Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Soluções Radiais Positivas para Problemas Elípticos Envolvendo Crescimento Crítico

José Francisco Alves de Oliveira

João Pessoa - PB
Abril/2009

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

José Francisco Alves de Oliveira

Soluções Radiais Positivas para Problemas Elípticos Envolvendo Crescimento Crítico

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa - PB
Abril/2009

Soluções Radiais Positivas para Problemas Elípticos Envolvendo Crescimento Crítico

por

José Francisco Alves de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

João Marcos Bezerra do Ó

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Kyril Tintarev - Uppsala University

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2009

Agradecimentos

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó que, com sabedoria e dedicação, guiou-me no caminho correto para o desenvolvimento desse trabalho; participando ativamente com sábias idéias e sugestões tão características de sua pessoa.

- Aos professores de graduação e pós-graduação, que acreditando em meu trabalho, incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento, auxiliando-me sempre. Especialmente, aos professores Uberlandio Batista Severo, Newton Luis Santos, Everaldo Souto de Medeiros e Marcondes Rodrigues Clark, que sempre apoiaram e incentivaram meus estudos.

- Aos colegas de curso e amigos, pela troca de experiências e convivência harmoniosa. Em especial ao amigo Manassés que, com atenção, acompanhou o desenrolar desse trabalho.

- A minha família, pelo incentivo e apoio.

- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro que propiciou-me todo um aprendizado sistemático, culminando para este trabalho.

Dedicatória

A todos que contribuiram de forma direta ou indireta para o desenvolvimento desse trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados de existência, não existência e unicidade de soluções radiais positivas para equações elípticas semilineares em subdomínios do plano euclidiano. As não linearidades que consideramos envolvem crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser.

Utilizamos uma técnica conhecida como *shooting method* introduzida em 1905 por Severini [21]. Um método iterativo que permite determinar a solução de um problema de contorno por meio da análise de soluções aproximadas de uma família de problemas de valor inicial geradas por este. Por seu caráter iterativo, o *shooting method* tem sido utilizado com eficiência em matemática aplicada, como por exemplo, matemática computacional, onde formula-se algorítmos específicos para executar tais iterações. Aqui, dentro de um enfoque abstrato, utilizaremos técnicas analíticas de continuidade para analisar se determinada iteração converge para uma solução do problema de contorno em estudo.

Abstract

In this work we present results of existence, non-existence and uniqueness of radial positive solutions for elliptic semilinear equations in subdomains of euclidean plane. We consider nonlinearities involving critical growth the type Trudinger-Moser.

The technique used is shooting method introduced in 1905 by Severini [21]. This is a iterative method which permits determine the solution of a contour problem by analysis of approximated solutions of a family of initial value problems generated by himself. For its iteractive caracter, the shooting method it has been used effectively in applied mathematics, for exemple in the computational mathematical, where specific algorithms are used to perform such interactions. Here in an abstract approach through analytic techniques of continuity we examined whether an iteration converges to a solution of the contour problem under study.

Sumário

Notações

Notações Gerais

$B_r(0)$	bola aberta de centro 0 e raio r,
q.t.p.	quase toda parte,
λ_1	primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$,
$\vert \cdot \vert$	norma euclidiana
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u,
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u,
$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$	derivada normal exterior,
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	aberto,
$\partial\Omega$	fronteira de Ω,
$\limsup_{t \to a} f(t)$	limite superior da função $f(t)$ quando $t \to a$,
$\liminf_{t \to a} f(t)$	limite inferior da função $f(t)$ quando $t \to a$,
$\blacksquare$	indica final de demonstração.

Espaços de Funções

$L^p(\Omega) = \big\{u \text{ mensurável sobre } \Omega \text{ e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty\big\}$, $1 \leq p < \infty$,

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mensurável sobre } \Omega \text{ e existe } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega\}$,
$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ semi-eixo real não negativo,

$C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$,

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$

$C_c(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω,

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$ funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \ \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$,

$W_0^{1,p}(\Omega)$ o completamento de $C_c^1(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,

$H_0^1(\Omega)$ espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$,

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$,

$f = o(g)$ quando $s \to s_0$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(s)| \leq \epsilon |g(s)|$ quando $|s - s_0| < \delta$,

$f = O(g)$ quando $s \to s_0$ se existem constantes $C \geq 0$ e $\delta > 0$ tais que $|f(s)| \leq C|g(s)|$ quando $|s - s_0| < \delta$.

$f = o(g)$ quando $s \to +\infty$ se dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $s > R$ implica $|f(s)| \leq \epsilon |g(s)|$,

$f = O(g)$ quando $s \to +\infty$ se existem constantes $C \geq 0$ e $R > 0$ tais que $|f(s)| \leq C|g(s)|$ quando $s > R$.

Introdução

Neste trabalho, estudamos uma classe de problemas elípticos da forma

$$(P_1) \qquad \begin{array}{lll} -\Delta u = f(u) & \text{em} & \mathbb{R}^2, \\ u(x) \to 0 & \text{quando} & |x| \to \infty \end{array}$$

no qual a não linearidade $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função localmente lipschitziana e com sinal indeterminado, isto é, f pode eventualmente assumir valores negativos e positivos. As não linearidades que consideramos aqui atigem os crescimentos crítico, polinomial e exponencial.

Utilizando uma técnica conhecida como *shooting method*, o qual consiste em resolver um problema de contorno atráves da análise de uma família de problemas de valores iniciais; provaremos existência, não existência e unicidade de soluções radiais em uma bola $B_1(0)$. Além disso, estaremos interessandos ainda em soluções definidas em todo $\mathbb{R}^2$; tais soluções são denominadas *ground states*, um termo preveniente do contexto físico que deu origem ao problema acima e também serviu como motivação para o estudo do mesmo.

Organizamos o trabalho da seguinte forma:

Capítulo 1: Nesta parte do trabalho, estudamos o problema (P_1) para uma não linearidade geral f com o objetivo de provar a existência de soluções definidas em todo $\mathbb{R}^2$. O principal resultado para *ground states* estudado não é formulado em termos de condições de crescimento de f; mas, por meio de uma desigualdade envolvendo a função dada pela expressão

$$h(u) = g(u) - \frac{ug'(u)}{2} - \frac{y_0 g'(u)}{2\left(e^{\frac{g(u)-g(y_0)}{2}} - 1\right)},$$

e o limite inferior de f

$$\inf\{f(u); u > 0\} = -M$$

onde $g(u) = \ln f(u)$, para $f(u) > 0$. Com hipóteses apropriadas sobre f, estudamos um critério para existência de *ground states* o qual está relacionado a vacuidade de um conjunto apropriado. Utilizando esse critério associado ao *shooting method* estabelecemos existência de soluções para uma larga classe de não linearidades f.

Capítulo 2: Aqui, por meio do *shooting method*, nos dedicamos ao estudo resultados de existência, não existência e unicidade de soluções radiais em uma bola

$B_1(0)$ do problema (P_1) para não linearidades com crescimento crítico. Mais especificamente, trabalhamos com o problema,

$$\begin{aligned} -\Delta u = h(u)e^{\alpha u^2} \quad & \text{em} \quad && \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \quad & \text{sobre} \quad && \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde h é um termo de menor ordem com respeito a $e^{\alpha u^2}$, mais precisamente

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{h(r)}{e^{\alpha r^2}} = 0.$$

Procuramos determinar a linha de divisão para a solubilidade e respectivamente a não solubilidade do problema com relação ao crescimento assintótico do termo de menor ordem h. Veremos que o crescimento que garante a tal solubilidade é o crescimento crítico de h. Mais precisamente, mostraremos que tomando $\Omega = B_1(0)$ existirá uma constante $K_0 > 0$ tal que se

$$h(r) = \frac{K}{r}, \quad \text{para} \quad r > r_1, \quad \text{com} \quad K < K_0$$

e h satisfaz condições adequadas em torno do zero então o problema acima não tem solução radial. Observamos que por [17] qualquer solução positiva de (P_1) sobre $B_1(0)$ é necessariamente radial, isto implica que não existe solução positiva sobre estas hipóteses.

No **Capítulo 3**, nos dedicamos ao estudo de um resultado de unicidade de soluções positivas de (P_1) no qual f tem crescimento exponencial. Mais especificamente, tratamos do problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda u e^{u^\theta} \quad & \text{em} \quad && B \\ u > 0 \quad & \text{em} \quad && B \\ u = 0 \quad & \text{sobre} \quad && \partial B. \end{aligned}$$

No qual $B \subset \mathbb{R}^2$ representa o disco unitário centrado na origem, $\lambda > 0$ e $1 < \theta \leq 2$.

A técnica utilizada aqui segue o espírito daquela utilizada nos capítulos 1 e 2, ou seja, utilizaremos ainda o *shooting method*.

Finalmente, no **Apêndice A**, apresentamos alguns resultados clássicos que foram utilizados ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Ground States e Problema de Dirichlet para $-\Delta u = f(u)$ em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo, objetivamos encontrar soluções positivas para o problema

$$(P_1) \qquad \begin{array}{lll} -\Delta u = f(u) & \text{em} & \mathbb{R}^2, \\ u(x) \to 0 & \text{quando} & |x| \to \infty \end{array}$$

no qual $f(u)$ é uma função positiva para u grande, mas não necessariamente para todo $u > 0$. Tais soluções são muitas vezes denominadas *ground states*, um termo proveniente do contexto físico que deu origem ao problema acima. Para cumprir nosso objetivo, usaremos o *shooting method* o qual permite encontrar soluções para um problema de contorno através da redução deste a um problema de valor inicial conveniente. A principal dificuldade encontrada é mostrar que se $u(0)$ for escolhido suficientemente grande então a solução radial associada tem um zero, isto é, que o problema de Dirichlet tem solução em alguma bola finita.

1.1 Comentários e Hipóteses Gerais

A solubilidade do problema de Dirichlet

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $f(u)$ é positiva para u grande, ou talvez para todo $u > 0$, está extremamente relacionada com estimativas do crescimento de $f(u)$ quando $u \to \infty$. Aqui, os casos $N \geq 3$ e $N = 2$ são impressionantemente diferentes. Para o caso $N \geq 3$, uma condição encontrada, veja por exemplo [2], é dada por

$$f(u) = O(u^p) \quad \text{para} \quad u \to \infty, \quad \text{com} \quad 1 < p < \frac{N+2}{N-2}.$$

A condição $f(u) = O(u^p)$ significa que existem constantes $C \geq 0$ e $R > 0$ tais que

$$\frac{|f(u)|}{u^p} \leq C \quad \text{para} \quad u > R.$$

Para $N = 2$, temos, por exemplo veja [20],

$$\ln f(u) = o(u^2) \quad \text{quando} \quad u \to \infty.$$

isto é,

$$\frac{\ln|f(u)|}{u^2} \to 0 \quad \text{quando} \quad u \to +\infty.$$

Tem sido de muito interesse o estudo de casos para $N \geq 3$ envolvendo o expoente crítico $\frac{N+2}{N-2}$. O caso particular, em que

$$f(u) = u^q + u^{\frac{N+2}{N-2}},\ 1 \leq q < \frac{N+2}{N-2}.$$

foi estudado em [10] e em [3], tendo em foco o *shooting method*, que se mostrou eficiente.

Estabeleceremos agora hipóteses gerais sobre f que serão exigidas durante o capítulo.

(H_1) A função f é localmente lipschitziana sobre $[0, \infty)$.

(H_2) $f(0) = 0$ e existe um número $\zeta > 0$ tal que

$$F(u) := \int_0^u f(s)ds < 0 \quad \text{para} \quad 0 < u < \zeta, \quad F(\zeta) = 0$$

e ainda $f(u) > 0$ para $u \geq \zeta$. Veja figura 1.1 abaixo.

(H_3) Existe um número $y_0 \geq 0$ tal que $f(u) > 0$ para $u \geq y_0$ e a função

$$g(u) := \ln f(u), \quad u \geq y_0$$

satisfaz $g \in C^2([y_0, \infty))$, $g'(u) > 0$ e $g''(u) \geq 0$.

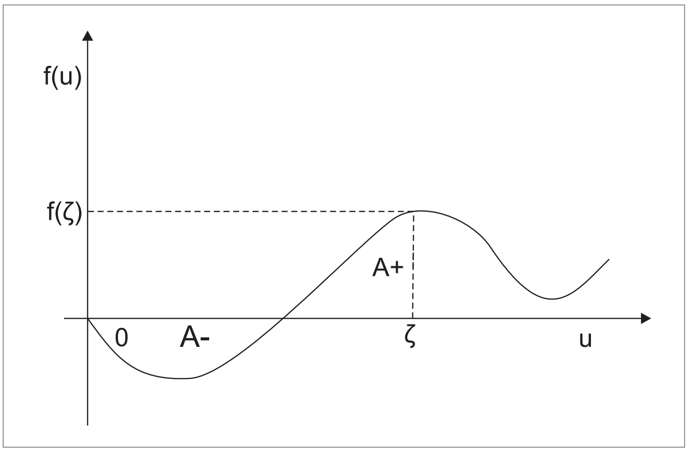

Figura 1.1: Possível configuração para f.

Estaremos sempre supondo, ao longo do capítulo, que f satisfaz (H_1) e (H_3). Quando nos referirmos a existência de *ground states* suporemos também (H_2). Neste caso, y_0 deverá ser necessariamente um número positivo; pois senão, (H_2) e (H_3) entrariam em contradição.

O principal resultado que estudamos sobre a existência de *ground states* será formulado em termos de uma desigualdade envolvendo a função $h : [y_0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada pela expressão

$$h(u) = g(u) - \frac{ug'(u)}{2} - \frac{y_0 g'(u)}{2\left(e^{\frac{g(u)-g(y_0)}{2}} - 1\right)} \tag{1.1}$$

e da cota inferior de f

$$\inf\{f(u); u > 0\} = -M. \tag{1.2}$$

Note que, por (H_2), M é não negativo. Mas precisamente, para garantir a existência de *ground states*, suporemos a existência de um valor $\gamma > \max\{y_0, \zeta\}$ que satisfaça a condição

$$h(\gamma) > \ln M + 1. \tag{1.3}$$

Aqui, no caso em que $M = 0$, a condição (1.3) obviamente não faz sentido. Neste caso, trabalhamos com valores $\ln x$ para $x > 0$ suficientemente pequeno. Uma vez que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ e, para cada $\gamma > 0$, $h(\gamma)$ é um número fixo, a condição (1.3) é satisfeita para $x > 0$ suficientemente pequeno.

1.2 Transformações e Shooting Method

Estamos interessados em provar a existência de soluções numa bola, $B_R(0)$, para o problema (P_1). Devido ao Teorema 12 Apêndice A tais soluções são necessariamente radiais, isto é, soluções com a propriedade $u(x) = v(r)$, para alguma função $v : [0, R] \to [0, \infty)$; onde $r = r(x)$ é a norma euclidiana. Por conveniência, para uma solução u radial, denotaremos $u(x) = u(r)$. Para uma função radial u duas vezes continuamente diferenciável vale

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r}.$$

Dessa forma, depois de nos restringirmos a soluções radiais, reduzimos o problema (P_1) ao seguinte

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + f(u) = 0, &\quad \text{em} \quad (0, \infty) \\ u'(0) = 0, &\quad u(\infty) = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde estamos denotando $u(\infty) = \lim_{r\to\infty} u(r)$. Aqui, podemos trocar a singularidade em $r = 0$ por uma em $t = \infty$ por meio da inversão de Atkinson e Peletier, isto é, a transformação

$$t = -2\ln\frac{r}{2}, \quad y(t) = u(r). \tag{1.5}$$

Usando esta transformação, temos

$$u_r = -\frac{2y'(t)}{r}$$

e diferenciando novamente

$$u_{rr} = \frac{4y''(t)}{r^2} + \frac{2y'(t)}{r^2}.$$

Logo, combinando as equações anteriores podemos escrever

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} = \frac{4y''(t)}{r^2}.$$

Uma vez que $e^{-t} = \dfrac{r^2}{4}$, usando (1.4), temos a equação

$$y''(t) + e^{-t} f(y) = 0. \tag{1.6}$$

Sendo assim, trocamos o problema (P_1) pelo seguinte

$$(P_2) \qquad \begin{aligned} y''(t) + e^{-t} f(y) = 0 &\quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \\ y(t) > 0 &\quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \\ \sup\{y(t)\} < \infty &\quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \\ \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0. & \end{aligned}$$

Isto, obviamente, não causa mudança na natureza do problema, mas insere este dentro da teoria clássica da equação generalizada de Emden-Fowler [15] e de seus argumentos. Como consequência, se existem t_0 real e uma solução y de (P_2) tais que $y(t) \geq y_0$ para $t \geq t_0$ então $\lim_{t\to\infty} y'(t)$ existe. Além disso, este limite é obrigatoriamente nulo. Denotamos $y'(\infty) = 0$. Para justificar esta afirmação notemos que, por (1.6) e (H_3), temos $y'' < 0$ para $y \geq y_0$. Portanto, y é uma função côncava e y' é monótona decrescente para $t \geq t_0$. Logo, $\lim_{t\to\infty} y'(t)$ existe. Para este ocorre uma das quatro opções: um número positivo, zero, um número negativo ou $-\infty$. Estas duas últimas podem ser excluídas porque $y(t) > 0$ e côncava para $t \geq t_0$. A primeira opção também já que y é limitada. Outra observação é a seguinte: sendo y' monótona decrescente para $t \geq t_0$ e $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$ devemos ter $y'(t) > 0$ neste intervalo. Em particular, y deve ser monótona crescente para $t \geq t_0$, portanto, também existe $\lim_{t\to\infty} y(t) = \gamma$. Denotaremos este último limite por $y(\infty) = \gamma$. Note que γ é finito uma vez que y é monótona e limitada para $t \geq t_0$.

Por outro lado, dado $\gamma \in (0, \infty)$ existe única solução $y(t, \gamma)$, do seguinte problema

$$(P_\gamma) \qquad \begin{aligned} y'' + e^{-t} f(y) &= 0, \\ y(t) &> 0, \\ y(\infty) = \gamma \quad \text{e} \quad y'(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

definida em um intervalo I.

A seguir daremos um resultado que justifica a afirmação acima.

Teorema 1 *Suponha que f satisfaz a hipótese (H_1). Então para qualquer $\gamma > 0$ existe única solução $y = y(t,\gamma)$ do problema (P_γ) definida em um intervalo máximo (ω_-, ∞). Além disso, para cada $t \in (\omega_-, \infty)$, $y(t,\gamma)$ e $y'(t,\gamma)$ dependem continuamente de γ.*

Demonstração: Fixado $\gamma > 0$ arbitrário, consideremos o intervalo $[0, \gamma + \epsilon]$ para algum $\epsilon > 0$. Uma vez que $[0, \gamma + \epsilon]$ é compacto e, por (H_1), f localmente lipschitziana sobre $[0, \infty)$ temos f lipschitziana sobre $[0, \gamma + \epsilon]$. Lembre-se que uma função localmente lipschitziana definida num compacto é também lipschitziana neste compacto. Sejam K a constante de Lipschitz de f restrita a $[0, \gamma + \epsilon]$ e $b = \sup_{y \in [0,\gamma+\epsilon]} |f(y)|$. Integrando por partes, um cálculo direto fornece

$$\int_t^\infty (s-t)e^{-s} ds = e^{-t}.$$

Assim, podemos usar o rápido decaimento de e^{-t} e garantir a existência de uma valor t_1, suficientemente grande, tal que

$$k := K \int_{t_1}^\infty (s - t_1)e^{-s} ds < 1 \quad \text{e} \quad b \int_{t_1}^\infty (s - t_1)e^{-s} ds \leq \epsilon. \tag{1.7}$$

Fixemos o intervalo $I = (t_1, \infty)$. Agora uma função $y : I \to [0, \gamma + \epsilon]$ é solução de (P_γ) se, e somente se, y é contínua, uniformemente limitada e satisfaz a equação integral

$$y(t) = \gamma - \int_t^\infty (s-t) f(y(s)) e^{-s} ds. \tag{1.8}$$

De fato, se uma tal função $y : I \to [0, \gamma+\epsilon]$ satisfaz a equação integral acima, usando que f limitada, isto é, $-b \leq f(y(t)) \leq b$ temos

$$-b \int_t^\infty (s-t)e^{-s} ds \leq \int_t^\infty (s-t) f(y(s)) e^{-s} ds \leq b \int_t^\infty (s-t)e^{-s} ds. \tag{1.9}$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty (s-t) f(y(s)) e^{-s} ds = 0.$$

Assim, por (1.8), temos claramente

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \gamma.$$

Além disso, diferenciando em (1.8), chegamos a equação

$$y'(t) = \int_t^\infty f(y(s)) e^{-s} ds,$$

portanto, mais uma vez, usando que f é limitada para todo $y \in [0, \gamma + \epsilon]$ temos

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = y'(\infty) = 0.$$

Diferenciando novamente temos ainda

$$y'' + e^{-t} f(y) = 0.$$

Reciprocamente se $y : I \to [0, \gamma + \epsilon]$ é solução de (P_γ), integrando duas vezes e usando as condições iniciais chegaremos à equação (1.8). Portanto, para encontrar uma solução local de (P_γ) bastar resolver a equação integral acima em algum intervalo, digamos I.

Considere X o espaço das funções contínuas e uniformemente limitadas definidas sobre I assumindo valores em $[0, \gamma + \epsilon]$, com a métrica da convergência uniforme, isto é,

$$d(y, z) = \sup_{t \in I} |y(t) - z(t)|.$$

Seja $T : X \to X$ tal que

$$T(y)(t) = \gamma - \int_t^\infty (s - t) f(y(s)) e^{-s} ds.$$

É claro que $T(y)$ é contínua para todo $y \in X$. Além disso, afirmamos que

$$0 \leq T(y)(t) \leq \gamma + \epsilon \quad \forall t \in I, \quad \forall y \in X.$$

De fato, como $\gamma > 0$ e

$$\lim_{t \to \infty} \int_t^\infty (s - t) f(y(s)) e^{-s} ds = 0$$

aumentando t_1, se necessário, segue-se de (1.8) que $T(y)(t) \geq 0$ para todo $t \in I$. Para concluir a segunda desigualdade, note que por (1.7) e pela primeira desigualdade em (1.9), para todo $t \in I$, vale

$$T(y)(t) = \gamma - \int_t^\infty (s - t) f(y(s)) e^{-s} ds \leq \gamma + b \int_t^\infty (s - t) e^{-s} ds \leq \gamma + \epsilon.$$

Portanto, T está bem definida e dados $y, z \in X$ temos

$$\begin{aligned}
|T(y)(t) - T(z)(t)| &\leq \int_t^\infty (s - t) e^{-s} |f(z(s)) - f(y(s))| ds \\
&\leq K \int_t^\infty (s - t) e^{-s} |z(s) - y(s)| ds \\
&\leq K \int_{t_1}^\infty (s - t_1) e^{-s} \sup_{t \in I} |z(s) - y(s)| ds \\
&= k d(y, z),
\end{aligned}$$

onde a constante k é dada por (1.7). Segue das desigualdades acima que

$$d(T(y), T(z)) \leq k d(y, z) \quad \text{com} \quad 0 \leq k < 1,$$

isto é, T é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe única $y \in X$ tal que $T(y) = y$, ou seja, y satisfaz (1.8).

Com a garantia de existência de solução para $t \in I$, fixamos $\tau \in I$, para cada $\gamma > 0$ e $y = y(t, \gamma)$ solução de (P_γ) sobre I, fazemos $y(\tau, \gamma) = \alpha_\gamma$ e $y'(\tau, \gamma) = \beta_\gamma$. Com essa reformulação temos um novo problema

$$\begin{aligned}
v'' + e^{-t} f(v) = 0, \quad v > 0 \\
v(\tau) = \alpha_\gamma, \quad v'(\tau) = \beta_\gamma.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Devido a Picard, Teorema 13 do Apêndice A, para cada γ fixado, o problema de valor inicial (1.10) possui única solução, $v = v(t,\gamma)$, definida em algum intervalo J contendo τ. Além disso, pelo Teorema 14 do Apêndice A, a única solução $v = v(t,\gamma)$ pode ser estendida a um intervalo máximo de definição (ω_-, ω_+); pelo que provamos anteriormente temos $\omega_+ = +\infty$ e, por unicidade, $v(t,\gamma) = y(t,\gamma)$ sobre $I = (t_1, \infty)$. Em particular, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t,\gamma) = \gamma$ e assim qualquer solução de (1.10) é também uma solução de (P_γ) em seu intervalo máximo de definição. Por essa razão, denotaremos $y(t,\gamma)$ a única solução, para γ fixado, de (1.10) definida em (ω_-, ∞). Finalmente, pelos Teoremas 16 e 17 do Apêndice A aplicados a (1.10) $y(t,\gamma)$ e $y'(t,\gamma)$ dependem continuamente de γ para cada $t \in (\omega_-, \infty)$. ∎

Na discussão que se segue estamos supondo a hipótese (H_2).

Para cada $\gamma \in (0,\infty)$, seja $\omega_-(\gamma) = T(\gamma)$ o menor valor para o qual a solução de (P_γ) ainda está definida, isto é, $(T(\gamma),\infty)$ é o intervalo máximo de definição de $y(t,\gamma)$ para o qual a mesma ainda é positiva.

Note que, pelo Teorema 16 Apêndice A, se $T(\gamma)$ é o primeiro zero de $y(t,\gamma)$ partindo de ∞, este depende continuamente de γ. Além disso, em todo caso; pelo Teorema 15 do Apêndice A, temos as seguintes possibilidades para $T(\gamma)$:

(i) $T(\gamma) = -\infty$ e $y(t,\gamma)$ é positiva sobre $\mathbb{R}$.

(ii) $T(\gamma) > -\infty$ e ocorre

$$y(T(\gamma),\gamma) = 0 \;\text{ e }\; y'(T(\gamma),\gamma) > 0$$

ou possivelmente,

$$\limsup_{t\to T(\gamma)} y(t,\gamma) = \infty.$$

Note que $y'(T(\gamma),\gamma) > 0$ no caso **(ii)** advém da dependência única da solução em respeito aos dados iniciais visto que, sendo $f(0) = 0$, a função $y(t) \equiv 0$ é solução da equação $y'' + e^{-t}f(y) = 0$. Vale ressaltar que não ocorre $y'(T(\gamma),\gamma) < 0$, pois $T(\gamma)$ é o primeiro zero de $y(t,\gamma)$.

A seguir utilizaremos a hipótese (H_2) para garantir que a segunda possibilidade em **(ii)** não ocorre pelo menos para $\gamma > \zeta$. Para isso, definimos a função E dada pela expressão

$$E(t,\gamma) = \frac{y'^2(t,\gamma)}{2e^{-t}} + F(y(t,\gamma)) \tag{1.11}$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ e $y(t,\gamma)$ é solução de (P_γ) definida sobre $(T(\gamma),\infty)$. Note que E depende continuamente de γ. Para γ fixado; derivando $E(t,\gamma)$ com respeito a variável t e usando a equação em (P_γ), obtemos

$$E'(t,\gamma) = y'^2(t,\gamma)/2e^{-t} \geq 0$$

portanto, E é não decrescente na variável t. Visto que, pelo Teorema 1, $0 \leq y(t,\gamma) \leq \gamma+\epsilon$ para t grande; podemos definir $B = \sup_{y\in[0,\gamma+\epsilon]} |f(y)|$. Com esta notação temos

$$|y'(t,\gamma)| \leq \int_t^\infty |f(y(s,\gamma))|e^{-s}ds \leq Be^{-t}$$

donde $y'^2(t,\gamma)/e^{-t}$ tende a zero quando $t \to \infty$. Portanto, usando a definição de E e a continuidade de F temos

$$\lim_{t\to\infty} E(t,\gamma) = F(\gamma).$$

Logo, como E é não decrescente, segue-se que $E(t,\gamma) \leq F(\gamma)$ e, em particular, temos $F(y(t,\gamma)) \leq F(\gamma)$ para $T(\gamma) < t < \infty$ ou para $T(\gamma) \leq t < \infty$ se $T(\gamma) > -\infty$. Agora estamos prontos para excluir a segunda possibilidade em (**ii**). De fato; suponha, por contradição, que tal possibilidade ocorra. Então para cada $\gamma > \zeta$ e t suficientemente próximo de $T(\gamma)$ temos $y(t,\gamma) > \gamma > \zeta$ e, portanto, visto que, por (H_2), $F(u)$ é crescente para $u > \zeta$ temos $F(y(t,\gamma)) > F(\gamma)$ o que contraria $F(y(t,\gamma)) \leq F(\gamma)$ estabelecida anteriormente. A Figura abaixo representa um possível comportamento da solução $y(t,\gamma)$ para $\gamma > \zeta$ e $T(\gamma)$ finito. Note que, como excluimos a segunda possibilidade em (**ii**), a solução $y(t,\gamma)$ para $\gamma > \zeta$ passa necessariamente a assumir valores negativos para $t < T(\gamma)$, isto é, $T(\gamma)$ é o primeiro zero, partindo de $+\infty$, da solução $y(t,\gamma)$. Sendo assim, como já observamos anteriormente, temos ainda que $T(\gamma)$ é uma função contínua de γ.

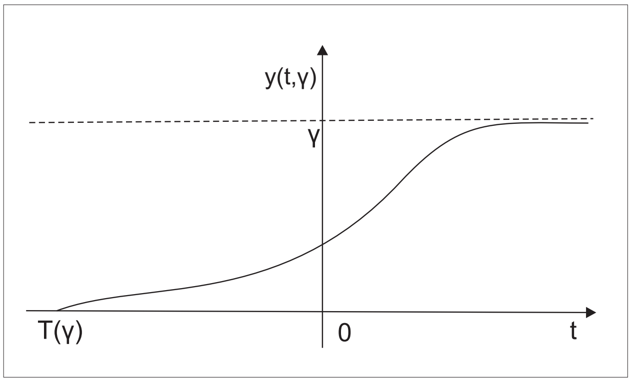

Figura 1.2: $y(t,\gamma)$ com $\gamma > \zeta$ e $T(\gamma)$ finito.

Voltamos nossa atenção para o comportamento das possíveis soluções de (P_γ), $y(t,\gamma)$, definida em uma vizinhança de $-\infty$, $(-\infty, A^*)$, isto é, para t suficientemente pequeno. Nesse sentido, temos o seguite resultado:

Proposição 1 *Suponha que f satisfaz as hipóteses (H_1) e (H_2). Seja $y = y(t,\gamma)$ solução de (P_γ). Se y é monótona em $(-\infty, A^*)$ e $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t,\gamma) = \delta$ com $\delta \in [0,\infty)$ então*

(i). $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y'^2(t,\gamma)}{e^{-t}} = 0,$

(ii). *Se E é definido como em* (1.11) *e F como em (H_2) vale* $\lim\limits_{t\to-\infty} E(t,\gamma) = F(\delta),$

(iii). $f(\delta) = 0$ *e temos* $\delta \in [0,\zeta)$.

Demonstração: **(i)**. Para γ fixado, E é monótona em t logo $E(t,\gamma) \leq F(\gamma)$ para $t > T(\gamma)$. Assim, segue de (1.11) que

$$0 \leq \frac{y'^2(t,\gamma)}{2e^{-t}} \leq F(\gamma) - F(y(t,\gamma)).$$

Ainda, por continuidade,
$$\lim_{t\to-\infty} F(y(t,\gamma)) = F(\delta).$$
Logo, existe o limite
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y'^2(t,\gamma)}{e^{-t}}.$$
Este claramente deve ser número não negativo. Suponha que este limite é positivo, isto é,
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y'^2(t,\gamma)}{e^{-t}} = v > 0.$$
Neste caso, temos
$$\lim_{t\to-\infty} E(t,\gamma) = \frac{v}{2} + F(\delta)$$
e assim $\int_{-\infty}^{t} E'(s,\gamma)ds$ existe. Contudo, a derivada de E com respeito a t é dada por $E'(t,\gamma) = \dfrac{y'^2(t,\gamma)}{2e^{-t}}$ e temos que $E'(t,\gamma)$ é aproximadamente $\dfrac{v}{2}$ para t suficientemente pequeno, o qual não é integrável em uma vizinhança de $-\infty$. Assim, concluimos que $v = 0$.
(ii). Segue-se imediatamente do item **(i)**. De fato, usando a definição de E dada em (1.11) e tomando limite obtemos
$$\lim_{t\to-\infty} E(t,\gamma) = \lim_{t\to-\infty} \frac{y'^2(t,\gamma)}{2e^{-t}} + F(\delta) = F(\delta).$$
(iii). Suponha, por contradição, que $f(\delta) \neq 0$. Uma vez que
$$f(\delta) = \lim_{t\to-\infty} f(y(t,\gamma)),$$
por continuidade, temos $f(y(t,\gamma)) \neq 0$ para t suficientemente pequeno. Visto que, por (H_2) temos $f(0) = 0$ segue-se que $y(t,\gamma) \neq 0$ para $t \to -\infty$. Portanto, $y(t)$ é assintoticamente constante quando $t \to -\infty$; assim, usando (1.8) e (1.9), vemos que a integral indefinida
$$\int_{-\infty}^{t} (s-t)e^{-s}ds$$
existe o que é uma contradição. Logo, $f(\delta) = 0$. Para concluir o item **(iii)** observe que pela hipótese (H_2) temos $f(u) > 0$ para $u \geq \zeta$ e, visto que $f(\delta) = 0$, devemos ter $\delta \in [0, \zeta)$. ■

Considere o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por
$$\mathcal{S} = \{\gamma \in (\zeta, \infty);\quad T(\gamma) > -\infty\}.$$
Note que $\mathcal{S}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, pois $T(\gamma)$ depende continuamente de γ. Se $\mathcal{S}$ é não vazio defina $\gamma_0 = \inf \mathcal{S}$. O próximo resultado garante que $y(t,\gamma_0)$, solução de (P_{γ_0}), é também uma solução para (P_2).

Teorema 2 *Seja f nas hipóteses (H_1) e (H_2). Suponha que o conjunto*

$$\mathcal{S} = \{\gamma \in (\zeta, \infty); \quad T(\gamma) > -\infty\}$$

é não vazio. Então o problema (P_2) tem uma solução tal que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) \leq \inf \mathcal{S}.$$

Demonstração: Necessitamos do seguinte lema preliminar.

Lema 2.1 *Suponha f e $\mathcal{S}$ como no Teorema 2 e E definido como em (1.11). Então se $\gamma \in \mathcal{S}$ temos $E(t, \gamma) > 0$ e $y'(t, \gamma) > 0$ sobre $[T(\gamma), \infty)$.*

Visto que $f(0) = 0$ temos que $y(t) \equiv 0$ é solução da equação $y'' + f(y)e^{-t} = 0$, logo usando a unicidade em relação aos dados iniciais da solução de (P_γ) temos necessariamente $y'(T(\gamma), \gamma) > 0$. Dessa forma,

$$E(T(\gamma), \gamma) = \frac{y'^2(T(\gamma), \gamma)}{2e^{-T(\gamma)}} > 0$$

e, sendo E não decrescente temos $E(t, \gamma) > 0$ para todo $t \in [T(\gamma), \infty)$. Para concluir que $y'(t, \gamma) > 0$ sobre $[T(\gamma), \infty)$ note que $y'(t, \gamma) > 0$ para $y(t, \gamma) > \zeta$, pois $y'(t, \gamma) = \int_t^\infty f(y(s, \gamma))e^{-s} ds$ e, pela hipótese (H_2), $f(u) > 0$ para $u \geq \zeta$. Sendo assim, se existe $t_0 > T(\gamma)$ tal que $y'(t_0, \gamma) = 0$ temos necessariamente $y(t_0, \gamma) \in [0, \zeta)$ e, portanto, pela hipótese (H_2), $E(t_0, \gamma) = F(y(t_0, \gamma)) \leq 0$ contrariando a positividade de E estabelecida anteriormente. Concluimos assim que $y'(t, \gamma) > 0$ para $t \in [T(\gamma), \infty)$.

Tendo estabelecido este lema preliminar, afirmamos que se $\gamma_0 = \inf \mathcal{S}$ temos ainda $\gamma_0 > \zeta$. Note que γ_0 está bem definido, pois estamos supondo $\mathcal{S}$ não vazio e este último é limitado inferiormente por ζ. Para concluir que $\gamma_0 > \zeta$ vamos provar que existe uma vizinhança de ζ que não intersecta $\mathcal{S}$. Neste caso, teremos obrigatoriamente $\gamma_0 > \zeta$, pois caso contrário, γ_0 não seria a maior das cotas inferiores de $\mathcal{S}$.

Como, por (H_2), $f(\zeta) > 0$ temos $y(t, \zeta)$ não constante. De fato, uma vez que $\lim_{t \to \infty} f(y(t, \zeta)) = f(\zeta) > 0$ temos $f(y(t, \zeta)) \neq 0$ para t suficientemente grande e, assim $y''(t, \zeta) = -f(y(t, \zeta))e^{-t} \neq 0$ para t grande. Uma vez que $\lim_{t \to \infty} E(t, \zeta) = F(\zeta) = 0$ e E é não decrescente temos $E(t, \zeta) \leq 0$ para $t \in (T(\zeta), \infty)$. Portanto, por continuidade, existem $\epsilon > 0$ e $\tau(\epsilon) > 0$ tais que $E(t, \gamma) < 0$ desde que $|\gamma - \zeta| < \epsilon$ e $t < \tau(\epsilon)$. Assim, pelo Lema 2.1, temos que $\gamma \notin \mathcal{S}$ para $|\gamma - \zeta| < \epsilon$ concluindo a afirmação.

Lembrando que $\mathcal{S}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ temos que $\gamma_0 \notin \mathcal{S}$. Seja (γ_n), com $\gamma_n \in \mathcal{S}$ para todo n natural, uma sequência que realiza o ínfimo, isto é, $\gamma_n \to \gamma_0$ quando $n \to \infty$. Pelo Lema 2.1 temos $y'(t, \gamma_n) > 0$ e $E(t, \gamma_n) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto, usando a continuidade de $E(t, \gamma)$ e $y'(t, \gamma)$ com respeito a γ e fazendo $n \to \infty$ obtemos $y'(t, \gamma_0) \geq 0$ e $E(t, \gamma_0) \geq 0$ para $t \in \mathbb{R}$. Assim, $y(t, \gamma_0)$ é monótona não decrescente e limitada, pois como vimos, $\limsup_{t \to T(\gamma_0)} y(t, \gamma_0) = \infty$ não ocorre e $T(\gamma_0) = -\infty$ visto que $\gamma_0 \notin \mathcal{S}$. Portanto, quando $t \to -\infty$ a solução $y(t, \gamma_0)$ tende monótona e decrescente para um valor δ o qual pela Proposição 1, item **(ii)**, pertence ao intervalo $[0, \zeta)$. Afirmamos que $\delta = 0$. Com efeito. Supondo $\delta > 0$, por (H_2), temos $F(\delta) < 0$ e usando novamente a Proposição 1, item **(ii)**, temos $\lim_{t\to-\infty} E(t, \gamma_0) = F(\delta) < 0$ o que contraria $E(t, \gamma_0) \geq 0$. Assim,

$$\lim_{t\to-\infty} y(t, \gamma_0) = 0.$$

Além disso, sendo $y(t, \gamma_0)$ monótona não decrescente e $\lim_{t\to\infty} y(t, \gamma_0) = \gamma_0$, temos ainda

$$y(t, \gamma_0) \leq \inf \mathcal{S}.$$

Portanto, $y(t, \gamma_0)$ é uma solução do problema (P_2). ■

De acordo com o Teorema 2, devemos mostrar que o problema (P_γ) tem solução para algum $\gamma \in (\zeta, \infty)$, com $T(\gamma)$ finito, para assegurar a existência de uma solução de *ground states*. O método que utilizamos para a solução de (P_2) é baseado em considerar $\gamma = y(\infty)$ como parâmetro e verificar a existência de $T(\gamma)$, primeiro zero quando t decresce do infinito.

1.3 Soluções assintoticamente constantes de uma equação não linear

Nesta seção, iremos estabelecer algumas estimativas referentes as soluções do seguinte problema:

$$(P_3) \qquad \begin{aligned} y'' + e^{g(y)-t} &= 0, \\ y &\geq y_0, \\ y(\infty) = \gamma, &\quad y'(\infty) = 0 \end{aligned}$$

onde $y_0 \geq 0$, $\gamma \in (y_0, \infty)$ e g satisfaz as hipóteses

(A_1) $g \in C^2([y_0, \gamma])$,

(A_2) $g' > 0$ e $g'' \geq 0$ sobre $[y_0, \gamma]$.

Aqui, consideramos $g(u) = \ln f(u)$ como em (H_3); o comportamento de $g(u)$ para $u > \gamma$ será descartado por falta de relevância. Esta falta de relevância pode ser explicada pelo fato de que as soluções de (P_3) são monótonas crescentes e côncavas, logo $y(t) \in [y_0, \gamma]$ para $t \in [T_0, \infty)$, onde T_0 é definido abaixo.

De acordo com o Teorema 1, (P_3) tem única solução para t suficientemente grande, e além disso, se a solução $y = y(t, \gamma)$ é continuada para trás, isto é, t decrescendo, esta irá necessariamente atingir o valor y_0 para algum t; o qual denotaremos por $T_0 := T_0(\gamma)$ e escreveremos $y'(T_0)$ para a inclinação de y em tal ponto. Necessitaremos fortemente de estimativas de T_0 e $y'(T_0)$ para verificar se $y(t)$ atingirá o valor zero para algum $T(\gamma) \leq T_0(\gamma)$. Nesse sentido, estabelecemos a

Proposição 2 *Suponha que $y(t,\gamma)$ é uma solução do problema (P_3). Então, para $T_0 \leq t < \infty$ tem-se*

$$g(y(t,\gamma)) \geq g(\gamma) - 2\ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right)$$

e ainda

$$y(t,\gamma) \leq \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right).$$

Demonstração: Por conveniência, escreveremos $y(t)$ ou y em vez de $y(t,\gamma)$ para γ fixado. Observemos inicialmente que para γ fixado, $t \geq T_0$ e y solução do problema (P_3) temos $y' > 0$ e $y'' < 0$, donde y e y' são monótonas crescente e decrescente respectivamente. Lembrando que $y'(\infty) = 0$ e integrando diretamente a equação do problema, obtemos

$$y'(t) = \int_t^\infty e^{g(y(s))-s}ds.$$

Usando as monoticidades de $y(t)$ e $g(y)$ segue-se que $y(t) < \gamma$ leva a seguinte desigualdade $g(y) - t < g(\gamma) - t$. Logo $e^{g(y)-t} < e^{g(\gamma)-t}$; e integrando sobre (t,∞) obtemos $y'(t) < e^{g(\gamma)-t}$. Por outro lado, como $g'(y)$ e $y'(t)$ são estritamente positivos segue que

$$\Big(1 - g'\big(y(t)\big)y'(t)\Big)e^{g(y(t))-t} < e^{g(y(t))-t}.$$

Integrando novamente sobre (t,∞) obtemos $e^{g(y(t))-t} < y'(t)$. Dessa forma, verificamos as desigualdades

$$e^{g(y(t))-t} < y'(t) < e^{g(\gamma)-t}. \tag{1.12}$$

Depois de aplicar logarítmo podemos escrever $g(y) - t < \ln y' < g(\gamma) - t$ e assim $g(y) - g(\gamma) < \ln y' - g(\gamma) + t < 0$, logo

$$\lim_{t\to\infty}\big[\ln y' - g(\gamma) + t\big] = 0.$$

Multiplicando a equação $y'' = -e^{g(y)-t}$ por $\{t - g(y))\}'$ obtemos a igualdade

$$y'' - g'(y)y'y'' + e^{g(y)-t} - g'(y)y'e^{g(y)-t} = 0.$$

Esta última permite concluir diretamente que, definindo

$$E(t) = y' - \frac{1}{2}y'^2g'(y) - e^{g(y)-t},$$

temos

$$E'(t) = -\frac{1}{2}y'^3g''(y) \leq 0.$$

Notemos ainda que $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ e, portanto integrando $E'(t)$ sobre (t, ∞) concluímos que $E(t) = \frac{1}{2}\int_t^\infty y'(s)^3 g''(y(s))ds \geq 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{E(t)}{y'} &= 1 - \frac{1}{2}y'g'(y) - \frac{e^{g(y)-t}}{y'} \\
&= 1 - \frac{1}{2}y'g'(y) + \frac{y''}{y'} \\
&= \frac{1}{2y'(t)}\int_t^\infty y'(s)^3 g''(y(s))ds \\
&\leq \frac{y'(t)^2}{2y'(t)}\int_t^\infty y'(s)g''(y(s))ds \\
&= \frac{y'}{2}\left[g'(\gamma) - g'(y)\right].
\end{aligned}$$

Onde usamos na segunda desigulдade acima que $y'(t)$ é uma função decrescente. As desigualdades acima permitem concluir que

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2}y'g'(y) + \frac{y''}{y'} \leq \frac{y'}{2}\left[g'(\gamma) - g'(y)\right]$$

e portanto, por integração, obtemos

$$0 \leq \left[s - \frac{1}{2}g(y(s)) + \ln y'(s)\right]_t^\infty \leq \frac{1}{2}\left[y(s)g'(\gamma) - g(y(s))\right]_t^\infty \tag{1.13}$$

ou equivalentemente,

$$0 \leq \lim_{t\to\infty}\left[t - \frac{1}{2}g(y(t)) + \ln y'(t)\right] - \left[t - \frac{1}{2}g(y) + \ln y'\right] \leq \frac{1}{2}\left[\gamma g'(\gamma) - g(\gamma) - yg'(\gamma) + g(y)\right].$$

Agora lembrando que $\lim_{t\to\infty}\left[\ln y' - g(\gamma) + t\right] = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left[t - \frac{1}{2}g(y) + \ln y'\right] &= \lim_{t\to\infty}\left[\ln y' - g(\gamma) + t + g(\gamma) - \frac{1}{2}g(y)\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\ln y' - g(\gamma) + t\right] + \lim_{t\to\infty}\left[g(\gamma) - \frac{1}{2}g(y)\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[g(\gamma) - \frac{1}{2}g(y)\right] \\
&= \frac{g(\gamma)}{2}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, (1.13) é equivalente a

$$0 \leq \frac{1}{2}\left[g(\gamma) + g(y)\right] - t - \ln y' \leq \frac{1}{2}\left[\gamma g'(\gamma) - g(\gamma) - yg'(\gamma) + g(y)\right].$$

Donde segue que

$$\frac{1}{2}\left[g(\gamma)+g(y)\right]-t-\ln y' \geq 0 \tag{1.14}$$

e

$$g(\gamma)-t-\ln y' \leq \frac{1}{2}\left[\gamma-y\right]g'(\gamma). \tag{1.15}$$

A estimativa (1.14) pode ser escrita como

$$y'e^{-\frac{1}{2}g(y)} \leq e^{\frac{1}{2}g(\gamma)-t}. \tag{1.16}$$

Além do mais, sendo $g'(y)>0$ e $g''(y)\geq 0$ temos $0<g'(y)\leq g'(\gamma)$, o que fornece juntamente com (1.16) a desigualdade

$$y'g'(y)e^{-\frac{1}{2}g(y)} \leq g'(\gamma)e^{\frac{1}{2}g(\gamma)-t}$$

da qual obtemos, depois de integrar sobre (t,∞)

$$2\left[e^{-\frac{1}{2}g(y)}-e^{-\frac{g(\gamma)}{2}}\right] \leq g'(\gamma)e^{\frac{g(\gamma)}{2}-t}$$

ou ainda

$$e^{-\frac{1}{2}g(y)} \leq e^{-\frac{g(\gamma)}{2}}+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{\frac{g(\gamma)}{2}-t}.$$

Multiplicando por $e^{\frac{g(\gamma)}{2}}$ obtemos

$$e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)-g(y)]} \leq 1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}$$

e aplicando logarítmo obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{2}[g(\gamma)-g(y)] \leq \ln\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right).$$

Desta última segue-se facilmente a primeira desigualdade da Proposição 2. Finalmente, escrevendo (1.15) como

$$e^{g(\gamma)-t} \leq y'e^{\frac{1}{2}[\gamma-y]g'(\gamma)} \tag{1.17}$$

e novamente integrando sobre (t,∞) chegamos a

$$1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t} \leq e^{[\gamma-y]\frac{g'(\gamma)}{2}}.$$

Analogamente, aplicando logarítmo podemos verificar que esta última desigualdade equivale à segunda da Proposição 2. ■

Corolário 2.1 *Suponha que $y(t,\gamma)$ é uma solução do problema (P_3). Então, para $T_0 \leq t < \infty$ tem-se*

$$t \leq \frac{1}{2}[g(\gamma)+g(y)]+\ln\frac{g'(\gamma)}{2}-\ln\left(1-e^{\frac{1}{2}[g(y)-g(\gamma)]}\right).$$

Demonstração: Esta desigualdade segue da primeira dada pela Proposição 2, depois de isolado o valor de t. De fato, temos

$$g(y) \geq g(\gamma) - 2\ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}[g(\gamma) - g(y)] \leq \ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right)$$

logo, aplicando exponencial, obtemos

$$e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)-g(y)]} - 1 \leq \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}.$$

Agora, usando logarítmo podemos escrever

$$\ln\left(e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)-g(y)]} - 1\right) \leq \ln\frac{g'(\gamma)}{2} + g(\gamma) - t$$

o que equivale a

$$\ln\left(1 - e^{\frac{1}{2}[g(y)-g(\gamma)]}\right) + \frac{1}{2}[g(\gamma) - g(y)] \leq \ln\frac{g'(\gamma)}{2} + g(\gamma) - t,$$

ou seja,

$$t \leq \frac{1}{2}[g(\gamma) + g(y)] + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \ln\left(1 - e^{\frac{g(y)-g(\gamma)}{2}}\right)$$

como desejado. ■

Corolário 2.2 *Suponha que $y(t,\gamma)$ é uma solução do problema (P_3). Então, para $T_0 \leq t < \infty$ tem-se*

$$\begin{aligned} t &\geq g(\gamma) - \frac{g'(\gamma)(\gamma - y)}{2} + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \ln\left(1 - e^{\frac{g'(\gamma)(y-\gamma)}{2}}\right) \\ &> g(\gamma) - \frac{g'(\gamma)(\gamma - y)}{2} + \ln\frac{g'(\gamma)}{2}. \end{aligned}$$

Demonstração: Em analogia ao corolário anterior, estas desigualdades seguem da segunda dada pela Proposição 2, depois de isolado o valor de t. De fato, temos

$$y \leq \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right),$$

portanto

$$\frac{g'(\gamma)(\gamma - y)}{2} \geq \ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right).$$

Usando a aplicação exponencial temos a desigualdade

$$e^{\frac{g'(\gamma)(\gamma-y)}{2}} - 1 \geq \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}$$

da qual, aplicando logarítmo, obtemos diretamente

$$\ln\left(e^{\frac{g'(\gamma)(\gamma-y)}{2}}-1\right)\geq \ln\frac{g'(\gamma)}{2}+g(\gamma)-t$$

o que equivale a

$$\frac{g'(\gamma)(\gamma-y)}{2}+\ln\left(1-e^{\frac{g'(\gamma)(y-\gamma)}{2}}\right)\geq \ln\frac{g'(\gamma)}{2}+g(\gamma)-t,$$

ou seja,

$$t\geq g(\gamma)-\frac{g'(\gamma)(\gamma-y)}{2}+\ln\frac{g'(\gamma)}{2}-\ln\left(1-e^{\frac{g'(\gamma)(y-\gamma)}{2}}\right).$$

A segunda desigualdade do corolário segue desta última depois de observar que $\ln x<0$ para $0<x<1$. ■

Corolário 2.3 *Suponha que $y(t,\gamma)$ é uma solução do problema (P_3). Então, para $T_0\leq t<\infty$ tem-se*

$$y'g'(y)<2 \tag{1.18}$$
$$2g'(y)e^{g(y)-t}<1 \tag{1.19}$$
$$y'(t)\leq e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)+g(y)]-t} \tag{1.20}$$
$$y'(t)\geq e^{g(\gamma)-\frac{1}{2}[\gamma-y]g'(\gamma)-t} \tag{1.21}$$

Demonstração: Definindo, como na Proposição 2,

$$E(t)=y'-\frac{1}{2}y'^2g'(y)-e^{g(y)-t}$$

temos, analogamente

$$E'(t)=-\frac{1}{2}y'^3g'(y).$$

Como $\lim\limits_{t\to\infty}E(t)=0$, integrando $E'(t)$ sobre (t,∞) leva a

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_t^\infty y'(s)^3g''(y(s))ds\geq 0.$$

Dessa forma, sendo $E(t)\geq 0$, podemos escrever

$$y'-\frac{1}{2}y'^2g'(y)\geq e^{g(y)-t}>0$$

ou ainda

$$y'>\frac{y'^2g'(y)}{2}.$$

Sendo $y'>0$, temos imediatamente (1.18). Agora reescrevemos $E(t)$ como

$$E(t)=-\frac{g'(y)}{2}\left(y'-\frac{1}{g'(y)}\right)^2+\frac{1}{2g'(y)}-e^{g(y)-t}$$

e usando que $E(t) \geq 0$ e $g'(y) > 0$ vemos que a última parcela acima deve ser positiva, ou seja,

$$\frac{1}{2g'(y)} - e^{g(y)-t} > 0$$

o que equivale a (1.19).

A desigualdade (1.20) é obtida imediatamente de (1.16) depois de multiplicar esta por $e^{\frac{1}{2}g(y)}$ e, analogamente multiplicando (1.17) por $e^{-\frac{1}{2}[\gamma-y]g'(\gamma)}$ obtemos (1.21). ■

Observemos que a cota superior para y' em (1.20) está entre as cotas estabelecidas em (1.12). De fato, sendo $g(y)$ é uma função crescente temos

$$g(y) - t < \frac{g(y) + g(\gamma)}{2} - t < g(\gamma) - t$$

o que fornece

$$e^{g(y)-t} < e^{\frac{g(y)+g(\gamma)}{2}-t} < e^{g(\gamma)-t}.$$

Analogamente, é fácil verificar que a cota dada em (1.21) está entre as estabelecidas em (1.12) quando y está próximo de γ.

Continuaremos estabelecendo estimativas para $y'(t)$, $t \geq T_0$. Buscaremos uma boa cota inferior para $y'(t)$; note que a cota dada em (1.21) tem a desvantagem de envolver ambos y e t agravado pela falta de uma boa cota superior para t em termos de y ou, de uma inferior para y em termos de t. Para resolver esse impasse provaremos o

Corolário 2.4 *Suponha que $y(t,\gamma)$ é uma solução do problema (P_3). Então, para $t \geq T_0$, tem-se*

$$y'(t) \geq \frac{2}{g'(\gamma)}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}}\right) = \left(e^{t-g(\gamma)} + \frac{g'(\gamma)}{2}\right)^{-1}.$$

Demonstração: Como vimos anteriormente

$$y'(t) = \int_t^\infty e^{g(y(s))-s}ds.$$

Portanto, usando a estimativa para $g(y)$ dada pela Proposição 2, podemos escrever

$$y'(t) \geq \int_t^\infty e^{g(\gamma)-2\ln(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-s})-s}ds.$$

Agora, fazendo a substituição $r = s - g(\gamma)$ temos

$$\begin{aligned} y'(t) &\geq \int_{t-g(\gamma)}^{\infty} e^{-r+\ln(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{-r})^{-2}} dr \\ &= \int_{t-g(\gamma)}^{\infty} e^{-r}(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{-r})^{-2} dr \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)}(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{-r})^{-1}\Big|_{t-g(\gamma)}^{\infty} \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)}\left(1-\frac{1}{1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}}\right) \\ &= \left(e^{t-g(\gamma)}+\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

como desejado. ■

Observamos que a cota inferior estabelecida pelo corolário acima exibe o que parece ser o comportamento verdadeiro em alguns casos, em que a cota inferior é exponencialmente pequena para t grande, e tende a $\frac{2}{g'(\gamma)}$ para t pequeno, com zona de transição centrado em

$$T_c = g'(\gamma) + \ln\frac{g'(\gamma)}{2}.$$

Para uma discussão mais detalhada a respeito do gráfico de $y(t)$, a ser realizada numa seção posterior, necessitamos ainda de uma cota superior para y', válida num sentido assintótico adequado quando t decresce através da zona de transição ao redor de T_c, ou seja, de $T_c - t$ possivelmentente grande. Pensando nisso, fixaremos inicialmente seguinte notação que será útil na formulação do próximo corolário da Proposição 2. Considere

$$I = \left\{\xi \in \mathbb{R};\;\; g(\gamma) - 2\ln\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right) \leq g(\xi) \leq g(\gamma)\right\}.$$

Note que na definição de I extendemos o alcance para ξ baseado na cota inferior para $g(y)$ dada pela Proposição 2.

Corolário 2.5 *Suponha que $y(t,\gamma)$ é uma solução do problema (P_3). Então, para $t \geq T_0$, tem-se*

$$y'(t) \leq \frac{2L}{g'(\gamma)}\left(1-\frac{1}{1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}}\right)$$

onde

$$L = e^{\left\{\frac{2}{|g'(\gamma)|^2}\ln^2\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right)\sup_I g''(\xi)\right\}}.$$

Demonstração: De fato, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, existe $\xi \in (y,\gamma)$ tal que

$$g(y) = g(\gamma) + g'(\gamma)(y-\gamma) + \frac{g''}{2!}(\xi)(y-\gamma)^2.$$

Usando a Proposição 2 temos

$$(y-\gamma) \leq -\frac{2}{g'(\gamma)} \ln\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right).$$

Logo, usando ainda que $g' > 0$ e $g'' \geq 0$, podemos escrever

$$g(y) \leq g(\gamma) - 2\ln\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right) + \frac{g''(\xi)}{2g'(\gamma)^2}\ln^2\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right).$$

Lembrando agora que $y'(t) = \int_t^\infty e^{g(y(s))-s}ds$, temos pela desigualdade anterior, que

$$\begin{aligned}
y'(t) &\leq \int_t^\infty e^{g(\gamma)-2\ln(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-s})+\frac{g''(\xi)}{2g'(\gamma)^2}\ln^2(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-s})}ds \\
&\leq e^{\left\{\frac{2}{|g'(\gamma)|^2}\ln^2\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right)\sup_I g''(\xi)\right\}} \int_t^\infty e^{g(\gamma)-2\ln(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-s})}ds \\
&= L\int_t^\infty e^{g(\gamma)-2\ln(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-s})}ds.
\end{aligned}$$

Note que usamos acima também o fato de que $G(t) = \ln^2\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right)$ é decrescente para γ fixado; e portanto, $G(s) \leq G(t)$ para $t \leq s$.

Fazendo a substituição $s - g(\gamma) = r$ podemos escrever ainda

$$\begin{aligned}
y'(t) &\leq L\int_{t-g(\gamma)}^\infty e^{-r-2\ln(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{-r})}dr \\
&= L\int_{t-g(\gamma)}^\infty (1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{-r})^{-2}e^{-r}dr \\
&= \frac{2L}{g'(\gamma)}\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{-r}\right)^{-1}\Bigg|_{t-g(\gamma)}^{\infty} \\
&= \frac{2L}{g'(\gamma)}\left(1-\frac{1}{1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}}\right)
\end{aligned}$$

o que representa a cota superior desejada. ■

1.4 Estimativas para o problema de Dirichlet e Ground States

Para o problema de Dirichlet padrão

$$(P_4) \qquad \begin{aligned} -\Delta u = f(u) \quad & \text{em} \quad B_R, \\ u > 0 \quad & \text{em} \quad B_R, \\ u = 0 \quad & \text{sobre} \quad \partial B_R, \end{aligned}$$

onde $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}$.

A existência de $T(\gamma)$ finito é equivalente a existência uma solução radial $u(r)$ do problema de Dirichlet (P_4) com a seguinte propriedade

$$u(0) = \gamma \quad \text{e} \quad R = R(\gamma) := 2e^{\frac{-T(\gamma)}{2}}. \tag{1.22}$$

Para confirmar isso usaremos (1.5). De fato, depois de nos restringirmos a soluções radiais numa bola B_R, podemos reescrever (P_4) como

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + f(u) = 0, \quad & \text{em} \quad (0, R), \\ u > 0 & \\ u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. & \end{aligned}$$

Este último, usando a inversão de Atkinson e Peletier (1.5), equivale ao seguinte problema

$$\begin{aligned} y'' + f(y)e^{-t} = 0 \quad & \text{em} \quad (-2\ln\frac{R}{2}, \infty), \\ y > 0 \quad & \text{em} \quad (-2\ln\frac{R}{2}, \infty), \\ y(-2\ln\frac{R}{2}) = 0, \quad y'(\infty) = 0. & \end{aligned}$$

Por outro lado, temos obviamente de (1.5), $r(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}$ e, portanto, $r(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Sendo assim, se existe $T(\gamma)$ finito temos uma solução radial u de (P_4) na bola B_R, onde R é definido como em (1.22). E ainda, fazendo uso mais uma vez de (1.5), vemos que a solução u satisfaz

$$u(0) = \lim_{t\to\infty} u(r(t)) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \gamma.$$

O principal resultado deste capítulo referente ao problema de Dirichlet (P_4) é o seguinte:

Teorema 3 (Existência de $T(\gamma)$). *Sejam $y(t,\gamma)$ solução do problema (P_γ), h como em (1.1) e M como em (1.2). Suponhamos que f satisfaz (H_1) e (H_3). Se existe $\gamma > 0$ tal que*

$$h(\gamma) > \ln M + 1,$$

então $T(\gamma)$ existe e

$$T(\gamma) > h(\gamma) + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} - 1.$$

Além disso, se $M = 0$ em (1.2), o termo -1 pode ser omitido.

Demonstração: Vejamos inicialmente o caso particular em que $y_0 = 0$ na hipótese (H_3). Neste caso, $T(\gamma)$ é obviamente igual a $T_0(\gamma)$ e sua existência é portanto assegurada. Além disso, a condição (1.3) é desnecessária. Note ainda que esta é satisfeita formalmente para $M = 0$, pois estamos considerando $\ln M = \ln x$ para $x > 0$ suficientemente pequeno neste caso. Veja comentário no final da seção 1.1.

Pelo Corolário 2.2, com $y = 0$, temos

$$T(\gamma) \geq g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} - \ln(1 - e^{-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}}).$$

Fazendo $y_0 = 0$ na definição de h em (1.1) e desprezando o último termo na desigualdade acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} T(\gamma) &\geq h(\gamma) + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} \\ &> h(\gamma) + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} - 1. \end{aligned}$$

Isto completa a prova para o caso em que $y_0 = 0$.

Assim, procedemos a argumentação para o caso em que $y_0 > 0$ e

$$f(u) \geq -M \quad \text{para} \quad 0 \leq u \leq y_0. \tag{1.23}$$

para alguma constante $M \geq 0$. Note que tal constante existe, pois f é contínua no compacto $[0, y_0]$.

Para auxiliar a prova do Teorema 3 estabeleceremos dois lemas preliminares.

Intuitivamente é claro que se T_0 e $y'(T_0)$ são devidamente grandes, então, quando t decresce de T_0 encontrará um ponto T tal que $y(T) = 0$. Este pensamento, ligeiramente modificado, é incorporado no próximo lema.

Lema 3.1 *Nas hipóteses do Teorema 3, seja $y(t, \gamma)$ solução do problema (P_γ). Suponhamos que $M > 0$ em (1.23) e que para algum $s \geq T_0$ vale*

$$s - \frac{y(s)}{y'(s)} + \ln y'(s) > \ln M + 1.$$

Então, $T(\gamma) > -\infty$.

De fato, segue da equação diferencial

$$y''(t) + e^{-t} f(y) = 0$$

e da condição (1.23) que

$$y''(t) \leq M e^{-t}, \quad \text{para} \quad t \leq s.$$

Integrando podemos escrever

$$\begin{aligned} y'(s) - y'(t) &\leq M \int_t^s e^{-v} dv \\ &= -M e^{-v} \Big|_t^s \\ &= -M(e^{-s} - e^{-t}). \end{aligned}$$

Multipliclando por -1 obtemos

$$\begin{aligned} y'(t) &\geq y'(s) - Me^{-t} + Me^{-s} \\ &\geq y'(s) - Me^{-t}. \end{aligned}$$

Integrando novamente, chegamos a

$$\begin{aligned} y(s) - y(t) &\geq \int_t^s \left(y'(s) - Me^{-v}\right) dv \\ &= (s-t)y'(s) + M(e^{-s} - e^{-t}) \\ &\geq (s-t)y'(s) - Me^{-t}. \end{aligned}$$

Em suma, obtemos a desigualdade

$$y(s) - y(t) \geq (s-t)y'(s) - Me^{-t}, \quad \text{para} \quad t \leq s. \tag{1.24}$$

Sendo esta última válida em qualquer intervalo $[T', s]$ no qual $y \geq 0$. Além disso, segue desta que se existir $t^* < s$ tal que

$$(s - t^*)y'(s) - Me^{-t^*} > y(s) \tag{1.25}$$

então $T(\gamma) > -\infty$ e , mais ainda, teremos $t^* < T(\gamma) < T_0$. De fato, pela desigualdade (1.24) a existência de um tal t^* acarretaria em

$$y(s) < (s - t^*)y'(s) - Me^{-t^*} \leq y(s) - y(t^*)$$

donde segue que $y(t^*) < 0$. Sendo assim, teremos $y(t^*) < 0 < y(T_0)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existirá $T(\gamma)$, com $t^* < T(\gamma) < T_0$ tal que $y(T(\gamma)) = 0$.

Do argumento anterior, para completar a prova do Lema 3.1 basta garantir a existência de $t^* < s$ satisfazendo (1.25). Para encontrar t^*, usaremos algumas técnicas elementares de cálculo. Primeiro, definimos a função, para s fixado,

$$\psi(t) = (s-t)y'(s) - Me^{-t} \quad \text{para} \quad t < s.$$

Observe que uma boa escolha para t^* é dado pelo ponto de máximo de ψ, já que estamos querendo $\psi(t^*) > y(s)$. Ora, $\psi'(t) = -y'(s) + Me^{-t}$ logo $\psi'(t) = 0$ se, e somente se, $t = \ln M - \ln y'(s)$. Como $\psi''(t) = -Me^{-t} < 0$ para todo $t < s$, temos $\ln M - \ln y'(s)$ como ponto de máximo global de ψ desde que este seja menor que s, isto é, esse ponto deve pertencer, obviamente, ao domínio de ψ. De sorte, usando a hipótese do Lema 3.1, temos

$$\ln M - \ln y'(s) < s - \left(1 + \frac{y(s)}{y'(s)}\right) < s,$$

logo temos o ponto de máximo para ψ.

Finalmente, vejamos que tomando $t^* = \ln M - \ln y'(s)$ temos a condição (1.25) satisfeita. De fato, substituindo este valor de t^* em (1.25) obtemos diretamente

$$(s - \ln M + \ln y'(s))\, y'(s) - y'(s) > y(s)$$

ou, equivalentemente,

$$s - \frac{y(s)}{y'(s)} + \ln y'(s) > \ln M + 1$$

o que representa a hipótese do Lema 3.1.

O próximo lema fornece uma cota inferior para $T(\gamma)$.

Lema 3.2 *Sejam $M > 0$, s e $y(t,\gamma)$ como no Lema 3.1. Então*

$$T(\gamma) > s - \frac{y(s)}{y'(s)} - 1.$$

Se $M = 0$ em (1.23), $s \geq T_0$ pode ser tomado arbitrário e o termo -1 pode ser omitido.

A última observação do Lema 3.2 é mais simples e a faremos primeiro. Se $M = 0$ em (1.23) temos $f(u)$ não-negativa, e pela equação diferencial $y''(t) + f(y)e^{-t} = 0$, obtemos diretamente $y''(t) \leq 0$ para todo $t \leq s$. Portanto, temos y' decrescente e, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (T(\gamma), s)$ tal que

$$y(s) - y(T(\gamma)) = y'(t_0)\,(s - T(\gamma))\,.$$

Usando a monoticidade de y' temos $y'(t_0) > y'(s)$. Uma vez que $y(T(\gamma)) = 0$, substituindo $y'(t_0)$ por $y'(s)$ e isolando $T(\gamma)$ na desigualdade obtida chegamos a

$$T(\gamma) > s - \frac{y(s)}{y'(s)}$$

o que conclui o caso em que $M = 0$.

Procedemos assumindo que $M > 0$.

Nosso critério (1.25) para a existência de $T(\gamma)$ pode ser reescrito como

$$s - t - \frac{y(s)}{y'(s)} - \frac{Me^{-t}}{y'(s)} > 0$$

sendo satisfeito para $t < s$.

Usamos, novamente, técnicas elementares de cálculo para estudar crescimento do lado esquerdo da desigualdade acima. Análogo ao Lema 3.1, definimos, para s fixado,

$$\phi(t) = s - t - \frac{y(s)}{y'(s)} - \frac{Me^{-t}}{y'(s)}, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verificamos que $\phi'(t) = -1 + \frac{Me^{-t}}{y'(s)}$ e daí $\phi''(t) = -\frac{Me^{-t}}{y'(s)} < 0$. Note que $\phi'(t) = 0$ se, e somente se, $t = t^*$, logo ϕ atinge o máximo em $t^* = \ln M - \ln y'(s)$. Este máximo é ainda positivo; para ver isso analize ϕ em t^* e use a hipótese do Lema 3.1 que obviamente estamos assumindo também. Além disso, temos $\phi'(t) < 0$ para $t > t^*$. Logo, ϕ é decrescente para $t > t^*$. Note que, pela hipótese do Lema 3.1,

$$s - \frac{y(s)}{y'(s)} + \ln y'(s) > \ln M + 1$$

o que implica em

$$s - \frac{y(s)}{y'(s)} - 1 > \ln M - \ln y'(s).$$

Logo se, $t' = s - \frac{y(s)}{y'(s)} - 1$, temos $t' > t^*$. Apesar disso, afirmamos que $\phi(t')$ é ainda positivo. De fato,

$$\phi(t') = 1 - \frac{Me^{-t'}}{y'(s)} > 1 - \frac{Me^{-t^*}}{y'(s)} = 0.$$

Sendo assim, o critério (1.25) é satisfeito para t', e portanto, usando o Teorema do Valor Intermediário, como no Lema 3.1, temos

$$T(\gamma) > s - \frac{y(s)}{y'(s)} - 1$$

o que prova o Lema 3.2.

Tendo estabelecido estes dois lemas preliminares, retornamos a prova do Teorema 3. Como já discutimos o caso $y_0 = 0$, voltamos nossa atenção para $y_0 > 0$. A idéia para provar a existência de $T(\gamma)$ é verificar que a hipótese do Lema 3.1 é satisfeita para $t = T_0$. Fazendo $s = T_0$, na hipótese do Lema 3.1, buscaremos uma estimativa para a seguite expressão

$$J = T_0 + \ln y'(T_0) - \frac{y(T_0)}{y'(T_0)}. \tag{1.26}$$

Temos, pelo Corolário 2.4 que

$$y'(t) \geq \left(e^{t-g(\gamma)} + \frac{g'(\gamma)}{2}\right)^{-1}.$$

Donde segue, evidenciando $e^{t-g(\gamma)}$ no lado direito e multiplicando por e^t,

$$e^t y'(t) \geq e^{g(\gamma)} \left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma)-t}\right)^{-1}.$$

Portanto, fazendo $t = T_0$ e aplicando logarítmo, podemos escrever

$$T_0 + \ln y'(T_0) \geq g(\gamma) - \ln(1 + \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma)-T_0}). \tag{1.27}$$

Para estimar o termo restante do lado direito de (1.26) usamos, mais uma vez, a cota inferior para $y'(t)$ dada pelo Corolário 2.4 donde obtemos

$$-\frac{y(T_0)}{y'(T_0)} \geq -\frac{y(T_0)}{\left(e^{T_0-g(\gamma)} + \frac{g'(\gamma)}{2}\right)^{-1}} = -y(T_0)e^{T_0-g(\gamma)} - \frac{y(T_0)g'(\gamma)}{2}.$$

Usando a segunda estimativa para $y(t)$ dada pela Proposição 2 podemos melhorar a desigualdade acima para

$$\begin{aligned} -\frac{y(T_0)}{y'(T_0)} &\geq -y(T_0)e^{T_0-g(\gamma)} - \frac{g'(\gamma)}{2}\left(\gamma - \frac{2}{g'(\gamma)} \ln(1 + \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma)-T_0})\right) \\ &= -y(T_0)e^{T_0-g(\gamma)} - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} + \ln(1 + \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma)-T_0}). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Combinando (1.27) e (1.28) obtemos

$$J \geq g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} - y(T_0)e^{T_0-g(\gamma)}. \tag{1.29}$$

Finalmente, usando agora o Corolário 2.1 para $t = T_0$, segue-se que

$$T_0 \leq \frac{1}{2}\left[g(\gamma) + g(y_0)\right] + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \ln\left(1 - e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\right).$$

O que fornece

$$\begin{aligned} e^{T_0 - g(\gamma)} &\leq e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)+g(y_0)]+\ln\frac{g'(\gamma)}{2}-\ln\left(1-e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\right)-g(\gamma)} \\ &= \frac{g'(\gamma)}{2}e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\left(1 - e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Sendo assim, substituindo a estimativa acima em (1.29), temos

$$\begin{aligned} J &\geq g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} - \frac{y(T_0)g'(\gamma)}{2}e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\left(1 - e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\right)^{-1} \\ &= g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} - \frac{y(T_0)g'(\gamma)}{2}\left(e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)-g(y_0)]} - 1\right)^{-1}. \end{aligned}$$

A estimativa acima, com a notação de (1.1), equivale a $J \geq h(\gamma)$.

Isto completa a prova do Teorema 3 no tocante à existência de $T(\gamma)$; se $M = 0$ tal existência é automática, e se $M > 0$ a condição $h(\gamma) > \ln M + 1$ assegura que $J \geq h(\gamma) > \ln M + 1$ e, portanto, a hipótese do Lema 3.1 é satisfeita com $s = T_0$.

Para completar a prova do Teorema 3, necessitamos garantir que

$$T(\gamma) > h(\gamma) + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} - 1.$$

Pelo Lema 3.2, com $s = T_0$, temos

$$T(\gamma) > T_0 - \frac{y(T_0)}{y'(T_0)} - 1. \tag{1.31}$$

Onde o termo -1 acima pode ser omitido se $M = 0$. De (1.28), obtemos

$$T_0 - \frac{y(T_0)}{y'(T_0)} \geq T_0 - y(T_0)e^{T_0 - g(\gamma)} - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} + \ln(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-T_0}).$$

Usando a propriedade, $\ln ab = \ln a + \ln b$, para a e b positivos, temos

$$T_0 - \frac{y(T_0)}{y'(T_0)} \geq g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} - y(T_0)e^{T_0-g(\gamma)} + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} + \ln\left(1 + \frac{2}{g'(\gamma)}e^{T_0-g(\gamma)}\right).$$

Assim, usando a estimativa para $e^{T_0-g(\gamma)}$ dada em (1.30) e desprezando o último termo na desigualdade acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} T_0 - \frac{y(T_0)}{y'(T_0)} &\geq g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} - \frac{y(T_0)g'(\gamma)}{2}e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\left(1 - e^{\frac{1}{2}[g(y_0)-g(\gamma)]}\right)^{-1} + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} \\ &= g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} - \frac{y(T_0)g'(\gamma)}{2}\left(e^{\frac{1}{2}[g(\gamma)-g(y_0)]} - 1\right)^{-1} + \ln\frac{g'(\gamma)}{2} \\ &= h(\gamma) + \ln\frac{g'(\gamma)}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo esta última estimativa em (1.31) obtemos

$$T(\gamma) > h(\gamma) + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} - 1$$

completando a prova do Teorema 3 ■

O próximo resultado apresenta-se como um simples arranjo do que foi discutido na demonstração do Teorema 3. No entanto, seu significado é profundo e de grande importância, de fato, este assegura a existência do tão procurado *ground states* que configura um dos objetivos deste capítulo. Diante de sua inegável importância, daremos a ele o *status* de teorema.

Teorema 4 *Suponha que f satisfaz as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3). Se existe um valor $\gamma > \max\{y_0, \zeta\}$ satisfazendo (1.3) então o problema (P_1) tem uma solução u em $\mathbb{R}^2$ com $u \leq \gamma$.*

Demonstração: De fato, pelo Teorema 2 para que o problema (P_1) tenha uma solução em $\mathbb{R}^2$ basta que exista γ talque $T(\gamma) > -\infty$, ou seja, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Se $M = 0$, pelo Lema 3.2, temos que

$$T(\gamma) > s - \frac{y(s)}{y'(s)}$$

e, além disso, $s \geq T_0$ pode ser tomado arbitrário. Em particular, tomando $s = T_0$, temos $T(\gamma)$ finito pela desigualdade acima. Por outro lado, se $M > 0$ vimos que a hipótese $h(\gamma) > \ln M + 1$ acarreta em $J \geq h(\gamma) > \ln M + 1$, e portanto, a hipótese do Lema 3.1 está garantida com $s = T_0$. Logo, temos $T(\gamma) > -\infty$ como desejado. ■

Um critério menos preciso; porém, mais simples e prático para existência de *ground states* pode ser obtido assegurando que (1.3) é assintoticamente satisfeita. Isso pode ser feito fazendo $h(u)$ assumir valores suficientemente grandes para u grande. Assim, temos o seguinte corolário do Teorema 4.

Corolário 2.6 *Suponha que f satisfaz as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3). Se*

$$\limsup_{u\to\infty} \left\{ g(u) - \frac{ug'(u)}{2} \right\} > \ln M + 1. \tag{1.32}$$

Então o problema (P_1) tem uma solução u em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração: Com efeito. É claro que se

$$h(u) \geq \left\{ g(u) - \frac{ug'(u)}{2} \right\}$$

é satisfeito o critério do Corolário 2.6 implica que a condição (1.3) é válida. Dessa forma, tudo que temos que fazer é assegurar a desigualdade acima. Ora, sendo

$$h(u) = g(u) - \frac{ug'(u)}{2} - \frac{y_0 g'(u)}{2} \left[e^{\frac{g(u)-g(y_0)}{2}} - 1 \right]^{-1}$$

basta mostrar que a última parcela do lado direito da expressão acima é não-negativa para u grande. Como

$$e^{\frac{g(u)-g(y_0)}{2}} - 1 > -1$$

temos

$$\left[e^{\frac{g(u)-g(y_0)}{2}} - 1\right]^{-1} < -1$$

o que obriga

$$-\frac{y_0 g'(u)}{2}\left[e^{\frac{g(u)-g(y_0)}{2}} - 1\right]^{-1} \geq \frac{y_0 g'(u)}{2} \geq 0, \quad \text{para} \quad u \geq y_0.$$

■

Para enfatizar o alcance destes resultados daremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo: Se $f(u) = e^{u^q+u^r}$, com $0 < r < q$.
Neste caso temos $g(u) = \ln f(u) = u^q + u^r$ e claramente $g'(u) = qu^{q-1} + ru^{r-1}$. Sendo assim,

$$g(u) - \frac{ug'(u)}{2} = u^q\left(\frac{(2-q)}{2} + u^{r-q}\big(1 - \frac{r}{2}\big)\right).$$

Logo, lembrando que $r < q$, temos que o último termo no parêntese do lado direito da igualdade acima tende a zero quando u tende a $+\infty$, e portanto o valor de

$$\limsup_{u\to\infty}\left\{g(u) - \frac{ug'(u)}{2}\right\}$$

é igual a $+\infty$ ou $-\infty$ conforme $(2-q) > 0$ ou $(2-q) < 0$ respectivamente. Disso, concluimos que o critério (1.32) do Corolário 2.6 é satisfeito para $q < 2$ mas não para $q > 2$. ⋄
O caso que $g(u)$ comporta-se como u^2 quando $u \to \infty$ pode ainda ser investigado como vemos nos exemplos seguintes.

Exemplo: Se $f(u) = ue^{u^2}$.
Neste caso $g(u) = u^2 + \ln u$, e portanto, $g'(u) = 2u + \dfrac{1}{u}$. Sendo assim,

$$g(u) - \frac{ug'(u)}{2} = \ln u - \frac{1}{2}.$$

Logo o critério (1.32) do Corolário 2.6 é claramente satisfeito. ⋄

Exemplo: Se $f(u) = e^{u^2+b}$.
Neste caso $g(u) = u^2 + b$ e obviamente $g'(u) = 2u$. Isso fornece,

$$g(u) - \frac{ug'(u)}{2} = b$$

logo o critério (1.32) do Corolário 2.6 é claramente satisfeito se $b > \ln M + 1$. ⋄

Exemplo: Se $f(u) = \lambda u e^{u^\theta}$, com $\lambda > 0$ e $1 < \theta \leq 2$.
Temos $g(u) = u^\theta + \ln \lambda u$ e, portanto, $g'(u) = \theta u^{\theta-1} + \dfrac{1}{u}$. Sendo assim,

$$g(u) - \frac{ug'(u)}{2} = \left((1 - \frac{\theta}{2})u^\theta + \ln \lambda u - \frac{1}{2}\right).$$

Logo, observando que $1 < \theta \leq 2$ implica em $1 - \dfrac{\theta}{2} \geq 0$, temos que o critério (1.32) do Corolário 2.6 é claramente satisfeito. $\diamond$

1.5 O gráfico de $y(t)$ quando γ é grande

Se o valor do limite $\lim_{t\to\infty} y(t) = \gamma$ é suficientemente grande a solução do problema (P_3) adquire uma aspecto notável. Descreveremos este aspecto brevemente nesta seção e mostraremos como ele pode ser usado para obter melhores cotas para T_0.

Por simplicidade, começaremos um caso em que se pode exibir a solução; a saber, $g(y) = ay$, $a > 0$. Neste caso, como é de fácil verificação, a solução é dada por

$$\begin{aligned} y(t,\gamma) &= \gamma - \frac{2}{a}\ln\left(1 + \frac{a}{2}e^{a\gamma - t}\right) \\ &= \gamma + \frac{2}{a}\left[t - T_c + \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{2}{a}e^{t-a\gamma}}\right)\right] \end{aligned}$$

onde $T_c = g(\gamma) + \ln \dfrac{g'(\gamma)}{2} = a\gamma + \ln \dfrac{a}{2}$. Disto vemos claramente que

$$y(t,\gamma) \approxeq \begin{cases} \gamma & \text{se} \quad t > T_c, \\ \gamma + \dfrac{2}{a}(t - T_c) & \text{se} \quad t < T_c \end{cases}$$

desde que tenhamos $|t - T_c|$ não muito pequeno. Veja a Figura seguinte. Temos ainda

$$y'(t) = \frac{e^{a\gamma - t}}{\left(1 + \frac{a}{2}e^{a\gamma - t}\right)} = \left(e^{t-a\gamma} + \frac{a}{2}\right)^{-1}$$

assim, $y'(t) = o(1)$ se $|t - a\gamma|$ é grande e $t > a\gamma$. Por outro lado, se $|t - a\gamma|$ é grande e $t < a\gamma$ escrevendo $y'(t)$ como

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{2}{a}\left(\frac{2}{a}e^{t-a\gamma} + 1\right)^{-1} \\ &= \frac{2}{a}\frac{1}{\left(1 + \frac{2}{a}e^{t-a\gamma}\right)} \\ &= \frac{2}{a}\left(1 - 1 + \frac{1}{(1 + \frac{2}{a}e^{t-a\gamma})}\right) \\ &= \frac{2}{a} + \frac{2}{a}\frac{-\frac{2}{a}e^{t-a\gamma}}{(1 + \frac{2}{a}e^{t-a\gamma})} \end{aligned}$$

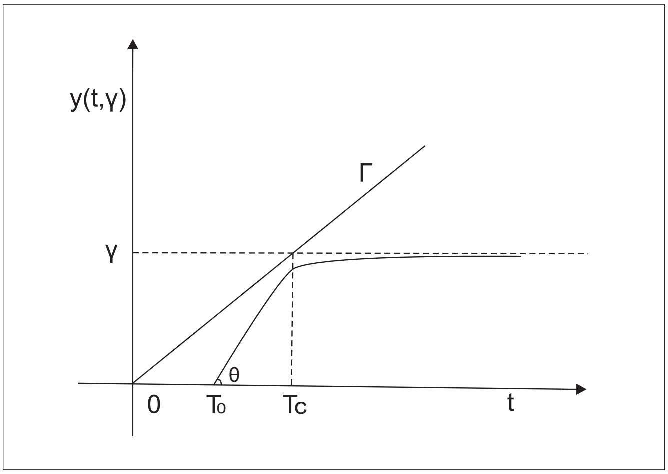

Figura 1.3: Gráfico da solução $y(t, \gamma)$.

donde vemos que $y'(t) = \dfrac{2}{a} + o(1)$.

Portanto, "chutando" de $t = \infty$, a solução começa aproximadamente como uma reta horizontal e é "refletida" pela curva

$$\Gamma = \{(t, u) \ \mid \ t = g(u)\}$$

a qual, neste caso, é representada pela reta $\lambda(t) = \dfrac{t}{a}$. Depois de refletida, e passado pela zona de transinção ao redor de T_c, esta volta a ser aproximadamente uma reta cuja inclinação θ com respeito ao eixo-t é tal que

$$\tan\theta = \frac{2}{a} = 2\lambda'(t).$$

Logo, a inclinação do gráfico da solução é duas vezes a inclinação da curva Γ. Grosseiramente falando; isto ilustra o modelo geral segundo o qual os raios de incidência e reflexão tem mesma inclinção da tangente a Γ no ponto de incidência.

O caso especial em que $g(u) = u^2$ merece algum comentário. Se o modelo de reflexão fosse esboçado, as soluções começariam horizontalmente em $t = \infty$ e seriam todas refletidas no vértice $(0, 0)$ da parábola $\lambda^2 = t$, em vez de refletirem todas no foco como na reflexão óptica. Na realidade, como vemos pelo Teorema 3, $T(\gamma)$ neste caso cresce logaritmamente quando $\gamma \to \infty$. Os caso em que $g(u) = u^m$ com $m > 2$ parece levar a múltiplas reflexões de soluções antes de chegar ao eixo-t.

Agora esboçamos uma estratégia para justificar estas observações. Por simplicidade, voltamos nossa atenção para o caso em que $y_0 = 0$ e para casos similares a $g(u) = u^m$ para $1 < m < 2$. Especificamente, suporemos sobre g, além das hipóteses, (A_1) e (A_2),

(A_3) $g(u) - \dfrac{ug'(u)}{2} > 0$ para todo $u > 0$,

(A_4) $g \in C^3([0, \infty))$ e existem constantes não nulas K_p tais que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{ug^{(p+1)}(u)}{g^{(p)}(u)} = K_p, \quad \text{para} \ \ p = 0, 1, 2.$$

Onde $g^{(p)}$ denota a $p-$ésima derivada de g.

A estratégia consite em escolher um ponto T_1, abaixo da zona de transinção $T_c = g(\gamma) + \ln \dfrac{g'(\gamma)}{2}$, no qual:

(i) $y'(T_1)$ pode ser exibido, por meio dos Corolários 2.4 e 2.5, e podemos ver que está próximo de $\dfrac{2}{g'(\gamma)}$,

(ii) Poderemos mostrar, por meio da Proposição 2, que $t - g(y)$ é suficientemente grande.

A segunda exigência assegurará que y'' é pequeno e y' não muda muito para valores de t abaixo de T_1. Junto com uma estimativa para y em $t = T_1$, esta estratégia nos permitirá obter uma estimativa para T_0.

Assim, seja

$$T_1 = g(\gamma) + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} - \delta(\gamma)$$

onde $\delta(\gamma) > 0$. Suporemos ainda

(D_1) $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \delta(\gamma) = \infty$

(D_2) $\delta^2(\gamma) = o(g(\gamma))$ quando $\gamma \to \infty$.

Começamos estimando y e $g(y)$ em $t = T_1$, em seguida estimamos $y'(T_1)$ e finalmente y' em $[T_0, T_1]$.

No que se segue estaremos supondo g nas hipóteses (A_1), (A_2), (A_3) e (A_4).

Afirmação 1 *Se $y(t)$ é solução do problema (P_3). Então*

$$y(T_1) = \gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big), \quad \gamma \to \infty, \tag{1.33}$$

e também

$$g\big(y(T_1)\big) = g(\gamma) - 2\delta(\gamma) + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big), \quad \gamma \to \infty. \tag{1.34}$$

Prova. Fazendo $t = T_1$ na segunda desigualdade dada pela Proposição 2 obtemos

$$\begin{aligned} y(T_1) &\leq \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)} \ln\big(1 + \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g'(\gamma) - T_1}\big) \\ &= \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)} \ln\big(1 + e^{\delta(\gamma)}\big) \\ &= \gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} - \frac{2}{g'(\gamma)} \ln\big(1 + e^{-\delta(\gamma)}\big) \\ &\leq \gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + \frac{2}{g'(\gamma)} e^{-\delta(\gamma)} \\ &= \gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{2e^{-\delta(\gamma)}}{g'(\gamma)}\big). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Sendo estas desigualdades válidas para γ suficientemente grande. Por outro lado, usando a primeira desigualdade dada pela Proposição 2 em $t = T_1$, obtemos

$$\begin{aligned} g\big(y(T_1)\big) &\geq g(\gamma) - 2\ln\big(1 + e^{\delta(\gamma)}\big) \\ &= g(\gamma) - 2\delta(\gamma) - 2\ln\big(1 + e^{-\delta(\gamma)}\big) \\ &\geq g(\gamma) - 2\delta(\gamma) - 2e^{-\delta(\gamma)} \\ &= g(\gamma) - 2\delta(\gamma) + O(e^{-\delta(\gamma)}) \end{aligned} \tag{1.36}$$

para γ grande. Note que usamos na segunda desigualdade acima o fato de que $\ln(1+x) \leq x$, para $x \geq 0$. Por hipótese, g é uma função crescente. Logo, usando (1.35) juntamente com a fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos

$$\begin{aligned} g\big(y(T_1)\big) &\leq g\Big(\gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{2e^{-\delta(\gamma)}}{g'(\gamma)}\big)\Big) \\ &= g(\gamma) + g'(\gamma)\Big(- \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{2e^{-\delta(\gamma)}}{g'(\gamma)}\big)\Big) \\ &+ \frac{g^{(2)}(c(\gamma))}{2!}\Big(- \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{2e^{-\delta(\gamma)}}{g'(\gamma)}\big)\Big)^2 \\ &= g(\gamma) - 2\delta(\gamma) + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Note que fizemos acima um forte uso da hipótese (A_4). Analogamente, aplicando g^{-1} em (1.36) obtemos

$$\begin{aligned} y(T_1) &\geq g^{-1}\big(g(\gamma) - 2\delta(\gamma) + O(e^{-\delta(\gamma)})\big) \\ &= \gamma + \frac{1}{g'(\gamma)}\Big(- 2\delta(\gamma) + O(e^{-\delta(\gamma)})\Big) + \frac{(g^{-1})^{(2)}(\tilde{g})}{2!}\Big(- 2\delta(\gamma) + O(e^{-\delta(\gamma)})\Big)^2 \\ &= \gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g'(\gamma)}\big). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Observemos, como anterior, que utilizamos a hipótese (A_4). Além disso, usamos aqui o fato de que $(g^{-1})^{(2)}(\tilde{g}) = -\dfrac{g^{(2)}(\tilde{\gamma})}{[g^{(1)}(\tilde{\gamma})]^3}$ onde $\tilde{\gamma}$ é único ponto em que $g(\tilde{\gamma}) = \tilde{g}$.

Agora, combinado (1.35) e (1.38) temos as desigualdades

$$\gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g'(\gamma)}\big) \leq y(T_1) \leq \gamma - \frac{2\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} + O\big(\frac{2e^{-\delta(\gamma)}}{g'(\gamma)}\big).$$

Notando que $\dfrac{2e^{-\delta(\gamma)}}{g'(\gamma)}$ é da mesma que $\dfrac{\delta^2(\gamma)}{g'(\gamma)}$ temos (1.33).

Finalmente, combinando (1.36) e (1.37) temos as desigualdades

$$g(\gamma) - 2\delta(\gamma) + O(e^{-\delta(\gamma)}) \leq g\big(y(T_1)\big) \leq g(\gamma) - 2\delta(\gamma) + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big)$$

as quais fornecem (1.34). ∎

Afirmação 2 *Suponha que $y(t)$ é solução do problema (P_3). Então*

$$y'(T_1) = \frac{2}{g'(\gamma)}\frac{1}{(1+e^{-\delta(\gamma)})}\left[1+O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)})\right], \quad \gamma\to\infty. \tag{1.39}$$

Prova. Fazendo $t=T_1$ no Corolário 2.4, temos

$$\begin{aligned} y'(T_1) &\geq \frac{2}{g'(\gamma)}\left(1-\frac{1}{1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-T_1}}\right) \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)}\left(1-\frac{1}{1+e^{\delta(\gamma)}}\right) \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)}\frac{e^{\delta(\gamma)}}{1+e^{\delta(\gamma)}} \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)}\left(\frac{1}{1+e^{-\delta(\gamma)}}\right). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Por outro lado, usando o Corolário 2.5 temos analogamente

$$y'(T_1) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\frac{L}{1+e^{-\delta(\gamma)}} \tag{1.41}$$

onde

$$L = e^{\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{g'(\gamma)}\ln(1+e^{\delta(\gamma)})\right\}^2 \sup g''(\xi)\right]}$$

e ξ satisfaz, em virtude da Afirmação 1,

$$\gamma - \frac{4\delta(\gamma)}{g'(\gamma)} < \xi < \gamma.$$

Portanto, pela hipótese (A_4),

$$L = e^{\left[O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)})\right]} = 1 + O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}).$$

Logo, combinando (1.40), (1.41) e a estimativa acima temos

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\left(\frac{1}{1+e^{-\delta(\gamma)}}\right) \leq y'(T_1) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\frac{1}{(1+e^{-\delta(\gamma)})}\left(1+O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)})\right)$$

donde segue-se (1.39). ∎

Proposição 3 *Se $y(t)$ é solução do problema (P_3) então, para $T_0 \leq t \leq T_1$,*

$$y'(t) = \frac{2}{g'(\gamma)}\left[1+O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)})+O(e^{-\delta(\gamma)})\right]+O\big(\gamma e^{\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}-g(\gamma)}\big)+O(\gamma e^{-\delta(\gamma)}) \tag{1.42}$$

uniformemente com respeito a t.

Demonstração: Integrando a equação do problema (P_3) sobre (t, T_1) obtemos

$$y'(t) = y'(T_1) + \int_t^{T_1} e^{g(y(s))-s} ds. \tag{1.43}$$

Usando o Corolário 2.2 temos

$$g(y) - t < \left\{ g(y) - \frac{g'(\gamma)y}{2} \right\} - \left\{ g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} \right\} - \ln \frac{g'(\gamma)}{2} := \psi(y). \tag{1.44}$$

É claro que $\psi''(r) = g''(r) \geq 0$, logo ψ é uma função convexa. Sendo assim, afirmamamos que

$$\psi(y) \leq \max\left\{\psi(y_0), \psi(y_1)\right\}, \quad t \in [T_0, T_1],$$

onde estamos denotando $y_0 = y(T_0)$, $y_1 = y(T_1)$ e y em vez de $y(t)$. De fato, pela continuidade da função y quando t percorre o intervalo $[T_0, T_1]$ sua imagem $y(t)$ percorre o intervalo $[y_0, y_1]$. Sendo ψ convexa seu gráfico permanece abaixo da reta que passa por $\psi(y_0)$ e $\psi(y_1)$. Analiticamente, para $t \in [T_0, T_1]$, temos

$$\psi(y) \leq \psi(y_0) + \frac{\psi(y_1) - \psi(y_0)}{y_1 - y_0}\big(y - y_0\big)$$

e também

$$\psi(y) \leq \psi(y_1) + \frac{\psi(y_1) - \psi(y_0)}{y_1 - y_0}\big(y - y_1\big).$$

Se ocorre $\psi(y_0) \geq \psi(y_1)$ a segunda parcela no lado direito da primeira desigualdade acima é não positivo, pois y é crescente e $\psi(y_1) - \psi(y_0) \leq 0$. Portanto, $\psi(y) \leq \psi(y_0)$. Se, ao contrário, ocorre $\psi(y_1) \geq \psi(y_0)$, um raciocínio análogo sobre a segunda desigualdade acima leva a $\psi(y) \leq \psi(y_1)$. Assim, concluimos a afirmação.

Segue da discussão acima e da definição de ψ em (1.44) que

$$g(y) - t \leq \max\left\{\psi(y_0), \psi(y_1)\right\}. \tag{1.45}$$

Agora, como

$$\psi(y(T_0)) = \psi(0) = g(0) - \left\{ g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} \right\} - \ln \frac{g'(\gamma)}{2}.$$

Usando os valores de $y(T_1)$ e $g(y(T_1))$ dados pela Afirmação 1,

$$\begin{aligned}
\psi(y(T_1)) &= \left\{ g(y(T_1)) - \frac{g'(\gamma)y(T_1)}{2} \right\} - \left\{ g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2} \right\} - \ln \frac{g'(\gamma)}{2} \\
&= -\delta(\gamma) - \ln \frac{g'(\gamma)}{2} + O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}) - \frac{g'(\gamma)}{2}\left[O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)})\right] \\
&= -\delta(\gamma) - \ln \frac{g'(\gamma)}{2} + O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}) + O(\frac{\delta^2(\gamma)}{\gamma}).
\end{aligned}$$

Note que usamos acima o fato de que $\frac{g'(\gamma)}{2}\left[O(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)})\right] = O(\frac{\delta^2(\gamma)}{\gamma})$ visto que $\lim\limits_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma g'(\gamma)}{g(\gamma)} = K_0$ pela hipótese (A_4). Assim, para $g(\gamma)$ suficientemente grande, as estimativas acima em conjunto com (1.45) fornecem

$$g(y) - t \leq -\ln \frac{g'(\gamma)}{2} + \max\left\{ -\big(g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\big), -\delta(\gamma) \right\}.$$

Aplicando exponencial à desigualdade acima e depois integrando; segue para $t \in [T_0, T_1]$,

$$\begin{aligned}\int_t^{T_1} e^{g(y(s))-s} ds &\leq \frac{2}{g'(\gamma)} \int_t^{T_1} \max\left\{e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}, e^{-\delta(\gamma)}\right\} ds \\ &\leq \frac{2}{g'(\gamma)} \max\left\{e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}, e^{-\delta(\gamma)}\right\} \big(T_1 - T_0\big).\end{aligned}$$

Usando o Teorema 3 e a hipótese (A_3) temos

$$T_0 \geq \big(g(\gamma) - \frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\big) + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} \geq \ln \frac{g'(\gamma)}{2}.$$

Logo, $T_1 - T_0 \leq T_1 - \ln \dfrac{g'(\gamma)}{2} = g(\gamma) - \delta(\gamma) \leq g(\gamma)$. Consequentemente,

$$\int_t^{T_1} e^{g(y(s))-s} ds \leq \frac{2}{g'(\gamma)} \max\left\{e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}, e^{-\delta(\gamma)}\right\} g(\gamma).$$

Pela hipótese (A_4) vemos que $\displaystyle\lim_{\gamma\to\infty} \frac{g(\gamma)}{\gamma g'(\gamma)} = \frac{1}{K_0}$. Além disso, lembrando que $\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}\{a + b + |a - b|\}$ obtemos

$$\int_t^{T_1} e^{g(y(s))-s} ds = O\big(\gamma e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}\big) + O\big(\gamma e^{-\delta(\gamma)}\big).$$

Levando esta última estimativa a (1.43) e substituindo o valor para $y'(T_1)$ dado pela Afirmação 2 obtemos

$$\begin{aligned}y'(t) &= \frac{2}{g'(\gamma)} \frac{1}{(1 + e^{-\delta(\gamma)})} \left[1 + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big)\right] + O\big(\gamma e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}\big) + O\big(\gamma e^{-\delta(\gamma)}\big) \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)} \left[1 - 1 + \frac{1}{(1 + e^{-\delta(\gamma)})}\right] \left[1 + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big)\right] \\ &+ O\big(\gamma e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}\big) + O\big(\gamma e^{-\delta(\gamma)}\big) \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)} \left[1 + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big) - \frac{e^{-\delta(\gamma)} + \left[O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big)\right] e^{-\delta(\gamma)}}{1 + e^{-\delta(\gamma)}}\right] \\ &+ O\big(\gamma e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}\big) + O\big(\gamma e^{-\delta(\gamma)}\big) \\ &= \frac{2}{g'(\gamma)} \left[1 + O\big(\frac{\delta^2(\gamma)}{g(\gamma)}\big) + O(e^{-\delta(\gamma)})\right] + O\big(\gamma e^{-\left(g(\gamma)-\frac{\gamma g'(\gamma)}{2}\right)}\big) + O\big(\gamma e^{-\delta(\gamma)}\big)\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

Capítulo 2

Existência de Soluções Radiais para Equações Elípticas com Crescimento Crítico em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a existência de soluções radiais na bola unitária centrada na origem para o problema de Dirichlet

$$(Q_1) \qquad \begin{aligned} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde a não linearidade f tem crescimento crítico num sentido a ser especificado adiante. A técnica utilizada aqui segue as linhas daquela usada no Capítulo 1, ou seja, usaremos ainda o *shooting method* que, como vimos, mostrou-se eficiente para uma classe considerável de não linearidades f.

2.1 Crescimento Crítico e Solubilidade

Equações elípticas envolvendo não linearidades com crescimento crítico têm sido muito estudadas nos últimos anos.

Lembramos que uma não linearidade f, em uma equação elíptica sobre um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

tem crescimento crítico se

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{f(r)}{|r|^{2^*-1}} \neq 0,$$

e, analogamente, f tem crescimento subcrítico, se

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{f(r)}{|r|^{2^*-1}} = 0,$$

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para a imersão $H^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$. Tendo em vista que não utilizaremos métodos variacionais, não entraremos em detalhes sobre os espaços $H^1(\Omega)$ e $L^{2^*}(\Omega)$, porém o leitor curioso pode encontrar um grande número de resultados envolvendo estes espaços bem como suas imersões na literatura atual. Veja por exemplo [9].

Criticalidade e subcriticalidade são peças chaves na análise da solubilidade da equação (2.1). No caso em que f tem crescimento subcrítico e satisfaz algumas hipóteses adicionais prova-se, por meio de argumento variacionais clássicos, que esta tem uma solução. Quando $f(r) = |r|^{p-2}r$ com p número real próximo de 2^* e Ω "suave", usando a identidade dada pelo Teorema 21 Apêndice A, conhecida como Identidade de Pohozaev, mostra-se que a solubilidade é perdida.

Em um importante e inspirador ensaio, Brezis e Niremberg [10] mostraram que para $N \geq 4$ tal solução é garantida para $f(r) = \lambda r + |r|^{2^*-2}r$. Mais precisamente, denotando por λ_1 o primeiro autovalor do problema de Dirichlet $-\Delta u = 0$, $u_{|\partial\Omega} = 0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos uma solução positiva para $0 < \lambda < \lambda_1$. Já para $\lambda \leq 0$, a solubilidade é perdida. No caso em que $N = 3$, a situação é mais delicada, mas considerando Ω como a bola centrada na origem e raio 1, $B_1(0)$, ainda temos uma solução para $\frac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_2$, onde λ_2 denota o segundo autovalor do problema de Dirichlet $-\Delta u = 0$, $u_{|\partial\Omega} = 0$ em $H_0^1(\Omega)$. No entanto, para $0 < \lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$ a solubilidade é novamente perdida.

O estudo feito neste capítulo descreve um fenômeno similar ao citado acima para a equação em $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, consideramos não linearidades com crescimento crítico e estaremos interessados em condições sobre um "termo de menor ordem" que garantam existência ou não existência de soluções radiais positivas na bola $B_1(0)$ para o problema (Q_1).

Em dimensão $N = 2$, como já observamos no Capítulo 1, o tratamento é diferente. Crescimento crítico não é mais motivado por imersões de Sobolev, mas pela desigualdade de Trudinger-Moser, a qual afirma que para $\alpha \leq 4\pi$

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1} \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2} \leq c(\alpha) \leq c(4\pi). \tag{2.2}$$

Motivado por (2.2), diremos que uma não linearidade f em uma equação do tipo (2.1), com $N = 2$, tem crescimento crítico, se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{f(r)}{e^{\alpha r^2}} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha < \alpha_0, \\ 0 & \text{se} \quad \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

E analogamente, f tem crescimento subcrítico se

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{f(r)}{e^{\alpha r^2}} = 0, \quad \text{para todo} \quad \alpha > 0.$$

Como no caso em que $N \geq 3$ a equação (2.1), com $N = 2$, tem solução se a não linearidade f tem crescimento subcrítico e satisfaz algumas condições adicionais. Para mais detalhes sobre este fato veja [12]. Se a não linearidade f tem crescimento crítico, trocamos o problema (Q_1) pelo seguinte

$$(Q_2) \qquad \begin{aligned} -\Delta u &= h(u)e^{\alpha u^2} && \text{em} && \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 && \text{sobre} && \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde h é um termo de menor ordem com respeito a $e^{\alpha u^2}$, ou seja, $\lim_{|r|\to\infty} \frac{h(r)}{e^{\alpha r^2}} = 0$.

Estamos interessados em determinar a linha de divisão para a solubilidade e respectivamente a não solubilidade do problema (Q_2) em termos do crescimento assintótico do termo de menor ordem h. Veremos aqui que o crescimento que garante a tal solubilidade é o crescimento crítico de h. Mais precisamente, mostraremos que tomando $\Omega = B_1(0)$ existirá uma constante $K_0 > 0$ tal que se

$$h(r) = \frac{K}{r}, \quad \text{para} \quad r > r_1 > 0, \quad \text{e} \quad K < K_0$$

e h satisfaz algumas condições em torno do zero, então (Q_2) não tem solução radial. Observamos que pelo Teorema 12 do Apêndice A, qualquer solução positiva de (Q_2) sobre $B_1(0)$ é necessariamente radial. Isto implica que não existe solução positiva sob estas hipóteses.

2.2 Transformações e Shooting Method

Retringindo-nos à bola $\Omega = B_1(0)$ e considerando apenas soluções radiais podemos, como no Capítulo 1, reduzir o problema (Q_1) à seguinte equação radial

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + f(u) = 0, \quad \text{com} \quad 0 < r < 1 \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Seguindo os mesmos passos adotados no Capítulo 1, podemos ainda transformar a equação acima em uma outra definida sobre a semi-reta $(2\ln 2, \infty)$ por meio da substituição

$$t = -2\ln\frac{r}{2}, \quad y(t) = u(r).$$

Assim, temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} -y''(t) = f(y)e^{-t}, \quad \text{se} \quad t > 2\ln 2 \\ y(2\ln 2) = 0, \quad y'(\infty) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Aqui, como no capítulo anterior, estamos denotando $\lim_{t\to\infty} y'(t) = y'(\infty)$. Note que a equação em (2.4) é aquela que estudamos no Capítulo 1, veja (P_3), e sobre a qual obtivemos alguns resultados. Em particular, provamos a existência de soluções positivas em todo $\mathbb{R}^2$, desde que f satisfaça as hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3) e que a desigualdade

$$\limsup_{u\to\infty}\left\{g(u) - \frac{ug'(u)}{2}\right\} > \ln M + 1 \tag{2.5}$$

seja garantida. Lembre-se que estamos denotando

$$g(u) = \ln f(u) \quad \text{e} \quad -M = \inf\{f(u); u > 0\}.$$

Note que, para o caso em que f tem crescimento crítico do tipo considerado em (Q_2), temos

$$g(u) = \alpha u^2 + \ln h(u).$$

Se tomarmos $h(u) = u^{-a}$, para u grande, vemos que o critério (2.5) acima é satisfeito desde que $a < 0$. De fato; neste caso,

$$\left\{ g(u) - \frac{ug'(u)}{2} \right\} = -a \left(\ln u - \frac{1}{2} \right).$$

Usando que $a < 0$ temos $\limsup_{u\to\infty} \left\{ -a(\ln u - \frac{1}{2}) \right\} = +\infty$ e portanto segue-se que o critério (2.5) é satisfeito.

Neste capítulo discutiremos o caso em que $h(u) = u^{-a}, \quad a > 0$ para u grande. Ou seja, $g(u) = u^2 - a \ln u$, para u suficientemente grande. Note que estamos nos restringindo aqui ao caso em que $\alpha = 1$ no problema (Q_2). Veremos a seguir que este fato não constitui perda de generalidade. Com mais precisão, neste capítulo, estudaremos a equação

$$\begin{array}{l} -y'' = e^{y^2 + \ln h(y) - t}, \quad t > 2\ln 2 \\ y(2\ln 2) = 0, \quad y'(\infty) = 0. \end{array} \tag{2.6}$$

com as seguintes hipóteses:

A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e existem constantes $r_1 > 0$ e um $\sigma > 0$ tais que para algumas constantes $k > 0$ e $K > 0$

(B_1) $h(r) = \dfrac{K}{r^a}$, para $r \geq r_1$, $a > 0$

(B_2) $0 \leq h(r) \leq kr^{1+\sigma}$, para $0 \leq r \leq r_1$.

Veremos que a solubilidade da equação (2.6) depende do parâmetro $a > 0$ em $h(u)$. Para provar os principais resultados deste capítulo, utilizaremos, como no capítulo anterior, o *shooting method*, com o auxílio do problema de "valor inicial"

$$\begin{array}{l} -y'' = e^{y^2 + \ln h(y) - t}, \\ y(\infty) = \gamma, \quad y'(\infty) = 0. \end{array} \tag{2.7}$$

Analizaremos a dependência de $\lim_{\gamma\to\infty} T(\gamma)$ com relação ao expoente $a > 0$ em $h(u)$, onde $T(\gamma)$ representa o primeiro zero, partindo de $+\infty$, da solução $y(t,\gamma)$ do problema acima. Note que o problema de valor inicial (2.7) apresenta-se como um caso particular do problema (P_γ) do Capítulo 1. Em particular, valem para (2.7) os resultados estabelecidos pelo Teorema 1.

Finalmente verificamos agora que ao tomarmos $\alpha = 1$ em (Q_2) para formulação do problema (2.6) não houve perda de generalidade. De fato, se $g(u) = \ln f(u)$ é da forma $g(u) = \alpha u^2 + \ln h(u)$ fazendo a mudança

$$y(t) = \sqrt{\alpha} u(r), \quad t = -2\ln\frac{r}{2}$$

temos

$$u_r = -\frac{2y'(t)}{r\sqrt{\alpha}}$$

e

$$u_{rr} = \frac{4y''(t)}{r^2\sqrt{\alpha}} + \frac{2y'(t)}{r^2\sqrt{\alpha}}.$$

Usando a equação radial (2.3) temos

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} = -f(u).$$

Em seguida, substituindo os valores acima nesta equação e tendo em mente que $\frac{r^2}{4} = e^{-t}$, obtemos diretamente

$$-y'' = \sqrt{\alpha} f(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}) e^{-t}. \tag{2.8}$$

Sendo $g(u) = \ln f(u)$ com $g(u) = \alpha u^2 + \ln h(u)$ temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} f(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}) &= \sqrt{\alpha} e^{g(\frac{y}{\sqrt{\alpha}})} \\ &= \sqrt{\alpha} e^{\alpha(\frac{y}{\sqrt{\alpha}})^2 + \ln h(\frac{y}{\sqrt{\alpha}})} \\ &= e^{y^2 + \ln\left(\sqrt{\alpha} h(\frac{y}{\sqrt{\alpha}})\right)}. \end{aligned}$$

Substituindo este último valor em (2.8) obtemos a equação

$$-y'' = e^{y^2 + \ln\left(\sqrt{\alpha} h(\frac{y}{\sqrt{\alpha}})\right) - t}. \tag{2.9}$$

Por outro lado, se h satistaz as hipóteses (B_1) e (B_2), definindo $H(r) = \sqrt{\alpha} h(\frac{r}{\sqrt{\alpha}})$ teremos

$$H(r) = \frac{\alpha^{\frac{1+a}{2}}}{r^a} K, \quad \text{para} \quad r \geq \sqrt{\alpha} r_1, \quad a > 0$$

e

$$0 \leq H(r) \leq k\sqrt{\alpha} r^{1+\sigma}, \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\alpha} r_1.$$

Portanto, as hipóteses (B_1) e (B_2) serão satisfeitas para H trocando-se K e k por $\alpha^{\frac{1+a}{2}} K$ e $k\sqrt{\alpha}$ respectivamente. Agora usando H em (2.9), teremos a equação

$$-y'' = e^{y^2 + \ln H(y) - t}$$

o que corresponde a equação do problema (2.6).

2.3 Estimativas

Começamos esta seção com algumas estimativas referentes a solução do problema (P_3) do Capítulo 1. Denotaremos $T_1 = T_1(\gamma)$ o único valor de t para o qual a solução $y(t,\gamma)$ do problema (P_3), para γ suficientemente grande, atingi o valor r_1. A existência e a unicidade de um tal T_1 seguem do fato de que as soluções de (P_3) são monótonas crescentes e côncavas. Note que

$$g(r) = r^2 + \ln \frac{K}{r^a} \quad , a > 0$$

satisfaz as hipóteses de (P_3). De fato segue imediatamente da expressão de $g(r)$ que g é de classe C^2, $g' > 0$ e $g'' \geq 0$ em $(\sqrt{\frac{a}{2}}, \infty)$.

Relembramos que as soluções $y(t, \gamma)$ do problema (P_3) tem a seguinte estrutura particular: começando de $t = \infty$, elas são aproximadamente retas paralelas ao eixo das abscissas com altura $y(\infty, \gamma) = \gamma$ até chegar próximo ao ponto

$$T_c = g(\gamma) + \ln \frac{g'(\gamma)}{2}.$$

Em seguida mudam rapidamente de direção e se aproximam novamente de retas mas com inclinação próxima a $2/g'(\gamma)$.

Para obter uma boa estimativa para a inclinação depois de T_c "olhando do infinito" definimos

$$T_5 = T_c - 5 \ln \frac{g'(\gamma)}{2} = g(\gamma) - 4 \ln \frac{g'(\gamma)}{2}.$$

Fazendo $G(t) = 1 + \dfrac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma) - t}$ provaremos o seguinte resultado:

Proposição 4 *Suponha que $g(r) = r^2 + \ln \dfrac{K}{r^a}$, com $a > 0$, para $r \geq r_1$. Então, para $t \geq T_5$, a solução $y(t, \gamma)$ de (P_3) satisfaz*

$$g(\gamma) - 2 \ln G(t) \leq g\big(y(t)\big) \leq g(\gamma) - 2 \ln G(t) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O\bigg(\frac{\ln G(t)}{\gamma^3}\bigg). \tag{2.10}$$

Demonstração: Aplicando a inversa g^{-1} à primeira desigualdade dada pela Proposição 2 do Capítulo 1, seção 1.3 na página 12 e usando a monoticidade de g^{-1} juntamente com a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange,

$$\begin{aligned} y(t) &\geq g^{-1}\big(g(\gamma) - 2 \ln G(t)\big) \\ &= g^{-1}\big(g(\gamma)\big) + (g^{-1})'\big(g(\gamma)\big)\big(-2 \ln G(t)\big) + (g^{-1})''(\tilde{g}) \frac{4 \ln^2 G(t)}{2!} \\ &= \gamma + (g^{-1})'\big(g(\gamma)\big)\big(-2 \ln G(t)\big) + (g^{-1})''(\tilde{g}) 2 \ln^2 G(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $\tilde{g}$ depende de γ e t, e satisfaz

$$g(\gamma) - 2 \ln G(t) \leq \tilde{g} \leq g(\gamma).$$

Seja $\tilde{\gamma}$ o único ponto em que $g(\tilde{\gamma}) = \tilde{g}$. Note que a unicidade de $\tilde{\gamma}$ segue da monoticidade estrita de g. Mais uma vez usando a monoticidade de g, se t e γ são tais que $g(r_1) \leq g(\gamma) - 2 \ln G(t) \leq \tilde{g}$ temos $\tilde{\gamma} \geq r_1$.

Agora voltamos nossa atenção para o "resto de Lagrange" dado pelo termo que envolve a segunda derivada de g^{-1} em (2.11). Como para todo $r \geq r_1$ temos $g^{-1}(g(r)) = r$ derivando duas vezes esta última igualdade com o auxílo da regra da cadeia e em seguida fazendo $r = \tilde{\gamma}$ obtemos

$$(g^{-1})''(\tilde{g}) = -\frac{g''(\tilde{\gamma})}{[g'(\tilde{\gamma})]^3}. \tag{2.12}$$

Segue das expressões de $g(r)$ e $g'(r)$ que $g'(r) \geq \dfrac{2g(r)}{r}$ se, e somente se, $r \geq \sqrt{e}K^{\frac{1}{a}}$. Assim, obtemos

$$g'(r) \geq \frac{2g(r)}{r} \quad \text{para} \quad r \geq \sqrt{e}\max\left\{K, K^{\frac{1}{a}}\right\}.$$

Portanto, temos a estimativa

$$g'(\tilde{\gamma}) \geq \frac{2g(\tilde{\gamma})}{2} \geq \frac{2}{\gamma}\left[g(\gamma) - 2\ln G(t)\right] \tag{2.13}$$

desde que, claro, $\tilde{\gamma} \geq \sqrt{e}\max\left\{K, K^{\frac{1}{a}}\right\}$. Note que na segunda desigualdade da expressão acima usamos a monoticidade de g mais uma vez. De fato, $g(\tilde{\gamma}) \leq g'(\gamma)$ implica $\tilde{\gamma} \leq \gamma$ ou equivalentemente $\dfrac{2}{\gamma} \leq \dfrac{2}{\tilde{\gamma}}$. Logo, $g'(\gamma) - 2\ln G(t) \leq g(\tilde{\gamma})$ fornece $\dfrac{2}{\gamma}\left[g'(\gamma) - 2\ln G(t)\right] \leq \dfrac{2g(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}$.

Observando que $G(t)$ decresce com t temos $G(t) \leq G(T_5)$, para $t \geq T_5$. Logo, para γ suficientemente grande,

$$\begin{aligned} G(t) &\leq G(T_5) \\ &= 1 + \Big(\frac{g'(\gamma)}{2}\Big)^5 \\ &= 1 + \Big(\gamma - \frac{a}{2\gamma}\Big)^5 \\ &\leq \gamma^5\left[1 + \Big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\Big)^5\right] \\ &\leq 2\gamma^5, \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos o fato de que $1 \leq \gamma^5$ para γ grande. Tendo em mente que $\ln 2 \leq \ln\gamma$, para γ grande e aplicando logaritmo, obtemos a partir das desigualdades acima

$$\ln G(t) \leq 5\ln\gamma + \ln 2 \leq 6\ln\gamma.$$

Sendo assim, trocando $\ln G(t)$ por $6\ln\gamma$ em (2.13), segue que

$$\begin{aligned} g'(\tilde{\gamma}) &\geq \frac{2}{\gamma}\left[\gamma^2 + \ln\frac{K}{\gamma^a} - 12\ln\gamma\right] \\ &= 2\gamma - \frac{(24+2a)\ln\gamma}{\gamma} + \frac{2\ln K}{\gamma} \\ &= 2\gamma - \frac{(24+2a)\ln\gamma}{\gamma} + O\Big(\frac{1}{\gamma}\Big). \end{aligned}$$

Substituindo esta última estimativa em (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} (g^{-1})''(\tilde{g}) &\geq -\frac{2 + O(\frac{1}{\gamma^2})}{8\gamma^3\left[1 - \frac{(12+a)\ln\gamma}{\gamma^2} + O(\frac{1}{\gamma^2})\right]} \\ &= -\frac{1}{4\gamma^3}\left[1 + \frac{(12+a)\ln\gamma}{\gamma^2} + O\Big(\frac{1}{\gamma^2}\Big)\right]. \end{aligned}$$

Levando esta última estimativa à equação (2.11) temos

$$\begin{aligned} y(t) &\geq \gamma - \frac{2\ln G(t)}{g'(\gamma)} - \frac{1}{2\gamma^3}\left[1 + \frac{(12+a)\ln\gamma}{\gamma^2} + O(\frac{1}{\gamma^2})\right]\ln^2 G(t) \\ &= \gamma - \frac{2\ln G(t)}{g'(\gamma)} - \frac{\ln^2 G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}). \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Notemos agora que $g'(\gamma) = 2\gamma - \dfrac{a}{\gamma}$ implica em

$$\begin{aligned} \frac{1}{g'(\gamma)} &= \frac{\gamma}{2\gamma^2 - a} \\ &= \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{2\gamma^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{\frac{a}{2\gamma^2}}{1 - \frac{a}{2\gamma^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\right) + \frac{1}{2\gamma}\left(-\frac{a}{2\gamma^2} + \frac{\frac{a}{2\gamma^2}}{1 - \frac{a}{2\gamma^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\right) + O(\frac{1}{\gamma^5}). \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão em (2.14) obtemos ainda

$$\begin{aligned} y(t) &\geq \gamma - 2\left[\frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\right) + O(\frac{1}{\gamma^5})\right]\ln G(t) - \frac{\ln^2 G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}) \\ &= \gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma} - \frac{a\ln G(t) + \ln^2 G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}). \qquad (2.16) \end{aligned}$$

Agora substituindo (2.15) na segunda desigualdade dada pela Proposição 2 do Capítulo 1, seção 1.3 na página 12 temos

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \gamma - 2\left[\frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\right) + O(\frac{1}{\gamma^5})\right]\ln G(t) \\ &= \gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma} - \frac{a\ln G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}). \qquad (2.17) \end{aligned}$$

Combinando (2.16) e (2.17) obtemos, para $t \geq T_5$,

$$\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma} - \frac{a\ln G(t) + \ln^2 G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}) \leq y(t) \leq \gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma} - \frac{a\ln G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}). \qquad (2.18)$$

Usando a desigualdade (2.17) em conjunto com a monoticidade de $g(r)$ e notando que $g(r) = r^2 + \ln K - a \ln r$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
g(y(t)) &\leq \left(\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}\big(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\big) + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}\big)\right)^2 + \ln K \\
&- a \ln\left(\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}\big(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\big) + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}\big)\right) \\
&= \gamma^{\,2} - 2\ln G(t)\big(1 + \frac{a}{2\gamma^2}\big) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^3}\big) + \ln K \\
&- a \ln \gamma + \frac{a \ln G(t)}{\gamma^2} + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}\big) \\
&= g(\gamma) - 2\ln G(t) - \frac{a \ln G(t)}{\gamma^2} + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^3}\big) + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}\big) \\
&\leq g(\gamma) - 2\ln G(t) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O\big(\frac{\ln G(t)}{\gamma^3}\big).
\end{aligned}$$

Juntando esta última estimativa com a primeira dada pela Proposição 2 do Capítulo 1, seção 1.3 na página 12 temos (2.10) o que conclui a Proposicão 4. ■

O próximo resultado fornece importantes cotas inferiores e superiores para a inclinação y' de uma solução do problema (P_3) quando t percorre o intervalo $[T_1, T_5]$. Através destas cotas, poderemos observar que $y'(t)$ está razoavelmente próximo de $\dfrac{2}{g'(\gamma)}$ em tal intervalo. Mais precisamente,

Proposição 5 *Suponha que* $g(r) = r^2 + \ln \dfrac{K}{r^a}$*, com* $a > 0$*, para* $r \geq r_1$*. Então, a solução* $y(t, \gamma)$ *de* (P_3) *satisfaz*

$$\frac{2}{g'(\gamma)} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma^3} + O\big(\frac{1}{\gamma^4}\big) \leq y'(t) \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{5}{2\gamma^3} + O\big(\frac{\ln^2 \gamma}{\gamma^4}\big) = \frac{2}{g'(\gamma)} + \frac{2}{\gamma^3} + O\big(\frac{\ln^2 \gamma}{\gamma^4}\big),$$

para $T_1 \leq t \leq T_5$*, onde* T_1 *é o ponto tal que* $y(T_1) = r_1$*.*

Demonstração: Como sabemos $y'(t) = \int_t^\infty e^{g(y(s))-s} ds$; além disso, pelas desigualdades em (2.10) temos, para $t \geq T_5$,

$$g(\gamma) - 2\ln G(t) - t \leq g\big(y(t)\big) - t \leq g(\gamma) - 2\ln G(t) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} - t + O\left(\frac{\ln G(t)}{\gamma^3}\right).$$

Logo, aplicando exponencial à esta última desigualdade e depois integrando sobre (t, ∞) podemos escrever

$$\int_t^\infty e^{g(\gamma) - 2\ln G(s) - s} ds \leq y'(t) \leq \int_t^\infty e^{g(\gamma) - 2\ln G(s) + \frac{\ln^2 G(s)}{\gamma^2} - s + O\left(\frac{\ln G(s)}{\gamma^3}\right)} ds.$$

Podemos ainda simplificar as integrais acima por meio da mudança de variável

$$x = \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma) - s}.$$

Notando que

$$1+x = 1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-s} = G(s) \ \text{ e } \ ds = -\frac{2}{g'(\gamma)}e^{-g(\gamma)+s}dx$$

obtemos

$$y'(t) \geq -\frac{2}{g'(\gamma)}\int_{\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}}^{0} e^{-2\ln(1+x)}dx$$

e

$$y'(t) \leq -\frac{2}{g'(\gamma)}\int_{\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}}^{0} e^{-2\ln(1+x)+\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})}dx.$$

Juntando e simplificando as desigualdades acima segue-se

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}} \frac{1}{(1+x)^2}dx \leq y'(t) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}} \frac{e^{\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})}}{(1+x)^2}dx. \tag{2.19}$$

Agora, voltamos nossa atenção para o termo que aparece na exponencial do lado direito da expressão acima. Estamos interessados em trocar este por um outro mais conveniente. Temos,

$$e^{\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})} = 1+\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2}+O\big(\frac{\ln\gamma}{\gamma^3}\big)$$

Substituindo esta igualdade em (2.19) e observando que $\frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-T_5} = \big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5$, podemos escrever

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5} \frac{1}{(1+x)^2}dx \leq y'(T_5) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5} \left[\frac{1+O\big(\frac{\ln\gamma}{\gamma^3}\big)}{(1+x)^2}+\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2(1+x)^2}\right]dx. \tag{2.20}$$

As integrais em (2.20) podem ser calculadas facilmente. Para z grande, temos

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{(1+x)^2}dx &= -\frac{1}{(1+x)}\Big|_0^z \\ &= 1-\frac{1}{1+z} \\ &= 1+O\big(\frac{1}{z}\big)\end{aligned}$$

e ainda, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{\ln^2(1+x)}{(1+x)^2}dx &= -\frac{\ln^2(1+x)}{(1+x)}\Big|_0^z + 2\int_0^z \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx \\ &= -\frac{\ln^2(1+x)}{(1+x)}\Big|_0^z - \frac{2\ln(1+x)}{(1+x)}\Big|_0^z + 2\int_0^z \frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= -\frac{\ln^2(1+x)}{(1+x)}\Big|_0^z - \frac{2\ln(1+x)}{(1+x)}\Big|_0^z - \frac{2}{(1+x)}\Big|_0^z \\ &= -\frac{\ln^2(1+z)}{1+z} - \frac{2\ln(1+z)}{1+z} - \frac{2}{1+z}+2 \\ &= 2+O\big(\frac{\ln^2 z}{z}\big).\end{aligned}$$

Observando que

$$\Big(\frac{g'(\gamma)}{2}\Big)^{-5} = \Big(\gamma - \frac{a}{2\gamma}\Big)^{-5} = \gamma^{-5}\Big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\Big)^{-5}$$

temos que $\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^{-5}$ é da mesma ordem de $\frac{1}{\gamma^5}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{(\frac{g'(\gamma)}{2})^5}\left[\frac{1+O\big(\frac{\ln\gamma}{\gamma^3}\big)}{(1+x)^2} + \frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2(1+x)^2}\right]dx &= 1 + O\Big(\frac{\ln\gamma}{\gamma^5}\Big) + O\Big(\frac{1}{\gamma^5}\Big) + \frac{1}{\gamma^2}\Big(2 + \frac{\ln^2\gamma}{\gamma}\Big) \\ &= 1 + \frac{2}{\gamma^2} + O\Big(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3}\Big).\end{aligned}$$

Usando as desigualdades em (2.20) temos

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\Big(1 + O\big(\frac{1}{\gamma^5}\big)\Big) \leq y'(T_5) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\Big(1 + \frac{2}{\gamma^2} + O\big(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3}\big)\Big). \tag{2.21}$$

Para estender esta estimativa ao intervalo $[T_1, T_5]$ procedemos como na Proposição 3 do Capítulo 1, seção 1.5 na página 32. Integrando a equação do problema (P_3) sobre $[t, T_5]$, com $T_1 \leq t \leq T_5$, temos

$$y'(t) = y'(T_5) + \int_t^{T_5} e^{g(y(s))-s}ds. \tag{2.22}$$

Usando a segunda desigualdade dada pela Proposição 2, Capítulo 1, seção 1.3 na página 12, temos

$$\frac{g'(\gamma)}{2}\big(\gamma - y(t)\big) \geq \ln\left(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\right)$$

ou, equivalentemente, usando a propriedade $\ln bd = \ln b + \ln d$, para $b, d > 0$,

$$\frac{g'(\gamma)}{2}\big(\gamma - y(t)\big) \geq g(\gamma) - t + \ln\Big(\frac{g'(\gamma)}{2} + \frac{1}{e^{g'(\gamma)-t}}\Big).$$

Desta última obtemos ainda

$$g(y) - t \leq g(y) - g(\gamma) + \frac{g'(\gamma)\gamma}{2} - \frac{yg'(\gamma)}{2} - \ln\Big(\frac{g'(\gamma)}{2} + \frac{1}{e^{g'(\gamma)-t}}\Big).$$

Finalmente, usando a monoticidade do logarítmo, obtemos

$$g(y) - t \leq \left\{g(y) - \frac{g'(\gamma)y}{2}\right\} - \left\{g(\gamma) - \frac{g'(\gamma)\gamma}{2}\right\} - \ln\frac{g'(\gamma)}{2} := \psi(y).$$

Temos $\psi''(r) = g''(r) \geq 0$, donde ψ é uma função convexa e, portanto,

$$g(y) - t \leq \psi(y) \leq \max\big\{\psi\big(y(T_1)\big), \psi\big(y(T_5)\big)\big\}, \quad T_1 \leq t \leq T_5. \tag{2.23}$$

Lembrando que $g'(\gamma) = 2\gamma - \dfrac{a}{\gamma}$ e $y(T_1) = r_1$ temos, pela definição de ψ,

$$\psi\big(y(T_1)\big) = \psi(r_1) = g(r_1) - \frac{r_1}{2}\Big(2\gamma - \frac{a}{\gamma}\Big) - \frac{a}{2} - \ln\frac{K}{\gamma^a} - \ln\Big(\gamma - \frac{a}{2\gamma}\Big)$$

ou, equivalentemente, usando que $\ln bd = \ln b + \ln d$, para $b, d > 0$, podemos escrever

$$\psi\big(y(T_1)\big) = g(r_1) - \frac{r_1}{2}\big(2\gamma - \frac{a}{\gamma}\big) - \frac{a}{2} - \ln\gamma - \ln\big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\big).$$

Finalmente, pelo Teorema Teorema do Valor Médio, existe $\tilde{c}(\gamma) \in (1 - \frac{a}{2\gamma^2}, 1)$ tal que

$$\ln\big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\big) = \ln 1 + \frac{1}{\tilde{c}}\frac{a}{2\gamma^2} = O(\frac{1}{\gamma^2}).$$

Logo, podemos escrever

$$\psi\big(y(T_1)\big) = g(r_1) - \frac{r_1}{2}\big(2\gamma - \frac{a}{\gamma}\big) - \frac{a}{2} - \ln\gamma + O(\frac{1}{\gamma^2}).$$

Por outro lado, usando a Proposição 4 temos, para $t \geq T_5$,

$$g(y(t)) = g(\gamma) - 2\ln G(t) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2})$$

e combinando (2.14) com a segunda desigualdade dada na Proposição 2, Capítulo 1, seção 1.3 na página 12, obtemos

$$\gamma - \frac{2\ln G(t)}{g'(\gamma)} - \frac{\ln^2 G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}) \leq y(t) \leq \gamma - \frac{2\ln G(t)}{g'(\gamma)}$$

fornecendo

$$y(t) = \gamma - \frac{2\ln G(t)}{g'(\gamma)} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^3}). \tag{2.24}$$

Portanto, usando a definição de ψ e as estimativas acima, temos

$$\begin{aligned} \psi(y(T_5)) &= g(\gamma) - 2\ln G(T_5) + O(\frac{\ln^2 G(T_5)}{\gamma^2}) \\ &- \frac{g'(\gamma)}{2}\Big(\gamma - \frac{2\ln G(T_5)}{g'(\gamma)} + O(\frac{\ln^2 G(T_5)}{\gamma^3})\Big) \\ &- \Big\{g(\gamma) - \frac{g'(\gamma)\gamma}{2}\Big\} - \ln\big(\gamma - \frac{a}{2\gamma}\big). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Simplificando os termos simétricos podemos ainda escrever

$$\psi(y(T_5)) = -\ln\gamma - \ln G(T_5) + O(\frac{\ln^2 G(T_5)}{\gamma^2}) - \frac{g'(\gamma)}{2}\Big[O(\frac{\ln^2 G(T_5)}{\gamma^3})\Big] - \ln\big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\big)$$

e lembrando que

$$\ln G(T_5) = \ln\big(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{4\ln\frac{g'(\gamma)}{2}}\big)$$

é da ordem de $\ln\gamma$ e que, como discutido acima, $\ln\big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\big)$ é da ordem de $\frac{1}{\gamma^2}$, podemos escrever

$$\psi(y(T_5)) = -\ln\gamma - \ln\big(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{4\ln\frac{g'(\gamma)}{2}}\big) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}).$$

Agora fazendo,

$$\psi(y(T_5))-\psi(y(T_1)) = r_1\gamma-g(r_1)-\ln\big(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{4\ln\frac{g'(\gamma)}{2}}\big)-\frac{r_1 a}{2\gamma}+\frac{a}{2}+O(\frac{1}{\gamma^2})+O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2})$$

e lembrando mais uma vez que

$$\ln\big(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{4\ln\frac{g'(\gamma)}{2}}\big) = 5\ln\gamma+\ln\Big(\frac{1}{\gamma^5}+\big(1-\frac{a}{2\gamma^2}\big)^5\Big)$$

é da ordem de $\ln\gamma$ e ainda que $\ln\gamma < r_1\gamma$ para γ suficientemente grande vemos que $\psi(y(T_5)) \geq \psi(y(T_1))$ para γ grande.

Disto segue, usando (2.23), que para γ suficientemente grande e $t \in [T_1, T_5]$

$$\int_t^{T_5} e^{g(y(s))-s}ds \leq e^{\psi(y(T_5))}\big(T_5-t\big) \leq e^{\psi(y(T_5))}\big(T_5-T_1\big).$$

Observando que, para γ grande,

$$\begin{aligned} e^{\psi(y(T_5))} &= e^{-\ln\gamma-\ln\left(1+\frac{g'(\gamma)}{2}e^{4\ln\frac{g'(\gamma)}{2}}\right)+O\left(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\right)} \\ &= \frac{e^{\left[O\left(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\right)\right]}}{\gamma\big(1+(\frac{g'(\gamma)}{2})^5\big)} \\ &= \frac{e^{\left[O\left(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\right)\right]}}{\gamma\big(1+(\gamma-\frac{a}{2\gamma})\big)^5} \\ &= \frac{e^{\left[O\left(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\right)\right]}}{\gamma^6\big(\frac{1}{\gamma^5}+(1-\frac{a}{2\gamma^2})^5\big)} \\ &\leq \frac{c}{\gamma^6}. \end{aligned}$$

Podemos escrever,

$$\int_t^{T_5} e^{g(y(s))-s}ds \leq \frac{c}{\gamma^6}\big(T_5-T_1\big).$$

Procuraremos agora uma boa estimativa para $\big(T_5-T_1\big)$. Primeiramente, usando o Teorema do Valor Médio e a monoticidade de y' obtemos $t_0 \in (T_1, T_5)$ tal que

$$\big(T_5-T_1\big) = \frac{y(T_5)-y(T_1)}{y'(t_0)} \leq \frac{y(T_1)}{y'(T_5)}$$

em seguida, substituindo as estimativas dadas pela Proposição 2, Capítulo 1, seção 1.3 na página 12 e pela desigualdade dada em (2.21) na desigualdade acima, podemos escrever

$$\big(T_5-T_1\big) \leq \frac{\gamma-\frac{g'(\gamma)}{2}\ln G(T_5)}{\frac{2}{g'(\gamma)}\big(1+O(\frac{1}{\gamma^5})\big)} \leq \frac{\gamma}{\frac{2}{g'(\gamma)}\big(1+O(\frac{1}{\gamma^5})\big)}$$

visto que $\ln G(T_5) \geq 0$. Finalmente, notando que

$$\frac{\gamma}{\frac{2}{g'(\gamma)}\big(1+O(\frac{1}{\gamma^5})\big)} = \frac{\frac{g'(\gamma)\gamma}{2}}{1+O(\frac{1}{\gamma^5})} = \frac{\gamma(\gamma-\frac{a}{2\gamma})}{1+O(\frac{1}{\gamma^5})} = O(\gamma^2)$$

temos $\big(T_5 - T_1\big) = O(\gamma^2)$ e, portanto

$$\int_t^{T_5} e^{g(y(s))-s} ds = O(\frac{1}{\gamma^4}).$$

Sendo assim, usando mais uma vez a monoticidade de y' aliada à igualdade em (2.22) obtemos, para $T_1 \leq t \leq T_5$,

$$y'(T_5) \leq y'(t) \leq y'(T_5) + O(\frac{1}{\gamma^4}).$$

Isto prova a Proposição 5. ■

Agora, estamos prontos para obter uma importante estimativa para T_1, isto é, para o ponto em que a solução $y(t)$ do problema (P_3) atinge o valor r_1. Isso é o conteúdo do seguinte resultado:

Corolário 5.1 *Suponha que $g(r) = r^2 + \ln \frac{K}{r^a}$, com $a > 0$, para $r \geq r_1$. Então,*

$$T_1 = r_1\gamma + [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma}),$$

onde $[a, b]$ denota estimativas superior e inferior.

Demonstração: Primeiramente, notemos que $G(T_5) = 1 + \big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5$. Além disso, a ordem de $\ln\big(1 + (\frac{g'(\gamma)}{2})^5\big)$ é a mesma de $\ln\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5$. De fato, basta notar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1.$$

Portanto, de (2.24) podemos obter uma estimativa inicial para $y(T_5)$, a saber

$$y(T_5) = \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)} \ln\big(1 + (\frac{g'(\gamma)}{2})^5\big) + O(\frac{\ln^2\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5}{\gamma^3})$$

ou, equivalentemente, usando a propriedade $\ln bd = \ln b + \ln d$, para $b, d > 0$,

$$y(T_5) = \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)} \left[\ln\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5 + \ln\big(1 + (\frac{2}{g'(\gamma)})^5\big)\right] + O(\frac{\ln^2\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5}{\gamma^3}).$$

Podemos melhorar esta estimativa observando que, por (2.15),

$$\frac{2}{g'(\gamma)} = \frac{1}{\gamma} + O(\frac{1}{\gamma^3}).$$

Assim, obtemos

$$y(T_5) = \gamma - \frac{\ln\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5}{\gamma} + O(\frac{\ln^2\big(\frac{g'(\gamma)}{2}\big)^5}{\gamma^3}).$$

Por outro lado, usando a Proposição 5, podemos obter uma estimativa apropriada para $y'(t)$ para $t \in [T_1, T_5]$. De fato, temos

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma^3} + O(\frac{1}{\gamma^4}) \leq y'(t) \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{5}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^4}),$$

ou seja,

$$0 \leq y'(t) - \frac{1}{\gamma}\left[1 + \frac{1}{2\gamma^2} + O(\frac{1}{\gamma^3})\right] \leq \frac{1}{\gamma}\left[(\frac{5}{2\gamma^2} - \frac{1}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\right].$$

Finalmente, notando que podemos representar o termo de ordem $O\big(\frac{1}{\gamma^3}\big)$ no lado esquerdo acima por $O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})$, podemos escrever, para $t \in [T_1, T_5]$,

$$y'(t) = \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\right).$$

Feito estas estimativas, usamos o Teorema do Valor Médio para escrever

$$T_1 = T_5 - \frac{y(T_5) - y(T_1)}{y'(t_0)}$$

para algum $t_0 \in (T_1, T_5)$. Substituindo as estimativas obtidas para $y(T_5)$, $y'(t_0)$ e o valor por definição de T_5 na igualdade acima, temos

$$T_1 = g(\gamma) - 4\ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \frac{\gamma - \frac{\ln\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5}{\gamma} + O\big(\frac{\ln^2\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5}{\gamma^3}\big) - r_1}{\frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\right)}$$

ou, equivalentemente,

$$T_1 = g(\gamma) - 4\ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \gamma\big(\gamma - \frac{\ln\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5}{\gamma} + O\big(\frac{\ln^2\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5}{\gamma^3}\big) - r_1\big)\frac{1}{\big(1 + \frac{[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big)}.$$

Usando a identidade algébrica elementar $(1+d)^{-1} = 1 - d + d^2(1+d)^{-1}$, $d \neq -1$ com

$$d := d(\gamma) = \frac{[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3}),$$

podemos verificar, sem grandes dificuldades, que

$$\frac{1}{\big(1 + \frac{[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big)} = \big(1 - \frac{[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big).$$

Portanto, substituindo isto na última expressão para T_1 acima podemos escrever

$$T_1 = g(\gamma) - 4\ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \gamma\big(\gamma - \frac{\ln\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5}{\gamma} + O\big(\frac{\ln^2\left(\frac{g'(\gamma)}{2}\right)^5}{\gamma^3}\big) - r_1\big)\big(1 - \frac{[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big)$$

donde, fazendo as devidas multiplicações e agrupando termos semelhantes, obtemos

$$T_1 = g(\gamma) - \gamma^2 + \ln \frac{g'(\gamma)}{2} + r_1\gamma + [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] + O\big(\frac{\ln^2 \gamma}{\gamma}\big).$$

Lembrando que $g(\gamma) = \gamma^2 + \ln K - a \ln \gamma$ e que existe $\tilde{c}(\gamma) \in (1 - \frac{a}{2\gamma^2}, 1)$ tal que

$$\ln \frac{g'(\gamma)}{2} = \ln \big(\gamma - \frac{a}{2\gamma}\big) = \ln \gamma + \ln \big(1 - \frac{a}{2\gamma^2}\big) = \ln \gamma + \ln 1 + \frac{1}{\tilde{c}} \frac{a}{2\gamma^2} = \ln \gamma + O(\frac{\ln^2 \gamma}{\gamma})$$

temos, finalmente,

$$T_1 = r_1\gamma + [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] - (a-1)\ln \gamma + \ln K + O\big(\frac{\ln^2 \gamma}{\gamma}\big).$$

■

2.4 Soluções no disco e Ground States

Nesta seção, provaremos resultados sobre existência e unicidade de soluções radiais do problema (Q_1). Além disso, provaremos a existência de *ground states*, isto é, soluções positivas em todo $\mathbb{R}^2$. Para cumprir nosso objetivo, começamos por estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 5 *Seja* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *nas hipóteses* (B_1) *e* (B_2). *Então o primeiro zero* $T(\gamma)$, *partindo de* ∞, *da solução* $y(t, \gamma)$ *do problema* (2.7) *satisfaz*

(i) *Se* $a > 1$, *então* $\lim_{\gamma\to\infty} T(\gamma) = -\infty$

(ii) *Se* $a = 1$, *então* $\lim_{\gamma\to\infty} T(\gamma) \in [\frac{1}{2} + \ln K, \frac{5}{2} + \ln K]$

(iii) *Se* $a < 1$, *então* $\lim_{\gamma\to\infty} T(\gamma) = +\infty$.

Demonstração: Inicialmente, procuraremos uma estimativa adequada para $T(\gamma)$. Fazendo $f(y) = e^{y^2 + \ln h(y)}$ na equação do problema (2.7) temos $-y'' = f(y)e^{-t}$. Integrando esta última equação sobre (t_2, t_3), com $t_2 < t_3$, temos

$$y'(t_3) - y'(t_2) = \int_{t_3}^{t_2} f(y(s))e^{-s} ds$$

e usando o Teorema do Valor Médio para Integrais, obtemos $s_0 \in (t_2, t_3)$ tal que

$$y'(t_3) - y'(t_2) = f(y(s_0)) \int_{t_3}^{t_2} e^{-s} ds.$$

Notando que $f(y(s_0)) > 0$ e usando a equação anterior podemos escrever

$$y'(t_3) - y'(t_2) = O_+(1)\big(e^{-t_3} - e^{-t_2}\big), \tag{2.26}$$

onde $O_+(1)$ denota a constante positiva $f(y(s_0))$. Logo, para $t \in (t_2, t_3)$ podemos escrever

$$y'(t) = y'(t_3) + O_+(1)\big(e^{-t} - e^{-t_3}\big).$$

Integrando novamente, obtemos

$$\int_{t_2}^{t_3} y'(s)ds = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O_+(1)\int_{t_2}^{t_3} \big(e^{-t} - e^{-t_3}\big)ds$$

ou ainda,

$$y(t_3) - y(t_2) = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O_+(1)e^{-t_2}\left[1 - e^{t_2 - t_3}\big(t_3 - t_2 + 1\big)\right]. \tag{2.27}$$

Agora, afirmamos que o termo $\left[1 - e^{t_2-t_3}\big(t_3 - t_2 + 1\big)\right]$ que aparece na igualdade acima é positivo. De fato, para verificar isso, basta provar que

$$e^{t_2-t_3}\big(t_3 - t_2 + 1\big) < 1.$$

Ora, dado $x > 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (1, 1 + x)$ tal que

$$\ln(1 + x) = \ln(1 + x) - \ln 1 = \frac{1}{c}x < x$$

donde, aplicando exponencial, temos $1 + x < e^x$ ou ainda $e^{-x}(1 + x) < 1$. Fazendo $x = (t_3 - t_2)$ vemos que a afirmação é verdadeira.

$$y(t_3) - y(t_2) = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O_+(1)e^{-t_2}. \tag{2.28}$$

Se t_3 e t_2 são tais que $y(t_3), y(t_2) \leq y_0 \leq r_1$, podemos melhorar a estimativa acima com o uso da hipótese (B_2). De fato, neste caso, $0 \leq h(y) \leq ky^{\sigma+1}$. Logo, $f(y) = e^{y^2 + \ln h(y)} \leq e^{y^2}ky^{\sigma+1}$. Portanto, procedendo como anterior, obteremos inicialmente,

$$y'(t_3) - y'(t_2) = O(y_0^{1+\sigma})(e^{-t_3} - e^{-t_2})$$

e, como anteriormente, integrando pela segunda vez, teremos

$$y(t_3) - y(t_2) = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O(y_0^{1+\sigma})e^{-t_2}. \tag{2.29}$$

Fazendo $t_2 = T(\gamma)$ e $t_3 = T_1$, obtemos

$$y(T_1) - y(T(\gamma)) = y'(T_1)(T_1 - T(\gamma)) + O_+(1)e^{-T(\gamma)}.$$

Para melhorar a estimativa acima fazemos uso da Proposição 5 e do Corolário 5.1. De fato, por estes últimos, temos respectivamente

$$y'(T_1) = \frac{1}{\gamma} + O\big(\frac{1}{\gamma^3}\big)$$

e

$$T_1 = r_1\gamma - (a - 1)\ln\gamma + O(1).$$

Assim, substituindo estes valores, podemos escrever a equação

$$r_1 = \big(\frac{1}{\gamma} + O\big(\frac{1}{\gamma^3}\big)\big)\Big(r_1\gamma - (a - 1)\ln\gamma + O(1) - T(\gamma)\Big) + O_+(1)e^{-T(\gamma)}$$

a qual, depois de feita as devidas multiplicações, pode ser escrita como

$$r_1 = r_1 - (a-1)\frac{\ln\gamma}{\gamma} - \frac{T(\gamma)}{\gamma} + O\big(\frac{1}{\gamma}\big) + O_+(1)e^{-T(\gamma)}.$$

Note que usamos acima o fato de que $T(\gamma) \le T_1$ implica em

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{T(\gamma)}{\gamma^2} \le \lim_{\gamma\to\infty}\frac{T_1}{\gamma^2} = \lim_{\gamma\to\infty}\Big[\frac{r_1}{\gamma} - (a-1)\frac{\ln\gamma}{\gamma^2} + O(1)\frac{1}{\gamma^2}\Big] = 0.$$

Sendo assim, isolando $T(\gamma)$ na última expressão temos

$$T(\gamma) = -(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_+(1)\gamma e^{-T(\gamma)}. \tag{2.30}$$

Provaremos inicialmente o item **(iii)**. Suponha, por contradição, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T(\gamma) \le c$ para todo $\gamma > 0$. Assim, usando a igualdade (2.30) temos

$$-(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_+(1)\gamma e^{-c} \le T(\gamma) \le c$$

o que é uma contradição uma vez que $a < 1$ implica em $-(a-1) > 0$ e $\ln\gamma$ é ilimitado sobre $(0,\infty)$.

Para completar a prova do itens **(i)** e **(ii)** procedemos por etapas.

Afirmação 5.1 *Existe $\gamma_0 > 0$ tal que, para $\gamma \ge \gamma_0$,*

$$T(\gamma) < 4\ln\gamma$$

e, se $a = 1$, tem-se $T(\gamma) \ge -c$ para algum $c > 0$.

Prova. Suponha, por contradição, que $T(\gamma) \ge 4\ln\gamma$ para todo $\gamma > 0$. Neste caso, obtemos da equação (2.30)

$$4\ln\gamma \le -(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_+(1)\gamma e^{-4\ln\gamma}.$$

Como estamos supondo $a = 1$ ou $a > 1$, temos $-(a-1) \le 0$. Logo a desigualdade acima pode ser melhorada; a saber,

$$4\ln\gamma \le O(1) + O_+(1)\frac{1}{\gamma^3}.$$

Mas, essa última desigualdade é uma contradição, pois $\ln\gamma$ é ilimitado sobre $(0.\infty)$.

Se $a = 1$, podemos usar (2.30) e obter diretamente

$$T(\gamma) \ge O(1), \quad \text{para todo} \quad \gamma > 0.$$

Portanto, existe $c > 0$ tal que $T(\gamma) > -c$, para $\gamma \ge \gamma_0$. ■

Afirmação 5.2 $y'(4\ln\gamma) = y'(T_1) + O\big(\frac{1}{\gamma^4}\big)$, *para todo $\gamma > 0$.*

Prova. Fazendo uso da equação (2.26), para $t_3 = T_1$ e $t_2 = 4\ln\gamma$, obtemos a equação

$$y'(T_1) = y'(4\ln\gamma) + O_+(1)\big(e^{-T_1} - \frac{1}{\gamma^4}\big).$$

Usando a estimativa para T_1 dada pelo Corolário 5.1, podemos escrever a equação anterior como

$$y'(T_1) = y'(4\ln\gamma) + O_+(1)\left[\frac{K\gamma^{(a-1)}}{e^{r_1\gamma+[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]+O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma})}} - \frac{1}{\gamma^4}\right].$$

Observando que o termo no colchete da equação acima é da ordem de $\frac{1}{\gamma^4}$, podemos ainda escrever

$$y'(T_1) = y'(4\ln\gamma) + O\big(\frac{1}{\gamma^4}\big).$$

Notando que o sinal do erro acima é indiferente para a estimativa temos que a afirmação está provada. ■

Afirmação 5.3 $y(4\ln\gamma) = \dfrac{4\ln\gamma}{\gamma} - \dfrac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K\big) + O\big(\dfrac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\big).$

Prova. Com efeito, usando a Proposição 5 podemos escrever a estimativa

$$y'(T_1) = \frac{1}{\gamma} + O\big(\frac{1}{\gamma^2}\big).$$

Feito isto, podemos recorrer a equação (2.28) em conjunto com o Corolário 5.1 e obter o seguinte

$$\begin{aligned} y(T_1) - y(4\ln\gamma) &= \left[\frac{1}{\gamma} + O\big(\frac{1}{\gamma^3}\big)\right]\left[r_1\gamma + [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K\right] \\ &+ \left[\frac{1}{\gamma} + O\big(\frac{1}{\gamma^3}\big)\right]\left[O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma}) - 4\ln\gamma\right] + O_+(1)\frac{1}{\gamma^4}. \end{aligned}$$

Recordando que $y(T_1) = r_1$ e fazendo as devidas multiplicações temos a equação

$$r_1 - y(4\ln\gamma) = r_1 + \frac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K - 4\ln\gamma\big) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2})$$

donde segue facilmente a estimativa afirmada. ■

Agora, estamos em condições de fornecer uma última estimativa para $T(\gamma)$. De fato, pela Afirmação 5.3 podemos observar que $y(4\ln\gamma)$ é da ordem de $\frac{\ln\gamma}{\gamma}$. Visto que $y(T(\gamma)) = 0$, podemos tomar γ suficientemente grande tal que

$$y(T(\gamma)), y(4\ln\gamma) \leq \frac{\ln\gamma}{\gamma} \leq r_1$$

e assim podemos usar a equação (2.29), com $t_3 = 4\ln\gamma$ e $t_2 = T(\gamma)$ para obter

$$y(4\ln\gamma) - y(T(\gamma)) = y'(4\ln\gamma)\big(4\ln\gamma - T(\gamma)\big) + O\Big(\big(\frac{\ln\gamma}{\gamma}\big)^{1+\sigma}\Big)e^{-T(\gamma)}.$$

Usando as afirmações 5.1 e 5.2 obtemos da igualdade acima

$$\begin{aligned}\frac{4\ln\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K\big) &= \big(y'(T_1) + O(\frac{1}{\gamma^4})\big)\big(4\ln\gamma - T(\gamma)\big)\\ &+ O\Big(\big(\frac{\ln\gamma}{\gamma}\big)^{1+\sigma}\Big)e^{-T(\gamma)} + O\big(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\big).\end{aligned}$$

Como, pela Proposição 5, temos

$$y'(T_1) = \frac{1}{\gamma} + O(\frac{1}{\gamma^3}),$$

podemos escrever a igualdade anterior como

$$\begin{aligned}\frac{4\ln\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K\big) &= \big(\frac{1}{\gamma} + O(\frac{1}{\gamma^3})\big)\big(4\ln\gamma - T(\gamma)\big)\\ &+ O\Big(\big(\frac{\ln\gamma}{\gamma}\big)^{1+\sigma}\Big)e^{-T(\gamma)} + O\big(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}\big).\end{aligned}$$

Fazendo as devidas multiplicações e organizando os termos convenientemente, obtemos a estimativa desejada para $T(\gamma)$; a saber,

$$T(\gamma)\big(1 + O(\frac{1}{\gamma^2})\big) = [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O\big(\frac{\ln^{1+\sigma}\gamma}{\gamma^\sigma}\big)e^{-T(\gamma)}. \tag{2.31}$$

Estamos agora em posição de concluir a demonstração dos itens restantes. Para provar o item **(i)**, suponhamos, por contradição, que existe uma constante $C > 0$ tal que $T(\gamma) \geq -C$ para todo $\gamma > 0$. Neste caso, podemos obter a partir da expressão em (2.31) acima

$$-C\big(1 + O(\frac{1}{\gamma^2})\big) \leq [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O\big(\frac{\ln^{1+\sigma}\gamma}{\gamma^\sigma}\big)e^{C}$$

e portanto, podemos ainda escrever

$$-C \leq -(a-1)\ln\gamma + O(1).$$

Uma vez que estamos supondo $a > 1$ a desigualdade acima contradiz com o fato de que $\ln\gamma$ é ilimitado. Isto prova o item **(ii)**. Por outro lado, pela Afirmação 5.1, se $a = 1$, existem γ_0 e $c > 0$ tais que $T(\gamma) \geq -c$ para $\gamma \geq \gamma_0$. Assim, por (2.31) podemos escrever

$$T(\gamma)\big(1 + O(\frac{1}{\gamma^2})\big) = [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + \ln K + O\big(\frac{\ln^{1+\sigma}\gamma}{\gamma^\sigma}\big)e^{-T(\gamma)}.$$

Uma vez que $e^{-T(\gamma)}$ é limitado, pois $e^{-T(\gamma)} \leq e^c$ para $\gamma \geq \gamma_0$; temos da igualdade acima

$$\lim_{\gamma \to \infty} T(\gamma) = [\frac{1}{2} + \ln K, \frac{5}{2} + \ln K]$$

concluindo a demonstração do teorema. ■

A seguir, usaremos o Teorema 5 para provar existência, inexistência e não unicidade de soluções radiais do problema (Q_1) sobre um disco $\Omega = B_1(0)$, bem como a existência de *ground states*, isto é, soluções positivas em todo $\mathbb{R}^2$. Antes de procedermos, no entanto, faremos uma observação.

Defina $R : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$R(\gamma) = 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}}.$$

Se existe um valor $\gamma > 0$ tal que $R(\gamma) = 1$ temos, claramente, $T(\gamma) = 2\ln 2$ e, portanto, se $y(\gamma, t)$ é uma solução do problema (2.7) para um tal valor de γ, temos

$$y(\gamma, 2\ln 2) = y(\gamma, T(\gamma)) = 0.$$

Dessa forma, $y(\gamma, t)$ é uma solução radial positiva para o problema (2.6) no disco $B_1(0)$. Assim, tudo que temos a fazer para encontrar uma solução radial do problema (2.6), com $\Omega = B_1(0)$, é encontrar um valor $\gamma > 0$ tal que $R(\gamma) = 1$. Como uma última observação, note que R é uma função contínua, pois $T(\gamma)$ depende continuamente de γ. Feito estas observações, provaremos agora o seguinte teorema:

Teorema 6 *Suponha $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 nas hipóteses (B_1) e (B_2) e ainda que $\Omega = B_1(0)$ e $\alpha = 1$ no problema (Q_2). Então,*

1. *Se $a < 1$, o problema (Q_2) tem pelo menos uma solução radial positiva;*

2. *Se $a = 1$, o problema (Q_2) tem pelo menos uma solução radial positiva para $K > K_1 = \dfrac{4}{\sqrt{e}}$, e existe uma constante K_0, com $0 < K_0 \leq K_1$, tal que (Q_2) não tem solução radial para $0 < K < K_0$;*

3. *Se $a > 1$, existe uma constante $K_2 > 0$ tal que, se $K < K_2$, o problema (Q_2) não tem solução radial e, se $K > K_2$, (Q_2) tem pelo menos duas soluções radiais positivas.*

Demonstração: Iniciamente provaremos que

$$\lim_{\gamma \to 0^+} R(\gamma) = +\infty,$$

onde $R : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é definido como na observação que precede o teorema. Com efeito; notando que para $y_0 = \gamma \leq r_1$ temos

$$y(T(\gamma)), y(\infty) \leq y_0 \leq r_1,$$

podemos utilizar a equação (2.29) com $t_2 = T(\gamma)$ e $t_3 = +\infty$ obtendo

$$\gamma = O(\gamma^{1+\sigma})e^{-T(\gamma)}.$$

Dessa forma,

$$e^{T(\gamma)} \leq O(\frac{\gamma^{1+\sigma}}{\gamma}) \to 0 \quad \text{quando} \quad \gamma \to 0^+$$

e concluimos que $\lim_{\gamma \to 0^+} T(\gamma) = -\infty$. Portanto,

$$\lim_{\gamma \to 0^+} R(\gamma) = \lim_{\gamma \to 0^+} 2e^{-T(\gamma)} = +\infty. \tag{2.32}$$

Note que o limite acima é verdadeiro para todo $a > 0$.

Para provar o item 1., notemos que, se $a < 1$, temos pelo item **(iii)** do Teorema 5, $\lim_{\gamma \to \infty} T(\gamma) = -\infty$, e portanto,

$$\lim_{\gamma \to \infty} R(\gamma) = \lim_{\gamma \to \infty} 2e^{-T(\gamma)} = 0.$$

Lembrando que $R : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e combinando a igualdade acima com àquela dada por (2.32) temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $\gamma_0 > 0$ tal que $R(\gamma_0) = 1$ o que, como sabemos, isso acarreta em uma solução radial positiva para (2.6). Ou seja, (Q_2) tem uma solução radial positiva sobre $\Omega = B_1(0)$. Isto prova o item 1. do Teorema 6. Para provar o item 2., observemos que se $K > \dfrac{4}{\sqrt{e}}$ temos

$$\frac{1}{2} + \ln K > 2 \ln 2$$

e, sendo assim, pelo item **(ii)** do Teorema 5 temos $\lim_{\gamma \to \infty} T(\gamma) > 2 \ln 2$. Portanto,

$$\lim_{\gamma \to \infty} R(\gamma) = \lim_{\gamma \to \infty} 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}} < 1$$

Combinando a desigludade anterior com a equação (2.32) temos, mais uma vez, pelo Teorema do Valor Intermediário, a existência de uma valor $\gamma_0 > 0$ tal que $R(\gamma_0) = 1$. Ou seja, o problema (Q_2) tem uma solução radial positiva para $K > K_1 = \dfrac{4}{\sqrt{e}}$. Isto prova a primeira parte do item 2. Resta-nos provar a segunda parte. Para isto, observemos que, pelo item **(ii)** do Teorema 5,

$$\lim_{\gamma \to \infty} T(\gamma) \leq \frac{5}{2} + \ln K$$

e, portanto, existe uma constante $c > 0$ tal que $T(\gamma) \leq c$ para todo $\gamma > 0$. Isto implica em

$$R(\gamma) = 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}} > 2e^{-\frac{c}{2}}, \quad \text{para todo} \quad \gamma > 0. \tag{2.33}$$

Usando novamente a equação (2.32) concluimos que (Q_2) não possui solução radial sobre um disco $B_R(0)$, com $R < 2e^{-\frac{c}{2}}$.

Notemos agora que $R(\gamma)$ depende assintoticamente do crescimento da constante K; donde escrevemos $R(\gamma, K)$. Estabeleceremos agora uma relação entre $R(\gamma, K)$ e $R(\gamma, \frac{K}{d})$, para $d > 0$, dada por

$$R(\gamma, \frac{K}{d}) = \sqrt{d} R(\gamma, K). \tag{2.34}$$

De fato, usando a mudança de variável

$$w(s) = u(t), \quad s = t - \ln d$$

temos

$$-w''(s) = -u''(t) = h(u)e^{u^2-t} = h(w)e^{w^2-(s+\ln d)}$$

ou seja,

$$-w''(s) = \frac{h(w)}{d}e^{w^2-s}.$$

Denotando $S(\gamma)$ como o primeiro zero, partindo de ∞, de solução $w(\gamma, s)$ temos

$$S(\gamma) = T(\gamma) - \ln d, \quad \text{para todo} \quad \gamma > 0;$$

e além disso,

$$\frac{h(r)}{d} = \frac{K}{d}\frac{1}{r^a}, \quad \text{para todo} \quad r \geq r_1.$$

Portanto,

$$R(\gamma, \frac{K}{d}) = 2e^{-\frac{S(\gamma)}{2}} = 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}+\frac{\ln d}{2}} = \sqrt{d}R(\gamma, K).$$

Sendo assim, fazendo $K_0 = \frac{K}{d}$, onde $d > \frac{e^c}{4}$, e utilizando as equações (2.33) e (2.34), temos

$$R(\gamma, K_0) = \sqrt{d}R(\gamma, K) \geq \sqrt{d}2e^{-\frac{c}{2}} > 1.$$

Portanto, K_0 é tal que (Q_2) não tem solução radial para $0 < K < K_0$. Donde concluimos a demonstração do item 2.

Vamos agora nos dedicar a prova do item 3. Se $a > 1$, pelo item **(i)** do Teorema 5 temos $\lim_{\gamma\to\infty} T(\gamma) = -\infty$. Sendo assim, por (2.32) existe uma constante $c > 0$ tal que $T(\gamma) \leq c$ para todo $\gamma > 0$ e para cada $K > 0$ fixado. Escolha $K = 1$ e defina

$$c_m = \max_{\gamma>0} T(\gamma)$$

para cada solução $y(t, \gamma)$ de (2.7). Temos $T(\gamma) \leq c_m$ para todo $\gamma > 0$. Sendo assim,

$$R(\gamma) = 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}} \geq 2e^{-\frac{c_m}{2}}.$$

Logo pela igualdade (2.34) com $d_m = \frac{e^{c_m}}{4}$ temos

$$R(\gamma, \frac{1}{d_m}) = \sqrt{d_m}R(\gamma, 1) \geq \sqrt{d_m}2e^{-\frac{c_m}{2}} \geq 1, \quad \forall\gamma > 0.$$

Seja $K_2 = \frac{1}{d_m}$. Então, para $K < K_2$, temos $R(\gamma, K) > 1$ para todo $\gamma > 0$. Isto é, não existe solução radial no disco $B_1(0)$ para o problema (Q_2) se $K < K_2$. Para $K > K_2$ escolha γ_m tal que $T(\gamma_m) = c_m$. Temos

$$R(\gamma_m, \frac{1}{d_m}) = \sqrt{d_m}R(\gamma_m, 1) = 1.$$

Segue que $\sqrt{K^{-1}} < \sqrt{d_m}$ para $K > \frac{1}{d_m} = K_2$. Portanto,

$$R(\gamma_m, K) = \sqrt{K^{-1}}R(\gamma_m, 1) < \sqrt{d_m}R(\gamma_m, 1) = R(\gamma_m, \frac{1}{d_m}) = 1.$$

Como pelo item **(i)** do Teorema 5 e pela equação (2.34) temos respectivamente $\lim_{\gamma\to\infty} R(\gamma, K) = \infty$ e $\lim_{\gamma\to 0^+} R(\gamma, K) = \infty$, usando a continuidade de $R(\gamma)$ existem $\gamma_1 < \gamma_m$ e $\gamma_2 > \gamma_m$ tais que

$$R(\gamma_1, K) = R(\gamma_2, K) = 1.$$

Logo o problema (Q_2) tem ao menos duas soluções radiais positivas no disco $B_1(0)$ para $K > K_2$. ■

Exemplo: Como exemplo para o caso “critico” 2, podemos tomar

$$g(r) = r^2 + \ln K \frac{4r^2}{1+3r^2}, \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq 1,$$

e

$$g(r) = r^2 + \ln \frac{K}{r} \quad \text{para} \quad r \geq 1.$$

◇

Finalmente, o seguinte teorema contém um resultado de existência de *ground states* em $\mathbb{R}^2$, isto é, soluções da equação

$$\begin{aligned} -\Delta u = f(u), &\quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ u > 0 &\quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(x) \to 0, &\quad \text{se} \quad |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Suporemos as seguintes hipóteses:

(B_2^*) $|h(r)| \leq kr^{1+\sigma}$, para algum $k > 0$ e $\sigma > 0$, e para $0 \leq r \leq r_1$,

(B_3) $f(0) = 0$ e existe um número $\zeta > 0$ tal que

$$F(u) := \int_0^u f(s)ds < 0 \quad \text{para} \quad 0 < u < \zeta, \quad F(\zeta) = 0$$

e ainda $f(u) > 0$ para $u \geq \zeta$.

Note que a hipótese (B_2^*) é mais fraca do que (B_2) e ainda que (B_3) nada mais é do que a hipótese (H_2) do Capítulo 1. A razão para (H_2) aparecer novamente aqui é o fato de que faremos uso do Teorema 2 do Capítulo 1 para a demonstração do nosso próximo resultado.

Teorema 7 *Suponha $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 nas hipóteses (B_1), com $a < 1$, (B_2^*) e (B_3). Então a equação (2.35) tem uma solução.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 2, para que (2.35) tenha uma solução é suficiente que exista γ tal que $T(\gamma)$ é finito, isto é, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Por outro lado, como (B_2^*) é mais fraca que (B_2), podemos aplicar o item **(iii)** do Teorema 5 e garantir que $\lim_{\gamma\to\infty} T(\gamma) = \infty$. Portanto, podemos tomar γ suficientemente grande tal que $\gamma > \max\{y_0, \zeta\}$ e $T(\gamma) > 1$. Assim, o conjunto $\mathcal{S}$ é não vazio. ■

Capítulo 3

Unicidade de Soluções Positivas para Equações Elípticas com Crescimento Exponencial

Neste capítulo, provaremos unicidade de solução para o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u e^{u^\theta} && \text{em} \quad B, \\ u &> 0 && \text{em} \quad B, \\ u &= 0 && \text{sobre} \quad \partial B, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $B \subset \mathbb{R}^2$ representa o disco unitário centrado na origem, $\lambda > 0$ e $1 < \theta \leq 2$.

A técnica utilizada aqui segue o espírito daquela utilizada nos capítulos 1 e 2, ou seja, utilizaremos o *shooting method* combinado com a inversão de Atkinson e Peletier.

3.1 Crescimento e Unicidade de Soluções

Nos últimos anos, tem sido considerável o interesse no estudo da unicidade de soluções do problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{em} \quad B \\ u &> 0 && \text{em} \quad B \\ u &= 0 && \text{sobre} \quad \partial B, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $B \subset \mathbb{R}^N$ representa o disco unitário centrado na origem e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 com $f(0) = 0$. Quando $f(u) = u^p + \lambda u$ e $N \geq 3$, o problema da unicidade foi intensamente investigado, e neste caso, o crescimento máximo permitido para para tratar o problema variacionalmente é polinomial e isto está estritamente relacionado com os Teoremas de imersões de Sobolev, Teoremas 19 e 20 Apêndice A.

Para $\lambda = 0$ e $p > (N+2)/(N-2)$, a unicidade segue da identidade de Pohozaev, veja Teorema 21 Apêndice A. Além disso, para $N \leq 3 \leq 9$ e $p > (N+2)/(N-2)$, Budd e Norbury [11] mostraram que existe um valor $\lambda > 0$ para o qual o problema (3.2) admite uma infinidade de soluções.

Para $\lambda > 0$ e $1 < p < (N+2)/(N-2)$, a compacidade da imersão $H_0^1 \subset L^p$ implica que o problema (3.2) admite uma solução para $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor do problema de Dirichlet $-\Delta u = 0$, $u_{|\partial B} = 0$ em $H_0^1(B)$. No entanto, para $p = (N+2)/(N-2)$ a existência é mais delicada, devido a não compacidade da imersão de Sobolev. Este último caso, como citamos no Capítulo 2, foi estudado por Brezis e Nirenberg em [10].

Para $N = 2$, como já observamos no Capítulo 2, a noção de crescimento crítico é motivada pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.2). Portanto, o crescimento máximo permitido para estudar o problema (3.2) dentro de um enfoque variacional é do tipo exponencial. Em vista dos resultados precedentes, é de se esperar que a unicidade permaneça válida se a não linearidade f tem crescimento crítico exponencial, e, em particular, para nosso caso especial $f(s) = \lambda s e^{s^\theta}$, com $0 < \theta \leq 2$ e $\lambda > 0$.

Recentemente, Adimurthi [1] provou a unicidade quando $\theta = 1$, isto é, para a não linearidade $f(s) = \lambda s e^s$, usando a técnica de inversão de Atkinson e Peletier. Mais recentemente, Tang melhorou este resultado em [24], alí ele resolveu o problema da existência e unicidade de soluções de (3.2) para uma ampla classe de não linearidades, incluindo polinomial, racional, exponencial, logarítmica e funções trigonométricas, incluindo a função considerada por Admurthi como caso particular. No entanto, o crescimento máximo da não linearidade considerada por Tang não melhora aquele de Admurthi, este é ainda do tipo $f(s) = \lambda s g(s) e^s$, com $g(s)$ satisfazendo algumas condições.

Neste capítulo, com base em um trabalho de Tarsi [25], objetivamos resolver completamente o problema da unicidade de soluções de (3.2) atingindo crescimentos crítico e subcrítico, isto é, para não linearidades do tipo $f(s) = \lambda s e^{s^\theta}$, com $1 < \theta \leq 2$ e $\lambda > 0$. Vale ressaltar que os casos em que $0 < \theta \leq 1$ foram resolvidos por Adimurthi e Tang.

3.2 A Inversão de Atkinson- Peletier e o Shooting Method

Pelo Teorema 12, Apêndice A qualquer solução de (3.2) é necessariamente radial. Portanto, sem perda de generalidade; como no Capítulo 2, podemos nos restringir a soluções radiais em um disco $B_1(0)$ reduzindo o problema (3.2), no caso $N = 2$, a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + f(u) = 0, \quad \text{com} \quad 0 < r < 1 \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned}$$

a qual, claramente, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -(ru_r)' = rf(u), \quad \text{se} \quad 0 < r < 1, \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

A técnica de inversão de Atkinson e Peletier consiste em encontrar uma mudança de variável

$$t = t(r), \quad y(t) = u(r)$$

que simplifique o problema acima. Notando que para qualquer mudança de variável "admissível" vale a igualdade

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} = y''(t)t'(r)^2 + y'(t)\left[\frac{d}{dr}(t'(r)) + \frac{t'(r)}{r}\right]. \tag{3.4}$$

Podemos eliminar o termo envolvendo a primeira derivada, y', na equação acima desde que

$$\frac{d}{dr}(t'(r)) + \frac{t'(r)}{r} = 0.$$

Fazendo $w = t'(r)$ na equação acima, temos a equação

$$\frac{d}{dr}w + \frac{w}{r} = 0.$$

A qual pode ser resolvida facilmente por técnicas elementares de cálculo, variáveis separáveis, por exemplo. Resolvendo a equação acima concluimos que

$$t'(r) = \frac{t'(1)}{r}$$

e, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, a equação acima fornece

$$t(r) = t(1) + t'(1)\ln r.$$

Escolhendo $t(1) = 2\ln 2$ e $t'(1) = -2$ na equação acima obtemos $t(r) = -2\ln\frac{r}{2}$. Portanto, uma mudança de variável capaz de eliminar y' em (3.4) é dada por

$$t(r) = -2\ln\frac{r}{2}, \quad y(t) = u(r).$$

Observamos que a transformação acima ja foi utilizada nos Capítulos 1 e 2 sem maiores comentários e, como foi visto, esta permite transformar a equação (3.3) em uma outra definida sobre a semi-reta $(2\ln 2, \infty)$; a saber,

$$\begin{gathered} -y''(t) = f(y)e^{-t}, \quad \text{se} \quad t > 2\ln 2 \\ y(2\ln 2) = 0, \quad y'(\infty) = 0. \end{gathered}$$

A equação acima foi amplamente estudada no Capítulo 1 onde provamos, sob certas condições, a existência de soluções positivas em todo $\mathbb{R}^2$, ou seja, a existência de *ground states*. No entanto, apesar de o enfoque ser igual, o problema da unicidade de soluções para (3.2), com $n = 2$, é obviamente diferente do da existência. A prova da unicidade apresentada neste capítulo é essencialmente baseada na redução ao absurdo. Assumiremos, por contradição, que temos duas soluções não triviais u e u_2, e usando o *shooting method*, provaremos que existem duas soluções não triviais u_1 e u_2 que se intersectam exatamente em um ponto no interior da bola $B_1(0)$, e combinando este fato com algumas propriedades da função $\frac{u_1'}{u_2'}$, respectivamente $\frac{y_2'}{y_1'}$, chegaremos a um absurdo.

Seja $f(s) = \lambda s e^{s^\theta}$. Como, pelo Teorema 12 Apêndice A, toda solução positiva de (3.1) é necessariamente radial, esta deve satisfazer a equação (3.3). Neste caso, temos a equação

$$\begin{aligned} -(ru_r)' = \lambda u e^{u^\theta}, \quad \text{se} \quad 0 < r < 1, \\ u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Observemos que, como a não linearidade $f(s)$ é positiva para $s > 0$, qualquer solução não trivial da equação acima é uma função decrescente, pois integrando diretamente em (3.5) temos

$$u'(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r s f(s) ds$$

o que implica em $u'(r) < 0$ para $0 < r < 1$. Em particular, $u(r)$ atinge seu máximo em $r = 0$. Note que a monoticidade de $u(r)$ pode ser vista ainda por meio do Teorema 12, Apêndice A.

O próximo resultado garante que duas soluções u_1 e u_2 do problema (3.1) necessariamente se intersectam.

Proposição 6 *Sejam u_1 e u_2 soluções do problema* (3.2)*, com $n = 2$ e $f(t)/t$ crescente para todo $t > 0$. Então u_1 e u_2 intersectam-se ao menos uma vez em* $(0, 1)$.

Demonstração: Considere $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função "suave", classe $C^1(\mathbb{R})$, tal que $1 \leq \phi(t) \leq 2$, com $\phi(t) = 1$ para $t \leq 0$, $\phi(t) = 2$ para $t \geq 1$ e $\phi(t)$ uma função crescente para $0 < t < 1$. Defina, para cada $\epsilon > 0$, a função $\phi_\epsilon(t) = \phi(\frac{t}{\epsilon})$.

Agora, multiplicando a equação em (3.2) por $\phi_\epsilon(u_1 - u_2)u_1$ e usando que u_2 é solução obtemos

$$-u_1 \Delta u_2 \phi_\epsilon(u_1 - u_2) = u_1 f(u_2)\phi_\epsilon(u_1 - u_2)$$

Analogamente, usando que u_1 é solução temos

$$-u_2 \Delta u_1 \phi_\epsilon(u_1 - u_2) = u_2 f(u_1)\phi_\epsilon(u_1 - u_2).$$

Estas duas últimas equações fornecem a identidade

$$\int_\Omega (-u_1\Delta u_2 + u_2 \Delta u_1)\phi_\epsilon(u_1 - u_2) = \int_\Omega u_1 u_2 \left(\frac{f(u_2)}{u_2} - \frac{f(u_1)}{u_1}\right)\phi_\epsilon(u_1 - u_2). \tag{3.6}$$

Podemos usar as identidades de Green, Teorema 11, página 76 Apêndice A para melhor estimar a integral no lado esquerdo da identidade acima. De fato, usando que $u_1 = 0$ sobre ∂B temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega -u_1\phi_\epsilon(u_1 - u_2)\Delta u_2 &= \int_\Omega \nabla\left(u_1\phi_\epsilon(u_1 - u_2)\right)\nabla u_2 \\ &= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 \phi_\epsilon(u_1 - u_2) + u_1 \nabla u_2 \phi'_\epsilon(u_1 - u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2). \end{aligned}$$

Analogamente, $u_2 = 0$ sobre ∂B fornece

$$\int_\Omega u_2\phi_\epsilon(u_1 - u_2)\Delta u_1 = -\int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 \phi_\epsilon(u_1 - u_2) + u_2 \nabla u_1 \phi'_\epsilon(u_1 - u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2).$$

Combinando estas duas últimas identidades concluimos que a integral no lado esquerdo de (3.6) equivale à expressão

$$\int_\Omega u_1 \nabla u_2 (\nabla u_1 - \nabla u_2) \phi'_\epsilon (u_1 - u_2) - \int_\Omega u_2 \nabla u_1 (\nabla u_1 - \nabla u_2) \phi'_\epsilon (u_1 - u_2).$$

Verifica-se diretamente que a expressão acima pode ser escrita como

$$-\int_\Omega u_1 |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \phi'_\epsilon (u_1 - u_2) + \int_\Omega \nabla u_1 (u_1 - u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \phi'_\epsilon (u_1 - u_2). \quad (3.7)$$

Definindo a função $\gamma_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s \phi'_\epsilon(s) ds$$

obtemos, pela regra da cadeia,

$$\nabla \gamma_\epsilon (u_1 - u_2) = (u_1 - u_2) \phi'_\epsilon (u_1 - u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2).$$

Portanto, notando que $\phi'_\epsilon(t) \geq 0$ e desprezando a primeira integral em (3.7), vemos que o termo

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \gamma_\epsilon (u_1 - u_2) \quad (3.8)$$

é um majorante para a expressão em (3.7).

Agora, usando a definição de $\phi_\epsilon(t)$, temos $\phi'_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\phi'(\frac{t}{\epsilon}) = 0$ se $t \notin (0, \epsilon)$. Uma vez que ϕ' é contínua temos $\phi'(\frac{t}{\epsilon})$ limitada para t no compacto $[0, \epsilon]$, e consequentemente, existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\phi'(\frac{t}{\epsilon}) \leq 2C$ para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto

$$0 \leq \gamma_\epsilon(t) \leq \frac{2C}{\epsilon} \int_0^t s ds \leq C\epsilon \quad \text{para todo} \quad t \in (0, \epsilon).$$

Em particular, notando que $\gamma_\epsilon(t) = 0$ se $t \notin (0, \epsilon)$, temos uma constante $C \geq 0$ tal que

$$0 \leq \gamma_\epsilon(u_1 - u_2) \leq C\epsilon.$$

Usando este último fato em conjunto com as identidades de Green, Teorema 11, página 76 Apêncide A podemos concluir que o termo em (3.8) tende a zero quando $\epsilon \to 0$, pois

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \gamma_\epsilon (u_1 - u_2) = \int_\Omega -\Delta u_1 \gamma_\epsilon (u_1 - u_2) \leq C \left| \int_\Omega -\Delta u_1 \right| \epsilon. \quad (3.9)$$

Note ainda que $-\Delta u_1 = f(u_1)$ e estamos considerando $f(u) \geq 0$, logo zero é uma conta inferior para a integral acima.

Portanto, usando a identidade (3.6), o termo majorante em (3.8) e a desigualdade em (3.9) concluimos que

$$\int_\Omega u_1 u_2 \left(\frac{f(u_2)}{u_2} - \frac{f(u_1)}{u_1} \right) \phi_\epsilon (u_1 - u_2) \leq C_\Omega \left| \int_\Omega -\Delta u_1 \right| \epsilon.$$

Usando que $f(t)/t$ é crescente para $t > 0$, $1 \leq \phi_\epsilon(t) \leq 2$ e fazendo $\epsilon \to 0$ na desigualdade acima obtemos

$$2\int_{\Omega\cap[u_1>u_2]} u_1u_2\left(\frac{f(u_2)}{u_2}-\frac{f(u_1)}{u_1}\right)+\int_{\Omega\cap[u_1<u_2]} u_1u_2\left(\frac{f(u_2)}{u_2}-\frac{f(u_1)}{u_1}\right)\leq 0.$$

Visto que $f(t)/t$ é uma função crescente para $t > 0$, a primeira parcela da soma acima no lado esquerdo é negativa e a segunda parcela é positiva. Uma vez que a soma de ambas não é positiva a segunda possibilidade não pode ocorrer sempre, isto é, $u_1 < u_2$ não ocorre sempre. A seguir provaremos que $u_2 < u_1$ também não ocorre sempre e, portanto, forçosamente u_1 e u_2 intersectam-se.

Podemos repetir o argumento anterior, multiplicando a equação em (3.2) por $\phi_\epsilon(u_2 - u_1)u_2$ em vez de $\phi_\epsilon(u_1 - u_2)u_1$ e concluir, analogamente que

$$\int_\Omega(-u_2\Delta u_1+u_1\Delta u_2)\phi_\epsilon(u_2-u_1)=\int_\Omega u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right)\phi_\epsilon(u_2-u_1)$$

e seguindo o argumento anterior obter

$$\int_\Omega(-u_2\Delta u_1+u_1\Delta u_2)\phi_\epsilon(u_2-u_1)\leq C_\Omega\left|\int_\Omega-\Delta u_2\right|\epsilon$$

e, finalmente concluir também que

$$\int_{\Omega\cap[u_1>u_2]} u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right)+2\int_{\Omega\cap[u_1<u_2]} u_1u_2\left(\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right)\leq 0.$$

Analogamente, esta última desigualdade aliada a monoticidade de $f(t)/t$ implica que $u_2 < u_1$ também não ocorre sempre. Isto encerra a demonstração. ■

O resultado anterior poderia ser provado de uma forma alternativa bem mais simples. No entanto, optamos pela prova apresentada porque esta traz a idéia utilizada na prova do principal resultado de unicidade em estudo.

De fato, suponha u_1 e u_2 soluções do problema (3.2), com $u_1 \leq u_2$. Como ambas são necessariamente radiais, dever satisfazer a equação radial (3.3), isto é,

$$-(ru_1')'=rf(u_1)\ \text{ e }\ -(ru_2')'=rf(u_2).$$

Logo,

$$-(ru_1')'u_2+(ru_2')'u_1=r\left[u_2f(u_1)-u_1f(u_2)\right]$$

e, integrando sobre $(0, 1)$ obtemos a identidade

$$\int_0^1-(ru_1')'u_2+(ru_2')'u_1dr=\int_0^1 r\left[u_2f(u_1)-u_1f(u_2)\right]dr. \tag{3.10}$$

Agora, usando integração por partes e lembrando que $u_1(1) = u_2(1) = 0$, obtemos

$$\int_0^1-(ru_1')'u_2+(ru_2')'u_1dr=r\left[u_2'(r)u_1(r)-u_1'(r)u_2(r)\right]_0^1=0.$$

Sendo assim, segue de (3.10) que

$$\int_0^1 ru_1u_2\left[\frac{f(u_1)}{u_1}-\frac{f(u_2)}{u_2}\right]dr=0.$$

Mas, se u_1 não intersecta u_2, isto é, $u_1 < u_2$ em $B_1(0)$ temos $\left[\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}\right] < 0$ o que contraria a igualdade acima. Logo, existe ao menos um ponto onde u_1 e u_2 coincidem.

A seguir utilizaremos o *shooting method* para provar que dadas duas soluções do problema (3.1), u e u_2, com $u(0) < u_2(0)$ é possível encontrar uma terceira solução u_1 a qual intersecta u_2 em exatamente um ponto no intervalo $(0, 1)$.

Teorema 8 *Sejam u e u_2 soluções não triviais do problema* (3.1)*, com $u(0) < u_2(0)$. Então existe uma solução u_1 de* (3.1)*, com $u_1(0) < u_2(0)$ tal que u_1 intersecta u_2 em exatamente um ponto no intervalo* $(0, 1)$.

Demonstração: Um vez que $f(s) = \lambda s e^{s^\theta}$, com $\lambda > 0$ e $1 < \theta \leq 2$ é tal que $f(s)/s$ é crescente para todo $s > 0$, podemos aplicar a Proposição 6 e garantir que u e u_2 se intesectam ao menos em um ponto em $(0, 1)$. Seguiremos supondo que u e u_2 intersectam-se em pelo menos dois pontos, pois caso contrário, não há o que provar. Sejam $0 < R_1 < R_2 < 1$ os dois primeiros pontos consecutivos de intesecção com $u(r) < u_2(r)$ para todo $r \in (0, R_1)$. Veja Figura 3.2 abaixo.

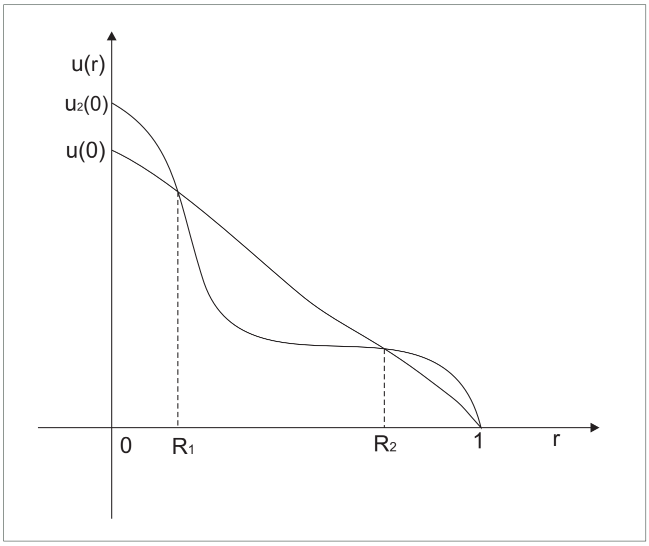

Figura 3.1: $u(r)$ e $u_2(r)$ intersectando-se.

Sejam $\gamma > 0$ e $w(r, \gamma)$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} -(rw')' &= \lambda r w e^{w^\theta}, \\ w(0) &= \gamma, \quad w'(0) = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

e seja $T(\gamma)$ o primeiro zero da solução $w(r, \gamma)$ definido por

$$T(\gamma) = \sup\{r; \quad w(s, \gamma) > 0 \ \text{ para todo } \ s \in [0, r]\}.$$

Então, pela unicidade do problema de valor inicial (3.11), temos claramente $w(r, \gamma_2) = u_2(r)$ e $w(r, \gamma_0) = u(r)$ para $\gamma_0 = u(0)$ e $\gamma_2 = u_2(0)$.

Por continuidade das soluções $w(r, \gamma)$ e $u_2(r)$ em relação aos dados iniciais podemos tomar um valor γ,com $\gamma < \gamma_0$, suficientemente próximo, tal que existam

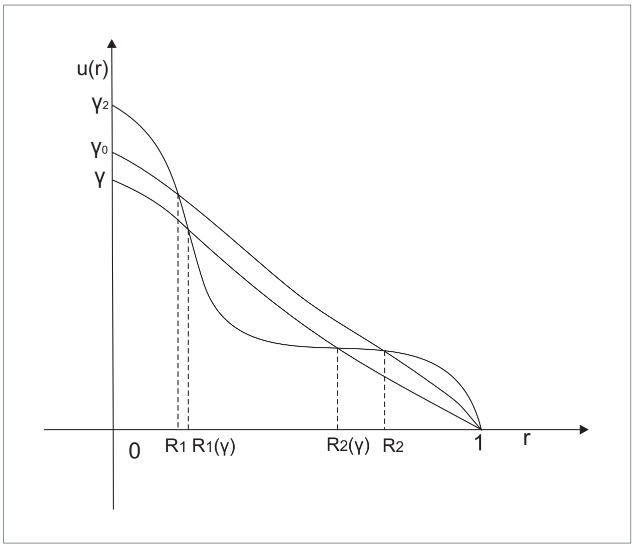

Figura 3.2: Solução $\omega(r,\gamma)$ para $\gamma \to \gamma_0$.

$0 < R_1(\gamma) < R_2(\gamma) < 1$, os dois primeiro pontos consecutivos de intersecção de $w(r,\gamma)$ com $u_2(r)$, com $w(r,\gamma) \leq u_2(r)$ para $r \in (0, R_1(\gamma))$. Veja Figura 3.2 abaixo.

A idéia central é encontrar um valor $\gamma_1 \in (0,\gamma_0)$ tal que $R_2(\gamma_1) = 1$. Neste caso, faremos $u_1(r) = w(r,\gamma_1)$ e o teorema estará provado.

Quando γ se move de γ_0 em direção a 0 ocorre uma, e somente uma, das três seguintes possibilidades:

(i). Existe um valor $\gamma_1 \in (0,\gamma_0)$ tal que $R_2(\gamma_1) = 1$. Neste caso o teorema está provado.

(ii). Existe um valor $\gamma_1 \in (0,\gamma_0)$ e um ponto $R \in (0,1)$ tal que

$$w(R,\gamma_1) = u_2(R), \quad w'(R,\gamma_1) = u_2'(R).$$

Esta possibilidade não ocorre devido a unicidade de solução do problema de valor inicial (3.11), pois teríamos $w(r,\gamma_1) = u_2(r)$ para $r \in (0,1)$ o que contradiz $\gamma_1 < \gamma_0 < \gamma_2$.

(iii). $0 < R_1(\gamma) < R_2(\gamma) < 1$ para todo $\gamma \in (0,\gamma_0)$ e

$$\lim_{\gamma \to 0} [R_2(\gamma) - R_1(\gamma)] = 0.$$

Note que se existem $\gamma^{(1)}$ e $\gamma^{(2)}$ tais que $R_2(\gamma^{(1)}) < 1 < R_2(\gamma^{(2)})$ temos, por continuidade, γ_1 tal que $R_2(\gamma_1) = 1$.

Se ocorre **(iii)**, sejam $I(\gamma) = [R_1(\gamma), R_2(\gamma)]$ e $v(r) = w(r,\gamma) - u_2(r)$ a função "altura". Então, fazendo

$$Q(r) = r\frac{f(w(r,\gamma)) - f(u_2(r))}{w(r,\gamma) - u_2(r)},$$

temos

$$-(rv'(r))' = -\big(rw'(r,\gamma) - ru_2'(r)\big)' = r\big(f(w(r,\gamma)) - f(u_2(r))\big) = Q(r)v(r)$$

e $v(r) > 0$ é tal que

$$\begin{array}{r} -(rv'(r))' = Q(r)v(r), \quad \text{em} \quad I(\gamma), \\ v(R_2(\gamma)) = 0, \quad v(R_1(\gamma)) = 0. \end{array} \tag{3.12}$$

Portanto, v é a primeira autofunção com autovalor $\mu_1 = 1$ do seguinte problema de autovalor

$$\begin{array}{rll} -(r\varphi'(r))' = \mu Q(r)\varphi(r) & \text{em} & I(\gamma), \\ \varphi = 0 & \text{sobre} & \partial I(\gamma). \end{array} \tag{3.13}$$

Para $\gamma \in (0,\gamma_0)$, $0 < R_1 \leq R_1(\gamma)$ temos

$$M = \sup\{Q(r); \quad r \in I(\gamma), \quad \gamma \in (0,\gamma_0)\} < \infty, \tag{3.14}$$

pois Q é uma função contínua em $I(\gamma)$ para todo $\gamma > 0$.

Seja $\lambda_1(\gamma)$ o primeiro autovalor do seguinte problema

$$\begin{array}{rll} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{em} & I(\gamma), \\ \varphi = 0 & \text{sobre} & \partial I(\gamma). \end{array} \tag{3.15}$$

Portanto, usando (3.12), (3.14) e (3.15) obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \inf\left\{\frac{\int_{I(\gamma)} r(\varphi')^2}{\int_{I(\gamma)} Q\varphi^2}; \quad \varphi \in H_0^1(I(\gamma))\right\} \\ &\geq \frac{R_1}{M}\left\{\frac{\int_{I(\gamma)} (\varphi')^2}{\int_{I(\gamma)} \varphi^2}; \quad \varphi \in H_0^1(I(\gamma))\right\} \\ &\geq \frac{R_1}{M}\lambda_1(\gamma). \end{aligned}$$

Visto que $[R_2(\gamma) - R_1(\gamma)] \to 0$ quando $\gamma \to 0$, temos $\lambda_1(\gamma) \to \infty$, o que contradiz $\lambda_1(\gamma) \leq M/R_1$. Esta contradição exclui a possibilidade **(iii)**, donde ocorre obrigatoriamente **(i)**. Isto conclui a demonstração. ■

3.3 Relações de Crescimento

Esta seção é dedicada a obtenção de relações úteis envendo duas soluções radiais u_1 e u_2 do problema (3.1) caso estas existam.

Pelos resultados provados na seção anterior, Proposição 6 e Teorema 8 se existem duas soluções radiais u e u_2, com $u(0) < u_2(0)$, do problema (3.1) necessariamente se intersectam, e mais, é possível tomar duas soluções u_1 e u_2, com $u_1(0) < u_2(0)$, de forma que estas últimas intersectam-se em um único ponto no intervalo $(0,1)$. Seja $R \in (0,1)$ o único ponto de intersecção de u_1 e u_2, isto é, $u_1(R) = u_2(R) = \alpha$.

Fazendo $T_0 = 2\ln 2$ e $T_1 = -2\ln\dfrac{R}{2}$ e usando a inversão de Atkinson e Peletier para u_1 e u_2, isto é,

$$t = -2\ln\frac{r}{2}, \quad y_i(t) = u_i(r) \ \text{ para } \ i = 1,2$$

temos, como visto nos Capítulos 1 e 2, que as funções y_i para $i = 1,2$ satisfazem

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y e^{\theta - t} && \text{em} \quad (T_0,\infty), \\ y &> 0 && \text{em} \quad (T_0,\infty), \\ y'(+\infty) &= 0, \ y(T_0) = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Onde estamos denotando $y'(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} y'(t)$.

Notemos que $y_i'(t) = -u_i'(r)e^{-t/2} > 0$, para $i = 1,2$ é positivo sobre $t \in (T_0,+\infty)$, pois com vimos na seção anterior, $u'(r) < 0$ para $0 < r < 1$; em particular, as funções y_i são crescentes. Além disso, segue diretamente do fato de que $u_2(r) > u_1(r)$ para $0 < r < R$ e da inversão de Atkinson e Peletier que $y_2(t) > y_1(t)$ para $t > T_1$, enquanto $y_1(t) > y_2(t)$ para $t \in (T_0,T_1)$. Com essa formulação provaremos uma importante relação de crescimento envolvendo a função $\dfrac{y_2'}{y_1'}$; a saber

Teorema 9 *Sejam u_1, u_2 soluções radiais do problema* (3.1)*, com $u_1(0) < u_2(0)$. Suponha que u_1 e u_2 intersectam-se em um único ponto em $(0,1)$ e denote este ponto por R. Sejam $y_i = u_i(2e^{-\frac{t}{2}})$ para $i = 1,2$. Então $\dfrac{y_2'}{y_1'}$ é uma função crescente em (T_1,∞), onde $T_1 = -2\ln\frac{R}{2}$.*

Demonstração: Provaremos inicialmente duas afirmações.

Afirmação 1. *Não existe um valor $T_2 \in (T_1,\infty)$, ponto crítico de $\dfrac{y_2'}{y_1'}$ talque $\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)''(T_2) \geq 0$.*

De fato, se $T_2 \in (T_1,\infty)$ é um ponto crítico de $\dfrac{y_2'}{y_1'}$, então

$$\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)' = \frac{y_2'}{y_1'}\left[\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_1''}{y_1'}\right]$$

e lembrando que $y_i'' = -f(y_i)e^{-t}$ para $i = 1,2$, tem-se da equação acima

$$\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)' = e^{-t}\frac{y_2'}{y_1'}\left[\frac{f(y_1)}{y_1'} - \frac{f(y_2)}{y_2'}\right].$$

Portanto, em $t = T_2$, temos a igualdade

$$\left.\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)'\right|_{T_2} = e^{-T_2}\frac{y_2'}{y_1'}\left.\left[\frac{f(y_1)}{y_1'} - \frac{f(y_2)}{y_2'}\right]\right|_{T_2} = 0 \tag{3.17}$$

Por outro lado, um cálculo direto com o auxílio das equações anteriores permite concluir que

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)'' &= e^{-t}\frac{y_2'}{y_1'}\left[f'(y_1) - f'(y_2)\right] - \left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)' + e^{-t}\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)'\left[\frac{f(y_1)}{y_1'} - \frac{f(y_2)}{y_2'}\right] \\ &+ e^{-t}\frac{f(y_1)}{y_1'}\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)' + e^{-t}\frac{f(y_2)}{y_2'}\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)'. \end{aligned}$$

Lembramos que $f(t) = \lambda t e^{t^\theta}$, $\lambda > 0$ e $1 \leq \theta \leq 2$ é tal que $f'(t)$ é crescente para $t > 0$ e $y_2 > y_1$ em (T_1, ∞). Assim, avaliando a expressão acima em $t = T_2$ e usando (3.17) obtemos a desiguladade

$$\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)''\Bigg|_{T_2} = e^{-T_2}\left[\frac{y_2'}{y_1'}(f'(y_1) - f'(y_2))\right]\Bigg|_{T_2} < 0.$$

Logo, se $T_2 \in (T_1, \infty)$ é um ponto crítico de $\dfrac{y_2'}{y_1'}$ temos $\left(\dfrac{y_2'}{y_1'}\right)''(T_2) < 0$ o que prova a Afirmação 1.

Afirmação 2. *Existe um ponto $T_3 > T_1$ tal que $\dfrac{y_2'}{y_1'}$ é crescente sobre (T_3, ∞).*

Como $y_1(t), y_2(t), f(t)$ e $f'(t)$ são funções crescentes para $t > 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $T(\epsilon)$ tal que para $t > T(\epsilon)$, $i = 1, 2$ temos

$$(1-\epsilon) f(y_i(\infty)) \leq f(y_i(t)) \leq f(y_i(\infty)) \tag{3.18}$$

$$(1-\epsilon) f'(y_i(\infty)) \leq f'(y_i(t)) \leq f'(y_i(\infty)) \tag{3.19}$$

onde estamos denotando $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y(\infty)$.

Seja $t \geq T(\epsilon)$. Visto que $y_i''(t) = -f(y_i(t))e^{-t}$ para $i = 1, 2$, temos claramente

$$y_i'(t) = \int_t^\infty f(y_i(s))e^{-s}ds.$$

Usando (3.18) obtemos

$$(1-\epsilon) f(y_i(\infty))e^{-t} \leq f(y_i(t))e^{-t} \leq f(y_i(\infty))e^{-t}$$

e, integrando sobre (t, ∞) temos

$$(1-\epsilon) f(y_i(\infty))e^{-t} \leq y_i'(t) \leq f(y_i(\infty))e^{-t}. \tag{3.20}$$

Usando (3.19) temos analogamente

$$(1-\epsilon) f'(y_i(\infty))e^{-t} \leq f'(y_i(t))e^{-t} \leq f'(y_i(\infty))e^{-t}.$$

Tomando o cuidado de tomar $\epsilon < 1$ e multiplicando ordenadamente cada termo nas desigualdades acima com aqueles dados em (3.20) temos, para $i = 1, 2$,

$$(1-\epsilon)^2 f(y_i(\infty)) f'(y_i(\infty))e^{-2t} \leq f'(y_i(t))y_i'(t)e^{-t} \leq f(y_i(\infty)) f'(y_i(\infty))e^{-2t}.$$

Integrando sobre (t, ∞) obtemos

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)^2 f(y_i(\infty)) f'(y_i(\infty))e^{-2t} \leq \int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'(s)e^{-s}ds \leq f(y_i(\infty)) f'(y_i(\infty))e^{-2t}.$$

Multiplicando por e^{2t} podemos escrever

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)^2 f(y_i(\infty)) f'(y_i(\infty)) \leq e^{2t}\int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'(s)e^{-s}ds \leq f(y_i(\infty)) f'(y_i(\infty))$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)^2 f(y_i(\infty))f'(y_i(\infty)) \leq \lim_{t\to\infty} e^{2t}\int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'(s)e^{-s}ds \leq f(y_i(\infty))f'(y_i(\infty)).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$\lim_{t\to\infty} e^{2t}\int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'(s)e^{-s}ds = f(y_i(\infty))f'(y_i(\infty)).$$

Usando este último fato e integração por partes podemos concluir ainda, para t suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
e^t\int_t^\infty f(y_i(s))e^{-s}ds &= e^t\left[-e^{-s}f(y_i(s))\Big|_t^\infty\right] + e^t\int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'(s)e^{-s}ds \\
&= f(y_i(t)) + e^t\int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'(s)e^{-s}ds \\
&= f(y_i(t)) + e^{-t}\left[e^{2t}\int_t^\infty f'(y_i(s))y_i'e^{-s}ds\right] \\
&= f(y_i(t)) + \frac{1}{2}f(y_i(\infty))f'(y_i(\infty))e^{-t} + o(e^{-t}),
\end{aligned}$$

onde $o(e^{-t})$ representa uma função $g(t)$ tal que existe uma constante $C > 0$, arbitrariamente pequena, com $|g(t)| \leq Ce^{-t}$ quando $t \to \infty$. Portanto, segue da igualdades anteriores que, para t grande,

$$\frac{f(y_i(t))}{e^t\int_t^\infty f(y_i(s))e^{-s}ds} = \left[1 + \frac{1}{2}\frac{f(y_i(\infty))}{f(y_i)(t)}f'(y_i(\infty))e^{-t} + o(e^{-t})\right]^{-1}.$$

Por meio da identidade elementar $[1+a]^{-1} = [1-a]+a^2[1+a]^{-1}$ podemos transformar a identidade acima em

$$\frac{f(y_i(t))}{e^t\int_t^\infty f(y_i(s))e^{-s}ds} = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{f(y_i(\infty))}{f(y_i)(t)}f'(y_i(\infty))e^{-t} + o(e^{-t})\right]. \tag{3.21}$$

Finalmente, usando as equações $y_i'' = -e^{-t}f(y_i)$ e $y_i' = \int_t^\infty f(y_i(s))e^{-s}ds$, para $i = 1, 2$ em conjunto com (3.21) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^t\left(\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_1''}{y_1'}\right) &= \lim_{t\to\infty} e^t\left(\frac{f(y_1)}{e^t y_1'} - \frac{f(y_2)}{e^t y_2'}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} e^t\left(\frac{f(y_1)}{e^t\int_t^\infty f(y_1(s))e^{-s}ds} - \frac{f(y_2)}{e^t\int_t^\infty f(y_2(s))e^{-s}ds}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[f'(y_2(\infty)) - f'(y_1(\infty))\right] > 0.
\end{aligned}$$

Note que $f'(y_2(\infty)) - f'(y_1(\infty)) > 0$, pois f' é crescente e $y_2(\infty) = u_2(0) > u_1(0) = y_1(\infty)$. Sendo assim, pela conservação do sinal, para t suficientemente grande, vale

$$\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)' = \frac{y_2'}{y_1'}\left[\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_1''}{y_1'}\right] > 0$$

e, portanto, existe $T_3 > T_1$ tal que y_2'/y_1' é crescente em (T_3, ∞).

Provadas estas duas últimas afirmações, estamos prontos para concluir a demonstração do Teorema 9. De fato, se y_2'/y_1' tem um ponto crítico $T_2 \in (T_1, \infty)$, pela Afirmação 1 T_2 é necessariamente um ponto de máximo. Por outro lado, a Afirmação 2 garante que y_2'/y_1', sendo monótona crescente, tem pontos de mínimo local em (T_3, ∞) e, portanto, contradiz a Afirmação 1. Logo, y_2'/y_1' não admite ponto crítico em (T_1, ∞), isto é, $\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)'(t) > 0$ para todo $t \in (T_1, \infty)$. Assim, temos y_2'/y_1' crescente em $t \in (T_1, \infty)$. ■

3.4 Unicidade

Esta seção é dedicada a prova de um resultado de unicidade de soluções para o problema (3.1).

De acordo com os resultados estabelecidos nas duas últimas seções, se (3.1) admite duas soluções, é possível "construir" a partir destas, duas novas soluções não triviais u_1 e u_2 que se intersectam em um único ponto em $(0, 1)$ tais que $u_1(0) < u_2(0)$ é o quociente u_1'/u_2' é uma função crescente em $(0, R)$, onde R representa o único ponto de interseção de u_1 e u_2. Na visão do problema (3.16), temos duas soluções não triviais y_1 e y_2 que se intersectam no ponto T_1 e o quociente y_1'/y_2' é uma função crescente sobre $(T_1, +\infty)$. Nosso objetivo nesta seção é usar estes fatos para chegar a uma contradição.

Usando as propriedades descritas acima e uma técnica similar aquela aplicada na prova da Proposição 6 provaremos o seguinte resultado de unicidade.

Teorema 10 *Sejam $\lambda > 0$, $B \subset \mathbb{R}^2$ a bola unitária centrada na origem e θ um número positivo tal que $1 \leq \theta \leq 2$. Então o problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u e^{u^\theta} && \text{em} \quad B, \\ u &> 0 && \text{em} \quad B, \\ u &= 0 && \text{sobre} \quad \partial B \end{aligned}$$

admite no máximo uma solução.

Demonstração: Observamos primeiro que para $f(t) = \lambda t e^{t^\theta}$ temos $f(t)/e^t$ crescente para $t > 0$. De fato, se $\theta = 1$, nada temos a fazer. Seguimos supondo que $1 < \theta \leq 2$, neste caso, note que

$$\left(\frac{f(t)}{e^t}\right)' = \lambda e^{t^\theta - t}\left[1 + \theta t^\theta - t\right],$$

portanto $f(t)/e^t$ é crescente para $t > 0$ se, e somente se, $\psi(t) = 1 + \theta t^\theta - t \geq 0$. Por outro lado,

$$\psi'(t) = \theta^2 t^{\theta-1} - 1 \quad \text{e} \quad \psi''(t) = (\theta - 1)\theta^2 t^{\theta-2} \geq 0.$$

Como $\psi'(t) = 0$ se, e somente se, $t = \theta^{-2/(\theta-1)}$, temos que $\psi(t)$ atinge seu mínimo em $t_m = \theta^{-2/(\theta-1)}$, logo

$$\left(\frac{f(t)}{e^t}\right)' \geq \lambda e^{t^\theta - t}\left[1 + \theta t_m^\theta - t_m\right] = \lambda e^{t^\theta - t}\left[1 + \theta^{-2/(\theta-1)}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\right].$$

Uma vez que $0 < \theta^{-2/(\theta-1)} < 1$ e $(1/\theta - 1) > -1$ temos que $\theta^{-2/(\theta-1)}(1/\theta - 1) > -1$ e, portanto, o termo no colchete acima é positivo o que implica na monoticidade da função $f(t)/e^t$.

Suponhamos, por contradição, que o problema (3.1) admite duas soluções. Neste caso é possível tomar duas soluções não triviais u_1 e u_2 que se intersectam em um único ponto em $R \in (0,1)$ tais que $u_1(0) < u_2(0)$. Seja $\Omega_0 = B_R(0)$ a bola de raio R centrada na origem. Então $u_1(r) < u_2(r)$ em Ω_0 e $u_1 = u_2 = \alpha$ sobre $\partial\Omega_0$. Vamos repetir o raciocíneo seguido na prova da Proposição 6. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função "suave", classe $C^1(\mathbb{R})$, tal que $0 \leq \phi(t) \leq 1$, com $\phi(t) = 0$ para $t \leq 0$, $\phi(t) = 1$ para $t \geq 1$ e $\phi(t)$ uma função crescente para $0 < t < 1$. Defina, para cada $\epsilon > 0$, a função $\phi_\epsilon(t) = \phi(\frac{t}{\epsilon})$.

Agora, multiplicando a equação em (3.2) por $\phi_\epsilon(u_2 - u_1)e^{u_1}$ e usando que u_2 é solução obtemos

$$-e^{u_1}\Delta u_2 \phi_\epsilon(u_2 - u_1) = e^{u_1} f(u_2)\phi_\epsilon(u_2 - u_1)$$

Analogamente, usando que u_1 é solução temos

$$-e^{u_2}\Delta u_1 \phi_\epsilon(u_2 - u_1) = e^{u_2} f(u_1)\phi_\epsilon(u_2 - u_1).$$

Estas duas últimas equações fornecem a identidade

$$\int_{\Omega_0} (-e^{u_1}\Delta u_2 + e^{u_2}\Delta u_1)\phi_\epsilon(u_2 - u_1) = \int_{\Omega_0} e^{u_1+u_2}\left(\frac{f(u_2)}{e^{u_2}} - \frac{f(u_1)}{e^{u_1}}\right)\phi_\epsilon(u_2 - u_1). \tag{3.22}$$

Podemos usar as identidades de Green, Teorema 11, página 76 Apêncide A para melhor estimar a integral no lado esquerdo da identidade acima. De fato, usando que $u_1 = u_2 = \alpha$ sobre $\partial\Omega_0$ e $\phi_\epsilon(0) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} -e^{u_1}\phi_\epsilon(u_2 - u_1)\Delta u_2 &= \int_{\Omega_0} \nabla\left(e^{u_1}\phi_\epsilon(u_2 - u_1)\right)\nabla u_2 - \int_{\partial\Omega_0} e^{\alpha}\phi_\epsilon(0)\nabla u_2 \cdot \nu ds \\
&= \int_{\Omega_0} \nabla u_1 \nabla u_2 e^{u_1}\phi_\epsilon(u_2 - u_1) \\
&+ \int_{\Omega_0} (e^{u_2}\nabla u_2)e^{u_1-u_2}(\nabla u_2 - \nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2 - u_1).
\end{aligned}$$

De forma inteiramente análoga concluimos ainda

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} e^{u_2}\phi_\epsilon(u_2 - u_1)\Delta u_1 &= -\int_{\Omega_0} \nabla\left(e^{u_2}\phi_\epsilon(u_2 - u_1)\right)\nabla u_1 + \int_{\partial\Omega_0} e^{\alpha}\phi_\epsilon(0)\nabla u_1 \cdot \nu ds \\
&= -\int_{\Omega_0} \nabla u_1 \nabla u_2 e^{u_2}\phi_\epsilon(u_2 - u_1) \\
&- \int_{\Omega_0} (e^{u_1}\nabla u_1)e^{u_2-u_1}(\nabla u_2 - \nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2 - u_1).
\end{aligned}$$

Combinando estas duas últimas identidades concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}(-e^{u_1}\Delta u_2+e^{u_2}\Delta u_1)\phi_\epsilon(u_2-u_1) &= \int_{\Omega_0}\nabla u_1\nabla u_2(e^{u_1}-e^{u_2})\phi_\epsilon(u_2-u_1)\\ &+ \int_{\Omega_0}(e^{u_2}\nabla u_2)e^{u_1-u_2}(\nabla u_2-\nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2-u_1)\\ &- \int_{\Omega_0}(e^{u_1}\nabla u_1)e^{u_2-u_1}(\nabla u_2-\nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2-u_1).\end{aligned}$$

Observando agora que $\nabla u_1\nabla u_2=u_1'(r)u_2'(r)\geq 0$ sobre Ω_0 e $e^{u_1}-e^{u_2}<0$, visto que $u_1(r)<u_2(r)$ em Ω_0; podemos desprezar a primeira parcela na soma do lado direito da identidade acima e concluir que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}(-e^{u_1}\Delta u_2+e^{u_2}\Delta u_1)\phi_\epsilon(u_2-u_1) &\leq \int_{\Omega_0}(e^{u_2}\nabla u_2)e^{u_1-u_2}(\nabla u_2-\nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2-u_1)\\ &- \int_{\Omega_0}(e^{u_1}\nabla u_1)e^{u_2-u_1}(\nabla u_2-\nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2-u_1).\end{aligned}$$

Agora definindo as funções $\chi_{1,\epsilon}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\chi_{2,\epsilon}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$\chi_{1,\epsilon}(t)=\int_0^t e^{-s}\phi'_\epsilon(s)ds,\quad \chi_{2,\epsilon}(t)=\int_0^t e^{s}\phi'_\epsilon(s)ds$$

obtemos, pela regra da cadeia,

$$\nabla\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1)=e^{u_1-u_2}(\nabla u_2-\nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2-u_1)$$

e, analogamente

$$\nabla\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1)=e^{u_2-u_1}(\nabla u_2-\nabla u_1)\phi'_\epsilon(u_2-u_1).$$

Dessa forma, notando que $\nabla e^{u_i}=e^{u_i}\nabla u_i$ para $i=1,2$; podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}(-e^{u_1}\Delta u_2+e^{u_2}\Delta u_1)\phi_\epsilon(u_2-u_1) &\leq \int_{\Omega_0}\nabla(e^{u_2})\nabla\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1)\\ &- \int_{\Omega_0}\nabla(e^{u_1})\nabla\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1)\end{aligned}\tag{3.23}$$

Podemos novamente usar as identidades de Green, Teorema 11, página 76 Apêncide A para melhorar a estimativa do lado direito acima. De fato, usando que $u_1=u_2=\alpha$ em $\partial\Omega_0$ e $\chi_{1,\epsilon}(0)=0$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0}\nabla(e^{u_2})\nabla\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1) &= -\int_{\Omega_0}\Delta(e^{u_2})\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1)+\int_{\partial\Omega_0}\chi_{1,\epsilon}(0)\nabla e^{u_2}\cdot\nu ds.\\ &= -\int_{\Omega_0}\Delta(e^{u_2})\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1)\end{aligned}$$

e, analogamente, usando que $\chi_{2,\epsilon}(0)=0$ temos

$$\int_{\Omega_0}\nabla(e^{u_1})\nabla\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1)=\int_{\Omega_0}\Delta(e^{u_1})\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1).$$

Sendo assim, podemos escrever a partir de (3.23) a seguinte estimativa

$$\int_{\Omega_0}(-e^{u_1}\Delta u_2+e^{u_2}\Delta u_1)\phi_\epsilon(u_2-u_1) \leq -\int_{\Omega_0}\Delta(e^{u_2})\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1)+\int_{\Omega_0}\Delta(e^{u_1})\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1). \tag{3.24}$$

Agora, notando que $\phi'_\epsilon(s) = \dfrac{1}{\epsilon}\phi'(\dfrac{s}{\epsilon})$ e fazendo a mudança $\tau = \dfrac{s}{\epsilon}$, podemos escrever

$$\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1) = \int_0^{u_2-u_1} e^{-s}\frac{1}{\epsilon}\phi'(\frac{s}{\epsilon})ds = \int_0^{(u_2-u_1)/\epsilon} e^{-\epsilon\tau}\phi'(\tau)d\tau.$$

Como $\phi'(t) = 0$ para $t \geq 1$ e $u_2 - u_1 > 0$ podemos escrever

$$\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{(u_2-u_1)/\epsilon} e^{-\epsilon\tau}\phi'(\tau)d\tau & \text{para} \quad u_2-u_1<\epsilon; \\ \displaystyle\int_0^1 e^{-\epsilon\tau}\phi'(\tau)d\tau & \text{para} \quad u_2-u_1\geq\epsilon. \end{cases}$$

Repetindo o argumento acima para $\chi_{2,\epsilon}$ temos

$$\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1) = \int_0^{u_2-u_1} e^{s}\frac{1}{\epsilon}\phi'(\frac{s}{\epsilon})ds = \int_0^{(u_2-u_1)/\epsilon} e^{\epsilon\tau}\phi'(\tau)d\tau$$

e ainda

$$\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{(u_2-u_1)/\epsilon} e^{\epsilon\tau}\phi'(\tau)d\tau & \text{para} \quad u_2-u_1<\epsilon; \\ \displaystyle\int_0^1 e^{\epsilon\tau}\phi'(\tau)d\tau & \text{para} \quad u_2-u_1\geq\epsilon. \end{cases}$$

Então, usando o Teorema 18 Apêndice A, temos quando $\epsilon \to 0$

$$\chi_{1,\epsilon}(u_2-u_1) \to 1 \;\; \text{q.t.p em} \quad \Omega_0$$

e também

$$\chi_{2,\epsilon}(u_2-u_1) \to 1 \;\; \text{q.t.p em} \quad \Omega_0$$

visto que $u_2 - u_1 >$ em Ω_0. Lembrando que $\lim_{\epsilon\to 0}\phi_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\phi(\frac{t}{\epsilon}) = \lim_{s\to\infty}\phi(s) = 1$ podemos passar o limite quando $\epsilon \to 0$ em (3.24) e concluir que

$$\int_{\Omega_0}(-e^{u_1}\Delta u_2+e^{u_2}\Delta u_1) \leq \int_{\Omega_0} -\Delta(e^{u_2})+\Delta(e^{u_1}). \tag{3.25}$$

Fazendo a tranformação para coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

e lembrando que u_i, para $i = 1,2$ são necessariamente radiais e, portanto, não depende do ângulo θ, podemos escrever lado direito a desigualdade em (3.25) como

$$2\pi\int_0^R\left[-e^{u_2}\left(u_2''+\frac{u_2'}{r}+(u_2')^2\right)+e^{u_1}\left(u_1''+\frac{u_1'}{r}+(u_1')^2\right)\right]rdr.$$

Usando mais uma vez uma transformação; a saber, a inversão de Atkinson e Peletier

$$t(r) = -2\ln\frac{r}{2}, \quad y(t) = u(r),$$

podemos reescrever a expressão acima e, depois disso, a desigualdade em (3.25) é dada por

$$\int_{\Omega_0} (-e^{u_1}\Delta u_2 + e^{u_2}\Delta u_1) \leq 4\pi \int_{T_1}^{\infty} \left[-e^{y_2}(y_2'' + (y_2')^2) + e^{y_1}(y_1'' + (y_1')^2)\right] dt.$$

Organizando os termos convenientemente vemos que esta última equivale a

$$\int_{\Omega_0} (-e^{u_1}\Delta u_2 + e^{u_2}\Delta u_1) \leq 4\pi \int_{T_1}^{\infty} \left[y_1' e^{y_1}\left(\frac{y_1''}{y_1'} + y_1'\right) - y_2' e^{y_2}\left(\frac{y_2''}{y_2'} + y_2'\right)\right] dt. \quad (3.26)$$

Pelo Teorema 9, sabemos que y_2'/y_1' é uma função crescente em (T_1, ∞). Observemos que $y_i' > 0$ para $i = 1, 2$ como foi visto na seção anterior. Segue destes fatos, visto que $y_2'(T_1) > y_1'(T_1)$, que $y_2' > y_1'$ para $t > T_1$. Além disso, $(y_2'/y_1')' > 0$ sobre (T_1, ∞) e como

$$\left(\frac{y_2'}{y_1'}\right)' = \frac{y_2'}{y_1'}\left[\frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_1''}{y_1'}\right]$$

temos $y_2''/y_2' > y_1''/y_1'$ sobre (T_1, ∞). Portanto, de (3.26) obtemos

$$\int_{\Omega_0} (-e^{u_1}\Delta u_2 + e^{u_2}\Delta u_1) \leq 0.$$

Combinando este último fato com (3.22) e usando $\phi_\epsilon(t) \geq 0$ temos

$$\int_{\Omega_0} e^{u_1+u_2}\left(\frac{f(u_2)}{e^{u_2}} - \frac{f(u_1)}{e^{u_1}}\right) \leq 0,$$

o que é uma contradição, visto que $u_2 > u_1$ em Ω_0 e $f(t)/e^t$ é uma função crescente. Isto prova o Teorema 10. ■

Apêndice A

Resultados Complementares

Este apêndice destina-se a apresentar sem demonstrações alguns resultados utilizados no corpo do trabalho.

A.1 Resultados de Equações Diferenciais

Teorema 11 (Identidades de Green). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma união finita de curvas suaves e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então, se ν denota a normal externa, vale a seguinte identidade*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \nu ds.$$

Em particular, se $v = 0$ sobre $\partial\Omega$ temos

$$\int_{\overline{\Omega}} -v\Delta u dxdy = \int_{\overline{\Omega}} \nabla v \nabla u dxdy.$$

Demonstração: Veja [14], páginas 627 e 628. ∎

Teorema 12 (Simetria Radial) *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução de*

$$\begin{aligned} \Delta u = f(u) \quad & em \quad \Omega, \\ u > 0 \quad & em \quad \Omega, \\ u = 0 \quad & sobre \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $\Omega = B_1(0)$. Então u é radial, isto é, se $r = |x|$ representa a norma euclidiana de x;

$$u(x) = v(r),$$

para alguma função $v : [0, 1] \to [0, \infty)$ estritamente decrescente.

Demonstração: Veja, [14] página 521. ∎

Observamos que os resultados que se seguem, enunciados para problemas de Cauchy de primeira ordem, isto é,

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

também são válidos para problemas de Cauchy de uma ordem m qualquer, ou seja,

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(m-1)}), \quad x(t_0) = x_0^0, \cdots, x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{m-1}.$$

Para uma constatação das considerações acima, veja a observação em [22] página 21.

Teorema 13 (Teorema de Picard). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e lipschitziana em relação a segunda variável, definida no compacto $\Omega = I_a \times B_b$ com $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \| x - x_0 \| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω, existe uma única solução do problema*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demonstração: Veja [22], página 13. ■

Teorema 14 (Soluções Máximas). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ contínua no aberto Ω. Suponhamos que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ exista única solução de $x' = f(t, x), \ \ x(t_0) = x_0$ definida em algum intervalo $I = I(t_0, x_0)$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0)$ de $x' = f(t, x), \ \ x(t_0) = x_0$, definida em um intervalo $M(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ com a propriedade de que toda solução ψ de $x' = f(t, x), \ \ x(t_0) = x_0$ em um intervalo I satisfaz $I \subset M(t_0, x_0)$ e $\psi = \phi_{|I}$.*

Demonstração: Veja [22], página 17. ■

Teorema 15 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ contínua no aberto Ω. Se ϕ é uma solução máxima única de $x' = f(t, x), \ \ x(t_0) = x_0$ definida em um intervalo maximal (ω_-, ω_+), então a aplicação $g(t) = (t, \phi(t))$ tende para $\partial\Omega$ quando $t \to \omega\pm$. Isto é, para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma vizinhança V de $\omega\pm$ tal que $g(t) \notin K$ para todo $t \in V$.*

Demonstração: Veja [22], página 17. ■

Teorema 16 (Dependência Contínua de Parâmetros). *Seja f uma função contínua em um conjunto aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, onde Λ é um espaço euclidiano. Para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$, suponhamos que o problema de dados iniciais, com λ fixo,*

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

tenha única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$, definida em seu intervalo máximo (ω_-, ω_+), onde $\omega_\pm = \omega_\pm(t_0, x_0, \lambda)$. Então

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); \quad (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-, \omega_+)\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e ϕ é contínua em D.

Demonstração: Veja [22], página 34. ■

Teorema 17 (Dependência Diferenciável) *Seja f uma função contínua em um conjunto aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, com $D_2 f$ contínua em Ω, onde Λ é um espaço euclidiano. Então, para cada λ fixo, a solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ de*

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

é única e admite derivada parcial $D_3\phi$ com relação a x_0. Mais ainda, a aplicação $(t, t_0, x_0, \lambda) \to D_3\phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ é contínua em seu domínio

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); \quad (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-, \omega_+)\}$$

e

$$x(t) = D_3\phi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda),$$

para $1 \leq k \leq n$, é solução de

$$x' = J(t)x, \quad x(t_0) = e_k,$$

onde $J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$, (ω_-, ω_+) representa o intervalo máximo de definição de ϕ e e_k o k-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Veja [22], página 39. ∎

A.2 Resultados de Análise Funcional

Teorema 18 (Teorema da Convegência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*
(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω,
(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, temos

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p. \ em \ \ \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Demonstração: Veja, [5] página 67. ∎

Teorema 19 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1, com fronteira limitada, e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\begin{cases} se \ \ 1 \leq p < N, \ \ então \ \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), \\ se \ \ p = N, \ \ então \ \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, \infty), \\ se \ \ p > N, \ \ então \ \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

com injeções contínuas.

Demonstração: Veja, [9] página 168. ■

Teorema 20 (Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1. Temos:*

$$\begin{cases} se \;\; 1 \leq p < N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*), \\ se \;\; p = N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty), \\ se \;\; p > N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

com injeções compactas.

Demonstração: Veja, [9] página 169. ■

Teorema 21 (Identidade de Pohozaev). *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(u) \quad em \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad\;\;\; sobre \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada. Seja

$$G(s) = \int_0^s g(t)dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_\Omega g(u)u + \int_\Omega G(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2,$$

onde ν é a normal unitária externa sobre $\partial\Omega$.

Demonstração: Veja, [18] página 238. ■

Referências Bibliográficas

[1] Admurthi, *Uniqueness of positive solutions of a quasilinear Dirichlet problem with exponencial nonlinearity*, Proc. R. Soc. Edinb. A **128** (1998), 895-906.

[2] Atkinson, F.V., L.A. Peletier, *Ground states of $-\Delta u = f(u)$ and the Emden-Fowler equation*. Arch. Rational Mech. Anal. **93** (1986), 103-127.

[3] Atkinson, F.V., L.A. Peletier, *Emden-Fowler equations involving critical exponents.* To appear in Nonlinear Analysis, TMA.

[4] Atkinson, F.V., L.A. Peletier, *Ground states and Dirichlet problems for $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^2$*. Arch. Rational Mech. Anal. **96** (1986), 147-165.

[5] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[6] Bandle, C., *Existence theorems, qualitative results and a priori bounds for a class of nonlinear Dirichlet problems.* Arch. Rational Mech. Anal. **58** (1975), 219-238.

[7] Berestycki, H., P.L.Lions, *Existence of solutions for nonlinear scalar field equations.* Part I, The ground state. Arch. Rational Mech. Anal **82** (1983), 313-345.

[8] Berestycki, H., P.L.Lions, L.A. Peletier, *An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbb{R}^n$*. Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 141-157.

[9] Brezis, H., *Analyse Fonctionelle − Théorie et Aplications.* Masson Paris, 1987.

[10] Brezis, H., L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure and Appl. Math **36** (1983), 437-477.

[11] Budd, C., J. Norbury, *Semilinear elliptic equations and supercritical growth.* J. Diff. Eqns **68** (1987), 169-197.

[12] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B. *Elliptic equations in R^2 with nonlinearities in the critical growth range.* Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), 139–153.

[13] de Figueiredo, D. G.; Ruf, B. *Existence and non-existence of radial solutions for elliptic equations with critical growth in R^2*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 639–655.

[14] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations.* Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[15] Fowler, R. H., *The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of second order.* Quart. J. Math. (Cambridge Series) **45** (1914), 289-350.

[16] Fowler, R. H., *Further studies of Emden's and similar differential equations.* Quart. J. Math. (Oxford series), **2** (1931), 259-288.

[17] Gidas, B., Ni, W.M., Niremberg, L. *Symmetry and related properties via maximum principle.* Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.

[18] Kesavan, S. *Functional Analysis and Applications.* New Age International(P) Ltd., Publishers 1988.

[19] Ni, W.M., J. Serrin, *Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations. The anomalous case.* To appear in Accad. Naz. Lincei. Rendiconti.

[20] Pohozaev, S.I., *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Dokad. Akad. Nauk **SSSR 165** (1965), 36-39 (in Russian) and Sov. Math. **6** (1965) 1408-1411 (in English).

[21] Severini, C., *Sopra gli integrali delle equazione differenziali del secondo ordine con valori prestabiliti in due punti dati.* Atti R. Acc. Torino **40** (1904-5), 1035-40.

[22] Sotomayor Tello, J. M., *Lições de equações diferenciais ordinárias* Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[23] Strauss, W. A., *Existence of solitary waves in higher dimensions.* Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[24] Tang, M., *Uniqueness of positive solutions for* n*-Laplacian.* Proc. R. Soc. Edinb. A **130** (2000), 1405-1416.

[25] Tarsi, C. *Uniqueness of positive solutions of nonlinear elliptic equations with exponential growth.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **133** (2003), no. 6, 1409–1420.

[26] Trudinger, N.S., *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications.* Indiana Univ. Math. J. **17** (1967), 473-483.

[27] Weston, V. H., *On the asymptotic solution of a partial different equations with an exponential nonlinearity.* SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 1030-1053.

[28] Wong, J. S. W., *On a generalized Emden-Fowler equation.* SIAM Rewiew **17** (1975), 339-360.