Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Extensões de Homomorfismos de Subgrupos a Endomorfismos do Grupo

por

Bruno Formiga Guimarães

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2010
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Extensões de Homomorfismos de Subgrupos a Endomorfismos do Grupo

por

Bruno Formiga Guimarães

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans - IME-USP

Prof. Dr. José Gomes de Assis - UFPB

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Sousa - UFPB (Suplente)

Fevereiro/2010

Agradecimentos

- A Deus, acima de tudo, pois sem Ele nada seria possível.

- Ao Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva, pela paciência, incentivo, amizade, compreenção e, principalmente, por ter acreditado em mim quando nem eu mesmo acreditava.

- Em especial aos meus pais Guimarães e Nevinha e ao meu irmão Arthur que contribuiram decisivamente para minha formação.

- A todos os colegas do curso de mestrado, pelo incentivo e amizade.

- Em especial aos amigos Robson, Thiago, Roberto, Simeão, Juanice e Anselmo pela grande amizade.

- A minha namorada Danielle Soares e ao seu filho Lucas pelo incentivo, companheirismo, carinho e principalmente por ter compreendido toda minha ausência durante todo esse período.

- Aos ex-professores da Pós-Graduação do Departamento de Matemática da UFPB, pelo conhecimento transmitido.

- Ao meu Tio Assis que me acolheu durante todo esse período.

- Aos meus amigos de Campina Grande pelo incentivo e apoio que me deram para para seguir este difícil caminho.

- A CAPES pelo suporte financeiro durante a realização deste trabalho.

- Por fim agradeço a todas as pessoas que torceram por mim e que de alguma forma me apoiaram nos meus estudos.

Dedicatória

A minha família.
É a ela que devo tudo.

Resumo

Bertholf e Walls forneceram uma caracterização para a classe de grupos quasi-injetivos finitos. Além disso, Juriaans, Bastos e Azevedo dão uma classificação para os grupos do tipo injetivo, os quais são uma classe distinta da anterior apesar de serem bastante próximas.

Palavras chave: Grupo quasi-injetivo, injetivo, tipo inetivo, divisível, abeliano.

Abstract

Bertholf and Walls provided a characterization for the class of groups quasi-injective finite. Furthermore, Juriaans, Bastos Azevedo and give a rating for the injective type groups, which are a distinct class of the former despite being quite close.

Key-words: Quasi-injective group, injective, injective type, divisible, abelian.

Notação

$G, H, \ldots$ - Grupos
$|G|$ - Ordem do Grupo G
$[G : H]$ - Índice do Subgrupo H no Grupo G
$|g|$ - Ordem do Elemento g de um Grupo
G' - Subgrupo Comutador
$[x, y]$ - Comutador de x e y
$\times$ - Produto Direto
$\rtimes$ - Produto Semidireto
I - Identidade
$\mathrm{Aut}\,(N)$ - Conjunto dos Automorfismos de N
$\mathrm{Inn}(G)$ - Conjunto dos Automorfismos Internos de G
$\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ - Núcleo de φ
$\mathrm{Im}(\varphi)$ - Imagem de φ
$\mathcal{Z}(G)$ - Centro de G
$\mathcal{C}_G\,(H)$ - Centralizador de H em G
$\mathcal{N}_G\,(H)$ - Normalizador de H em G
G' - Subgrupo Comutador de G
$d\,(G)$ - Subgrupo Divisível Maximal de G
$\mathrm{Fit}\,(G)$ - Subgrupo Fitting de G
$\mathrm{Frat}\,(G)$ - Subgrupo Fratini de G
car - Característico
H_π - π-subgrupo de Hall
$O_\pi\,(G)$ - π-subgrupo Normal Maximal de G
Q_8 - Grupo dos Quatérnios de Ordem 8
$\mathbb{C}$ - Conjunto dos números complexos
$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais
$\mathcal{T}\,(G)$ - Subgrupo Torção
$\mathbb{Z}\,(p^\infty)$ - Grupo de Prüfer
$\mathbf{h}\,(g)$ - Altura Vetorial de g
$\mathbf{t}\,(G)$ - Tipo de G
I - Identidade
$\simeq$ - Isomorfo
$<$ - Subgrupo
$\lhd$ - Subgrupo Normal

$\langle S \rangle$ - Subgrupo Gerado pelo Subconjunto S de um Grupo
$\forall$ - Para todo
$\sum$ - Soma

Sumário

Introdução

Histórico

A ideia dos grupos injetivos surgiu com os módulos injetivos, pois qualquer grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo. Em 1940, Reinhold Baer, caracterizou os grupos injetivos com o seguinte resultado.

Teorema (Baer) *Um grupo G é injetivo se, e somente se, ele é divisível.*

A partir da definição de grupos injetivos e motivado pelo fato de não existirem grupos injetivos não triviais de ordem finita, o matemático Laszló Fuchs criou o conceito de grupos quasi-injetivos. Um grupo G é chamado *quasi-injetivo* se para qualquer subgrupo H de G e para qualquer homomorfismo de grupos $\alpha : H \to G$ existir um endomorfismo $\beta : G \to G$ tal que

$$\beta|_H = \alpha.$$

Em [3], Bertholf e Walls apresentaram uma caracterização geral para os grupos quasi-injetivos finitos.

Teorema (Bertholf-Walls) *Um grupo G é quasi-injetivo se, e somente se, $G = Q_8 \times K$, com K um grupo quasi-injetivo de ordem ímpar ou $G = K \rtimes H$ tal que:*

1. $\mathrm{Syl}_p(K)$ *e* $\mathrm{Syl}_p(H)$ *são homocíclicos.*

2. $G' = K$.

3. $\mathrm{mdc}\,(|K|\,, |H|) = 1$.

4. *Para cada $h \in H$, se p é um número primo, com $p|\,|K|$, então existe um $r = r\,(p, h) \in \mathbb{Z}$ tal que $k^h = k^r$ para todo $k \in K_p$.*

5. *Se K_π é um π-subgrupo de Hall de K, para algum conjunto de primos π, então $\mathcal{C}_H\,(K_\pi)$ é um fator direto de H. Em particular,*

   $$\mathcal{Z}(G) \cap H = \mathcal{C}_H\,(K)$$

   é um fator direto de H.

Em, [1, Página 25], Alperin propôs o seguinte exercício:

"Let H a subgroup of a cyclic group G. Show that every automorphism of H is the restriction to H of an automorphism of G".

Baseado na ideia deste exercício, em [2], Azevedo, Bastos e Juriaans, criaram o conceito de grupos do tipo injetivo. Um grupo G é chamado do *tipo injetivo* se para qualquer subgrupo H de G e qualquer automorfismo ϕ, existir um automorfismo ψ tal que

$$\psi|_H = \phi.$$

Além disso, eles caracterizaram todos os grupo abelianos do tipo injetivo no seguinte teorema: **Teorema** Sejam G um grupo abeliano e $\mathcal{T}(G)$ seu subgrupo torção. Então G é do tipo injetivo se, e somente se, é satisfeita uma das seguintes condições:

1. G é um grupo divisível.

2. G é um grupo de torção e cada uma de suas componentes primárias é divisível ou homocíclica.

3. $\mathcal{T}(G)$ é divisível e $\frac{G}{\mathcal{T}(G)}$ é livre de torção, abeliano e de posto 1.

A classe dos grupos quasi-injetivos e a classe dos grupos do tipo injetivo são distintas, apesar de serem muito próximas.

Descrição do Trabalho

Esta dissertação é constituída de quatro capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados clássicos sobre a teoria de grupos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos os principais resultados e propriedades dos grupos divisíveis e dos grupos injetivos, além de demonstrar o resultado de Baer.

No Capítulo 3, destacamos o conceito de grupos quasi-injetivo. Além disso, destacamos algumas de suas propriedades e, ainda, resultados que nos levam à caracterização de Bertholf e Walls.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos a definição de grupos do tipo injetivo, com ênfase nos grupos abelianos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de grupos que serão necessários para os capítulos subsequentes. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [7, 10].

1.1 Produto direto de grupos

Sejam $H_1, \ldots, H_n$ grupos. Sabemos que o conjunto

$$G = H_1 \times \cdots \times H_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in H_i\}$$

munido com a operação binária

$$(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$$

é um grupo com $(e_1, \ldots, e_n)$ como elemento identidade e $(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$ como elemento inverso de $(a_1, \ldots, a_n)$ em G. Neste caso, G é chamado o *produto direto* (*externo*) dos H_i. Note que o produto direto externo sempre existe e que os H_i não são, em geral, subgrupos de G.

Sejam G um grupo e H_i subgrupos de G, para cada i, com $i = 1, \ldots, n$. O grupo G é chamado o *produto direto* (*interno*) dos H_i se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $h_i h_j = h_j h_i$, para todo $h_i \in H_i$ e $h_j \in H_j$ com $i \neq j$.

2. Todo $g \in G$ pode ser escrito de modo único sob a forma $g = h_1 \cdots h_n$, com $h_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 1.1 *Sejam $G, G_1, \ldots, G_n$ grupos. Então o grupo G é isomorfo ao gupo $G_1 \times \cdots \times G_n$ se, e somente se, G possui subgrupos $H_1 \simeq G_1, \ldots, H_n \simeq G_n$ tais que:*

1. *$G = H_1 \cdots H_n$.*

2. *$H_i \lhd G$, para todo i, com $i = 1, \ldots, n$.*

3. *$H_i \cap (H_1 \cdots H_{i-1} H_{i+1} \cdots H_n) = \{e\}$, para todo i, com $i = 1, \ldots, n$.*

Corolário 1.2 *Sejam G um grupo e H_i subgrupos de G, $i = 1, \ldots, n$. Se G é um produto direto interno dos H_i, então*

$$G \simeq H_1 \times \cdots \times H_n.$$

Exemplo 1.3 *Sejam G um grupo finito e H e K subgrupos de G com* $\operatorname{mdc}(|H|, |K|) = 1$. *Mostre que se $G = H \times K$, então todo subgrupo L de G é da forma*

$$L = (L \cap H) \times (L \cap K).$$

Solução. Como H e K são subgrupos normais em G é imediato verificar que $L \cap H$ e $L \cap K$ são subgrupos normais de L tais que

$$(L \cap H) \cap (L \cap K) = \{e\}.$$

Logo,

$$(L \cap H) \times (L \cap K) \subseteq L.$$

Por outro lado, dado $g \in L$ existem únicos $h \in H$ e $k \in K$ tais que $g = hk$. Como $hk = kh$ e $\operatorname{mdc}(|h|, |k|) = 1$ temos que $|hk| = |h| |k|$ e $\langle g \rangle = \langle hk \rangle \simeq \langle h \rangle \times \langle k \rangle$. Assim, $h, k \in \langle g \rangle \subseteq L$. Portanto, $h \in L \cap H$ e $k \in L \cap K$, isto é, $g \in (L \cap H) \times (L \cap K)$. ■

1.2 Produto semidireto de grupos

Sejam G um grupo e H e N subgrupos de G. O grupo G é chamado o *produto semidireto* (*interno*) de N por H, em símbolos $G = N \rtimes H$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $G = NH$.

2. N é subgrupo normal em G.

3. $N \cap H = \{e\}$.

Exemplo 1.4 *Sejam $G = S_3$, $N = A_3$ e $H = \langle \tau \rangle$, com*

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então $G = N \rtimes H$. Como H não é um subgrupo normal em G temos que G não é o produto direto de N e H.

Observação 1.5 *Seja $G = N \rtimes H$ o produto semidireto de N por H.*

1. *Pelo Segundo Teorema de Isomorfismo, temos que*

$$H = \frac{H}{N \cap H} \simeq \frac{NH}{N} = \frac{G}{N}.$$

e H é chamado um complementar *de N. Consequentemente, se G é finito, então*

$$|G| = |N| [G : N] = |N| |H|.$$

2. *Como $G = NH$ e N é um subgrupo normal em G temos que cada $g \in G$ pode ser escrito de modo único sob a forma $g = nh$, $n \in N$ e $h \in H$.*

3. *Seja $h \in H$ fixado. Então a função $\varphi_h : N \to N$ definida por $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ é um automorfismo de N. Além disso, $\varphi_{hk} = \varphi_h \circ \varphi_k$, para todos $h, k \in H$. Portanto, a função $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ definida por $\varphi(h) = \varphi_h$ é um homomorfismo de grupos. Neste caso, dizemos que H* age *sobre N como um grupo de automorfismos e φ é chamado o* homomorfismo por conjugação *de N. Como*

$$(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1(\varphi(h_1)(n_2))h_1h_2, \text{ para alguns } n_1, n_2 \in N \text{ e } h_1, h_2 \in H,$$

temos que a operação do grupo G pode ser expressa em termos das operações de N, H e do homomorfismo φ.

4. *Se $\varphi(h) = I_N$, para todo $h \in H$, então $\varphi_h(n) = n$, para todo $n \in N$. Logo,*

$$hnh^{-1} = n \Rightarrow n^{-1}hn = h \in H,$$

isto é, H é um subgrupo normal em G. Portanto,

$$G = N \times H.$$

Reciprocamente, se $G = N \times H$, então os elementos de H comutam com os elementos de N e, assim, o homomorfismo φ é trivial.

5. *Se $\varphi(h) \neq I_N$, para algum $h \in H$, então $\varphi_h(n) \neq n$, para algum $n \in N$. Logo,*

$$hnh^{-1} \neq n \Rightarrow hn \neq nh.$$

Portanto, G é um grupo não abeliano.

Sejam N e H grupos e φ um homomorfismo de grupos de H em $\mathrm{Aut}(N)$. Definimos uma operação binária sobre $N \times H$ do seguinte modo:

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$

Então é fácil verificar que $N \times H$ com essa operação é um grupo com elemento identidade (e, e) e $(\varphi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$ o elemento inverso de (n, h). O grupo $N \times H$ é chamado o *produto semidireto* (*externo*) de N por H via φ e será denotado por

$$G = N \rtimes_\varphi H.$$

Note que

$$\widetilde{N} = \{(n, e) : n \in N\} \text{ e } \widetilde{H} = \{(e, h) : h \in H\}$$

são subgrupos de G tais que $N \simeq \widetilde{N}$ e $H \simeq \widetilde{H}$. A função $\sigma : G \to G$ definida por $\sigma(n,h) = (e,h)$ é um homomorfismo de grupos com $\mathrm{Im}\,(\sigma) = \widetilde{H}$, $\mathrm{Ker}\,(\sigma) = \widetilde{N}$ e $\sigma^2 = \sigma$. Consequentemente, $\widetilde{N}$ é um subgrupo normal em G e pelo Primeiro Teorema de isomorfismo

$$\frac{G}{\widetilde{N}} \simeq \widetilde{H}.$$

Como

$$(n,e)\,(e,h) = (n\varphi(e)\,(e)\,,h) = (n,h)$$

temos que $G = \widetilde{N}\widetilde{H}$. Além disso, $\widetilde{N} \cap \widetilde{H} = \{(e,e)\}$. Portanto, G é o produto semidireto (interno) de $\widetilde{N}$ por $\widetilde{H}$. Finalmente,

$$(e,h)\,(n,e)\,(e,h)^{-1} = (\varphi(h)\,(n)\,,e)$$

implica que a função $\psi : \widetilde{H} \to \mathrm{Aut}(\widetilde{N})$ definida por $\psi(e,h) = \psi_{(e,h)}$, com

$$\psi_{(e,h)}\,(n,e) = (\varphi(h)(n),e),$$

é o homomorfismo por conjugação de $\widetilde{N}$. Portanto, identificando $\widetilde{N}$ com N e $\widetilde{H}$ com H, temos que φ é o homomorfismo por conjugação de N e G é o produto semidireto (interno) de N por H. Neste caso,

$$N \rtimes_{\varphi} H = \{nh : n \in N,\ \ h \in H\}\,,$$

com

$$(n_1h_1)\cdot(n_2h_2) = n_1\varphi(h_1)\,(n_2)\cdot h_1h_2 \ \text{ e } \ \varphi_{h_1}\,(n_2) = h_1n_2h_1^{-1}.$$

Além disso,

$$\mathcal{C}_H(N) = \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathcal{C}_G(N) \cap H \ \text{ e } \ \mathcal{C}_N(H) = \mathcal{N}_N(H).$$

Teorema 1.6 *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal em G. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *G é um produto semidireto de N por $\frac{G}{N}$, isto é, N tem um complementar em G.*
2. *Existe um homomorfismo de grupos $\varphi : \frac{G}{N} \longrightarrow G$ tal que*

   $$\pi \circ \varphi = I_{\frac{G}{N}},$$

   com $\pi : G \to \frac{G}{N}$ a projeção canônica e φ é chamada de seção *de $\frac{G}{N}$ em G.*
3. *Existe um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow G$ tal que $\mathrm{Ker}\,(\phi) = N$ e $\phi(g) = g$, para todo $g \in \mathrm{Im}\,(\phi)$.*

Proposição 1.7 *Sejam G um grupo e H e N subgrupos de G. Então G é um produto semidireto interno de N por H se, e somente se, existir um homomorfismo de grupos $\sigma : G \to G$ tal que $\sigma^2 = \sigma$.*

Proposição 1.8 *Sejam N e H grupos, $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(N)$ um homomorfismo de grupos e $f \in \mathrm{Aut}\,(N)$ fixado. Se $\widehat{f} : \mathrm{Aut}\,(N) \to \mathrm{Aut}\,(N)$ é definida por $\widehat{f}(g) = f \circ g \circ f^{-1}$, então*

$$N \rtimes_{\widehat{f}\circ\varphi} H \simeq N \rtimes_{\varphi} H.$$

Exemplo 1.9 *Sejam N um grupo abeliano qualquer e $H = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Se definimos $\varphi : H \to$* $\mathrm{Aut}(N)$ *por $\varphi(b) = \varphi_b$, com $\varphi_b(a) = a^{-1}$, para todo $a \in N$, então $G = N \rtimes_{\varphi} H$ é um grupo não abeliano com*

$$\varphi_b(a) = bab^{-1} = a^{-1}, \forall a \in N,$$

isto é, $b \in \mathcal{Z}(G)$. Em particular, se N é cíclico, então $G \simeq D_n$ ou $G \simeq D_\infty$.

1.3 Grupos abelianos

Nesta seção, salvo menção explícita em contrário, todos os grupos serão abelianos e escritos na notação aditiva. Com esta terminologia escrevemos a soma direta dos grupos H e K da forma

$$H \oplus K = \{h + k : h \in H, k \in K\}.$$

Teorema 1.10 *Sejam A, B grupos e $\lambda_1 : A \to A \oplus B$, $\lambda_2 : B \to A \oplus B$ monomorfismos. Então o par ordenado (λ_1, λ_2) possui a seguinte propriedade universal: Dados qualquer grupo H e qualquer par de homomorfismos de grupos $\beta_1 : A \to H$ e $\beta_2 : B \to H$, existe um único homomorfismo de grupos*

$$\beta : A \oplus B \to H$$

tal que $\beta \circ \lambda_1 = \beta_1$ e $\beta \circ \lambda_2 = \beta_2$, ou seja, $\beta|_A = \beta_1$ e $\beta|_B = \beta_2$. Neste caso, $\mathrm{Hom}(A \oplus B, H)$ *é isomorfo a* $\mathrm{Hom}(A, H) \oplus \mathrm{Hom}(B, H)$.

De forma mais geral, se

$$G = \sum_{i \in I} G_i$$

e qualquer família de homomorfismos de grupos, $\beta_i : G_i \to H$, então existe um único homomorfismo de grupos $\beta : G \to H$ tal que $\beta|_{G_i} = \beta_i$, para todo $i \in I$.

Teorema 1.11 *Seja $G_i \simeq H_i$, para cada $i \in I$. Se*

$$G = \sum_{i \in I} G_i \ \text{ e } \ H = \sum_{i \in I} H_i,$$

então $G \simeq H$.

Corolário 1.12 *A soma direta*

$$G = \sum_{i \in I} G_i$$

satisfaz a seguinte condição: para toda função $\alpha : X \to H$, com H um grupo abeliano qualquer e $X = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto qualquer, existe um único homomorfismo de grupos $\beta : G \to H$ tal que $\beta|_X = \alpha$. Em particular, se X é um subconjunto de G tal que $G = \langle X \rangle$, então G é chamado grupo abeliano livre *e X é chamado uma* base *para G.*

Consideremos os seguintes exemplos de grupos abelianos: $\mathbb{Q}$, o grupo aditivo dos números racionais;

$$G = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

o grupo dos números racionais módulo um; e $\mathbb{C}^*$, o grupo multiplicativo dos complexos. Nenhum desses grupos é isomorfo a qualquer um dos outros dois. Uma das formas de ver isso é examinar as ordens dos elementos dos grupos. Note que todo elemento de $\mathbb{Q}$, com excessão do neutro, é de ordem infinita e todo elemento de G é de ordem finita, pois, se

$$\frac{p}{q} + \mathbb{Z} \in G,$$

com p e q números inteiros relativamente primos, então

$$q\left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) = p + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Para não gerar confusão permaneceremos com a notação multiplicativa para $\mathbb{C}^*$. Afirmamos que $\mathbb{C}^*$ tem elementos de ordem finita e também elementos de ordem infinita. Lembre que a identidade de $\mathbb{C}^*$ é 1. Note que $(-1)^2 = 1$ implica que -1 é de ordem 2 e $3^r = 1$ se, e somente se, $r = 0$. Logo, -1 é de ordem finita e 3 é de ordem infinita. Resumindo, temos que

1. todos os elementos de $\mathbb{Q}$, exceto o neutro, são de ordem infinita;

2. todos os elementos de G são de ordem finita;

3. $\mathbb{C}^*$ possui elementos de ordem finita e elementos de ordem infinita.

Com isso é fácil ver que os três grupos não são isomorfos.

Seja G um grupo. Então é fácil verificar que o conjunto

$$\mathcal{T}(G) = \{g \in G : |g| < \infty\}$$

é um subgrupo de G, chamado *subgrupo de torção* de G. Se $\mathcal{T}(G) = \{0\}$, então G é chamado um grupo *livre de torção*. Em particular, o grupo

$$\frac{G}{\mathcal{T}(G)}$$

é livre de torção.

Proposição 1.13 *Se um grupo G é a soma direta de grupos de torção, então G é um grupo de torção.*

Proposição 1.14 *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $\mathcal{T}(G)$ o subgrupo de torção de G. Então $\mathcal{T}(G) \cap H$ é o subgrupo de torção de H.*

Um grupo G chama-se um *p-grupo*, para algum número primo p, se a ordem de todo elemento de G é uma potência de p. Se p é um número primo que divide a ordem de um elemento g de G, então g é chamado um p-elemento. O teorema seguinte mostra que um grupo de torção é construído a partir de p-grupos. Assim, o estudo de grupos de torção se limita ao estudo de p-grupos.

Teorema 1.15 *Sejam G um grupo de torção e*

$$G_p = \{g \in G : |g| = p^n, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}_+\},$$

com p um número primo fixado. Se Π é o conjunto de todos os números primos, então

$$G = \sum_{p \in \Pi} G_p.$$

Os subgrupos G_p são chamados de p-componentes *de G.*

Sejam G um grupo e X um subconjunto de G. O conjunto X é chamado um *conjunto independente* se para $x_1, \ldots, x_r$ elementos distintos de X e $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$, tivermos que

$$n_1x_1 + \cdots + n_rx_r = 0 \Rightarrow n_1x_1 = \cdots = n_rx_r = 0. \tag{1.1}$$

Caso contrário, X é chamado um *conjunto dependente*. Note que se G é livre de torção e X é independente, então a Equação (1.1) nos diz que $n_1 = \cdots = n_r = 0$.

Sejam G um grupo livre de torção e X um subconjunto de G. O conjunto X é chamado um *conjunto independente maximal* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. X é independente.
2. Se $g \in G$ e $g \notin X$, então $X \cup \{g\}$ é um conjunto dependente.

Teorema 1.16 *Seja G um grupo. Então G possui um conjunto independente maximal.*

Suponhamos que G seja um grupo livre de torção e possua um conjunto independente maximal X que seja finito. Então o *posto* de G é definido como

$$\#(X).$$

Caso contrário, o grupo G é de *posto infinito*. É fácil ver que se G e H são grupos isomorfos, então eles tem o mesmo posto.

1.4 Grupos solúveis e nilpotentes

Nesta seção, estudaremos grupos que, de alguma forma, estão "próximos" dos grupos abelianos. Para isso, começaremos introduzindo alguns conceitos.

Dados dois elementos g e h de um grupo G, o *comutador de g e h* é o elemento

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \in G.$$

Mais geralmente, um comutador de *comprimento* $n \geq 2$ define-se indutivamente por

$$[g_1, \ldots, g_n] = [[g_1, \ldots, g_{n-1}], g_n].$$

Dados dois subconjuntos H e K de um grupo G, denotaremos por $[H,K]$ o subgrupo de G gerado pelo conjunto

$$X = \{[h,k] : h \in H \text{ e } k \in K\}.$$

Em particular, o grupo $G' = [G,G]$ chama-se *subgrupo comutador* ou *subgrupo derivado de G*. Indutivamente, definiremos agora uma sequência de subgrupos da seguinte forma:

$$G^{(0)} = G, G^{(1)} = \left[G^{(0)}, G^{(0)}\right] = G', \ldots, G^{(n)} = \left[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}\right], \ldots, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

O subgrupo $G^{(n)}$ é chamado o *n-ésimo grupo derivado* de G e a sequência

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(n)} \supseteq \cdots$$

é chamada a *sequência derivada* de G.

Lema 1.17 *Sejam g, h e k elementos de um grupo G. Então*

1. $[g,h] = e$ *se, e somente se,* $gh = hg$.
2. $[g,h]^{-1} = [h,g]$.
3. $[g,h]^k = \left[g^k, h^k\right]$.
4. *Se* $\phi : G \to H$ *é um homomorfismo de grupos, então* $\phi([g,h]) = [\phi(g), \phi(h)]$.

Note que o item (1) mostra que um grupo G é abeliano se, e somente se, $G' = \{e\}$. Veremos, a seguir, que o conhecimento de G' também permite saber quando um quociente é abeliano.

Lema 1.18 *Seja H um subgrupo normal de um grupo G. Então o grupo quociente $\frac{G}{H}$ é abeliano se, e somente se, $G' \subseteq H$.*

Observe que o item (3) do Lema 1.17 nos permite deduzir facilmente que G' é um subgrupo normal em G.

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Então H é chamado um *subgrupo característico* em G se

$$\sigma(H) \subseteq H, \ \forall \ \sigma \in \mathrm{Aut}(G).$$

Proposição 1.19 *Seja G um grupo.*

1. *Qualquer subgrupo característico em G é um subgrupo normal.*

2. *Se K é um subgrupo característico em H e H é um subgrupo característico em G, então K é um subgrupo característico em G.*

3. *Se K é um subgrupo característico em H e H é um subgrupo normal em G, então K é normal em G.*

4. *Se H é o único subgrupo em G de ordem n, então H é subgrupo característico em G.*

Para indicar que H é um subgrupo característico em G escreveremos $H \operatorname{car} G$. Como a conjugação por um elemento fixo h de G, $g \mapsto hgh^{-1}$, é um automorfismo de G temos que todo subgrupo característico é, em particular, um subgrupo normal. Note, ainda, que se ϕ é um automorfismo de G e H é um subgrupo característico em G, então a restrição $\phi|_H$ é um automorfismo de H. Portanto, segue facilmente que se $K \operatorname{car} H$ e $H \operatorname{car} G$, então $K \operatorname{car} G$.

Exemplos 1.20 *São exemplos de subgrupos característicos os seguintes subgrupos:*

1. *O bem conhecido* centro de G *definido por*

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G : gh = hg, \ \forall \ h \in G\}.$$

2. *O subgrupo de* Frattini *de G* $\operatorname{Frat}(G)$ *que é a interseção de todos os subgrupos maximais de G, se G possuir subgrupos maximais. Caso contrário, o subgrupo de Frattini de G é igual ao próprio G.*

Proposição 1.21 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Se $H \operatorname{car} G$, então $H' \operatorname{car} G$. Em particular, $G^{(n)} \operatorname{car} G$, para todo inteiro positivo n.*

Informalmente, pode-se pensar nos grupos solúveis como "aproximadamente" abelianos. Por exemplo, podemos considerar que um grupo G está "perto" de ser abeliano se ele contém um subgrupo normal H tal que tanto H quanto o quociente $\frac{G}{H}$ sejam abelianos. Generalizando esta idéia podemos formular a seguinte definição.

Um grupo G é chamado *solúvel* se existir uma cadeia de subgrupos

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

tal que

1. G_{i-1} é um subgrupo normal em G_i, para todo $i = 1, \ldots, n$.

2. O grupo fator $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ é abeliano, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Uma cadeia de subgrupos de G com estas propriedades é chamada uma *série subnormal abeliana* de G e os quocientes são chamados *fatores da série*. Como a normalidade não é necessariamente transitiva, os subgrupos G_i, não necessariamente, são normais em G, $1 \leq i \leq n-1$.

Exemplo 1.22 *Todo grupo abeliano é solúvel.*

Solução. Seja H um subgrupo qualquer de G. Como sabemos $H \lhd G$ e $\frac{G}{H}$ é abeliano. Assim, temos que a cadeia

$$\{e\} \subset H \subset G$$

é a cadeia desejada. ■

Forneceremos a seguir uma caracterização da solubilidade de um grupo em termos da sequência derivada.

Teorema 1.23 *Um grupo G é solúvel se, e somente se, sua sequência derivada é limitada, isto é, se existe um inteiro positivo n tal que*

$$G^{(n)} = \{e\}.$$

A partir da caracterização acima formaliza-se o seguinte resultado.

Lema 1.24 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G.*

1. *Se G é solúvel, então H é solúvel.*

2. *Qualquer imagem homomórfica de um grupo solúvel é solúvel.*

3. *Se H é um subgrupo normal em G tal que H e $\frac{G}{H}$ sejam solúveis, então G é solúvel.*

Se um grupo solúvel é finito, então ele contém uma cadeia subnormal abeliana muito especial.

Proposição 1.25 *Um grupo solúvel finito G contém uma série subnormal abeliana cujos fatores são todos cíclicos de ordem prima.*

Outra importante definição do nosso trabalho é a de grupos supersolúveis. Um grupo é dito *supersolúvel* se ele possui uma *sérire normal cíclica*, isto é, uma série de subgrupos normais cujos fatores são cíclicos. Grupos supersolúveis são obviamente solúveis, entretanto, grupos solúveis não são necessariamente supersolúveis. Como exemplo deste último fato, temos o grupo A_4 que não possui subgrupos cíclicos normais distintos de $\{e\}$.

Proposição 1.26 *Um fator principal de um grupo supersolúvel tem ordem prima e seu subgrupo maximal possui índice primo.*

Um grupo G é chamado *nilpotente* se ele contém uma série de subgrupos

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_{i-1} é normal em G e cada quociente $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ está contido no centro de $\frac{G}{G_{i-1}}$, $1 \leq i \leq n$. Esta série de subgrupos de G é chamada uma *série central* de G.

Uma vez que as condições da definição de nilpotência são, obviamente, mais restritivas que as da definição de solubilidade, é evidente que todo grupo nilpotente é, em particular, solúvel. Note que da definição acima implica que G_1 está contido no centro de G. Se $G_1 = \{e\}$ então G_2 está contido no centro e, assim, sucessivamente. Como a série central acaba, todo grupo nilpotente tem centro não trivial.

Exemplo 1.27 *Todo grupo abeliano é nilpotente.*

Forneceremos agora duas caracterizações alternativas para nilpotência. Para isso, definiremos indutivamente uma nova série de subgrupos:

$$\gamma_1(G) = G,\ \gamma_2(G) = G' \text{ e } \gamma_i(G) = \left[\gamma_{i-1}(G), G\right].$$

Precisaremos ainda de uma outra série, que definiremos também indutivamente, nos apoiando no conceito de centro de um grupo. Denotaremos

$$\zeta_0(G) = \{e\} \text{ e } \zeta_1(G) = \mathcal{Z}(G)$$

e definiremos indutivamente $\zeta_i(G)$ como sendo o único subgrupo de G tal que

$$\frac{\zeta_i(G)}{\zeta_{i-1}(G)} = \mathcal{Z}\left(\frac{G}{\zeta_{i-1}(G)}\right).$$

O subgrupo $\zeta_i(G)$ é chamado *i-ésimo centro* de G.

As sequências de subgrupos

$$\{e\} = \zeta_0(G) \subset \zeta_1(G) \subset \cdots \subset \zeta_n(G) \subset \cdots$$

e

$$G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \cdots \supset \gamma_n(G) \supset \cdots$$

são chamadas *série central superior* e *série central inferior* de G, respectivamente. Claramente, estas são séries centrais. A razão pela qual são chamadas de "superior" e "inferior" ficará clara a partir dos próximos resultados.

Lema 1.28 *Seja*

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \cdots$$

uma série central de G, isto é, uma cadeia de subgrupos normais tal que $\frac{A_i}{A_{i-1}} \subset \mathcal{Z}\left(\frac{G}{A_{i-1}}\right)$, para todo i. Então

$$A_i \subset \zeta_i(G),$$

para todo i.

Lema 1.29 *Seja*

$$\{e\} = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = G$$

uma série central de G*. Então*

$$\gamma_i(G) \subset A_{n-i+1},$$

para todo i*.*

Destes resultados vem a seguinte caracterização para grupos nilpotentes.

Teorema 1.30 *Seja* G *um grupo. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. G *é nilpotente*;

2. *Existe um inteiro positivo* m *tal que* $\zeta_m(G) = G$;

3. *Existe um inteiro positivo* n *tal que* $\gamma_n(G) = \{e\}$.

Também resulta dos lemas que se G é nilpotente, então as séries centrais superior e inferior de G têm o mesmo comprimento. A este número chamaremos *classe de nilpotência* de G.

Proposição 1.31 *Todo p-grupo finito é nilpotente.*

Proposição 1.32 *Produtos diretos finitos de grupos nilpotentes são também nilpotentes.*

Como sugestão para a demonstração deste resultado note que se $G = G_1 \times \cdots \times G_n$, então

$$\gamma_i(G) = \gamma_i(G_1) \times \cdots \times \gamma_i(G_n),$$

para todo índice i.

Proposição 1.33 *Seja* $H \neq \{e\}$ *um subgrupo normal de um grupo nilpotente* G*. Então*

$$H \cap \mathcal{Z}(G) \neq \{e\}.$$

Agora mostraremos que existe um teorema de estruturação para os grupos nilpotentes finitos. Para isso, verificaremos uma propriedade importante dos grupos nilpotentes, que vale também no caso em que o grupo em questão não seja finito. Um grupo G tem a *propriedade do normalizador* se todo subgrupo próprio de G está estritamente contido no seu normalizador.

Proposição 1.34 *Seja* H *um subgrupo próprio de um grupo nilpotente* G*. Então*

$$H \subsetneq \mathcal{N}_G(H),$$

ou seja, se G *é nilpotente ele tem a propriedade do normalizador.*

Lembremos que um subgrupo H de um grupo G é chamado *subnormal* se existe uma cadeia de subgrupos:

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$$

tal que $H_{i-1} \lhd H_i$, $1 \leq i \leq n$.

Corolário 1.35 *Seja G um grupo nilpotente finito. Então todo subgrupo de G é subnormal.*

Forneceremos agora um teorema de caracterização para os grupos nilpotentes finitos.

Teorema 1.36 *Seja G um grupo finito. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *G é nilpotente;*
2. *G tem a propriedade do normalizador;*
3. *Todo subgrupo de Sylow de G é normal em G;*
4. *G é o produto direto dos seus subgrupos de Sylow;*
5. *Todo subgrupo de G é subnormal;*
6. *Todo subgrupo maximal de G é normal.*

Note que o teorema afirma que se G é um grupo nilpotente de ordem

$$|G| = p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t},$$

então, denotando por S_{p_i}, $1 \leq i \leq n$ os p_i-subgrupos de Sylow de G, temos que

$$G = S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_n}.$$

O *subgrupo de Fitting* de um grupo finito G, denotado por

$$\mathrm{Fit}\,(G)\,,$$

é o maior subgrupo normal nilpotente de G.

Teorema 1.37 *Se G é um grupo supersolúvel, então* $\mathrm{Fit}\,(G)$ *é nilpotente e* $\frac{G}{\mathrm{Fit}(G)}$ *é um grupo abeliano finito. Em particular, G' é nilpotente.*

Dados um grupo finito G e p um número primo divisor da ordem de G, sabemos que um *p-subgrupo de Sylow* de G é um subgrupo de G cuja ordem é tal que

$$p^k \mid |G| \text{ mas } p^{k+1} \nmid |G|\,,$$

com $k \in \mathbb{Z}_+$. Faremos agora uma generalização desta definição.

Se π é um conjunto não vazio de números primos, então um π-*número* é um inteiro n tal que todos os seus fatores primos pertencem a π. O complementar de π no conjunto de números primos é denotado por π' e, assim, um π'-*número* é um inteiro m tal que nenhum de seus fatores primos pertence a π.

Seja G um grupo finito. Então G é chamado um π-*grupo* se a ordem de cada um de seus elementos é um π-número.

Se G é um grupo finito, então um π-subgrupo H de G tal que $[G : H]$ é um π'-número é chamado de π-*subgrupo de Hall* de G.

Sabemos que os p-subgrupos de Sylow sempre existem, e que são conjugados entre si. Entretanto, os π-subgrupos de Hall nem sempre existem. Por exemplo, sejam $G = A_5$ e $\pi = \{3, 5\}$. Como $|A_5| = 60$, um π-subgrupo de Hall teria índice 4 e ordem 15, mas não existe tal subgrupo. Queremos estudar condições sob as quais tais subgrupos existem e, quando existirem, se são conjugados entre si. O próximo resultado afirma que em um grupo solúvel finito, π-subgrupos de Hall sempre existem e são conjugados entre si.

Teorema 1.38 (P. Hall) *Se G é um grupo solúvel finito de ordem mn, com*

$$\mathrm{mdc}\,(m, n) = 1,$$

então G contém um subgrupo de ordem m. Além disso, quaisquer dois subgrupos de ordem m são conjugados.

Este teorema de P. Hall nos diz que em grupos solúveis finitos, π-subgrupos de Hall sempre existem, para todo conjunto de primos. A seguir veremos que vale a recíproca deste teorema.

Teorema 1.39 (P. Hall) *Se G é um grupo finito que possui um p'-subgrupo de Hall, para todo primo p, então G é solúvel.*

Teorema 1.40 *Um grupo finito G é solúvel se, e somente se, todo subgrupo de Sylow de G possui complementar em G.*

Teorema 1.41 (Teorema de Shur-Zassenhaus) *Sejam G um grupo finito e H um π-subgrupo normal em G. Então G contém um π'-subgrupo K, que é um complementar de H em G. Além disso, se H ou $\frac{G}{H}$ é solúvel, então quaisquer dois π'-subgrupos de G são conjugados em G.*

A hipótese de que N é normal não pode ser retirada do teorema. De fato, sejam $G = A_5$ e N um 2-subgrupo de Sylow de G; logo $|N| = 4$, $[G : N] = 15$ e $\mathrm{mdc}\,(4, 15) = 1$. Portanto, G está nas condições do teorema, porém, $G = A_5$ não possui subgrupo de ordem 15. Concluímos, desta forma, que se N não for normal, o resultado nem sempre é válido.

Capítulo 2

Grupos injetivos

A teoria dos grupos abelianos é uma parte importante na teoria de grupos, mas, além da propriedade comutativa, esta categoria de grupos possui outras propriedades que serão de grande relevância para o nosso propósito. Em todo este capítulo, todos os grupos serão abelianos, portanto, novamente adotaremos a notação aditiva.

2.1 Grupos divisíveis

Dizemos que G é um *grupo divisível* se para cada $g \in G$ e cada $n \in \mathbb{Z}^*$ existe $h \in G$ tal que

$$g = nh,$$

isto é, se a função $\varphi : G \to G$, definida por

$$\varphi(g) = ng,$$

é sobrejetora, para cada $n \in \mathbb{Z}^*$.

Note que um quociente de um grupo divisível é também divisível. Como todo subgrupo H de G é normal em G e G é divisível temos que

$$g + H = nh + H = n(h + H),$$

com $h \in G$ e $n \in \mathbb{Z}_+$.

Exemplos 2.1

1. *Entre os grupos divisíveis infinitos mais conhecidos estão:* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ *e* $\mathbb{R}_+$.

2. *Nenhum grupo finito não trivial é divisível.*

Observemos que um subgrupo de um grupo divisível não necessariamente é divisível. Por exemplo: $\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Q}$ mas, enquanto $\mathbb{Q}$ é divisível, $\mathbb{Z}$ não o é.

Observemos, também, que se

$$G = H \oplus K$$

e G é divisível, então H e K também o são. É possível estender este argumento para uma soma direta de uma quantidade arbitrária de subgrupos.

A recíproca deste resultado também é válida, como veremos a seguir.

Proposição 2.2 *Se os grupos G_i, com $i \in I$, são divisíveis, então*

$$G = \sum_{i \in I} G_i$$

é um grupo divisível.

Prova. Consideremos $n \in \mathbb{Z}_+$ e

$$g \in G = \sum_{i \in I} G_i.$$

Como

$$g = g_1 + \cdots + g_k$$

e cada G_i é divisível temos que existem $h_1 \in G_1, \ldots, h_k \in G_k$ tais que

$$g_1 = nh_1, \ldots, g_k = nh_k.$$

Então

$$g = nh_1 + \cdots + nh_k = n\left(h_1 + \cdots + h_k\right).$$

Portanto, G é divisível. ■

Proposição 2.3 (p-grupos de Prüfer) *Seja p um número primo fixado. Então todos os subgrupos do grupo*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}(p^\infty) &= \left\{ \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} : a \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ n \in \mathbb{Z}_+ \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z} \ , \ 0 \leq a < p^n \ \text{ e } \ n \in \mathbb{Z}_+ \right\} \end{aligned}$$

são da forma

$$C_n = \left\langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right\rangle,$$

com $n \in \mathbb{Z}_+$. Em particular,

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n$$

e $\mathbb{Z}(p^\infty)$ é um grupo divisível. O grupo $\mathbb{Z}(p^\infty)$ é chamado p-grupo de Prüfer.

Prova. É claro que

$$C_n = \left\langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right\rangle = \left\{ 0, \frac{1}{p^n}, \frac{2}{p^n}, \ldots, \frac{p^n - 1}{p^n} \right\}, \ \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

é um subgrupo próprio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ com $|C_n| = p^n$. Note que $C_n \subseteq C_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Reciprocamente, seja H um subgrupo próprio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Vamos provar primeiro que

$$\frac{a}{p^m} + \mathbb{Z} \in H - \{\mathbb{Z}\}, \text{ com } \operatorname{mdc}(a,p) = 1 \ \Rightarrow \frac{b}{p^n} + \mathbb{Z} \in H, \ \forall\ b \in \mathbb{Z}, \text{ com } n \leq m,$$

ou seja,

$$\left\{0, \frac{1}{p^n}, \frac{2}{p^n}, \dots, \frac{p^n - 1}{p^n}\right\} \subseteq H.$$

De fato, como $\operatorname{mdc}(a,p) = 1$ temos que existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ar + sp^m = 1$. Logo, para todo $b \in \mathbb{Z}$ e $n \leq m$, obtemos

$$b = b \cdot 1 = abr + bsp^m \Rightarrow \frac{b}{p^n} = bp^{m-n} r \frac{a}{p^m} + bsp^{m-n}.$$

Assim,

$$\frac{b}{p^n} + \mathbb{Z} = bp^{m-n} r \left(\frac{a}{p^m} + \mathbb{Z}\right) \in H.$$

Portanto, existe um menor inteiro $k \in \mathbb{N}$ $(H \neq \mathbb{Z}(p^\infty))$ tal que

$$H = \left\{\frac{a}{p^m} + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } m \leq k\right\} \text{ e } H \subseteq C_k.$$

Logo, todo subgrupo próprio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ é da forma desejada.

Finalmente, dados $g \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, com $k = p^r l$ e $\operatorname{mdc}(p, l) = 1$. Logo,

$$g = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 \leq a < p^n.$$

Seja

$$g_1 = \frac{a}{p^{n+r}} + \mathbb{Z}.$$

Então $p^r g_1 = g$. Como $\operatorname{mdc}\left(p^{n+r}, l\right) = 1$ temos que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$xp^{n+r} + yl = 1.$$

Logo,

$$g_1 = g_1 \cdot 1 = g_1\left(xp^{n+r} + yl\right) = xp^{n+r} g_1 + lyg_1 = lyg_1.$$

Pondo $h = yg_1$, obtemos

$$kh = p^r lyg_1 = p^r g_1 = g.$$

Portanto, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ é divisível. ■

Proposição 2.4 *Sejam p um número primo fixado e*

$$C_0 = \{0\} \leq C_1 \leq C_2 \leq \cdots \leq C_n \leq \cdots$$

uma cadeia de grupos cíclicos de ordem p^n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Então o grupo

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n,$$

é isomorfo a $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Prova. Vamos provar primeiro que: podemos escolher elementos a_n tais que $C_n = \langle a_n \rangle$ e $pa_{n+1} = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Suponhamos, como hipótese de indução, que escolhemos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que $pa_{i+1} = a_i$, $i = 0, \ldots, n-1$ e $C_i = \langle a_i \rangle$, $i = 0, \ldots, n$. Seja $C_{n+1} = \langle a \rangle$. Então $H = \langle pa \rangle$ é um grupo cíclico de ordem p^n, pois

$$p^n(pa) = p^{n+1}a = 0.$$

Assim, $H = C_n$. Logo, $a_n = r(pa)$, para algum $r \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, r) = 1$. Como $|a_n| = p^n$ temos que $C_{n+1} = \langle ra \rangle$. Pondo $a_{n+1} = ra$, obtemos $pa_{n+1} = a_n$. Portanto, é possível escolher elementos $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tais que $C_n = \langle a_n \rangle$ e $pa_{n+1} = a_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja $\sigma : G \to \mathbb{Z}(p^\infty)$ a função definida por

$$\sigma(xa_n) = \frac{x}{p^n} + \mathbb{Z}, \ \forall \ x \in \mathbb{Z}.$$

Então σ está bem definida, pois dados $xa_m, ya_n \in G$ com $m \leq n$, obtemos $p^{n-m}a_n = a_m$. Logo,

$$xa_m = ya_n \Rightarrow (y - xp^{n-m})a_n = 0.$$

Assim, $y - xp^{n-m} = kp^n$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pois $|a_n| = p^n$. Portanto,

$$\frac{y}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{xp^{n-m} + kp^n}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{x}{p^m} + \mathbb{Z} \Rightarrow \sigma(xa_m) = \sigma(ya_n).$$

Agora, vamos provar que σ é um homomorfismo de grupos. Dados $a, b \in G$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a, b \in C_n$. Logo, existem $x, y \in \mathbb{Z}$.tais que $a = xa_n$ e $b = ya_n$. Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(a+b) &= \sigma(xa_n + ya_n) = \sigma((x+y)a_n) \\ &= \frac{x+y}{p^n} + \mathbb{Z} = \left(\frac{x}{p^n} + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{y}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \\ &= \sigma(a) + \sigma(b). \end{aligned}$$

Portanto, σ é um homomorfismo de grupos. É claro que σ é um epimorfismo.

Finalmente,

$$a \in \text{Ker}(\sigma) \Leftrightarrow \sigma(a) = \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists \ x \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ tais que } \sigma(xa_n) = \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{p^n} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Logo, p^n é um divisor de x. Portanto, $a = xa_n = 0$, isto é, $\text{Ker}(\sigma) = \{0\}$ e σ é um monomorfismo. ■

Observemos que o p-grupo de Prüfer pode ser entendido como o p-subgrupo de Sylow de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, que consiste de todos o elementos de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ cuja ordem é uma potência de p.

Proposição 2.5 *Sejam G um grupo e D um subgrupo divisível de G. Então D é um subgrupo característico em G.*

Prova. Sejam $d \in D$ e

$$\varphi \in \text{Aut}(D).$$

Como D é divisível existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$g = nh,$$

para algum $h \in G$. Então

$$\varphi(g) = \varphi(nh) = n\varphi(h).$$

Portanto, D é um subgrupo característico em G. ■

2.2 Grupos injetivos

Um grupo G é chamado *injetivo* se, dados um monomorfismo de grupos $\mu : H \to K$ e um homomorfismo de grupos $\alpha : H \to G$, com H e K grupos, existe um homomorfismo de grupos

$$\beta : K \to G$$

tal que

$$\alpha = \beta \circ \mu,$$

em outras palavras, tal que o diagrama

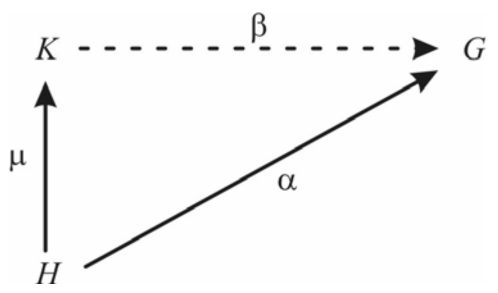

Figura 2.1: Diagrama

comuta.

Como μ é injetiva temos que

$$H \simeq \mathrm{Im}(\mu) < K.$$

Suponhamos que, de fato, H seja subgrupo de K e μ seja a aplicação inclusão, então a afirmação de que G seja injetivo implica que o homomorfismo de grupos $\alpha : H \to G$ pode ser estendido a um homomorfismo de grupos $\beta : K \to G$, de modo que

$$\alpha = \beta|_H.$$

Teorema 2.6 (Baer) *Um grupo G é injetivo se, e somente se, ele é divisível.*

Prova. Suponhamos que G seja injetivo e consideremos g um elemento qualquer de G e $n \in \mathbb{Z}^*$. A função

$$\alpha : n\mathbb{Z} \to G$$

definida por $\alpha(nx) = xg$ é um homomorfismo de grupos. Se $i : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é a aplicação inclusão, então, por hipótese, existe um homomorfismo de grupos $\beta : \mathbb{Z} \to G$ tal que $\alpha = \beta \circ i$. Logo,

$$g = \alpha(n) = (\beta \circ i)(n) = \beta(n) = n\beta(1) = nh,$$

com $h = \beta(1)$. Portanto, G é divisível.

Reciprocamente, suponhamos que G seja divisível. Dados grupos H, K, um monomorfismo $\mu : H \to K$ e um homomorfismo $\alpha : H \to G$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que H é um subgrupo de K, pois podemos identificar H com $\operatorname{Im}(\mu)$. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as extensões parciais $\gamma : L \to G$ de α, isto é, se $H < L < K$, então

$$\gamma(h) = \alpha(h),$$

para todo $h \in H$. Dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}$, definimos

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow L_1 < L_2 \text{ e } \gamma_1 = \gamma_2|_{L_1}.$$

É fácil verificar que $\leq$ é uma ordem parcial sobre $\mathcal{S}$. Seja $\mathcal{C} = \{\gamma_i : L_i \to G : i \in I\}$ uma cadeia qualquer de $\mathcal{S}$. Faça

$$L = \bigcup_{i \in I} L_i.$$

Então é fácil verificar que L é um subgrupo maximal de G. Seja $\gamma : L \to G$ definida por $\gamma(x) = \gamma_i(x)$. Então é claro que $\gamma \in \mathcal{S}$ e γ é uma cota superior de $\mathcal{C}$. Assim, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{S}$ contém um elemento maximal, digamos $\beta : L \to G$.

Afirmação. $L = K$.

De fato, se $L \neq K$, então existe $k \in K$ tal que $k \notin L$. Logo, $M = L + \langle k \rangle < K$. Então $L \subset M$, o que contradiz a maximalidade de L.

Se

$$L \cap \langle k \rangle = \{0\},$$

então $M = L \oplus \langle k \rangle$ e $\beta_1 : M \to G$ definida por

$$\beta_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \langle k \rangle \\ \beta(x), & \text{se } x \in L, \end{cases}$$

é tal que $\beta = \beta_1|_L$ o que contradiz a maximalidade de β. Se

$$L \cap \langle k \rangle \neq \{0\},$$

então existe um menor inteiro positivo m tal que $mk \in L$. Suponhamos que β "leva" mk em $g \in G$. Como G é divisível temos que $g = mg_1$, para algum $g_1 \in G$. Agora, todo elemento de M pode ser escrito de modo único sob a soma

$$x + tk, \text{ com } x \in L \text{ e } 0 \leq t < m,$$

pois m é mínimo. Assim, podemos definir uma função $\beta_2 : M \to G$ por

$$\beta_2 (x + tk) = \beta (x) + tg_1.$$

Verifica-se facilmente que β_2 é um homomorfismo de grupos tal que $\beta = \beta_2|_L$ o que contradiz a maximalidade de β. Portanto, G é um grupo injetivo ■

A consequêcia mais importante do teorema anterior é a propriedade do fator de soma direta dos grupos divisíveis.

Corolário 2.7 *Se D é um subgrupo divisível de um grupo G, então*

$$G = D \oplus E,$$

para algum subgrupo E.

Prova. Consideremos a aplicação inclusão $i : D \to G$. Como D é um grupo divisível temos, pelo Teorema 2.6, que D é um grupo injetivo. Assim, para cada homomorfismo de grupos $\alpha : D \to D$, existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \to D$ tal que

$$\alpha = \beta \circ i = \beta|_D.$$

Em particular, isto vale para $\alpha = I_D$. Assim,

$$\beta (d) = I_D (d) = d,$$

para todo $d \in D$. Se $g \in G$, então $\beta (g) \in D$. Assim,

$$\beta (\beta (g)) = \beta (g),$$

ou seja,

$$\beta^2 (g) = \beta (g).$$

Logo, $(g - \beta (g)) \in \operatorname{Ker} (\beta) = E$. Portanto,

$$G = D + E.$$

pois $g = \beta (g) + (g - \beta (g))$, para todo $g \in G$.

Finalmente, seja $d \in D \cap E$. Como $d \in D$ temos que $d = \beta (d)$. Por outro lado, $d \in E = \operatorname{Ker} (\beta)$. Logo, $d = \beta (d) = 0$. Portanto, $G = D \oplus E$. ■

Em outras palavras, o que o corolário acima afirma é que se um grupo G possui um subgrupo divisível, este subgrupo é um fator de soma direta de G.

Um grupo G chama-se *reduzido* se não possui subgrupos divisíveis não triviais. O *subgrupo divisível maximal* de G é a união de todos os subgrupos divisíveis de G e será denotado por $d (G)$.

Teorema 2.8 *Seja G um grupo. Então existe um único subgrupo divisível maximal de G. Além disso,*

$$G = d(G) \oplus E,$$

com E um grupo reduzido.

Prova. Pelo Corolário 2.7,

$$G = d(G) \oplus E,$$

para algum E. Note que $E = d(E) \oplus K$, para algum K. Assim,

$$G = d(G) \oplus d(E) \oplus K.$$

Mas

$$d(G) \oplus d(E)$$

é divisível e $d(G)$ é seu subgrupo divisível maximal. Logo,

$$d(E) = \{0\}.$$

Portanto, E é reduzido. ■

Observe que se $d(G) = G$ então G é divisível e se $d(G) = \{0\}$, então G é reduzido.

Exemplo 2.9 $d(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ *e* $d(\mathbb{Q}^*) = \mathbb{Q}^+$.

Lema 2.10 *Se G é um grupo livre de torção, $n \in \mathbb{N}$ e $h, h' \in G$ tais que $nh = nh'$, então $h = h'$.*

Prova. Como $nh = nh'$ temos que

$$n(h - h') = nh - nh' = 0 \Rightarrow h - h' = 0,$$

pois G é livre de torção. Portanto, $h = h'$. ■

Teorema 2.11 *Seja G um grupo livre de torção. Então G é divisível se, e somente se, G é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Em particular, G é uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$.*

Prova. Sejam $g \in G$ e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Como G é divisível e livre de torção existe um único $h \in G$ tal que $g = nh$. Definamos uma composição externa $*$ sobre G, $* : \mathbb{Q} \times G \to G$, por

$$\frac{m}{n} * g = mg = \begin{cases} (m-1)g + g, & \text{se } m > 0 \\ 0, & \text{se } m = 0 \\ (-m)(-g) = (m+1)g - g, & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Então é fácil verificar que G é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

Reciprocamente, suponhamos que G seja um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Dado $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, existe

$$h = \frac{1}{n} \cdot g \in G$$

tal que $nh = g$. Portanto, G é um grupo divisível. ■

Lema 2.12 *O subgrupo de torção de um grupo divisível G é também divisível.*

Prova. Suponhamos que G seja divisível. Sejam

$$g \in \mathcal{T}(G)$$

e m a ordem de g, ou seja, $mg = 0$. Como G é divisível temos que, para cada $n \in \mathbb{Z}^*$, existe $h \in G$ tal que $g = nh$. Assim,

$$(nm)\,h = m\,(nh) = mg = 0$$

e $h \in \mathcal{T}(G)$. Portanto, $\mathcal{T}(G)$ é divisível. ■

Teorema 2.13 *Se G é um p-grupo divisível, então G é uma soma direta de p-grupos de Prüfer.*

Prova. Seja G um p-grupo divisível não trivial. Note que G possui um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Sejam $g_1 \in G$ de ordem p e $C_1 = \langle g_1 \rangle$ o grupo cíclico gerado por g_1. Escolha $g_2 \in G$ tal que $pg_2 = g_1$. Então $C_2 = \langle g_2 \rangle$ é um grupo cíclico de ordem p^2 com $C_1 \leq C_2$ .Prosseguindo dessa forma, obtemos uma cadeia

$$C_0 = \{0\} \leq C_1 \leq C_2 \leq \cdots \leq C_n \leq \cdots$$

de grupos cíclicos de ordem p^n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Seja

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n.$$

Então, pela Proposição 2.4, C é isomorfo a $\mathbb{Z}(p^\infty)$ e C é um grupo divisível. Portanto, é um fator de soma direta de G.

Agora, seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os subgrupos de G que sejam isomorfos a $\mathbb{Z}(p^\infty)$ e seja

$$T = \left\{ X \subseteq \mathcal{S} : \sum_{i \in I} H_i \text{ existe, } \forall \ H_i \in X \right\}.$$

Então, pelo Lema de Zorn, T possui um elemento maximal, digamos X_0. Seja

$$H = \sum_{i \in I} H_i, \ \ H_i \in X_0,$$

Então, pela Proposição 2.2, H é um subgrupo divisível de G. Assim,

$$G = H \oplus K,$$

para algum K.

Afirmação. $K = \{0\}$.

De fato, se $K \neq \{0\}$, então K contém um subgrupo P isomorfo a $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Logo,

$$X_0 \cup \{P\} \in T,$$

o que contradiz a maximalidade de X_0. Portanto, G é uma soma direta de cópias de $\mathbb{Z}(p^\infty)$.■

Agora é possível caracterizar os grupos divisíveis. O teorema seguinte descreve completamente a classe dos grupos divisíveis.

Teorema 2.14 (Decomposição dos Grupos Divisíveis) *Todo grupo divisível G é soma direta de p-grupos de Prüfer e de cópias de $\mathbb{Q}$.*

Prova. Seja G um grupo divisível. Então

$$G = \mathcal{T}(G) \oplus H,$$

com H livre de torção. Pelo Teorema 2.11, H é isomorfo a uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$. Sabemos que $\mathcal{T}(G)$ é soma direta de p-grupos divisíveis. Logo, pelo Teorema 2.13, cada um desses p-grupos divisíveis é uma soma de cópias de $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Portanto, todo grupo divisível é soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Z}(p^\infty)$. ■

2.3 Subgrupos puros

Sejam G um grupo e P um subgrupo de G. Então P é chamado *subgrupo puro* de G se para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$P \cap nG = nP.$$

É sempre verdade que

$$nP \subseteq P \cap nG.$$

Se $p \in P \cap nG$, então $p \in nP$, isto é, se $p \in P$ e $p = ng$, para algum $g \in G$, então existe $p' \in P$ tal que

$$p = np'.$$

Proposição 2.15 *Seja G um grupo. Todo fator de soma direta de G é um subgrupo puro.*

Prova. Seja $G = H \oplus K$. Se $h \in H$ e $h = ng$, então $g = h' + k'$, com $h' \in H$ e $k' \in K$. Assim,

$$ng = nh' + nk' \Rightarrow h = nh' + nk'.$$

Logo,

$$nk' = h - nh' \in H \cap K = \{0\}.$$

Portanto, P é um subgrupo puro. ■

Proposição 2.16 *Sejam G um grupo e P um subgrupo de G tal que $\frac{G}{P}$ é livre de torção. Então P é puro.*

Prova. Se

$$p = ng,$$

então

$$g + P \in \frac{G}{P}$$

possui ordem finita. Como $\frac{G}{P}$ é livre de torção,

$$g + P = P.$$

Logo $g \in P$. $\blacksquare$

Sejam G um grupo de torção e B um subgrupo de G. Então B é chamado *subgrupo básico* de G se:

1. B é uma soma direta de grupos cíclicos.

2. B é um subgrupo puro de G.

3. $\frac{G}{B}$ é um grupo divisível.

Seja G um grupo. Então G é chamado um grupo *limitado* se

$$nG = \{0\},$$

para algum $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.17 (Prüfer-Baer) *Seja G um grupo limitado. Então G é uma soma direta de grupos cíclicos.*

Capítulo 3

Grupos quasi-injetivos finitos

Neste capítulo trataremos do principal objeto do nosso trabalho, os grupos quasi-injetivos finitos. A definição de tais grupos foi motivada a partir do fato de não existirem grupos injetivos não triviais de ordem finita. Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em [9].

A palavra grupo, neste capítulo, significa, salvo menção em contrário, grupo finito. A partir deste ponto usaremos a notação mais conveniente, aditiva ou multiplicativa, para cada caso em questão.

3.1 Resultados básicos

Neste seção apresentaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de grupos que serão necessários para as seções subsequentes, o leitor interessado em mais detalhes pode consultar [7, 10, 12].

Teorema 3.1 (N/C Lema) *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Então*:

1. *$\mathcal{C}_G(H)$ é um subgrupo normal em $\mathcal{N}_G(H)$ e*

$$\frac{\mathcal{N}_G(H)}{\mathcal{C}_G(H)} \simeq K \leq \mathrm{Aut}\,(H)\,.$$

2. *$\mathrm{Inn}(G)$ é um subgrupo normal em $\mathrm{Aut}\,(G)$ e*

$$\frac{G}{\mathcal{Z}(G)} \simeq \mathrm{Inn}(G).$$

Exemplo 3.2 *Se $G = Q_8$ é o grupo dos quatérnios de ordem 8, então existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $\varphi \notin \mathrm{Inn}(G)$ e $\varphi^2 = I_G$.*

Solução. Como

$$\frac{G}{\mathcal{Z}(G)} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle x, y \rangle$, com $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ e $x^2 = y^2 = (0,0)$, temos que

$$G = \{H, aH, bH, abH\},$$

com $H = \mathcal{Z}(G)$ e $G' = H$. Assim, a função $\varphi : G \to G$ definida por $\varphi(a) = a^{-1}$, $\varphi(b) = b^{-1}$ e $\varphi(z) = z^{-1}$, para todo $z \in H$, é um automorfismo de G e

$$\varphi^2 = I_G, \ \ \varphi \in \mathcal{C}_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G)) \ \text{ e } \ \varphi_y(x) = x[x, y],$$

que é o resultado desejado. ∎

Proposição 3.3 *Sejam $\alpha : G \to H$ um homomorfismo de grupos e P um subgrupo de G. Se $\alpha = \beta|_P$, então*

$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta) \cap P.$$

Sejam G um grupo e H um subgrupo em G. Dizemos que H é *completamente invariante* em G se para todo endomorfismo de grupos $\phi : G \to G$ temos que $\phi(H) \subseteq H$. Observe que se H é completamente invariante em G, então H é um subgrupo característico (normal) em G.

Exemplo 3.4 *Seja G um grupo. Então, pelo item* (4) *do Lema* 1.17*, o subgrupo derivado G' de G é completamente invariante em G.*

Sejam G um grupo e H um subgrupo normal em G. Dizemos que um subgrupo K de G é um *fator direto* de H em G se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $H \cap K = 1$.

2. $G = HK$.

Note que se os fatores existem para um subgrupo H, então eles são únicos, a menos de isomorfismo, pois

$$\frac{G}{H} = \frac{HK}{H} \simeq \frac{K}{H \cap K} = K.$$

Sejam G um grupo e M um subgrupo de G. Dizemos que M é um *subgrupo minimal* de G se $M \neq 1$ e se K é um subgrupo de G tal que se $1 \subseteq K \subseteq M$, então $K = 1$ ou $K = M$. Por exemplo, se $G = \{1, a, b, c\}$, com $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, então $M = \{1, a\}$ é um subgrupo minimal de G.

Seja G um grupo abeliano. Dizemos que G é *abeliano elementar* se todos os elementos de G diferentes da identidade são de ordem p, para algum número primo p. Neste caso, $|G| = p^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5 *Se G é um grupo solúvel finito e H é um subgrupo normal minimal em G, então H é um p-grupo abeliano elementar, para algum número primo p.*

Solução. É fácil verificar que

$$\sigma(H') \subseteq H',$$

para todo $\sigma \in \operatorname{End}(H)$, ou seja, H' é completamente invariante em H. Em particular, H' é característico em H. Logo, H' é um subgrupo normal em G, pois H é normal em G. Assim, por hipótese,

$$H' = 1 \text{ ou } H' = H.$$

Como H é solúvel temos que $H \neq H'$. Assim, $H' = 1$ e H é um grupo abeliano. Seja P um p-subgrupo de Sylow não trivial de H, para algum número primo p. Como P é um subgrupo normal em H temos que

$$\sigma(P) \subseteq P,$$

para todo $\sigma \in \operatorname{End}(H)$. Assim, P é um subgrupo normal em G. Portanto, pela minimalidade de H, temos que $H = P$. ■

Seja G um grupo. Dizemos que uma cadeia subnormal em G,

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

é uma *série principal* ou uma *série chief* para G se $G_i \neq G_{i+1}$ e G_i é um subgrupo normal maximal em G, $i = 0, \ldots, n-1$.

Proposição 3.6 *Seja G um grupo solúvel finito. Então os fatores de toda série chief de G são grupos abelianos elementares.*

Prova. Vamos usar indução sobre o comprimento da série chief. Seja

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$$

uma série chief para G. Se $n = 2$, então G_1 é um subgrupo normal minimal em G, pois não existe $K \lhd G$ tal que $1 \subseteq K \subseteq G_1$. Logo, pelo Exemplo 3.5,

$$G_1 = \frac{G_1}{G_0}$$

é um grupo abeliano elementar. Suponhamos que o resultado seja válido para todo m, com $1 < m < n$. Então, pelo Teorema da Correspondência,

$$1 = \frac{G_1}{G_1} \subseteq \cdots \subseteq \frac{G_{n-1}}{G_1} \subseteq \frac{G_n}{G_1} = \frac{G}{G_1}$$

é uma série chief para $\frac{G}{G_1}$. Como

$$\left|\frac{G}{G_1}\right| < |G|$$

temos que

$$\frac{\frac{G_{i+1}}{G_1}}{\frac{G_i}{G_1}}, \; i = 1, \ldots, n-1,$$

são grupos abelianos elementares. Mas, pelo Terceiro Teorema de Isomorfismo,

$$\frac{\frac{G_{i+1}}{G_1}}{\frac{G_i}{G_1}} \simeq \frac{G_{i+1}}{G_i},\ \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Portanto, os fatores são grupos abelianos elementares. ■

Corolário 3.7 *Seja G um grupo supersolúvel finito. Então os fatores de toda série chief de G são grupos abelianos elementares.*

Seja G um p-grupo abeliano. Dizemos que G é um grupo *homocíclico* se G é um produto direto de subgrupos cíclicos H_i, com $|H_i| = p^n$ e $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo,

$$G = \mathbb{Z}_{p^n} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^n},$$

com k fatores.

Observemos que Q_8 possui todos os subgrupos normais. Tais grupos são conhecidos como grupos de *Dedekind*. Como exemplos de grupos de Dedekind temos toda a classe dos gupos abelianos. Se um grupo não é abeliano e, ainda assim, possui todos os subgrupos normais, ele é chamado *Hamiltoniano.*

Teorema 3.8 *Um grupo G é Hamiltoniano se, e somente se,*

$$G = A + B + D,$$

com A um grupo dos quatérnios, B um 2-grupo abeliano elementar e D um grupo de torção cujos elementos são todos de ordem ímpar.

Teorema 3.9 (Argumento de Frattini) *Sejam G um grupo finito e K um subgrupo normal em G. Se P é um p-subgrupo de Sylow de K, para algum número primo p, então*

$$G = K\mathcal{N}_G(P).$$

Em particular, se G é um p-grupo finito, então

$$G = G'G_p.$$

Corolário 3.10 *Seja G um p-grupo finito, para algum número primo p. Então*

$$\frac{G}{\mathrm{Frat}\,(G)}$$

é um grupo abeliano elementar.

Teorema 3.11 *Sejam G um grupo, P um p-subgrupo de Sylow de G abeliano e $N = \mathcal{N}_G\,(P)$. Então*:

1.

$$P \cap G' = P \cap N' \text{ ou } P = (P \cap N') \times (P \cap \mathcal{Z}(N)).$$

2. O p-grupo quociente maximal de G é isomorfo a $P \cap \mathcal{Z}(G)$.

Teorema 3.12 (Torre de Sylow) *Seja G um grupo supersolúvel de ordem*

$$|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k},$$

com p_i um número primo e $p_i > p_{i+1}$, para cada $i = 1, \ldots, r$. Então, para cada k, temos que

$$P_1 P_2 \cdots P_k$$

é um subgrupo normal em G.

Sejam p um número primo e $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos o grupo $\Omega_{p^k}(G)$ por

$$\Omega_{p^k}(G) = \left\langle g \in G : g^{p^k} = 1 \right\rangle.$$

Teorema 3.13 *Sejam G um p-grupo abeliano e $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Se*

$$\sigma|_{\Omega_p(G)} = I_G,$$

então $\sigma = I_G$.

3.2 Grupos quasi-injetivos

Nesta seção apresentaremos uma caracterização para os grupos quasi-injetivos finitos.

Um grupo G é chamado *quasi-injetivo* se para qualquer subgrupo H de G e para qualquer homomorfismo de grupos $\alpha : H \to G$ existe um endomorfismo $\beta : G \to G$ tal que

$$\beta|_H = \alpha.$$

Note que um grupo G é quasi-injetivo quando todo homomorfismo de grupos, de qualquer um de seus subgrupos nele mesmo, pode ser estendido a um endomorfismo global.

Exemplo 3.14 *O grupo dos quatérnios Q_8 é quasi-injetivo.*

Solução. Seja $Q_8 = \langle a, b \rangle$ com $b^4 = a^4 = e$ e $a^b = a^{-1}$. Então qualquer endomorfismo $\beta : Q_8 \to Q_8$ é completamente determinado por $\beta(a)$ e $\beta(b)$. Os subgrupos próprios de Q_8 são: $\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \langle (ab)^2 \rangle$, $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ e $\langle ab \rangle$. Portanto, dado qualquer subgrupo H de Q_8 e qualquer homomorfismo de grupos $\alpha : H \to Q_8$ é fácil verificar que existe um endomorfismo $\beta : Q_8 \to Q_8$ tal que $\beta|_L = \alpha$. ■

Lema 3.15 *Seja G um grupo quasi-injetivo.*

1. *Se H é um fator direto de G, então H é quasi-injetivo.*

2. *Se H é um subgrupo completamente invariante de G, então H é quasi-injetivo.*

3. *Se um subgrupo completamente invariante H de G possui um elemento de ordem n, então H contém todos os elementos de ordem n.*

Prova. (1) Suponhamos que H seja um fator direto de G. Então existe um subgrupo K de G tal que $G = HK$ e $H \cap K = 1$. Consideremos as funções $i : H \to G$ definida por $i(h) = h$ e $p : G \to H$ definida por $p(hk) = h$. Logo,

$$(p \circ i)(h) = p(i(h)) = p(h) = h, \ \forall \ h \in H,$$

isto é, $p \circ i = I_H$. Dados L um subgrupo qualquer de H e $\alpha : L \to H$ qualquer homomorfismo de grupos. Assim, $i \circ \alpha : L \to G$ é um homomorfismo de grupos. Como G é quasi-injetivo temos que existe um endomorfismo $\gamma : G \to G$ tal que

$$\gamma|_L = i \circ \alpha.$$

Agora, vamos definir $\beta : H \to H$ por

$$\beta = p \circ (\gamma|_L).$$

Então

$$\begin{aligned} \beta(h) &= (p \circ (\gamma|_L))(h) = (p \circ (i \circ \alpha))(h) = ((p \circ i) \circ \alpha)(h) \\ &= (I_H \circ \alpha)(h) = I_H(\alpha(h)) = \alpha(h), \ \forall \ h \in L, \end{aligned}$$

isto é,

$$\beta|_L = \alpha.$$

Portanto, H é quasi-injetivo.

(2) Suponhamos que H seja um subgrupo completamente invariante de G. Dados L um subgrupo qualquer de H e $\alpha : L \to H$ um homomorfismo de grupos qualquer. Assim, $i \circ \alpha : L \to G$ é um homomorfismo de grupos. Como G é quasi-injetivo temos que existe um endomorfismo $\gamma : G \to G$ tal que

$$\gamma|_L = i \circ \alpha.$$

Assim, existe um endomorfismo $\beta = \gamma|_H : H \to H$ tal que

$$\beta|_L = \alpha,$$

pois $\gamma(H) \subseteq H$. Portanto, H é quasi-injetivo.

(3) Sejam H um subgrupo completamente invariante de G,

$$\alpha : H \to G$$

um homomorfismo de grupos e $h \in H$ um elemento de ordem n. Como G é quasi-injetivo, existe um endomorfismo $\beta : G \to G$ tal que

$$\beta|_H = \alpha$$

e $g = \beta(h)$, para algum $g \in G$ de ordem n. Por outro lado,

$$g = \beta(h) \in \beta(H) \subseteq H,$$

Portanto, H contém todos os elementos de ordem n. ■

Lema 3.16 *Seja*

$$G = HK, \ \ \textit{com} \ \ \mathrm{mdc}\,(|H|\,, |K|) = 1.$$

Então G é um grupo quasi-injetivo se, e somente se, H e K também o são.

Prova. Seja G um grupo quasi-injetivo. Então, pelo item (1) do Lema 3.15, H é quasi-injetivo. De forma análoga, prova-se que K também é quasi-injetivo.

Reciprocamente, seja $G = HK$, com H e K quasi-injetivos. Dados L um subgrupo qualquer de G e $\alpha : L \to G$ um homomorfismo de grupos. Então, pelo Exemplo 1.3, obtemos

$$L = (L \cap H)\,(L \cap K)\,.$$

Logo, existem endomorfismos

$$\beta_1 : H \to G \ \text{ e } \ \beta_2 : K \to G$$

tais que

$$\beta_1|_{L\cap H} = \alpha|_{L\cap H} \ \text{ e } \ \beta_2|_{L\cap K} = \alpha|_{L\cap K},$$

pois $L \cap H < H$ e $L \cap K < K$. Assim, pelo Teorema 1.10, a função $\beta : G \to G$ definida por

$$\beta(hk) = \beta_1(h)\beta_2(k),$$

com $h \in H$ e $k \in K$, é um endomorfismo de G tal que

$$\beta|_L = \alpha.$$

Portanto, G é quasi-injetivo. ■

Exemplo 3.17 *O gupo $G = Q_8 \times Q_8$ não é quasi-injetivo.*

Solução. Sejam $Q_8 = \langle a, b\rangle$ e $Q_8 = \langle c, d\rangle$. Pondo $H = \langle a\rangle$ e $K = \langle ac\rangle$, obtemos

$$H \cap K = 1, \ \ [a, ac] = 1 \ \text{ e } \ L = HK.$$

Seja $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(L)$ definido por $\alpha\,(a) = ac$. Então se G fosse quasi-injetivo, então é fácil encontrar $\beta \in \mathrm{Aut}\,(G)$ tal que

$$\beta|_L = \alpha.$$

Como $H \lhd G$ temos que $K = \beta(H) = \alpha(H) \lhd G$. Portanto,

$$(ac)^b = b\,(ac)\,b^{-1} = a^{-1}c = a^2\,(ac) \notin K,$$

o que é uma contradição, ■

Este exemplo ratifica a necessidade da hipótese do Lema 3.16 de que $\mathrm{mdc}\,(|H|\,,|K|) = 1$.

Teorema 3.18 *Todo grupo quasi-injetivo é supersolúvel.*

Prova. Seja G um grupo quasi-injetivo finito. Suponhamos, por absurdo, que o resultado seja falso. Então podemos escolher um subgrupo normal minimal H em G tal que um fator chief $\frac{H}{K}$ seja um grupo abeliano não elementar, com $K \lhd G$. Logo,

$$\left|\frac{H}{K}\right| = p^n m,$$

com $n \geq 2$, $m \geq 2$ e $\mathrm{mdc}(m,p) = 1$, para algum número primo p. Seja

$$\overline{P} \in \mathrm{Syl}_p\left(\frac{H}{K}\right).$$

Como $\left|\overline{P}\right| = p^n$ temos que existe $\overline{K}_p \lhd \overline{P}$ tal que

$$\left|\frac{\overline{P}}{\overline{K}_p}\right| = p.$$

Assim, pelo Terceiro Teorema do Isomorfismo, temos que $K_p \lhd P < H$ e que

$$\left|\frac{P}{K_p}\right| = p.$$

Logo, existe um homomorfismo de grupos $\alpha : P \rightarrow G$, com

$$\mathrm{Ker}\,(\alpha) = K_p \;\; (K \subset K_p) \;\text{ e }\; \left|\frac{P}{K_p}\right| = p.$$

Por outro lado, como G é um grupo quasi-injetivo temos que existe um endomorfismo $\beta : G \rightarrow G$ tal que

$$\beta|_P = \alpha \;\text{ e }\; K_p = \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta) \cap P \lhd H.$$

Portanto,

$$K \subset H \cap \mathrm{Ker}(\beta) \subset H \Rightarrow \{K\} \neq \frac{H}{H \cap \mathrm{Ker}(\beta)} < \frac{H}{K},$$

o que é uma contradição. ■

Observação 3.19 *O Exemplo* 3.17 *prova que a recíproca do Teorema* 3.18 *é falsa.*

O próximo teorema é bastante usado para determinar a estrutura dos grupos quasi-injetivos.

Teorema 3.20 *Sejam G um grupo quasi-injetivo e K um subgrupo de G. Se H é um subgrupo subnormal em K, então H é um subgrupo normal em K.*

Prova. Como H é subnormal temos que existe uma cadeia subnormal

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = L \lhd K.$$

Podemos supor, usando indução sobre n, que $H \lhd L$. Suponhamos, por absurdo, que H não seja normal em K. Então existe $k \in K$ tal que

$$H^k = kHk^{-1} \neq H.$$

Pondo $U = HH^k$, obtemos

$$U < L,$$

pois H é normal em L e H^k é um subgrupo de L. Então o grupo quociente $\frac{U}{H}$ possui um subgrupo de ordem p, para algum um número primo p. Logo, pela prova do Teorema 3.18, existe $M \lhd G$ tal que

$$H \subset U \cap M \subseteq U.$$

Neste caso, $H^k \subseteq M$. Então $U \subseteq M$, o que é uma contradição. Portanto, H é um subgrupo normal em K. ■

Corolário 3.21 *Seja G um grupo quasi-injetivo. Então qualquer subgrupo nilpotente de G é um grupo de Dedekind.*

Prova. Seja H um subgrupo nilpotente de G. Então, pelo Corolário 1.35, todo subgrupo N de H é subnormal em H. Assim, pelo Teorema 3.20, N é normal em H Portanto, H é um grupo de Dedekind. ■

Lema 3.22 *Sejam G um grupo quasi-injetivo e P um p-subgrupo de Sylow de G, para algum número primo p. Então todos os elementos de ordem p em P tem a mesma altura em P, isto é, eles estão contidos em subgrupos cíclicos maximais isomorfos de P.*

Prova. Sejam G um grupo, $g \in G$, P um p-subgrupo de Sylow de G e $a \in P$, com $|a| = p$. Considere

$$\mathcal{F} = \{\langle g \rangle : |g| = p^n \text{ e } a \in \langle g \rangle\}.$$

Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e contém um elemento maximal, digamos $\langle g \rangle \in \mathcal{F}$, com $|\langle g \rangle| = p^n$ e a p-altura de a sendo igual a n.

Tome $b \in G$, com $|\langle b \rangle| = p$. Seja m a p-altura de b. Então existe $h \in G$ tal que $|\langle h \rangle| = p^m$ e $b \in \langle h \rangle$. Seja $\varphi : \langle a \rangle \longrightarrow \langle b \rangle < G$ um homomorfismo de grupos. Como G é um grupo quasi-injetivo, existe um homomorfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow G$ tal que

$$\psi|_{\langle a \rangle} = \varphi.$$

Afirmação. $\psi|_{\langle a\rangle}$ é injetora.
De fato, se $w \in \langle g\rangle$ e $\psi(w) = 1$, com $w \neq 1$, então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $a = w^s$. Logo,

$$1 = \psi(w^s) = \psi(a) = b,$$

o que é um absurdo.

Pondo $t = \psi(g)$, obtemos que

$$|t| = |\psi(g)| = |g| = p^n.$$

Como $b = \varphi(a) \in \langle t\rangle$, então temos que $m = n$. Portanto, todo elemento de ordem p em P tem a mesma altura em P. ■

Corolário 3.23 *Sejam G um grupo quasi-injetivo e P um p-subgrupo de Sylow de G. Então P é um grupo homocíclico ou um grupo dos quatérnios de ordem 8.*

Prova. Seja

$$P \in \mathrm{Syl}_p(G).$$

Como P é um grupo de Dedekind temos, pelo Teorema 3.8, que ele é abeliano ou é o produto direto do grupo quatérnio de ordem 8 com um 2-grupo abeliano elementar. Logo, pelo Lema 3.22, P é da forma desejada. ■

Observação 3.24 *O resultado acima implica que se P é um p-subgrupo de Sylow de um grupo quasi-injetivo, que não é abeliano, então $p = 2$ e P é um grupo dos quatérnios de ordem 8. Neste caso, o teorema seguinte prova que P deve ser um fator direto de G.*

Teorema 3.25 *Seja G um grupo quasi-injetivo. Se Q_8 é um 2-subgrupo de Sylow de G, então*

$$G = Q_8 \times K,$$

com K um grupo quasi-injetivo de ordem ímpar.

Prova. Como

$$Q_8 \in \mathrm{Syl}_2(G)$$

temos que

$$Q_8 \in \mathrm{Syl}_2(Q_8G')$$

e $Q_8G' \lhd G$. Então, pelo argumento de Fratini, obtemos

$$G = G'\mathcal{N}_G(Q_8),$$

pois $Q_8 \lhd \mathcal{N}_G(Q_8)$.

Afirmação. $Q_8 \lhd G$.
De fato, suponhamos por, absurdo, que Q_8 não seja normal em G. Então existe um p-elemento $x \in G'$ tal que

$$xQ_8x^{-1} \neq Q_8.$$

Por hipótese, G é supersolúvel e G' é nilpotente. Então, pelo Teorema 3.20,

$$H = \langle x \rangle \lhd G.$$

Assim, dado $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q_8)$, obtemos $\delta^2 = (\sigma|_H)^2 = I_H$, ou seja, $\langle \delta \rangle$ é um subgrupo cíclico de $\mathrm{Aut}(Q_8)$. Logo, $\mathcal{C}_{Q_8}(x)$ é subgrupo cíclico de ordem 4. Portanto, em cada 2-subgrupo de Sylow de G temos que cada elemento de ordem 2 centraliza x. Como a função

$$\alpha : H\mathcal{C}_{Q_8}(x) \to H \leq G$$

é um homomofismo de grupos temos que existe um endomorfismo $\beta : G \to G$ tal que

$$\beta|_{H\mathcal{C}_{Q_8}(x)} = \alpha.$$

Seja

$$M = \mathrm{Ker}\,(\beta)\,.$$

Então

$$M \cap H\mathcal{C}_{Q_8}(x) = \mathcal{C}_{Q_8}(x)\,.$$

Por outro lado, como

$$M \cap HQ_8 \lhd HQ_8,\ \ \mathcal{C}_{Q_8}(x) \subseteq HQ_8 \ \text{ e } \ M \cap H = 1$$

temos que

$$M \cap HQ_8 \subseteq \mathcal{C}_{Q_8}(x)\,,$$

ou seja,

$$M \cap HQ_8 = \mathcal{C}_{Q_8}(x)\,.$$

Assim,

$$\frac{(HQ_8)\,M}{M} < \mathrm{Im}\,(\beta) \ \text{ e } \ \frac{(HQ_8)\,M}{M} \simeq \frac{HQ_8}{\mathcal{C}_{Q_8}(x)} \neq \{\mathcal{C}_{Q_8}(x)\}\,.$$

Portanto, existe um elemento y de ordem 2 em

$$\frac{HQ_8}{\mathcal{C}_{Q_8}(x)}$$

tal que $xy \neq yx$, o que é uma contradição.

Finalmente, se $P_1, \ldots, P_k$ são todos os p_i-subgrupos de Sylow de G, com p_i números primos ímpares, $i = 1, \ldots, k$, então, pelo Teorema 3.12,

$$K = P_1 \times \cdots \times P_k \simeq P_1 P_2 \cdots P_k.$$

é um subgrupo normal em G. Como o

$$\mathrm{mdc}(|Q_8|\,, |K|) = 1$$

temos, pelo Lema 3.16, que K é um grupo quasi-injetivo de ordem ímpar. ∎

Observação 3.26 *O Teorema* 3.25 *e o Lema* 3.16 *reduzem a discussão a todos os grupos cujos subgrupos de Sylow são abelianos.*

Lema 3.27 *Seja G um grupo quasi-injetivo tal que todos os p-subgrupos de Sylow de G são grupos abelianos. Então G' é um π-subgrupo de Hall de G e existe H um subgrupo de G tal que*

$$G = G'H, \ \text{com } G' \cap H = 1.$$

Além disso, G' e H são grupos abelianos homocíclicos e

$$G' \cap \mathcal{Z}(G) = 1.$$

Prova. Sejam P um p-subgrupo de Sylow de G e $N = \mathcal{N}_G(P)$. Então, pelo item (1) do Teorema 3.11, obtemos

$$P = (P \cap G') \times (P \cap \mathcal{Z}(N)).$$

Afirmação. $P \cap G' = 1$ ou P é um subgrupo de G'.
De fato, suponhamos que

$$P \cap G' \neq 1.$$

Então P é um subgrupo de G'. Lembremos que, pelo Corolário 3.23, P é um grupo homocíclico e, pelo item (3) do Lema 3.15, G' contém todos os elementos de ordem p, donde $P \cap G'$ é um fator de P. Assim, G' é um π-subgrupo de Hall de G. Portanto, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus, G contém um π'-subgrupo H tal que

$$G = G'H, \ \text{com } G' \cap H = 1.$$

Finalmente, se P é um subgrupo de G', então P é um subgrupo normal em G e

$$P \cap \mathcal{Z}(G) = 1.$$

Assim,

$$G' \cap \mathcal{Z}(G) = 1,$$

que é o resultado desejado. ∎

Lema 3.28 *Seja $G = KH$ um grupo quasi-injetivo tal que todos os p-subgrupos de Sylow de G são grupos abelianos, com*

$$K = G' \ \text{e } H \cap K = 1.$$

Se P é um p-subgrupo de Sylow de K e $h \in H$, então existe $r = r(p,h) \in \mathbb{Z}$ tal que $k^h = hkh^{-1} = k^r$, para cada $k \in P$.

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$P = \langle k_1 \rangle \times \cdots \times \langle k_n \rangle,$$

com $\langle k_i \rangle$ subgrupos cícicos isomorfos, para cada $i = 1, \ldots, n$. Suponhamos que $n > 1$, pois o caso $n = 1$ é claro. Então, pelo Teorema 3.20, os subgrupos $\langle k_i \rangle$, $\langle k_j \rangle$ e $\langle k_i k_j \rangle$ são normais em G, para cada $i, j = 1, 2, \ldots, n$, com $i \neq j$. Logo, existem $r, s, t \in \mathbb{Z}$ tais que

$$k_i^h = k_i^r, \;\; k_j^h = k_j^s \text{ e } (k_i k_j)^h = (k_i k_j)^t,$$

com $0 < r, s, t < |k_i| = |k_j|$. Assim,

$$k_i^r k_j^s = k_i^h k_j^h = (k_i k_j)^h = k_i^t k_j^t \Rightarrow k_i^{r-t} = k_j^{t-s}.$$

Portanto, para cada $k \in P$, existe $r = r(p, h) \in \mathbb{Z}$ tal que $s^h = s^r$. ■

Lema 3.29 *Seja $G = KH$ um grupo quasi-injetivo tal que todos os p-subgrupos de Sylow de G são grupos abelianos, com*

$$K = G' \text{ e } H \cap K = 1.$$

Se K_π é um π-subgrupo de Hall de K, então $\mathcal{C}_H(K_\pi)$ é um fator direto de H. Em particular,

$$\mathcal{Z}(G) = \mathcal{C}_H(K)$$

é um fator direto de G.

Prova. Basta provar que se

$$1 \neq x^p \in \mathcal{C}_H(K_\pi),$$

então existe

$$z \in \mathcal{C}_H(K_\pi) \text{ tal que } z^p = x^p.$$

A função

$$\alpha : K_\pi \langle x^p \rangle \to K_\pi$$

definida por $\alpha(kx^p) = k$ é claramente um homomorfismo de grupos. Assim, existe um endomorfismo de grupos $\beta : G \to G$ tal que

$$\beta|_{K_\pi \langle x^p \rangle} = \alpha.$$

Seja $M = \operatorname{Ker}(\beta)$. Então

$$M \cap K_\pi \langle x^p \rangle = \operatorname{Ker}(\alpha) = \langle x^p \rangle.$$

Note que $x \notin \mathcal{C}_H(K_\pi)$. Assim, existe $y \in \operatorname{Im}(\beta)$ de ordem p com a mesma ação de x em K_π. Logo, o conjugado y^k pertence a H, para algum $k \in K$, e y^k possui a mesma ação de x. Portanto,

$$z = x\left(y^k\right)^{-1} \in \mathcal{C}_H(K_\pi)$$

é o elemento desejado. ■

Teorema 3.30 *Um grupo G é quasi-injetivo se, e somente se, $G = Q_8 \times K$, com K um grupo quasi-injetivo de ordem ímpar ou $G = K \rtimes H$ tal que:*

1. $\mathrm{Syl}_p(K)$ *e* $\mathrm{Syl}_p(H)$ *são homocíclicos.*

2. $G' = K$.

3. $\mathrm{mdc}\left(|K|, |H|\right) = 1$.

4. *Para cada* $h \in H$, *se* p *é um número primo, com* $p| \, |K|$, *então existe um* $r = r(p,h) \in \mathbb{Z}$ *tal que* $k^h = k^r$ *para todo* $k \in K_p$.

5. *Se* K_π *é um* π*-subgrupo de Hall de* K, *para algum conjunto de primos* π, *então* $\mathcal{C}_H(K_\pi)$ *é um fator direto de* H. *Em particular,*

$$\mathcal{Z}(G) \cap H = \mathcal{C}_H(K)$$

é um fator direto de H.

Prova. Suponhamos que G seja um grupo quasi-injetivo. Então, pelo Teorema 3.25 e, pelos Lemas 3.27, 3.28 e 3.29, G satisfaz todas as condições desejadas.

Reciprocamente, se $G = Q_8 \times K$, então, pelo Lema 3.16, G é um grupo quasi-injetivo, pois o

$$\mathrm{mdc}\left(|Q_8|, |K|\right) = 1.$$

Agora, suponhamos que $G = K \rtimes H$. Note que dado qualquer subgrupo L de G podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$L = (L \cap K) \times (L \cap H).$$

Sejam $\alpha : L \to G$ um homomorfismo de grupos qualquer, π o conjunto dos primos que divide a ordem de

$$\frac{L \cap K}{\mathrm{Ker}\left(\alpha|_{L \cap H}\right)}$$

e escolhamos $x \in G$ tal que

$$\alpha(L \cap H) \subseteq H^x.$$

Então há vários fatos a serem considerados:

1° **Fato.** Se $h \in L \cap H$, então existe $c \in \mathcal{C}_H(K_\pi)$ tal que

$$\alpha(h) = (hc)^x.$$

De fato, a função $\alpha_1 : L \to G$ definida por

$$\alpha_1(y) = x^{-1}\alpha(y)\, x$$

é um homomorfismo de grupos tal que

$$\alpha_1(L \cap H) \subseteq H.$$

Assim, para um número primo $p \in \pi$ fixado, podemos escolher $k \in L \cap K$ tal que $\alpha_1(k)$ seja um p-elemento de G, com $\alpha_1(k) \neq 1$. Logo, pelo item (4), obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_1(k)^{\alpha_1(h)} &= \alpha_1(h)\,\alpha_1(k)\,\alpha_1(h)^{-1} \\
&= \left(x^{-1}\alpha(h)\,x\right)\left(x^{-1}\alpha(k)\,x\right)\left(x^{-1}\alpha(h)^{-1}x\right) \\
&= x^{-1}\alpha(h)\,\alpha(k)\,\alpha(h)^{-1}x \\
&= x^{-1}\alpha\left(hkh^{-1}\right)x = x^{-1}\alpha\left(k^h\right)x \\
&= \alpha_1(k)^h
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha_1(k)^{\alpha_1(h)h^{-1}} = \alpha_1(k),$$

ou seja, $\alpha_1(h)\,h^{-1}$ centraliza $\alpha_1(k)$. É fácil verificar que conjugações sucessivas dos p-elementos $\alpha_1(k)$ por $\alpha_1(h)\,h^{-1}$ mantém o elemento $\alpha_1(k)$ centralizado. Neste caso, $\alpha_1(h)\,h^{-1}$ centraliza todos os elementos de ordem p. Logo, pelo Teorema 3.13, temos que

$$\alpha_1(h)\,h^{-1} \in \mathcal{C}_H(K_p).$$

Portanto,

$$\alpha_1(h)\,h^{-1} \in \mathcal{C}_H(K_\pi),$$

isto é,

$$\alpha_1(h)\,h^{-1} = c \Leftrightarrow \alpha(h) = (hc)^x, \text{ para algum } c \in \mathcal{C}_H(K_\pi).$$

2° **Fato**. Existe um homomorfismo de grupos $\gamma : KL \to G$ tal que

$$\gamma|_L = \alpha.$$

De fato, note que

$$KL = K(L \cap H), \ \alpha(L \cap K) \subseteq K_\pi$$

e para $\alpha|_{L\cap K}$ existe um homomorfismo de grupos $\sigma : K \to K$ tal que

$$\sigma|_{L\cap K} = \alpha|_{L\cap K}, \ \sigma(K_\pi) \subseteq K_\pi \text{ e } \sigma(k) = 1,$$

se k é um p'-elemento de K. A função $\gamma : KL \to G$ definida por

$$\gamma(kh) = \sigma(k)\,\alpha(h),$$

é o homomorfismo de grupos desejado.

3° **Fato.** Existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \to G$ tal que

$$\beta|_{KL} = \gamma.$$

De fato, usando indução sobre $|G|$, basta estender γ à função

$$\beta : M \to G,$$

com M um subgrupo de G tal que

$$\left|\frac{M}{KL}\right| = p.$$

Sejam $h \in (M \cap H) - L$ um p-elemento e suponhamos que

$$\gamma(h^p) = (h^p c)^x,$$

para algum $c \in \mathcal{C}_H(K_\pi)$. Então a ordem de c é $|c| < |h|$. Logo, $|c|$ é menor do que a p-ésima componente do expoente de H. Assim, pelo item (5), existe $d \in \mathcal{C}_H(K_\pi)$ tal que $d^p = c$. Pondo

$$\beta(h) = (hd)^x,$$

obtemos o homomorfismo desejado $\beta : M \to G$. Portanto, G é um grupo quasi-injetivo. ■

Exemplos 3.31 *São exemplos de grupos quasi-injetivos os seguintes grupos*:

1. $G = K \rtimes_\varphi H$, *com* $K = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$, $H = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ *e* $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ *dada por* $\varphi_b(a) = a^2$. *De fato, note que* K *e* H *são homocíclicos,* $\mathrm{mdc}(|H|, |K|) = 1$, $G' = K$, $K_\pi = K$ *é um* $\{7\}$*-subgrupo de Hall de* G *e* $\mathcal{C}_H(K) = 1$ *é um fator direto de* H*;*

2. $G = D_{p^n}$, *com* p *um número primo ímpar e* $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 4

Grupos do tipo injetivo

O conceito de grupo quasi-injetivo dado no capítulo anterior foi criado por L. Fuchs motivado pelo fato de não existirem grupos injetivos finitos não triviais. Agora, introduziremos um outro conceito relativo, à extensão de automorfismos de grupos que foi criada por Azevedo e que foi tratada por ele, Bastos e Juriaans em [2]. No nosso trabalho, estudaremos apenas o caso em que G é um grupo abeliano.

Um grupo G é do *tipo injetivo* se para qualquer subgrupo H de G e qualquer automorfismo de grupos ϕ existir um automorfismo de grupos ψ tal que

$$\psi|_H = \phi.$$

Sejam o conjunto

$$\mathcal{L} = \{\psi \in \operatorname{Aut}(G) : \psi|_H \in \operatorname{Aut}(H)\,, \text{ para cada } H < G\}$$

e a função

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathcal{L} & \longrightarrow & \operatorname{Aut}(H) \\ & & \psi & \longmapsto & \psi|_H \end{array}.$$

Então é fácil verificar que $\mathcal{L} < \operatorname{Aut}(G)$ e T é um homomorfismo de grupos. Note que G é do tipo injetivo se T é sobrejetora. Em particular, $\operatorname{Aut}(H)$ é uma *seção* de $\operatorname{Aut}(G)$, pois

$$\frac{\mathcal{L}}{\operatorname{Ker}(T)} \simeq \operatorname{Aut}(H)\,.$$

Portanto, uma condição necessária para que um grupo finito G seja do tipo injetivo é que $|\operatorname{Aut}(H)|$ divida $|\operatorname{Aut}(G)|$.

4.1 Resultados básicos

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de grupos que serão necessários para as seções subsequentes, o leitor interessado em mais detalhes, mais uma vez, pode consultar [7, 10, 12].

Teorema 4.1 (Kulikov) *Se um grupo G é uma soma direta de grupos cíclicos, então todo subgrupo de G também é uma soma direta de grupos cíclicos.*

Sejam p um número primo e $r \in \mathbb{N}$. Um p-grupo é chamado *homocíclico do tipo* (p^r, m) se ele é a soma direta de m cópias de um grupo cíclico de ordem p^r.

Seja G um grupo homocíclico do tipo (p^r, m). Dizemos que um conjunto $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \Lambda\}$, com Λ um conjunto de índices, é uma *base* para G se

$$G = \sum_{i \in \Lambda} \langle x_i \rangle .$$

A base $\mathcal{X}$ é chamada *independente* se ela é uma base para o subgrupo de seus geradores.

Teorema 4.2 (Teorema da Base) *Sejam G um grupo homocíclico do tipo (p^r, m) e H um subgrupo de G. Então H é uma soma direta de grupos cíclicos e, dada uma base*

$$\mathcal{H} = \{h_i : i \in \Lambda_1\}$$

de H, existem uma base $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \Lambda\}$ de G e um conjunto

$$N = \{r_i : r_i \in \mathbb{N}, \ \forall \ i \in \Lambda\}$$

tais que $\Lambda_1 \subset \Lambda$ e $h_i = x_i^{p^{r_i}}$, para cada $i \in \Lambda_1$.

Retomando o conceito de grupos divisíveis dado no Capítulo 2, observamos que, se um grupo G é divisível, então um elemento $g \in G$ é tal que

$$g \in G^n, \ \text{ para cada } \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Observemos agora, que grupos livres de torção são mais difíceis de lidar do que p-grupos abelianos, exceto no caso de grupos de posto 1. Por isto, não existe uma classificação satisfatória. O conceito de altura nos fornece um importante modo de distinção entre elementos em grupos livres de torção.

Sejam p um número primo fixo e g um elemento de um grupo abeliano G. A *p-altura* de g em G é o único elemento $n_p \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$p^{n_p} \mid |g| , \ \text{ mas } \ p^{n_p+1} \nmid |g| .$$

Caso contrário, dizemos que g tem *p-altura infinita* em G.

Seja $p_1, p_2, \ldots$ a sequência dos números primos em sua ordem natural. Se g é um elemento de G, a *altura vetorial* de g é definida como

$$\mathbf{h}(g) = (n_1, n_2, \ldots) ,$$

com n_i a p_i-altura de g em G. Note que cada n_i é ∞ ou um inteiro não negativo. Qualquer vetor $\mathbf{h}$ com componentes desse tipo será chamado de *altura*, sem referência a um grupo abeliano específico.

O conunto de todas as alturas pode ser parcialmente ordenado definindo $\mathbf{h} \leq \mathbf{h}'$ sempre que $n_i \leq n_i'$, para todo i. Aqui, o símbolo ∞ está sujeito a regras habituais. Assim,

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$$

é a única altura mínima e

$$\infty = (\infty, \infty, \ldots)$$

é a única altura máxima.

Se g é um elemento de um grupo com p-altura n, então pg tem p-altura $n+1$. Logo, se a p-altura de um elemento g de G é acrecida de alguns primos p, a altura resultante será um múltiplo da altura de g. Isso sugere que tais alturas sejam tratadas como equivalentes. Consequentemente, duas alturas $\mathbf{h}$ e $\mathbf{h}'$ são *equivalentes* se $n_i = n_i'$, para quase todo i e $n_i = n_i'$ quando n_i ou n_i' for infinito. Pode-se verificar que esta relação é uma relação de equivalência no conjunto das alturas. As classes de equivalências são chamadas tipos. O *tipo* de um elemento g de um grupo é definido como o tipo de suas alturas vetoriais e será denotado por

$$\mathbf{t}\,(g)\,.$$

O conjunto de todos os tipos pode também ser parcialmente ordenado. Definimos $\mathbf{t} \leq \mathbf{t}'$ para significar que $\mathbf{h} \leq \mathbf{h}'$, com $\mathbf{h}$ e $\mathbf{h}'$ as alturas associada aos tipos $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$, respectivamente. Claramente, existem um único menor e um único maior tipo.

Suponhamos que G seja um grupo livre de torção de posto ≤ 1 e g_1, g_2 dois elementos de $G - \{1\}$. Então

$$\langle g_1 \rangle \cap \langle g_2 \rangle \neq \{1\},$$

pois $\{g_1, g_2\}$ é dependente. Assim, existem $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$$m_1 g_1 = m_2 g_2 \neq 1.$$

Logo, por definição, $\mathbf{h}\,(g_1)$ e $\mathbf{h}\,(g_2)$ são equivalentes e

$$\mathbf{t}\,(g_1) = \mathbf{t}\,(g_2)\,.$$

Portanto, todo elemento de $G - \{1\}$ tem o mesmo tipo, o qual é referido como o *tipo* de G, em símbolos $\mathbf{t}\,(G)$.

Proposição 4.3 *Sejam G e H grupos abelianos livres de torção de posto ≤ 1. Então G e H são isomorfos se, e somente se, eles tem o mesmo tipo. Além disso, todo tipo é o tipo de um grupo abeliano livre de torção de posto* 0 *ou* 1*.*

4.2 Propriedades dos grupos do tipo injetivo

Lema 4.4 *Sejam G um grupo do tipo injetivo e H um subgrupo característico em G, então H é do tipo injetivo.*

Prova. Sejam H um subgrupo característico em G, K um subgrupo qualquer de H e $\phi : K \to K$ um automorfismo de grupos. Como K também é um subgrupo de G e G é um grupo do tipo injetivo, existe um automorfismo de grupos $\psi : G \to G$ tal que

$$\psi|_K = \phi.$$

Por outro lado,

$$\psi|_H \in \operatorname{Aut}(H),$$

pois H é um subgrupo característico de G. Portanto, H é do tipo injetivo. ■

Exemplos 4.5 *Seja G um grupo do tipo injetivo. Então*:

1. *O centro $\mathcal{Z}(G)$ de G é do tipo injetivo.*
2. *O subgrupo Frattini* $\operatorname{Frat}(G)$ *de G é do tipo injetivo.*
3. *O subgrupo Fitting* $\operatorname{Fit}(G)$ *de G é do tipo injetivo.*

Lema 4.6 *Sejam G um grupo do tipo injetivo e $\phi : H \to H$ um automorfismo de grupos. Se o automorfismo de grupos $\psi : G \to G$ é tal que*

$$\psi|_H = \phi$$

então:

1. $\psi(\mathcal{C}_G(H)) = \mathcal{C}_G(H)$.
2. $\psi(\mathcal{N}_G(H)) = \mathcal{N}_G(H)$.

Lema 4.7 *Sejam G um grupo e N e H subgrupos de G tais que*

$$G = N \rtimes H.$$

Se G é do tipo injetivo e N é um subgrupo característico em G, então H é do tipo injetivo.

Prova. Sejam

$$\pi : G \to H$$

a projeção de G em H, e (K, ϕ) uma data em H. Como G é um grupo do tipo injetivo ele possui uma extensão (G, ψ). Consideremos a função

$$\hat{\phi} := \pi \circ \psi : H \to H.$$

Afirmação: $\hat{\phi} \in \operatorname{Aut}(H)$.
De fato, note que $\hat{\phi}$ é um homomorfismo de grupos. Se

$$\hat{\phi}(h) = 1,$$

com $h \in H$, então $\psi(h) \in N$. Assim,

$$h \in N \cap H = \{1\}.$$

Logo, $\hat{\phi}$ é injetora em H. Dado $h_1 \in H$, obtemos

$$h_1 = \psi(z), \text{ para algum } z \in G.$$

Pondo

$$z = nh,$$

com $n \in N$ e $h \in H$, temos que

$$h_1 = \pi(h_1) = \pi(\psi(z)) = (\pi \circ \psi)(z) = \hat{\phi}(z).$$

Logo, $\hat{\phi}$ é sobrejetora em H. Assim, $\hat{\phi}$ é um automorfismo de H. Portanto, H é um grupo do tipo injetivo. ■

4.3 O caso abeliano

Nesta seção abordaremos o resultado que caracteriza todos os grupos abelianos do tipo injetivo.

Teorema 4.8 *Sejam G um grupo abeliano e $\mathcal{T}(G)$ seu subgrupo torção. Então G é do tipo injetivo se, e somente se, é satisfeita uma das seguintes condições:*

1. *G é um grupo divisível.*

2. *G é um grupo de torção e cada uma de suas componentes primárias é divisível ou homocíclica.*

3. *$\mathcal{T}(G)$ é divisível e $\frac{G}{\mathcal{T}(G)}$ é livre de torção, abeliano e de posto 1.*

Prova. Sejam G seja um grupo abeliano do tipo injetivo e $\mathcal{T}(G)$ seu subgrupo torção. Suponhamos que G não seja divisível. Então há dois casos a ser analisados: quando G é um grupo de torção e quando G não é um grupo de torção.

1° **Caso.** $G = \mathcal{T}(G)$.

De fato, pelo Teorema 1.15, podemos supor, sem perda de generalidade, que G é um p-grupo e pelo Teorema 2.8, podemos escrever G como a soma direta

$$G = D \oplus E,$$

com D divisível e característico e E reduzido. Como D é característico e G é do tipo injetivo temos que

$$E = \{1\} \text{ ou } D = \{1\}.$$

Logo, G é reduzido.

Afirmação. G é um grupo limitado.

De fato, se G não fosse limitado, então ele seria divisível, o que é uma contradição. Portanto, G é limitado.

Assim, pelo Teorema 2.17, G é a soma direta de grupos cíclicos. Como G é do tipo injetivo, todas as ordens destes grupos cíclicos são iguais. Portanto, eles são homocíclicos.

2° **Caso.** $G \neq \mathcal{T}(G)$.

Sejam $x \in G$ tal que $x \notin \mathcal{T}(G)$, $g \in \mathcal{T}(G)$ e $n \in \mathbb{N}$. Tomemos

$$H = \langle g \rangle \times \langle x^n \rangle < G$$

e definamos $\phi \in \operatorname{Aut}(H)$ por

$$\phi(h) = \begin{cases} g, & \text{se } h \in \langle g \rangle \\ gx^n, & \text{se } h \in \langle x^n \rangle . \end{cases}$$

Então, sendo $\phi : H \to H$ um automorfismo de grupos, como G é do tipo injetivo, existe um automorfismo de grupos $\widehat{\phi} : G \to G$, com

$$\hat{\phi}(h) = \phi(h), \ \forall \ h \in H.$$

Assim,

$$gx^n = \widehat{\phi}(x^n) = (\widehat{\phi}(x))^n \Rightarrow g = (\widehat{\phi}(x)\, x^{-1})^n.$$

Logo, $\mathcal{T}(G)$ é um grupo divisível e então podemos escrever

$$G = \mathcal{T}(G) \oplus F.$$

Tomemos $x \in F$. Como G não é divisível temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \notin G^{n_0}.$$

Sejam $w \in F$ um elemento não trivial qualquer e

$$K = \langle w^{n_0}, x \rangle .$$

Se K fosse de posto 2, então definimos $\phi \in \operatorname{Aut}(K)$ por

$$\phi(w^{n_0}) = xw^{n_0}, \ \text{com} \ \phi(x) = x.$$

Logo, $\widehat{\phi}$ satisfaz

$$x = (w^{-1}\widehat{\phi}(w))^{n_0} \in G^{n_0},$$

o que é uma contradição. Logo, K é de posto 1. Assim, F também o é.

Reciprocamente, seja G um grupo que satisfaz uma das três condições do teorema. Então há três casos a considerar.

1º Caso. Seja G um grupo divisível. Já sabemos que $\mathcal{T}(G)$ também é divisível. Então

$$G = \mathcal{T}(G) \oplus F,$$

com F também divisível. Sejam H um subgrupo qualquer de G, $\phi : H \to H$ um automorfismo de grupos, Λ um conjunto de números primos, V um complementar para

$$\sum_{p\in\Lambda} \Omega_p(H) \text{ em } \sum_{p\in\Lambda} \Omega_p(G)$$

e

$$\hat{H} = V \oplus H.$$

Podemos estender ϕ a $\hat{H}$ de modo que ϕ seja a identidade em V. Ainda denotemos essa extensão por ϕ. Pelo Teorema 2.6, G é um grupo injetivo. Então existe um endomorfismo $\psi : G \to G$ tal que

$$\psi|_{\hat{H}} = \phi.$$

Como

$$\sum_{p\in\Lambda} \Omega_p(\hat{H}) = \sum_{p\in\Lambda} \Omega_p(G),$$

temos que

$$\psi|_{\mathcal{T}(G)} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}(G)).$$

Seja

$$\mathcal{F} := \{U : \langle \mathcal{T}(G), H\rangle < U < G \text{ e } \psi|_U \in \mathrm{Aut}(U)\}.$$

Afirmação 1. $\langle \mathcal{T}(G), H\rangle \in \mathcal{F}$.
De fato, sejam

$$L = \langle \mathcal{T}(G), H\rangle \text{ e } g \in L.$$

Então $g = th$, com $t \in \mathcal{T}(G)$ e $h \in H$. Se $\psi(g) = 1$ então

$$\phi(h) = \psi(h) \in \mathcal{T}(G) \cap H = \mathcal{T}(H).$$

Logo, $g = 1$. Por outro lado, existem $t_0 \in \mathcal{T}(G)$ e $h_0 \in H$ tais que

$$t = \psi(t_0) \text{ e } h = \psi(h_0) \Rightarrow g = \psi(t_0 h_0).$$

O que prova a afirmação.

Ordenando $\mathcal{F}$ pela inclusão, temos que toda cadeia ascendente em $\mathcal{F}$ tem uma cota superior em $\mathcal{F}$. Assim, pelo Lema de Zorn, podemos escolher um elemento maximal, digamos

$$U_0 \in \mathcal{F}.$$

Seja

$$W = \sqrt{U_0} = \{g \in G : g^n \in U_0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$$

o radical de U_0 em G.

Afirmação 2. $W \in \mathcal{F}$.
De fato, note que

$$\langle \mathcal{T}(G), H \rangle < W.$$

Se

$$x \in W \cap \mathrm{Ker}(\psi),$$

então, para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$x^n \in U_0 \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \{1\}.$$

Logo,

$$x \in \mathcal{T}(G) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \{1\}.$$

Assim, ψ é injetora em W. Sejam $y \in W$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $y^n \in U_0$. Então existe $z \in U_0$ tal que

$$y^n = \psi(z).$$

Como G é divisível, temos que existe $x \in G$ tal que $z = x^n$. Por definição,

$$x \in W \ \text{ e } \ y^{-1}\psi(x) \in \mathcal{T}(G) < U_0 < W.$$

Então existe $t \in \mathcal{T}(G)$ tal que $y^{-1}\psi(x) = \psi(t^{-1})$. Assim,

$$y = \psi(tx)$$

com $tx \in W$. Logo, ψ é sobrejetora. Isto prova a afirmação e também que

$$W = U_0.$$

Desta forma, U_0 é um subgrupo divisível de G. Assim,

$$G = U_0 \oplus K,$$

para algum subgrupo divisível K de G. Definamos $\hat{\phi} : G \to G$ por

$$\hat{\phi}(g) = \hat{\phi}(uk) = \psi(u) I_K(k), \ \text{ com } \ u \in U_0 \ \text{ e } \ k \in K.$$

Então $\hat{\phi} \in \mathrm{Aut}(G)$ e $\hat{\phi}$ é tal que

$$\hat{\phi}|_{\hat{H}} = \phi.$$

Portanto, G é do tipo injetivo.

2º Caso. Seja G um grupo de torção tal que suas componentes primárias são divisíveis ou homocíclicas. Podemos supor, sem perda de generalidade, que G é um p-grupo. Por um caso anterior, G também pode ser suposto homocíclico. Sejam H um subgrupo de G e $\phi : H \to H$ um automorfismo de grupos. Uma aplicação do Teorema da Base garante a existência de uma extensão de ϕ.

3º Caso. Seja G um grupo tal que

$$G = \mathcal{T}(G) \oplus F,$$

com $\mathcal{T}(G)$ divisível e F de posto 1. Sejam

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(F),$$

o tipo de F, e

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots)$$

uma altura qualquer em $\mathbf{t}$. Pela Proposição 4.3, F é isomorfo ao subgrupo de $\mathbb{Q}$ gerado pelos números racionais $\frac{1}{p_i^j}$, com $i \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, h_i$ e $\Pi = \{p_1, p_2, \ldots\}$ o conjunto dos números primos ordenados naturalmente. Desta forma podemos "mergulhar" G no grupo divisível

$$\overline{G} = \mathcal{T}(G) \oplus \mathbb{Q}.$$

Sejam H um subgrupo de G e $\phi : H \to H$ um automorfismo de grupos. Pelo 1^o Caso, existe $\psi \in \operatorname{Aut}\left(\overline{G}\right)$ tal que

$$\psi|_{\overline{G}} = \phi.$$

Afirmação 1. $\psi(G) = G$.
De fato, suponhamos, por absurdo, que $\psi(G) \neq G$. Então, para algum $f_0 \in F$, teríamos que

$$\psi(f_0) \notin G.$$

Seja

$$\pi : \overline{G} \to \mathbb{Q}$$

a projeção canônica de $\overline{G}$ e

$$\overline{\psi} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

a função induzida por ψ. Então

$$\overline{\psi} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Q}) \;\text{ e }\; \overline{\psi}(\pi(f_0)) \notin \pi(F).$$

Logo, exsite um número racional $\alpha = \frac{p}{q}$, com $\operatorname{mdc}(p, q) = 1$, tal que $\overline{\psi}$ é o produto por α e

$$\alpha\pi(f_0) \notin \pi(F).$$

Por outro lado,

$$\alpha^n \pi(H) = \pi(H), \;\; \forall \; n \in \mathbb{Z}.$$

Escolha $n_0 \in \mathbb{N} \cap \pi(H)$ e $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que $\alpha^n n_0 \in \pi(H) < \pi(F)$ seja uma fração irredutível. Se

$$q = p_{i_1}^{s_1} \cdots p_{i_k}^{s_k}$$

é a decomposição primária de q, então, como $\pi(F)$ é gerado pelos números racionais $\frac{1}{p_i^j}$, com $i \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, h_i$, e $\alpha^n n_0$ é uma fração irredutível em $\pi(F)$, devemos ter que $h_{i_k} \neq 0$. De fato, como podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande segue que $h_{i_k} = \infty$. O fato dos p_{i_k} serem relativamente primos implica que

$$\frac{1}{q} \in \pi(F)$$

e então $\alpha \in \pi(F)$. Se $x \in \pi(F)$, então

$$x = \sum \frac{s_{ij}}{p_i^j}, \tag{4.1}$$

uma soma finita com $s_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\forall\ i, j$. Usando a Equação (4.1), temos que $\frac{x}{q} \in \pi(F)$ e, assim,

$$\alpha x \in \pi(F).$$

Por outro lado,

$$\overline{\psi}(\pi(f_0)) = \alpha\pi(f_0) \in \pi(F),$$

o que é uma contradição. Logo,

$$\psi(G) = G.$$

Portanto, G é um grupo do tipo injetivo. ■

Corolário 4.9 *Seja G um grupo finito do tipo injetivo. Então $\mathcal{Z}(G)$ é do tipo injetivo. Portanto, $\mathcal{Z}(G)$ é um produto direto de p-grupos homocíclicos.*

Exemplo 4.10 *Seja $G = D_{p^n}$, com p um número primo ímpar e $n \in \mathbb{N}$, então G é um grupo do tipo injetivo.*

Exemplo 4.11 *O grupo $G = K \rtimes_\varphi H$, com $K = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}_7$, $H = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}_3$ e $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ dada por $\varphi_b(a) = a^2$, não é um grupo do tipo injetivo.*

O Exemplo 4.11 comprova o fato de que a categoria dos gupos quasi-injetivos é distinta da categoria dos grupos do tipo injetivo, pois o grupo $G = K \rtimes_\varphi H$ é quasi-injetivo, pelo Exemplo 3.31, embora não seja do tipo injetivo.

Referências Bibliográficas

[1] Alperin, J. L. and Rowen, B. Bell, *Groups and Representations*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Azevedo, A. C. P., Bastos, G. G. e Juriaans, S. O., *Extension of Automorphisms of Subgroups of Abelian and Polycyclic-by-finite Groups*. J. Algebra Appl. 6 (2007), no. 2, $315 - 322$.

[3] Bertholf, D., Walls G., *Finite Quasi-Injective Groups*, Glasgow Math. J. 20 (1970), $29 - 33$.

[4] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups II*, Academi Press, 1970.

[5] Garcia, A. L. e Lequain, Y., *Álgebra*: *Um Curso de Introdução*. IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[6] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[7] Gorestein, D., *Finite Groups*, Harper and Row, 1968.

[8] Hall, M., *The Theory of Groups*, MacMillan, 1959.

[9] Nogin, M., *A Short Proof of Eilemberg and Mooore's Theorem*. C. E. Journal of Mathematics, 5 (1), 2007, $201 - 204$.

[10] Robinson, Derek J. S., *A Course in the Theory of Groups*. Spring-Verlag, Berlim-Heidelberg-New York, 2nd ed.,1995.

[11] Rotman, Joseph J., *An Introduction to the Theory of Groups*. New York: Spring-Verlag, 4.ed., (1994).

[12] Scott, W. R., *Group Theory*, Prentice-Hall, 1964.

[13] Spindler, K., *Abstract Algebra with Aplications, Vol. I*, Marcel Dekker, 1994.

[14] Tomkinson, M. J., *Infinite Quasi-Injective Groups*, Proc. of the Edinburg Math. Soc., 31 (1988), $249 - 259$.