u^2 + 2t \int V(x)u\phi + t^2 \int V(x)\phi^2 - \int V(x)u^2 \right] \\
 &= \int V(x)u\phi \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.
 \end{aligned}$$

(iv) Para a última parcela, dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < |t| < 1$, pelo teorema do valor médio, existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{|u(x) + t\phi(x)|^{p+1} - |u(x)|^{p+1}}{t} \right| &= \frac{1}{|t|} [p+1] |u(x) + \xi t\phi(x)|^p |(u(x) + t\phi(x)) - u(x)| \\
 &= (p+1) |u(x) + \xi t\phi(x)|^p |\phi(x)| \\
 &\leq (p+1) [|u(x)| + |\phi(x)|]^p |\phi(x)|.
 \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, segue que

$$[|u(x)| + |\phi(x)|]^p |\phi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int \frac{|u + t\phi|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} = (p+1) \int |u|^{p-1} u \phi.$$

Portanto, por (i)-(iv), concluímos que

$$\langle I'(u), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + u^2) \nabla u \nabla \phi + u \phi |\nabla u|^2 + V(x) u \phi - \lambda |u|^{p-1} u \phi] dx.$$

A.2 Alguns Resultados de Análise Funcional e de Espaços de Sobolev

Aqui, enunciaremos alguns resultados de Análise Funcional e de Espaços de Sobolev que foram usados em nosso trabalho. Para as respectivas demonstrações, consulte, por exemplo, [6, 12, 31].

Nesta dissertação, trabalhamos com os espaços de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $H_0^1(B_R)$. O espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ é definido como sendo

$$H^1(\mathbb{R}^N) = W^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ tais que} \\ \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}^N} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ e } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \right\}.$$

Consideramos o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido do seu produto interno usual

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^1} &= \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u v dx + \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

e a norma correspondente dada por

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, denota-se $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Agora, vamos enunciar os principais resultados usados:

Proposição A.2.1 *O espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Teorema A.2.2 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E . Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca.*

Teorema A.2.3 *Um operador compacto leva seqüências fracamente convergente em seqüências que convergem na norma.*

Teorema A.2.4 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ para $N \geq 3$ e existe uma constante C tal que $\|u\|_{L^{2^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$ para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Teorema A.2.5 (Imersões de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}^N) &\subset L^p(\mathbb{R}^N), & 1 \leq p \leq \infty, & N = 1; \\ H^1(\mathbb{R}^N) &\subset L^p(\mathbb{R}^N), & 2 \leq p < \infty, & N = 2; \\ H^1(\mathbb{R}^N) &\subset L^p(\mathbb{R}^N), & 2 \leq p \leq 2^*, & N \geq 3. \end{aligned}$$

O espaço $H_0^1(B_R)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(B_R)$ em $H^1(B_R)$. Consideramos em $H_0^1(B_R)$ o produto interno induzido por $H^1(B_R)$. Com este produto interno, $H_0^1(B_R)$ é um espaço de Hilbert. Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N).$$

Proposição A.2.6 *Seja $u \in L^2(B_R)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $u \in H_0^1(B_R)$.
- (ii) A função

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B_R; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R. \end{cases}$$

pertence a $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, neste caso, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Teorema A.2.7 (Imersões de Rellich) *As seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{aligned} H_0^1(B_R) &\subset L^p(B_R), & 1 \leq p \leq \infty, & N = 1; \\ H_0^1(B_R) &\subset L^p(B_R), & 1 \leq p < \infty, & N = 2; \\ H_0^1(B_R) &\subset L^p(B_R), & 1 \leq p < 2^*, & N \geq 3. \end{aligned}$$

Lema A.2.8 *Seja $u \in H^1$. Então, $u^+, u^-, |u| \in H^1$ e*

$$\begin{aligned} \nabla u^+ &= \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0; \\ 0, & \text{se } u \leq 0. \end{cases} \\ \nabla u^- &= \begin{cases} 0, & \text{se } u \geq 0; \\ -\nabla u, & \text{se } u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\nabla|u| = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0; \\ 0, & \text{se } u = 0; \\ -\nabla u, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

A.3 Teorema de Existência de Miranda e Resultados de P. L. Lions

Carlo Miranda em 1940 obteve o seguinte teorema:

Teorema A.3.1 (Miranda) *Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < L, \text{ para } 1 \leq i \leq N\}$ e suponha que a aplicação $F = (f_1, f_2, \dots, f_N) : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ é contínua sobre o fecho $\overline{G}$ de G e $F(x) \neq 0 = (0, 0, \dots, 0)$ para todo x sobre a fronteira ∂G de G . Suponha ainda que*

(1) $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_N) \geq 0$ para $1 \leq i \leq N$, e

(2) $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, +L, x_{i+1}, \dots, x_N) \leq 0$ para $1 \leq i \leq N$.

Então, $F(x) = 0$ tem uma solução em G .

Para $N = 1$, o teorema acima se reduz ao bem conhecido teorema do valor intermediário (ou de Bolzano). Miranda (em [25]) provou seu resultado usando o teorema do ponto fixo de Brouwer. Com o grau de Brouwer para uma aplicação conveniente, Vrahatis (em [36]) deu uma prova mais concisa para o teorema de Miranda.

A seguir, apresentaremos os resultados de P. L. Lions que utilizamos em nosso trabalho e se encontram em [18, 19].

Teorema A.3.2 (Princípio de Concentração-Compacidade) *Seja (ρ_n) uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo:*

$$\rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = \lambda > 0.$$

Então, existe uma subsequência (ρ_{n_k}) satisfazendo apenas uma das três possibilidades:

(1)(Compacidade) *Existe uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\rho_{n_k}(\cdot + y_k)$ é controlado, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $R_\epsilon < \infty$ verificando*

$$\int_{B_{R_\epsilon}(y_k)} \rho_{n_k} dx \geq \lambda - \epsilon.$$

(2)(Anulamento) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} \rho_{n_k} dx \right) = 0$ para todo $R < \infty$.

(3)(**Dicotomia**) Existe $\alpha \in (0, \lambda)$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existem $k_0 \geq 1$, $\rho_k^1, \rho_k^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ com $\rho_k^1 \geq 0$ e $\rho_k^2 \geq 0$ satisfazendo para $k \geq k_0$:

$$\|\rho_{n_k} - (\rho_k^1 + \rho_k^2)\|_1 \leq \epsilon, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^1 dx - \alpha \right| \leq \epsilon,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k^2 dx - (\lambda - \alpha) \right| \leq \epsilon \quad e \quad \text{dist}(\text{supp } \rho_k^1, \text{supp } \rho_k^2) \rightarrow \infty \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Lema A.3.3 (Lions) Seja $r > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

então $u_n \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

A.4 Regularidade de Soluções

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que as soluções do problema (1) são clássicas. Mais especificamente, vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema A.4.1 *Se $u \in X$ é uma solução não negativa do problema (1), então $u \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Além disso, $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para isto, vamos usar uma mudança de variável para obtermos soluções fracas de um problema semilinear correspondente. Esta mudança de variável foi introduzida por Liu et al. [22] (veja também Colin e Jeanjean [10]). Consideremos $v = f^{-1}(u)$, em que f é definida por

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(t)}} \quad \text{para} \quad t > 0 \text{ e } f(0) = 0,$$

$$f(t) = -f(-t) \quad \text{para} \quad t < 0.$$

O lema, a seguir, apresenta algumas propriedades da mudança de variável f .

Lema A.4.2 *A função $f(t)$ e sua derivada gozam das seguintes propriedades:*

- (1) f é unicamente definida, $C^2(\mathbb{R})$, e invertível;
- (2) $0 < f'(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $f'(0) = 1$;
- (3) $|f(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (4) $\frac{f(t)}{t} \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$;
- (5) $\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \rightarrow \sqrt{2}$ quando $t \rightarrow \infty$;
- (6) $\frac{f(t)}{2} \leq tf'(t) \leq f(t)$ para todo $t \geq 0$;
- (7) $|f(t)| \leq \sqrt{2|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (8) Existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$|t| \leq C_1|f(t)| + C_2|f(t)|^2 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prova. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = W(y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Como $W'(y) = -\frac{y}{(1+y^2)^{3/2}}$ é contínua, temos que W é localmente lipschitziana. Além disso, desde que W é par, pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias (cf. Sotomayor [33]), temos que f é única, ímpar e definida para t em um intervalo maximal (t^-, t^+) . Afirmamos que $t^\pm = \pm\infty$. Se não, digamos que $t^+ < \infty$. Seja $t_n \rightarrow t^+$ com $t_n < t^+$. Desde que $W \leq 1$, integrando $\frac{dy}{dt} = W(y)$, obtemos

$$|y(t_{n+1}) - y(t_n)| \leq |t_{n+1} - t_n|.$$

Então, $y(t_n)$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, converge para algum $a \in \mathbb{R}$. A solução de

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = W(y), \\ y(t^+) = a. \end{cases}$$

fornece-nos uma continuação de f para valores de $t > t^+$, contradizendo a maximalidade de t^+ . Similarmente, $t^- = -\infty$. Portanto, f está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, pela definição de W e $W' \in C(\mathbb{R})$, segue que $f \in C^2(\mathbb{R})$. Provando assim (1).

O item (2) segue da definição de f e do fato de f ser ímpar.

A desigualdade (3) é uma consequência de (2).

Como consequência do teorema do valor médio e da propriedade (2) acima, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(\theta t) \rightarrow 1, \text{ quando } t \rightarrow 0.$$

Assim, o item (4) está provado.

A primeira desigualdade em (6) é equivalente a $2t \geq \sqrt{1 + f^2(t)}f(t)$. Para verificá-la, consideramos a função $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $a(t) = 2t - \sqrt{1 + f^2(t)}f(t)$. Como $a(0) = 0$ e, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2 - \left[\frac{f^2(t)f'(t)}{\sqrt{1 + f^2(t)}} + f'(t)\sqrt{1 + f^2(t)} \right] \\ &= \frac{2(f'(t))^2}{(f'(t))^2} - [f^2(t)(f'(t))^2 + (f'(t))^2(1 + f^2(t))] \\ &= (f'(t))^2 > 0 \end{aligned}$$

obtemos a primeira desigualdade em (6). Analogamente, considerando a função $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $b(t) = f(t) - tf'(t)$, obtemos a segunda desigualdade. De

fato, $b'(t) = -tf''(t)$ e para $t > 0$ temos $f''(t) < 0$. Logo, $b(t) > 0$, para $t > 0$, e a segunda desigualdade em (6) fica provada.

Para provarmos (7), integramos $f'(t)\sqrt{1+f^2(t)} = 1$ e obtemos

$$\int_0^t f'(s)\sqrt{1+f^2(s)}ds = t, \text{ para } t > 0.$$

Usando a mudança de variável $y = f(s)$, segue-se

$$t = \int_0^{f(t)} \sqrt{1+y^2}dy \geq \int_0^{f(t)} ydy = \frac{f^2(t)}{2},$$

o que implica (7) para $t \geq 0$. Para $t < 0$, usamos que f é ímpar.

O item (8) é consequência imediata de (4) e (5).

Agora provaremos (5). Seja $t > t_0 > 0$, com t_0 fixado. Por definição, temos

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{1+f^2(s)}}ds.$$

Por (7) segue que $f^2(s) \leq 2s$ para $s \geq 0$. Logo, para todo $t > t_0$,

$$f(t) - f(t_0) \geq \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{1+2s}}ds.$$

Dado $c > 0$, pelo teorema do valor médio, existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{(1+c)^{1/2}} - \frac{1}{c^{1/2}} = -\frac{1}{2(\xi+c)^{3/2}} \geq -\frac{1}{c^{3/2}}.$$

Então, tomando $c = 2s$, obtemos, para todo $t > t_0$,

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_0) &\geq \int_{t_0}^t \frac{1}{(2s)^{1/2}}ds - \int_{t_0}^t \frac{1}{(2s)^{3/2}}ds \\ &= \left[\sqrt{2t} - \sqrt{2t_0} \right] - \left[-\frac{1}{\sqrt{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2t_0}} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(t_0) + \left[\sqrt{2t} - \sqrt{2t_0} \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{1}{\sqrt{2t_0}} \right] \\ &= -k(t, t_0) + \sqrt{2t} \end{aligned}$$

onde

$$k(t, t_0) = \sqrt{2t_0} - f(t_0) + \left[\frac{1}{\sqrt{2t_0}} - \frac{1}{\sqrt{2t}} \right].$$

Como $t > t_0$, e usando (7), temos

$$0 < k(t, t_0) \leq \sqrt{2t_0} - f(t_0) + \frac{1}{\sqrt{2t_0}} = C_1.$$

Consequentemente, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \geq \sqrt{2}$. Usando novamente (7) segue-se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \leq \sqrt{2}.$$

Portanto, (5) vale. ■

Temos o seguinte lema:

Lema A.4.3 *Se $u \in X$, $u \geq 0$ satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla u|^2 \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^p \phi dx \quad (\text{a.1})$$

para toda $\phi \in X$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty$, então, $v = f^{-1}(u) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^p f'(v) \psi dx$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ou seja, v é solução fraca do problema semilinear

$$-\Delta v = f'(v) [|f(v)|^p - V(x) f(v)] \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (\text{a.2})$$

e $v \geq 0$.

Prova. Inicialmente, façamos as seguintes verificações:

i) $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$;

ii) $\phi := \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \psi$ pertence a X , para toda $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Primeiramente, temos $f(v) = u$ e usando (8) do Lema A.4.2 segue que

$$\begin{aligned} |v| &\leq C_1 |f(v)| + C_2 |f(v)|^2 \\ &= C_1 |u| + C_2 |u|^2. \end{aligned}$$

Logo, $v^2 \leq C_3 u^2 + C_4 u^4$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^2 dx \leq C_3 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + C_4 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 dx < \infty.$$

Agora, $\nabla v = \nabla (f^{-1}(u)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))} \nabla u = \sqrt{1+u^2} \nabla u$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Em seguida, temos que

$$\phi^2 = \frac{1}{1+u^2} \psi^2 \leq \psi^2$$

e

$$\nabla \phi = -\frac{u \nabla u}{(1+u^2)^{3/2}} \psi + \frac{\nabla \psi}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\nabla \phi|^2 &\leq C \frac{\psi^2 u^2 |\nabla u|^2}{(1+u^2)^3} + C \frac{|\nabla \psi|^2}{1+u^2} \\ &\leq C_1 \psi^2 u^2 |\nabla u|^2 + C_2 |\nabla \psi|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla \phi|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \psi^4 u^2 |\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 |\nabla \psi|^2 dx < \infty.$$

Agora, note que $\phi^2 |\nabla u|^2 \leq \psi^2 |\nabla u|^2$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Finalmente, $u^2 |\nabla \phi|^2 \leq C_1 \psi^2 u^4 |\nabla u|^2 + C_2 u^2 |\nabla \psi|^2$. Usando a iteração de Moser do Lema 3.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 |\nabla u|^2 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < \infty.$$

e substituindo a função ϕ acima na equação (a.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) \nabla u \left(\frac{-\psi u \nabla u}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{\nabla \psi}{\sqrt{1+u^2}} \right) dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} u |\nabla u|^2 \frac{\psi}{\sqrt{1+u^2}} dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) u \psi}{\sqrt{1+u^2}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^p \frac{\psi}{\sqrt{1+u^2}} dx, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\psi u (1+u^2) |\nabla u|^2}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{(1+u^2) \nabla u \nabla \psi}{\sqrt{1+u^2}} \right) dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\psi u |\nabla u|^2}{\sqrt{1+u^2}} dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^p f'(v) \psi dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-\psi u |\nabla u|^2}{\sqrt{1+u^2}} + \sqrt{1+u^2} \nabla u \nabla \psi \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\psi u |\nabla u|^2}{\sqrt{1+u^2}} dx \\ + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^p f'(v) \psi dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^p f'(v) \psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \psi dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo, v é solução fraca da equação semilinear $-\Delta v = g(x)$ em $\mathbb{R}^N$, em que $g(x) = f'(v(x)) [f(v(x))^p - V(x)f(v(x))]$. $\blacksquare$

Lema A.4.4 *Se $v \geq 0$ é uma solução fraca de (a.3), então $v \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $v(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e*

$$v(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Prova. Note que $|g(x)| \leq u(x)^p - V(x)u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^q dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{pq} dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q dx < \infty,$$

donde $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \geq 2$. Assim, pela teoria de regularidade elíptica $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \geq 2$. Logo, $v \in C_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e isto implica que g é localmente Hölder contínua. Consequentemente, $v \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$. Portanto, v é uma solução clássica.

Agora, escrevamos a nossa equação na seguinte forma:

$$-\Delta v = f'(v) [f(v)^p + V(x)v - V(x)v - V(x)f(v)],$$

ou seja,

$$-\Delta v + f'(v)V(x)v = f'(v)f(v)^p + V(x)f'(v)(v - f(v)).$$

Como $f(v) = u \geq 0$ temos, pelas propriedades de f , que $v \geq 0$, $f'(v) > 0$ e $v - f(v) \geq 0$. Daí,

$$-\Delta v + c(x)v \geq 0,$$

onde $c(x) = f'(v(x))V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Podemos, assim, aplicar o princípio do máximo forte (cf. Gilbarg e Trudinger [12, p. 35 Teorema 3.5]) para

concluirmos que $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Agora, vamos mostrar que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e que $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla v \nabla \psi + V(x) f(v) f'(v) \psi] dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^p f'(v) \psi dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (\text{a.3})$$

Por um argumento de densidade, podemos ver que (a.3) vale para toda $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Para cada $k > 0$, definamos

$$v_k = \begin{cases} v, & \text{se } v \leq k; \\ k, & \text{se } v \geq k. \end{cases}$$

Sejam $\zeta_k = v_k^{2(\beta-1)} v$ e $\eta_k = v_k^{\beta-1} v$ com $\beta > 1$ a ser determinado mais tarde.

Tomando ζ_k como função teste, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v|^2 dx &+ 2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} v v_k^{2(\beta-1)-1} \nabla v_k \nabla v dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^p v v_k^{2(\beta-1)} dx. \end{aligned}$$

Observando que a segunda parcela no lado esquerdo desta desigualdade é não negativa e por (7) do Lema A.4.2, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v|^2 dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} v^{(p+1)/2} v_k^{2(\beta-1)} dx = C_2 \int_{\mathbb{R}^N} v^{r-2} \eta_k^2 dx,$$

em que $r = \frac{p+1}{2}$. Pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_k^{2^*} dx \right)^{2/2^*} &\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta_k|^2 dx \\ &\leq C_4 \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v|^2 dx + C_5 (\beta-1)^2 \int_{\mathbb{R}^N} v^2 v_k^{2(\beta-2)} |\nabla v_k|^2 dx \\ &\leq C_6 \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v|^2 dx \\ &\leq C_7 \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} v^{r-2} \eta_k^2 dx, \end{aligned}$$

onde usamos que $v_k \leq v$, $1 \leq \beta^2$ e $(\beta-1)^2 \leq \beta^2$. Logo, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_k^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_7 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v^{2^*} dx \right)^{(r-2)/2^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_k^{22^*/(2^*-r+2)} dx \right)^{(2^*-r+2)/2^*}.$$

Desde que $\eta_k \leq v^\beta$ e usando a imersão de Sobolev, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (v v_k^{\beta-1})^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_8 \|v\|^{r-2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v^{22^*/(2^*-r+2)} dx \right)^{(2^*-r+2)/2^*}.$$

Escolhendo $\beta = 1 + (2^* - r)/2$, temos $\beta 22^*/(2^* - r + 2) = 2^*$. Logo,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v v_k^{\beta-1}|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_8 \|v\|^{r-2} \|v\|_{\beta\alpha^*}^{2\beta},$$

em que $\alpha^* = 22^*/(2^* - r + 2)$. Aplicando o Lema de Fatou em k , concluímos que

$$\|v\|_{\beta 2^*} \leq (\beta^2 C_8 \|v\|^{r-2})^{1/2\beta} \|v\|_{\beta\alpha^*}.$$

Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, definamos $\beta_{m+1}\alpha^* := 2^*\beta_m$ com $\beta_0 := \beta$. Usando o argumento anterior para β_1 , obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{\beta_1 2^*} &\leq (\beta_1^2 C_8 \|v\|^{r-2})^{1/2\beta_1} \|v\|_{\beta_1 \alpha^*} \\ &\leq (\beta_1^2 C_8 \|v\|^{r-2})^{1/2\beta_1} (\beta^2 C_8 \|v\|^{r-2})^{1/2\beta} \|v\|_{\beta\alpha^*} \\ &\leq (C_8 \|v\|^{r-2})^{1/2\beta_1 + 1/2\beta} (\beta)^{1/\beta} (\beta_1)^{1/\beta_1} \|v\|_{2^*}. \end{aligned}$$

Observando que $\beta_m = \beta^m \beta$, por iteração, obtemos

$$\|v\|_{\beta_m 2^*} \leq (C_8 \|v\|^{r-2})^{1/2\beta \sum_{i=0}^m \beta^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^m \beta^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^m i\beta^{-i}} \|v\|_{2^*}.$$

Como $\beta > 1$, as séries $\sum_{i=0}^m \beta^{-i}$ e $\sum_{i=0}^m i\beta^{-i}$ são convergentes. Logo, podemos tomar o limite quando $m \rightarrow \infty$ para concluirmos que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|v\|_\infty \leq C_9 \|v\|^{(r-2)/(2^*-r)}.$$

Portanto por (6) do Lema A.4.2, para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi \geq 0$, usando (a.3) e que $0 \leq v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \psi dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} v \psi dx.$$

Logo, pelo Teorema 8.17 em [12, p. 194], para um $t > N/2$ e para qualquer bola $B_r(x)$ centrada em qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\sup_{y \in B_r(x)} v(y) \leq C(\|v\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v\|_{L^t(B_{2r}(x))})$$

Em particular,

$$v(x) \leq C(\|v\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v\|_{L^t(B_{2r}(x))})$$

e como

$$\|v\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v\|_{L^t(B_{2r}(x))} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

concluimos que

$$v(x) \rightarrow 0, \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty.$$

■

Prova do Teorema A.4.1 Dada uma $u \not\equiv 0, u \in X$ solução não negativa do problema (1) pelos Lemas A.4.3 e A.4.4 temos que $v = f^{-1}(u) \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $v > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Assim, usando as propriedades da mudança de variável f (Lema A.4.2), obtemos que $u \in C_{\text{loc}}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $u > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, além disso, $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, encerrando a prova do teorema.

■

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ambrosetti e Z-Q. Wang. *Positive solutions to a class of quasilinear elliptic equations on R* . Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9:55–68, 2003.
- [2] F. G. Bass e N. N. Nasanov. *Nonlinear electromagnetic spin waves*. Physics Reports, 189:165–223, 1990.
- [3] H. Berestycki e P. L. Lions. *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 82:313–345, 1983.
- [4] A. V. Borovskii e A. L. Galkin. *Dynamic modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter*. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 77:562–573, 1993.
- [5] H. S. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, T. Lehner, e G. Bonnaud. *Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma*. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 5:3539–3550, 1993.
- [6] H. Brézis. *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.
- [7] A. Castro, J. Cossio, e J. M. Neuberger. *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 27: 1041–1053, 1997.
- [8] G. Cerami, S. Solimini, e M. Struwe. *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*. Journal of Functional Analysis, 69:289–306, 1986.
- [9] X. L. Chen e R. N. Sudan. *Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse in underdense plasma*. Physical Review Letters, 70:2082–2085, 1993.

-
- [10] M. Colin e L. Jeanjean. *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*. Nonlinear Analysis, 56:213–226, 2004.
- [11] A. Floer e A. Weinstein. *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*. Journal of Functional Analysis, 69:397–408, 1986.
- [12] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 2001.
- [13] R. W. Hasse. *A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations*. Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, 37:83–87, 1980.
- [14] A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, e A. S. Kovalev. *Magnetic solitons*. Physics Reports, 194:117–238, 1990.
- [15] S. Kurihara. *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*. Journal of the Physical Society of Japan, 50:3262–3267, 1981.
- [16] E. W. Laedke, K. H. Spatschek, e L. Stenflo. *Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions*. Journal of Mathematical Physics, 24:2764–2769, 1983.
- [17] H. Lange, B. Toomire, e P. F. Zweifel. *Time-dependent dissipation in nonlinear Schrödinger systems*. Journal of Mathematical Physics, 36:1274–1283, 1995.
- [18] P. L. Lions. *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1*. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1:109–145, 1984.
- [19] P. L. Lions. *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 2*. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1:223–283, 1984.
- [20] A. G. Litvak e A. M. Sergeev. *One-dimensional collapse of plasma waves*. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, 27:517–520, 1978.
- [21] J-Q. Liu e Z-Q. Wang. *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations I*. Proceedings of the American Mathematical Society, 131:441–448, 2003.
-

-
- [22] J-Q. Liu, Y-Q. Wang, e Z-Q. Wang. *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*. Journal of Differential Equations, 187:473–493, 2003.
- [23] J-Q. Liu, Y-Q. Wang, e Z-Q. Wang. *Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method*. Communications in Partial Differential Equations, 29:879–901, 2004.
- [24] V. G. Makhankov e V. K. Fedyanin. *Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory*. Physics Reports, 104:1–86, 1984.
- [25] C. Miranda. *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 3:5–7, 1940.
- [26] A. Nakamura. *Damping and modification of exciton solitary waves*. Journal of the Physical Society of Japan, 42:1824–1835, 1977.
- [27] M. Poppenberg, K. Schmitt, e Z-Q. Wang. *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*. Calculus of Variations, 14:329–344, 2002.
- [28] M. Porkolab e M. V. Goldman. *Upper-hybrid solitons and oscillating-two-stream instabilities*. Physics of Fluids, 19:872–881, 1976.
- [29] G. R. W. Quispel e H. W. Capel. *Equation of motion for the Heisenberg spin chain*. Physics Letters A, 85:248–250, 1981.
- [30] P. H. Rabinowitz. *On a class of nonlinear Schrödinger equations*. ZAMP, 43:270–291, 1992.
- [31] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics 1: Functional Analysis*. Academic Press, 1980.
- [32] B. Ritchie. *Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions*. Physical Review E, 50:687–689, 1994.
- [33] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 1979.
- [34] W. A. Strauss. *Existence of solitary waves in higher dimensions*. Communications in Mathematical Physics, 55:149–162, 1977.
-

-
- [35] S. Takeno e S. Homma. *Classical planar Heisenberg ferromagnet, complex scalar field and nonlinear excitations*. Progress of Theoretical Physics, 65: 172–189, 1981.
- [36] M. N. Vrahatis. *A short proof and a generalization of Miranda's existence theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society, 107:701–703, 1989.
-