Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados não absolutamente somantes

Marcos dos Santos Ferreira

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados não absolutamente somantes

por

Marcos dos Santos Ferreira

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Dezembro de 2010
João Pessoa-PB

001

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados não absolutamente somantes

por

Marcos dos Santos Ferreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro - UFU

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Suplente)

Aos meus pais.

Agradecimentos

Inicialmente, a Deus por todas as benções derramadas em minha vida. Aos meus pais Edson e Thelma, principalmente pela confiança depositada em mim e pelo apoio nos momentos em que mais precisei. A Ludimila, pelo companherismo e por ter desempenhado seu papel de mãe de modo satisfatório. Aos meus filhos Nícolas e Nicole, por tudo que representam para mim. Ao professor Daniel Pellegrino, pela incomparável qualidade em ensinar e orientar, por ser tão compreensível e por ter me aceitado como orientando. Aos professores Fagner Araruna, Jacqueline Rojas, Lizandro Challapa e Marivaldo Matos. Aos professores da UESC. Aos amigos de graduação Luíz , Paulo, Renato, Taís e Thiago. A todos os colegas e amigos de mestrado que tive oportunidade de conhecer. Alguns desses em especial, a exemplo de André, Claudemir, Eduardo, Elano, Geraldo, Maikon e Priscilla. Também, aos colegas Dayvid, Ivaldo, Karine e Rainelly que, embora conheci a pouco tempo, me identifiquei muito com eles. Ao meu grande amigo Emerson Souza. Aos amigos que fiz na igreja advenstista de Mangabeira VII, em especial a Jaílson. A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns resultados envolvendo lineabilidade e a teoria linear dos operadores absolutamente somantes. Observamos que a técnica utilizada está intimamente relacionada com a teoria dos espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis e que a presença de uma base incondicional em um dos espaços envolvidos é crucial para garantirmos alguns resultados.

Palavras-Chave: lineabilidade, operadores absolutamente somantes, bases incondicionais.

Abstract

In this work we present some results involving lineability and the linear theory of absolutely summing operators. We note that the technique presented is closely related to the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces and that the presence of an unconditional basis in one of the spaces involved is crucial to guarantee some results.

Key-Words: lineability, absolutely summing operators, unconditional basis.

Sumário

Introdução

Um fato conhecido em Análise Funcional diz que, todo operador linear contínuo entre espaços de Banach leva sequências absolutamente somáveis em sequências incondicionalmente somáveis (veja a Proposição 1.1.2 e a Proposição 2.1.1 (i)). Operadores lineares contínuos que possuem a recíproca da propriedade anterior recebem o nome de operadores absolutamente somantes.

O conceito de operador absolutamente somante surgiu na década de 1950 com os trabalhos de A. Grothendieck [17] e teve como ponto de partida a teoria do produto tensorial. Apenas na década seguinte, esse conceito começou a se consolidar, quando personagens como A. Pietsch [32], J. Lindenstrauss [25] e A. Pelczynski [28] tornaram acessíveis as ideias iniciais de Grothendieck a respeito dessa classe de operadores.

Recentemente, muitos trabalhos têm sido motivados pelo estudo de situações em que se busca linearidade em ambientes não-lineares. Esse tipo de situação está relacionada ao que chamamos de lineabilidade. O termo lineabilidade é creditado a V. Gurariy [22]. Desde seu início, a teoria de lineabilidade tem sido abordada em diversas situações, por exemplo, no contexto de zero de polinômios, operadores absolutamente somantes e funções contínuas não diferenciáveis.

Neste trabalho, abordamos o conceito de lineabilidade no contexto de operadores absolutamente somantes. Inicialmente, observamos uma estreita relação desta teoria com a teoria dos espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis (Exemplo 3.2.3). Em seguida, apresentamos um solução (Teorema 3.2.21) para um problema posto por D. Puglisi e J. Seoane-Sepúlveda. E por fim, adaptamos a demonstração do Teorema 3.2.21 em outras situações.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, abordamos conceitos de séries e bases em espaços de Banach. Além das definições e exemplos que expomos, demonstramos alguns dos principais resultados referentes a esses conceitos, por exemplo, caracterizações de séries incondicionalmente convergentes, o Critério de Grumblum e algumas equivalências a respeito de sequências básicas incondicionais.

No segundo capítulo, apresentamos conceitos básicos e alguns resultados clássicos da teoria linear dos operadores absolutamente somantes.

No terceiro capítulo, estudamos algumas situações de lineabilidade no contexto de operadores absolutamente somantes. Objetivando a auto-suficiência de nosso texto, no decorrer do capítulo apresentamos uma definição acessível de espaço superreflexivo e observamos que este é uma das peças fundamentais para demonstrarmos o teorema central deste trabalho.

Notação e Terminologia

Abaixo listamos as notações e terminologias utilizadas neste trabalho:

- O símbolo $\mathbb{K}$ representará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$.
- Salvo nas exceções, que por ocasião mencionaremos, as letras X, Y, E, F, G e H representarão espaços de Banach de dimensão infinita.
- Diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente X, sempre que a sequência $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ das somas parciais da série for convergente em X.
- Os símbolos B_X e S_X representarão, respectivamente, a bola unitária fechada e a esfera do espaço de Banach X.
- O dual topológico de um espaço de Banach X será denotado por X^*. O símbolo X^{**} denotará o dual topológico de X^*.
- Denotaremos por e_i, o vetor $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ onde o número 1 aparece na i-ésima coordenada.
- Quando $1 \leq p < \infty$, denotaremos por l_p o espaço de Banach

  $$l_p = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

  e, quando $p = \infty$, denotaremos por l_∞ o espaço de Banach

  $$l_\infty = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\}.$$

  Denotaremos por c_0 o subespaço fechado de l_∞ formado por todas sequências que convergem para zero.
- Quando conveniente, usaremos a representação $\langle x, T \rangle$ para indicar que o operador T está aplicado no vetor x.
- Denotaremos por $\mathcal{K}(X, Y)$ o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares compactos de X em Y.
- Os símbolos $\rightarrow$, $\stackrel{w}{\rightarrow}$ e $\stackrel{w^*}{\rightarrow}$ representarão, respectivamente, convergência na norma, convergência na topologia fraca e convergência na topologia fraca estrela.
- O símbolo $\succeq$ denotará a relação no conjunto dirigido I.

Capítulo 1

Bases de Schauder

1.1 Séries em espaços de Banach

Definição 1.1.1 *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em um espaço vetorial normado* X *é denominada* ***absolutamente somável*** *se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, *e* ***incondicionalmente somável*** *se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} < \infty$, *qualquer que seja a bijeção* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Claramente, toda sequência incondicionalmente somável é, em particular, somável. Em 1837, Dirichlet provou que, na reta, uma sequência é incondicionalmente somável se, e só se, é absolutamente somável. Os conceitos de sequências absolutamente e incondicionalmente somáveis estão fortemente relacionados com espaços de Banach, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 1.1.2 *Um espaço vetorial normado* X *é Banach se, e só se, toda sequência absolutamente somável for incondicionalmente somável.*

Demonstração: Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável. Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer e considere $y_n = \|x_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência absolutamente somável de números reais, é também incondicionalmente somável, e portanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(n)}\right\|$ converge. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)}\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \sum_{k=n_0}^{\infty} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \varepsilon$$

sempre que $n > m > n_0$.

Isso mostra que a sequência das somas parciais de $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, logo é convergente. Dessa forma, $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é somável.

Para provar a recíproca, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy no espaço vetorial normado X. Então, dados $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = 2^{-k} > 0$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0^{(k)} \implies \|x_n - x_m\| < 2^{-k}.$$

Assim, podemos encontrar $n_1 < n_2 < \cdots$ tais que

$$\left\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right\| < 2^{-k}.$$

Em particular,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Dessa forma, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right)$ é absolutamente convergente, e portanto convergente.

Note que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} \left(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right).$$

Logo, $\left(x_{n_{k+1}}\right)_{k=1}^{\infty}$ é convergente. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e possui uma subsequência convergente, temos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente, o que garante a completude de X. ■

A seguir, exibimos algumas equivalências a respeito de sequências incondicionalmente somáveis em espaços de Banach.

Teorema 1.1.3 *Para uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X, são equivalentes:*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$, vale $\left\|\sum\limits_{n \in M} x_n\right\| < \varepsilon$.

(iii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ converge.

(iv) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, ou seja, para qualquer escolha de sinais $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge.

(v) O operador $T : l_\infty \to X$, dado por $T\left((\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ é contínuo.

Demonstração: A demonstração que o item (v) é equivalente aos demais é um pouco delicada. Provaremos apenas que os quatro primeiros itens são equivalentes. Para mais detalhes sobre esse teorema veja [12, pág. 9].

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponhamos, por absurdo, que (ii) seja falsa. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto finito M dos naturais com $\min M > m$ mas $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| \geq \varepsilon$.

Isso nos permite construir uma sequência $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos finitos dos naturais tal que

$$\min M_1 > 1 \text{ e } \left\| \sum_{i \in M_1} x_i \right\| \geq \varepsilon,$$

e

$$\min M_n > \max M_{n-1} \text{ e } \left\| \sum_{i \in M_n} x_i \right\| \geq \varepsilon,$$

para todo $n \geq 2$.

Agora, defina uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que leva cada inteiro do intervalo $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$ em M_n, onde $|M_n|$ é a quantidade de elementos de M_n. Isso é possível pois o número de inteiros do intervalo $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$ é igual a $|M_n|$ e porque, tanto os intervalos quanto os M_n são disjuntos entre si.

Afirmamos que a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ não é de Cauchy. De fato, é possível escolher, para todo $m \in \mathbb{N}$, algum dos $M_n \subset \mathbb{N}$, com $\min M_n > m$ e $\left\| \sum_{n \in M_n} x_n \right\| \geq \delta$. Tomando $p = \min M_n - 1$ e $q = \min M_n + |M_n| - 1$, teremos $q \geq p + 1 > m$ e assim

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta = \varepsilon.$$

Logo $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ não é somável, o que é uma contradição.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer e consideremos a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de acordo com (ii). Então existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que $\{1, \ldots, n_\varepsilon + 1\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m_\varepsilon)\}$. Assim, para $q, p \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 \geq m_\varepsilon$, temos $\sigma(p+1), \sigma(q) > n_\varepsilon$, e portanto

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{n \in \{\sigma(p+1), \ldots, \sigma(q)\}} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Logo $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, e o resultado segue.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de acordo com (ii). Agora, se $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência estritamente crescente de naturais, segue que $k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para $q, p \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 > n_\varepsilon$, temos que $k_q \geq q > n_\varepsilon$ e $k_{p+1} \geq p + 1 > n_\varepsilon$.

Afirmamos que $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{k_j}$ é de Cauchy. De fato, se $M_0 = \{k_{p+1}, \ldots, k_q\}$, então

$$\|T_q - T_p\| = \left\| \sum_{j=p+1}^{q} x_{k_j} \right\| = \left\| \sum_{n \in M_0} x_n \right\| < \varepsilon,$$

e portanto $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ é somável.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Seja $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Considere também, os conjuntos $S^+ = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = 1\}$ e $S^- = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = -1\}$, com a ordem herdada dos naturais. Então, por hipótese, as séries $\sum\limits_{n \in S^+} x_n$ e $\sum\limits_{n \in S^-} x_n$ são convergentes.

Considere as sequências

$$R_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in S^+}}^{n} x_k \text{ e } V_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in S^-}}^{n} x_k.$$

Dado $\varepsilon > 0$, a convergência das séries $\sum\limits_{n \in S^+} x_n$ e $\sum\limits_{n \in S^-} x_n$ nos garante a existência de $m_{\varepsilon^+} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|R_q - R_p\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^{q} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $q > p > m_{\varepsilon^+}$. Pelo mesmo motivo, existe $m_{\varepsilon^-} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|V_q - V_p\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^{q} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $q > p > m_{\varepsilon^-}$. Escolhendo $m_\varepsilon = \max\{m_{\varepsilon^+}, m_{\varepsilon^-}\}$, segue que a sequência $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} \varepsilon_k x_k \right\| &= \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^{q} x_k - \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^{q} x_k \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^{q} x_k \right\| + \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^{q} x_k \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

sempre que $q > p > m_\varepsilon$. Assim, a sequência $(S_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e, dessa forma, $(x_n)_{n=1}^\infty$ é sinal somável.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Suponha que (ii) seja falso. Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(M_k)_{k=1}^\infty$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, com $\min M_{k+1} > \max M_k$ e $\left\| \sum\limits_{n \in M_k} x_n \right\| \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{se } n \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k \\ -1, \text{se } n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k. \end{cases}.$$

Agora considere a sequência $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon_k)\, x_k$. Seja m natural e escolha um inteiro positivo k de modo que $m < \min M_k$. Assim, $\min M_k$ e $\max M_k > m$, mas

$$\left\| \sum_{n=\min M_k}^{\max M_k} (1 + \varepsilon_n)\, x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in M_k} 2x_n \right\| \geq 2\varepsilon.$$

Consequentemente a sequência $(S_n)_{n=1}^\infty$ não é de Cauchy, e portanto não converge. Dessa forma, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ não convergem (ou ambas não convergem). Isso nos leva a uma contradição. ■

Corolário 1.1.4 *Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência incondicionalmente somável em um espaço de Banach X, então, para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, vale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.*

Demonstração: Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência incondicionalmente somável, então pelo Teorema 1.1.3 (ii) dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando $M \subset \mathbb{N}$ for finito com $\min M > n_\varepsilon$, então $\left\| \sum\limits_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$. Agora, tomemos L suficientemente grande de modo que $\{1, \ldots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(L)\}$. Assim, se $N > L$, definindo $M_1 = \{1, \ldots, N\} - \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$ e $M_2 = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\} - \{1, \ldots, N\}$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} \right\| &= \left\| \sum_{n \in M_1} x_n - \sum_{n \in M_2} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M2} x_n \right\| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Visto que

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} \right) + \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)},$$

fazendo $N \to \infty$ acima, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)},$$

o que mostra o resultado. ■

1.2 Bases em espaços de Banach

Na Análise Funcional o conceito de base algébrica (bases de Hamel) é substituído pelo conceito de base de Schauder. Como o nome sugere, este conceito é creditado a J. Schauder (1927). A deficiência das bases algébricas na Análise Funcional é justificada pela seguinte proposição:

Proposição 1.2.1 *Toda base algébrica de um espaço de Banach X de dimensão infinita é não-enumerável.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{B} = \{v_j ; j \in \mathbb{N}\}$ seja uma base algébrica de X. Assim,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

onde $F_n = [v_1, \ldots, v_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como cada F_n é fechado (visto que tem dimensão finita), o Teorema de Baire garante que algum dos F_n tem interior não-vazio. Mas isso nos leva a uma contradição, pois todo subespaço próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio. ■

Definição 1.2.2 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é chamada* ***base de Schauder*** *de X quando, para cada $x \in X$, existe uma representação única da forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \tag{1.1}$$

onde $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Os funcionais lineares $f_n : X \to \mathbb{K}$ dados por

$$f_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = a_n$$

são chamados de ***funcionais coeficientes****. Estes funcionais estão bem definidos devido a unicidade de (1.1).*

Veja que se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder, a unicidade em (1.1) nos garante que o conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.

Exemplo 1.2.3 *A sequência dos vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de c_0 e l_p, $1 \leq p < \infty$. De fato, seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Como $x_n \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j - (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} = \|(0, \ldots 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{\infty} = \sup_{j \geq n+1} |x_j| < \varepsilon.$$

Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ e portanto $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de c_0. A outra afirmação segue de um raciocínio análogo ao anterior.

Exemplo 1.2.4 *É fácil ver que todo espaço com base de Schauder é separável. Portanto, l_∞ não possui base de Schauder.*

O seguinte exemplo é devido a Schauder:

Exemplo 1.2.5 *Base de Schauder do espaço $C[0,1]$.*
Defina a sequência $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $C[0,1]$ por

$$s_0(t) = 1 \text{ e } s_1(t) = t,$$

e, para $n \geq 2$, defina s_n, considerando m inteiro positivo com $2^{m-1} < n \leq 2^m$, de modo que

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m \left(t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1 \right) \right), & se\ \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1 \\ 1 - 2^m \left(t - \left(\frac{2n-1}{2^m} - 1 \right) \right), & se\ \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1 \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Afirmamos que a sequência $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ é base de Schauder de $C[0,1]$. De fato, para cada $f \in C[0,1]$ defina a sequência $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ em $C[0,1]$ por

$$\begin{aligned} p_0 &= f(0)\, s_0, \\ p_1 &= p_0 + (f(1) - p_0(1))\, s_1, \\ p_2 &= p_1 + (f(1/2) - p_1(1/2))\, s_2, \\ p_3 &= p_2 + (f(1/4) - p_2(1/4))\, s_3, \\ p_4 &= p_3 + (f(3/4) - p_3(3/4))\, s_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que p_0 é uma função que coincide com f no ponto 0; p_1 coincide com f em 0 e 1 e interpola linearmente nesses pontos; p_2 coincide com f em 0, 1 e 1/2 e interpola linearmente nesses pontos. Seguindo esse raciocínio, temos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que p_n coincide com f nos $n+1$ primeiros pontos do subconjunto

$D = \{0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, \ldots\}$ de $[0, 1]$. Veja também que cada p_n é uma função poligonal sobre o gráfico da f.
Para cada inteiro não negativo m, seja α_m o coeficiente de s_m na respectiva equação de p_m. Assim, $p_n = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m s_m$, para cada n natural.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

sempre que

$$|x - y| < \delta.$$

Considere $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^m} < \delta$ e tome n_0 suficientemente grande de modo que f e p_{n_0} coincidam no conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, ..., \frac{2^m-1}{2^m}\}$. Se $x \in [0, 1]$, existe $k \in \{1, ..., 2^m\}$ tal que

$$\left| x - \frac{k}{2^m} \right| < \delta.$$

Logo, se $k \neq 2^m$, temos

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_n(x)| &\leq \left| f(x) - f\left(\frac{k}{2^m}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(x) \right| \\
&< \varepsilon + \left| p_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(x) \right| \\
&\leq \varepsilon + \left| p_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \right| \\
&= \varepsilon + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \right| \\
&< 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Se $k = 2^m$ o resultado segue de forma similar. Temos assim que $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$ e portanto $f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n s_n$. Com um pouco de trabalho se pode verificar a unicidade dos escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$.

Mostraremos, adiante, que os funcionais coeficientes são contínuos.

Definição 1.2.6 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ base de Schauder de X e $\mathcal{V}$ o espaço vetorial formado pelas sequências $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ existe e, para cada $a \in \mathcal{V}$, considere*

$$\eta(a) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Defina também $T_X : \mathcal{V} \to X$ dado por

$$T_X(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Lema 1.2.7 *A função η é uma norma em $\mathcal{V}$ e $(\mathcal{V},\eta)$ é Banach.*

Demonstração: Inicialmente provemos que η é uma norma em $\mathcal{V}$. É claro que $\eta(0) = 0$. De fato, se $\eta(a) = 0$ então

$$0 = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|; n \in \mathbb{N}\right\} \geq \|a_1 x_1\|$$

e segue que $a_1 = 0$. Repetindo o procedimento acima, temos que $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Temos também, para todo $\lambda \in \mathbb{N}$, que

$$\eta(\lambda a) = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i x_i\right\|; n \in \mathbb{N}\right\} = |\lambda|\,\eta(a).$$

Além disso,

$$\eta(a+b) \leq \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right\|; n \in \mathbb{N}\right\} = \eta(a) + \eta(b),$$

o que mostra que η é uma norma.

Provaremos agora que $(\mathcal{V},\eta)$ é completo. Seja $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = ((a_k^n)_{k=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{V},\eta)$. Veja que

$$\begin{aligned}
\left|a_n^k - a_n^j\right| \|x_n\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^k - a_i^j\right) x_i - \sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i^k - a_i^j\right) x_i\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^k - a_i^j\right) x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i^k - a_i^j\right) x_i\right\| \\
&\leq 2\eta(\alpha_k - \alpha_j).
\end{aligned}$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\left(a_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, e portanto é convergente em $\mathbb{K}$. Considere

$$a_n^0 = \lim_{k\to\infty} a_n^k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_0 := (a_n^0)_{n=1}^{\infty}$. Mostremos agora que $\alpha_0 \in \mathcal{V}$ e $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha_0$ em $(\mathcal{V},\eta)$. De fato, como $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ existe $r_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq r_\varepsilon \Rightarrow \eta(\alpha_k - \alpha_l) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, l \geq r_\varepsilon \Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^k - a_i^l\right) x_i\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $k \to \infty$, concluímos que

$$l \geq r_\varepsilon \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^0 - a_i^l\right) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, visto que $\alpha_{r_\varepsilon} = (a_n^{r_\varepsilon})_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^{r_\varepsilon} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$m > n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^0 x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=n}^{m} \left(a_i^0 - a_i^{r_\varepsilon}\right) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^{r_\varepsilon} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daí, segue que $(\sum_{i=1}^n a_i^0 x_i)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em X, e portanto $\sum_{n=1}^\infty a_n^0 x_n$ converge. Logo, $\alpha_0 \in \mathcal{V}$ e, de (1.2), temos que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha_0$$

em $(\mathcal{V},\eta)$. ■

Lema 1.2.8 *A aplicação $T_X : (\mathcal{V},\eta) \to X$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Visto que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de X, segue que T_X é linear e bijetiva. Além disso, se $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}$, então

$$\|T_X(a)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \leq \eta(a).$$

Assim, T_X é contínua e, pelo Teorema da Aplicação Aberta, T_X é um isomorfismo topológico. ■

Teorema 1.2.9 *Os funcionais coeficientes de uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ são contínuos.*

Demonstração: Sendo $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}$ e $x = T_X(a)$ temos, para todo $n \in \mathbb{N}$ e cada funcional coeficiente f_n, que

$$\begin{aligned} |f_n(x)|\,\|x_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \\ &\leq 2\eta(a) \\ &= 2\eta\left(T_X^{-1}(x)\right) \\ &\leq 2\left\|T_X^{-1}\right\| \|x\|. \end{aligned}$$

Assim, cada f_n é contínuo. ■

Mostraremos agora que as normas dos vetores de uma base de Schauder e dos seus respectivos funcionais têm um certo controle.

Teorema 1.2.10 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ os seus funcionais coeficientes. Então, existe $L \geq 1$ tal que*

$$1 \leq \|f_n\| \|x_n\| \leq L,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Em X, considere

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|_1 := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Assim como foi feito no Lema 1.2.7, prova-se que $\|\cdot\|_1$ é uma norma.

Do Lema 1.2.8, segue que $T_X : (\mathcal{V}, \eta) \to (X, \|\cdot\|)$ é um isomorfismo isométrico. Além disso, a aplicação $i : (\mathcal{V}, \eta) \to (X, \|\cdot\|_1)$ dada por

$$i\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

é uma isometria. Portanto,

$$T_X \circ i^{-1} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|)$$

é um isomorfismo. Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c \|x\|$ para todo x em X. Agora, se $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{1}{\|x_n\|} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i \right\| \\ &\leq \frac{1}{\|x_n\|} \left[\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i \right\| \right] \\ &\leq \frac{2c \|x\|}{\|x_n\|} \end{aligned}$$

e portanto

$$\|f_n\| \leq \frac{2c}{\|x_n\|}.$$

Segue, da unicidade da representação, que $f_n(x_n) = 1$ e

$$1 = |f_n(x_n)| \leq \|f_n\| \|x_n\| \leq 2c := L.$$

■

Corolário 1.2.11 *Sejam* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma base de Schauder de um espaço de Banach* X *e* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *os seus funcionais coeficientes. Então,*

(a) $\sup\{\|x_n\|; n\in\mathbb{N}\}<\infty$ se, e só se, $\inf\{\|f_n\|; n\in\mathbb{N}\}>0$.

(b) $\inf\{\|x_n\|; n\in\mathbb{N}\}>0$ se, e só se, $\sup\{\|f_n\|; n\in\mathbb{N}\}<\infty$.

A seguir, introduzimos os conceitos de sistema biortogonal e sequência básica, bem como alguns resultados relacionados. Esses serão úteis para provarmos o Critério de Grumblum.

Definição 1.2.12 *Sejam* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *e* $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *sequências de elementos de* X *e* X^**, respectivamente. Dizemos que* $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *é um* ***sistema biortogonal*** *quando* $x_i^*(x_j)=\delta_{ij}$*, para quaisquer* $i,j\in\mathbb{N}$*. Neste caso, dizemos que, para cada* $n\in\mathbb{N}$*, o operador linear* $u_n : X\to X$*, dado por*

$$u_n(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j^*(x)\,x_j$$

é o ***operador expansão do sistema biortogonal*** $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *em* X*.*

Observação 1.2.13 *Note que, se* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *for base de Schauder de* X *e* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *for a sequência dos seus funcionais coeficientes, então* $(x_n, f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é um sistema biortogonal. Além disso, se* $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ *for um outro sistema biortogonal, então* $f_n=x_n^*$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*. De fato,*

$$x_n^*(x_m)=\delta_{nm}=f_n(x_m)$$

para todo $n,m\in\mathbb{N}$*. Logo, se* $x=\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j\in X$*, então*

$$x_n^*(x)=x_n^*\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_n^*(x_j)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jf_n(x_j)=f_n\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j\right)=f_n(x)$$

e portanto $f_n=x_n^*$*, para todo* n*.*

Definição 1.2.14 *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em um espaço de Banach* X *é chamada* ***sequência básica*** *quando* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *for base de Schauder de* $\overline{[x_n; n\in\mathbb{N}]}$*.*

Já é conhecido que todo espaço de Banach com base de Schauder é separável. A recíproca, porém, não é verdadeira. P. Enflo mostrou, em 1972, que existem espaços de Banach separáveis que não possuem base de Schauder. Entretanto, um resultado creditado a Banach e Mazur garante que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma sequência básica (veja [14, Teorema 6.14]).

É importante lembrar que nas condições da Definição 1.2.14, se $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X$, então $a_j = f_j(x)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Note também que, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de X, então $\|u_n\| \geq 1$ para todo n, pois

$$\|u_n\| \geq \left\| u_n\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|x_n\|}\|u_n(x_n)\| = \frac{1}{\|x_n\|}\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j(x_n)\, x_j\right\| = 1. \tag{1.3}$$

Teorema 1.2.15 *Seja $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ um sistema biortogonal em um espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de X.
(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = x$ para todo $x \in X$.
(iii) $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]} = X$ e $\sup\{\|u_n(x)\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$ para todo $x \in X$.
(iv) $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]} = X$ e $\sup\{\|u_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Veja que se $x \in X$, então

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\, x_j.$$

Logo, pela Observação 1.2.13, temos

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x)\, x_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, x_j = x.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $x \in X$. De *(ii)* segue que

$$X = \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}.$$

Como $(u_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, temos

$$\sup\{\|u_n(x)\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

para todo $x \in X$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Segue do Teorema de Banach-Steinhaus.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Por hipótese, o conjunto

$$D = \left\{\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \in X; m \in \mathbb{N},\, a_j \in \mathbb{K},\, j = 1, \ldots, m\right\}$$

é denso em X. Para $d_m = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \in D$, temos que $\lim_{n\to\infty} u_n(d_m) = d_m$, pois $u_n(d_m) = d_m$ para todo $n \geq m$. Agora, sejam $z \in X$ e $\varepsilon > 0$. Se $d \in D$ com $\|d - z\| < \varepsilon$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow u_n(d) = d.$$

Logo, se $n > n_0$ temos

$$\begin{aligned}\|u_n(z) - z\| &\leq \|u_n(z) - u_n(d)\| + \|u_n(d) - d\| + \|d - z\| \\ &\leq \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|\right) \|d - z\| + \|d - z\| \\ &< \left(1 + \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|\right) \varepsilon\end{aligned}$$

e portanto

$$z = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$$

para todo $z \in X$. Assim,

$$z = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*(z)\, x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(z)\, x_j. \tag{1.4}$$

Veja ainda que a representação em (1.4) é única. De fato, se $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j^*(z)\, x_j = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j x_j$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^*(z) - b_j\right) x_j = 0.$$

Logo, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos

$$x_i^*(z) - b_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^*(z) - b_j\right) \left(x_i^*(x_j)\right) = x_i^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(x_j^*(z) - b_j\right) x_j\right) = 0,$$

o que garante que $x_i^*(z) = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 1.2.16 *Se $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal no espaço de Banach X e*

$$\sup\{\|u_n\| \,; n \in \mathbb{N}\} < \infty, \tag{1.5}$$

então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em X.

Demonstração: Tome $F = \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$ em X. Podemos aplicar o Teorema 1.2.15 (iv) para F, pois de (1.5) segue que se w_n, são os operadores expansão do sistema biortogonal $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em F, então $\sup\{\|w_n\| \,; n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de F, o que mostra o resultado. ■

1.3 O Critério de Grumblum

O seguinte resultado é uma caracterização útil de sequências básicas em espaços de Banach e será usado, por exemplo, na demonstração do Teorema 1.4.5.

Teorema 1.3.1 (Critério de Grumblum) *Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de vetores não nulos de um espaço de Banach* X *é básica se, e só se, existe uma constante positiva* M *tal que*

$$n \geq m \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \tag{1.6}$$

para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sequência básica e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência dos funcionais coeficientes. Assim, pelo Teorema 1.2.15 (ii), a sequência $(u_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge em $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$. Pelo mesmo resultado temos

$$M := \sup \{ \|u_n\| ; n \in \mathbb{N} \} < \infty.$$

Assim, para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, temos

$$n \geq m \Rightarrow u_m \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} x_j^*(x_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \delta_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i.$$

Dessa forma,

$$n \geq m \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| = \left\| u_m \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \right\| \leq \|u_m\| \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

$(\Leftarrow)$ Seja $F = [x_n; n \in \mathbb{N}]$. De (1.6), temos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é linearmente independente. De fato, se $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, como

$$\|a_1 x_1\| \leq M \|a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n\| = 0,$$

segue que $a_1 = 0$ (pois $x_1 \neq 0$). Repetindo esse procedimento, concluímos que $a_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Considere para cada n, as transformações lineares $f_n : F \to \mathbb{K}$ e $T_n : F \to \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$ dadas por

$$f_n \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right) = \lambda_n \text{ e } T_n \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

se $n \leq k$, e

$$f_n \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right) = 0 \text{ e } T_n \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

se $n > k$, onde $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Segue de (1.6) que

$$n \leq k \Rightarrow \left\| T_n \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right\| \text{ e}$$
$$n > k \Rightarrow \left\| T_n \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right\|.$$

Logo, dos dois casos acima, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq C$$

para todo n natural.

Veja que, se $n \leq k$, temos

$$|f_n(x)| \|x_n\| = |\lambda_n| \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \leq 2M \|x\|$$

para todo $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in F$ e $n \in \mathbb{N}$. Como F é denso em $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$, existem únicas extensões de f_n e T_n ao conjunto $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$ que denotaremos, respectivamente, por g_n e R_n. Além disso, $\|f_n\| = \|g_n\|$ e $\|T_n\| = \|R_n\|$, para todo n.

Veja também que, como

$$T_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z) x_j$$

para todo $z \in F$, pela unicidade de cada extensão, temos que

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) x_j \tag{1.7}$$

para todo $x \in \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$.

Agora, dados $x \in \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$ e $\varepsilon > 0$, seja $y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \in F$ tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Logo, para todo $n > m$, temos

$$\begin{aligned} \|x - R_n(x)\| &\leq \|x - y\| + \|y - R_n(y)\| + \|R_n(y) - R_n(x)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - y\| + \|R_n\| \|x - y\| \\ &\leq (1 + C) \varepsilon \end{aligned}$$

e portanto

$$x = \lim_{n \to \infty} R_n(x). \tag{1.8}$$

Assim, de (1.7) e (1.8), temos

$$x = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, x_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)\, x_j. \tag{1.9}$$

Mostremos agora a unicidade da representação dos vetores de $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$ sob a forma (1.9). Para tanto, basta mostramos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| \leq \varepsilon. \tag{1.10}$$

Por (1.6) e (1.10), temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \right\| \leq M\varepsilon$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Assim,

$$|\lambda_n| \, \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \right\| \leq 2M\varepsilon$$

para todo n natural e $\varepsilon > 0$. Como os x_n são não nulos, fazendo $\varepsilon \to 0$ segue que $\lambda_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 1.3.2 *A menor constante M que satisfaz a desigualdade do Critério de Grumblum (conhecida por constante da base de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$) é*

$$M = \sup \{ \|u_n\| \, ; n \in \mathbb{N} \} .$$

Além disso, $M \geq 1$.

Demonstração: Se C satisfaz (1.6) e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$, então

$$m \geq n \Rightarrow \left\| u_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \leq C \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\| .$$

Assim

$$\left\| u_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) \right\| \leq C \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\| = C \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| .$$

Portanto

$$\sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\}\leq C. \tag{1.11}$$

Pela primeira parte da demonstração do Teorema 1.3.1 segue que (1.6) é válida para a constante $M=\sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\}$. Logo, dessa última observação e de (1.11) temos que $\sup\{\|u_n\|\,; n\in\mathbb{N}\}$ é a melhor constante que satisfaz (1.6). A desigualdade $M\geq 1$ segue de (1.3). ∎

O seguinte exemplo, encontrado em [6], mostra que nem sempre um conjunto linearmente independente enumerável é uma sequência básica.

Exemplo 1.3.3 *Seja $1<p\leq\infty$ e, em l_p, defina $x_1=e_1$ e*

$$x_j=\frac{-1}{j-1}e_{j-1}+\frac{1}{j}e_j \text{ para todo } j\geq 2.$$

Temos, para todo inteiro positivo n,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|_p=\frac{1}{n}$$

e portanto não existe constante M que satisfaça o Critério de Grumblum. Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é sequência básica de l_p.

1.4 Bases incondicionais

Definição 1.4.1 *Uma base $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de um espaço de Banach X é dita* ***incondicional*** *se, para todo $x\in X$ a expansão $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ converge incondicionalmente.*

Exemplo 1.4.2 *A base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dos espaços c_0 e l_p, $1\leq p<\infty$, é incondicional. Mostremos a afirmação para o caso c_0. Já sabemos que dado $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in c_0$, temos que $(x_j)_{j=1}^{\infty}=\sum_{j=1}^{\infty}x_je_j$. Por outro lado, $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_jx_je_j$ converge para qualquer escolha de sinais $\varepsilon_j=1$ ou -1 e daí segue do Teorema 1.1.3 (iv) que a convergência é incondicional.*

Proposição 1.4.3 *Sejam $T:X\to Y$ um isomorfismo entre espaços de Banach e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base incondicional de X. Nessas condições, $(T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é uma base incondicional de Y.*

Demonstração: Seja $y\in Y$. Como $T^{-1}(y)\in X$, existem únicos escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que $T^{-1}(y)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j$. Segue da linearidade e continuidade de T que

$$y=T\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j\right)=\lim_{j\to\infty}T\left(\sum_{n=1}^{j}a_nx_n\right)=\lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{j}a_nT(x_n)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jT(x_j). \tag{1.12}$$

Caso existisse outra sequência de escalares $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ com $y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j T(x_j)$, um argumento análogo mostraria que $T^{-1}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j$, o que contrariaria a unicidade dos escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$.

Vejamos agora, que a convergêcia em (1.12) é incondicional. De fato, seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e considere $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j T\left(x_{\sigma(j)}\right)$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{\sigma(j)}$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Rightarrow \|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} a_j T\left(x_{\sigma(j)}\right) \right\| \leq \|T\| \sum_{j=m+1}^{n} \left\| a_j x_{\sigma(j)} \right\| < \|T\| \varepsilon,$$

o que mostra o resultado. ■

Definição 1.4.4 *Uma sequência $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é chamada* ***sequência básica incondicional*** *se ela for uma base incondicional de $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$.*

O próximo resultado será fundamental no Capítulo 3. Veja que existe uma certa relação entre o próximo resultado e o Teorema 1.3.1. Aqui, caracterizamos sequências básicas incondicionais através de desigualdades de normas envolvendo somas infinitas de termos da sequência. Já no teorema mencionado anteriormente, a caracterização é feita para sequências básicas através de somas finitas.

Teorema 1.4.5 *Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica incondicional.
(ii) Existe uma constante L tal que, se $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge, então, para qualquer subconjunto $\sigma \subset \mathbb{N}$, temos

$$\left\| \sum_{i \in \sigma} a_i x_i \right\| \leq L \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|.$$

(iii) Existe uma constante K tal que, se $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge, então para quaisquer sinais $\varepsilon_i = \pm 1$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|.$$

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $Y = \overline{[x_i; i \in \mathbb{N}]}$. Dado $\sigma \subset \mathbb{N}$, defina o operador $P_\sigma : Y \to Y$ por $P_\sigma\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right) = \sum_{i \in \sigma} c_i x_i$. Veja que P_σ está bem definido, pois como $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ converge para qualquer reordenação dos termos, o Teorema 1.1.3 (iii) garante que $\sum_{i \in \sigma} c_i x_i$ é convergente.

Afirmamos, agora, que P_σ tem gráfico fechado. De fato, suponha

$$\begin{cases} x^k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^k x_i \to x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in Y \\ P_\sigma\left(x^k\right) = \sum\limits_{i\in\sigma} c_i^k x_i \to y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i x_i. \end{cases}$$

Pela continuidade dos funcionais coeficientes φ_j, temos

$$\lim_{k\to\infty} c_j^k = \lim_{k\to\infty} \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^k x_i\right) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right) = c_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} c_j^k = c_j$$

para todo j.

Pelos mesmos argumentos, como

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in\sigma} c_i^k x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i,$$

temos

$$\lim_{k\to\infty} c_j^k = b_j$$

para todo $j \in \sigma$ e, se $j \notin \sigma$, segue que a sequência nula converge para b_j. Assim, $b_j = c_j$ para todo $j \in \sigma$ e $b_j = 0$ para todo $j \notin \sigma$ e portanto

$$P_\sigma(x) = \sum_{i\in\sigma} c_i x_i = \sum_{i\in\sigma} b_i x_i = y.$$

Dessa forma P_σ tem gráfico fechado e consequentemente é contínuo.

Observe que para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in Y$ fixo, tem-se $\{P_\sigma(x)\,;\sigma \subset \mathbb{N}\}$ limitado. De fato, como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge incondicionalmente, segue do Teorema 1.1.3 (v) que o operador $T : l_\infty \to Y$, dado por $T\left((\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i x_i$ é contínuo. Dessa forma, existe $L_x > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i x_i\right\| \leq L_x \left\|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\right\|_\infty .$$

Assim, dado $\sigma \subset \mathbb{N}$ considerando λ_i como sendo 0 ou 1 de modo conveniente, segue que

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right\| \leq L_x.$$

Logo,

$$\sup_{\sigma} \|P_\sigma(x)\| \leq L_x$$

para todo $x \in X$. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $L > 0$ tal que

$$\sup_{\sigma} \|P_\sigma\| \leq L.$$

Portanto, para todo subconjunto σ, temos

$$\|P_\sigma(x)\| \leq L\|x\|,$$

o que resulta em

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right\| \leq L \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sejam $\sigma \subset \mathbb{N}$ e sinais $\varepsilon_i = \pm 1$. Por hipótese, temos

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right\| \leq L \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| < \infty.$$

Logo $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ é subsérie somável e assim, pelo Teorema 1.1.3 (iii), $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i x_i$ é convergente. Desse modo

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i x_i\right\| &= \left\|\sum_{i\in\sigma_1} a_i x_i - \sum_{i\in\sigma_2} a_i x_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i\in\sigma_1} a_i x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in\sigma_2} a_i x_i\right\| \\ &\leq 2L \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|,\end{aligned}$$

onde $\sigma_1 = \{i \in \mathbb{N}; \varepsilon_i = 1\}$ e $\sigma_2 = \{i \in \mathbb{N}; \varepsilon_i = -1\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Por hipótese e do Teorema 1.1.3 (iv) temos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge incondicionalmente. Vejamos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica de X. De fato, seja $\sigma \subset \mathbb{N}$. Defina $\varepsilon_i = 1$ se $i \in \sigma$ e $\varepsilon_i = -1$ se $i \notin \sigma$. Assim, como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i x_i = \sum_{i\in\sigma} a_i x_i - \sum_{i\notin\sigma} a_i x_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i\in\sigma} a_i x_i + \sum_{i\notin\sigma} a_i x_i$$

temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\varepsilon_i a_i x_i + a_i x_i) = 2\sum_{i\in\sigma} a_i x_i.$$

Assim

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right\| = \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\varepsilon_i a_i x_i + a_i x_i)\right\| \tag{1.13}$$
$$\leq \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i a_i x_i\right\| + \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|$$
$$\leq \frac{K}{2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| + \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|$$
$$= C\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|,$$

com $C = \frac{K+1}{2}$.

Para cada inteiro positivo m, considere $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_1, \ldots, a_m, 0, \ldots)$ e $\sigma \subset \{1, \ldots, m\}$ em (1.13). Logo

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|. \tag{1.14}$$

Dados $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$ e escalares $a_1, \ldots, a_m$, de (1.14) com $\sigma = \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|,$$

isto é

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

Nessas condições, segue do Teorema 1.3.1 que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica de X.

■

A melhor constante K que satisfaz a condição (iii) do teorema anterior é chamada de **constante da base incondicional** de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.

A seguinte questão ficou aberta durante décadas: será que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma sequência básica incondicional? Esse problema foi resolvido, em sua negativa, por T.W. Gowers e B. Maurey [21], em 1993.

Capítulo 2

A teoria linear dos operadores absolutamente somantes

A teoria dos operadores absolutamente somantes surgiu na década de 1950 com os trabalhos de Alexander Grothendieck. Porém, apenas na década seguinte essa teoria despertou a atenção de outros matemáticos e, consequentemente, as primeiras propriedades dessa classe de operadores foram surgindo. Entre os personagens responsáveis pelo avanço inicial dessa teoria, destacam-se A. Pietsch, J. Lindenstrauss e A. Pelczynski.

2.1 O conceito de operador absolutamente somante

Proposição 2.1.1 *Se $u : X \to Y$ é um operador linear contínuo entre espaços de Banach, as seguintes propriedades são válidas:*
(i) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência absolutamente somável, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ também é absolutamente somável.
(ii) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ também é incondicionalmente somável.

Demonstração: (*i*) Seja $S_n = \sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S_m| = \sum_{j=m+1}^{n} \|u(x_j)\| \leq \|u\| \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\| < \varepsilon,$$

donde temos o resultado.

(*ii*) Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer e considere $R_n = \sum_{j=1}^{n} u\left(x_{\sigma(j)}\right)$, para todo n. Como $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$ converge, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n > m \geq N \Rightarrow \|R_n - R_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} u\left(x_{\sigma(j)}\right) \right\| \leq \|u\| \sum_{j=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(j)}\right\| < \varepsilon,$$

o que mostra o que desejávamos. ■

Segue, da Proposição 2.1.1 (i) e da Proposição 1.1.2, que nas condições acima $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ for absolutamente somável. Uma pergunta natural é: será que todo operador linear contínuo entre espaços de Banach leva sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis? Operadores que possuem essa propriedade recebem um nome especial:

Definição 2.1.2 *Um operador linear contínuo $u : X \to Y$ é **absolutamente somante** se u leva sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis.*

Exemplo 2.1.3 *Todo operador linear contínuo $T : X \to Y$ tal que $\dim \operatorname{Im}(T) < \infty$ é absolutamente somante. Isso ocorre pois em espaços de dimensão finita, assim como na reta, uma série converge incondicionalmente se, e só se, converge absolutamente.*

Exemplo 2.1.4 *O operador identidade $id : c_0 \to c_0$ não é absolutamente somante. De fato, note que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{e_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, e portanto incondicionalmente somável. Por outro lado, é bem conhecido que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.*

Observação 2.1.5 *O exemplo anterior é um caso particular do Teorema de Dvoretzky-Rogers (veja [12, pág. 199]).*

O resultado central da teoria de operadores absolutamente somantes é o Teorema de Grothendieck (para detalhes veja [12, pág. 15]):

Teorema 2.1.6 (Grothendieck) *Todo operador linear contínuo $u : l_1 \to l_2$ é absolutamente somante.*

2.2 Operadores absolutamente (p, q)-somantes

Definição 2.2.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é **fortemente p-somável**, se a sequência de escalares correspondente $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty}$ estiver em l_p.*

Denotamos o conjunto de todas sequências fortemente p-somáveis em X por

$$l_p(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}};\ \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

Munindo $l_p(X)$ com as operações usuais, é fácil ver que ele é um espaço vetorial. Em $l_p(X)$, definimos

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Também não é difícil provar que a expressão (2.2) define uma norma em (2.1).

Se $p = \infty$, definimos

$$l_\infty(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}};\ \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| < \infty \right\} \text{ e } \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|.$$

Proposição 2.2.2 *Se $1 \le p \le \infty$, então $\left(l_p(X), \|\cdot\|_p \right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Sejam $p < \infty$ e $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $l_p(X)$. Denotemos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots \right) \in l_p(X)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \ge N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^\infty \left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| x^{(k)} - x^{(k')} \right\|_p < \varepsilon.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \ge N \Rightarrow \left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\| < \varepsilon,$$

e cada uma das sequências $\left(x_n^{(k)} \right)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em X, e portanto convergente. Seja x_n o limite de $\left(x_n^{(k)} \right)_{k=1}^\infty$ e considere $x = (x_n)_{n=1}^\infty$. Afirmamos que $x \in l_p(X)$. De fato, para cada m natural temos

$$k, k' \ge N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^m \left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Em (2.3), fazendo $k' \to \infty$ temos que

$$k \ge N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^m \left\| x_n^{(k)} - x_n \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon. \tag{2.4}$$

Fazendo agora $m \to \infty$, em (2.4), temos

$$\left\| x^{(k)} - x \right\|_p \le \varepsilon \tag{2.5}$$

para todo $k \ge N$. Em particular,

$$x^{(N)} - x = \left(x_n^{(N)} - x_n \right)_{n=1}^\infty \in l_p(X).$$

Como $x^{(N)} \in l_p(X)$, temos que $x \in l_p(X)$ e de (2.5) segue que $x^{(k)} \to x$.

O caso $p = \infty$ segue de um argumento similar ao anterior. ■

Definição 2.2.3 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é* ***fracamente p-somável****, se a sequência de escalares $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ estiver em l_p para todo $\varphi \in X^*$.*

Denotamos o conjunto de todas as sequências fracamente p-somáveis em X por

$$l_p^w(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}};\ \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty, \forall \varphi \in X^* \right\}.$$

Munindo $l_p^w(X)$ com as operações usuais, segue que $l_p^w(X)$ é um espaço vetorial. Em $l_p^w(X)$ definimos

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.6}$$

Como veremos a seguir, uma aplicação do Teorema do Gráfico Fechado garante que o supremo acima é finito.

Proposição 2.2.4 *Se $1 \leq p < \infty$, então $\left(l_p^w(X), \|\cdot\|_{p,w} \right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Observe que a norma dada em (2.6) está bem definida. De fato, sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$ e a função $u : X^* \to l_p$, dada por $u(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$. É claro que u está bem definida. Afirmamos que u é contínua. De fato, suponha que

$$\begin{cases} \varphi_k \to \varphi \in X^* \\ u(\varphi_k) \to z_0 \in l_p. \end{cases}$$

Como $u(\varphi_k) \to z_0 = (z_k)_{k=1}^{\infty}$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi_k(x_n))_{n=1}^{\infty} = (z_k)_{k=1}^{\infty},$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\varphi_k \to \varphi$ segue que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi(x_n),$$

e assim

$$z_n = \varphi(x_n)$$

para todo n. Logo $u(\varphi) = z_0$ e assim, o Teorema do Gráfico Fechado garante a continuidade de u. Dessa forma, temos que

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\| < \infty.$$

É fácil verificar as propriedades de norma em (2.6). Provaremos, agora, a completude de $l_p^w(X)$.

Seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $l_p^w(X)$. Denotemos, para cada k, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ldots\right) \in l_p^w(X)$. Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\| x^{(k)} - x^{(k')} \right\|_{p,w} < \varepsilon.$$

Logo, dado $\varphi \in B_{X^*}$ temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right|^p < \varepsilon^p, \tag{2.7}$$

e portanto

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, para cada n, $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X, e portanto convergente. Sejam x_n o limite de $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Afirmamos que $x \in l_p^w(X)$. De fato, usando o mesmo artifício usado na demonstração da Proposição 2.2.2, fazendo $k' \to \infty$ em (2.7), obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^p \leq \varepsilon^p$$

para todo $\varphi \in B_{X^*}$.

Concluímos assim que $x - x^{(N)} \in l_p^w(X)$ e portanto $x \in l_p^w(X)$.

Além disso,

$$k \geq N \Rightarrow \left\| x^{(k)} - x \right\|_{p,w} \leq \varepsilon,$$

donde $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$. ■

Observação 2.2.5 *$l_p(X) \subset l_p^w(X)$. De fato, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p(X)$, então*

$$\begin{aligned}
\left\| (x_j)_{n=1}^{\infty} \right\|_{p.w} &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p.
\end{aligned}$$

Algumas vezes (principalmente no contexto de aplicações absolutamente somantes não lineares), quando $1 \leq p < \infty$, é conveniente trabalhar com o espaço

$$l_p^u(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in l_p^w(X) ; \ \lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} = 0 \right\}.$$

Proposição 2.2.6 *$l_p^u(X)$ é um subespaço fechado de $l_p^w(X)$.*

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in l_p^u(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que

$$0 \leq \left\| (x_j)_{j=n}^\infty + \lambda (y_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} \leq \left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} + |\lambda| \left\| (y_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w}. \tag{2.8}$$

Em (2.8), fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^\infty + \lambda (y_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} = 0,$$

e portanto

$$(x_j)_{j=1}^\infty + \lambda (y_j)_{j=1}^\infty \in l_p^u(X),$$

donde $l_p^u(X)$ é um subespaço de $l_p^w(X)$.

Agora, seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $l_p^u(X)$. Denotemos, para cada k, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots\right)$. Então, para cada k, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Suponha que $x^{(k)} \to x = (x_j)_{j=1}^\infty$ em $l_p^w(X)$. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left| \varphi\left(x_j^{(k)} - x_j\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| x^{(k)} - x \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=n}^\infty \left| \varphi\left(x_j^{(k)} - x_j\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| x^{(k)} - x \right\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Desde que

$$\left\| (x_j)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} \leq \left\| (x_j)_{j=n}^\infty - \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w} + \left\| \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^\infty \right\|_{p,w},$$

segue de (2.9) e (2.10) que

$$n \geq n_0^{(k_0)} \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} < \varepsilon,$$

ou seja, $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(X)$ o que garante que $l_p^u(X)$ é fechado. ■

Exemplo 2.2.7 $l_p^w(l_2) \subsetneq l_p^u(l_2)$. *De fato, dado* $\varphi \in l_2$, *visto que* $(l_2)^* \approx l_2$, *temos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^2 < \infty,$$

ou seja, $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2^w(l_2)$. *Por outro lado,*

$$\sup_{\varphi \in B_{l_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\varphi \in B_{l_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\varphi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Assim, $(e_j)_{j=1}^{\infty} \notin l_2^u(l_2)$.

A seguir, mostraremos que o espaço $l_1^u(X)$ é exatamente o espaço das sequências incondicionalmente somáveis. Por esse motivo chamamos as sequências de $l_p^u(X)$ de **incondicionalmente p-somáveis**. O seguinte lema é necessário:

Lema 2.2.8 *Seja* $\alpha > 0$. *Se* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de escalares tal que*

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \leq \alpha$$

para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4\alpha.$$

Demonstração: Para todo $k \in \mathbb{N}$, veja que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n| &\leq \sum_{n=1}^{k} |\operatorname{Re}(\lambda_n)| + \sum_{n=1}^{k} |\operatorname{Im}(\lambda_n)| \\ &= \sum_{n \in M_{\operatorname{Re}}^{+}} \operatorname{Re}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\operatorname{Re}}^{-}} (-\operatorname{Re}(\lambda_n)) + \sum_{n \in M_{\operatorname{Im}}^{+}} \operatorname{Im}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\operatorname{Im}}^{-}} (-\operatorname{Im}(\lambda_n)), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M_{\operatorname{Re}}^{+} &= \{1 \leq n \leq k; \operatorname{Re}(\lambda_n) > 0\}, \\ M_{\operatorname{Re}}^{-} &= \{1 \leq n \leq k; \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}, \\ M_{\operatorname{Im}}^{+} &= \{1 \leq n \leq k; \operatorname{Im}(\lambda_n) > 0\}, \\ M_{\operatorname{Im}}^{-} &= \{1 \leq n \leq k; \operatorname{Im}(\lambda_n) < 0\}. \end{aligned}$$

Desde que

$$\left|\sum_{n\in M}\lambda_n\right|\leq\alpha$$

para qualquer M finito, considerando $M=M_{\mathrm{Re}}^{+},M_{\mathrm{Re}}^{-},M_{\mathrm{Im}}^{+}$ e M_{Im}^{-}, obtemos

$$\begin{cases}\left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}}\operatorname{Re}(\lambda_n)\right|=\left|\operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}}\lambda_n\right)\right|\leq\left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}}\lambda_n\right|\leq\alpha,\\ \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{-}}(-\operatorname{Re}(\lambda_n))\right|=\left|\operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{-}}\lambda_n\right)\right|\leq\left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Re}}^{+}}\lambda_n\right|\leq\alpha,\\ \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{+}}\operatorname{Im}(\lambda_n)\right|=\left|\operatorname{Im}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{+}}\lambda_n\right)\right|\leq\left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{+}}\lambda_n\right|\leq\alpha,\\ \left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{-}}(-\operatorname{Im}(\lambda_n))\right|=\left|\operatorname{Im}\left(\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{-}}\lambda_n\right)\right|\leq\left|\sum\limits_{n\in M_{\mathrm{Im}}^{-}}\lambda_n\right|\leq\alpha.\end{cases}$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{k}|\lambda_n|\leq4\alpha,$$

e o resultado segue, pois k é arbitrário. ■

Proposição 2.2.9 *Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é incondicionalmente somável se, e só se, ela pertence a $l_1^u(X)$.*

Demonstração: Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ seja uma sequência incondicionalmente somável em X. Então, pelo Teorema 1.1.3 (ii), dado $\varepsilon>0$ existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{j\in M}x_j\right\|<\varepsilon,$$

para todo subconjunto finito $M\subset\{n_\varepsilon,n_\varepsilon+1,\ldots\}$.

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach temos, para todo $\varphi\in B_{X^*}$,

$$\left|\sum_{j\in M}\varphi(x_j)\right|\leq\sup_{\psi\in B_{X^*}}\left|\sum_{j\in M}\psi(x_j)\right|=\left\|\sum_{j\in M}x_j\right\|<\varepsilon.$$

Segue do lema anterior que

$$\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty}|\varphi(x_j)|<4\varepsilon,$$

para todo $\varphi \in B_{X^*}$, e assim

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{1,w} \leq \left\| (x_j)_{j=n_\varepsilon}^{\infty} \right\|_{1,w} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 4\varepsilon,$$

donde $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(X)$.

Reciprocamente, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(X)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{1,w} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \varepsilon.$$

Dessa forma, para todo conjunto finito $M \subset \{n_\varepsilon, n_{\varepsilon+1}, \ldots\}$ temos que

$$\left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j \in M} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \varepsilon.$$

Assim, do Teorema 1.1.3 (ii) temos que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. ■

Da Proposição 2.2.9, podemos reescrever a Definição 2.1.2 da seguinte forma:

Definição 2.2.10 *Um operador linear contínuo $u : X \to Y$ é **absolutamente somante** se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_1(Y)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(X)$.*

A definição acima é naturalmente generalizada para parâmetros p, q. Note que abaixo escreveremos $l_q^w(X)$ ao invés de $l_q^u(X)$, mas logo a seguir veremos que ambas as escolhas levam ao mesmo conceito.

Definição 2.2.11 *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : X \to Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é **absolutamente** $(p;q)$**-somante** (ou simplesmente $(p;q)$**-somante**) se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.*

Denotamos por $\Pi_{p,q}(X;Y)$ o conjunto formado por todos operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos simplesmente $\Pi_p(X;Y)$.

O próximo resultado traz algumas caracterizações para operadores $(p;q)$-somantes. Antes o seguinte lema:

Lema 2.2.12 *Seja $(a_{mn})_{m,n}$ uma família de números reais não-negativos. Então:*

(a) Se $\sup_m [\sup_n a_{mn}] = \infty$, então $\sup_n [\sup_m a_{mn}] = \infty$.

(b) Se $\sup_m [\sup_n a_{mn}] = L < \infty$, então $\sup_n [\sup_m a_{mn}] = L$.

Demonstração: (a) Suponhamos que $\sup_m [\sup_n a_{mn}] = \infty$. Dado $K > 0$, existe m_0 tal que $\sup_n a_{m_0 n} > K$. Dessa forma, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > K$ e segue que $\sup_m a_{mn_0} > K$. Logo $\sup_n [\sup_m a_{mn}] > K$. Portanto $\sup_n [\sup_m a_{mn}] = \infty$.

(b) Suponhamos que $\sup_m [\sup_n a_{mn}] = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que $\sup_n a_{m_0 n} > L - \varepsilon$. Consequentemente, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon$. Logo

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] \geq \sup_m a_{mn_0} \geq a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon.$$

Como ε é qualquer, segue que

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] > L. \tag{2.11}$$

Segue do item (a) que

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] < \infty.$$

Por outro lado, segue da hipótese que $\sup_n a_{mn} \leq L$, para todo m. Logo, $a_{mn} \leq L$, para todo m e todo n. Então $\sup_m a_{mn} \leq L$, para todo n. Assim

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] \leq L. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) segue que

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] = L.$$

■

Proposição 2.2.13 *Seja $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) u é $(p;q)$-somante.
(ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.13}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ em X e n natural.
(iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.
(iv) *Existe* $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^u(X)$.
(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ *sempre que* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^u(X)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ *o ínfimo dos* K *tais que as desigualdades acima continuam válidas.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Considere o operador linear

$$\begin{array}{rccc} \widehat{u}: & l_q^w(X) & \to & l_p(Y) \\ & (x_j)_{j=1}^{\infty} & \to & (u(x_j))_{j=1}^{\infty}. \end{array}$$

Afirmamos que $\widehat{u}$ tem gráfico fechado. De fato, suponha que

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ em } l_q^w(X) \\ \lim_{k\to\infty} \widehat{u}\left(x^{(k)}\right) = y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ em } l_p(Y), \end{cases}$$

onde $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots\right)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|x^{(k)} - x\right\|_{q,w} < \varepsilon.$$

Dessa forma, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^q < \varepsilon^q, \tag{2.14}$$

para todo $\varphi \in B_{X^*}$. Visto que cada termo da série (2.14) é menor que ε^q, segue do Teorema de Hahn-Banach que

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x_n^{(k)} - x_n\right\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right| < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para x_n em X. Desde que u é contínuo, vale

$$\lim_{k\to\infty} u\left(x_n^{(k)}\right) = u(x_n) \tag{2.15}$$

para todo n. Por outro lado, o limite $\lim_{k\to\infty} \widehat{u}\left(x^{(k)}\right) = y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ implica que existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N' \Rightarrow \left\|\widehat{u}\left(x^{(k)}\right) - y\right\|_p < \varepsilon,$$

e portanto

$$k \geq N' \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$k \geq N' \Rightarrow \left\|u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n\right\| < \varepsilon$$

para todo n, donde

$$\lim_{k\to\infty} u\left(x_n^{(k)}\right) = y_n \tag{2.16}$$

para todo n. De (2.15) e (2.16) temos que $u(x_n) = y_n$, para todo n, o que mostra que $\widehat{u}$ tem gráfico fechado, donde $\widehat{u}$ é contínuo. Assim, para qualquer sequência finita $(x_j)_{j=1}^{n}$ em X, temos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|(u(x_k))_{k=1}^{n}\right\|_p \\ &= \left\|\widehat{u}\left((x_k)_{k=1}^{n}\right)\right\|_p \\ &\leq \|\widehat{u}\| \left\|(x_k)_{k=1}^{n}\right\|_{q,w} \\ &= \|\widehat{u}\| \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Observe também que de (2.17) vale

$$\pi_{p,q}(u) \leq \|\widehat{u}\|. \tag{2.18}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n$ em X valha

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$, então

$$
\begin{aligned}
\left\|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\right\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[K \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&= K \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= K \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= K \left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{q,w}
\end{aligned}
$$

onde da primeira para a segunda linha, usamos o Lema 2.2.12.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Segue de (iii) que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$. Por outro lado, observe que

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{u}\| &= \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{l_q^w(X)}} \left\|\widehat{u}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right\|_p \\
&= \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{l_q^w(X)}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{l_q^w(X)}} K \left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \\
&= K.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|\widehat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u). \tag{2.19}$$

Segue de (2.18) e (2.19) que $\|\widehat{u}\| = \pi_{p,q}(u)$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ É óbvio, visto que $l_q^u(X) \subset l_q^w(X)$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ É claro.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Por hipótese, o operador

$$
\begin{array}{rccc}
\widetilde{u}: & l_q^u(X) & \to & l_p(Y) \\
 & (x_k)_{k=1}^{\infty} & \to & (u(x_k))_{k=1}^{\infty}
\end{array}
$$

está bem definido. Procedendo de maneira análoga à demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$, concluímos que $\widetilde{u}$ é contínuo.

Veja que se $x_1,\dots,x_n \in X$, então

$$(x_1,\dots,x_n,0,\dots) \in l_q^u(X),$$

e portanto

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \|(u(x_k))_{k=1}^n\|_p \\ &= \|\widetilde{u}(x_k)_{k=1}^n\|_p \\ &\le \|\widetilde{u}\|\,\|(x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} \\ &= \|\widetilde{u}\| \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

o que mostra o resultado. ■

Observação 2.2.14 *Se $p<q$, então apenas o operador nulo pode ser $(p;q)$-somante. De fato, como $p<q$, sempre podemos encontrar $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ em $l_q \setminus l_p$. Então, se $X \neq \{0\}$, para $x \in X\setminus\{0\}$, temos $(\lambda_k x)_{k=1}^\infty \in l_q(X) \subseteq l_q^w(X)$. Suponhamos, por absurdo, que $u \neq 0$ seja absolutamente $(p;q)$-somante. Logo, pela proposição anterior, existe $K>0$ tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(\lambda_k x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(\lambda_k x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\|u(x)\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K \sup_{\varphi\in B_{X^*}}|\varphi(x)|\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.20}$$

Assim, segue do Teorema de Hahn-Banach e de (2.20) que

$$\|u\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

e assim $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in l_p$, o que é uma contradição.

Corolário 2.2.15 *Seja $u\in\mathcal{L}(X;Y)$. Então $u\in\Pi_{p,1}(X;Y)$ se, e só se, $(u(x_k))_{k=1}^\infty \in l_p(Y)$, sempre que $(x_k)_{k=1}^\infty$ for incondicionalmente somável. Em particular, u é absolutamente somante se, e só se, u é $(1;1)$-somante.*

Observação 2.2.16 *Note que, como $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$ e $\|\widehat{u}((x_k)_{k=1}^\infty)\|_p \le \|\widehat{u}\|\,\|(x_k)_{k=1}^\infty\|_{q,w}$ temos*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

e, portanto, o ínfimo $\pi_{p,q}(u)$ é assumido.

A seguir veremos que $\pi_{p,q}(\cdot)$ é uma norma em $\Pi_{p,q}(X;Y)$.

Proposição 2.2.17 *$(\Pi_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ é um espaço vetorial normado.*

Demonstração: Sejam $u, v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim, $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}, (v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ e portanto $((u+\lambda v)(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$, o que mostra que $\Pi_{p,q}(X;Y)$ é um espaço vetorial.

Agora, sendo $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ temos que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w},$$

para todo n natural.

Considere $n = 1$ e $x_1 = x$ arbitrário. Assim

$$\|u(x)\| \leq \pi_{p,q}(u)\|x\| \tag{2.21}$$

e portanto

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}(u).$$

Note ainda que $\pi_{p,q}(0) = 0$. Logo, de (2.21)

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

É claro que $\pi_{p,q}(\lambda v) = |\lambda|\,\pi_{p,q}(v)$. Agora, sendo $v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos pela Desigualdade de Minkowski que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} \|(u+\lambda v)(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{n} \|v(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_{p,q}(u)\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w} + |\lambda|\,\pi_{p,q}(v)\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \\ &= (\pi_{p,q}(u) + |\lambda|\,\pi_{p,q}(v))\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w},\end{aligned}$$

e portanto

$$\pi_{p,q}(u+\lambda v) \leq \pi_{p,q}(u) + |\lambda|\,\pi_{p,q}(v).$$

■

2.3 Ideais de operadores em espaços de Banach

Definição 2.3.1 *Um operador linear limitado $T : X \to Y$ entre espaços de Banach é chamado* ***operador de posto finito*** *se* $\dim \operatorname{Im}(T) < \infty$.

Definição 2.3.2 *Um* ***ideal de operadores*** $\mathcal{I}$ *é uma subclasse da classe* $\mathcal{L}$*, de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, tal que para quaisquer espaços de Banach* X *e* Y*, as componentes* $\mathcal{I}(X;Y) = \mathcal{L}(X;Y) \cap \mathcal{I}$ *satisfazem:*
(i) $\mathcal{I}(X;Y)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(X;Y)$ *que contém os operadores de posto finito;*
(ii) A propriedade de ideal, isto é, se $u \in \mathcal{L}(X;Y)$, $v \in \mathcal{I}(Y;G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G;H)$, *então a composição* $tvu \in \mathcal{I}(X;H)$.

Definição 2.3.3 *Um* ***ideal normado de operadores*** $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal de operadores* $\mathcal{I}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ *tal que:*
(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ *restrita a* $\mathcal{I}(X;Y)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* X *e* Y.
(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$.
(iii) Se $u \in \mathcal{L}(X;Y)$, $v \in \mathcal{I}(Y;G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G;H)$, *então* $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Dizemos que um ideal normado é um **ideal de Banach** (ou **ideal completo**) se, para todos espaços de Banach X e Y, as componentes $(\mathcal{I}(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ forem completas.

Teorema 2.3.4 *Se* $1 \leq q \leq p < \infty$, *então* $(\Pi_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um ideal normado de operadores lineares.*

Demonstração: Já sabemos que $\Pi_{p,q}(X;Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X;Y)$. Afirmamos que $\Pi_{p,q}(X;Y)$ contém os operadores de posto finito. De fato, seja $u : X \to Y$ dado por $u = \varphi(\cdot)\, y$, com $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ e $y \in Y$ fixo.

Considere $x_1, \ldots, x_n$ em X e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|y\varphi(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.22)\\
&= \|y\| \|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{|\varphi(x_j)|^p}{\|\varphi\|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|y\| \|\varphi\| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\psi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|y\| \|\varphi\| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\psi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

e portanto u é $(p;q)$-somante. Temos ainda que $\|y\| \|\varphi\| = \|u\| \leq \pi_{p,q}(u)$ e, de (2.22), $\pi_{p,q}(u) \leq \|y\| \|\varphi\|$. Portanto $\|y\| \|\varphi\| = \pi_{p,q}(u)$.

Se $v : X \to Y$ é um operador de posto finito, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\cdot)\, y_j$$

onde $\varphi_j \in X^*$ e $y_j \in Y$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Como $\varphi_j(\cdot)\, y_j \in \Pi_{p,q}(X;Y)$, que é um espaço vetorial, temos que $v \in \Pi_{p,q}(X;Y)$.

Agora, sejam $w \in \mathcal{L}(G;X)$, $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$ e $v \in \mathcal{L}(Y;H)$. Assim, para $x_1, \ldots, x_n \in G$ temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|(vuw)(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|v\| \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(w(x_j))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{p,q}(u)\, \|v\| \left\|(w(x_j))_{j=1}^{n}\right\|_{w,q} \\
&= \pi_{p,q}(u)\, \|v\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(w(x_j))|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \pi_{p,q}(u)\, \|v\|\, \|w\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\left(\varphi \circ \frac{w}{\|w\|}\right)(x_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_{p,q}(u)\, \|v\|\, \|w\| \sup_{\psi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\psi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

o que garante que vuw é $(p;q)$-somante e $\pi_{p,q}(vuw) \leq \pi_{p,q}(u)\, \|v\|\, \|w\|$. Logo $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q})$ é um ideal. Vejamos que é normado.

É claro que $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \geq 1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}}(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |id_{\mathbb{K}}(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(\mathbb{K})$ e, portanto, $\pi_{p,q}(id_{\mathbb{K}}) \leq 1$. ■

Proposição 2.3.5 *Se* $1 \leq q \leq p < \infty$, *então* $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q}(\cdot))$ *é um ideal de Banach.*

Demonstração: Devemos mostrar que $(\Pi_{p,q}(X;Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ é Banach. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\Pi_{p,q}(X;Y)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| \leq \pi_{p,q}(u_n - u_m) < \varepsilon.$$

Dessa forma, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X;Y)$ e portanto $u_n \to u$, para algum $u \in \mathcal{L}(X;Y)$.

Observe que o operador

$$\begin{array}{rccc} \widehat{u}: & l_q^w(X) & \rightarrow & l_p^w(Y) \\ & (x_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{array}$$

está bem definido, pois como $q \leq p$ temos

$$\left\| \widehat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_{p,w} = \left\| (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w} \leq \|u\| \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w} \leq \|u\| \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{q,w}.$$

Defina, agora,

$$\begin{array}{rccc} \widehat{u}_n: & l_q^w(X) & \rightarrow & l_p(Y) \\ & (x_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & (u_n(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{array}.$$

Como $\|\widehat{u}_n\| = \pi_{p,q}(u_n)$, temos que $(\widehat{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}\left(l_q^w(X); l_p(Y)\right)$, e como $l_p(Y)$ é completo, segue que $\mathcal{L}\left(l_q^w(X); l_p(Y)\right)$ é um espaço de Banach. Assim, $(\widehat{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $w \in \mathcal{L}\left(l_q^w(X); l_p(Y)\right)$. Logo, $\widehat{u}_n(x) \rightarrow w(x)$, para todo $x \in l_q^w(X)$.

Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_1 \Rightarrow \left\| \widehat{u}_n\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) - w\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \right\|_p < \varepsilon.$$

Considere $(y_j)_{j=1}^{\infty} = w\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \in l_p(Y)$. Logo,

$$n \geq N_1 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u_n(x_j) - y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| (u_n(x_j))_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p < \varepsilon.$$

Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$n \geq N_1 \Rightarrow \|u_n(x_j) - y_j\| < \varepsilon,$$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_j) = y_j, \tag{2.23}$$

para todo j. Como $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{L}(X;Y)$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_j) = u(x_j), \tag{2.24}$$

para todo j. Portanto, de (2.23) e (2.24) temos

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y).$$

Assim, $\widehat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) = w\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right)$, para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$. Portanto, $\widehat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty} \right) \in l_p(Y)$ e $u \in \Pi_{p,q}(X;Y)$.

Por outro lado, como $\widehat{u}_n \to w$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} n \geq N \quad &\Rightarrow \quad \|\widehat{u}_n - w\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq 1} \left\|\widehat{u}_n\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) - w\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u_n(x_j) - u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \pi_{p,q}(u_n - u) < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra o resultado. ■

Teorema 2.3.6 (Teorema da Inclusão) *Sejam X e Y espaços de Banach e suponha que $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ satisfaçam*

$$\begin{cases} q_1 \leq q_2 \\ p_1 \leq p_2 \\ \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}. \end{cases}$$

Nessas condições,

$$\Pi_{p_1,q_1}(X;Y) \subset \Pi_{p_2,q_2}(X;Y)$$

e, para cada $u \in \Pi_{p_1,q_1}(X;Y)$, temos $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$.

Demonstração: Se $q_1 = q_2$ o resultado é imediato, pois $l_{p_1}(Y) \subset l_{p_2}(Y)$. Assim, considerando $q_1 < q_2$, temos

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \geq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} > 0 \Rightarrow p_2 > p_1.$$

Logo, podemos definir $1 < p \leq q < \infty$ por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \text{ e } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}.$$

Sejam $u \in \Pi_{p_1,q_1}(X;Y)$ e $x_1, \ldots, x_n$ em X. Então, para

$$\lambda_k = \|u_k(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}},$$

com $1 \leq k \leq n$, temos

$$\begin{aligned} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1} &= \left\|u\left(\|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}} x_k\right)\right\|^{p_1} \\ &= \left(\|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}} \|u(x_k)\|\right)^{p_1} \\ &= \|u(x_k)\|^{\frac{p_2 p_1}{p} + p_1} \\ &= \|u(x_k)\|^{p_2}. \end{aligned}$$

Como u é $(p_1;q_1)$-somante, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)\,\|(\lambda_k x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_1,w_1} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}\|\varphi(\lambda_k x_k)\|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^{q_1}|\varphi(x_k)|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Visto que q/q_1 e q_2/q_1 são conjugados, usando a Desigualdade de Hölder em (2.25) temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^{q}\right)^{\frac{q_1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^{q_2}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right]^{\frac{1}{q_1}} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\,\|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_q\,\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w} \\ &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)\,\|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_p\,\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w} \\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w},\end{aligned}$$

e portanto

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u)\,\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w},$$

o que resulta em

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{p_1,q_1}\,\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2,w}.$$

Assim, $u\in\Pi_{p_1,q_1}(X;Y)$ e $\pi_{p_2,q_2}(u)\leq\pi_{p_1,q_1}(u)$. ∎

2.4 O cotipo dos espaços de Banach

Interessantes resultados na teoria dos operadores absolutamente somantes devem-se ao conceito de cotipo. No Capítulo 3, veremos a sua importância em nosso trabalho.

Antes de introduzirmos a noção de cotipo, começamos definindo as **funções de Rademacher**, que são dadas, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$\begin{array}{rccl} r_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & sign\,(\sin 2^n \pi t)\,, \end{array}$$

onde

$$sign\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

As funções de Rademacher gozam da propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 r_i\,(t)\, r_j\,(t)\, dt = \delta_{ij}.$$

Definição 2.4.1 *Um espaço de Banach X tem **cotipo** q se existir uma contante $C \geq 0$ tal que, dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em X, vale*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j\,(t)\, x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Segue da Desigualdade de Kahane (veja [12, pág. 211]) que o número 2, que aparece na desigualdade da definição anterior, pode ser substituído por qualquer $0 < p < \infty$, onde a constante C vai depender de p e q.

Na Definição 2.4.1, caso $q = \infty$, substituímos $\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{1/q}$ por $\max_{j \leq n} \|x_j\|$.

Dado um espaço de Banach X, definimos $\cot X = \inf \{q;\ X \text{ tem cotipo } q\}$.

Exemplo 2.4.2 *Se $1 \leq p \leq 2$, então l_p tem cotipo 2. Por outro lado, se $2 \leq q < \infty$, então l_q tem cotipo q (veja [12, pág. 219]).*

Observação 2.4.3 *Se $p \leq q$ e um espaço de Banach X tem cotipo p, então X tem cotipo q. De fato, por hipótese existe $C \geq 0$ tal que, dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em X, ocorre*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j\,(t)\, x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

o que mostra a afirmação.

Proposição 2.4.4 *Todo espaço de Banach tem cotipo infinito.*

Demonstração: Sejam X um espaço de Banach, $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n$ em X. Considere $i \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que

$$\|x_i\| = \max\{\|x_j\|\,;\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in B_{X^*}$ tal que $\varphi(x_i) = \|x_i\|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\max\{\|x_j\|\,;\ j = 1, \ldots, n\} &= \varphi(x_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\,\delta_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, dt \\
&= \int_0^1 r_i(t) \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, \varphi(x_j)\, dt \\
&= \int_0^1 r_i(t)\, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right) dt \\
&\leq \int_0^1 \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right)\right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\| dt \\
&\leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.5 *Se um espaço de Banach tem cotipo q, então $q \geq 2$.*

Demonstração: Sejam X um espaço de Banach e $x \in B_X$. Suponha que X tenha cotipo q e, sem perda de generalidade, considere $x_1 = \cdots = x_n = x$. Como X tem cotipo q, existe uma constante C tal que

$$\begin{aligned}
n^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\left(\int_0^1 \|x_j\|^2 \left|\sum_{j=1}^n r_j(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^n r_j(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= Cn^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo $n^{\frac{1}{q}} \leq Cn^{\frac{1}{2}}$, para todo n. Dessa forma, $n^{\frac{2-q}{2q}} \leq C$ e portanto $2 - q \leq 0$. ■

Corolário 2.4.6 *Todo espaço de Banach tem cotipo maior ou igual que* 2.

Proposição 2.4.7 *Sejam X e Y espaços de Banach isometricamente isomorfos. Se* $\cot X = \infty$, *então* $\cot Y = \infty$.

Demonstração: Suponha por absurdo que $\cot Y = q < \infty$. Assim, existe $C \geq 0$ tal que, para $y_1, \ldots, y_n$ em Y vale

$$
\left(\sum_{j=1}^n \|y_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, y_j\right\|^2 dt\right)^{1/2}.
$$

Sejam $x_1, ..., x_n \in X$. Sendo $T : X \to Y$ o isomorfismo isométrico, segue que existem $y_1, \ldots, y_n$ em Y, tais que $T(x_j) = y_j$, com $j = 1, \ldots, n$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^n \left\|T^{-1}(y_j)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\left\|T^{-1}\right\|^q \sum_{j=1}^n \|y_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left\|T^{-1}\right\| C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, y_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \left\|T^{-1}\right\| C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, T(x_j)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \left\|T^{-1}\right\| \|T\| C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição, pois $\cot X = \infty$. ∎

Terminamos esse capítulo enunciando um resultado que será bastante útil nesse trabalho, referente a polinômios homogêneos absolutamente somantes em espaços de Banach com base de Schauder incondicional. Esse resultado pode ser visto em [3, Corolário 2.1]:

Teorema 2.4.8 *Sejam X um espaço de Banach com base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e Y um espaço de Banach qualquer. Se $q < \cot Y$ e $\mu_{X,(x_n)} > q$, então*

$$\Pi_{q,1}(X;Y) \neq \mathcal{L}(X;Y).$$

A definição da constante $\mu_{X,(x_n)}$ pode ser encontrada na página 59.

Capítulo 3

Lineabilidade e operadores absolutamente somantes

Neste capítulo, abordamos o conceito de lineabilidade no contexto de operadores absolutamente somantes. O termo lineabilidade teve início na presente década, mais precisamente, em 2004, e seu conceito é devido a V. Gurariy (veja [1, 22]).

3.1 Sobre lineabilidade

Definição 3.1.1 *Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito* ***lineável*** *se $A \cup \{0\}$ contiver um subespaço de dimensão infinita de E.*

A teoria de lineabilidade tem sido tratada em diversos contextos, por exemplo em conjuntos de funções [1, 13, 16, 18, 19, 20, 22], no conjunto de operadores não absolutamente somantes [34], no conjunto de operadores que atingem sua norma [31] e no contexto de polinômios homogêneos entre espaços de Banach [8].

Em [34], D. Puglisi e J. Seoane-Sepúlveda provaram o seguinte resultado: Se E e F são espaços de Banach e E possui uma certa propriedade técnica (chamada de "propriedade das duas séries"), então o conjunto

$$\mathcal{L}\left(E; F^*\right) \diagdown \Pi_1 \left(E; F^*\right)$$

é lineável. No mesmo artigo, os autores propõe o seguinte problema: se E é um espaço de Banach superreflexivo (a definição de espaço superreflexivo será dada adiante) e $p \geq 1$, é verdade que o conjuto

$$\mathcal{L}\left(E; F\right) \diagdown \Pi_p \left(E; F\right)$$

é lineável, para qualquer espaço de Banach F?

Nas próximas seções, exibiremos soluções parciais para esse problema. Os próximos resultados sobre lineabilidade são essencialmente encontrados em [7].

3.2 Lineabilidade em espaços superreflexivos

Iniciamos esta seção com um exemplo em que fica evidenciada a forte relação entre o conceito de lineabilidade e a teoria dos *espaços hereditariamente indecomponíveis* (veja detalhes em [21]); M. A. Sofi em uma comunicação com os autores de [7] propôs a seguinte questão: dados ideais de operadores $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ e os espaços de Banach E e F, é sempre verdade que $\mathcal{I}_1(E;F)\diagdown\mathcal{I}_2(E;F)$ é vazio ou lineável? O próximo exemplo responde essa questão negativamente. Para tanto, precisamos da noção de operadores estritamente singulares e espaços hereditariamente indecomponíveis.

Definição 3.2.1 *Um operador $u: E \to E$ é **estritamente singular** se a restrição de u a qualquer subespaço fechado de dimensão infinita de E não é um isomorfismo.*

Definição 3.2.2 *Um espaço de Banach E é **hereditariamente indecomponível** se todo subespaço fechado de dimensão infinita de E não puder ser escrito como soma direta topológica de dois subespaços fechados de dimensão infinita.*

Exemplo 3.2.3 *[7] Sejam SS o ideal de operadores lineares estritamente singulares e E um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível. O conjunto $(\mathcal{L}(E;E)\diagdown SS(E;E))\cup\{0\}$ não contém sequer um subespaço de dimensão 2. De fato, inicialmente note que $id_E \in \mathcal{L}(E;E)\diagdown SS(E;E) \neq \{0\}$. Agora, sejam u_1, u_2 operadores linearmente independentes em $\mathcal{L}(E;E)\diagdown SS(E;E)$. Assim, de [26, Teorema 6] existem escalares λ_1, λ_2 e $v_1, v_2 \in SS(E;E)$ tais que*

$$u_1 = \lambda_1 id_E + v_1 \text{ e } u_2 = \lambda_2 id_E + v_2.$$

Obviamente, $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ pois $u_1, u_2 \notin SS(E;E)$. Considerando $u = \lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2$, segue que $u \neq 0$ pois u_1, u_2 são linearmente independentes. Como $u = \lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2$, temos que $u \in SS(E;E)$. Dessa forma, $u \notin (\mathcal{L}(E;E)\diagdown SS(E;E))\cup\{0\}$ e portanto, $(\mathcal{L}(E;E)\diagdown SS(E;E))\cup\{0\}$ não contém um subespaço de dimensão 2.

Antes de exibirmos as soluções parciais do problema posto por Puglisi e Seoane-Sepúlveda, introduzimos o conceito de espaços de Banach superreflexivos, bem como alguns resultados úteis.

3.2.1 Espaços uniformemente convexos e superreflexivos

Os conceitos de convexidade uniforme e reflexibilidade em espaços de Banach estão fortemente relacionados. Como veremos, o Teorema 3.2.18 (devido a D. P. Milman e B. J. Pettis em 1939) é um bom indício dessa relação. Anos depois, M. M. Day em [11] mostrou que existem espaços de Banach reflexivos não isomorfos a espaços uniformemente convexos. Em 1972, alguns conceitos como "propriedade da árvore finita" e "representabilidade finita" são introduzidos por R. C. James que, no mesmo ano, introduziu a noção de espaços superreflexivos.

Definição 3.2.4 *Dizemos que um espaço normado E é* ***estritamente convexo*** *quando*

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|,$$

sempre que x e y são não paralelos.

Exemplo 3.2.5 *O espaço $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ não é estritamente convexo. De fato, os vetores $(1,1)$ e $(1,-1)$ não são paralelos e $\|(1,1)+(1,-1)\|_\infty = 2 = \|(1,1)\|_\infty + \|(1,-1)\|_\infty$. Também, os espaços c_0 e l_∞ não são estritamente convexos; basta considerar os vetores $x = e_1 + e_2$ e $y = e_1 - e_2$.*

Proposição 3.2.6 *Um espaço normado E é estritamente convexo se, e só se, para quaisquer $x, y \in S_E$ com $x \neq y$, vale $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$.*

Demonstração: Se E é estritamente convexo, o resultado é claro.

Para provar a recíproca, suponha que E não seja estritamente convexo. Logo, existem $x_0, y_0 \in E$, não paralelos, tais que

$$\|x_0 + y_0\| = \|x_0\| + \|y_0\|.$$

Sem perda de generalidade, considere $0 < \|x_0\| \leq \|y_0\|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x_0}{\|x_0\|} + \frac{y_0}{\|y_0\|}\right\| &\geq \left\|\frac{x_0}{\|x_0\|} + \frac{y_0}{\|x_0\|}\right\| - \left\|\frac{y_0}{\|x_0\|} - \frac{y_0}{\|y_0\|}\right\| \\
&= \frac{1}{\|x_0\|}\left(\|x_0 + y_0\|\right) - \left\|\left(\frac{1}{\|x_0\|} - \frac{1}{\|y_0\|}\right) y_0\right\| \\
&= \frac{1}{\|x_0\|}\left(\|x_0\| + \|y_0\|\right) - \|y_0\|\left(\frac{1}{\|x_0\|} - \frac{1}{\|y_0\|}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Logo, para $x = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ e $y = \frac{y_0}{\|y_0\|}$ temos $x, y \in S_E$, $x \neq y$ e

$$\frac{\|x+y\|}{2} \geq 1.$$

o que é uma contradição. ■

Definição 3.2.7 *Dizemos que um espaço normado E é* ***uniformemente convexo*** *ou, mais precisamente, sua norma é uniformemente convexa se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$x, y \in B_E \text{ e } \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Obviamente, pela Proposição 3.2.6, todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo.

Exemplo 3.2.8 *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo. Em particular, é estritamente convexo. De fato, sejam $x, y \in B_H$ e $\varepsilon > 0$ dados, com H Hilbert. A Regra do Paralelogramo nos diz que*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Logo, se $\|x-y\| \geq \varepsilon$, temos

$$\|x+y\|^2 + \varepsilon^2 \leq 4$$

e portanto

$$\|x+y\| \leq \left(4-\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, considerando $\delta = 1-(1-\varepsilon^2/4)^{\frac{1}{2}}$ a afirmação segue. Por outro lado, do Exemplo 3.2.5 concluímos que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, c_0 e l_∞ não são uniformemente convexos.

Lema 3.2.9 *Um espaço normado E é uniformemente convexo se, e só se, para todo par de redes $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq B_E$, vale*

$$\left\|\frac{x_\alpha + y_\alpha}{2}\right\| \to 1 \Rightarrow \|x_\alpha - y_\alpha\| \to 0. \tag{3.1}$$

Demonstração: Suponha que E seja uniformemente convexo. Se não valesse (3.1), existiriam redes $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq B_E$ tais que

$$\left\|\frac{x_\alpha + y_\alpha}{2}\right\| \to 1 \tag{3.2}$$

e existiria $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\alpha_0 \in I$, existiria

$$\alpha_1 \succeq \alpha_0 \text{ tal que } \|x_{\alpha_1} - y_{\alpha_1}\| \geq \varepsilon.$$

Logo, como E é uniformemente convexo, existiria $\delta > 0$ tal que

$$\left\|\frac{x_{\alpha_1} + y_{\alpha_1}}{2}\right\| \leq 1-\delta, \tag{3.3}$$

o que contradiz (3.2).

Para provar a recíproca, suponha que E não seja uniformemente convexo. Assim, existem $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq B_E$ tais que

$$\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Logo, $\|x_n - y_n\| \not\to 0$ e $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| \to 1$ e chegamos a uma contradição. ■

Corolário 3.2.10 *Seja E uniformemente convexo. Se $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq B_E$ é tal que $\left\|\frac{x_\alpha+x_\beta}{2}\right\| \to 1$, então $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é uma rede de Cauchy.*

Demonstração: Se $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ não fosse rede de Cauchy, existiria $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\alpha_0 \in I$, existiriam

$$\alpha_1, \alpha_2 \succeq \alpha_0 \text{ tais que } \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \geq \varepsilon.$$

Logo, como E é uniformemente convexo, existiria $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2}}{2} \right\| \leq 1 - \delta,$$

uma contradição. ■

Teorema 3.2.11 *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo. Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E satisfaça $x_n \xrightarrow{w} x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$. Então $\|x_n - x\| \to 0$.*

Demonstração: Se $x = 0$ o resultado é imediato. Suponhamos então $x \neq 0$. Sejam $y = \frac{x}{\|x\|}$ e $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $f \in E^*$

$$\frac{1}{\|x_n\|} f(x_n) \to \frac{1}{\|x\|} f(x),$$

o que resulta em $f(y_n) \to f(y)$ e $y_n \xrightarrow{w} y$.

Veja, agora, que $\|y_n - y\| \to 0$ implica em $\|x_n - x\| \to 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \Big\| \, \|x_n\| \, y_n - \|x\| \, y \Big\| \\ &\leq \Big\| \, \|x_n\| \, y_n - \|x_n\| \, y \Big\| + \Big\| \, \|x_n\| \, y - \|x\| \, y \Big\| \\ &= \|x_n\| \, \Big\| \, y_n - y \Big\| + \Big| \, \|x_n\| - \|x\| \Big| \, \|y\| \to 0. \end{aligned}$$

Como $y \neq 0$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in E^*$ com $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(y) = \|y\| = 1$. Assim

$$\left| \varphi\left(\frac{y_n + y_m}{2} \right) \right| \leq \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \leq \frac{\|y_n\|}{2} + \frac{\|y_m\|}{2} = 1. \tag{3.4}$$

Mas $\varphi(y_n) \to \varphi(y) = 1$. Dessa forma, de (3.4), quando $n, m \to \infty$ segue que $\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \to 1$.

Assim, pelo Corolário 3.2.10, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e portanto $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge na norma para algum vetor em E. Logo $y_n \to y$, o que mosta o resultado. ■

Definição 3.2.12 *Um espaço de Banach E é chamado **superreflexivo** se ele admite uma norma uniformemente convexa equivalente à norma original.*

Ressaltamos que a definição acima não é a original. Para a definição original bem como uma demonstração que as mesmas são equivalentes veja, respectivamente, [23, Definição 3] e [14, Teorema 9.18].

Observação 3.2.13 *Note que todo subespaço fechado de um espaço de Banach superreflexivo é também superreflexivo.*

A seguir, apresentamos alguns resultados que serão úteis para mostramos o Teorema de Milman-Pettis.

Proposição 3.2.14 *Sejam E e F espaços normados.*
(a) Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então T é limitado se, e só se

$$\sup \{|\langle Tx, y' \rangle| ;\ x \in B_E,\ y' \in B_{F^*}\}$$

é finito. Se T for limitado, então $\|T\|$ é igual a este supremo.
(b) Se $T \in \mathcal{L}(E, F^*)$, então T é limitado se, e só se

$$\sup \{|\langle y, Tx \rangle| ;\ x \in B_E,\ y \in B_F\}$$

é finito. Se T for limitado, então $\|T\|$ é igual a este supremo.

Demonstração: (a) Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach

$$\|Tx\| = \sup \{|\langle Tx, y' \rangle| ;\ y' \in B_{F^*}\}$$

sempre que $x \in E$. Assim

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{\|Tx\| ;\ x \in B_E\} = \sup \{\sup \{|\langle Tx, y' \rangle| ;\ y' \in B_{Y^*}\} ;\ x \in B_E\} \\ &= \sup \{|\langle Tx, y' \rangle| ;\ x \in B_E,\ y' \in B_{F^*}\}, \end{aligned}$$

o que mostra o que queríamos.

(b) Suponha que $T \in \mathcal{L}(E, F^*)$. Então

$$\|Tx\| = \sup \{|\langle y, Tx \rangle| ;\ y \in B_F\}$$

sempre que $x \in E$. Portanto

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| ;\ x \in B_E\} = \sup \{|\langle y, Tx \rangle| ;\ x \in B_E,\ y \in B_F\}$$

o que mostra o resultado. ■

Teorema 3.2.15 *Suponha que E e F são espaços normados tais que existe um isomorfismo T de E sobre F. Então a aplicação $T' : F^* \to E^*$, dada por $T'(y') = y'T$ é um isomorfismo de F^* sobre E^* e $\|T'\| = \|T\|$. Se T for um isomorfismo isométrico, então T' também é.*

Demonstração: Claramente T' é linear e $\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle$, sempre que $x \in E$ e $y' \in F^*$. Segue da Proposição 3.2.14(a) que

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y'\rangle|\,;\ x \in B_E,\ y' \in B_{F^*}\} = \sup\{|\langle x, T'y'\rangle|\,;\ x \in B_E,\ y' \in B_{F^*}\}$$

e assim, a Proposição 3.2.14(b) garante que T' é limitado e que $\|T'\| = \|T\|$.

Afirmamos que $T^{'}$ é injetivo. De fato, seja agora $y' \in F'$ tal que $T'y' = 0$. Assim, $y'(y) = \langle T\left(T^{-1}y\right), y'\rangle = \langle T^{-1}y, T'y'\rangle = 0$ sempre que $y \in F$, e portanto $y' = 0$. Por outro lado se $x' \in E^*$, então $x'(x) = \langle Tx, x'T^{-1}\rangle = \langle x, T'\left(x'T^{-1}\right)\rangle$ sempre que $x \in E$, e assim $T'\left(x'T^{-1}\right) = x'$. Concluímos assim que T' é bijetivo. Logo o Teorema da Aplicação Aberta garante que T' é um isomorfismo.

Suponhamos, agora, que T é um isomorfismo isométrico. Então, para cada $y' \in F^*$

$$\begin{aligned} \|T'y'\| &= \sup\{|\langle x, T'y'\rangle|\,;\ x \in B_E\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y'\rangle|\,;\ x \in B_E\} \\ &= \sup\{|\langle y, y'\rangle|\,;\ y \in B_F\} \\ &= \|y'\|, \end{aligned}$$

e assim T' é um isomorfismo isométrico. ■

Proposição 3.2.16 *Todo espaço normado isomorfo a um espaço reflexivo é também reflexivo.*

Demonstração: Sejam E e F espaços normados, E reflexivo, e $T : E \to F$ um isomorfismo entre eles. Considere para cada $y' \in F^*$ e $x'' \in E^{**}$ as aplicações $T' : F^* \to E^*$ e $T'' : E^{**} \to F^{**}$ dadas por $T^{'}(y') = y'T$ e

$$T^{''}(x'')(y') = x''\left(T^{'}(y')\right).$$

O Teorema 3.2.15, garante que as aplicações $T^{'}$ e $T^{''}$ são isomorfismos.

Considere agora as injeções canônicas $Q_E : E \to E^{**}$ e $Q_F : F \to F^{**}$. Fixe $y'' \in F^{**}$. Como E é reflexivo e T'' é um isomorfismo, existe $x \in E$ tal que $T''Q_E x = y''$.

Se $y' \in F^*$, então

$$\begin{aligned} \langle y', y''\rangle &= \langle y', T''Q_E x\rangle \\ &= \langle T'y', Q_E x\rangle \\ &= \langle x, T'y'\rangle \\ &= \langle Tx, y'\rangle, \end{aligned}$$

e assim $y'' = Q_F(Tx)$. Dessa forma, a aplicação Q_F é sobrejetiva, e assim F é reflexivo. ■

Lema 3.2.17 *Seja E um espaço normado. Se $x'' \in E^{**}$ e W é uma vizinhança de x'' na topologia fraca estrela, então $W = x'' + W_0$, onde W_0 é uma vizinhança de zero na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Sejam $W = \{y'' \in E^{**};\ |y''(f_i) - x''(f_i)| < \varepsilon,\ \forall i \in I\}$ e $W_0 = \{y'' \in E^{**};\ |y''(f_i)| < \varepsilon,\ \forall i \in I\}$, onde I é finito e $\varepsilon > 0$. Assim, se $g \in x'' + W_0$, existe $y_0'' \in W_0$ tal que $g = x'' + y_0''$.

Logo,

$$|g(f_i) - x''(f_i)| = |(x'' + y_0'')(f_i) - x''(f_i)| = |y_0''(f_i)| < \varepsilon,$$

e assim $g \in W$.

Reciprocamente, se $g \in W$, então $|g(f_i) - x''(f_i)| < \varepsilon$ para todo $i \in I$. Logo $g - x'' \in W_0$. Assim $g \in x'' + W_0$. ■

Teorema 3.2.18 (Milman-Pettis) *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração: Sejam E um espaço de Banach uniformemente convexo e $x'' \in S_{E^{**}}$. Seja Q a injeção canônica de E em E^{**}. Pelo Teorema de Goldstine, existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ em B_E tal que $Qx_\alpha \overset{w^*}{\to} x''$.

Definindo $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2)$ quando $\alpha_1 \preceq \alpha_2$ e $\beta_1 \preceq \beta_2$, temos que $I \times I$ é dirigido e, assim $\left(Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)\right)_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ é uma rede. Afirmamos que $Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right) \overset{w^*}{\to} x''$. De fato, considere W uma vizinhança de x'' como no Lema 3.2.17, isto é, $W = x'' + W_0$, onde W_0 é uma vizinhança de zero.

Seja V_0 uma vizinhança de zero tal que $V_0 + V_0 \subset W_0$. Como $Q\left(\frac{x_\alpha}{2}\right) \overset{w^*}{\to} \frac{x''}{2}$, existe $\alpha_1 \in I$ tal que

$$\alpha \succeq \alpha_1 \Rightarrow Q\left(\frac{x_\alpha}{2}\right) \in \frac{x''}{2} + V_0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) \succeq (\alpha_1, \alpha_1) \quad &\Rightarrow \quad Q\left(\tfrac{x_\alpha}{2}\right) + Q\left(\tfrac{x_\beta}{2}\right) \in \left(\tfrac{x''}{2} + V_0\right) + \left(\tfrac{x''}{2} + V_0\right) \\
&\Rightarrow \quad Q\left(\tfrac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right) \in x'' + (V_0 + V_0) \\
&\Rightarrow \quad Q\left(\tfrac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right) \in (x'' + W_0) = W,
\end{aligned}$$

o que mostra a afirmação.

Agora, veja que $\left\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right\| \to 1$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $x_0' \in S_{E^*}$ tal que $\lim_{(\alpha,\beta)} \left|Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)(x_0')\right| = |x''(x_0')| > \|x''\| - \varepsilon$. Assim, existe $(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \in I \times I$ tal que

$$(\alpha, \beta) \succeq (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \Rightarrow \left|Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)(x_0')\right| > \|x''\| - \varepsilon.$$

Logo, quando $(\alpha, \beta) \succeq (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon)$,temos

$$1 \geq \left\|Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)\right\| \geq \left|Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)(x_0')\right| > \|x''\| - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Assim, $\left\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right\| = \left\|Q\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)\right\| \to 1$, o que mostra a afirmação.

Segue do Corolário 3.2.10 que $(x_\alpha)_\alpha$ é uma rede de Cauchy em E. Como E é completo, $(x_\alpha)_\alpha$ converge para algum $x_0 \in E$ e, desse modo, $Qx_\alpha \to Qx_0$. Logo, $Qx_0 = x''$ e, portanto, E é reflexivo. ■

Corolário 3.2.19 *Se um espaço normado E é isomorfo a um espaço de Banach uniformemente convexo, então E é reflexivo.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.18 segue que E é isomorfo a um espaço reflexivo e, pela Proposição 3.2.16, segue que E é reflexivo. ■

Corolário 3.2.20 *Todo espaço superreflexivo é reflexivo.*

Demonstração: Segue do Corolário 3.2.19. ■

3.2.2 Lineabilidade do conjunto $\mathcal{L}(E;F)\setminus\Pi_p(E;F)$

O próximo teorema resolve quase totalmente o problema posto por Puglisi e Seoane-Sepúlveda, enunciado no começo do capítulo:

Teorema 3.2.21 *[7] Sejam $p \geq 1$ e E um espaço superreflexivo. Se E contiver um subespaço complementado de dimensão infinita com base incondicional ou F contiver uma sequência básica incondicional infinita, então $\mathcal{K}(E;F)\setminus\Pi_p(E;F)$ (e portanto $\mathcal{L}(E;F)\setminus\Pi_p(E;F)$) é lineável.*

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que E contenha um subespaço complementado E_0 de dimensão infinita com base incondicional $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Considere

$$\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \tag{3.5}$$

uma decomposição de $\mathbb{N}$ por subconjuntos infinitos dois a dois disjuntos $(A_j)_{j=1}^{\infty}$. Como $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base incondicional, temos que $\{e_n; n \in A_j\}$ é uma sequência básica incondicional para todo $j \in \mathbb{N}$. De fato, para cada j, considere $A_j = \{j_1, j_2, \ldots\}$. Veja que para qualquer sequência de escalares $(a_{j_i})_{i=1}^{\infty}$, o Critério de Grumblum garante a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$n \geq m \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{m} a_{j_i} e_{j_i} \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{j_i} e_{j_i} \right\|,$$

onde consideramos $a_i = 0$ sempre que $i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$. Dessa forma, temos que $\{e_n; n \in A_j\}$ é uma sequência básica. Mostremos agora que ela é incondicional. Com efeito, suponhamos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{j_i} e_{j_i}$ seja convergente. Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{j_i} e_{j_i} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

com $a_i = 0$, sempre que $i \notin \{j_1, j_2, \ldots\}$ e a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ é incondicionalmente convergente, temos a nossa afirmação.

Seja $E_j = \overline{[e_n; n \in A_j]}$. Sendo E_j fechado, segue da Observação 3.2.13 que cada E_j é superreflexivo. Assim, de [10, Teorema], para cada j, existe um operador

$$u_j : E_j \to F;\ u_j \in \mathcal{K}(E_j; F) \diagdown \Pi_p(E_j; F).$$

Considerando $\wp$ a constante da base incondicional de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, temos do Teorema 1.4.5 que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_n \right\| \leq \wp \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right\|$$

para todo $\varepsilon_n = \pm 1$ e escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $P_j : E_0 \to E_j$ a projeção natural sobre E_j. Logo, se

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in E_0 \text{ e } x = P_j(y) \in E_j$$

temos

$$2x = 2P_j(y) = 2P_j\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n \in A_j} 2a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n' a_n e_n,$$

onde $\varepsilon_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n' = 1$ se $n \in A_j$ e $\varepsilon_n' = -1$ se $n \notin A_j$. Assim,

$$2\|P_j(y)\| = \|2x\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n' a_n e_n \right\| \leq 2\wp \|y\|.$$

Portanto, para cada j, $\|P_j\| \leq \wp$ e assim E_j é um subespaço complementado de E_0.

Sendo $\pi_0 : E \to E_0$ a projeção contínua sobre E_0, seja, para cada j, o operador

$$\widetilde{u}_j : E \to F;\ \widetilde{u}_j = u_j \circ P_j \circ \pi_0.$$

Como P_i e π_0 são contínuas e $u_j \in \mathcal{K}(E_j; F)$, segue que $\widetilde{u}_j \in \mathcal{K}(E; F)$. Agora, visto que $u_j \notin \Pi_p(E_j; F)$, existe $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p^w(E_j)$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_j(x_k)\|^p = \infty$. Assim, dado $\varphi \in E^*$ temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi_{|_{E_j^*}}(x_k) \right|^p < \infty$$

e, por outro lado

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{u}_j(x_k)\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_j(x_k)\|^p = \infty.$$

Portanto $\widetilde{u}_j \in \mathcal{K}(E; F) \diagdown \Pi_p(E; F)$.

Observe que $E_i \cap E_j = \{0\}$, para todo $i \neq j$. De fato, se $z \in E_i \cap E_j$ então

$$\sum_{n \in A_i} a_n e_n = z = \sum_{n \in A_j} b_n e_n$$

com $A_i \cap A_j = \varnothing$. Por outro lado, como

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

segue que

$$\begin{aligned} n \notin A_i &\Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow b_n = c_n = 0, \text{ quando } n \in A_j \text{ e} \\ n \notin A_j &\Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow a_n = c_n = 0, \text{ quando } n \in A_i, \end{aligned}$$

donde $z = 0$.

Agora, sejam $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n$, com ao menos um $a_j \neq 0$, com $j \in \{1, \ldots n\}$. Como $\widetilde{u}_j$ não é absolutamente p-somante, existe uma sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p^w(E_j)$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{u}_j(x_k)\|^p = \infty$. Por outro lado, é claro que $\widetilde{u}_j(x_k) = u_j(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, como $E_{i_1} \cap E_{i_2} = \{0\}$ sempre que $i_1 \neq i_2$, temos $\widetilde{u}_i(x_k) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ e $k \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_1 \widetilde{u}_1(x_k) + \cdots + a_n \widetilde{u}_n(x_k)\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_j \widetilde{u}_j(x_k)\|^p = \infty,$$

donde concluímos que $a_1 \widetilde{u}_1(x_k) + \cdots + a_n \widetilde{u}_n(x_k)$ não é absolutamente p-somante. Isso mostra que $[\widetilde{u}_j; j \in \mathbb{N}] \subset \mathcal{K}(E; F) \diagdown \Pi_p(E; F)$.

Afirmamos agora que o conjunto $\{\widetilde{u}_j; j \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. De fato, sejam $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$a_1 \widetilde{u}_1 + \cdots + a_n \widetilde{u}_n = 0.$$

Para todo $k = 1, \ldots, n$, como $\widetilde{u}_k \neq 0$, podemos escolher $x_k \in E_k$ de modo que $\widetilde{u}_k(x_k) \neq 0$. Por outro lado, como $(P_j \circ \pi_0)(x_k) = P_j(x_k) = 0$ sempre que $j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$, temos que

$$a_k \widetilde{u}_k(x_k) = 0 + \cdots + 0 + a_k \widetilde{u}_k(x_k) + 0 + \cdots + 0 = a_1 \widetilde{u}_1(x_k) + \cdots + a_n \widetilde{u}_n(x_k) = 0,$$

e assim $a_k = 0$. Portanto $[\widetilde{u}_j; j \in \mathbb{N}]$ é um subespaço de dimensão infinita de $\mathcal{K}(E; F)$ contido em $(\mathcal{K}(E; F) \diagdown \Pi_p(E; F)) \cup \{0\}$.

Agora, suponha que F contenha um subespaço G com base incondicional $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ cuja constante da base incondicional seja $\wp$. Considerando a decomposição de $\mathbb{N}$ como em (3.5), segue, para cada $j \in \mathbb{N}$, que $\{e_n; n \in A_j\}$ é base incondicional de $F_j = \overline{[e_n; n \in A_j]}$. Dessa forma, procedendo como no caso anterior, temos que cada projeção natural $P_j : G \to F_j$ é tal que $\|P_j\| \leq \wp$.

De [10, Teorema], segue que, para cada j, existe um operador

$$u_j : E \to F_j; \; u_j \in \mathcal{K}(E; F_j) \diagdown \Pi_p(E; F_j).$$

Observe que para $y_i \in F_i$ e $y_j \in F_j$, com $i \neq j$, temos

$$\|y_i\| = \|P_i(y_i + y_j)\| \leq \wp \|y_i + y_j\|. \tag{3.6}$$

Seja $inc : F_j \to F$ o operador inclusão e defina $\widetilde{u}_j : E \to F$ por $\widetilde{u}_j = inc \circ u_j$. Veja que $\widetilde{u}_j \in \mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)$. De fato, como $u_j \in \mathcal{K}(E;F_j)$ é claro que $\widetilde{u}_j \in \mathcal{K}(E;F)$. Por outro lado, como $u_j \notin \Pi_p(E;F_j)$, existe uma sequência $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{u}_j(x_k)\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|inc(u_j(x_k))\|^p = \infty, \tag{3.7}$$

e portanto $\widetilde{u}_j \notin \Pi_p(E;F_j)$. Como $\widetilde{u}_i(x) \in F_i$, segue de (3.6) que

$$\|\widetilde{u}_i(x)\| \leq \wp \|\widetilde{u}_i(x) + \widetilde{u}_j(x)\| \Rightarrow \|\widetilde{u}_i(x) + \widetilde{u}_j(x)\| \geq \wp^{-1} \|\widetilde{u}_i(x)\| \tag{3.8}$$

para todo $x \in E$. Dessa forma, como cada $\widetilde{u}_i \in \mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)$, segue de (3.7) e (3.8) que

$$\widetilde{u}_i + \widetilde{u}_j \in \mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ visto que $\mathcal{K}(E;F)$ é um espaço vetorial, $\widetilde{u}_n \in \mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)$ e vale (3.8), segue que $\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2 + \cdots + \widetilde{u}_n \in \mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)$, e portanto $[\widetilde{u}_j; j \in \mathbb{N}] \in (\mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)) \cup \{0\}$.

Afirmamos agora que $\{\widetilde{u}_j; j \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. De fato, sejam $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \ldots, a_n$ de modo que

$$a_1\widetilde{u}_1 + \cdots + a_n\widetilde{u}_n = 0.$$

Para todo $k = 1, \ldots, n$, como $\widetilde{u}_k \neq 0$, escolha $x \in E$ tal que $\widetilde{u}_k(x) \neq 0$. Como $F_i \cap F_j = \{0\}$, se $i \neq j$, segue que

$$a_k\widetilde{u}_k(x) = 0 + \cdots 0 + a_k\widetilde{u}_k(x) + 0 + \cdots + 0 = a_1\widetilde{u}_1(x) + \cdots + a_n\widetilde{u}_n(x) = 0,$$

e portanto, $a_k = 0$. Dessa forma, $\mathcal{K}(E;F) \diagdown \Pi_p(E;F)$ é lineável. ■

Observe que o Teorema 3.2.21 resolve o problema posto por Puglisi e Seoane-Sepúlveda exceto para casos extremamente patológicos, como quando E é um espaço superreflexivo que não contém subespaço complementado de dimensão infinita com base incondicional (por exemplo, os espaços construídos por V. Ferenczi [15]) e, ao mesmo tempo, quando F não contém uma sequência básica incondicional (por exemplo, os espaços construídos por Gowers e Maurey [21]).

3.3 Lineabilidade em espaços não superreflexivos

Uma análise cuidadosa na demonstração do Teorema 3.2.21 nos mostra o seguinte fato:

Observação 3.3.1 *O resultado do Teorema 3.2.21 é ainda válido se:*
(i) E contém uma sequência $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de subespaços complementados de dimensão infinita tal que $E_n \cap E_m = \{0\}$, para $n \neq m$ e
(ii) $\mathcal{L}(E_n;F) \diagdown \Pi_p(E_n;F) \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ou ainda:

Observação 3.3.2 *O resultado do Teorema 3.2.21 é ainda válido se:*
(i) F contém uma sequência $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subespaços de dimensão infinita tal que $F_n \cap F_m = \{0\}$, para $n \neq m$ e
(ii) $\mathcal{L}(E; F_n) \diagdown \Pi_p(E; F_n) \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando as observações acima podemos adaptar a ideia da demonstração do Teorema 3.2.21 em diversas situações, até mesmo para espaços de operadores sobre espaços não superreflexivos. Antes a seguinte definição:

Definição 3.3.3 *Se um espaço de Banach E possui uma base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, definimos*

$$\mu_{E,(x_n)} = \inf \left\{ t; (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_t \text{ sempre que } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in E \right\}.$$

Exemplo 3.3.4 *Sendo $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base incondicional canônica de c_0, temos $\mu_{c_0,(e_n)} = \infty$. De fato, suponha que $1 \leq \mu_{c_0,(e_n)} = q < \infty$. Assim,*

$$\inf \left\{ t; (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_t \text{ se } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in c_0 \right\} = q.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ temos

$$(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{q+\varepsilon}, \text{ sempre que } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in c_0.$$

Considerando $x = \left(1, \frac{1}{2^{1/(q+\varepsilon)}}, \ldots\right) \in c_0$, segue que $(a_j)_{j=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2^{1/(q+\varepsilon)}}, \ldots, \frac{1}{j^{1/(q+\varepsilon)}}, \ldots\right)$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{q+\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{j^{1/(q+\varepsilon)}} \right|^{q+\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

o que é um absurdo, pois $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{q+\varepsilon}$. Portanto, $\mu_{c_0,(e_n)} = \infty$.

Exemplo 3.3.5 *Sendo $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base incondicional canônica de l_p, temos $\mu_{l_p,(e_n)} = p$. De fato, suponha que $\mu_{l_p,(e_n)} = r < p$. Assim, seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $r + \varepsilon_0 < p$. Logo*

$$(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{r+\varepsilon_0}, \text{ sempre que } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in l_p.$$

Note que $x = \left(1, \frac{1}{2^{1/(r+\varepsilon_0)}}, \frac{1}{3^{1/(r+\varepsilon_0)}}, \ldots\right) \in l_p$, pois $p > r + \varepsilon_0$ para algum $\varepsilon_0 > 0$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{r+\varepsilon_0} = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{j^{1/(r+\varepsilon_0)}} \right|^{r+\varepsilon_0} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

o que é uma contradição. Dessa forma, $\mu_{l_p,(e_n)} = p$.

Proposição 3.3.6 *Se $1 \leq q < \cot F$ e $p > q$, então $\mathcal{L}(l_p; F) \diagdown \Pi_{q,1}(l_p; F)$ é lineável.*

Demonstração: Seja $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base incondicional de l_p. Pelo Exemplo 3.3.5, temos $\mu_{l_p,(e_n)} = p > q$.

Dessa forma, segue do Teorema 2.4.8 que $\mathcal{L}(l_p; F) \diagdown \Pi_{q,1}(l_p; F) \neq \varnothing$.

Veja que l_p possui uma sequência de subespaços complementados $(E_j)_{j=1}^{\infty}$, onde cada $\{e_n; n \in A_j\}$ é base incondicional de E_j. Como $\mathcal{L}(l_p; F) \diagdown \Pi_{q,1}(l_p; F) \neq \varnothing$ e cada E_j é isomorfo a l_p, usando a Observação 3.3.1, temos que $\mathcal{L}(E_j; F) \diagdown \Pi_{q,1}(E_j; F) \neq \varnothing$ e isso é suficiente para que $\mathcal{L}(l_p; F) \diagdown \Pi_{q,1}(l_p; F)$ seja lineável. ■

Agora, melhoramos a Proposição 3.3.6 no sentido de garantirmos a lineabilidade, mesmo quando substituímos o espaço l_p por um espaço E com base incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $\mu_{E,(x_n)} > q$. Antes o seguinte Lema:

Lema 3.3.7 *[34, Lemma 1.1] Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais positivos. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, então existe uma sequência de subconjuntos dos naturais $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que:*
(i) $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$.
(ii) Cada A_i possui a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.
(iii) Os conjuntos A_i são disjuntos entre si.
(iv) $\sum_{n \in A_i} a_n = \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ e cada $a_n \geq 0$, segue do Critério de Cauchy que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $v \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}$ de modo que

$$a_v + \cdots + a_{v+p} \geq \varepsilon.$$

Assim, para $v_1 \in \mathbb{N}$ existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{v_1} + \cdots + a_{v_1+p_1} \geq \varepsilon$.

Considere agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, $v_k \in \mathbb{N}$ de modo que $v_k \geq v_{k-1} + p_{k-1}$. Logo, existe $p_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{v_k} + \cdots + a_{v_k+p_k} \geq \varepsilon.$$

Considere

$$B_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{v_{2k}, \ldots, v_{2k+p_{2k}}\} \text{ e } A_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{v_{2k+1}, \ldots, v_{2k+1+p_{2k+1}}\right\}.$$

Veja que $B_1, A_1 \subset \mathbb{N}$, $\text{card}(B_1) = \text{card}(A_1) = \text{card}(\mathbb{N})$, $B_1 \cap A_1 = \varnothing$ e $\sum_{n \in B_1} a_n = \sum_{n \in A_1} a_n = \infty$. Usando o mesmo argumento em B_1, obtemos dois subconjuntos enumeráveis e disjuntos de B_1, digamos B_2 e A_2 tais que $\sum_{n \in B_2} a_n = \sum_{n \in A_2} a_n = \infty$. Seguindo esse procedimento indutivamente sobre cada B_k, com $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ com as propriedades desejadas. ■

Teorema 3.3.8 *Se $1 \leq q < \cot F$, E possui uma base incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\mu_{E,(x_n)} > q$, então $\mathcal{L}(E; F) \diagdown \Pi_{q,1}(E; F)$ é lineável.*

Demonstração: Como $\mu_{E,(x_n)} > q$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(a_j)_{j=1}^{\infty} \notin l_{q+\varepsilon_0} \text{ se } x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in E.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{q+\varepsilon_0} = \infty.$$

Seja $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência dos conjuntos como no Lema 3.3.7 associada à série $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{q+\varepsilon_0}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $E_k = \overline{[x_j; j \in A_k]}$. Já é conhecido que cada $\{x_j; j \in A_k\}$ é uma sequência básica incondicional e E_k é subespaço complementado de E.

Afirmamos que $\mu_{E_k,(x_n)} > q$. De fato, considere $y = \sum_{j \in A_k} a_j x_j \in E_k$ e $p = \mu_{E_k,(x_n)}$. Assim, para $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ temos que $(a_j)_{j \in A_k} \in l_{p+\varepsilon_0}$ e, portanto,

$$\sum_{j \in A_k} |a_j|^{p+\varepsilon_0} < \infty.$$

Por outro lado, do Lema 3.3.7 segue que

$$\sum_{j \in A_k} |a_j|^{q+\varepsilon_0} = \infty$$

e portanto $q < p = \mu_{E_k,(x_n)}$. Assim, de [3, Corolário 2.1] segue que $\mathcal{L}(E_k; F) \diagdown \Pi_{q,1}(E_k; F) \neq \varnothing$, para todo k.

Seja $u_k : E_k \to F$, tal que $u_k \in \mathcal{L}(E_k; F) \diagdown \Pi_{q,1}(E_k; F)$. Considere também, as projeções contínuas $P_k : E \to E_k$ e defina $\widetilde{u}_k : E \to F$, com $\widetilde{u}_k = u_k \circ P_k$.

Afirmamos que $\widetilde{u}_k \in \mathcal{L}(E; F) \diagdown \Pi_{q,1}(E; F)$, para todo k. De fato, é claro que $\widetilde{u}_k \in \mathcal{L}(E; F)$. Por outro lado, como $u_k \notin \Pi_{q,1}(E_k; F)$, existe uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_k)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\widetilde{u}_k(x_j)\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \|u_k(x_j)\|^q = \infty,$$

donde $(\widetilde{u}_k(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin l_q(E)$. Agora, dado $\psi \in E^*$, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(x_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \psi|_{E_k^*}(x_j) \right| < \infty,$$

e daí segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^w(E)$. Portanto $\widetilde{u}_k \notin \Pi_{q,1}(E; F)$.

Repetindo o procedimento usado no Teorema 3.2.21, segue que $[\widetilde{u}_k; k \in \mathbb{N}]$ é um subespaço de dimensão infinita contido em $(\mathcal{L}(E; F) \diagdown \Pi_{q,1}(E; F)) \cup \{0\}$. ■

Referências Bibliográficas

[1] R. Aron, V. Gurariy e J. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) 795-803.

[2] G. Botelho, *Séries Incondicionalmente Convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers,* Matemática Universitária **30** (2001), 103-111.

[3] G. Botelho e D. Pellegrino, *Absolutely summing polynomials on Banach spaces with unconditional basis*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006) 50-58.

[4] G. Botelho e D. Pellegrino, *Os problemas da base incondicional e do espaço homogêneo*, Matemática Universitária **40** (2006), 7-20.

[5] G. Botelho e D. Pellegrino, *Absolutely summing linear operators into spaces with no finite cotype*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **16** (2009) 373-378.

[6] G. Botelho e D. Pellegrino, *Introdução à Análise Funcional*, livro em preparação.

[7] G. Botelho, D. Diniz e D. Pellegrino, *Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009) 171-175.

[8] G. Botelho, M. Matos e D. Pellegrino, *Lineability of summing sets of homogeneous polynomials*, Linear Multilinear Algebra **58** (1) (2010) 61–74.

[9] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University. Press, 2005.

[10] W. J. Davis e W.B. Johnson, *Compact non-nuclear operators*, Studia Math. **51** (1974) 81-85.

[11] M. M. Day, *Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 313-317.

[12] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[13] P. Enflo e V. Gurariy, *On lineability and spaceability of sets in function spaces*, preprint.

[14] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant e V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, 2001.

[15] V. Ferenczi, *A uniformly convex hereditarily indecomposable Banach space*, Israel J. Math. **102** (1997) 199-225.

[16] G. A. Muñoz-Fernández, N. Palmberg, D. Puglisi e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability in subsets of measure and function spaces*, Linear Algebra Appl. **428** (2008) 2805-2812.

[17] A. Grothendieck, *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques,* Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8** (1956) 1-79.

[18] J. Gámez, G. Muñoz-Fernández e J. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and additivity in* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010) 265-272.

[19] L. Bernal-González, *Dense-lineability in spaces of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (9) (2008) 3163–3169.

[20] L. Bernal-González, *Lineability of sets of nowhere analytic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008) 1284 1295.

[21] W. T. Gowers e B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851-874

[22] V. Gurariy e L. Quarta, *On lineabiblity of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004) 62-72.

[23] R. C. James, *Super-reflexive Banach spaces*, Canad. J. Math. **24**, (1972c) 896-904.

[24] E. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides.

[25] J. Lindenstrauss e A. Pelczynski, *Absolutely summing operators in* $\mathcal{L}_p$ *spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275-326.

[26] B. Maurey, *Banach spaces with few operators*, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1247-1297.

[27] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[28] B. Mitjagin e A. Pelczynski, *Nuclear operators and approximative dimension,* Proc. of ICM, Moscow, (1966) 366-372.

[29] D. Pellegrino, *Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in* $\mathcal{L}_p$ *spaces*, Studia Math. **157** (2) (2003) 121-131.

[30] D. Pellegrino, *Notas de Aula de Introdução à Análise Funcional.*

[31] D. Pellegrino, E. Teixeira, *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces*, Bull Braz Math Soc **40** (3) (2009) 417-431.

[32] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Räumen,* Studia Math **27** (1967) 333-353.

[33] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser Boston, 2007.

[34] D. Puglisi e J. B. Seoane-Sepúlveda, *Bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008) 292-298.

[35] J. S. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, DM-UFPB, 2008.