Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

Disson Soares dos Prazeres

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

por

Disson Soares dos Prazeres

sob orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Agosto de 2010
João Pessoa-PB

P921m Prazeres, Disson Soares dos.
Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev / Disson Soares dos Prazeres.- João Pessoa, 2010.
68f.

Orientador: Uberlandio Batista Severo.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1.Matemática. 2.Métodos minimax. 3.Categoria de Lusternik-Schnirelman. 4.Princípio de concentração-compacidade.

UFPB/BC CDU : 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Semilineares Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

por
Disson Soares dos Prazeres

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovado por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa-UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros-UFPB

Prof. Dr.Manassés Xavier de Souza-UFPB(Suplente)

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço:

- A Deus, por ter me dado saúde, disposição e por colocar no meu caminho pessoas maravilhosas que muito me ajudaram nessa difícil tarefa.

- Aos meus pais, Pólio Soares dos Prazeres e Sara Judite dos Prazeres, aos meus irmãos Diomedes, Dicson e Dicla, e aos meus sobrinhos Daniel, Laura e Pedro, pelo apoio e por serem sempre um porto seguro nos momentos difíceis.

- A todos os meus amigos de Aracaju, em especial à Rafaella e Kleber, que sempre estiveram ao meu lado mesmo estando distante.

- Ao meu Orientador, Professor Uberlandio Batista Severo, por ter sido, além de um grande orientador, um grande mestre e amigo.

- Ao programa de Pós-Graduação em matemática do CCEN-UFPB e em especial, à Graça, a Júnior e aos professores Daniel Marinho Pellegrino, Pedro Antonio Hinojosa Vera, Pedro Antonio Gomes Venegas, João Marcos Bezerra do Ó, pela contribuição em minha formação matemática.

- Aos professores Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, Manassés Xavier de Souza e Everaldo Souto de Medeiros, por terem aceitado participar da minha banca, pelas correções e pelas sugestões. Agradeço ao professor Everaldo, também, pelos valiosos conselhos e pelo esclarecimento de várias dúvidas que sugiram ao longo de todo o mestrado.

- Aos professores da graduação Fábio dos Santos, Kalazas Vasconcelos e Paulo Rabelo, por grandes contribuições em minha formação.

- Aos meus colegas de mestrado, em especial a Adriano, Elano, Eduardo, Elielson, Diego, Mauricio, Pitágoras, Hudson, Tarciana, Roberto, Simeão, Anselmo, Juanice, Márcio, Andréa, Flávio, Reginaldo e Yane, pela amizade e companheirismo.

- À galera do futebol, à galera da graduação de matemática e estatística da UFPB, à galera do mestrado em engenharia mecânica, à galera do Maria Eulina e da padaria, as meninas da virtual, à dona Gisa, a seu Mariano, a seu Severino e a seu Silvano, pelos momentos divertidos que passamos juntos.

- A CAPES pelo apoio financeiro.

- Por fim, a todos que de forma direta ou indireta contribuiram para a realização desse trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev,

$$-\Delta u = \lambda \left|u\right|^{2^*-2} u + f\left(x, u\right), \ x \in \Omega \text{ e } u\left(x\right) = 0, x \in \partial\Omega,$$

onde $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio suave e limitado, λ é um parâmetro real positivo e $2^* = 2N/\left(N-2\right)$ é o expoente crítico de Sobolev. Na prova dos resultados, usamos métodos variacionais, tais como, teoremas do tipo minimax, teoremas do tipo Lusternik-Schnirelman, bem como, lemas de concentração-compacidade.

Palavras-chave:
Expoente crítico de Sobolev; Métodos minimax; Categoria de Lusternik-Schnirelman; Princípio de Concentração-Compacidade.

Abstract

In this dissertation, we study the multiplicity of solutions for the following class of semilinear elliptic problems involving the critical Sobolev exponent,

$$-\Delta u = \lambda \left|u\right|^{2^*-2} u + f\left(x, u\right), \ x \in \Omega \text{ e } u = 0, \ x \in \partial\Omega,$$

where $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth and bounded domain, λ is a positive real parameter and $2^* = 2N/\left(N-2\right)$ is the critical Sobolev exponent. In obtaining our result, we use variational methods, such as, minimax theorems, Lusternik-Schnirelman theorems, as well as, concentration-compactness lemma.

Key-words:
Critical Sobolev exponent; Minimax methods; Lusternik-Schnirelman category; Concentration-Compactness Principle.

Notação e Terminologia

Aqui, indicamos as notações e terminologias usadas ao longo do trabalho.

- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- $B(x,r)$ denota a bola aberta centrada em x de raio r;
- $\text{supp}(f)$ é o suporte da função f;
- $\rightharpoonup$, $\rightarrow$, denotam convergência fraca e forte, respectivamente, em um espaço normado X;
- $\langle .,. \rangle$ denota o par de dualidade entre o espaço X e o seu dual X';
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $\mathcal{X}_\Omega$ denota a função característica do conjunto Ω;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u;
- $L^p(X,\mu) = \left\{u : X \to \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int |u|^p \, d\mu < +\infty\right\}$ em que $1 \leq p < +\infty$, com norma dada por
$$||u||_p = \left(\int_X |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Quando $X \subset \mathbb{R}^N$ e μ é a medida de Lebesgue denotaremos $L^p(X,\mu)$ por $L^p(X)$;
- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por
$$||u||_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}$$
- $C(X)$ o espaços das funções contínuas;
- $C^k(X)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre X e $C^\infty(X) = \cap_{k\geq 1} C^k(X)$;
- $C_c(X) = \{f \in C(X); \text{ supp}(f) \text{ é compacto}\}$;

- $C_0(X) = \{f \in C(X); \text{ o conjunto } \{x; |f(x)| \geq \epsilon\} \text{ é compacto, para todo } \epsilon > 0\}$;

- $C_c^k(X) = C^k(X) \cap C_c(X)$, $C_0^k(X) = C^k(X) \cap C_0(X)$, $C_c^\infty(X) = C^\infty(X) \cap C_c(X)$ e $C_0^\infty(X) = C^\infty(X) \cap C_0(X)$;

- Seja μ uma medida. A relação $v(E) = \int_E f d\mu$, para todo $E \in \sigma-$álgebra, será denotada por $v = f d\mu$.

- Para $1 \leq p < +\infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega);\ \text{existem } g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega)\ \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ i = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

  com a norma dada por

$$||u||_{1,p} = \left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |u|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma acima. Quando $p = 2$, $W_0^{1,p}(\Omega) = H_0^1$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

- O dual de $H_0^1(\Omega)$ é H^{-1} com a norma $||.||_{H^{-1}}$.

- Para $f \in C(X)$, denotemos por $||f||_u = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$.

- $S = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$ é a melhor constante para a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$.

- q.s. é uma abreviação para quase sempre.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência e multiplicidade de soluções para o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \left|u\right|^{2^*-2} u + f\left(x,u\right), & x \in \Omega, \\ u\left(x\right) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio suave e limitado, λ é uma constante real positiva e $2^* = 2N/\left(N-2\right)$ é o expoente crítico de Sobolev. Salientamos que quando falamos de solução neste texto, estamos nos referindo a solução fraca.

Um dos resultados pioneiros envolvendo problemas críticos não-lineares foram obtidos no célebre artigo de Brézis e Nirenberg [4]. Esse trabalho tem motivado uma grande quantidade de pesquisa sobre essa classe de problemas. Brézis e Nirenberg garantiram a existência de solução para o problema que estudamos no Capítulo 2 em [4]. Em 1989, Olivier Rey, em [19], garantiu, sob certas condições impostas sobre o domínio, a multiplicidade de soluções, para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N \ (N \geq 5)$ e em 1992, Monica Lazzo, no artigo [17], melhora o resultado obtido por Rey, pois garante a multiplicidade de soluções quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N \ (N \geq 4)$. O resultado do Capítulo 3 foi estudado por Silva e Xavier em [22] e garante, sob certas condições impostas sobre a não-linearidade, a multiplicidade de soluções para um problema que também foi estudado em [4]. Outros trabalhos que também tratam dessa classe de problemas são [2], [5], [6], [7], [13], [14], [19], [22].

Nossa abordagem para estudar (1) é variacional, isto é, associaremos ao problema (1) um funcional energia, cujos pontos críticos serão exatamente as soluções de (1). Na obtenção dos pontos críticos, usaremos teoremas do tipo minimax e lemas de concentração-compacidade. A principal dificuldade em lidar com esse tipo de problema vem do fato de que o funcional associado não satisfaz a condição de Palais-Smale, devido a imersão de $H_0^1\left(\Omega\right)$ em $L^{2^*}\left(\Omega\right)$ não ser compacta.

O nosso trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice. No *Capítulo 1,* apresentamos resultados que nos auxiliam nas demonstrações dos resultados principais. Na *Seção 1.1,* abordamos a categoria de Lusternik-Schnirelman. Apresentamos definições e resultados que são usados na *Seção 1.2.* Nessa, demonstramos os teoremas de minimax do tipo Lusternik-Schnirelman que são os resultados centrais usados na prova do principal teorema do *Capítulo 2.* Em seguida, na *Seção 1.3,* caracterizamos o dual topológico do espaço $C_0\left(X\right)$ com o objetivo de esclarecer as hipóteses e demonstrar o Lema de Concentração-Compacidade de Lions. Este é enunciado e demonstrado na *Seção 1.4* e nos possibilita mostrar que o funcional energia associado ao problema tratado no *Capítulo 3* satisfaz a condição de Palais-Smale.

No *Capítulo 2,* estabelecemos a multiplicidade de soluções não-negativas de (1), para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, $\lambda = 1$, $f(x,u) = -\varepsilon u$ e ε é um parâmetro real satisfazendo $\varepsilon > -\lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω nas condições de fronteira de Dirichlet. Mais especificamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \ u \geq 0. \end{cases} \tag{P_ε}$$

Iniciamos o capítulo fazendo estimativas a priori sobre o problema. Em seguida, mostramos que existe $\varepsilon^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que para $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$ o problema (P_ε) possui pelo menos $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não-triviais. Para isso, definimos o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2\right) dx, u \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega); \psi(u) = 1\}, \text{ onde } \psi(u) = \textstyle\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*} dx,$$

e mostramos que $\varphi|_V$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Como consequência deste fato, obtemos que o funcional

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \lambda v^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx, \ v \in H_0^1(\Omega)$$

satisfaz a condição de Palais-Smale e que

$$||\Phi'(v)|| = \frac{\mu^{\frac{N-2}{4}}}{2}\left|\left|\varphi'(u) - \rho\psi'(u)\right|\right|$$

onde $\mu, \rho \in \mathbb{R}$ e $v = \mu^{\frac{N-2}{4}}u$. Em seguida, provamos que $\varphi|_V$ é limitado inferiormente e, usando propriedades da aplicação centro de massa, que $cat_{\varphi^{m(\varepsilon)}}\left(\varphi^{m(\varepsilon)}\right) \geq cat_\Omega(\Omega)$, onde $m(\varepsilon)$ será definido ao longo do texto. Assim, aplicando o Teorema 1.2.11, demonstramos que $\varphi|_V$ possui no mínimo $cat_\Omega(\Omega)$ pontos críticos. Desse modo, pela Proposição 1.2.4 e pela relação acima, obtemos o resultado desejado.

No *Capítulo 3,* lidamos com a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + f(x,u), x \in \Omega \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $N \geq 3$, λ é uma constante positiva, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que é ímpar na segunda variável. Além disso, para a função f acrescentamos as seguintes condições:

f$_0$) $\sup\{|f(x,s)|;$tal que $x \in \Omega, |s| \leq M\} < +\infty$, para cada $M > 0$;

f$_1$) $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, uniformemente q.s. em Ω;

f$_2$) Existem $\sigma \in [0,2)$ e a_1, $a_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2} f(x,s)\, s - F(x,s) \geq -a_1 - a_2 |s|^{\sigma}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega$$

f$_3$) Existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$F(x,s) \geq \lambda_k \frac{|s|^2}{2} - B, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$,

f$_4$) $\limsup\limits_{s \to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = a(x) \leq\neq \lambda_j$, uniformemente q.s. em Ω, onde $\lambda_j \leq \lambda_k$ são autovalores de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet.

Para estabelecermos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (P_λ) usamos uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha dada por Ambrosetti e Rabinowitz em [1]. As hipóteses $\mathbf{f}_1$) e $\mathbf{f}_2$) juntamente com o Lema de Concentração-Compacidade de Lions, possibilitam demonstrar que o funcional energia associado a (P_λ) satisfaz a condição de Palais-Smale abaixo de um certo nível, para λ suficientemente pequeno. As condições $\mathbf{f}_3$) e $\mathbf{f}_4$) fornecem a geometria necessária para aplicarmos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Mostramos, ainda, que quando f não é ímpar na segunda variável e valem $\mathbf{f}_1$), $\mathbf{f}_2$), $\mathbf{f}_4$) e $\mathbf{f}_3$) com $\lambda_k = \lambda_1$, existe uma solução não-trivial não-negativa e uma solução não-trivial não-positiva. Além disso, provamos, através de um contra-exemplo, que esse último resultado não vale se f não verificar a hipótese $\mathbf{f}_3$) com $\lambda_k = \lambda_1$.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo a *Introdução* e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os problemas, bem como, as hipóteses consideradas.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados relacionados à teoria de categoria de Lusternik-Schnirelman e a teoria de medida.

1.1 A Categoria de Lusternik-Schnirelmann

Nesta seção, desenvolveremos, de forma suscinta, a teoria de categoria de Lusternik–Schnirelmann necessária para demonstrarmos os teoremas de minimax que usaremos para provar o Teorema 2.1.5, resultado principal do Capítulo 2. Além das definições e proposições necessárias para as demonstrações dos teoremas da próxima seção, dispomos alguns exemplos e observações que ilustram o alcance dessa teoria, porém procuramos fazer isso de maneira breve e objetiva. Para um maior aprofundamento do tema, veja referências [10], [12], [20], [25].

Definição 1.1.1 *Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é contrátil em X, se existe uma aplicação contínua $h : [0,1] \times A \to X$ tal que*

$$h(0,x) = x$$

e

$$p = h(1,x) = h(1,y)\,, \text{para todo } x, y \in A,$$

ou seja, existe uma homotopia entre a identidade de A e uma aplicação constante. Chamamos a aplicação h de deformação de A em X.

Observação 1.1.2 *Todo conjunto contrátil X é conexo por caminhos. Com efeito, dado $x \in X$, defina o caminho $\gamma_x : [0,1] \longrightarrow X$*

$$\gamma_x(t) = h(t,x)$$

onde h é a homotopia entre a identidade de X e uma aplicação constante. Logo, γ_x é contínua, $\gamma_x(0) = h(0,x) = x$ e $\gamma_x(1) = h(1,x) = p \in X$.

Definição 1.1.3 *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $A \subset E$ é estrelado em relação a um ponto $p \in A$, quando para todo $x \in A$ o segmento unindo x a p está contido em A, isto é,*

$$[x,p] \equiv \{(1-t)\,x + tp\ ; 0 \le t \le 1\} \subset A.$$

Observação 1.1.4 *Seja E um espaço vetorial. Se $A \subset E$ é estrelado em relação a um ponto p, então A é contrátil. É suficiente considerarmos a deformação de A em X dada por $h(t, x) = (1 - t)x + tp$.*

Como consequência da Observação 1.1.4, temos que se $A \subset E$, E um espaço vetorial, é convexo, então A é contrátil.

Observação 1.1.5 *Sejam X e $\overline{X}$ espaços topológicos e $\Phi : X \to \overline{X}$ um homeomorfismo. Se A é contrátil em X, então $\Phi(A)$ é contrátil em $\overline{X}$, porque sendo h a deformação de A em X, basta considerarmos*

$$\overline{h}(t, x) = \Phi\left(h\left(t, \Phi^{-1}(x)\right)\right).$$

Vejamos alguns exemplos de conjuntos contráteis.

Exemplo 1.1.6 $\overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leq 1\}$ *é contrátil em* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.7 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| = 1\}$ *é contrátil em* $\mathbb{R}^n$*, visto que*

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1] \times S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t, x) & \mapsto & x - tx. \end{array}$$

é uma deformação de S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.8 *Seja $A \subset X$, onde X é um espaço topológico. A categoria de A em X, que denotaremos por $cat_X(A)$, é o menor inteiro k tal que A pode ser coberto por k subconjuntos fechados e contráteis em X. Se não existir tal inteiro, dizemos que $cat_X(A) = +\infty$. Além disso, consideraremos $cat_X(\emptyset) = 0$ e representaremos $cat_X(X)$ por $cat(X)$.*

Os exemplos 1.1.6 e 1.1.7 mostram que $cat_{\mathbb{R}^n}(S^{n-1}) = cat_{\mathbb{R}^n}(\overline{B(0,1)}) = 1$. Exemplos de conjuntos que tem categoria maior que 1 é a esfera n-dimensional S^n cuja $cat_{S^n}(S^n) = 2$ e o toro n-dimensional $\mathcal{T}^n$ cuja $cat_{\mathcal{T}^n}(\mathcal{T}^n) = n + 1$. Para a prova desses fatos ver [20].

Observação 1.1.9 *Sejam A , $Y \subset X$ fechados com $A \subset Y$. Se A é contrátil em Y, então A também é contrátil em X. E assim, $cat_X(Y) \leq cat_Y(Y)$. De fato, se $h : [0,1] \times A \to Y$ é uma deformação, então $h : [0,1] \times A \to X$ também o é.*

Na próxima proposição, listaremos e demonstraremos algumas propriedades de categoria.

Proposição 1.1.10 *Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X. A categoria satisfaz as seguintes propriedades:*

i) *Se $A \subset B$ então $cat_X(A) \leq cat_X(B)$;*

ii) $cat_X(A \cup B) \leq cat_X(A) + cat_X(B)$;

iii) *Se $cat_X(B) < +\infty$ então $cat_X(A) - cat_X(B) \leq cat_X(A \backslash B)$;*

iv) *Se* $\eta : [0,1] \times X \to X$ *é uma deformação de* X*, isto é,* η *é contínua e* $\eta(0,u) = u$*, para todo* $u \in X$*, então* $cat_X(\eta(1,A)) \geq cat_X(A)$*;*

v) *Sejam* M *uma variedade modelada em um espaço de Hilbert e* K *um subconjunto compacto de* M*. Então,* $cat_M(K) < +\infty$ *e existe uma vizinhança* U *de* K *tal que* $cat_M(\overline{U}) = cat_M(K)$*;*

vi) *Sejam* $X, \widehat{X}$ *espaços topológicos e* $\Phi : X \to \widehat{X}$ *um homeomorfismo. Se* A *é um subconjunto fechado de* X *e* $\widehat{A} = \Phi(A)$*, então* $cat_X(A) = cat_{\widehat{X}}(\widehat{A})$*.*

vii) *Se* X *é homotopicamente equivalente a* Y*, ou seja, existem aplicações* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to X$ *contínuas tais que* $f \circ g$ *é homotopica a aplicação identidade de* Y *e* $g \circ f$ *é homotopica a aplicação identidade de* X*, então* $cat_X(X) = cat_Y(Y)$*.*

Demonstração: Observemos que se algum dos termos à direita nas desigualdades for infinito, não há o que demonstrar.

Prova de $i)$: Se $cat_X(B) = n$ então existem $B_1, ..., B_n$ subconjuntos fechados e contráteis em X que cobrem B. Consequentemente, A também pode ser coberto por $B_1, ..., B_n$. Daí, $cat_X(A) \leq n$.

Prova de $ii)$: Se $cat_X(A) = n$ e $cat_X(B) = k$, então existem $A_1, ..., A_n$ e $B_1, ..., B_k$ fechados e contráteis em X tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ e } B \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i.$$

Logo,

$$A \cup B \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right),$$

donde $cat_X(A \cup B) \leq n + k$.

Prova de $iii)$: Como $A \subset (A \backslash B) \cup B$, pelo item $ii)$ temos que

$$cat_X(A) \leq cat_X(A \backslash B) + cat_X(B)$$

e desde que $cat_X(B) < +\infty$, segue o resultado.

Prova de $iv)$: Seja $\Phi(u) = \eta(1,u)$ e suponha que $cat_X(\Phi(A)) = k$. Daí, existem $A_1, ..., A_k$ fechados e contráteis em X tais que

$$\Phi(A) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Temos que $\Phi^{-1}(A_i)$ é contrátil em X, pois a identidade de $\Phi^{-1}(A_i)$ é homotópico a $\Phi(u)$ que, por sua vez, é homotópico a uma aplicação constante, já que A_i é contrátil. Desde que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Phi^{-1}(A_i),$$

temos o resultado.

Prova de $v)$: A demonstração deste item envolve conceitos que fogem ao objetivo deste texto. O leitor mais interessado pode encontrar a demonstração em [20].

Prova de $vi)$: Se $cat_X(A) = k$ então existem $A_1, ..., A_k$ fechados e contráteis em X tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Pela Observação 1.1.5, $\Phi(A_i)$ são contráteis em $\widehat{X}$ e visto que

$$\widehat{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Phi(A_i),$$

segue que $cat_X(\widehat{A}) \leq cat_X(A)$. Repetindo o raciocínio com $\widehat{A}$ em lugar de A, obtemos o resultado.

Prova de $vii)$: Suponha que $cat(Y) = k$. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funções contínuas tais que $g \circ f$ é homotopicamente equivalente à Id_X e $Y_1, ..., Y_k$ fechados contráteis em Y tais que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i.$$

Consideremos $X_i = f^{-1}(Y_i)$. Afirmamos que X_i é contrátil em X para $i = 1, ..., k$. De fato, como Y_i é contrátil em Y, temos que $g|_{Y_i}$ é homotopicamente equivalente a uma função constante e portanto $g \circ f|_{X_i}$ é homotopicamente equivalente a uma função constante. Por outro lado, por hipótese, $g \circ f|_{X_i}$ é homotopicamente equivalente à $Id|_{X_i}$. Logo, $cat_X(X) \leq cat_Y(Y)$. Analogamente, temos $cat_Y(Y) \leq cat_X(X)$. ■

Definição 1.1.11 *Sejam A, B, Y subconjuntos fechados de um espaço topológico X. Dizemos que A deforma em B relativo a Y em X, e denotamos por $A \prec_Y B$ em X, se $Y \subset A \cap B$ e existe $h \in C([0,1] \times A, X)$ tal que*

i) *$h(0,u) = u$, para todo $u \in A$;*

ii) *$h(1,u) \in B$, para todo $u \in A$;*

iii) *$h(t,Y) \subset Y$, para todo $t \in [0,1]$.*

Exemplo 1.1.12 *Sejam $A = ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \times \mathbb{R}$ e $Y = \{(0,0), (1,0)\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Veja que $A \prec_Y Y$.Basta considerar a função $h : [0,1] \times A \to \mathbb{R}^2$, onde*

$$h(t,(x,y)) = \begin{cases} (1-t)(x,y), & se\ \ (x,y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \\ (1-t)(x,y) + t(1,0), & se\ \ (x,y) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definição 1.1.13 *Sejam Y e A subconjuntos fechados de um espaço topológico X, onde $Y \subset A$. A categoria de A em X relativo a Y, que denotaremos por $cat_{X,Y}(A)$, é o menor inteiro k tal que existem $k+1$ subconjuntos fechados A_0, $A_1, ..., A_k$ em X satisfazendo*

i) $A = \bigcup_{i=0}^{k} A_i$;

ii) $A_1, ..., A_k$ *são contráteis em* X;

iii) $A_0 \prec_Y Y$ *em* X.

Se não existir um tal inteiro, dizemos que $cat_{X,Y}(A) = +\infty$.

Observação 1.1.14 *Quando* $Y = \emptyset$, $cat_{X,Y}(A) = cat_X(A)$.

Exemplo 1.1.15 *Considere* $X = \mathbb{R}^2$, $A = ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \times \mathbb{R}$ *e* $Y = \{(0,0), (1,0)\}$. *Temos que* $cat_{\mathbb{R}^2,Y}(A) = 1$, *pois, pelo Exemplo 1.1.12, temos que* $A \prec_Y Y$. *Além disso,* $A \cup ([0,1] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ *e* $[0,1] \times \mathbb{R}$ *é contrátil em* $\mathbb{R}^2$.

Na próxima proposição, listaremos e demonstraremos algumas propriedades de categoria relativa.

Proposição 1.1.16 *Sejam* A, B *e* Y *subconjuntos fechados de um espaço topológico* X, *com* $Y \subset A \cap B$. *Então, temos*

i) $cat_{X,Y}(Y) = 0$;

ii) $cat_{X,Y}(A \cup B) \leq cat_{X,Y}(A) + cat_X(B)$;

iii) *Se* $A \prec_Y B$, *então* $cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$;

iv) $cat_{X,Y}(A) \leq cat_X(A)$.

Demonstração: Novamente, se algum dos termos à direita nas desigualdades for infinito, não há o que demonstrar.

Prova de $i)$: Considerando a aplicação

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1] \times X & \rightarrow & X \\ & (t,u) & \mapsto & u, \end{array}$$

temos que $Y \prec_Y Y$ em X, demonstrando o item.

Prova de $ii)$: Sejam $cat_{X,Y}(A) = n$ e $cat_X(B) = m$. Logo, existem $A_0, A_1, ..., A_n$ subconjuntos fechados de X tais que

$$A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i,$$

$A_1, ..., A_n$ são contráteis em X e $A_0 \prec_Y Y$ em X, como também existem $B_1, ..., B_m$ fechados e contráteis em X tais que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i.$$

Portanto,

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} (B_i \cap B)\right)$$

o que mostra o item.

Prova de $iii)$: Suponha que $cat_{X,Y}(B) = n$. Logo, existem $B_0, B_1, ..., B_n$ fechados em X, onde $B_0 \prec_Y Y$, $B_1, ..., B_n$ são contráteis em X e

$$B = \bigcup_{i=0}^{n} B_i.$$

Daí, existe $h_0 : [0,1] \times B_0 \to X$ contínua satisfazendo

$$h_0(0,u) = u,\ h_0(1,u) \in Y,\ \text{para todo } u \in B_0$$

e

$$h_0(t,Y) \subset Y,\ \text{para todo } t \in [0,1].$$

Também existem $h_i : [0,1] \times B_i \to X$ contínuas tais que

$$h_i(0,u) = u \text{ e } h_i(1,u) = h_i(1,v),\ \text{para todo } u,v \in B_i \text{ e para } i = 1,...,n.$$

Como $A \prec_Y B$, existe $h : [0,1] \times A \to X$ contínua cumprindo

$$h(0,u) = u,\ h(1,u) \in Y,\ \text{para todo } u \in B$$

e

$$h(t,Y) \subset Y,\ \text{para todo } t \in [0,1].$$

Agora, definamos $A_i = h^{-1}(B_i)$, $i = 0,...,n$. Assim, $A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Considerando as funções

$$\overline{h}_i(t,u) = h_i(t,h(t,u)),\ i = 0,...,n,$$

segue que $A_0 \prec_Y Y$ e que A_i é contrátil para $i = 1,...n$, o que prova o resultado.

Prova de $iv)$: Se $cat_X(A) = n$, basta considerar $A_0 = \emptyset$ e, portanto,

$$A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$$

onde $A_1, ..., A_n$ são fechados contráteis em X. ■

1.2 Teoremas do Tipo Lusternik–Schnirelmann

A partir dos resultados da seção anterior estabeleceremos teoremas de minimax que serão essenciais para a demonstração do Teorema 2.1.5.

Para tanto, ao longo desta seção, considere $(X, ||.||)$ um espaço de Banach , $\psi \in C^2(X,\mathbb{R})$,

$$V = \{v \in X; \psi(v) = 1\} \text{ e } \psi'(v) \neq 0, \text{para todo } v \in V,$$

isto é, 1 é um valor regular para ψ.

Definição 1.2.1 *O espaço tangente a variedade V num ponto $v \in V$ é o núcleo do funcional $\psi'(v)$, ou seja,*

$$T_vV = \left\{ y \in X;\ \left\langle \psi'(v), y \right\rangle = 0 \right\}.$$

Definição 1.2.2 *Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. A norma da derivada de $\varphi|_V \equiv \varphi_V$ é definida por*

$$\left|\left|\varphi_V'(u)\right|\right|_* = \sup \left\{ \left\langle \varphi'(u), y \right\rangle;\ y \in T_uV \text{ e } ||y|| = 1 \right\}.$$

A seguir faremos uma caracterização da norma dada na definição anterior. Para isso presisamos do seguinte lema

Lema 1.2.3 *Sejam f e g funcionais lineares em um espaço vetorial V. Se $\ker f \subset \ker g$ então $g = kf$, onde k é uma constante real.*

Demonstração: Se $f \equiv 0$ então $g \equiv 0$ e está provado a afirmação. Suponha $f \neq 0$ e tomemos $v \in V$ tal que $f(v) \neq 0$. Consideremos

$$k = \frac{g(v)}{f(v)}.$$

e o funcional linear $h(x) = g - kf$. Temos que $h(x) = 0$ para todo $x \in \ker f$, pois $\ker f \subset \ker g$, e que $h(v) = 0$. Assim, como $\ker f$ é um hiperplano de V, segue que $h \equiv 0$.

■

Proposição 1.2.4 $\left|\left|\varphi_V'(u)\right|\right|_* = \min\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \left|\left|\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)\right|\right|.$

Demonstração: Para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\varphi_V'(u)\right|\right|_* &= \sup\{\left\langle \varphi'(u), y \right\rangle;\ y \in T_uV \text{ e } ||y|| = 1\} \\
&= \sup\{\left\langle \varphi'(u) - \lambda\psi'(u), y \right\rangle;\ y \in T_uV \text{ e } ||y|| = 1\} \\
&\leq \sup\{\left\langle \varphi'(u) - \lambda\psi'(u), y \right\rangle;\ ||y|| = 1\} \\
&= \left|\left|\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)\right|\right|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos , pelo teorema de Hahn-Banach , que existe um funcional linear contínuo Φ sobre X tal que

$$\Phi|_{T_uV} = \varphi_V'(u) \text{ e } ||\Phi|| = \left|\left|\varphi_V'(u)\right|\right|_*$$

onde $\varphi_V'(u) = \varphi'(u)|_{T_uV}$. Como $\ker\psi'(u) = T_uV \subset \ker\left(\varphi'(u) - \Phi\right)$, pelo lema anterior, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi'(u) - \Phi = \lambda_0\psi'(u).$$

Logo,

$$\left|\left|\varphi'(u) - \lambda_0\psi'(u)\right|\right| = ||\Phi|| = \left|\left|\varphi_V'(u)\right|\right|_*.$$

■

Observação 1.2.5 *Como uma consequência da proposição anterior,* $\varphi_V'(u) = 0$ *se, e somente se, existe um* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi'(u) = \lambda\psi'(u)$, *que é um resultado do tipo multiplicadores de Lagrange.*

Ao longo desta seção fixaremos a seguinte notação:
$\varphi^d = \{u \in V;\ \varphi(u) \leq d\}$;
$K_c = \left\{u \in V; \varphi(u) = c \text{ e } \left\|\varphi'(u)\right\|_* = 0\right\}$;
$S_\delta = \{u \in X;\ dist(u, S) < \delta\}$.
Para demonstrarmos o primeiro teorema de minimax, utilizaremos o seguinte lema de deformação, cuja demonstração pode ser encontrada em [25] :

Lema 1.2.6 *Sejam* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset V$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que*

$$\left\|\varphi_V'(u)\right\|_* \geq \frac{8\epsilon}{\delta}, \text{ para todo } u \in \varphi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

Então existe $\eta \in C([0,1] \times V, V)$ *satisfazendo*

i) $\eta(t, u) = u$ *se* $t = 0$ *ou* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

ii) $\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$;

iii) $\varphi(\eta(., u))$ *é não crescente para todo* $u \in V$.

Para os próximos quatro resultados consideremos:
1) $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$;
2) $Y \subset \varphi^d$ é um fechado, para $d \in \mathbb{R}$ fixado;
3) Para $j \in \mathbb{N}$, $A_j := \{A \subset \varphi^d;\ A$ é fechado, $Y \subset A$ e $cat_{\varphi^d, Y}(A) \geq j\}$;
4) $c_j := \inf_{A \in A_j} \sup_{u \in A} \varphi(u)$.

Teorema 1.2.7 *Se* $a := \sup_Y \varphi < c := c_k = ... = c_{k+m} \leq d$, *então para cada* $\epsilon \in (0, \frac{c-a}{2})$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ *e* $B \subset \varphi^d$ *fechado tais que* $\sup_{u\in A} \varphi(u) \leq c + \epsilon$ *e* $cat_{\varphi^d}(B) \leq m$, *existe* $u \in V$ *tal que*
i) $c - 2\epsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\epsilon$;
ii) $dist(u, A \backslash intB) \leq 2\delta$;
iii) $||\varphi'(u)||_* \leq \frac{8\epsilon}{\delta}$.

Demonstração: Suponhamos que o resultado seja falso. Logo, existem $\epsilon \in (0, \frac{c-a}{2})$, $\delta > 0$, $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \subset \varphi^d$ fechado tais que

$$\sup_{u \in A} \varphi(u) \leq c + 2\epsilon \text{ e } cat_{\varphi^d}(B) \leq m$$

mas

$$||\varphi'(u)||_* > \frac{8\epsilon}{\delta}, \text{ para todo } u \in V, \text{ que satisfaz } i) \text{ e } ii).$$

No que segue, provaremos três informações que nos auxiliarão na demonstração:

Afirmação 1: $Y \subset \varphi^{c-\epsilon}$.

Seja $y \in Y$, portanto $\varphi(y) \leq a$ e como $\epsilon < c - a$ então $\varphi(y) \leq a < c - \epsilon$, o que significa que $y \in \varphi^{c-\epsilon}$.

Afirmação 2: $cat_{\varphi^d, Y}(\varphi^{c-\epsilon}) \leq k - 1$.

Se $cat_{\varphi^d, Y}(\varphi^{c-\epsilon}) \geq k$ então $\varphi^{c-\epsilon} \in \mathcal{A}_k$, de onde segue que

$$c = c_k \leq \sup_{u \in \varphi^{c-\epsilon}} \varphi(u) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo e isto finaliza a demonstração.

Observe que, se temos $B \subset \varphi^d$ fechado, com $cat_{\varphi^d}(B) \leq m$ e $dist(u, A \backslash int B) \leq 2\delta$, então $B \cap \varphi^d_{c-\epsilon} \subset \varphi^d$ é fechado,

$$cat_{\varphi^d}(B \cap \varphi^d_{c-\epsilon}) \leq m \text{ e } dist(u, A \backslash int(B \cap \varphi^d_{c-\epsilon})) \leq 2\delta.$$

Chamemos $\overline{B} = B \cap \varphi^d_{c-\epsilon}$.

Afirmação 3: $A \backslash int\overline{B} \prec_Y \varphi^{c-\epsilon}$.

Considere $S = A \backslash int\overline{B}$. Desde que para todo $u \in \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ temos $||\varphi'(u)||_* > \frac{8\epsilon}{\delta}$, então existe $\eta : [0,1] \times V \to V$ contínua tal que
i) $\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$;
ii) $\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$.
Daí, já que

$$S \subset A \subset \varphi^{c+\epsilon}$$

vemos que $\varphi^{c+\epsilon} \cap S = S$ e, portanto,

$$\eta(1, S) \subset \varphi^{c-\epsilon}.$$

Além disso, como $\epsilon < \frac{c-a}{2}$, segue que $a = \sup\{\varphi(u); u \in Y\} < c - 2\epsilon$, demonstrando que $y \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$ para todo $y \in Y$ e, portanto,

$$\eta(t, y) = y, \text{ para todo } t \in [0,1] \text{ e para todo } y \in Y,$$

o que mostra a afirmação. Usando as propriedades de categoria obtidas nas Proposições 1.1.10, 1.1.16 e as Afirmações 2 e 3, temos

$$\begin{aligned} k + m &\leq cat_{\varphi^d, Y}(A) \\ &\leq cat_{\varphi^d, Y}((A \backslash int\overline{B}) \cup \overline{B}) \\ &\leq cat_{\varphi^d, Y}(A \backslash int\overline{B}) + cat_{\varphi^d}(\overline{B}) \\ &\leq cat_{\varphi^d, Y}(\varphi^{c-\epsilon}) + m \\ &\leq k - 1 + m. \end{aligned}$$

o que é um absurdo e o teorema está provado. ■

Definição 1.2.8 *Dizemos que $\varphi|_V$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (que denotaremos por$(PS)_c$) quando toda sequência $(u_n) \subset V$ tal que $\varphi(u_n) \to c$ e $||\varphi'(u_n)||_* \to 0$ possui uma subsequência convergente.*

Como consequência do teorema anterior, apresentaremos três resultados que fornecerão informações sobre o número de pontos críticos para um funcional $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ restrito a variedade V.

Teorema 1.2.9 *Se $a := \sup_Y \varphi < c := c_k = ... = c_{k+m} \leq d$ e o funcional $\varphi|_V$ satisfaz a condição $(PS)_c$, então $cat_{\varphi^d}(K_c) \geq m + 1$.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $cat_{\varphi^d}(K_c) \leq m$. Desde que K_c é compacto em V, então $K_c \cap \varphi^d$ é compacto em φ^d. Logo, pela Proposição 1.1.10 item v), existe uma vizinhança fechada B de K_c em φ^d tal que $cat_{\varphi^d}(K_c) = cat_{\varphi^d}(B)$. Pelo Teorema 1.2.7, existem sequências $(u_n) \subset V$ e $(A_n) \subset \mathcal{A}_{k+m}$ tais que $\varphi(u_n) \to c$, $dist\,(u_n, A_n \backslash intB) \to 0$ e $||\varphi'(u_n)||_* \to 0$. Desde que $A_n \backslash intB \subset \varphi^d \backslash intB$, segue que $dist(u_n, \varphi^d \backslash intB) \to 0$. Além disso, pela condição $(PS)_c$, existe (u_{n_j}) tal que $u_{n_j} \to u$ e como $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos $u \in K_c$. Por outro lado, como

$$dist(u_n, \varphi^d \backslash intB) \to dist(u, \varphi^d \backslash intB)$$

segue que $dist(u, \varphi^d \backslash intB) = 0$. Assim, $u \in \varphi^d \backslash intB$ e portanto $u \notin intB$, o que é uma contradição, já que $u \in K_c$ e $K_c \subset intB$. ■

Teorema 1.2.10 *Se o funcional $\varphi|_V$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [c_1, d]$ e $\sup\{\varphi(u); u \in Y\} < c_1$, então $\varphi^{-1}([c_1, d])$ contém pelo menos $cat_{\varphi^d, Y}(\varphi^d)$ pontos críticos de $\varphi|_V$.*

Demonstração: Seja $n = cat_{\varphi^d, Y}(\varphi^d)$. Assim, teremos definidos $c_1, ..., c_n$ e

$$\sup\{\varphi(u); u \in Y\} < c_1 \leq c_2 \leq ... \leq d.$$

Se um dos níveis c_i cumpre $c_i = c_{i+1} = ... = c_{i+m}$ para algum $m \geq 0$, então pelo Teorema 1.2.9 segue que

$$cat_{\varphi^d}(K_{c_i}) \geq m + 1.$$

Logo, K_{c_i} tem pelo menos $m + 1$ elementos. ■

Teorema 1.2.11 *Suponhamos que $\varphi|_V$ seja limitado inferiormente e satisfaz a condição $(PS)_c$, para todo $c \in [\inf\{\varphi(u); u \in V\}, d]$. Então $\varphi|_V$ tem um mínimo e , além disso, φ^d contém pelo menos $cat_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos de $\varphi|_V$.*

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que se $Y = \emptyset$ então $c_1 = \inf\{\varphi(u); u \in V\}$. Como $Y = \emptyset$,

$$\mathcal{A}_1 = \{A \subset \varphi^d; A \text{ é fechado e } cat_{\varphi^d}(A) \geq 1\} = \{A \subset \varphi^d; A \neq \emptyset \text{ e A é fechado}\}.$$

Uma vez que

$$c_1 \leq \sup\{\varphi(u); u \in A\}, \text{para todo } A \in \mathcal{A}_1$$

e tomando $A = \{u\}, u \in \varphi^d$, teremos que

$$c_1 \leq \varphi(u), \text{ para todo } u \in \varphi^d.$$

Portanto $c_1 \leq \inf\{\varphi(u); u \in V\}$. Por outro lado,

$$\sup\{\varphi(u); u \in A\} \geq \inf\{\varphi(u); u \in V\}, \text{ para todo } A \in \mathcal{A}_1$$

donde $c_1 = \inf\{\sup\{\varphi(u); u \in A\}; A \in \mathcal{A}_1\} \geq \inf\{\varphi(u); u \in V\}$. Logo, $c_1 = \inf\{\varphi(u); u \in V\}$, o que mostra a nossa afirmação. Assim, pelo teorema anterior

$$\varphi^{-1}([\inf\{\varphi(u); u \in V\}, d]) = \varphi^d$$

contém pelo menos $cat_{\varphi^d,Y}(\varphi^d) = cat_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos. Além disso, pelo Teorema 1.2.9, temos que $cat_{\varphi^d}(K_{c_1}) \geq 1$, o que implica $K_{c_1} \neq \emptyset$ e portanto $\varphi|_V$ atinge um mínimo. ■

1.3 O Dual de $C_0(X)$

Nesta seção, nosso intuito é caracterizar o dual topológico do espaço vetorial $C_0(X)$, onde X será considerado um espaço de Hausdorff localmente compacto, a menos que se faça menção ao contrário. Para isso, definiremos um espaço vetorial $\mathcal{M}(X)$ no qual os elementos são medidas e mostraremos que $C_0(X)$ é isometricamente isomorfo a tal espaço. Em seguida, introduziremos um tipo de convergência em $\mathcal{M}(X)$ a fim de entendermos melhor as hipóteses do Lema de Concetração-Compacidade.

O texto, a seguir, foi baseado em [11]. As demonstrações dos resultados e as definições utilizadas que não forem apresentadas aqui, podem ser encontradas nessa referência.

Proposição 1.3.1 *Se X é um espaço Hausdorff localmente compacto, $C_0(X)$ é o fecho de $C_c(X)$ na métrica uniforme.*

Definição 1.3.2 *Sejam μ uma medida de Borel em X e E um subconjunto de Borel de X. μ é chamada regular exterior em E se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); E \subset U, \ U \ \textit{aberto}\}$$

e é chamada regular interior em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E, \ K \ \textit{compacto}\}.$$

Se μ é regular exterior e interior em todos os borelianos, μ é chamada regular.

Definição 1.3.3 *Uma medida de Radon em X é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior em todos os borelianos e regular interior em todos os conjuntos abertos.*

Observação 1.3.4 *Denotaremos o espaço das medidas de Radon com sinal por $\mathcal{M}(X)$.*

A seguir, apresentamos resultados sobre medidas de Radon que nos auxiliarão na demonstração do principal resultado desta seção.

Teorema 1.3.5 *Se μ é uma medida com sinal, existem únicas medidas positivas μ^+ e μ^- tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $\mu^+ \perp \mu^-$.*

As medidas μ^+ e μ^- são chamadas variação positiva e variação negativa de μ, respectivamente, e definimos a variação total de μ como sendo a medida dada por

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Proposição 1.3.6 *Se μ é uma medida de Borel, então μ é de Radon se, e somente se, $|\mu|$ é de Radon. Além disso, $\mathcal{M}(X)$ é um espaço vetorial e*

$$\mu \to ||\mu|| = |\mu|(X)$$

é uma norma nesse espaço.

Teorema 1.3.7 *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto em que todo conjunto aberto é $\sigma-$compacto. Então, toda medida de Borel em X que é finita em conjuntos compactos é regular e, portanto, de Radon.*

Teorema 1.3.8 *Seja I é um funcional linear positivo em $C_c(X)$, onde X é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, existe uma única medida de Radon μ tal que para cada $f \in C_c(X)$, temos*

$$I(f) = \int f d\mu.$$

A fim de utilizarmos o teorema anterior, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 1.3.9 *Para cada funcional linear limitado F em $C_0(X)'$, existem dois funcionais lineares positivos F_+ e $F_- \in (C_0(X))'$ tais que $F = F_+ - F_-$.*

Demonstração: Considere $f \in C_0(X)$ não-negativa e defina

$$F_+(f) = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} F(\varphi).$$

Desde que

$$|F(\varphi)| \leq ||F|| \, ||\varphi||_u \leq ||F|| \, ||f||_u$$

para $0 \leq \varphi \leq f$ e $F(0) = 0$, então $0 \leq F_+(f) \leq ||F|| \, ||f||_u$. Além disso, $F_+(f) \geq F(f)$ e pela propriedade do supremo temos que $F_+(cf) = cF_+(f)$ para $c \geq 0$.
Agora, vamos mostrar que dado f e $g \in C_0(X)$ não-negativas, então $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$. Para isso, considere $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 \leq \psi \leq g$. Logo, $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$ e, portanto,

$$F_+(f+g) \geq F(\varphi) + F(\psi).$$

Assim, considerando o supremo, para todo φ e ψ, obtemos

$$F_+(f+g) \geq F_+(f) + F_+(g).$$

Por outro lado, se $0 \leq \psi \leq f + g$ então $0 \leq \min\{\psi, f\} \leq f$ e $0 \leq \psi - \min\{\psi, f\} \leq g$, donde

$$\begin{aligned} F(\psi) &= F(\min\{\psi, f\}) + F(\psi - \min\{\psi, f\}) \\ &\leq F_+(f) + F_+(g). \end{aligned}$$

Tomando o supremo para todo ψ, temos

$$F_+(f+g) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

e, portanto,

$$F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g).$$

Agora, se $f \in C_0(X)$ então f_+ e $f_- \in C_0(X)$. Daí, defina

$$F_+(f) = F_+(f_+) - F_+(f_-).$$

Se $f = g - h$ onde g, $h \geq 0$, então $g + f_- = h + f_+$. Portanto, $F_+(g) + F_+(f_-) = F_+(h) + F_+(f_+)$ o que implica que $F_+(f) = F_+(g) - F_+(h)$, ou seja, $F_+(f)$ independe da escolha de g, $h \geq 0$. Assim,

$$F_+(f) = F_+(g) - F_+(h).$$

Desta forma, definimos F_+ para todo $f \in C_0(X)$ e facilmente verifica-se que $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$ e $F_+(cf) = cF_+(f)$ para $c \geq 0$. Além disso, desde que

$$F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$$

temos $F_+(-f) = -F_+(f)$. Logo, F_+ é um funcional linear em $C_0(X)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} |F_+(f)| &\leq \max\{F_+(f_+), F_+(f_-)\} \\ &\leq ||F|| \max\{||f_+||_u, ||f_-||_u\} = ||F|| \, ||f||_u, \end{aligned}$$

donde $||F_+|| \leq ||F||$. Desde que $F_+(f) \geq 0$ e $F_+(f) \geq F(f)$ para $f \geq 0$, segue que F_+ e $F_- = F_+ - F$ são funcionais lineares positivos, limitados e $F = F_+ - F_-$. ■

No teorema a seguir caracterizaremos o dual do espaço $C_0(X)$. Essa caracterização motivará a definição de convergência fraca no sentido das medidas.

Teorema 1.3.10 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, para cada funcional linear limitado $F \in C_0(X)'$, existe uma única medida de Radon com sinal ν tal que*

$$F(f) = \int f d\nu$$

para cada $f \in C_0(X)$. Mais ainda, $||F|| = |v|(X)$.

Demonstração: Seja $F = F_+ - F_-$ como na Proposição 1.3.9. Então, pelo Teorema 1.3.8, existem medidas μ_1 e μ_2 tais que

$$F_+(f) = \int f d\mu_1 \text{ e } F_-(f) = \int f d\mu_2.$$

Daí, considere $\nu = \mu_1 - \mu_2$. Logo, ν é uma medida de Radon com sinal e

$$F(f) = \int f d\nu.$$

Agora, mostraremos que $||F|| = |v|(X)$. Para isto, observe que, usando o item *b*) da Proposição A.1.12, temos que

$$|F(f)| = \left|\int f d\nu\right| \leq \int |f|\, d|\nu| \leq ||f||_u\, |\nu|(X).$$

Assim, $||F|| \leq |\nu|(X)$. Por outro lado, se $h = \frac{d\nu}{d|\nu|}$ então, pelo item *a*) da Proposição A.1.12, $|h| = 1$ $|\nu|-$q.s.. Daí, pelo Teorema de Lusin (ver Teorema A.1.9 no Apêndice A) , dado $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ tal que $||f||_u \leq 1$ e $f = h$ exceto em um conjunto E com $|\nu|(E) < \frac{\epsilon}{2}$. Então,

$$\begin{aligned}
|\nu|(X) &\leq \int d|\nu| \\
&= \int h^2 d|\nu| \\
&\leq \left|\int f d\nu + \int (h-f)\, d\nu\right| \\
&= \left|\int f d\nu\right| + \left|\int_E (h-f)\, d\nu\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|\int f d\nu\right| + \int_E |h|\, d|\nu| + \int_E |f|\, d|\nu| \\
&\leq \left|\int f d\nu\right| + 2|\nu|(E) \\
&\leq \left|\int f d\nu\right| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $||F|| = |\nu|(X)$. ■

Corolário 1.3.11 *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então, o dual de $C_0(X)$ é (isometricamente isomorfo a) o espaço de todas as medidas de Radon com sinal em X com a norma definida por $||\nu|| = |\nu|(X)$.*

Definição 1.3.0.1 *Dizemos que $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(X)$ converge fracamente para μ no sentido das medidas se*

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu, \text{ para todo } f \in C_0(X).$$

Observação 1.3.12 *Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto que atende ao segundo axioma da enumerabilidade e μ uma medida de Radon positiva em X . Se $f \in L^1(X,\mu)$, a medida definida como*

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu$$

é uma medida finita e, portanto, pelo Teorema 1.3.7, é uma medida de Radon. Mais ainda,

$$||\nu_f|| = \int d|\nu_f| = \int |f|\, d\mu = ||f||_1.$$

Assim, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T: & L^1(X,\mu) & \longrightarrow & \mathcal{M}(X) \\ & f & \mapsto & v_f \end{array}$$

é uma imersão isométrica. Desta forma, podemos considerar $L^1(X,\mu)$ como um subespaço de $\mathcal{M}(X)$.

Lema 1.3.13 *Sejam $(u_n) \subset L^1(X,\mu)$, μ uma medida de Radon positiva e μ_n as medidas dadas por*

$$\mu_n(E) = \int_E |u_n|\, d\mu.$$

Se

$$||\mu_n|| = \int |u_n| d\mu \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então a menos de subsequência, $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(X)$, onde μ é uma medida de Radon positiva.

Demonstração: Pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que existem funcionais F_{μ_n} de $C_0(X)$ tais que

$$F_{\mu_n}(f) = \int f d\mu_n, \text{para todo } f \in C_0(X)$$

e

$$||F_{\mu_n}|| = ||\mu_n|| \leq C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a menos de subsequência, $F_{\mu_n} \overset{*}{\rightharpoonup} F$ onde $F \in (C_0(X))'$. Assim,

$$F_{\mu_n}(f) \to F(f) \text{ para todo } f \in C_0(X),$$

ou seja,

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu \text{ para todo } f \in C_0(X),$$

onde $\mu \in \mathcal{M}(X)$ está associada a F. ■

1.4 Lemas de Concentração-Compacidade

Nesta seção, temos como objetivo demonstrar um Lema de Concentração-Compacidade devido a Lions. Para isso, provaremos um resultado auxiliar.

Lema 1.4.1 *Sejam μ e $\nu \in \mathcal{M}^+(\overline{\Omega})$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, tais que*

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q\, d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ para todo } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

para alguma constante $C \geq 0$ e $1 \leq p < q < +\infty$. Então

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

e

$$\mu \geq C_0^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j},$$

onde J é um conjunto enumerável, $(v_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $(x_j)_{j\in J} \subset \overline{\Omega}$.

Demonstração: Por um argumento de densidade, pois as medidas são finitas, temos que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q \, d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } \varphi \text{ mensurável e limitada.} \tag{1.1}$$

Pelo Teorema da Decomposição de Lebesgue existem medidas $\widehat{\mu}$ e σ tais que

$$\mu = \widehat{\mu} + \sigma$$

onde $\widehat{\mu} << \nu$ e $\sigma \perp \nu$, isto é, existem A e $B \subset \overline{\Omega}$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \overline{\Omega}$ e $\sigma(A) = \nu(B) = 0$. Mais ainda, pelo Teorema de Radon-Nikodým, existe $f \in L^1(\nu)$, $f \geq 0$, tal que $\widehat{\mu} = f d\nu$.
Considere $\varphi = \mathcal{X}_A \psi$, onde ψ é mensurável e limitada. Por (1.1), vemos que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\psi|^q \, d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\psi|^p \, d\widehat{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

donde temos

$$\nu(E)^{\frac{1}{q}} \leq C\widehat{\mu}(E)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo boreliano } E \subset \overline{\Omega} \tag{1.3}$$

e $\nu << \widehat{\mu}$.
Defina $\nu_k = f^{\frac{q}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} d\nu$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, para toda função φ mensurável e limitada, por (1.2), segue que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} \left|f^{\frac{1}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} \varphi\right|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} \left|f^{\frac{1}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} \varphi\right|^p d\widehat{\mu}\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q \, d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} f^{\frac{p}{q-p}+1} \mathcal{X}_{f^k} |\varphi|^p \, d\nu\right)^{\frac{1}{p}}$$

e, portanto,

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^q \, d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p \, d\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, sendo $E \subset \overline{\Omega}$ um boreliano, temos que $\nu_k(E)^{\frac{1}{q}} \leq C\nu_k(E)^{\frac{1}{p}}$. Consequentemente, $\nu_k(E) \geq C^{\frac{pq}{p-q}} = C_1 > 0$. Como $\nu_k(\{x\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \nu_k(B(x,\epsilon))$ para $x \in \overline{\Omega}$, segue que ou $\nu_k(\{x\}) \geq C_1$ ou existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $\nu_k(B(x, \epsilon(x))) = 0$.
Seja $V_k = \{x \in \overline{\Omega};\ \nu_k(\{x\}) \geq C_1\}$. V_k é um conjunto finito, pois, caso contrário, $\nu_k\left(\overline{\Omega}\right) = +\infty$. Considere $K \subset \overline{\Omega} \backslash V_k$ compacto. Logo, K pode ser coberto por um número finito de bolas $B(x, \epsilon(x))$, onde $x \in \overline{\Omega} \backslash V_k$ e $\nu_k(B(x, \epsilon(x))) = 0$ e assim $\nu_k(K) = 0$. Com isso, temos que $\nu_k\left(\overline{\Omega} \backslash V_k\right) = 0$.

Seja

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Para $x \in V$, temos, para algum k_0, que

$$\nu_{k_0}(\{x\}) = f^{\frac{q}{q-p}} \mathcal{X}_{f^{k_0}}(x)\, v(\{x\}) > 0$$

e, portanto, $\nu(\{x\}) > 0$ para todo $x \in V$.
Por outro lado, como $\nu_k\left(\overline{\Omega}\backslash V_k\right) = 0$, segue que

$$\int_{f^{k_0}\backslash V_k} f^{\frac{q}{q-p}} d\nu = \int_{\overline{\Omega}\backslash V_k} f^{\frac{q}{q-p}} \mathcal{X}_{f^k} d\nu = 0,$$

assim $f = 0$ $\nu - q.s.$ em $f^k\backslash V_k$, o que implica que $\widehat{\mu}\left(f^k\backslash V_k\right) = 0$. Logo, por (1.3), $\nu\left(f^k\backslash V_k\right) = 0$.
Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \nu\left(\overline{\Omega}\backslash V\right) &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k\backslash V\right) + \nu\left(\{x \in \overline{\Omega};\ f(x) = +\infty\}\backslash V\right) \\ &\le \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k\backslash V_k\right) + \nu\left(\{x \in \overline{\Omega};\ f(x) = +\infty\}\right) \le 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\nu\left(\overline{\Omega}\backslash V\right) = 0$ e por fim

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde J é enumerável e $\nu_j = \nu(x_j)$ para $x_j \in V$. Além disso, por (1.1), $\nu(\{x_j\})^{\frac{1}{q}} \le C\mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}$ para todo $j \in J$, donde segue que

$$\mu \ge C^{-p} \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j}.$$

■

Agora, demonstraremos o Lema de Concentração-Compacidade. Esse resultado será essencial para demonstrarmos que os funcionais, associados aos problemas do Capítulo 3, atendem a condição de Palais-Smale.

Lema 1.4.2 (Lema de concentração-compacidade) *Suponha* $1 \le p \le N$ *e seja* $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, *tal que,*
(i) $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$;
(ii) $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ *no sentido das medidas;*
(iii) $|u_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \nu$ *no sentido das medidas, onde* μ *e* ν *são medidas não-negativas e limitadas em* $\overline{\Omega}$.
Então existem um conjunto de índices J*, no máximo enumerável, e uma familia* $\{x_j; j \in J\}$ *de pontos em* $\overline{\Omega}$ *tal que*

(1) $\nu = |u|^{2^*} dx + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$, *onde* $\{\nu_j; j \in J\}$ *é um conjunto de números positivos;*

(2) $\mu \ge |\nabla u|^2 dx + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$, *onde* $\{\mu_j; j \in J\}$ *é um conjunto de números positivos.*

Além disso, $S(\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} \le \mu_j$ *para todo* $j \in J$*. Em particular,* $\sum_{j\in J} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} < +\infty$.

Demonstração: Primeiramente, considere $u = 0$. Assim, para $\varphi \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ temos, pela imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$, que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^{p^*} |u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\overline{\Omega}} |\nabla(\varphi u_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.4}$$
$$\leq \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p |\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\overline{\Omega}} |\nabla \varphi|^p |u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, fazendo $n \to +\infty$ em (1.4), temos que

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^{p^*} d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq S^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$$S(\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} = S\nu(\{x_j\})^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu(\{x_j\}) = \mu_j.$$

e, além disso, pelo Lema 1.4.1,

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \text{ e } \mu \geq \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

Agora, para $u \neq 0$, façamos $w_n = u_n - u$. Logo, $w_n \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $w_n(x) \to 0$ q.s. em $\overline{\Omega}$ e

$$\begin{cases} |\nabla w_n|^p \rightharpoonup \mu' \\ |w_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu'. \end{cases}.$$

Para todo $\varphi \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$, pelo Lema de Brézis-Lieb (ver Lema A.1.3 no Apêndice A), temos que

$$\int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u_n|^{p^*} dx - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |w_n|^{p^*} dx \to \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u|^{p^*} dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u_n|^{p^*} dx - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |w_n|^{p^*} dx \to \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu',$$

donde

$$\int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu - \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| d\nu' = \int_{\overline{\Omega}} |\varphi| |u|^{p^*} dx.$$

Logo,

$$\nu = |u|^{2^*} dx + \nu' = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Por (1.4),

$$\left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^{p^*} d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\overline{\Omega}} |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\overline{\Omega}} |\nabla \varphi|^p |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ para todo } \varphi \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Considere $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(0) = 1$ e supp$\varphi = B(0,1)$. Aplicando a desigualdade anterior para $\varphi\left(\frac{x-x_j}{\epsilon}\right)$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $j \in J$, obtemos

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \mu\left(B\left(x_j,\epsilon\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\epsilon}\left(\int_{B(x_j,\epsilon)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\epsilon}\right)\right|^p |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando a Desigualdade de Hölder e o Teorema da Mudança de Variável temos que

$$\begin{aligned}\nu_j^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \mu\left(B\left(x_j,\epsilon\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^N\, dx\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_j,\epsilon)} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \mu\left(B\left(x_j,\epsilon\right)\right)^{\frac{1}{p}} + C\left(\int_{B(x_j,\epsilon)} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ na desigualdade acima, segue que $\mu_j = \mu\left(\{x_j\}\right) \geq S v_j^{\frac{p}{p^*}}$.
Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e a função $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi(u) = \int \varphi\, |\nabla u|^p\, dx, \text{com } \varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right),$$

é convexa e contínua, segue, pela Proposição A.1.11, que

$$\int \varphi\, |\nabla u|^p\, dx \leq \liminf \int \varphi\, |\nabla u_n|^p\, dx = \int \varphi d\mu$$

Logo, $\mu \geq |\nabla u|^p\, dx$. Além disso, $|\nabla u|^p\, dx \perp \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$ e, portanto,

$$\mu \geq |\nabla u|^p\, dx + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

■

Outro Lema de Concentração-Compacidade que usaremos neste trabalho é o seguinte:

Lema 1.4.3 (Lema de concentração-compacidade) *Seja* $(u_n) \subset D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *tal que;*
(i) $u_n \rightharpoonup u$ *em* $D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$;
(ii) $|\nabla u_n - \nabla u| \rightharpoonup \mu$ *em* $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^N\right)$;
(iii) $|u_n - u| \rightharpoonup \nu$ *em* $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^N\right)$;
(iv) $u_n \to u$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$.
Definindo

$$\mu_\infty = \lim_{R\longrightarrow\infty} \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2\, dx \quad e\ \nu_\infty = \lim_{R\longrightarrow\infty} \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*}\, dx$$

então, tem-se que
(1) $||\nu||^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1}\, ||\mu||$ *e* $\nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1}\mu_\infty$;
(2) $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} |\nabla u_n|_2^2 = |\nabla u|_2^2 + ||\mu|| + \mu_\infty$;
(3) $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} |\nabla u_n|_{2^*}^{2^*} = |u|_{2^*}^{2^*} + ||\nu|| + \nu_\infty$.
Além disso, se $u = 0$ *e* $||\nu||^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1}\, ||\mu||$, *então* ν *e* μ *são concentradas em um único ponto.*

Para uma demonstração deste resultado, veja [24, *pág.* 27, Lema 1.40].

Capítulo 2

Multiplicidade de Soluções para um Problema Crítico via Teoremas do Tipo Lusternik–Schnirelmann

2.1 O Problema

Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \ u \geq 0, \end{cases} \tag{P$_\varepsilon$}$$

em que $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > -\lambda_1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 4)$ é um domínio limitado.

Uma solução para o problema (P_ε) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$,que satisfaz

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \varepsilon uv)\, dx - \int_\Omega u^{2^*-1} v dx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 2.1.1 *Ao longo desse trabalho, consideramos em $H_0^1(\Omega)$ a norma do gradiente*

$$||u|| = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,$$

a qual, pela desigualdade de Poincaré, é equivalente a norma usual do $H_0^1(\Omega)$.

Primeiramente, demonstraremos algumas estimativas a priori sobre o problema (P_ε).

Proposição 2.1.2 *Se (P_ε) tem solução não-trivial, então $\varepsilon > -\lambda_1$.*

Demonstração: Dado $u \geq 0$, $u \neq 0$ solução de (P_ε), temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \varepsilon \int_\Omega uv dx = \int_\Omega u^{2^*-1} v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = \varphi_1$, onde $\varphi_1 > 0$ em Ω é uma autofunção associada a λ_1, e usando que

$$\int_\Omega \nabla \varphi_1 \nabla u dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u dx$$

obtemos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 dx + \varepsilon \int_\Omega u\varphi_1 dx = \int_\Omega u^{2^*-1}\varphi_1 dx > 0,$$

o que implica que $\lambda_1 > -\varepsilon$. ■

Além disso, se Ω for estrelado temos:

Proposição 2.1.3 *Se Ω é um domínio estrelado, limitado, com fronteira suave e o problema (P_ε) tem solução não-trivial, então $\varepsilon < 0$.*

Demonstração: Seja $u \neq 0$ uma solução de (P_ε). Considerando

$$f(u) = u^{2^*-1} - \varepsilon u$$

temos que

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds = \frac{1}{2^*}u^{2^*} - \frac{\varepsilon}{2}u^2 \in L^1(\Omega).$$

Assim, pela Identidade de Pohozaev (ver Teorema A.1.2 no Apêndice A), segue que

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu.\sigma d\sigma = \frac{N}{2^*}\int_\Omega u^{2^*} dx - \frac{\varepsilon N}{2}\int_\Omega u^2 dx.$$

Logo,

$$\frac{N-2}{2}\left(\int_\Omega u^{2^*} dx - \varepsilon \int_\Omega u^2 dx\right) + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu.\sigma d\sigma = \frac{N}{2^*}\int_\Omega u^{2^*} dx - \frac{\varepsilon N}{2}\int_\Omega u^2 dx,$$

ou seja

$$\varepsilon \int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu.\sigma d\sigma = 0.$$

Portanto,

$$\varepsilon = \frac{-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu.\sigma d\sigma}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

Como Ω é estrelado, então $\nu.\sigma > 0$ sobre $\partial\Omega$ e assim $\varepsilon \leq 0$. Agora, iremos mostrar que $\varepsilon < 0$. Para isso, suponha que $\varepsilon = 0$. Dessa forma,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \nu.\sigma d\sigma = 0,$$

o que implica que $\nabla u = 0$ sobre $\partial\Omega$ e, por conseguinte,

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u.\nu d\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla \mathcal{X}_\Omega dx = 0.$$

Logo,

$$0 = -\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Omega u^{2^*-1} dx$$

donde $u = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\varepsilon < 0$. ■

Observação 2.1.4 *Brézis e Nirenberg em [4] provaram que o problema* (P_ε) *possui uma solução não-trivial se* $-\lambda_1 < \varepsilon < 0$.

Neste capítulo, nosso intuito é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.1.5 *Se* Ω *é um dominio limitado e suave de* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 4)$, *então existe* $\varepsilon^* \in (-\lambda_1, 0)$ *tal que, para* $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$, *o problema* (P_ε) *possui pelo menos* $cat_\Omega(\Omega)$ *soluções não triviais.*

Para alcançarmos nosso objetivo, consideremos

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2\right) dx, u \in H_0^1(\Omega),$$

restrito a

$$V := \left\{ u \in H_0^1(\Omega); \psi(u) = \int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

Observe que $\varphi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$, $\psi \in C^2\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ e que $c = 1$ é valor regular de ψ. Logo, V é uma subvariedade mergulhada de codimensão 1 em $H_0^1(\Omega)$.

2.2 A Condição de Palais-Smale

Lema 2.2.1 *Toda sequência* $(u_n) \subset V$ *tal que* $\varphi(u_n) \to c < S$ *e* $||\varphi'(u_n)||_* \to 0$ *possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(u_n) = \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + \varepsilon u_n^2)\, dx = ||u_n||_\varphi^2$. Para melhor organizarmos a demonstração, a dividiremos em afirmações.

Afirmação 1:$||u||_\varphi$ é uma norma equivalente a $||u||$.

Desde que $\varepsilon < 0$ temos que $\varepsilon \int_\Omega u^2 dx \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Logo,

$$||u||_\varphi^2 = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2\right) dx \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

de onde segue a afirmação.

Pela afirmação anterior, segue que $c \geq 0$. Se $c = 0$ então $\varphi(u_n) \to 0$, o que implica que $||u_n|| \to 0$ e, portanto, $u_n \to 0$, o que finaliza a demonstração neste caso.
Suponhamos, agora, $c > 0$. Pela Proposição 1.2.4, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\rho_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$||\varphi'(u_n)||_* = \left|\left|\varphi'(u_n) - \rho_n \psi'(u_n)\right|\right|_{H^{-1}},$$

ou seja,

$$\varphi'(u_n) - \rho_n \psi'(u_n) \to 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Como, pela Afirmação 1, (u_n) é limitada e, além disso,

$$\langle \varphi'(u_n), u_n \rangle = 2 \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + 2\varepsilon \int_\Omega u_n^2 dx = 2\varphi(u_n)$$

e
$$\left\langle \psi'\left(u_n\right), u_n \right\rangle = 2^* \int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*} dx = 2^*,$$
segue que
$$\begin{aligned} 2\left(\varphi\left(u_n\right) - \frac{2^*}{2}\rho_n\right) &= 2\varphi\left(u_n\right) - 2^*\rho_n \\ &= \langle \varphi'(u_n), (u_n)\rangle - \rho_n \left\langle \psi'\left(u_n\right), \left(u_n\right) \right\rangle \to 0. \end{aligned}$$
Chamando $\mu_n = \frac{2^*}{2}\rho_n$, temos que $\mu_n \to c$. Assim, podemos supor que $\mu_n > 0$ para todo n. Consideremos agora
$$v_n := \mu_n^{\frac{N-2}{4}} u_n.$$
Temos que
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 + \varepsilon v_n^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*} dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\mu_n^{\frac{N-2}{2}} |\nabla u_n|^2 + \varepsilon \mu_n^{\frac{N-2}{2}} u_n^2\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*}\left(\mu_n^{\frac{N-2}{4}}\right)^{2^*} \int_\Omega \left(u_n^+\right)^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{2}\mu_n^{\frac{N-2}{2}} \varphi\left(u_n\right) - \frac{1}{2^*}\mu_n^{\frac{N}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\mu_n^{\frac{N-2}{2}} \left(\varphi\left(u_n\right) - \mu_n\right) + \frac{1}{N}\mu_n^{\frac{N}{2}} \longrightarrow \frac{c^{\frac{N}{2}}}{N}. \end{aligned}$$
Definindo $\Phi : H_0^1\left(\Omega\right) \to \mathbb{R}$ por
$$\Phi\left(v\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx$$
segue que
$$\Phi\left(v_n\right) \to d = \frac{c^{\frac{N}{2}}}{N} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$
Além disso,
$$\begin{aligned} \left\langle \Phi'\left(v_n\right), v \right\rangle &= \int_\Omega \left(\nabla v_n \nabla v + \varepsilon v_n v\right) dx - \int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*-1} v dx \\ &= \mu_n^{\frac{N-2}{4}} \int_\Omega \left(\nabla u_n \nabla v + \varepsilon u_n v\right) dx - \mu_n^{\frac{N+2}{4}} \int_\Omega \left(u_n^+\right)^{2^*-1} v dx \\ &= \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{4}}}{2} \langle \varphi'(u_n), v\rangle - \frac{\mu_n^{\frac{N+2}{4}}}{2^*} \left\langle \psi'\left(u_n\right), v \right\rangle \\ &= \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{4}}}{2} \left(\langle \varphi'(u_n), v\rangle - \rho_n \left\langle \psi'\left(u_n\right), v \right\rangle\right), \text{ para todo } v \in H_0^1\left(\Omega\right) \end{aligned}$$
e, portanto,
$$||\Phi'(v_n)||_{H^{-1}} = \frac{\mu_n^{\frac{N-2}{4}}}{2} \left|\left|\varphi'(u_n) - \rho_n \psi'\left(u_n\right)\right|\right|_{H^{-1}} \to 0.$$
Assim, (v_n) é uma sequência $(PS)_d$ para o funcional Φ.

Afirmação 2: (v_n) é uma sequência limitada.

Para n grande, temos que

$$\begin{aligned} d+1+||v_n|| &\geq \Phi(v_n) - \frac{1}{2^*}\langle \Phi'(v_n), v_n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\varphi(v_n) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\varphi(v_n) + \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\varphi(v_n) \geq C\,||v_n||^2, \end{aligned}$$

donde

$$d+1+||v_n|| \geq C(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})\,||v_n||^2,$$

o que implica que (v_n) é limitada.

Usando a Afirmação 2, segue que

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla h dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla h dx \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega),$$

pois $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, pela imersão de Sobolev, temos que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 2^*$, o que implica que $v_n \to v$ q.s. em Ω e que

$$\varepsilon \int_\Omega v_n h dx \to \varepsilon \int_\Omega v h dx \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, usando que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 2^*$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*-1} h dx \to \int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*-1} h dx \quad \text{para todo } h \in H_0^1(\Omega).$$

Desde que

$$\langle \Phi'(v_n), h\rangle = \int_\Omega \nabla v_n \nabla h dx + \varepsilon \int_\Omega v_n h dx - \int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*-1} h dx, \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega),$$

obtemos que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h dx + \varepsilon \int_\Omega v h dx - \int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*-1} h dx = 0, \text{ para todo } h \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1}$$

Tomando $h = v$ em (2.1), segue que

$$\Phi(v) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx.$$

Considerando $z_n = v_n - v$ e usando o Lema de Brézis-Lieb, temos

$$\int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*} dx - \int_\Omega \left(z_n^+\right)^{2^*} dx \to \int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx. \tag{2.2}$$

Desde que

$$\begin{aligned}\Phi(z_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n - \nabla v|^2 + \varepsilon (v_n - v)^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(z_n^+\right)^{2^*} dx\\ &= \Phi(v_n) + \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx + \Phi(v) + \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx\\ &- \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(z_n^+\right)^{2^*} dx - \int_\Omega \nabla v_n \nabla v dx - \varepsilon\int_\Omega v_n v dx\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(z_n) &\to d + \Phi(v) + \frac{2}{2^*}\int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*} dx - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega v^2 dx\\ &= d + \Phi(v) + 2\left(\frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2\right) dx\right)\\ &= d - \Phi(v) \leq d.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}||z_n||^2 &= \langle \Phi'(v_n), v_n\rangle - \varepsilon\int_\Omega v_n^2 dx + \int_\Omega \left(v_n^+\right)^{2^*} dx - \int_\Omega \left(z_n^+\right)^{2^*} dx\\ &+ \int_\Omega \left(z_n^+\right)^{2^*} dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2\int_\Omega \nabla v_n \nabla v dx.\end{aligned}$$

Como (v_n) é limitada e uma sequência $(PS)_d$ para o funcional Φ, segue que $\langle \Phi'(v_n), v_n\rangle \to 0$. Assim,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \varepsilon\int_\Omega v^2 dx = \int_\Omega \left(v^+\right)^{2^*} dx.$$

Além disso,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2\int_\Omega \nabla v_n \nabla v dx \to -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx,$$

já que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão de Sobolev, também temos

$$-\varepsilon\int_\Omega v_n^2 dx \to -\varepsilon\int_\Omega v^2 dx.$$

Tomando $h = v$ em (2.1), temos

$$\lim ||z_n||^2 = \lim \int_\Omega \left(z_n^+\right)^{2^*} dx = b \geq 0$$

implicando que

$$\Phi(z_n) \to \frac{b}{N} \leq d. \tag{2.3}$$

Ademais,

$$\int_\Omega |\nabla z_n|^2 \geq S\left(\int_\Omega |z_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

donde

$$b \geq Sb^{\frac{2}{2^*}}. \tag{2.4}$$

Afirmação 3: $b = 0$.

Suponha, por contradição, que $b > 0$. Então, usando (2.4), temos

$$b \geq S^{\frac{N}{2}}.$$

Daí, por (2.3)

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \leq \frac{b}{N} \leq d < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

o que é um absurdo, provando a afirmação. Logo, devemos ter

$$||z_n|| \to 0,$$

isto é, $v_n \to v$ e portanto $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. ■

Corolário 2.2.2 *O funcional Φ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d < c^* = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$.*

Observação 2.2.3 *Note que um ponto crítico não-trivial do funcional Φ é uma solução para o problema (P_ε).*

2.3 Multiplicidade de Soluções

Para demonstrarmos o Teorema 2.1.5, necessitamos de alguns lemas.

Lema 2.3.1 *Suponha $N \geq 4$. Se $\varepsilon \in (-\lambda_1, 0)$, então $m(\varepsilon, \Omega) := \inf\{\varphi(u); u \in V\} < S$ e o ínfimo é assumido.*

Demonstração: Pelo Lema A.1.4 do Apêndice A, existe $v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0$ e $v \geq 0$ tal que

$$\varphi\left(\frac{v}{||v||_{2^*}}\right) < S$$

o que implica que $m(\varepsilon, \Omega) < S$. Além disso, $\varphi \geq 0$ e satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [\inf\{\varphi(u); u \in V\}, S - \epsilon]$. Então, pelo Teorema 1.2.11, φ assume o ínfimo. ■

Consideremos agora a função centro de massa $\beta : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$\beta(u) = \int_\Omega (u^+)^{2^*} x dx$$

onde

$$\int_\Omega (u^+)^{2^*} x dx = \left(\int_\Omega (u^+)^{2^*} x_1 dx, ..., \int_\Omega (u^+)^{2^*} x_n dx\right).$$

Vejamos algumas propriedades desta aplicação.

Lema 2.3.2 *Seja $(u_n) \subset V$ tal que $||u_n||^2 \to S$. Então, dist $(\beta(u_n), \Omega) \to 0$.*

Demonstração: Como, por hipótese, $||u_n||^2 \to S$, segue que $||u_n^+||^2 \to S$, pois

$$||u_n||^2 \geq \left|\left|u_n^+\right|\right|^2 = \frac{||u_n^+||^2}{||u_n^+||_{2^*}^2} \geq S.$$

Assim (u_n^+) é limitada e, portanto,

$$u_n^+ \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) \text{ e } u_n^+ \to u \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, usando o Lema 1.3.13 tem-se

$$\left|\nabla u_n^+ - \nabla u\right|^2 \rightharpoonup \mu \text{ em } M\left(\mathbb{R}^N\right)$$

e

$$\left|u_n^+ - u\right|^{2^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } M\left(\mathbb{R}^N\right). \tag{2.5}$$

Mostraremos que ν está concentrada em um ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Pelo Lema de Concentração-Compacidade 1.4.3 e usando que $u_n \in V$, temos que

$$||\nu||^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1}\,||\mu||\,, \tag{2.6}$$

$$\overline{\lim}\left|\left|\nabla u_n^+\right|\right|_2^2 = S = ||\nabla u||_2^2 + ||\mu|| + \mu_\infty \tag{2.7}$$

e

$$1 = \lim\left|\left|u_n^+\right|\right|_{2^*}^{2^*} = ||u||_{2^*}^{2^*} + ||\nu|| + \nu_\infty. \tag{2.8}$$

Como $u_n^+ = 0$ em $(B_R(0))^C$, para R suficientemente grande, temos que

$$\nu_\infty = 0 \text{ e } \mu_\infty = 0.$$

Daí, por (2.7),

$$S = ||\nabla u_n||_2^2 + ||\mu|| \tag{2.9}$$

e por (2.8) segue que

$$||u||_{2^*}^{2^*} + ||\nu|| = 1. \tag{2.10}$$

Temos também que

$$||u||_{2^*}^2 \leq S^{-1}\,||\nabla u||_2^2\,. \tag{2.11}$$

Assim, usando (2.6),(2.9) e (2.11), obtemos

$$S \geq S\,||u||_{2^*}^2 + S\,||\nu||^{\frac{2}{2^*}}$$

e, portanto,

$$1 \geq \left(||u||_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + ||\nu||^{\frac{2}{2^*}}\,. \tag{2.12}$$

Vamos supor, por absurdo, que

$$0 < ||u||_{2^*}^{2^*}\,, ||\nu|| < 1.$$

Logo, usando (2.10) e (2.12), segue que

$$1 = ||u||_{2^*}^{2^*} + ||\nu|| < \left(||u||_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + ||\nu||^{\frac{2}{2^*}} \leq 1,$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter

$$||u||_{2^*}^{2^*} = 1 \text{ e } ||\nu|| = 0 \text{ ou } ||u||_{2^*}^{2^*} = 0 \text{ e } ||\nu|| = 1. \tag{2.13}$$

Note que a primeira opção em (2.13) não pode ocorrer, já que, por (2.9), $S \geq |\nabla u|_2^2$ o que implicaria que

$$S = \frac{||\nabla u||_2^2}{||u||_{2^*}^2},$$

o que contradiz o Proposição A.1.6 . Sendo assim, por (2.6) e (2.9) temos $||\mu|| = S$ o que mostra que

$$||v||^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1} \, ||\mu|| \, .$$

Pelo Lema de Concentração de Compacidade 1.4.3, segue que ν está concentrada em um ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Afirmamos que $y \in \overline{\Omega}$, pois caso contrário $\nu\left(\overline{\Omega}\right) = 0$ e, por (2.5) e (2.13), temos que

$$\left(u_n^+\right)^{2^*} dx \rightharpoonup v \text{ em } M\left(\mathbb{R}^N\right),$$

o que significa que

$$\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{2^*} dx \to 0,$$

o que é uma contradição, pois

$$\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{2^*} dx = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí, devemos ter

$$\frac{\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*} x dx}{\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*} dx} \to \frac{\int_\Omega x d\nu}{\int_\Omega d\nu} = y,$$

ou seja, $\beta\left(u_n\right) \longrightarrow y \in \overline{\Omega}$, e o lema está provado. ■

Consideremos os seguintes conjuntos

$$\Omega_r^+ := \left\{x \in \mathbb{R}^N ; dist\left(x, \Omega\right) < r\right\}$$

e

$$\Omega_r^- := \left\{x \in \Omega ; dist\left(x, \partial\Omega\right) > r\right\}$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Proposição 2.3.3 *Para $r > 0$ suficientemente pequeno Ω_r^+ e Ω_r^- são homotopicamente equivalentes a Ω.*

Demonstração: Como Ω é limitado e suave segue que $\partial\Omega$ é uma variedade diferenciável compacta. Assim, existe um $\epsilon > 0$ tal que sempre que $x, y \in \partial\Omega$, os segmentos das retas normais de comprimento 2ϵ, centrados em x e y, são disjuntos, isto é, $\partial\Omega$ tem uma vizinhança tubular. Considerando $0 < r < \epsilon$ temos que cada ponto $p \in \Omega_r^+$ está associado a uma única direção normal a $\partial\Omega$. Denotaremos o vetor unitário na direção dessa normal por $\eta(p)$. Dessa forma, a projeção $\pi : \Omega \to \overline{\Omega_r^-}$ e a função $f : \Omega_r^+ \to \Omega$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - r\eta(x), & \text{se } x \in \Omega_r^+ \backslash \Omega \\ \pi(x), & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

estão bem definidas. Além disso, $f \circ \pi$ é homotópico à Id_Ω e $\pi \circ f$ é homotópico à $Id_{\Omega_r^+}$. Logo, Ω_r^+ é homotopicamente equivalente a Ω. Analogamente mostra-se que Ω_r^- é homotopicamente equivalente a Ω. ■

Tomemos um $r > 0$ suficientemente pequeno tal que Ω_r^+ e Ω_r^- sejam homotopicamente equivalentes a Ω e que $B(0,r) \subset \Omega$. Definamos

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) &= m(\varepsilon, B(0,r)) \\ &= \inf\left\{\int_{B(0,r)} \left(|\nabla u|^2 + \varepsilon u^2\right); u \in H_0^1(B(0,r)) \text{ e } \int_{B(0,r)} \left(u^+\right)^{2^*} = 1\right\}. \end{aligned}$$

Da mesma forma como no Lema 2.3.1, temos que $m(\varepsilon) < S$. Além disso, encarando $H_0^1(B(0,r)) \subset H_0^1(\Omega)$, estendendo as funções como sendo zero fora de $B(0,r)$, segue que $m(\varepsilon, \Omega) \leq m(\varepsilon)$.

Lema 2.3.4 *Existe $\varepsilon^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que para $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$, temos que se $u \in \varphi^{m(\varepsilon)}$ então $\beta(u) \in \Omega_r^+$.*

Demonstração: Para cada $u \in V$, temos pela Desigualdade de Hölder que

$$\left|\left|u^+\right|\right|_2^2 = \int_\Omega \left|u^+\right|^2 \leq \left(\int_\Omega \left|u^+\right|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} |\Omega|^{\frac{2}{N}} = |\Omega|^{\frac{2}{N}}.$$

Pelo Lema 2.3.2, existe $\epsilon > 0$ tal que se $u \in V$ e $S \leq ||u||^2 \leq S + \epsilon$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$. A partir daí, escolha $\varepsilon^* = \frac{-\epsilon}{|\Omega|^{\frac{2}{N}}}$. Agora, se $\varepsilon^* < \varepsilon < 0$ e $u \in \varphi^{m(\varepsilon)}$ então

$$\begin{aligned} ||u||^2 &\leq m(\varepsilon) - \varepsilon\, ||u||_2^2 \\ &\leq S - \varepsilon \left|u^+\right|_2^2 \\ &\leq S - \varepsilon^* |\Omega|^{\frac{2}{N}} \\ &= S + \epsilon \end{aligned}$$

e, portanto, $\beta(u) \in \Omega_r^+$. ■

Lema 2.3.5 *Se $N \geq 4$ e $\varepsilon \in (\varepsilon^*, 0)$ então $cat_{\varphi^{m(\varepsilon)}}\left(\varphi^{m(\varepsilon)}\right) \geq cat_\Omega(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{B(0,r)} (v^+)^{2^*} dx = 1 \text{ e } \int_{B(0,r)} \left(|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2\right) dx = m(\varepsilon).$$

Observe que v é solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon u = \theta \left(u^+\right)^{2^*-1}, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema A.1.8 e pela Proposição A.1.7 do Apêndice A, podemos considerar v radial. Assim, defina

$$\begin{aligned} \gamma: \ \Omega_r^- &\longrightarrow \varphi^{m(\varepsilon)} \\ y &\longrightarrow \gamma(y) \end{aligned}$$

em que

$$\gamma(y)(x) = \begin{cases} v(x-y) & \text{,se } x \in B(y,r) \\ 0 & \text{,se } x \in \Omega \backslash B(y,r). \end{cases}$$

Como $v \in C^2(\Omega)$ temos que γ é contínua. Além disso, $\gamma(y) \in \varphi^{m(\varepsilon)}$ pois

$$\int_\Omega \left(\gamma(y)^+\right)^{2^*} dx = \int_{B(y,r)} \left(v^+(x-y)\right)^{2^*} dx = \int_{B(0,r)} \left(v^+\right)^{2^*} dx = 1$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma(y)) &= \int_\Omega \left(|\nabla\gamma(y)|^2 + \varepsilon\gamma(y)^2\right) dx = \int_{B(y,r)} \left(|\nabla v(x-y)|^2 + \varepsilon v(x-y)^2\right) dx \\ &= \int_{B(0,r)} \left(|\nabla v|^2 + \varepsilon v^2\right) dx = m(\varepsilon), \end{aligned}$$

e $\beta \circ \gamma = id$, visto que se $y \in \Omega_r^-$ então, para $i \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\gamma(y)^+\right)^{2^*} x_i dx &= \int_{B(y,r)} \left(v(x-y)^+\right)^{2^*} x_i dx \\ &= \int_{B(0,r)} \left(v(z)^+\right)^{2^*} (z_i + y_i)\, dz \\ &= y_i + \int_{B(0,r)} \left(v(z)^+\right)^{2^*} z_i dz \\ &= y_i. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que

$$\varphi^{m(\varepsilon)} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

onde os $A_i's$, são fechados contráteis em $\varphi^{m(\varepsilon)}$, isto é, existem $h_i \in C\left([0,1] \times A_i, \varphi^{m(\varepsilon)}\right)$ tais que

$$h_i(0,u) = u \text{ e } h_i(1,u) = cte, \text{ para todo } u \in A_i.$$

Considerando $B_i = \gamma^{-1}(A_i)$, $i = 1, ..., n$. Temos que os $B_i's$ são fechados e que

$$\Omega_r^- = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Defina

$$\begin{aligned} g_i: \ [0,1] \times B_i &\rightarrow \Omega_r^+ \\ (t,y) &\mapsto \beta\left(h_i(t,\gamma(y))\right). \end{aligned}$$

Como $h_i(t,\gamma(t)) \in \varphi^{m(\varepsilon)}$, temos, pelo Lema 2.3.4, que g_i está bem definida. Além disso, como $\beta \circ \gamma = id$, temos que $g_i(0,y) = \beta(\gamma(y)) = y$ e, ademais, $g_i(1,y) = \beta(h_i(1,\gamma(y))) = cte$. Logo, os $B_i^{'}s$ são contráteis em Ω_r^+, o que implica que

$$cat_{\Omega_r^+}\left(\Omega_r^-\right) \leq n = cat_{\varphi^{m(\varepsilon)}}\left(\varphi^{m(\varepsilon)}\right).$$

Usando que Ω_r^+ e Ω_r^- são homotopicamente equivalentes a Ω segue que

$$cat_{\Omega}(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}\left(\Omega_r^-\right)$$

completando a demonstração. ■

Demonstração do Teorema 2.1.5: Temos que $m(\varepsilon,\Omega) \leq m(\varepsilon) < S$. Pelo Lema 2.2.1, φ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [m(\varepsilon,\Omega), m(\varepsilon)]$. Daí, pelo Teorema 1.2.11, $\varphi^{m(\varepsilon)}$ possui, pelo menos, $cat_{\varphi^{m(\varepsilon)}}\left(\varphi^{m(\varepsilon)}\right)$ pontos críticos de $\varphi|_V$.
Portanto, pelo Lema 2.3.5, se $n = cat_{\Omega}(\Omega)$, então existem, pelo menos, $u_1,...,u_n \in V$ e $\rho_1,...,\rho_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 = \left|\left|\varphi^{'}(u_i)\right|\right|_* = \left|\left|\varphi^{'}(u_i) - \rho_i\psi^{'}(u_i)\right|\right|_{H^{-1}}, i = 1,...,n.$$

Considere

$$\mu_i = \frac{2}{2^*}\rho_i \text{ e } v_i = \mu_i^{\frac{N-2}{4}} u_i.$$

Logo,

$$\left|\left|\Phi^{'}(v_i)\right|\right|_{H^{-1}} = \frac{\mu_i^{\frac{N-2}{4}}}{2}\left|\left|\varphi^{'}(u_i) - \rho_i\psi^{'}(u_i)\right|\right|_{H^{-1}} = 0,\ i = 1,...,n$$

implicando que $\Phi^{'}(v_i) = 0$ e portanto

$$\int_{\Omega} \nabla v_i \nabla v dx + \varepsilon \int_{\Omega} v_i v dx = \int_{\Omega} \left(v_i^+\right)^{2^*-1} v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $v = v_i^-$, temos que

$$-\varphi\left(v_i^-\right) = -\left(\int_{\Omega}\left|\nabla v_i^-\right|^2 dx + \varepsilon\int_{\Omega}\left|v_i^-\right|^2 dx\right) = 0,$$

donde $v^- = 0$. Assim, $v = v^+ \geq 0$, $i = 1,...,n$, são soluções não triviais do Problema (P_ε). ■

Capítulo 3

Multiplicidade de Solução para um Problema Crítico via Teorema do Passo da Montanha

3.1 O Problema

Neste capítulo estamos interessados em estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \left|u\right|^{2^*-2} u + f\left(x,u\right), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 3$, λ é uma constante positiva, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e ímpar na segunda variável. Além disso, consideramos as seguintes condições sobre f:

$\mathbf{f}_0$) $\sup\{\left|f\left(x,s\right)\right|;$ tal que $x \in \Omega, \left|s\right| \leq M\} < +\infty$, para cada $M > 0$;

$\mathbf{f}_1$) $\lim\limits_{|s|\rightarrow+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, uniformemente q.s. em Ω;

$\mathbf{f}_2$) Existem $\sigma \in [0,2)$ e a_1, $a_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2}f\left(x,s\right)s - F\left(x,s\right) \geq -a_1 - a_2\left|s\right|^\sigma, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega,$$

onde $F\left(x,s\right) = \int_0^s f\left(x,t\right)dt$.

$\mathbf{f}_3$) Existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$F\left(x,s\right) \geq \lambda_k \frac{\left|s\right|^2}{2} - B, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega,$$

onde λ_k é o k-ésimo autovalor de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet.

$\mathbf{f}_4$) $\limsup\limits_{s\longrightarrow0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = a\left(x\right) \leq\neq \lambda_j$, uniformemente q.s. em Ω, onde $\lambda_j \leq \lambda_k$ e λ_j é o j-ésimo autovalor de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet.

Uma típica função satisfazendo as condições acima é $f(x,s) = \varepsilon s^3$ com $\varepsilon \geq 2\lambda_k$, quando $N = 3$.

Uma solução para o problema (P_λ) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{2^*-1} v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que uma solução do problema (P_λ) é um ponto crítico do funcional

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x,u) dx, \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Usando argumentos padrões, veja por exemplo [8], mostra-se que sob a condição (f_1), o funcional I_λ é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$.

3.2 A Condição de Palais-Smale

Nesta seção, mostraremos que o funcional energia I_λ satisfaz a condição de Palais-Smale, mostrando, dessa forma, uma hipótese da versão do Teorema do Passo da Montanha que usaremos para garantirmos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (P_λ).

Definição 3.2.1 *Dado E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, e denotamos por $(PS)_c$, se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que*

$$I(u_n) \to c$$

e

$$I'(u_n) \to 0,$$

possui uma subsequência convergente.

Mostraremos que o funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ para um nível c adequado, quando λ é suficientemente pequeno.

Lema 3.2.2 *Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe duas medidas não negativas e limitadas em $\overline{\Omega}$, μ e ν, e existe uma subsequência de (u_n), também denotada por (u_n), tal que $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$, $|u_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas.*

Demonstração: Segue do Lema 1.3.13, considerando que $\left(u_n^{2^*}\right)$ é limitada em $L^1(\Omega)$ e $\left(|\nabla u_n|^2\right)$ é limitada em $L^1(\Omega)$. ■

Desde que $\sup\{|f(x,s)|; x \in \Omega, |s| \leq M\} < +\infty$ para cada $M > 0$ e (f_1) vale, obtemos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)s| \leq C_\epsilon + \epsilon |s|^{2^*} \tag{3.1}$$

e

$$|F(x,s)| \leq C_\epsilon + \epsilon |s|^{2^*}. \tag{3.2}$$

Lema 3.2.3 *Suponha que f satisfaz a condição (f_1). Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,*

$$\int_\Omega |f(x,u_n)\,u_n - f(x,u)\,u|\,dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{3.3}$$

Demonstração: Temos que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_n \to u \text{ q.s. em } \Omega.$$

Como f é uma função de Carathéodory, então

$$f(x,u_n)\,u_n \to f(x,u)\,u \text{ q.s. em } \Omega$$

e pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||u||_{2^*}^{2^*} \leq C \text{ e } ||u_n||_{2^*}^{2^*} \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora, dado $\delta > 0$, tomemos $0 < \epsilon < \frac{\delta}{4C}$. Pelo Teorema de Egorov (ver A.1.10 do Apêndice), existe $\widehat{\Omega} \subset \Omega$ tal que

$$f(x,u_n)\,u_n \to f(x,u)\,u \text{ uniformemente em } \widehat{\Omega} \text{ e } \left|\Omega \backslash \widehat{\Omega}\right| < \frac{\delta}{4C_\epsilon}. \tag{3.4}$$

Usando (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)\,u_n - f(x,u)\,u|\,dx &\leq \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)\,u_n|\,dx + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} |f(x,u)\,u|\,dx \\ &\leq \delta.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Daí,

$$\int_\Omega |f(x,u_n)\,u_n - f(x,u)\,u|\,dx \leq \int_{\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)\,u_n - f(x,u)\,u|\,dx + \delta \tag{3.6}$$

e, portanto fazendo $n \to +\infty$ em (3.6), temos, por (3.4) e (3.5), que

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f(x,u_n)\,u_n - f(x,u)\,u|\,dx \leq \delta.$$

Como δ é arbitrário segue o resultado. ■

Por um argumento análogo ao da prova do lema acima, podemos demonstrar que se (u_n) é uma sequência limitada, então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência,

$$\int_\Omega f(x,u_n)\,v dx \to \int_\Omega f(x,u)\,v dx \text{ quando } n \to +\infty \tag{3.7}$$

e

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*-2}\,u_n v dx \to \int_\Omega |u|^{2^*-2}\,u v dx \text{ quando } n \to +\infty, \tag{3.8}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.2.4 *Suponha que f satisfaz (f_1). Seja (u_n) uma sequência limitada satisfazendo $I_{\lambda}'(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Então considerando ν_j , $j \in J$, dado no Lema de Concentração-Compacidade 1.4.2, temos $\nu_j \geq \left(\frac{S}{\mu}\right)^{\frac{N}{2}}$ ou $\nu_j = 0$.*

Demonstração: Usando o Lema de Concentração-Compacidade 1.4.2, temos que

$$\mu(\{x_j\}) \geq \mu_j \geq S(\nu_j)^{\frac{2}{2^*}}. \tag{3.9}$$

Considere $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e
i) $\psi(x) = 1$, se $x \in B(0,1)$;
ii)$\psi(x) = 0$, se $x \in B(0,2)^C$.
Agora, dado $\epsilon > 0$ seja

$$\psi_\epsilon(x) := \psi\left(\frac{x - x_j}{\epsilon}\right), \ x \in \Omega.$$

Logo, a sequência $(\psi_\epsilon u_n)$ está em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
&\left\langle I'(u_n), \psi_\epsilon u_n \right\rangle \qquad (3.10)\\
&= \int_\Omega \nabla u_n \nabla(\psi_\epsilon u_n)\, dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-1}(\psi_\epsilon u_n)\, dx - \int_\Omega f(x,u_n)(\psi_\epsilon u_n)\, dx\\
&\geq \int_\Omega \nabla u_n \nabla(\psi_\epsilon u_n)\, dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx - \int_\Omega f(x,u_n)(\psi_\epsilon u_n)\, dx\\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \psi_\epsilon dx + \int_\Omega \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon u_n dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx - \int_\Omega f(x,u_n)(\psi_\epsilon u_n)\, dx.
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Concetração-Compacidade 1.4.2, temos que

$$\lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*} \psi_\epsilon dx \to \lambda \int_\Omega \psi_\epsilon d\nu$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \psi_\epsilon dx \to \int_\Omega \psi_\epsilon d\mu$$

quando $n \to +\infty$. Pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos também que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Logo, pelo Teorema A.1.5 do Apêndice A, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq h$ q.s. em Ω. Usando a desigualdade de Hölder e que (u_n) é limitada, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \nabla u_n . \nabla \psi_\epsilon u_n dx\right| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \psi_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.11)\\
&\leq K_1 \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \psi_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq K_1 \left(\int_\Omega h^2 |\nabla \psi_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\nabla \psi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \nabla \psi \left(\frac{x - x_j}{\epsilon}\right)$$

donde $\nabla\psi_\epsilon = 0$, se $|x - x_j| < \epsilon$ e $\nabla\psi_\epsilon = 0$, se $|x - x_j| > 2\epsilon$. Logo, de (3.11) e usando o Teorema da Mudança de Variável, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\psi_\epsilon u_n dx\right| &\leq K_1\frac{1}{\epsilon}\left(\int_{\epsilon<|x-x_j|<2\epsilon} h(x)^2\left|\nabla\psi\left(\frac{x-x_j}{\epsilon}\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq K_1\epsilon^{\frac{N}{2}-1}\left(\int_{1<|y|<2} h(\epsilon y + x_j)^2|\nabla\psi(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq K_1\epsilon^{\frac{N}{2}-1}||\nabla\psi||_\infty\left(\int_{1<|y|<2} h(\epsilon y + x_j)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq K_1\epsilon^{\frac{N}{2}-1}||\nabla\psi||_\infty\left(\int_\Omega h(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Assim de (3.10), temos

$$\begin{aligned}&\left\langle I_\lambda^{'}(u_n), \psi_\epsilon u_n\right\rangle\\ &\geq -K_1\epsilon^{\frac{N}{2}-1}||\nabla\psi||_\infty\left(\int_\Omega h(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega |\nabla u_n|^2\psi_\epsilon dx\\ &-\lambda\int_\Omega |u_n|^{2^*}\psi_\epsilon dx - \int_\Omega f(x,u_n)(\psi_\epsilon u_n)dx.\end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$, temos

$$-K_1\epsilon^{\frac{N}{2}-1}||\nabla\psi||_\infty\left(\int_\Omega h(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega \psi_\epsilon d\mu \leq \lambda\int_\Omega \psi_\epsilon d\nu + \int_\Omega f(x,u)(\psi_\epsilon u)dx. \quad (3.12)$$

De (3.1), segue que

$$\int_\Omega f(x,u)(\psi_\epsilon u)dx \leq \int_\Omega C_{\epsilon_1}\psi_\epsilon dx + \epsilon_1\int_\Omega |u|^{2^*}\psi_\epsilon dx \quad (3.13)$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega C_{\epsilon_1}\psi_\epsilon dx = 0 \text{ e } \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |u|^{2^*}\psi_\epsilon dx = 0.$$

Assim, usando (3.13) em (3.12) e fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\mu_j = \mu(\{x_j\}) \leq \lambda\nu(\{x_j\}) = \lambda\nu_j,$$

e, por (3.9), chegamos à

$$S(\nu_j)^{\frac{2}{2^*}} \leq \lambda\nu_j.$$

■

Lema 3.2.5 *Suponha f satisfazendo (f_1). Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $I_\lambda^{'}(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Então, a menos de subsequência,*

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ em } \left[L^2(\Omega)\right]^N.$$

Demonstração: Note que existe um $M > 0$ tal que $\int_\Omega |f(x, u_n)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \leq M$, pois, por (f_1), temos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x, u_n)| \leq C_\epsilon + \epsilon |u_n|^{2^*-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x, u_n)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &\leq \int_\Omega \left(C_\epsilon + \epsilon |u_n|^{2^*-1} \right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\ &\leq 2 \int_\Omega \left(|C_\epsilon|^{\frac{2^*}{2^*-1}} + \epsilon |u_n|^{2^*} \right) dx \\ &\leq M. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, mostraremos algumas afirmações que nos auxiliarão na prova do lema.

Afirmação 1: Seja $K \subset \Omega \backslash \{x_j; j \in J\}$ um conjunto compacto. Então, $u_n \to u$ em $L^{2^*}(K)$.

Desde que $\{x_j; j \in J\}$ é finito e $K \cap \{x_j; j \in J\} = \emptyset$, então

$$d(K, \{x_j; j \in J\}) = \delta > 0.$$

Daí, considere $0 < \epsilon < \delta$ e defina

$$A_\epsilon = \{x \in \Omega; d(x, K) < \epsilon\}.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, cumprindo $0 \leq \varphi \leq 1$ e
$i) \varphi = 1$ em $A_{\frac{\epsilon}{2}}$;
$ii) \varphi = 0$ em $\Omega \backslash A_\epsilon$.
Assim, temos que

$$\int_K |u_n|^{2^*} dx \leq \int_{A_\epsilon} |u_n|^{2^*} \varphi dx = \int_\Omega |u_n|^{2^*} \varphi dx$$

e como $A_\epsilon \cap \{x_j; j \in J\} = \emptyset$, pelos Lemas 3.2.2 e 1.4.2, segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to +\infty} \int_K |u_n|^{2^*} dx &\leq \limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega |u_n|^{2^*} \varphi dx \\ &= \int_\Omega \varphi d\nu \\ &= \int_\Omega |u|^{2^*} \varphi dx \\ &= \int_{A_\epsilon} |u|^{2^*} \varphi dx \leq \int_{A_\epsilon} |u|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_K |u_n|^{2^*} dx \leq \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \chi_{A_\epsilon} |u|^{2^*} dx = \int_K |u|^{2^*} dx \tag{3.15}$$

já que, $\chi_{A_\epsilon} |u|^{2^*} \to |u|^{2^*}$ q.s. em Ω quando $\epsilon \to 0$ e $\chi_{A_\epsilon} |u|^{2^*} \leq |u|^{2^*}$ q.s. em Ω.

Desse modo, por (3.15), $L^{2^*}(K)$ ser uniformemente convexo e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(K)$, temos, pelo Teorema A.1.5 do Apêndice A, que $u_n \to u$ em $L^{2^*}(K)$.

Afirmação 2: Seja $K \subset \Omega \backslash \{x_j; j \in J\}$ um conjunto compacto. Então $\nabla u_n \to \nabla u$ em $\left(L^2(K)\right)^N$.

Defina $\varphi \in C_0^\infty \Omega \backslash \{x_j; j \in J\}$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em K. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K |\nabla u_n - \nabla u|^2 \, dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \varphi dx \\ &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) \varphi dx - \int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u) \varphi dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como (φu_n) é limitada,

$$\left\langle I'_\lambda(u_n), (u_n - u) \varphi \right\rangle \to 0$$

quando $n \to +\infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) \varphi dx + \int_\Omega \nabla u_n (u_n - u) \nabla \varphi dx \\ &- \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx - \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u) \varphi dx \\ &= o(1) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim, substituindo (3.17) em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_K |\nabla u_n - \nabla u|^2 \, dx \\ &\leq \int_\Omega \nabla u_n (u - u_n) \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx \\ &+ \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u) \varphi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla (u - u_n) \varphi dx + o(1). \end{aligned}$$

Agora, para finalizarmos a prova da Afirmação 2 , resta mostrar que todas as integrais do lado direito da desigualdade acima convergem para zero quando $n \to +\infty$. Para a primeira integral, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \nabla u_n (u - u_n) \nabla \varphi dx \leq ||\nabla \varphi||_\infty ||u_n|| \, . \, ||u_n - u||_2 \to 0$$

quando $n \to +\infty$, já que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Para a segunda integral, usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx &= \lambda \int_{\text{supp}(\varphi)} |u_n|^{2^*-2} u_n (u_n - u) \varphi dx \\ &\leq \lambda \left(||u_n||_{L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} ||u_n - u||_{L^{2^*}(\text{supp}(\varphi))} \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$, pois (u_n) é limitado em $L^{2^*}(\operatorname{supp}(\varphi))$ e, pela Afirmação 1, $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\operatorname{supp}(\varphi))$. Para a terceira integral, e novamente pela desigualdade de Hölder e por (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u_n)(u_n-u)\varphi|\, dx &\leq \int_{\operatorname{supp}(\varphi)} |f(x,u_n)(u_n-u)|\, dx \\ &\leq M^{\frac{2^*-1}{2^*}} \, ||u_n-u||_{L^{2^*}(\operatorname{supp}(\varphi))} \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$, pois, pela Afirmação 1, $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\operatorname{supp}(\varphi))$. Para a quarta integral, observemos que

$$T(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \varphi dx$$

é linear e contínua, e como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (u-u_n)\varphi dx \to 0$$

quando $n \to +\infty$ o que demonstra a afirmação.

Seja

$$K_j = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} \text{ e } d(x, \{x_j; j \in J\}) \geq \frac{1}{j}\}$$

Como, pela Afirmação 2, $\nabla u_n \to \nabla u$ em $(L^2(K_1))^N$ temos que existe (u_n^1) subsequência de (u_n) tal que $\nabla u_n^1 \to \nabla u$ q.s. em K_1.Considere

$$u_{n_1} := u_1^1$$

Novamente, pela Afirmação 2, temos que $\nabla u_n^1 \to \nabla u$ em $(L^2(K_2))^N$. Logo existe (u_n^2) subsequência de (u_n^1) tal que $\nabla u_n^2 \to \nabla u$ q.s. em K_2. Como antes, seja

$$u_{n_2} = u_2^2.$$

Procedendo desta forma, temos $\nabla u_n^{j-1} \to \nabla u$ em $(L^2(K_j))^N$, donde existe (u_n^j) subsequência de (u_n^{j-1}) tal que $\nabla u_n^j \to \nabla u$ q.s. em K_j para $j \in \mathbb{N}$. Considerando

$$u_{n_j} = u_j^j,$$

obtemos (u_{n_j}) subsequência de (u_n) tal que a partir do j-ésimo termo

$$\nabla u_{n_j} \to \nabla u \text{ q.s. em } K_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

e como

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = \Omega \backslash \{x_j; j \in J\}$$

segue que

$$\nabla u_{n_j} \to \nabla u \text{ q.s.em } \Omega.$$

■

Proposição 3.2.6 *Suponha f satisfazendo (f_1) e (f_2). Então, dado $M > 0$, existe $\lambda_* > 0$ tal que I_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < M$ e $0 < \lambda < \lambda_*$.*

Demonstração: Dado $M > 0$, considere

$$\lambda_* = \min \left\{ S, \left[\frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{1}{\frac{N}{2}-\frac{1}{\alpha}}} \right\} \tag{3.18}$$

onde $A = a_1 |\Omega| + a_2 |\Omega|^\alpha$, $\alpha = (2^* - \sigma)/2^*$ e σ, a_1, a_2 são dadas na condição (f_2). Desde que $\sigma < 2$, segue que $\frac{1}{\alpha} < \frac{N}{2}$ e considerando $\lambda \in (0, \lambda_*)$, temos que

$$\left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{2}} > 1 \tag{3.19}$$

e como

$$\frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\alpha}}},$$

obtemos

$$\left[\frac{(N(M+A))}{\lambda} \right]^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{2}}. \tag{3.20}$$

Tomando $c < M$, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que
$i)$ $I_\lambda(u_n) \to c$;
$ii)$ $I'_\lambda(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$.
Primeiramente, mostraremos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De $i)$ e $ii)$ segue que

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} \left\langle I'_\lambda(u_n), u_n \right\rangle \le c + 1 + ||u_n|| \tag{3.21}$$

para n grande. Por outro lado, usando (f_2) segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} \left\langle I'_\lambda(u_n), u_n \right\rangle &= \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2^*} \right) \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx \\ &\ge \frac{\lambda}{N} ||u_n||_{2^*}^{2^*} - a_1 |\Omega| - a_2 \int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\alpha)} dx \end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\alpha)} dx \le |\Omega|^\alpha ||u_n||_{2^*}^{2^*(1-\alpha)}.$$

Portanto,

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2} \left\langle I'_\lambda(u_n), u_n \right\rangle \ge \frac{\lambda}{N} ||u_n||_{2^*}^{2^*} - a_1 |\Omega| - a_2 |\Omega|^\alpha ||u_n||_{2^*}^{2^*(1-\alpha)}. \tag{3.22}$$

Considerando

$$a = \left(\frac{1-\alpha}{\delta} \right)^{1-\alpha} ||u_n||_{2^*}^{2^*(1-\alpha)}, \; b = \left(\frac{\delta}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \text{ e } p = \frac{1}{1-\alpha},$$

temos, pela desigualdade de Young, que

$$||u_n||_{2^*}^{2^*(1-\alpha)} \leq \delta \, ||u_n||_{2^*}^{2^*} + C_\delta, \tag{3.23}$$

em que

$$\delta = \frac{\lambda}{2Na_2 \, |\Omega|^\alpha} \text{ e } C_\delta = \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Logo, por (3.21), (3.22), (3.23), segue que

$$||u_n|| + c + 1 \geq \frac{\lambda}{N} \, ||u_n||_{2^*}^{2^*} - a_1 \, |\Omega| - a_2 \, |\Omega|^\alpha \left(\delta \, ||u_n||_{2^*}^{2^*} + C_\delta \right)$$

e, portanto, existe $C > 0$ tal que

$$C \, ||u_n|| + C \geq ||u_n||_{2^*}^{2^*} . \tag{3.24}$$

Por i),

$$I_\lambda (u_n) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx - \frac{\mu}{2^*} \int_\Omega |u_n|^{2^*} \, dx - \int_\Omega F(x, u_n) \, dx < 1 + c$$

para n grande. Assim, usando (3.2), obtemos

$$\frac{1}{2} \, ||u_n||^2 - \frac{\lambda}{2^*} \, ||u_n||_{2^*}^{2^*} - C_\epsilon \, |\Omega| - \frac{\epsilon}{2^*} \, ||u_n||_{2^*}^{2^*} < 1 + c.$$

Daí, empregando (3.24), segue que

$$||u_n||^2 < C' + C' \, ||u_n|| \, ,$$

provando que (u_n) é limitado. Assim, a menos de subsequência, (u_n) converge fraco para $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, (u_n) satisfaz (3.3), (3.7) e (3.8), e dos Lemas 3.2.2, 1.4.2 e 3.2.5 temos que

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ em } \left[L^2 (\Omega) \right]^N \tag{3.25}$$

e

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*} \, dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \tag{3.26}$$

onde δ_{x_j} é a massa de Dirac, ν é uma medida finita e positiva em $\bar{\Omega}$, J é finito, $\{x_j; j \in J\} \subset \bar{\Omega}$ e $\{\nu_j; j \in J\}$ é uma família de números positivos. Observe que

$$\int_\Omega d\nu < \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{p}}, \tag{3.27}$$

pois se $\int_\Omega d\nu \leq 1$, o resultado segue de (3.19). Agora, se $\int_\Omega d\nu > 1$, fazendo $n \to +\infty$ em (3.22), tem-se

$$c \geq \frac{\lambda}{N} \int_\Omega d\nu - a_1 \, |\Omega| - a_2 \, |\Omega|^\alpha \left(\int_\Omega d\nu \right)^{1-\alpha}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{N}\int_{\Omega} d\nu &\leq c + a_1 |\Omega| + a_2 |\Omega|^{\alpha} \left(\int_{\Omega} d\nu\right)^{1-\alpha} \\ &\leq (M + a_1 |\Omega| + a_2 |\Omega|^{\alpha}) \left(\int_{\Omega} d\nu\right)^{1-\alpha} \\ &\leq (M + A) \left(\int_{\Omega} d\nu\right)^{1-\alpha}\end{aligned}$$

e assim, por (3.20),

$$\int_{\Omega} d\nu \leq \left(\frac{(M+A)\,N}{\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{S}{\mu}\right)^{\frac{N}{p}}.$$

A partir daí e usando (3.27) obtemos que

$$\nu_j = \int_{\{x_j\}} d\nu \leq \int_{\Omega} d\nu < \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{p}}.$$

Logo ,pelo Lema 3.2.4, $\nu_j = 0$ para todo $j \in J$. Desse modo, por (3.26),

$$\int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx \to \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \tag{3.28}$$

Como

$$\left\langle I_{\lambda}'(u_n), u_n \right\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx - \int_{\Omega} f(x, u_n)\, u_n dx$$

e sendo (u_n) limitada, segue por $ii)$, (3.28) e (3.3), que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} f(x, u)\, u dx \tag{3.29}$$

Por outro lado, temos que

$$\left\langle I_{\lambda}'(u_n), u \right\rangle = \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*-2} u_n u dx - \int_{\Omega} f(x, u_n)\, u dx \tag{3.30}$$

e tendo em vista que $u_n \to u$ em $L^{2^*-1}(\Omega)$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{2^*-2} u_n u dx \to \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx.$$

Daí, fazendo $n \to +\infty$ em (3.30) obtemos, por $ii)$,(3.25) e (3.7), que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} f(x, u)\, u dx.$$

Disto e de (3.29), concluímos que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Assim, como $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue, da Proposição A.1.1 do Apêndice A, que $u_n \to u$, o que finaliza a prova. ∎

3.3 Multiplicidade de Soluções

Nesta seção, vamos obter a multiplicidade de soluções para o problema (P_λ) quando λ é suficientemente pequeno. Para tanto utilizaremos a seguinte versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, cuja prova pode ser encontrada em [1]:

Teorema 3.3.1 *Seja $E = V \oplus X$, onde E é um espaço de Banach real e V tem dimensão finita. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par que satisfaz $I(0) = 0$ e*
(I_1) existe uma constante $\rho > 0$, tal que, $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq 0$;
(I_2) existe um subespaço W de E com $\dim V < \dim W < +\infty$ e existe um $M > 0$, tal que, $\max_{u\in W} I(u) < M$;
(I_3) considerando $M > 0$ dado em (I_2), I satisfazendo $(PS)_c$ para $0 \leq c \leq M$.
Então I possui ao menos $\dim W - \dim V$ pares de pontos críticos não triviais.

Sejam $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_i \leq ...$ a sequência de autovalores de $-\Delta$ em Ω com as condições de fronteira de Dirichlet e φ_i as autofunções correspondentes com $||\varphi_i|| = 1$. Considerando $\lambda_j \leq \lambda_k$, dado em (f_3) e (f_4), tomemos

$$V = \{0\}, \text{ se } j = 1,$$
$$V = \{\varphi_1, ..., \varphi_{j-1}\}, \text{ se } j > 1$$

e

$$W = \{\varphi_1, ..., \varphi_k\}.$$

Para verificarmos as hipóteses do Teorema 3.3.1, ao longo desta seção consideraremos a decomposição

$$H_0^1 = V \oplus V^\perp.$$

Nos lemas a seguir, mostraremos que as demais hipóteses do Teorema 3.3.1 são atendidas e começaremos verificando que a hipótese (I_2) vale no subespaço W.

Lema 3.3.2 *Suponha que f satisfaz (f_3). Então existe M_k, independente de λ tal que $\max\limits_{u\in W} I_\lambda(u) < M_k$.*

Demonstração: Temos, por (f_3), que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx + B|\Omega| - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega |u|^2 dx$$

e como

$$\lambda_k \geq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx}, \text{ para todo } v \in W$$

segue que

$$I_\lambda(u) \leq -\frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx + B|\Omega| \leq B|\Omega|.$$

■

Lema 3.3.3 *Seja* $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função mensurável tal que* $a \leq\neq \lambda_j$. *Então, existe* $\beta > 0$ *tal que, para todo* $u \in H_0^1 \cap V^{\perp}$,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+ u^2\right) dx \geq \beta \int_\Omega u^2 dx,$$

onde $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Demonstração: Consideremos o conjunto

$$A = \left\{u \in V^{\perp}; \int_\Omega u^2 dx = 1\right\}$$

e defina

$$\beta = \inf_{u \in A} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+ u^2\right) dx.$$

Observe que para demonstrarmos o lema basta provar que $\beta > 0$. Temos que $\beta \geq 0$, pois para $u \in V^{\perp}$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_j \int_\Omega u^2 dx.$$

Afirmamos que β é assumido. Para mostrarmos isso, tomemos $(u_n) \subset A$ tal que

$$\beta = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - a^+ u_n^2\right) dx.$$

Como $\int_\Omega a^+ u^2 \leq ||a||_\infty$, temos, para n suficientemente grande, que

$$||u_n||^2 \leq \beta + 1 + ||a||_\infty .$$

Assim $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e, pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, $u_n \to u_0$ em $L^2(\Omega)$. Daí, pelo Teorema A.1.5, a menos de subsequência $u_n(x) \to u_0(x)$ e $|u_n(x)| \leq h(x)$ q.s. em Ω, onde $h \in L^2(\Omega)$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que

$$1 = \int_\Omega u_n^2 dx \to \int_\Omega u_0^2 dx \text{ e } \int_\Omega a^+ u_n^2 dx \to \int_\Omega a^+ u_0^2 dx$$

Logo $u_0 \in A$ e

$$||u_0||^2 \leq \liminf_{n \to +\infty} \left[\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - a^+ u_n^2\right) dx + \int_\Omega a^+ u_n^2 dx\right] = \beta + \int_\Omega a^+ u_0^2 dx,$$

mostrando que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - a^+ u_0^2\right) dx = \beta.$$

e, portanto, β é assumido. Agora, suponha, por contradição, que $\beta = 0$. Sendo $V^{\perp} = \langle \varphi_j, ..., \varphi_m, \varphi_{m+1}, ...\rangle$ considere $E_m = \langle \varphi_j, ..., \varphi_m\rangle$, onde $\lambda_j = \lambda_{j+1} = ... = \lambda_m < \lambda_{m+1}$. Tomemos a seguinte decomposição $V^{\perp} = E_m \oplus V_{m+1}^{\perp}$, portanto existem $u_1 \in E_m$ e $u_2 \in V_{m+1}^{\perp}$ tais que $u_0 = u_1 + u_2$. Dessa forma,

$$\beta = \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - a^+ u_0^2\right) dx \geq \int_\Omega \left(|\nabla u_2|^2 - \lambda_j u_2^2\right) dx.$$

Desde que $\lambda_{m+1}\int_\Omega u_2^2dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx$ temos que

$$\beta \geq \frac{(\lambda_{m+1}-\lambda_j)}{\lambda_{m+1}}\int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx \geq 0,$$

implicando que $u_2 = 0$. Desse modo, obtemos que $u_0 = u_1$ e portanto u_0 é um autofunção associada a λ_j. Daí, segue que

$$0 = \beta = \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - a^+ u_0^2\right) dx = \int_\Omega \left(\lambda_j - a^+\right) u_0^2 dx.$$

Assim $u_0 = 0$ em um conjunto de medida positiva e portanto, pela propriedade da continuação única das autofunções do laplaciano (ver [9]), $u_0 = 0$ em Ω. O que é uma contradição, já que $||u_0||_2 = 1$. ■

No próximo resultado, provaremos que a hipótese (I_1) é satisfeita.

Lema 3.3.4 *Suponha que f satisfaz (f_1) e (f_4). Então, existem constantes $\rho, \alpha > 0$, tais que, $I_\lambda|_{\partial B_\rho \cap V^\perp} \geq \alpha$.*

Demonstração: De (f_4) temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|s| < \delta$, então

$$F(x,s) \leq \frac{(a(x)+\epsilon)|s|^2}{2}. \tag{3.31}$$

Por outro lado, segue, de (3.2) e para $|s| \geq \delta$, que

$$F(x,s) \leq \frac{C_\epsilon 2^*}{\delta^{2^*}}\frac{|s|^{2^*}}{2^*} + \frac{\epsilon |s|^{2^*}}{2^*}. \tag{3.32}$$

Daí, por (3.31) e (3.32), temos que

$$F(x,s) \leq K_\epsilon \frac{|s|^{2^*}}{2^*} + \frac{(a(x)+\epsilon)|s|^2}{2}, \forall s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } \Omega. \tag{3.33}$$

Agora considerando β do Lema 3.3.3, tomemos $\epsilon' > 0$ tal que $\beta - \epsilon'\lambda_j > 0$. Assim, usando o Lema (3.3.3) e que $a^+(x) \leq \lambda_j$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a(x)|u|^2 dx\right) &\geq \frac{1}{1+\epsilon'}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+(x)|u|^2 dx\right) + \epsilon'\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+(x)|u|^2\right) dx\right) \qquad (3.34)\\
&\geq \frac{1}{1+\epsilon'}\left(\beta\int_\Omega |u|^2 dx - \epsilon'\int_\Omega a^+(x)|u|^2 dx + \epsilon'\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\\
&\geq \frac{1}{1+\epsilon'}\left(\int_\Omega \left(\beta - \epsilon'\lambda_j\right)|u|^2 dx + \epsilon'\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\\
&\geq \frac{\epsilon'}{1+\epsilon'}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Logo, por (3.33),(3.34) e pela imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - a(x)|u|^2\right)dx - \left(\frac{\lambda}{2^*} + \frac{K_\epsilon}{2^*}\right)\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx - \int_\Omega \frac{\epsilon|u|^2}{2}dx \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{\epsilon'}{1+\epsilon'}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - C\,||u||^{2^*} - \frac{\epsilon}{2}C_1\,||u||^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\frac{\epsilon'}{1+\epsilon'} - \frac{\epsilon}{2}C_1\right)||u||^2 - C\,||u||^{2^*}
\end{aligned}$$

e portanto, para $\epsilon > 0$ pequeno, resulta que

$$I_\lambda(u) \geq K\,||u||^2 - C\,||u||^{2^*},$$

onde $K > 0$. Por conseguinte, tomando $\rho > 0$ adequado, decorre que

$$K\rho^2 - C\rho^{2^*} > 0$$

e por isso

$$I_\lambda(u) \geq \alpha,\ \text{ para } u \in \partial B_\rho(0) \cap V^\perp.$$

■

Agora, estamos em condições de demonstrar nosso resultado principal que é o seguinte,

Teorema 3.3.5 *Suponha que $f(x,s)$ é impar em s e satisfaz (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4). Então existe $\mu_k \in (0,\infty]$ tal que (P_λ) possui ao menos $k-j+1$ pares de soluções não triviais para todo $\lambda \in (0,\mu_k)$.*

Demonstração: Pelos Lemas 3.3.4 e 3.3.2 temos que I_λ satisfaz (I_1) e (I_2). Além disso, pela Proposição 3.2.6, existe $\mu_k > 0$ tal que I_λ satisfaz (I_3) para todo $\lambda \in (0,\mu_k)$. Desde que $I_\lambda(0) = 0$ e I_λ é par, concluímos do Teorema 3.3.1 que (P_λ) possui no mínimo $k-j+1$ pares de soluções não triviais para todo $\lambda \in (0,\mu_k)$. ■

3.4 Existência de Solução Não-Negativa e de Solução Não-Positiva

Nesta seção, vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1 *Suponha que f satisfaz $f(x,0) = 0$, (f_1), (f_2), (f_3) com $\lambda_k = \lambda_1$ e (f_4) com $\lambda_j = \lambda_1$. Então existe $\mu_1 > 0$ tal que (P_λ) possui uma solução não-trivial não-negativa e uma solução não-trivial não-positiva para todo $\lambda \in (0,\mu_1)$.*

Este resultado garante a existência de uma solução não-trivial não-negativa e de uma solução não-trivial não-positiva para o problema (P_λ). Observe que no Teorema 3.4.1, ao contrário do Teorema 3.3.5, não exigimos que f seja ímpar na segunda variável. Para provarmos o Teorema 3.4.1, faremos uso da seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha (veja [21]):

Teorema 3.4.2 *Seja E um espaço de Banach. Suponha $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz $I(0) = 0$ e as seguintes condições:*
(I_1) Existe uma constante $\rho > 0$, tal que, $I|_{\partial B_\rho} \geq 0$;
(I_2) Existe $v_1 \in \partial B_\rho(0)$ e $M > 0$, tal que, $\sup_{t\geq 0} \widetilde{I}_\mu(tv_1) \leq M$ e
(I_3) considerando $M > 0$ dado em (I_2), I satisfaz $(PS)_c$ para $0 < c < M$.
Então I possui um ponto crítico não-trivial.

Primeiro, mostraremos que (P_λ) possui uma solução não-trivial não-negativa. Note que, para mostrarmos o resultado desejado, basta provarmos que o problema (3.35) tem uma solução não-trivial. Considere o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2} u + \widetilde{f}(x, u) & , x \in \Omega \\ u \geq 0 & , x \in \Omega \\ u = 0 & , x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.35}$$

onde

$$\widetilde{f}(x, s) = \begin{cases} f(x, s), & \text{se } s > 0 \\ 0 \quad , & \text{se } s \leq 0 \ . \end{cases}$$

O funcional energia $\widetilde{I}_\lambda$ associado a (3.35) é dado por

$$\widetilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x, u)\, dx$$

onde

$$\widetilde{F}(x, s) = \int_0^s \widetilde{f}(x, t)\, dt.$$

Por argumentos padrões, verifica-se facilmente que $\widetilde{I}_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$

Observação 3.4.3 *Chamemos a atenção para os seguintes fatos:*
i) $\widetilde{f}$ satisfaz (f_1) :
Com efeito, temos que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{\widetilde{f}(x, s)}{|s|^{p^*-1}} = 0$$

pois se $s \to -\infty$, então $\widetilde{f} = 0$ e se $s \to +\infty$, então $\widetilde{f} = f$.
ii) $\widetilde{f}$ satisfaz (f_4) com $\lambda_j = \lambda_1$:
De fato, tem-se $\widetilde{F}(x, s) = \int_0^s \widetilde{f}(x, t)\, dt = \int_0^s f(x, t)\, dt = F(x, s)$, se $s > 0$ e $\widetilde{F}(x, s) = \int_0^s \widetilde{f}(x, t)\, dt = 0$, se $s \leq 0$, então, segue que

$$\limsup_{s\to 0} \frac{2\widetilde{F}(x, s)}{|s|^2} = a(x) \leq \lambda_1, \textit{ uniformemente q.s. em } \Omega.$$

Nos próximos resultados provaremos que o funcional energia $\widetilde{I}_\lambda$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.4.2.

Lema 3.4.4 *Suponha que $\widetilde{f}$ satisfaz (f_1) e (f_4) com $\lambda_j = \lambda_1$. Dado $\mu > 0$, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\widetilde{I}_\lambda|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$.*

Demonstração: Considerando $j = 1$ no Lema 3.3.3, temos que existe $\beta > 0$ tal que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+(x)|u|^2\right) dx \geq \beta \int_\Omega |u|^2 \, dx, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+(x)\left|u^+\right|^2\right) dx &\geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - a^+(x)|u|^2\right) dx \\ &\geq \beta \int_\Omega |u|^2 \, dx\end{aligned}$$

e daí, basta repetir a demonstração do Lema 3.3.4 com $\lambda_j = \lambda_1$. ■

No próximo resultado, verificaremos a condição (I_2).

Lema 3.4.5 *Existem* $v_1 \in \partial B_1(0)$ *e* $M > 0$ *tais que* $\sup_{t\geq 0} \widetilde{I}_\lambda(tv_1) \leq M$.

Demonstração: Considere $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1, com $||\varphi_1|| = 1$. Usando (f_3), para todo $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_\lambda(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla t\varphi_1|^2 \, dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega (t\varphi_1)^{2^*} dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x, t\varphi_1) \, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \, dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x, t\varphi_1) \, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 \, dx + B|\Omega| - \frac{\lambda_1 t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx \\ &= B|\Omega|,\end{aligned}$$

onde usamos que $\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx}{\int_\Omega \varphi_1^2 dx}$. ■

Em seguida, mostremos que $\widetilde{I}_\lambda$ satisfaz a (I_3).

Lema 3.4.6 *Seja* $M > 0$ *dado no Lema 3.4.5,* $\widetilde{I}_\lambda$ *satisfaz* $(PS)_c$ *para* $0 < c < M$.

Demonstração: Considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\widetilde{I}_\lambda(u_n) \to c$ e $\widetilde{I}'_\lambda(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. Com um raciocínio análogo ao da Proposição 3.2.6, obtemos que (u_n^-) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. A partir daí mostraremos que $u_n^- \to 0$. Para isso basta observar que

$$\left\langle \widetilde{I}'_\lambda(u_n), -u_n^- \right\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla\left(-u_n^-\right) dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*-1}\left(-u_n^-\right) dx - \int_\Omega \widetilde{f}(x, u_n)\left(-u_n^-\right) dx = \left|\left|u_n^-\right|\right|^2.$$

Além disso,

$$\left\langle \widetilde{I}'_\lambda(u_n), -u_n^- \right\rangle \leq \left|\left|\widetilde{I}'_\lambda(u_n)\right|\right|_{H^{-1}} ||-u_n^-|| = \left|\left|\widetilde{I}'_\lambda(u_n)\right|\right|_{H^{-1}} ||u_n^-||$$

e como

$$\left|\left|\widetilde{I}'_\lambda(u_n)\right|\right|_{H^{-1}} \to 0,$$

concluímos o que queríamos mostrar.
Agora, usando a imersão de Sobolev obtemos que $||u_n^-||_{2^*} \to 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{2^*} dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x,u_n)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u_n^+\right)^{2^*} dx - \int_\Omega F\left(x,u_n^+\right) dx \\
&= I_\lambda\left(u_n^+\right) - \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim, como $||u_n^-|| \to 0$, segue que

$$I_\lambda\left(u_n^+\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^2 dx + \widetilde{I}_\lambda(u_n) \to c. \tag{3.36}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{I}'_\lambda(u_n), v\right\rangle &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*-1} v dx - \int_\Omega \widetilde{f}(x,u_n)\, v dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_n^+ \nabla v dx - \int_\Omega \nabla u_n^- \nabla v dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*-1} v dx - \int_\Omega f\left(x,u_n^+\right) v dx \\
&= \left\langle I'_\lambda\left(u_n^+\right), v\right\rangle + \left\langle \widetilde{I}'_\lambda\left(-u_n^-\right), v\right\rangle,
\end{aligned}$$

donde

$$\left\langle I'_\lambda\left(u_n^+\right), v\right\rangle = \left\langle \widetilde{I}'_\lambda(u_n), v\right\rangle - \left\langle \widetilde{I}'_\lambda\left(-u_n^-\right), v\right\rangle \to 0 \tag{3.37}$$

e assim, segue de (3.36), (3.37) e da Proposição 3.2.6 que

$$u_n^+ \to u_0 \in H_0^1(\Omega)$$

e, portanto, $u_n \to u_0$ pois $u_n^- \to 0$. ■

Demonstração do Teorema 3.4.1: Pelos Lemas 3.4.4, 3.4.5, 3.4.6 temos que $\widetilde{I}_\lambda$ satisfaz as condições (I_1), (I_2), (I_3) do Teorema 3.4.2. Além disso, $\widetilde{I}_\lambda \in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$ e $\widetilde{I}_\lambda(0) = 0$. Logo pelo Teorema 3.4.2 $\widetilde{I}_\lambda$ possui um ponto crítico não-trivial. Agora, para finalizar a demonstração, basta mostrar que tal ponto crítico é não negativo. Seja u um ponto crítico de $\widetilde{I}_\lambda$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u^+\right)^{2^*-1} v dx + \int_\Omega \widetilde{f}(x,u_n)\, v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, considerando $v = -u^-$, obtemos que

$$\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 dx = \int_\Omega \nabla u \nabla\left(-u^-\right) dx = 0$$

provando que se u é ponto crítico de $\widetilde{I}_\lambda$, então $u \geq 0$.

Para garantirmos a existência de uma solução não-trivial não-positiva basta, de maneira análoga a demonstração da existência de solução do problema (3.35), resolvermos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \left|u\right|^{2^*-2} u + \overline{f}\left(x,u\right), & x \in \Omega \\ u \leq 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.38}$$

onde

$$\overline{f}\left(x,s\right) = \begin{cases} f\left(x,s\right), & \text{se } s < 0 \\ 0 \quad , & \text{se } s \geq 0, \end{cases}$$

e o funcional energia $\overline{I}_\lambda$ associado a (3.38) é dado por

$$\overline{I}_\lambda\left(u\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega \left(u^-\right)^{2^*} dx - \int_\Omega \overline{F}\left(x,u\right) dx$$

em que

$$\overline{F}\left(x,s\right) = \int_0^s \overline{f}\left(x,t\right) dt.$$

■

Observemos que o resultado do Teorema 3.4.1 não é verdade sem a hipótese (f_3). Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.4.7 *No problema (P_λ), seja $N = 3$, $f\left(x,s\right) = \beta s$ com $\beta < \frac{\lambda_1}{4}$, e $\Omega = B(0,r)$ é uma bola em $\mathbb{R}^N$, isto é, considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^5 + \beta u, & x \in B(0,r) \\ u = 0, & x \in \partial B(0,r). \end{cases} \tag{3.39}$$

Observe que as hipóteses $(f_1), (f_2)$ e (f_4) são satisfeitas por f, porém

$$\begin{aligned} F\left(x,s\right) &= \int_0^s \beta t dt = \frac{\beta s^2}{2} \\ &< \frac{\lambda_1 s^2}{2}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ q.s. em } B(0,r), \end{aligned}$$

ou seja, f não satisfaz a hipótese (f_3).
Vamos supor, por contradição, que o Teorema 3.4.1 seja verdade. Assim, existe $\mu_1 > 0$ tal que (3.39) possui uma solução $u \geq 0$ para todo $\lambda \in (0,\mu_1)$. Tomemos $\lambda < \mu_1$. Daí $v = \lambda^{\frac{1}{4}} u$ resolve o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = v^5 + \beta v, & x \in B(0,r) \\ v > 0, & x \in B(0,r) \\ v = 0, & x \in \partial B(0,r), \end{cases}$$

para $\beta < \frac{\lambda_1}{4}$ o que contradiz o Teorema 1.2 de [4].

Apêndice A

Neste apêndice, listamos alguns resultados importantes que são utilizados no decorrer de nosso trabalho.

A.1 Resultados Auxiliares

Proposição A.1.1 *Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup ||x_n|| \leq ||x|| .$$

Então,

$$x_n \to x.$$

Demonstração: Veja [3, *pág.* 52, Prop. III.30]. ∎

Teorema A.1.2 (Identidade de Pohozaev) *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), x \in \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{**}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e suave com $N \geq 3$.
Seja $u \in H_{loc}^2(\overline{\Omega})$ uma solução de (**) tal que

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds \in L^1(\Omega).$$

Então, u satisfaz

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \sigma.\nu d\sigma = N\int_\Omega F(u)\, dx$$

onde ν é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$.

Demonstração: Veja [15, *pág.* 253, Prop. 2.1]. ∎

Lema A.1.3 (Brézis-Lieb) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. *Se*
a) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;
b) $u_n \to u$ *q.s. em* Ω,
então $u \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(||u_n||_p^p - ||u_n - u||_p^p\right) = ||u||_p^p.$$

Demonstração: Veja [24, *pág.* 21, Lema 1.32]. ■

Lema A.1.4 *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$. *Se* $-\lambda_1(\Omega) < \lambda < 0$, *então existe uma função não-negativa* $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ *tal que*

$$\frac{||v||^2 + \lambda\,||v||_2^2}{||v||_{2^*}^2} < S,$$

onde $\lambda_1(\Omega)$ *é o primeiro autovalor de* $-\Delta$ *em* Ω *com as condições de fronteira de Dirichlet e* S *é a melhor constante da imersão de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $L^{2^*}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [24, *pág.* 35, Lema 1.46]. ■

Teorema A.1.5 *Seja* (u_n) *uma sequência em* L^p *e* $u \in L^p$ *tais que* $||u_n - u||_{L^p} \to 0$. *Então, existe uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *tal que*
a) $u_{n_k} \to u$ *q.s. em* Ω,
b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k$ *e q.s. em* Ω, *com* $h \in L^p$.

Demonstração: Veja [3, *pág.*58, Teorema IV.9]. ■

Proposição A.1.6 *Para todo subconjunto aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^N$,

$$S \equiv S(\Omega) := \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \\ |u|_{2^*}=1}} ||\nabla u||_2^2$$

e $S(\Omega)$ *nunca é atingido exceto quando* $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Demonstração: Veja [24, *pág.* 32, Prop. 1.43]. ■

Proposição A.1.7 *Sejam* u *uma função mensurável,* u^* *sua simetrização de Schwarz e* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função Borel mensurável tal que ou* $F \geq 0$ *ou* $F(u) \in L^1(\Omega)$. *Então,*

$$\int_{B(0,r)} F(u^*(x))\,dx = \int_{B(0,r)} F(u(x))\,dx.$$

Demonstração: Veja [16, *pág.* 14]. ■

Teorema A.1.8 (Pólya-Szegö) *Seja* $1 \leq p < +\infty$. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado e* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $u \geq 0$. *Então,*

$$\int_{B(0,r)} |\nabla u^*|^p\,dx \leq \int_{B(0,r)} |\nabla u|^p\,dx.$$

Em particular $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [16, *pág.* 35, Teorema 2.3.1]. ■

Teorema A.1.9 (Teorema de Lusin) *Sejam X um espaço topológico localmente Hausdorff compacto, μ é uma medida de Radon em X e $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função mensurável tal que $\mu(E) < +\infty$ onde $E = \{x;\ f(x) \neq 0\}$. Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in C_c(X)$ tal que $\mu(\{x; f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon$. Se f é limitada, φ pode ser tomado satisfazendo $||\varphi||_u \leq ||f||_u$.*

Demonstração: Veja [11, *pág.* 211, Teorema 7.10]. ■

Teorema A.1.10 (Teorema de Egoroff) *Sejam $\mu(X) < +\infty$, e f_n e f funções complexas mensuráveis em X tais que $f_n \to f$ q.s.. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \epsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em E^c.*

Demonstração: Veja [11, *pág.* 60, Teorema 2.33]. ■

Proposição A.1.11 *Sejam E um espaço de Banach e $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ semicontínua inferiormente (para a topologia forte). Então, φ é semicontínua inferiormente para a topologia fraca. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ então*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Demonstração: Veja [3, *pág.* 38, Corolário III.8]. ■

Proposição A.1.12 *Sejam ν e μ medidas em um espaço de medida. Então,*
a) $\nu << |\nu|$ e $\frac{d\nu}{d|\nu|} = 1$ $|\nu| -$ q.s.;
b) $L^1(v) = L^1(|v|)$, e se $f \in L^1(v)$, então $\left|\int f d\nu\right| \leq \int |f| \, d|\nu|$;
c) $|v(E)| \leq |v|(E)$ para todo E pertencente a $\sigma-$álgebra;

Demonstração: Veja [11, *pág.* 89, Prop.3.13]. ■

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349–381.

[2] Ambrosetti A.; Struwe M., *A note on the problem* $-\Delta u = \lambda u + u\,|u|^{2^*-2}$, Manuscripta Math. 54 (1986) 373–379.

[3] Brézis, H., *Analyse fonctionelle,* Masson, 1987.

[4] Brézis, H.; Nirenberg, Louis, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 4, 437–477.

[5] Capozzi, A.; Fortunato D.; Palmieri G., *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire 2 (6) (1985) 463–470.

[6] Cerami, G.; Fortunato, D.; Struwe, M., *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire 1 (1984) 341–350.

[7] Costa, D.G. ; Silva, E. A. B., *A note on problems involving critical Sobolev exponents*, Differential and Integral Equations 8 (3) (1995) 673–679.

[8] de Figueiredo, D. G., *The Ekeland Variational Principle with Aplications and Detours,* Springer-Verlag, New York, 1989.

[9] de Figueiredo, D. G.; Gossez, J.P., *Strict Monoticity of Eigenvalues and Unique Continuation*, Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 1-2, 339–346.

[10] do Ó, J. M., *Teoria de Pontos Crúticos de Lusternik-Schnirelmann e aplicações as Equações Diferenciais Parciais,* Minicurso do I EBED, IMECC UNICAMP, 2003.

[11] Folland, G. B., *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[12] Fox, R. H., *On the Lusternik-Schnirelmann Category,* The Annals of Mathemathics, Second Series, Vol. 42, No. 2 (Apr., 1941), pp. 333-370.

[13] Garcia A. J.; Peral, A. I., *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans.Amer. Math. Soc. 323 (2) (1991) 877–895.

[14] Gazzola, F.; Ruf, B., *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Advances in Differential Equations 2 (4) (1997) 555–572.

[15] Kavian, O.*, Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[16] Kesavan, S., *Symmetrization & Applications, Series in Analysis Vol.3,* World Scientific, New Jersey, 2006.

[17] Lazzo, M., Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec l'exponsant critique de Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris 314 (1992) 161-164.

[18] Lions,P.L.,*The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1, 2,* Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985) 145–201, pp. 45–121.

[19] Rey, O., *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness.* Nonlinear Anal. 13 (1989), no. 10, 1241–1249.

[20] Schwartz, Jacob T., *Nonlinear Functional Analysis,* Gordon and Breach Science, New York, 1969.

[21] Silva, E. A. B., *Linking theorems and aplications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Anal. TMA 16 (1991) 445-477.

[22] Silva, E. A. B.; Xavier, Magda S., *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003), no. 2, 341–358.

[23] Silva, E. A. B.; Xavier, Magda S., *Quasilinear Dirichlet problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Nonlinear Anal. TMA 43 (2001) 1–20.

[24] Wei, Z.; Wu, X.*A. , Multiplicity result for quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA 18 (6) (1992) 559–567.

[25] Willem, M., *Minimax theorems,* Birkhäuser, Boston, 1996.