Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies com Hessiano nulo

Maikon dos Santos Livi

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies com Hessiano nulo

por

Maikon dos Santos Livi

sob orientação da

Prof[a]. Dr[a]Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

fevereiro de 2011
João Pessoa-PB

L785h Livi, Maikon dos Santos.
Hipersuperfícies com Hessiano nulo / Maikon dos Santos Livi. - - João Pessoa : [s.n.], 2011.
56f. il.

Orientadora: Jaqueline Fabiola Rojas Arancibia..
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1.Matemática. 2.Hipersuperfície. 3.Espaço projetivo. 4.Hessiano polinomial nulo. 5.Cone.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Hipersuperfícies com Hessiano nulo

por

Maikon dos Santos Livi

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Profª. Drª. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia - DM-UFPB (Orientadora)

Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo - DM-UFPE

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - DM-UFPB

Prof. Dr. Antônio de Andrade Silva - DM-UFPB (Suplente)

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço a(os):

▶ minha família Pedro José(Pai), Vera Regina(Mãe), Alessandro(Ale), Michele(Chele), Lea(Cunhadinha), Luana(Lua) e Pedro Vinicius(Pêdinho) por todo apoio, carinho, amor e compreensão;

▶ minha noiva Tatiane Carvalho(neguinha) pelo companheirismo e por aturar meus momentos de mau humor, como no dia em que Andrea a fez esquecer de comprar o jantar;

▶ meus quase irmãos Bruna(Bruninha), Charlene(brother Cha), Danilo(Dan), Denisson(Minino ou Deninho das meninas), Geraldo(Geraldinho ou Juca Fofinho), Italo(Italo) e Matheus (Matheusinho) por toda a ajuda e alegria que me proporcionam;

▶ professores da UFS Fábio dos Santos, Gastão Florêncio e Kalasas Vasconcelos pelos incentivos para eu fazer mestrado;

▶ minha orientadora prof.ª Jacqueline Rojas pelos conhecimentos, matemáticos e didáticos, pela paciência e carinho;

▶ brothers de estudo Andrea Moura(Andleia), Claudemir(μ), Geraldo(Geras), Pryscilla(ψ') e Viviane(Vivi) por todas as horas de ajuda, paciência e brincadeiras;

▶ professores da UFPB Antonio de Andrade, Everaldo Souto, Fagner Araruna e Lizandro Challapa pelos cursos que assisti;

▶ caderno de Viviane por todas as vezes que tirei xerox, em todas as disciplinas;

▶ colegas que fiz no mestrado Anderson, Andre, Daniel, Diana, Diego, Disson, Edjane, Elisânia, Flávio, Gersica, Gilson, Karine, Maurício, Marco, Marcos, Odinéia, Reginaldo, Ricardo(Moral 2), Rodrigo, Sheldon, Suelen(Moral 1), Tarciana, Tiago, Vinicius, Yane, etc.... Pelos momentos de descontração.

Resumo

Hesse afirmou em um dos seus artigos que uma hipersuperfície no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ que tenha o hessiano polinomial nulo é um cone. Mais tarde, Gordam e Noether provam que a afirmação de Hesse é valida apenas para $n \leq 3$, apresentando contra-exemplos para $n \geq 4$. Inicialmente tentamos resolver o problema de maneira direta e elementar, tendo sucesso só no caso de $\mathbb{P}^1$, então partimos para o estudo de dual de uma variedade e de mapa polar associado a uma hipersuperfície $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. Tendo em consideração que $X^* \subseteq I_F$, onde I_F é a imagem do mapa polar, e que X é um Cone se, e somente se, X^* é degenerado. Somos levados a mostrar uma série de resultados técnicos afim de concluir que I_F é uma variedade linear, especificamente uma reta se $n = 2$ e um plano ou uma reta se $n = 3$. Provando assim que dada uma hipersuperfície $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. Se $n \leq 3$, então

$$X \text{ é um cone} \Longleftrightarrow \det\left[Hess\left(F\right)\right] = 0.$$

Palavras-Chave: Hipersuperfície, Hessiano nulo, Dualidade, Cone.

Abstract

Hesse said in one of his articles that a hypersurface in the projective space $\mathbb{P}^n$ that has null hessian polynomial is a cone. Later, Gordam and Noether prove that the statement of Hesse is valid only for $n \leq 3$, presenting counter-examples for $n \geq 4$. Initially we tried to solve the problem in a direct and elementary form, been well succeeding only in the case of $\mathbb{P}^1$, so we set out to study the dual of variety and polar map associated to the hypersurface $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. Having mind that $X^* \subseteq I_F$, where I_F is the polar map image, and that X is a cone if and only if, X^* is degenerate. Which brings us to display a series of technical results in order to conclude that I_F is a linear variety, specifically a line if $n = 2$ and a plane or line if $n = 3$. Thus we prove for a given hypersurface $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. If $n \leq 3$, then

$$X \text{ is a Cone} \Longleftrightarrow \det\left[Hess\,(F)\right] = 0.$$

Keywords: Hypersurface, Hessian null, Duality, Cone.

Sumário

Introdução

Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, ..., x_n]$ um polinômio não nulo de grau $d \geq 1$. Seja h_F o polinômio hessiano associado a F, ou seja, h_F é o determinante da matriz hessiana, a saber:

$$h_F := \det\left(\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=0,\ldots,n}\right).$$

É óbvio que $h_F \equiv 0$ se em F não comparecem todas as variáveis. De fato, com um pouco mais de trabalho (veja **Corolário 1.0.8**) pode-se verificar que $h_F \equiv 0$ se for possível fazer uma mudança de coordenadas de tal maneira que o novo polinômio dependa de no máximo n variáveis.

No contexto de geometria algébrica, se F for homogêneo as hipersuperfícies $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ tais que após uma mudança de coordenadas projetivas, $\mathbb{T}$, seja possível obter $\mathbb{T}(X) = Z(T_d \cdot F)$, onde $T_d \cdot F$ depende no máximo de n variáveis é denominado um Cone. Portanto temos verificado que se $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ é um Cone, então $h_F \equiv 0$.

Uma questão natural que surge aqui é em relação a recíproca, ou seja, se $h_F \equiv 0$, então $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ é um Cone? Se $d = 1$ é óbvio, se $d = 2$ a afirmação é válida (veja **Corolário 1.0.11**). Mas e se $d \geq 3$?

Em 1851, Ludwig Otto Hesse afirmou em [HE] que

$$h_F \equiv 0 \Longleftrightarrow X = Z(F) \text{ é um Cone.}$$

Mas em 1876 Gordan e Noether, em [GN], reconsideraram este problema e provaram que Hesse estava enganado, pois o inverso seria válido apenas quando $n \leq 3$ e em geral é falso quando $n \geq 4$.

O objetivo desta dissertação é explorar a recíproca da afirmação de Hesse. Mostrando que

$$h_F \equiv 0 \Longleftrightarrow X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n \text{ é um Cone para } n \in \{1, 2, 3\}.$$

Com este objetivo em mente iniciamos o capítulo 1 tentando resolver o problema de maneira direta e elementar. No caso $n = 1$ conseguimos ter sucesso. Já para $n = 2$, após um arduo trabalho conseguimos verificar a recíproca para $d = 3$ e 4. Assim somos levados a introduzir os conceitos de dual de uma variedade e mapa polar associado a uma hipersuperfície $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$. De fato, o mapa polar é definido como o mapa racional

$$\begin{aligned} \varphi_F : \mathbb{P}^n \cdots &\longrightarrow \mathbb{P}^{n*} \\ q &\longmapsto \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(q) : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_n}(q)\right] \end{aligned} .$$

Se denotarmos por I_F a imagem do mapa polar φ_F, verifica-se a partir das definições que $X^* \subset I_F$. O que nos levara a concluir que se I_F é degenerada ou variedade linear, então X^* será degenerada. Logo o **Teorema 2.1.4** nos permite concluir que X é um Cone.

Neste sentido o **Teorema(ZAK) 2.2.3** nos garante que $\dim I_F^* \leq \dim SingX$. Logo se $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ e $h_F \equiv 0$ com $n \leq 3$, então necessariamente $0 \leq \dim I_F^* \leq 1$.

Se $\dim I_F^* = 0$, então apelando para o Teorema de Bidualidade e usando que dualização preserva irredutibilidade (veja **Proposição 2.0.5**) concluímos I_F é um hiperplano, logo X é um Cone.

Se $\dim I_F^* = 1$, então uma série de resultados técnicos nos permitem concluir que I_F^* é uma reta em $\mathbb{P}^3$ e consequentemente I_F também será uma reta. Logo X é um cone.

Notações

P - Denota o anel $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$;
P_d - Denota o subespaço vetorial $\{F \in P \ / \ F$ é homogêneo e $\partial(F) = d\}$;
h_F - Denota $\det[Hess(F)]$;
$\mathbb{P}^n$ - Denota o Espaço Projetivo de dimensão n;
Mcp - Denota Mudança de Coordenadas Projetivas;
$G(k, V)$ - Denota a *k-grassmaniana* associada ao espaço vetorial V;
T_d - Denota o isomorfismo linear de P_d em P_d definido por $F \longmapsto T_d \cdot F$, onde

$$T_d \cdot F(x_0, ..., x_n) = F\left(T^{-1}(x_0, ..., x_n)\right),$$

com $T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um isomorfismo linear.

Capítulo 1

Caracterização das hipersuperfícies com hessiano nulo

Neste capítulo iremos definir e trabalhar com Cones em $\mathbb{P}^n$, mais especificamente para $n = 1, 2, 3$. Caso o leitor não esteja familiarizado com as definições e conceitos de Geometria Algébrica, recomendamos a leitura da referência [Rob], capítulo 1, seções 1, 2 e 3, ou a leitura da referência [EGH], capítulos 5 e 6.

Definição 1.0.1 (Cone) *Seja $X = [F]$ uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$. X é denominado Cone, se e somente se, existe uma mudança de coordenadas projetivas (Mcp)*

$$\begin{aligned} \mathbb{T} : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ [v] &\longmapsto [T(v)] \end{aligned}$$

tal que $T_d \cdot F$ é um polinômio onde comparecem no máximo n variáveis (T_d denota o isomorfismo linear de P_d em P_d definido por $T_d \cdot F(x_0, ..., x_n) = F(T^{-1}(x_0, ..., x_n))$).

Exemplo 1.0.2 *Em $\mathbb{P}^n$ todo hiperplano é um Cone. De fato, seja $[F]$ um hiperplano em $\mathbb{P}^n$. Assim $F = a_0x_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$, onde $a_i \in \mathbb{C}$ não são todos nulos. Agora, se $a_i \neq 0$, consideremos a Mcp $\mathbb{T}$ induzida pelo isomorfismo linear*

$$\begin{aligned} T_1 : P_1 &\longrightarrow P_1 \\ F &\longmapsto x_i \\ x_j &\longmapsto x_j \end{aligned} \quad ,$$

se $j \neq i$. Logo $T_1 \cdot F = x_i$. Portanto $[F]$ é um Cone.

Proposição 1.0.3 *Seja $X = [F]$ uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^1$. Então X é um Cone se, e somente se, $Z(F)$ é um ponto em $\mathbb{P}^1$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Seja $X = [F]$ um Cone em $\mathbb{P}^1$, então existe uma *Mcp* $\mathbb{T}$ tal que $T_d \cdot F = x_0^d$. Assim

$$\mathbb{T}(Z(F)) = Z(T_d \cdot F) = \{[0:1]\} \Longrightarrow Z(F) = \left\{\mathbb{T}^{-1}([0:1])\right\}.$$

Logo $Z(F)$ é um ponto em $\mathbb{P}^1$.

$\Leftarrow$) Temos que $Z(F) = Z\left(ax_0 - bx_1\right)$. Como a ou b é não nulo, então, sem perda de generalidade, suponhamos que $a \neq 0$. Agora, consideremos uma *Mcp* $\mathbb{T}$ induzida pelo isomorfismo linear

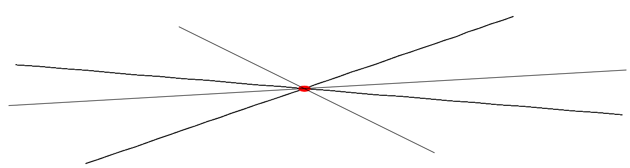
$$\begin{aligned} T_1 : P_1 &\longrightarrow P_1 \\ ax_0 - bx_1 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \end{aligned} .$$

Assim $T_1 \cdot (ax_0 - bx_1) = x_0$. Já que $Z(F) = Z(ax_0 - bx_1)$, então

$$\begin{aligned} Z\left(T_d \cdot F\right) &= Z\left(T_1 \cdot (ax_0 - bx_1)\right) = Z\left(x_0\right) \\ &\Rightarrow T_d \cdot F = \mu x_0, \end{aligned}$$

para algum $\mu \in P_{d-1}$. Agora, como $Z\left(T_d \cdot F\right)$ consiste em um único ponto, necessariamente $\mu = \alpha x_0^{d-1}$, com $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Portanto $T_d \cdot F = \alpha x_0^d$, de onde concluímos que $[F]$ é um cone em $\mathbb{P}^1$. ∎

A seguir mostraremos que os cones em $\mathbb{P}^2$ são união de retas concorrentes, conforme ilustra a figura a seguir:



Proposição 1.0.4 *Seja $X = [F]$ uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^2$. Então X é um Cone se, e somente se, $Z(F) = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k$, com $k \leq d$, onde L_i são retas em $\mathbb{P}^2$ para $i = 1, 2, ..., k$. Além disso, se $k \geq 2$ e $L_1 \cap L_2 = \{p\}$, então $p \in L_t$, para todo $t = 1, 2, ..., k$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Seja $X = [F]$ um Cone em $\mathbb{P}^2$, então existe uma *Mcp* $\mathbb{T}$ tal que $T_d \cdot F \in \mathbb{C}\left[x_0, x_1\right]$. Assim, pela **Proposição B.1.8**, temos que

$$T_d \cdot F = \prod_{i=1}^{d} \left(a_i x_0 + b_i x_1\right),$$

onde $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$, para todo $i = 1, 2, ..., d$. Logo

$$\mathbb{T}\left(Z(F)\right) = Z\left(T_d \cdot F\right) = Z\left(\prod_{i=1}^{d} \left(a_i x_0 + b_i x_1\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{d} Z\left(a_i x_0 + b_i x_1\right)$$

$$\Rightarrow Z(F)=\mathbb{T}^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{d} Z\left(a_i x_0+b_i x_1\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{d} \mathbb{T}^{-1}\left(Z\left(a_i x_0+b_i x_1\right)\right)$$

$$\Rightarrow Z(F)=\bigcup_{i=1}^{d} Z\left(T_1^{-1}\cdot\left(a_i x_0+b_i x_1\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{d} L_i,$$

onde $L_i=Z\left(T_1^{-1}\cdot\left(a_i x_0+b_i x_1\right)\right)$. Note que L_i são retas, pois T_1 é um isomorfismo linear em P_1, para $n=1$.

Agora, suponhamos que $k\geq 2$ e $L_1\cap L_2=\{p\}$. Seja $f_t=T_1^{-1}\cdot\left(a_t x_0+b_t x_1\right)$ para $t=1,2,...,k$. Como f_1 e f_2 são linearmente independentes em P_1 e $\dim P_1=2$, para $n=1$, então existem $[\alpha_t:\beta_t]\in\mathbb{P}^1$ tais que

$$f_t=\alpha_t f_1+\beta_t f_2,$$

para todo $t=1,2,...,k$. Assim

$$f_t\left(p\right)=\alpha_t f_1\left(p\right)+\beta_t f_2\left(p\right)=0.$$

Logo $p\in L_t$, para todo $t=1,2,...,k$.

$\Leftarrow$) Já sabemos que todo hiperplano é um Cone. Portanto vamos assumir que $d\geq 2$. Assim, temos que $Z(F)=L_1\cup L_2\cup\ldots\cup L_k$ e $L_1\cap L_2=\{p\}$, onde L_t são retas em $\mathbb{P}^2$ com $t=1,2,...,k$. Façamos $L_t=Z(l_t)$, onde l_t são formas lineares em x_0,x_1 e x_2. Assim

$$\begin{aligned} Z(F)&=Z(l_1\cdot...\cdot l_k)\\ &\Rightarrow\sqrt{\langle F\rangle}=\sqrt{\langle l_1\cdot...\cdot l_k\rangle}=\langle l_1\cdot...\cdot l_k\rangle\\ &\Rightarrow F=\mu l_1\cdot...\cdot l_k,\end{aligned}$$

com $\mu\in\mathbb{C}\left[x_0,x_1,x_2\right]$. Como $Z\left(F\right)=L_1\cup...\cup L_k$, então necessariamente $\mu=\alpha l_1^{d_1}\cdot...\cdot l_k^{d_k}$, com $\alpha\in\mathbb{C}-\{0\}$. Portanto,

$$F=\alpha l_1^{n_1}\cdot...\cdot l_k^{n_k},$$

onde $n_1+...+n_k=d$. Além disso, temos que

$$l_t=\alpha_t l_1+\beta_t l_2,$$

pois l_1 e l_2 é uma base do subespaço de P_1, para $n=2$, formado pelas formas lineares que se anulam em p e $p\in L_t$, para todo $t=1,2,...,k$. Logo

$$F=\alpha l_1^{n_1}l_2^{n_2}\left(\alpha_3 l_1+\beta_3 l_2\right)^{n_3}\cdot...\cdot\left(\alpha_k l_1+\beta_k l_2\right)^{n_k}.$$

Agora, como $x_i\left(p\right)\neq 0$ para algum $i=0,1,2$, então suponhamos sem perda de generalidade que $x_2\left(p\right)\neq 0$ e consideremos a Mcp induzida pelo isomorfismo

$$\begin{aligned} T_1: P_1 &\longrightarrow P_1\\ l_1 &\longmapsto x_0\\ l_2 &\longmapsto x_1\\ x_2 &\longmapsto x_2\end{aligned}.$$

Note que

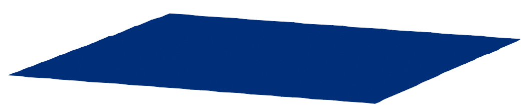
$$\begin{aligned} T_d \cdot F &= T_d \cdot \left(\alpha l_1^{n_1} l_2^{n_2} \left(\alpha_3 l_1 + \beta_3 l_2\right)^{n_3} \cdot \ldots \cdot \left(\alpha_k l_1 + \beta_k l_2\right)^{n_k}\right) \\ &= \left(\alpha l_1^{n_1} l_2^{n_2} \left(\alpha_3 l_1 + \beta_3 l_2\right)^{n_3} \cdot \ldots \cdot \left(\alpha_k l_1 + \beta_k l_2\right)^{n_k}\right) \left(T^{-1}\right) \\ &= \alpha x_0^{n_1} x_1^{n_2} \left(\alpha_3 x_0 + \beta_3 x_1\right)^{n_3} \cdot \ldots \cdot \left(\alpha_k x_0 + \beta_k x_1\right)^{n_k}. \end{aligned}$$

Portanto $X = [F]$ é um Cone. ■

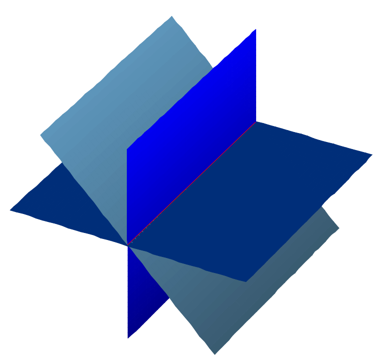
Cones em $\mathbb{P}^3$

Seja $X = [F]$ um Cone de grau d em $\mathbb{P}^3$. Então existe uma *Mcp* $\mathbb{T}$ em $\mathbb{P}^3$ tal que em $T_d \cdot F$ comparecem no máximo três variáveis. Seja n_0 o número mínimo de variáveis ao qual podemos chegar após realizar uma *Mcp*. Assim, se:

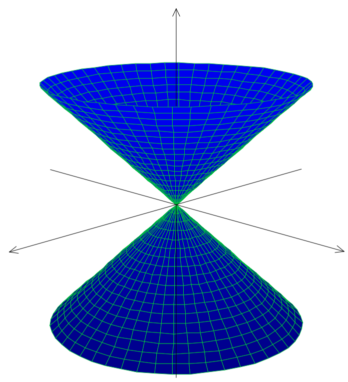
1) $n_0 = 1$, então $T_d \cdot F = x_0^d$. Logo o traço de $T_d \cdot F$ define um palno em $\mathbb{P}^3$.



2) $n_0 = 2$, então, pelo **Teorema B.1.8**, temos que $T_d \cdot F = \prod_{i=1}^{k} \left(a_i x_0 - b_i x_1\right)^{d_i}$, com $d_1 + \ldots + d_k = d$ e $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$ para todo $i = 1, .., k$. Note que em $T_d \cdot F$ comparecem no mínimo dois fatores lineares linearmente independentes, pois do contrário podemos eliminar mais uma variável. Assim o suporte de $T_d \cdot F$ consiste da união de k planos distintos contendo a reta $l = Z\left(x_0, x_1\right)$.

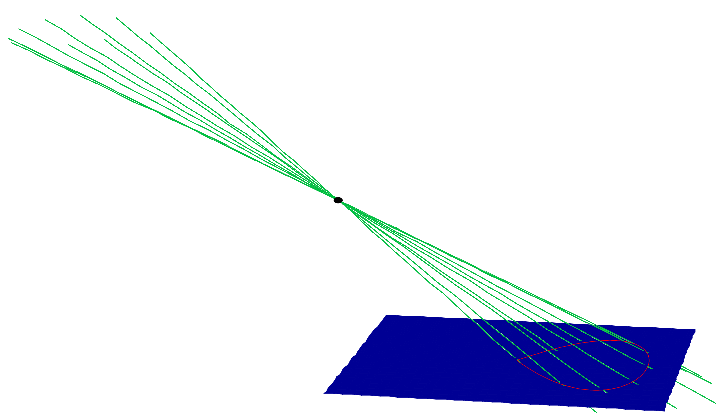


3) $n_0 = 3$. Inicialmente assuma que F é livre de quadrados e irredutível. Se $d = 2$, temos que $Z(F)$ é um Cone do seguinte tipo

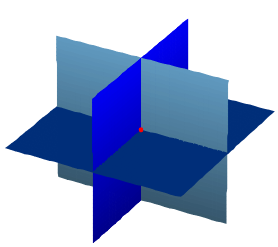


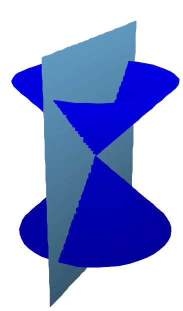
.

Em geral, $Z(F)$ é dado por uma união de retas $l_{p,q}$ passando por um ponto p com q variando sobre uma curva plana de grau d.



Agora se retirarmos a condição de F ser irredutível, a superfície X será a união dos outros já citados. Por exemplo, se $d = 3$, temos que $T_3 \cdot F = L_1 L_2 L_3$ ou $T_3 \cdot F = QL_4$, onde Q é uma quádrica irredutível e L_i são formas lineares, cujos traços são os seguintes.





Proposição 1.0.5 *Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^3$ uma superfície irredutível e reduzida de grau d. Então X é um Cone se, e somente se, existe $H \subsetneq \mathbb{P}^3$ plano e $p \notin H$ tal que $X = \bigcup\limits_{q \in \mathcal{C}} l_{p,q}$, onde $\mathcal{C} = X \cap H$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^3$ um Cone, então existe uma *Mcp* $\mathbb{T}$ tal que $T_d \cdot F = f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Consideremos $H = Z(x_3)$ e $p = [0:0:0:1]$. A seguir provaremos que $Z(f) = \bigcup\limits_{q \in \mathcal{C}} l_{p,q}$, onde $\mathcal{C} = Z(f) \cap H$:

i) Seja $r \in Z(f)$. Se $r = p$ ou $r \in H$, não há o que mostrar. Se $r \notin H$ e $r \neq p$ temos que $l_{p,r} \cap H = \{q\}$. Assim $q = \alpha r + \beta p$, com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$, então $q = [\alpha r_0 : \alpha r_1 : \alpha r_2 : 0]$, onde $\beta = -\alpha r_3$, isto implica que $f\,(q) = f(\alpha r_0, \alpha r_1, \alpha r_2, 0) = \alpha^d f\,(r) = 0$. Logo $q \in \mathcal{C}$ concluíndo assim que $l_{p,r} = l_{p,q} \subseteq \bigcup\limits_{q \in \mathcal{C}} l_{p,q}$. Portanto $Z(f) \subseteq \bigcup\limits_{q \in \mathcal{C}} l_{p,q}$.

ii) Seja $r \in l_{p,q}$, com $q \in \mathcal{C}$ dado por $q = [q_0 : q_1 : q_2 : 0]$. Assim $r = [\alpha q_0 : \alpha q_1 : \alpha q_2 : \beta]$, para algum $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Observemos que

$$f\,(r) = f\,(\alpha q_0, \alpha q_1, \alpha q_2, \beta) = \alpha^d f\,(q_0, q_1, q_2, 0) = \alpha^d \cdot 0 = 0 \Rightarrow l_{p,q} \subseteq Z(f).$$

Logo $\mathbb{T}\,(Z(F)) = Z\,(f) = \bigcup\limits_{q \in \mathcal{C}} l_{p,q}$. De onde conluímos que

$$Z(F) = \mathbb{T}^{-1}\left(\bigcup_{q \in \mathcal{C}} l_{p,q}\right) = \bigcup_{\mathbb{T}^{-1}(q) \in \mathbb{T}^{-1}(\mathcal{C})} \mathbb{T}^{-1}\left(l_{p,q}\right).$$

$\Leftarrow$) Inicialmente observemos que dados um plano $H = Z\,(h)$ em $\mathbb{P}^3$ e $p \notin H$, existe uma Mcp $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T_1 \cdot h = x_3$ e $\mathbb{T}(p) = \widetilde{p} = [0:0:0:1]$ (ver **Exemplo B.4.1**). Seja $T_d \cdot F = f$. Observe que $f\,(x_0, x_1, x_2, 0) \in \mathbb{C}\,[x_0, x_1, x_2]_d$ é não nulo, pois f é irredutível. Assim considere a superfície $Z\left(\widetilde{f}\right)$, com $\widetilde{f} = f\,(x_0, x_1, x_2, 0)$, então, conforme foi mostrado na implicação desta proposição,

$$Z\left(\widetilde{f}\right) = \bigcup_{q \in \mathcal{C}} l_{\widetilde{p},q},$$

onde $\mathcal{C} = Z(f) \cap Z(x_3)$. Logo

$$Z(T_d \cdot F) = Z\left(\widetilde{f}\right) \Rightarrow T_d \cdot F = \lambda \widetilde{f},$$

onde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, ou seja, $T_d \cdot F$ depende no máximo de três variáveis. ■

Observação 1.0.6 *Seja $F \in \mathbb{C}\,[x_0, ..., x_n]$. Denotaremos por h_F o hessiano polinomial de F, o qual é definido pelo determinante da matrix Hessiana associada a F, ou seja*

$$h_F = \det\left[Hess\,(F)\right] := \det\left(\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=0,\ldots,n}\right).$$

Teorema 1.0.7 *Sejam $F \in P_d$ não nulo, com $d \geq 1$, e $T \in Aut\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)$. Então $[Hess\,(T_d \cdot F)] = [T^{-1}]^t\,[Hess\,(F)]\,[T^{-1}]$.*

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama

$$\mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{F} \mathbb{C}.$$

Assim as aplicações

$$\left(T^{-1}\right)' : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^{n+1}\right) \text{ e } \left(T^{-1}\right)'' : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^{n+1}, \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^{n+1}\right)\right),$$

induzem respectivamente, para todo $c \in \mathbb{C}$, as seguintes aplicações

$$\left(T^{-1}\right)'_c : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \text{ e } \left(T^{-1}\right)''_c : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}.$$

De fato, usando a regra da cadeia pode-se mostrar que, para todo $(u, v) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, temos que

$$\left(F \circ T^{-1}\right)''_c (u, v) = F''_{T^{-1}(c)} \left(\left(T^{-1}\right)'_c (u), \left(T^{-1}\right)'_c (v)\right) + F'_{T^{-1}(c)} \left(\left(T^{-1}\right)''_c (u, v)\right).$$

Como $\left(T^{-1}\right)'_c$ é uma aplicação linear e $\left(T^{-1}\right)'_c = T^{-1}$, então $\left(T^{-1}\right)''_c = 0$, obtendo assim que

$$\left(F \circ T^{-1}\right)''_c (u, v) = F''_{T^{-1}(c)} \left(\left(T^{-1}\right)'_c (u), \left(T^{-1}\right)'_c (v)\right).$$

Agora, por Álgebra Linear, temos que

$$[B \circ L \times L]_\beta = \left([L]^\beta_\alpha\right)^t [B]_\alpha\,[L]^\beta_\alpha,$$

onde $L : W \longrightarrow V$ é uma aplicação linear, $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ é bilinear, α e β são bases ordenadas fixadas de V e W, respectivamente.

Portanto, como $T_d \cdot F = F \circ T^{-1}$, temos que

$$[Hess\,(T_d \cdot F)] = \left[T^{-1}\right]^t [Hess\,(F)] \left[T^{-1}\right],$$

na base canônica. ■

Corolário 1.0.8 *Seja $F \in P_d$ não nulo, com $d \geq 1$. Então $h_F = 0$ se, e somente se, $h_{T_d \cdot F} = 0$, para todo $T \in Aut\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)$.*

Demonstração: De fato temos que

$$[Hess\,(T_d \cdot F)] = \left[T^{-1}\right]^t [Hess\,(F)] \left[T^{-1}\right].$$

Assim

$$\det\,[Hess\,(T_d \cdot F)] = \det \left[T^{-1}\right]^t \det\,[Hess\,(F)] \det \left[T^{-1}\right].$$

Logo, $h_{T_d \cdot F} = 0 \Leftrightarrow h_F = 0$, pois $\det\,[T^{-1}] \neq 0$. ■

Corolário 1.0.9 *Se $X = [F] \subset \mathbb{P}^n$ é um Cone, então $h_F = 0$.*

O próximo teorema classifica as hipersuperfícies quádricas em $\mathbb{P}^n$ e nos permite concluir que $h_F = 0$ se, e somente se, o posto da quádrica $[F]$ é menor ou igual a n.

Teorema 1.0.10 (Forma Normal para Quádricas)
Seja uma hipersuperfície quádrica $Q = [F] \subseteq \mathbb{P}^n$. Então, a menos de uma Mcp $\mathbb{T}$, $T \cdot F$ é igual a um dos seguintes polinômios homogêneos:
1) $F_1 = x_0^2$;
2) $F_2 = x_0^2 + x_1^2$;
$\vdots$
n+1) $F_{n+1} = x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2$.

Demonstração: De fato, seja $F = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{i,j}x_ix_j = [x]^t A\,[x]$, onde $[x] = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $A = (a_{i,j})_{(n+1)\times(n+1)}$ é uma matriz simétrica. Sabemos que existe uma matriz ortogonal P tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$. Considere o isormofismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ cuja matriz associada na base canônica é P. Asim $T \cdot F = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i^2 x_i^2$. Logo, considerando $S : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ definida por $S \cdot x_i = \begin{cases} x_i, \text{ se } \lambda_i = 0 \\ \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \text{ se } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$ e renomeando os índices, caso necessário, concluímos que $S \cdot (T \cdot F) = \sum\limits_{i=0}^{k} x_i^2$, com $0 \leq k \leq n$. Além disso, ao leitor interessado, conferir referência [RM], pg. 63. ■

Corolário 1.0.11 *Uma hipersuperfície quádrica $Q = [F] \subset \mathbb{P}^n$ é um Cone se, e somente se, $h_F = 0$.*

Já sabemos que todo hiperplano em $\mathbb{P}^n$ é um Cone. Agora, o Corolário acima nos permite caracterizar as hipersuperfícies quádricas que são Cones. Assim, de agora em diante assumiremos que as hipersuperfícies tem grau $d \geq 3$.

1.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{P}^1$ com hessiano nulo

Verifica-se facilmente que um ponto de múltiplicidade $k \geq 1$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{P}^1$com hessiano nulo. O Teorema que provaremos a seguir nos garante que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.1.1 *Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ não nulo e homogêneo de $\partial(F) = d \geq 3$. Verifica-se que $[F]$ é um Cone se, e somente se, $h_F = 0$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Segue do **Corolário 1.0.9**.

$\Leftarrow$) Seja $d \geq m \geq 1$ tal que $x_0^m \mid F$ e $x_0^m \nmid F$. Assim $F = x_0^m G$, para algum $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$, e consequentemente

$$\begin{cases} F_{x_0x_0} = m(m-1)\, x_0^{m-2}G + 2mx_0^{m-1}G_{x_0} + x_0^m G_{x_0x_0} \\ F_{x_0x_1} = mx_0^{m-1}G_{x_1} + x_0^m G_{x_0x_1} \\ F_{x_1x_1} = x_0^m G_{x_1x_1} \end{cases}.$$

Como $h_F = 0$, então $F_{x_0x_0}F_{x_1x_1} - F_{x_0x_1}^2 = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} x_0^{2m}\left(G_{x_0x_0}G_{x_1x_1} - G_{x_0x_1}^2\right) + 2mx_0^{2m-1}\left(G_{x_0}G_{x_1x_1} - G_{x_1}G_{x_0x_1}\right) + \\ mx_0^{2m-2}\left((m-1)\, GG_{x_1x_1} - mG_{x_1}^2\right) = 0 \\ \Longrightarrow (m-1)\, GG_{x_1x_1} - mG_{x_1}^2 = Rx_0, \end{aligned}$$

para algum $R \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$. A seguir, consideremos $G = x_0S + ax_1^e$, onde $e = \partial(G)$, $S \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ e $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, pois $x_0^m \nmid F$. Logo

$$\begin{cases} G_{x_1} = x_0S_{x_1} + aex_1^{e-1} \\ G_{x_1x_1} = x_0S_{x_1x_1} + ae(e-1)\, x_1^{e-2} \end{cases}$$

isto implica

$$\begin{aligned} (m-1)\left(x_0S + ax_1^e\right)\left(x_0S_{x_1x_1} + ae(e-1)\, x_1^{e-2}\right) - m\left(x_0S_{x_1} + aex_1^{e-1}\right)^2 = Rx_0 \\ \Longrightarrow x_0B + a^2e(1-e-m)\, x_1^{2e-2} = Rx_0, \end{aligned}$$

onde
$B = x_0\left\{(m-1)\left[x_0SS_{x_1x_1} + ae(e-1)\, x_1^{e-2}S + ax_1^eS_{x_1x_1}\right] - mS_{x_1}\left(xS_{x_1} + 2aex_1^{e-1}\right)\right\}$.
Portanto

$$\begin{aligned} a^2e(1-e-m) = 0 \Longrightarrow & \begin{cases} e = 0 \\ \quad \text{ou} \\ e + m = 1 \Rightarrow e = 0, \text{ pois } m \geq 1 \text{ e } e \geq 0 \end{cases} \\ & \Longrightarrow G \text{ é constante} \\ & \Longrightarrow F = x_0^m b, \text{ para algum } b \in \mathbb{C} \\ & \Longrightarrow [F] \text{ é um Cone.} \end{aligned}$$

■

Apresentaremos no **Apêndice B.3** uma outra demonstração para este teorema

1.2 Hipersuperfícies em $\mathbb{P}^2$ com hessiano nulo

No próximo teorema vamos verificar, sob uma determinada condição, que as curvas de grau três ou quatro que possuem hessiano nulo são necessariamente Cones. De fato, a complexidade nos cálculos nos levarão a procurar uma outra abordagem. Isto motiva, no próximo capítulo, o estudo do dual de uma variedade projetiva e introdução do mapa polar.

Teorema 1.2.1 *Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ não nulo e homogêneo de grau $d = 3$ ou 4. Verifica-se que $[F]$ é um Cone em $\mathbb{P}^2$ se, e somente se, $h_F = 0$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Segue do **Corolário 1.0.9**.

$\Leftarrow$) Temos que

$$F = \sum_{\substack{i,j,l \geq 0 \\ i+j+l=d}} a_{i,j,l} x_0^i x_1^j x_2^l.$$

Suponhamos que $d = 3$, então

$$\begin{aligned} F &= a_{3,0,0}x_0^3 + a_{2,1,0}x_0^2 x_1 + a_{1,2,0}x_0 x_1^2 + a_{0,3,0}x_1^3 + a_{2,0,1}x_0^2 x_2 \\ &\quad + a_{1,0,2}x_0 x_2^2 + a_{0,0,3}x_2^3 + a_{0,2,1}x_1^2 x_2 + a_{0,1,2}x_1 x_2^2 + a_{1,1,1}x_0 x_1 x_2. \end{aligned}$$

Como $h_F = 0$, então

$$\det \begin{vmatrix} F_{x_0x_0} & F_{x_0x_1} & F_{x_0x_2} \\ F_{x_0x_1} & F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} \\ F_{x_0x_2} & F_{x_1x_2} & F_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Se

$$\alpha\left(F_{x_0x_0}, F_{x_0x_1}, F_{x_0x_2}\right) + \beta\left(F_{x_0x_1}, F_{x_1x_1}, F_{x_1x_2}\right) = \left(F_{x_0x_2}, F_{x_1x_2}, F_{x_2x_2}\right)$$

para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\begin{pmatrix} 6a_{3,0,0}x_0 + 2a_{2,1,0}x_1 \\ +2a_{2,0,1}x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2a_{2,1,0}x_0 + 2a_{1,2,0}x_1 \\ +a_{1,1,1}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{2,0,1}x_0 + a_{1,1,1}x_1 \\ +2a_{1,0,2}x_2 \end{pmatrix} \\ \alpha\begin{pmatrix} 2a_{2,1,0}x_0 + 2a_{1,2,0}x_1 \\ +a_{1,1,1}x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2a_{1,2,0}x_0 + 6a_{0,3,0}x_1 \\ +2a_{0,2,1}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1,1}x_0 + 2a_{0,2,1}x_1 \\ +2a_{0,1,2}x_2 \end{pmatrix} \\ \alpha\begin{pmatrix} 2a_{2,0,1}x_0 + a_{1,1,1}x_1 \\ +2a_{1,0,2}x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_{1,1,1}x_0 + 2a_{0,2,1}x_1 \\ +2a_{0,1,2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{1,0,2}x_0 + 2a_{0,1,2}x_1 \\ +6a_{0,0,3}x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Por igualdade de polinômios obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\alpha a_{3,0,0} + \beta a_{2,1,0} = a_{2,0,1} \\ 2\alpha a_{2,1,0} + 2\beta a_{1,2,0} = a_{1,1,1} \\ 2\alpha a_{2,0,1} + \beta a_{1,1,1} = 2a_{1,0,2} \\ \alpha a_{1,2,0} + 3\beta a_{0,3,0} = a_{0,2,1} \\ \alpha a_{1,1,1} + 2\beta a_{0,2,1} = 2a_{0,1,2} \\ \alpha a_{1,0,2} + \beta a_{0,1,2} = 3a_{0,0,3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha a_{3,0,0} + \beta a_{2,1,0} = a_{2,0,1} \\ 2\alpha a_{2,1,0} + 2\beta a_{1,2,0} = a_{1,1,1} \\ 3\alpha^2 a_{3,0,0} + 2\alpha\beta a_{2,1,0} + \beta^2 a_{1,2,0} = a_{1,0,2} \\ \alpha a_{1,2,0} + 3\beta a_{0,3,0} = a_{0,2,1} \\ \alpha^2 a_{2,1,0} + 2\alpha\beta a_{1,2,0} + 3\beta^2 a_{0,3,0} = a_{0,1,2} \\ \alpha^3 a_{3,0,0} + \alpha^2\beta a_{2,1,0} + \alpha\beta^2 a_{1,2,0} + \beta^3 a_{0,3,0} = a_{0,0,3} \end{array} \right. .$$

Substituindo as últimas igualdades acima em F, obtemos:

$$\begin{aligned}
F &= a_{3,0,0}x_0^3 + a_{2,1,0}x_0^2x_1 + a_{1,2,0}x_0x_1^2 + a_{0,3,0}x_1^3 \\
&\quad + \left(3\alpha a_{3,0,0} + \beta a_{2,1,0}\right)x_0^2x_2 + \left(3\alpha^2 a_{3,0,0} + 2\alpha\beta a_{2,1,0} + \beta^2 a_{1,2,0}\right)x_0x_2^2 \\
&\quad + \left(\alpha^3 a_{3,0,0} + \alpha^2\beta a_{2,1,0} + \alpha\beta^2 a_{1,2,0} + \beta^3 a_{0,3,0}\right)x_2^3 + \left(\alpha a_{1,2,0} + 3\beta a_{0,3,0}\right)x_1^2x_2 \\
&\quad + \left(\alpha^2 a_{2,1,0} + 2\alpha\beta a_{1,2,0} + 3\beta^2 a_{0,3,0}\right)x_1x_2^2 + \left(2\alpha a_{2,1,0} + 2\beta a_{1,2,0}\right)x_0x_1x_2 \\
&= a_{3,0,0}\left(x_0+\alpha x_2\right)^3 + a_{2,1,0}\left(x_0+\alpha x_2\right)^2\left(x_1+\beta x_2\right) + a_{1,2,0}\left(x_0+\alpha x_2\right)\left(x_1+\beta x_2\right)^2 \\
&\quad + a_{0,3,0}\left(x_1+\beta x_2\right)^3.
\end{aligned}$$

Considerando a *Mcp* $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ determinada pelo isormofismo linear

$$\begin{aligned}
T_1 : P_1 &\longrightarrow P_1 \\
x_0 &\longmapsto x_0 - \alpha x_2 \\
x_1 &\longmapsto x_1 - \beta x_2 \\
x_2 &\longmapsto x_2
\end{aligned} \tag{1.I}$$

Obtemos que

$$T_3 \cdot F = a_{3,0,0}x_0^3 + a_{2,1,0}x_0^2x_1 + a_{1,2,0}x_0x_1^2 + a_{0,3,0}x_1^3.$$

De onde concluímos que $[F]$ é um Cone.

Agora, suponhamos que $d = 4$,então

$$\begin{aligned}
F &= a_{4,0,0}x_0^4 + a_{3,1,0}x_0^3x_1 + a_{2,2,0}x_0^2x_1^2 + a_{1,3,0}x_0x_1^3 + a_{0,4,0}x_1^4 \\
&\quad + a_{3,0,1}x_0^3x_2 + a_{2,0,2}x_0^2x_2^2 + a_{1,0,3}x_0x_2^3 + a_{0,0,4}x_2^4 + a_{0,3,1}x_1^3x_2 \\
&\quad + a_{0,2,2}x_1^2x_2^2 + a_{0,1,3}x_1x_2^3 + a_{2,1,1}x_0^2x_1x_2 + a_{1,2,1}x_0x_1^2x_2 + a_{1,1,2}x_0x_1x_2^2.
\end{aligned}$$

Como $h_F = 0$, então, se

$$\alpha\left(F_{x_0x_0}, F_{x_0x_1}, F_{x_0x_2}\right) + \beta\left(F_{x_0x_1}, F_{x_1x_1}, F_{x_1x_2}\right) = \left(F_{x_0x_2}, F_{x_1x_2}, F_{x_2x_2}\right),$$

para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Assim

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha\begin{pmatrix} 12a_{4,0,0}x_0^2 + 6a_{3,1,0}x_0x_1 \\ +2a_{2,2,0}x_1^2 + 6a_{3,0,1}x_0x_2 \\ +2a_{2,0,2}x_2^2 + 2a_{2,1,1}x_1x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3a_{3,1,0}x_0^2 + 4a_{2,2,0}x_0x_1 \\ +3a_{1,3,0}x_1^2 + 2a_{2,1,1}x_0x_2 \\ +2a_{1,2,1}x_1x_2 + a_{1,1,2}x_2^2 \end{pmatrix} = \gamma_1 \\
\alpha\begin{pmatrix} 3a_{3,1,0}x_0^2 + 4a_{2,2,0}x_0x_1 \\ +3a_{1,3,0}x_1^2 + 2a_{2,1,1}x_0x_2 \\ +2a_{1,2,1}x_1x_2 + a_{1,1,2}x_2^2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2a_{2,2,0}x_0^2 + 6a_{1,3,0}x_0x_1 \\ +12a_{0,4,0}x_1^2 + 6a_{0,3,1}x_1x_2 \\ +2a_{0,2,2}x_2^2 + 2a_{1,2,1}x_0x_2 \end{pmatrix} = \gamma_2 \\
\alpha\begin{pmatrix} 3a_{3,0,1}x_0^2 + 4a_{2,0,2}x_0x_2 \\ +3a_{1,0,3}x_2^2 + 2a_{2,1,1}x_0x_1 \\ +a_{1,2,1}x_1^2 + 2a_{1,1,2}x_1x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3a_{0,3,1}x_1^2 + 4a_{0,2,2}x_1x_2 \\ +3a_{0,1,3}x_2^2 + a_{2,1,1}x_0^2 \\ +2a_{1,2,1}x_0x_1 + 2a_{1,1,2}x_0x_2 \end{pmatrix} = \gamma_3
\end{array}\right. ,$$

onde

$$\gamma_1 = \begin{cases} \ \ 3a_{3,0,1}x_0^2 + 4a_{2,0,2}x_0x_2 + 3a_{1,0,3}x_2^2 \\ +2a_{2,1,1}x_0x_1 + a_{1,2,1}x_1^2 + 2a_{1,1,2}x_1x_2 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \ \ 3a_{0,3,1}x_1^2 + 4a_{0,2,2}x_1x_2 + 3a_{0,1,3}x_2^2 \\ +a_{2,1,1}x_0^2 + 2a_{1,2,1}x_0x_1 + 2a_{1,1,2}x_0x_2 \end{cases}$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} \ \ 2a_{2,0,2}x_0^2 + 6a_{1,0,3}x_0x_2 + 12a_{0,0,4}x_2^2 \\ +2a_{0,2,2}x_1^2 + 6a_{0,1,3}x_1x_2 + 2a_{1,1,2}x_0x_1 \end{cases}.$$

Por igualdade de polinômios obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 4\alpha a_{4,0,0} + \beta a_{3,1,0} = a_{3,0,1} \\ 3\alpha a_{3,1,0} + 2\beta a_{2,2,0} = a_{2,1,1} \\ 2\alpha a_{2,2,0} + 3\beta a_{1,3,0} = a_{1,2,1} \\ 6\alpha a_{3,0,1} + 2\beta a_{2,1,1} = 4a_{2,0,2} \\ 2\alpha a_{2,0,2} + \beta a_{1,1,2} = 3a_{1,0,3} \\ 2\alpha a_{2,1,1} + 2\beta a_{1,2,1} = 2a_{1,1,2} \\ \alpha a_{1,3,0} + 4\beta a_{0,4,0} = a_{0,3,1} \\ 2\alpha a_{1,2,1} + 6\beta a_{0,3,1} = 4a_{0,2,2} \\ \alpha a_{1,1,2} + 2\beta a_{0,2,2} = 3a_{0,1,3} \\ 3\alpha a_{1,0,3} + 3\beta a_{0,1,3} = 12a_{0,0,4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\alpha^2 a_{4,0,0} + 3\alpha\beta a_{3,1,0} + \beta^2 a_{2,2,0} = a_{2,0,2} \\ 4\alpha^3 a_{4,0,0} + 3\alpha^2\beta a_{3,1,0} + 2\alpha\beta^2 a_{2,2,0} + \beta^3 a_{1,3,0} = a_{1,0,3} \\ 3\alpha^2 a_{3,1,0} + 4\alpha\beta a_{2,2,0} + 3\beta^2 a_{1,3,0} = a_{1,1,2} \\ \alpha^2 a_{2,2,0} + 3\alpha\beta a_{1,3,0} + 6\beta^2 a_{0,4,0} = a_{0,2,2} \\ \alpha^3 a_{3,1,0} + 2\alpha^2\beta a_{2,2,0} + 3\alpha\beta^2 a_{1,3,0} + 4\beta^3 a_{0,4,0} = a_{0,1,3} \\ \alpha^4 a_{4,0,0} + \alpha^3\beta a_{3,1,0} + \alpha^2\beta^2 a_{2,2,0} + \alpha\beta^3 a_{1,3,0} + \beta^4 a_{0,4,0} = a_{0,0,4} \end{cases}.$$

Substituindo as últimas igualdades acima em F, obtemos:

$$\begin{aligned} F &= a_{4,0,0}x_0^4 + a_{3,1,0}x_0^3x_1 + a_{2,2,0}x_0^2x_1^2 + a_{1,3,0}x_0x_1^3 + a_{0,4,0}x_1^4 \\ &\quad + (4\alpha a_{4,0,0} + \beta a_{3,1,0})\, x_0^3x_2 + \left(6\alpha^2 a_{4,0,0} + 3\alpha\beta a_{3,1,0} + \beta^2 a_{2,2,0}\right) x_0^2x_2^2 \\ &\quad + \left(4\alpha^3 a_{4,0,0} + 3\alpha^2\beta a_{3,1,0} + 2\alpha\beta^2 a_{2,2,0} + \beta^3 a_{1,3,0}\right) x_0x_2^3 \\ &\quad + \left(\alpha^4 a_{4,0,0} + \alpha^3\beta a_{3,1,0} + \alpha^2\beta^2 a_{2,2,0} + \alpha\beta^3 a_{1,3,0} + \beta^4 a_{0,4,0}\right) x_2^4 \\ &\quad + (\alpha a_{1,3,0} + 4\beta a_{0,4,0})\, x_1^3x_2 + \left(\alpha^2 a_{2,2,0} + 3\alpha\beta a_{1,3,0} + 6\beta^2 a_{0,4,0}\right) x_1^2x_2^2 \\ &\quad + \left(\alpha^3 a_{3,1,0} + 2\alpha^2\beta a_{2,2,0} + 3\alpha\beta^2 a_{1,3,0} + 4\beta^3 a_{0,4,0}\right) x_1x_2^3 + (3\alpha a_{3,1,0} + 2\beta a_{2,2,0})\, x_0^2x_1x_2 \\ &\quad + (2\alpha a_{2,2,0} + 3\beta a_{1,3,0})\, x_0x_1^2x_2 + \left(3\alpha^2 a_{3,1,0} + 4\alpha\beta a_{2,2,0} + 3\beta^2 a_{1,3,0}\right) x_0x_1x_2^2 \\ &= a_{4,0,0}\,(x_0+\alpha x_2)^4 + a_{3,1,0}\,(x_0+\alpha x_2)^3\,(x_1+\beta x_2) + a_{2,2,0}\,(x_0+\alpha x_2)^2\,(x_1+\beta x_2)^2 \\ &\quad + a_{1,3,0}\,(x_0+\alpha x_2)\,(x_1+\beta x_2)^3 + a_{0,4,0}\,(x_1+\beta x_2)^4 . \end{aligned}$$

Usando novamente a *Mcp* dada por (1.I), temos que

$$T_4 \cdot F = a_{4,0,0}x_0^4 + a_{3,1,0}x_0^3x_1 + a_{2,2,0}x_0^2x_1^2 + a_{1,3,0}x_0x_1^3 + a_{0,4,0}x_1^4.$$

Logo $[F]$ é um cone em $\mathbb{P}^2$. ■

Capítulo 2

Dual de variedades projetivas e Mapa polar

Em suma, neste capítulo apresentaremos o conceito de dual de uma variedade projetiva, o que nos permite caracterizar os cones em $\mathbb{P}^n$ como aquelas variedades projetivas cuja variedade dual é degenerada. Além disso definimos o mapa polar associado a uma hipersuperfície.

A seguir denotaremos por $\mathbb{P}^{n*}$ o conjunto formado pelos hiperplanos em $\mathbb{P}^n$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n*} &= \{H \subsetneq \mathbb{P}^n | H \text{ \textit{é um hiperplano}}\} \\ &= \{H = Z(F) | F \in P_1 - \{0\}\}. \end{aligned}$$

Além disso, conforme indica o diagrama a seguir, podemos identificar $\mathbb{P}^{n*}$ com os espaços projetivo $\mathbb{P}\left((\mathbb{C}^{n+1})^*\right)$ e $\mathbb{P}^n$ (ficara a cargo do leitor interessado a verificação das bijeções)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^n & \longleftrightarrow & \mathbb{P}\left((\mathbb{C}^{n+1})^*\right) & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^{n*} \\ [b_0 : ... : b_n] & \longmapsto & [f] & \longmapsto & H = \mathbb{P}\left(Ker\left(f\right)\right) \end{array}, \tag{2.I}$$

onde $f = b_0 e_0^* + ... + b_n e_n^*$, sendo $\beta = \{e_0^*, ..., e_n^*\}$ a base dual de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ associada à base canônica $\{e_i\}_{i=0}^n$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Usando estas identificações, induzimos a topologia de Zariski em $\mathbb{P}^{n*}$.

Definição 2.0.2 *Seja $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade reduzida. Definimos o espaço dual de X, X^*, como o fecho em $\mathbb{P}^{n*}$ do conjunto*

$$\{H \in \mathbb{P}^{n*} | T_pX \subseteq H, \ \textit{para algum } p \in X - \textit{Sing}(X)\},$$

ou seja,

$$X^* = \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} | T_pX \subseteq H, \ \textit{para algum } p \in X - \textit{Sing}(X)\}}.$$

Exemplo 2.0.3 *Seja* $X = \{p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{P}^2$, *onde* $p_1 = [1:0:0]$ *e* $p_2 = [0:0:1]$. *Note que* $X = Z(y, xz)$, *logo* X *é uma variedade reduzida e*

$$\begin{aligned} T_pX &= T_pZ(y) \cap T_pZ(xz) \\ &= Z(y) \cap T_pZ(xz) \\ &= \begin{cases} Z(y) \cap Z(z) = Z(y,z), \text{ se } p = p_1 \\ Z(y) \cap Z(x) = Z(y,x), \text{ se } p = p_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} X^* &= \overline{\{l \in \mathbb{P}^{2*} | T_pX \subseteq l, \text{ para algum } p \in X - Sing(X)\}} \\ &\equiv \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_0 = 0 \text{ ou } a_2 = 0\right\} \\ &= Z(x_0, x_2) = Z(x_0) \cup Z(x_2). \end{aligned}$$

Teorema 2.0.4 (Bidualidade) *Seja* X *uma variedade irredutível, então* $X^{**} \cong X$.

Demonstração: Conferir referência [IMA], pag 14, ou [Ivan], Teorema 2.4.1, pag 33. ■

Proposição 2.0.5 *Se* X *é irredutível então* X^* *é irredutível.*

Demonstração: Conferir referência [IMA], pag 15, ou [Ivan], Proposição 2.4.1, pag 33. ■

2.1 Dual de variedades lineares

Exemplo 2.1.1 *Seja* $X = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}^n$ *uma variedade linear de dimensão* k, *onde* $W \in G(k+1, \mathbb{C}^{n+1})$, *com* $0 \leq k \leq n-1$, *então, se* $W = [w_0, w_1, ..., w_k]$, *temos que*

$$\begin{aligned} X^* &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} | T_pX \subseteq H, \text{ para algum } p \in X - Sing(X)\}} \\ &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} | X \subseteq H\}} \\ &= \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} | \mathbb{P}(W) \subseteq H\}} \\ &= \overline{\{H = \mathbb{P}(\mathcal{U}) \in \mathbb{P}^{n*} | W \subseteq \mathcal{U}\}} \\ &\overset{(2.1)}{=} \left\{[f] \in \mathbb{P}\left(\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)^*\right) | W \subseteq Ker(f)\right\}. \end{aligned}$$

Como $w = \{w_0, w_1, ..., w_k\}$ *é uma base de* W, *então completemos* w *de forma que* $\alpha = \{w_0, w_1, ..., w_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ *seja uma base de* $\mathbb{C}^{n+1}$. *Agora tomemos* $\alpha^* = \left\{w_0^*, w_1^*, ..., w_k^*, v_{k+1}^*, ..., v_n^*\right\}$ *como sendo a base dual de* α. *Assim*

$$X^* = \mathbb{P}(\mathcal{W}), \text{ onde } \mathcal{W} = \left[v_{k+1}^*, ..., v_n^*\right].$$

Logo o espaço dual de um k*-plano em* $\mathbb{P}^n$ *é um* $(n-k-1)$*-plano em* $\mathbb{P}^{n*}$.

Observação 2.1.2 *Sejam $X, Y \subsetneq \mathbb{P}^n$ duas variedades lineares tais que $X \subseteq Y$, então $Y^* \subseteq X^* \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$. De fato, basta lembrarmos da **Observação B.3.16**.*

Definição 2.1.3 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Dizemos que X é não-degenerada se X não esta contida num hiperplano de $\mathbb{P}^n$.*

Teorema 2.1.4 *Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida de grau d. Então X é um cone se, e somente se, X^* é degenerada.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ um cone, então existe uma *Mcp* $T : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $T_d \cdot F$ depende no máximo de n variáveis. Suponhamos que $T_d \cdot F \in \mathbb{C}[y_0, ..., y_{n-1}]$. Assim $\frac{\partial T_d \cdot F}{\partial y_n} = 0$. Consideremos $Y = Z(T_d \cdot F) \subsetneq \mathbb{P}^n$. Assim $Y^* = \overline{V} \subseteq \mathbb{P}^{n*}$, onde $V = \{H \in \mathbb{P}^{n*} | H = T_pY, \text{ para algum } p \in Y - \text{Sing}(Y)\}$. Lembremos que $T_pY = Z\left(\frac{\partial T_d \cdot F}{\partial y_0}(p)y_0 + ... + \frac{\partial T_d \cdot F}{\partial y_{n-1}}(p)y_{n-1}\right)$. Logo, identificando $\mathbb{P}^{n*}$ com $\mathbb{P}^n$ e usando as coordenadas homogêneas $z_0, ..., z_n$, temos que $V \subseteq Z(z_n) \Rightarrow \overline{V} \subseteq Z(z_n) \Rightarrow Y^* \subseteq Z(z_n)$. Além disso, T induz o isomorfismo

$$\begin{aligned} T^* : \mathbb{P}^{n*} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n*} \\ Z(h) &\longmapsto Z(T_1 \cdot h) \end{aligned}.$$

Assim

$$T^*(X^*) = Y^* \subseteq Z(z_n) \Rightarrow X^* \subseteq T^{*^{-1}}(Z(z_n)) = Z\left(T_1^{-1} \cdot h\right).$$

Logo X^* é degenerada.

$\Leftarrow$) Se X^* é degenerada, então existe $\Pi = Z(\ell) \subseteq \mathbb{P}^{n*}$, onde $\ell = a_0z_0 + ... + a_nz_n$, tal que

$$X^* = \overline{\{H \in \mathbb{P}^{n*} | H = T_pX, \text{ para algum } p \in X - \text{Sing}(X)\}} \subseteq \Pi.$$

Assim

$$T_pX = Z\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p)x_0 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)x_n\right) \in \Pi \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0.$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned} X - \text{Sing}(X) &\subseteq Z\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \\ &\Rightarrow X \subseteq Z\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = QF, \text{ para algum } Q \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

Agora, consideremos o isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$de modo que $T^{-1}(e_{n+1}) = (a_0, ..., a_n)$. Note que $d(T_d \cdot F) = d(F \circ T^{-1}) = dF(T^{-1}) \cdot dT^{-1} = dF(T^{-1}) \cdot T^{-1}$. Assim

$$\frac{\partial T_d \cdot F}{\partial y_n} = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

Portanto $X = Z(F)$ é um cone. ■

2.2 Mapas polares

Para esta seção serão necessários os conceitos de mapas regulares e mapas racionais. Assim, aconselhamos ao leitor não familiarizado com estes conceitos, o estudo do **Apêndice C** antes da abordagem desta seção.

Definição 2.2.1 (Mapa polar) *Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida de grau d. Chamamos de mapa polar associado a X o mapa racional*

$$\begin{aligned} \varphi_F : \mathbb{P}^n \cdots &\longrightarrow \mathbb{P}^{n*} \\ q &\longmapsto \left[\tfrac{\partial F}{\partial x_0}(q) : ... : \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(q)\right] \end{aligned}.$$

Exemplo 2.2.2 *Seja X um hiperplano em $\mathbb{P}^n$ definido pela forma linear $F = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x_i$. Então o mapa polar associado a X é um morfismo regular e constante. De fato, o mapa polar associado a X é*

$$\begin{aligned} \varphi_F : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^{n*} \\ q &\longmapsto [a_0 : ... : a_n] \end{aligned}.$$

Denotemos a imagem do mapa polar como sendo $I_F = \overline{\varphi_F(\mathbb{P}^n - Sing(X))}$.

Teorema 2.2.3 (ZAK) *Sejam $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva irredutível reduzida com $h_F \equiv 0$ e $\varphi_F : \mathbb{P}^n \cdots \longrightarrow \mathbb{P}^{n*}$ o mapa polar associado a X. Então $I_F^* \subseteq Sing(X)$.*

Demonstração: Conferir a Proposição 4.9 em [ZAK]. ■

Teorema 2.2.4 *Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida de grau $d \geqslant 1$. Seja φ_F o mapa polar associado a X. Assim, são equivalentes:*

(a) $h_F \equiv 0$;

(b) φ_F não é dominante;

(c) $I_F \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$;

(d) $\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}$ são algebricamente dependentes.

Demonstração: $[(a) \Rightarrow (b)]$ Provemos pela contra-positiva. Suponhamos que φ_F é um mapa dominante. Como φ_F é um mapa racional dominante, então, pelo **Lema C.0.9**, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_F} : \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto \left(\tfrac{\partial F}{\partial x_0}(v), ..., \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(v)\right) \end{aligned}$$

é um mapa regular e dominante. Assim, pela **Proposição C.0.11**, existe um aberto $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ não vazio tal que $\left(d\widetilde{\varphi_F}\right)_v$ é suave e $\dim Ker\left(\left(d\widetilde{\varphi_F}\right)_v\right) = 0$ para todo $v \in U$. Como

$$\begin{aligned} \left[\left(d\widetilde{\varphi_F}\right)_v\right] &= Hess(F)(v), \ \forall\ v \in U \\ &\Rightarrow h_F\,(v) \neq 0, \ \forall\ v \in U \\ &\Rightarrow h_F \neq 0. \end{aligned}$$

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Já que φ_F não é dominante, então, pelo **Lema C.0.9**, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_F} : \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto \left(\tfrac{\partial F}{\partial x_0}(v), ..., \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(v)\right) \end{aligned}$$

também não é dominante. Consideremos o mapa

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \overline{\widetilde{\varphi_F}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)} \\ v &\longmapsto \left(\tfrac{\partial F}{\partial x_0}(v), ..., \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(v)\right) \end{aligned}$$

e note que ψ é um mapa regular e dominante. Assim, pela **Proposição C.0.11**, existe um aberto $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ não vazio tal que ψ é suave em v e

$$\dim Ker(d\psi_v) = n + 1 - \dim \overline{\widetilde{\varphi_F}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)} \geqslant 1$$

para todo $v \in U$. Logo

$$\begin{aligned} h_F(v) = 0, \ \forall\ v \in U &\Leftrightarrow U \subseteq Z(h_F) \\ &\Leftrightarrow \overline{U} = \mathbb{C}^{n+1} \subseteq Z(h_F) \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \\ &\Leftrightarrow Z(h_F) = \mathbb{C}^{n+1} \\ &\Rightarrow h_F \equiv 0. \end{aligned}$$

$[(b) \Leftrightarrow (c)]$ **Definição C.0.8**.
$[(c) \Leftrightarrow (d)]$ Suponhamos que $I_F \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$, então existe uma hipersuperfície $Z(G) \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$ tal que

$$\begin{aligned} I_F &\subseteq Z(G) \subsetneq \mathbb{P}^{n*} \\ &\Leftrightarrow G\left(\varphi_F(p)\right) = 0, \ \forall\ p \in \mathbb{P}^n - Sing(X) \\ &\Leftrightarrow G\left(\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) : ... : \frac{\partial F}{\partial x_n}(p)\right]\right) = 0, \ \forall\ p \in \mathbb{P}^n - Sing(X). \end{aligned}$$

Note que $H = G\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ é um polinômio homogêneo, pois $G, \frac{\partial F}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}$ e $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ são polinômios homogêneos. Assim

$$
\begin{aligned}
H(p) = 0,\ \forall\ p \in U = \mathbb{P}^n - Sing(X)& \\
&\Leftrightarrow U \subseteq Z(H) \\
&\Leftrightarrow \overline{U} = \mathbb{P}^n \subseteq Z(H) \subseteq \mathbb{P}^n \\
&\Leftrightarrow Z(H) = \mathbb{P}^n \\
&\Leftrightarrow H \equiv 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n} \text{ são algebricamente dependentes.}
\end{aligned}
$$

■

Capítulo 3

Conjectura de Hese

Neste capítulo apresentaremos um dos resultados chaves para mostrar que as únicas superfícies em $\mathbb{P}^3$ que possuem Hessiano nulo são os Cones. (veja **Teorema 3.0.15**)

Consideremos a hipersuperfície reduzida $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ de grau $d \geq 1$ tal que $h_F \equiv 0$ e o mapa polar

$$\begin{aligned} \varphi_F : \mathbb{P}^n \cdots &\longrightarrow \mathbb{P}^{n*} \\ q &\longmapsto \left[\tfrac{\partial F}{\partial x_0}(q) : \ldots : \tfrac{\partial F}{\partial x_n}(q)\right] \end{aligned}.$$

Como $h_F \equiv 0$, então, pelo **Teorema 2.2.4**, $\overline{\varphi_F\left(\mathbb{P}^n - Sing(X)\right)} = I_F \subsetneq \mathbb{P}^{n*}$. Notemos que I_F é irredutível, pois todo aberto $U \neq \varnothing$ em $\mathbb{P}^n$ é irredutível e a imagem de um irredutível é irredutível.

Proposição 3.0.5 *Seja $X = Z(F) \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida. Então existe uma hipersuperfície irredutível e reduzida $S = Z(G) \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ tal que $I_F \subseteq S$ e $I_F \nsubseteq Sing(S)$.*

Demonstração: Sabemos que I_F é um fechado próprio em $\mathbb{P}^{n*} \equiv \mathbb{P}^n$. Seja $G \in \mathcal{I}\left(I_F\right)$ o polinômio homogêneo não nulo de menor grau no ideal de I_F. Seja d o grau de G e $S = Z\left(G\right)$.

Se $d = 1$, então $I_F \subseteq S$, com S hiperplano. Assim $Sing(S) = \varnothing$ e segue o resultado.

Se $d \geq 2$, então temos que $I_F \nsubseteq Sing(S)$, pois se

$$I_F \subseteq Sing\left(S\right) = Z\left(\frac{\partial G}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n}\right) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x_i} \in \mathcal{I}\left(I_F\right), \forall\ i = 0, \ldots, n.$$

Como G define uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^{n*} \equiv \mathbb{P}^n$, existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $\frac{\partial G}{\partial x_j} \neq 0$. Assim $\frac{\partial G}{\partial x_j} \in \mathcal{I}\left(I_F\right)$ e grau de $\frac{\partial G}{\partial x_j} = d - 1 \quad (\rightarrow \mid \leftarrow)$.

Note que podemos escolher G irredutível, pois se $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_k \in \mathcal{I}\left(I_F\right)$, então $G_i \in \mathcal{I}\left(I_F\right)$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, pois a hipótese de X ser reduzida implica em $\mathcal{I}\left(I_F\right)$ ser primo. De maneira análoga concluímos que podemos escolher G livre de quadrados. ∎

A **Proposição 3.0.5** nos permite considerar o mapa racional Ψ_{FG} definido pela composta dos mapas polares no seguinte diagrama

$$\mathbb{P}^n \cdots \xrightarrow{\varphi_F} \mathbb{P}^{n*} \cdots \xrightarrow{\varphi_G} \mathbb{P}^{n**} \overset{\pi}{\cong} \mathbb{P}^n,$$

onde π é o isomorfismo canônico. Assim $\Psi_{FG} = \pi \circ \varphi_G \circ \varphi_F$, ou seja

$$\begin{aligned} \Psi_{FG} : \mathbb{P}^n \cdots &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ q &\longmapsto \left[\frac{\partial G}{\partial y_0}(\widetilde{\varphi_F}(q)) : \ldots : \frac{\partial G}{\partial y_n}(\widetilde{\varphi_F}(q))\right] , \\ &= [H_0(q) : \ldots : H_n(q)] \end{aligned} \tag{3.I}$$

onde $H_i = \frac{\frac{\partial G}{\partial y_i}(\widetilde{\varphi_F})}{\rho}$, com $i = 0, \ldots, n$ e $\rho = mdc\left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(\widetilde{\varphi_F}), \ldots, \frac{\partial G}{\partial y_n}(\widetilde{\varphi_F})\right)$.

Teorema 3.0.6 *Seja $\Psi_{FG} : \mathbb{P}^n \cdots \longrightarrow \mathbb{P}^n$ o mapa racional definido em (3.I), $Z = Z(H_0, \ldots, H_n)$ e $S = Z(G)$. Então:*

1. *Se $\dim \overline{\mathrm{Im}(\Psi_{FG})} = 0$, então I_F é degenerada e assim $X = Z(F)$ é um cone;*
2. *$\dim Z \leq n - 2$;*
3. *$\overline{\Psi_{FG}(\mathbb{P}^n - Z)} \subseteq I_F^*$.*

Demonstração:

1. Se $\dim \overline{\mathrm{Im}(\Psi_{FG})} = 0$, então $\mathrm{Im}(\Psi_{FG}) = \{H\}$, para algum $H \in \mathbb{P}^{n**}$. Assim

$$\begin{aligned} H &= T_x S, \, \forall \, x \in I_F - Sing(S) \\ &\Rightarrow I_F - Sing(S) \subseteq H. \end{aligned}$$

Como $I_F - Sing(S)$ é um aberto não vazio de I_F, então

$$I_F = \overline{I_F - Sing(S)} \subseteq H.$$

Finalmente, note que $X^* \subseteq I_F$, logo segue-se do **Teorema 2.1.4** que X é um cone.

2. De fato, suponhamos que

$$\begin{aligned} \dim Z = n &\Rightarrow Z = \mathbb{P}^n \\ &\Rightarrow H_i \equiv 0, \, \forall \, i = 0, \ldots, n \quad (\rightarrow \mid \leftarrow), \text{ pois } I_F \nsubseteq Sing(S). \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que

$$\begin{aligned} \dim Z = n - 1 &\Rightarrow \exists \, Z(Q), \text{ componente irredutível de } Z \text{ de dimensão } n-1 \\ &\Rightarrow H_i \equiv \mu_i Q, \text{ com } \mu_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n], \, \forall \, i = 0, \ldots, n \\ &\Rightarrow mdc\,(H_0, \ldots, H_n) \neq 1 \quad (\rightarrow \mid \leftarrow). \end{aligned}$$

Portanto $\dim Z \leq n - 2$.

3. De fato, lembremos que

$$\Psi_{FG}\left(\mathbb{P}^n - Z\right) = \left\{H \in \mathbb{P}^{n**} | H = T_x S, \text{ para algum } x \in I_F - Sing(S)\right\}$$

e $(I_F)^* = \overline{A}$, onde

$$A = \left\{H \in \mathbb{P}^{n**} | T_\xi I_F \subseteq H, \text{ para algum } \xi \in I_F - Sing(I_F)\right\}.$$

Como $I_F \subseteq S$, então $T_x I_F \subseteq T_x S$ para todo $x \in I_F - (Sing(I_F) \cup Sing(S))$. Assim, tomando $U = \{H \in \mathbb{P}^{n**} | H = T_x S, \text{ com } x \in I_F - (Sing(I_F) \cup Sing(S))\}$, temos que

$$U \subseteq \Psi_{FG}\left(\mathbb{P}^n - Z\right) \text{ e } U \subseteq A.$$

Logo

$$\overline{U} = \overline{\mathrm{Im}\left(\Psi_{FG}\right)} \text{ e } \overline{U} \subseteq \overline{A}.$$

■

Lema 3.0.7 *Seja $X = Z(F)$ uma hipersuperfície reduzida em $\mathbb{P}^n$ e $H_0, ..., H_n$ polinômios homogêneos de mesmo grau, como em (3.I). Então $\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} H_j \equiv 0$, para todo $i = 0, ..., n$.*

Demonstração: Segue-se da **Proposição 3.0.5** que $\overline{\varphi_F\left(\mathbb{P}^n - Sing(X)\right)} \subseteq Z(G)$, então $G\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(q), ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}(q)\right) = 0$ para todo $q \in \mathbb{P}^n - Sing(X)$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n = \overline{\mathbb{P}^n - Sing(X)} &\subseteq Z\left(G\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\right) \subseteq \mathbb{P}^n \\ &\Rightarrow G\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Consideremos o diagrama

$$\mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\varphi_F}} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{G} \mathbb{C},$$

onde $\widetilde{\varphi_F}$ é o mapa afim associado a φ_F, então

$$\begin{aligned} G \circ \widetilde{\varphi_F} \equiv 0 &\Rightarrow dG \circ \widetilde{\varphi_F} \cdot (d\widetilde{\varphi_F}) \equiv 0 \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial G}{\partial y_0} \circ \widetilde{\varphi_F} & ... & \frac{\partial G}{\partial y_n} \circ \widetilde{\varphi_F} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_0} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_0} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n} \end{array}\right] \equiv 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial G}{\partial y_j} \circ \widetilde{\varphi_F} \equiv 0, \ \forall\ i = 0, ..., n. \end{aligned}$$

Lembremos que $\rho H_j = \frac{\partial G}{\partial y_j} \circ \widetilde{\varphi_F}$, logo

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial G}{\partial y_j} \circ \widetilde{\varphi_F} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \rho H_j \equiv 0, \forall\ i = 0, ..., n$$
$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} H_j \equiv 0, \forall\ i = 0, ..., n.$$

■

Lema 3.0.8 *Notações como no **Lema 3.0.7**. Seja* $G_k = \frac{\partial G}{\partial y_k} \circ \widetilde{\varphi_F}$*, então* $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial x_i} H_i \equiv 0$*, para todo* $k = 0, ..., n$.

Demonstração: Consideremos o diagrama

$$\mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\varphi_F}} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\frac{\partial G}{\partial y_k}} \mathbb{C},$$

então

$$dG_k = d\left(\frac{\partial G}{\partial y_k} \circ \widetilde{\varphi_F}\right) = d\left(\frac{\partial G}{\partial y_k}\right)(\widetilde{\varphi_F}) \cdot (d\widetilde{\varphi_F}).$$

Considerando a matriz associada nas bases canônicas, temos:

$$\left[\frac{\partial G_k}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{\partial G_k}{\partial y_i}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_0} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_0} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial G_k}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Logo

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial x_i} H_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\right) H_i, \forall\ k = 0, ..., n$$
$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial y_j}\right] \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} H_i\right), \forall\ k = 0, ..., n$$
$$\equiv 0, \forall\ k = 0, ..., n. \quad (\text{por } \textbf{Lema 3.0.7})$$

■

Observemos que se $G_1, ..., G_s \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ satisfazem que $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} H_i \equiv 0$. Então $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial (G_1 G_2 ... G_s)}{\partial x_i} H_i \equiv 0$.

Corolário 3.0.9 *Seja* $\rho H_j = \frac{\partial G}{\partial y_j}(\widetilde{\varphi_F})$*, onde* $\rho = mdc\left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(\widetilde{\varphi_F}), ..., \frac{\partial G}{\partial y_n}(\widetilde{\varphi_F})\right)$*, então* $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial H_j}{\partial x_i} H_i \equiv 0$*, para todo* $j = 0, ..., n$*.*

Demonstração: Basta fazermos $G_k = \rho H_k$ que segue direto do **Lema 3.0.8**. ■

Lema 3.0.10 (Chave) *Sejam* $Q \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ *e* $H = (H_0, H_1, ..., H_n)$*, então*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_j} H_j \equiv 0 \Longleftrightarrow Q(v) = Q\left(v + \lambda H\left(v\right)\right), \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C} \ e \ \forall \ v \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Demonstração: Seja $v \in \mathbb{C}^{n+1}$. Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\Lambda_v} & \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{C} \\ \lambda & \mapsto & v + \lambda H\left(v\right) & \mapsto & Q\left(\Lambda_v\left(\lambda\right)\right) \end{array}.$$

Façamos $\phi = Q \circ \Lambda_v$. Suponhamos que o grau de Q é d, assim

$$\phi\left(\lambda\right) = \phi\left(0\right) + \lambda \phi^{'}\left(0\right) + \lambda^2 \frac{\phi^{''}\left(0\right)}{2!} + ... + \lambda^d \frac{\phi^{(d)}\left(0\right)}{d!},$$

o que implica

$$Q\left(v + \lambda H\left(v\right)\right) = Q\left(v\right) + \lambda \phi^{'}\left(0\right) + \lambda^2 \frac{\phi^{''}\left(0\right)}{2!} + ... + \lambda^d \frac{\phi^{(d)}\left(0\right)}{d!}.$$

Note que se $\phi^{'}(0) = 0$, então $\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} = 0$, para todo $k = 2, ..., d$. De fato, provemos por indução em k, por um lado temos que, por hipótese de indução, $\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = 0$. Por outro lado,

$$\frac{\phi^{(k)}\left(0\right)}{k!} = \sum_{i_1, i_2, ..., i_k} \frac{\partial^k Q}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} \frac{H_{i_1} H_{i_2} ... H_{i_k}}{k!},$$

com $0 \leq i_1, i_2, ..., i_k \leq n$. Lembremos que $G_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}(\widetilde{\varphi_F}) = \rho H_i$, sendo $\rho = mdc\left(\frac{\partial G}{\partial y_0}(\varphi_F), ..., \frac{\partial G}{\partial y_n}(\varphi_F)\right)$. Assim

$$\begin{aligned} \rho^{k-1} \frac{\phi^{(k)}\left(0\right)}{k!} &= \rho^{k-1} \sum_{i_1, i_2, ..., i_k} \frac{\partial^k Q}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} \frac{H_{i_1} H_{i_2} ... H_{i_k}}{k!} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i_1, i_2, ..., i_k} \frac{\partial^k Q}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} \frac{G_{i_1} G_{i_2} ... G_{i_{k-1}}}{(k-1)!} H_{i_k} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{n} H_i \left[\sum_{i_1, i_2, ..., i_{k-1}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k-1}}} \right) \frac{G_{i_1} G_{i_2} ... G_{i_{k-1}}}{(k-1)!} \right] \end{aligned}$$

$$\overset{(\textbf{Lema 3.0.8})}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n} H_i \left[\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{k-1}Q}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_{k-1}}} \frac{G_{i_1}G_{i_2}...G_{i_{k-1}}}{(k-1)!}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n} H_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}} \frac{\partial^{k-1}Q}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_{k-1}}} \frac{G_{i_1}G_{i_2}...G_{i_{k-1}}}{(k-1)!}\right).$$

Logo

$$\rho^{k-1}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n} H_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{k-1}\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\right) = 0$$

e como $\rho \neq 0$, então

$$\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} = 0.$$

■

Corolário 3.0.11 *Sejam $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ não nulos e $Q = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k$. Se Q satisfaz o* ***Lema Chave,*** *então Q_i satisfaz o* ***Lema Chave*** *para todo $i = 1, ..., k$.*

Demonstração: Sabemos que

$$Q(v) = Q(v + \lambda H(v)), \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall\ v \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Assim

$$Q_1(v) \cdot \ldots \cdot Q_k(v) = \prod_{i=1}^{k} Q_i(v + \lambda H(v)), \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall\ v \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Como $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ é domínio de integridade e $Q_1, ..., Q_k \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n][\lambda] \setminus \{0\}$ tal que $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$, então Q_i não depende da variável λ, para todo $i = 1, ..., k$. Portanto

$$Q_i(v) = Q_i(v + \lambda H(v)), \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}, \forall\ v \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ e } \forall\ i = 1, ..., k.$$

■

Proposição 3.0.12 *Seja $Q \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ homogêneo satisfazendo o* ***Lema Chave****. Então $\operatorname{Im}(\Psi_{FG}) \subseteq Z(Q)$.*

Demonstração: Suponhamos que

$$Q(\underline{x}) = \sum_{\substack{i_0,\ldots,i_n \geq 0 \\ i_0+\ldots+i_n=d}} a_{i_0,\ldots,i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n},$$

onde $\underline{x} = (x_0, ..., x_n)$. Assim, supondo que o grau de Q é d,

$$\begin{aligned}
Q\left(\underline{x} + \lambda\widetilde{\Psi_{FG}}(\underline{x})\right) &= \sum_{\substack{i_0,\dots,i_n \geq 0 \\ i_0+\dots+i_n=d}} a_{i_0,\dots,i_n}\left(x_0 + \lambda H_0(\underline{x})\right)^{i_0} \dots \left(x_n + \lambda H_n(\underline{x})\right)^{i_n} \\
&= \sum_{\substack{i_0,\dots,i_n \geq 0 \\ i_0+\dots+i_n=d}} a_{i_0,\dots,i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} + \dots + \\
&\quad + \lambda^d \sum_{\substack{i_0,\dots,i_n \geq 0 \\ i_0+\dots+i_n=d}} a_{i_0,\dots,i_n} H_0(\underline{x})^{i_0} \dots H_n(\underline{x})^{i_n} \\
&= Q(\underline{x}) + \dots + \lambda^d Q\left(H_0(\underline{x}), \dots, H_n(\underline{x})\right).
\end{aligned}$$

Como

$$Q(\underline{x}) = Q\left(\underline{x} + \lambda\widetilde{\Psi_{FG}}(\underline{x})\right), \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall\ \underline{x} \in \mathbb{C}^{n+1},$$

então, por igualdade de polinômios em λ,

$$Q\left(H_0(\underline{x}), \dots, H_n(\underline{x})\right) = 0, \ \forall\ \underline{x} \in \mathbb{C}^{n+1} \Rightarrow Q\left(H_0, \dots, H_n\right) \equiv 0.$$

Logo

$$Q\left(H_0(q), \dots, H_n(q)\right) = 0, \ \forall\ q \in \mathbb{P}^n - Z \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\Psi_{FG}) \subseteq Z(Q).$$

∎

Teorema 3.0.13 *Assuma que $n = 3$ e $\dim \overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} = 1$. Então $\overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} \subseteq \mathbb{P}^3$ é uma reta.*

Demonstração: Sejam $q_1, q_2 \in \operatorname{Im}(\Psi_{FG})$ tal que $q_1 \neq q_2$. Assim temos duas possibilidades a serem analisadas:

Caso 1: $\overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} \subseteq \Pi$, para todo plano Π em $\mathbb{P}^3$ contendo q_1 e q_2. Então

$$\overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} \subseteq \bigcap_{\substack{\Pi \text{ plano em } \mathbb{P}^3 \\ q_1, q_2 \in \Pi}} \Pi.$$

Como a reta $\ell_{q_1,q_2} \subseteq \Pi$, para todo plano Π em $\mathbb{P}^3$ contendo q_1 e q_2, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} &\subseteq \ell_{q_1,q_2} \\
&\Rightarrow \overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} = \ell_{q_1,q_2}.
\end{aligned}$$

Caso 2: Existe Λ, plano em $\mathbb{P}^3$ contendo q_1 e q_2, tal que $\overline{\operatorname{Im}(\Psi_{FG})} \nsubseteq \Lambda$. Seja $\Lambda = Z(L)$, onde $L = a_0x_0 + \ldots + a_3x_3$. Definamos

$$H = a_0H_0 + \ldots + a_3H_3.$$

Como $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} \nsubseteq \Lambda$, então existe $p \in \mathbb{P}^3$ tal que $H(p) \neq 0 \Rightarrow H \neq 0$.

Note que, pelo **Lema 3.0.9**, temos que H_i satisfaz o **Lema Chave**, para todo $i = 0, ..., 3$. Assim, da definição de H segue-se que H também satisfaz o **Lema Chave**. Além disso

$$\overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_1)}, \overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_2)} \subseteq Z(H),$$

pois dado $p \in \Psi_{FG}^{-1}(q_1)$ $\big($analogamente para $p \in \Psi_{FG}^{-1}(q_2)\big)$ temos que

$$\begin{aligned}\Psi_{FG}(p) = q_1 &\Rightarrow [H_0(p) : ... : H_3(p)] = [q_{1_0} : ... : q_{1_3}] \\ &\Rightarrow H_i(p) = \mu q_{1_i}, \text{ para algum } \mu \in \mathbb{C} - \{0\} \\ &\Rightarrow H(p) = \mu L(q_1) = 0 \\ &\Rightarrow \Psi_{FG}^{-1}(q_1) \subseteq Z(H).\end{aligned}$$

Agora, pelo **Teorema da dimensão das fibras (**conferir Teorema 3, pag 93 em [Mum1]), podemos escolher q_1 e q_2 num aberto tal que

$$\dim \overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_1)} = 2 = \dim \overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_2)}.$$

Além disso, do **Corolário 1** do Teorema da dimensão das fibras (pag 96 em [Mum1]), temos que

$$\overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_1)} = Z(F_{q_1}) \text{ e } \overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_2)} = Z(F_{q_2}).$$

Logo $H = AF_{q_1} = BF_{q_2}$, para algum $A, B \in \mathbb{C}\,[x_0, ..., x_3]$, o que implica, pelo **Corolário 3.0.11**, que F_{q_1} e F_{q_2} satisfazem o **Lema Chave**, ou seja

$$\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial F_{q_1}}{\partial x_j} H_j \equiv 0 \Longleftrightarrow F_{q_1}(v) = F_{q_1}\left(v + \lambda \widetilde{\Psi_{FG}}\,(v)\right),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall\ v \in \mathbb{C}^4$$

e

$$\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial F_{q_2}}{\partial x_j} H_j \equiv 0 \Longleftrightarrow F_{q_2}(v) = F_{q_2}\left(v + \lambda \widetilde{\Psi_{FG}}\,(v)\right),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall\ v \in \mathbb{C}^4.$$

Como F_{q_1} (analogamente para F_{q_2}) satisfaz o **Lema Chave** segue da **Proposição 3.0.12** que $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} \subseteq \overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_1)}$. Do mesmo modo, temos que $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} \subseteq Z$, logo $\dim Z \geq 1$, desde que $\dim \overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} = 1$. Além disso $\dim Z \leq 3 - 2 = 1$ (conferir **Teorema 3.0.6)**. Portanto $\dim Z = 1$.

Agora, para cada $p \neq q_1$ tal que $p \in \overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} \subseteq \overline{\Psi_{FG}^{-1}(q_1)} \cap Z$, segue-se do **Corolário C.0.13** que $l_{p,q_1} \subset Z$. Sejam $Z_1, ..., Z_m$ as componentes iredutíveis de Z de dimensão 1, então para cada $p \neq q_1$ tal que $p \in \overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})}$ existe $i \in \{1, ..., m\}$, onde $l_{p,q_1} = Z_i$. Assim, podemos escolher $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, ..., m\}$ tal que $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} - \{q_1\} \subseteq Z_{i_1} \cup ... \cup Z_{i_k}$ de onde concluímos que $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} \subseteq Z_{i_1} \cup ... \cup Z_{i_k}$. Logo, tendo em consideração que $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})}$ é irredutível e de dimensão 1, concluímos que $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} = Z_{i_t}$ para algum $t \in \{1, ..., k\}$. Portanto $\overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} = l_{p_{i_t},q_1}$. ∎

Lema 3.0.14 *Seja* $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície reduzida com* $h_F = 0$. *Se* $\dim I_F^* = 0$, *então* X *é um cone.*

Demonstração: Temos que $\dim I_F^* = 0$. Como I_F é irredutível, temos que I_F^* também é irredutível, então I_F^* é um ponto em $\mathbb{P}^{n*}$. Assim, pelo **Teorema de Bidualidade**, temos que I_F é um hiperplano em $\mathbb{P}^n$. Logo X^* é degenerada, pois $X^* \subseteq I_F$, e portanto, pelo **Teorema 2.1.4**, temos que X é um cone. ■

Teorema 3.0.15 *Seja* $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície reduzida. Se* $n \in \{1, 2, 3\}$, *então*

$$X \text{ é um cone} \Longleftrightarrow h_F = 0.$$

Demonstração: $\Rightarrow$) Segue direto da definição de cone.

$\Leftarrow$) Para $n = 1$, segue-se do **Teorema 1.1.1** que X é um Cone.

A seguir, considerando o **Teorema(ZAK) 2.2.3** temos que

$$\dim I_F^* \leq \dim Sing\,(X)\,.$$

Como $\dim Sing(X) = 0$ se $n = 2$ e $\dim Sing(X) \leq 1$ se $n = 3$, então temos dois casos a serem analisados:

1) $\dim I_F^* = 0$, então, pelo **Lema 3.0.14**, temos que X é um cone;

2) $\dim I_F^* = 1$, segue-se do **Teorema 3.0.6** que $\dim \overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} \leq 1$. Assim temos duas possibilidades:

2.1) $\dim \overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} = 0$. Neste caso, segue-se do **Teorema 3.0.6** que X é um cone;

2.2) $\dim \overline{\mathrm{Im}\,(\Psi_{FG})} = 1$, pelo **Teorema 3.0.13**, I_F^* é uma reta em $\mathbb{P}^{3*}$, então, pelo **Teorema de Bidualidade**, I_F é uma reta em $\mathbb{P}^3$. Assim X é um cone, pois $X^* \subseteq I_F$. ■

3.1 Considerações finais

O resultado apresentado no **Teorema 3.0.15** é falso para $n \geq 4$. Por exemplo, para $n = 4$ consideremos o seguinte polinômio cúbico

$$F\,(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_0 x_3^2 + 2x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4^2.$$

Note que $h_F = 0$, mas $Z(F)$ não é um cone. Suponhamos que $X = Z(F)$ seja um cone, então, pelo **Teorema 2.1.4**, temos que X^* é degenerada, ou seja, $X^* \subseteq H$, onde $H = Z\,(a_0 x_0 + ... + a_4 x_4)$ é um hiperplano, onde $a_0, ..., a_4$ são números complexos não todos nulos.

Portanto $T_p X = Z\left(\sum_{i=0}^{4} \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)\, x_i\right) \in H$, ou seja, $a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + ... + a_4 \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$. Assim

$$a_0 x_3^2 + 2a_1 x_3 x_4 + a_2 x_4^2 + a_3\,(2x_0 x_3 + 2x_1 x_4) + a_4\,(2x_1 x_3 + 2x_2 x_4) = 0. \qquad (I)$$

Derivando (I) em relação as variáveis x_i e x_j, com $i, j = 0, ..., 4$, obtemos $a_k = 0$ para todo $k = 0, ..., 4$. Logo $H = 0$ $\quad (\rightarrow \mid \leftarrow)$.

Apêndice A

Ludwig Otto Hesse

Ludwig Otto Hesse foi um matemático alemão que nasceu em 22 de abril de 1811, em Königsberg. Filho de Johann Gottlieb Hesse, comerciante e dono de cervejaria, e Anna Karoline Reiter.

Estudou em sua cidade natal na Universidade de Königsberg, orientado por Carl Gustav Jakob Jacobi. Alguns de seus mestres foram Friedrich Wilhelm Bessel, Carl Neumann e Friedrich Julius Richelot.

Otto Hesse passou um tempo como professor de física e química antes de se formar em Königsberg, em 1840. Em seguida, passou 16 anos lecionando em Königsberg e publicando seus trabalhos em Crelle 's Journal. Dedicou-se especialmente a geometria analítica, teoria das formas homogêneas e a teoria dos determinantes. Definiu e introduziu na literatura matemática a matriz hessiana e seu determinante, em 1842, durante uma investigação de curvas cúbicas e quadráticas.

Em 1856 ele foi nomeado para Heidelberg, onde permaneceu até 1868. Faleceu em 4 de agosto de 1874, em Munique, aos 63 anos.

Apêndice B

Conceitos Gerais

B.1 Espaço Projetivo

Definição B.1.1 *Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão $n+1$ sobre K. O Espaço Projetivo associado a V é definido pelo quociente:*

$$\mathbb{P}(\mathbb{V}) := \frac{V - \{0\}}{\sim}$$

onde $u \sim v$, $\forall\ u, v \in V - \{0\} \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in K$ tal que $u = \lambda v$.

Notação B.1.2 *Se $K = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{C}^{n+1}$, então $\mathbb{P}(V)$ sera denotado por $\mathbb{P}^n$ e chamado de n-Espaço Projetivo. Para cada $v = (p_0, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, denotaremos sua classe por $[v] = [p_0 : p_1 : ... : p_n]$. Se $p = [p_0 : p_1 : ... : p_n] \in \mathbb{P}^n$, então $p_0, p_1, ..., p_n$ são chamadas de coordenadas homogêneas do ponto p.*

Por exemplo, $\mathbb{P}^0 = \{[1]\}$ (pois $a = a \cdot 1$ para todo $a \in \mathbb{C}$, com $a \neq 0$) e $\mathbb{P}^1 = \{[1 : t]\,| t \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\}$, pois para todo vetor não nulo $v = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ verifica-se que $v = a\,(1, b/a)$ se $a \neq 0$ e $v = b(0, 1)$ do contrário

Observação B.1.3 *A definição de espaço projetivo é um caso particular de grassmaniana. De fato, a k-grassmaniana associada ao espaço vetorial V, denotado por $G(k, V)$, é o conjunto dos subespaços vetoriais de dimensão k de V, ou seja, $G(k, V) = \{W \leq V |\dim W = k\}$. Assim, todo Espaço Projetivo é uma 1-grassmaniana, pois $\mathbb{P}(V)$ pode ser identificado com $G(1, V)$ pelo mapa*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow G(1, V) \\ [p_0 : p_1 : ... : p_n] &\longmapsto [(p_0, p_1, ..., p_n)] \end{aligned}.$$

*Por este motivo usaremos tanto a **Definição B.1.1** quanto a definição de 1-grassmaniana.*

Definição B.1.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão $n+1$ e k um inteiro, com $0 \leq k \leq n$. Diremos que $\Pi \subset \mathbb{P}(V)$ é um k-plano se existir $W \in G(k+1, V)$ tal que $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Além disso, chamaremos os 0-planos de pontos, os 1-planos de retas e os (n-1)-planos de hiperplanos em $\mathbb{P}(V)$.*

Definição B.1.5 *Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$. Chamamos F de polinômio homogêneo de grau d se para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tivermos $F(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, ..., x_n)$.*

Observação B.1.6 *Note que o conjunto formado pelos polinômios homogêneos de grau d é um subespaço vetorial de P. De fato $P_0 = \mathbb{C}, P_1 = [x_0, ..., x_n], ..., P_d = [\{x_0^{i_0} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} | i_0 + i_1 + ... + i_n = d\}]$. Deixaremos ao leitor interessado a verificação de que $\dim_{\mathbb{C}} P_d = \binom{n+d}{d}$.*

Definição B.1.7 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão $n+1$. Então definimos $\dim \mathbb{P}(V) = n$.*

Teorema B.1.8 *Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ não nulo e homogêneo de $\partial(F) = d \geq 1$, então existem $\alpha_0, ..., \alpha_{d-1}, \beta_0, ..., \beta_{d-1} \in \mathbb{C}$ tal que $F = (\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1) \cdot ... \cdot (\alpha_{d-1} x_0 + \beta_{d-1} x_1)$.*

Demonstração: Provemos por indução em d.

Para $\partial(F) = 1$, temos que $F = a_0 x_0 + a_1 x_1$.

Por hipótese de indução temos que para todo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ não nulo, homogêneo, com $\partial(F) < d$, então $F = (\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1) \cdot ... \cdot (\alpha_{d-2} x_0 + \beta_{d-2} x_1)$.

Consideremos $\partial(F) = d$, ou seja, existem $a_0, ..., a_d \in \mathbb{C}$ tal que

$$F = \sum_{i=0}^{d} a_i x_0^{d-i} x_1^i.$$

Se $a_d = 0$, então

$$F = x_0 F_1, \text{ onde } F_1 = \sum_{i=0}^{d-1} a_i x_0^{d-i-1} x_1^i.$$

Como $\partial(F_1) = d - 1$, então $F_1 = (\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1) \cdot ... \cdot (\alpha_{d-2} x_0 + \beta_{d-2} x_1)$. Logo $F = x_0 (\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1) \cdot ... \cdot (\alpha_{d-2} x_0 + \beta_{d-2} x_1)$.

Se $a_d \neq 0$ façamos $f(x_1) = F(1, x_1)$, então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos que existem $c_0, ..., c_{d-1} \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(x_1) = \prod_{i=0}^{d-1} (c_i - x_1).$$

Assim $F(1, c_0) = f(c_0) = 0$. Consideremos o polinômio $\ell(x_0, x_1) = c_0 x_0 - x_1$ e vamos dividir F por $\ell(x_0, x_1)$. Assim

$$F = F_1(x_0, x_1) \ell(x_0, x_1) + R(x_0).$$

Note que $F_1(x_0, x_1)$ é não nulo e homogêneo de grau $d-1$, pois F é homogêneo de grau d, e

$$R(\alpha) = F(\alpha, \alpha c_0) = \alpha^d F(1, c_0) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow R \equiv 0_{\mathbb{C}[x_0]}.$$

Portanto $F = (\alpha_0 x_0 + \beta_0 x_1) \cdot ... \cdot (\alpha_{d-2} x_0 + \beta_{d-2} x_1)(c_0 x_0 - x_1)$. ■

B.2 Topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$

Para cada ideal homogêneo $I \subseteq P$, definimos

$$Z(I) = \{[p_0 : p_1 : ... : p_n] \in \mathbb{P}^n | F_i(p_0, ..., p_n) = 0, \forall\ i = 1, 2, ..., k\},$$

onde $F_1, F_2, ..., F_k$ é um conjunto de geradores homogêneos de I.

Considere a família $\pounds = \{Z(I)\}$, onde I percorre os ideais homogêneos de P. Então note que:

i) $\mathbb{P}^n, \emptyset \in \pounds$;

ii) Se $Z(I), Z(J) \in \pounds$ então $Z(I) \cup Z(J) \in \pounds$;

iii) $Z(I_\alpha) \in \pounds, \alpha \in \Lambda$, então $\cap_{\alpha\in\Lambda} Z(I_\alpha) \in \pounds$.

A família $\pounds$ determina uma topologia em $\mathbb{P}^n$, denominada de Topologia de Zariski (1899-1986) no Espaço Projetivo $\mathbb{P}^n$, onde os conjuntos $Z(I)$ são os fechados da topologia. Esta será a Topologia usada durante todo o texto.

Além disso, seja $I = \langle F_1, ..., F_r\rangle$ e $J = \langle G_1, ..., G_s\rangle$, então:

iv) $Z(I) \cap Z(J) = Z(F_1, ..., F_r, G_1, ..., G_s)$;

v) $Z(I) \cup Z(J) = Z(F_iG_j)$, onde $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$;

vi) Se $I \subseteq J$, então $Z(J) \subseteq Z(I)$.

Definição B.2.1 *Um espaço topológico é dito irredutível se não for possível decompô-lo como união de dois subconjuntos fechados próprios.*

Definição B.2.2 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{P}^n$. Definimos o ideal associado a X, $\mathcal{I}(X)$, por:*

$$\mathcal{I}(X) = \{F \in P | F(a)\ \forall\ a \in X\} = \langle F \in P | F \text{ é homogêneo e } F(a) = 0\ \forall\ a \in X\rangle.$$

Proposição B.2.3 *Seja X um subconjunto de $\mathbb{P}^n$. Então $\mathcal{I}(X)$ é primo se, e somente se, X é irredutível.*

Teorema B.2.4 *(Teorema dos zeros de Hilbert) Seja $Z(I)$ uma variedade de $\mathbb{P}^n$ tal que $\sqrt{I} \neq \langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$. Então $\mathcal{I}(Z(I)) = \sqrt{I}$.*

B.3 Variedades Projetivas

Definição B.3.1 *Um subconjunto Z de $\mathbb{P}^n$ é dito uma variedade projetiva se existem polinômios homogêneso $F_1, F_2, ..., F_k \in P$ tais que Z é o conjunto solução do sistema polinomial $F_i(x_0, ..., x_n) = 0$, com $i = 1, 2, ..., k$. O conjunto Z é chamado de "os zeros de $F_1, F_2, ..., F_k$"e o denotamos por*

$$Z(F_1, F_2, ..., F_k) = \{[p_0 : p_1 : ... : p_n] \in \mathbb{P}^n | F_i(p_0, ..., p_n) = 0, \forall\ i = 1, 2, ..., k\}.$$

Por exemplo: $\mathbb{P}^n = Z(0), \forall\ n$, e $\emptyset = Z(1)$ são variedades projetivas.

Definição B.3.2 *As variedades definidas por um ou mais polinômios em P_1 são chamadas de variedades lineares em $\mathbb{P}^n$.*

Exemplo B.3.3 *Uma hipersuperfície de grau um em $\mathbb{P}^n$ é chamada de hiperplano, de grau dois em $\mathbb{P}^2$ é chamada de cônica, de grau dois em $\mathbb{P}^3$ é chamada de superfície quádrica e de grau três em $\mathbb{P}^3$ é chamada de superfície cúbica.*

Os elementos de $\mathbb{P}(P_d)$ são denominados de hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$. Se $F \in P_d$, onde $F \neq 0$, for livre de quadrados, então $[F] \in \mathbb{P}(P_d)$ é denominada hipersuperfície reduzida de grau d em $\mathbb{P}^n$. Além disso existe a seguinte bijeção

$$\begin{array}{c} \{[F] \in \mathbb{P}(P_d) | F \text{ é livre de quadrados}\} \longleftrightarrow \{Z(F) \subset \mathbb{P}^n | F \text{ é livre de quadrados}\} \\ [F] \longleftrightarrow Z(F) \end{array},$$

pois:
$i)$ se

$$\begin{aligned} [F] = [G] &\Rightarrow F = \lambda G, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \\ &\Rightarrow Z(F) = Z(G); \end{aligned}$$

$ii)$ se

$$\begin{aligned} Z(F) = Z(G) &\Rightarrow \langle F \rangle = \sqrt{\langle F \rangle} = \sqrt{\langle G \rangle} = \langle G \rangle \\ &\Rightarrow F = \lambda G, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \\ &\Rightarrow [F] = [G]. \end{aligned}$$

Definição B.3.4 *Uma variedade $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ é dita irredutível se Z é irredutível como um espaço com a Topologia de Zariski induzida.*

Definição B.3.5 *Uma variedade $Z = Z(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ é dita reduzida se I é um ideal radical em $\mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.*

Teorema B.3.6 *Notações como no **Teorema 1.1.1**.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Segue do **Corolário 1.0.9**.

$\Leftarrow$) Temos que existem $a_0, ..., a_d \in \mathbb{C}$ tal que

$$F = \sum_{i=0}^{d} a_i x_0^{d-i} x_1^i, \text{ com } d \geq 3.$$

Assim

$$\begin{aligned}
F_{x_0x_0} &= d(d-1)a_0x_0^{d-2} + (d-1)(d-2)a_1x_0^{d-3}x_1 + (d-2)(d-3)a_2x_0^{d-4}x_1^2 + ...+ \\
&\quad + 12a_{d-4}x_0^2x_1^{d-4} + 6a_{d-3}x_0x_1^{d-3} + 2a_{d-2}x_1^{d-2}; \\
F_{x_0x_1} &= (d-1)a_1x_0^{d-2} + 2(d-2)a_2x_0^{n-3}x_1 + 3(d-3)a_3x_0^{n-4}x_1^2 + ...+ \\
&\quad + 3(d-3)a_{d-3}x_0^2x_1^{d-4} + 2(d-2)a_{d-2}x_0x_1^{d-3} + (d-1)a_{d-1}x_1^{d-2}; \\
F_{x_1x_0} &= F_{x_0x_1}; \\
F_{x_1x_1} &= 2a_2x_0^{d-2} + 6a_3x_0^{d-3}x_1 + 12a_4x_0^{d-4}x_1^2 + ...+ \\
&\quad + (d-2)(d-3)a_{d-2}x_0^2x_1^{d-4} + (d-1)(d-2)a_{d-1}x_0x_1^{d-3} + d(d-1)a_dx_1^{d-2}.
\end{aligned}$$

Como $h_F = 0$, então $F_{x_0x_0}F_{x_1x_1} - F_{x_0x_1}^2 = 0$, ou seja,

$$\begin{array}{l}
[2d(d-1)a_0a_2 - d(d-1)a_1^2]\, x_0^{2d-4} + [6d(d-1)a_0a_3 - 2(d-1)(d-2)a_1a_2]\, x_0^{2d-5}x_1 \\
\quad + [12d(d-1)a_0a_4 + 6(d-1)a_1a_3 - 2(d-1)(d-2)a_2^2]\, x_0^{2d-6}x_1^2 + ...+ \\
\quad + \left[12d(d-1)a_{d-4}a_d + 6(d-1)a_{d-3}a_{d-1} - 2(d-1)(d-2)a_{d-2}^2\right] x_0^2x_1^{2d-6} \\
\quad + [6d(d-1)a_{d-3}a_d - 2(d-1)(d-2)a_{d-2}a_{d-1}]\, x_0x_1^{2d-5} \\
\quad + \left[2d(d-1)a_{d-2}a_d - d(d-1)a_{d-1}^2\right] x_1^{2d-4} = 0
\end{array}.$$

Por igualdade de polinômios, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{l}
2d(d-1)a_0a_2 - d(d-1)a_1^2 = 0 \\
6d(d-1)a_0a_3 - 2(d-1)(d-2)a_1a_2 = 0 \\
12d(d-1)a_0a_4 + 6(d-1)a_1a_3 - 2(d-1)(d-2)a_2^2 = 0 \\
\vdots \\
12d(d-1)a_{d-4}a_d + 6(d-1)a_{d-3}a_{d-1} - 2(d-1)(d-2)a_{d-2}^2 = 0 \\
6d(d-1)a_{d-3}a_d - 2(d-1)(d-2)a_{d-2}a_{d-1} = 0 \\
2d(d-1)a_{d-2}a_d - d(d-1)a_{d-1}^2 = 0
\end{array}\right..$$

Agora, consideremos os seguintes casos para F:

1) Se $a_0 \neq 0$, então

$$\left\{\begin{array}{l}
a_2 = \frac{d(d-1)a_1^2}{2d^2a_0} \\
a_3 = \frac{(d-2)a_1a_2}{3da_0} = \frac{d(d-1)(d-2)a_1^3}{6d^3a_0^2} \\
a_4 = \frac{(d-2)a_2^2}{6da_0} - \frac{a_1a_3}{2da_0} = \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)a_1^4}{24d^4a_0^3} \\
\vdots \\
a_d = \frac{\prod_{i=0}^{d-1}(d-i)a_1^d}{d!d^da_0^{d-1}}
\end{array}\right..$$

Sustituindo as últimas igualdades em F obtemos $F = a_0\left(x_0 + \frac{a_1}{da_o}x_1\right)^d$, de onde concluímos que $[F]$ é um Cone.

2) Se $a_d \neq 0$, então, analogamente ao caso 1), obtemos que $F = a_d\left(\frac{a_{d-1}}{da_d}x_0 + x_1\right)^d$, que define um Cone.

3) Se $a_0 = a_d = 0$, então

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_d = 0 \end{cases}.$$

Assim $F \equiv 0_{\mathbb{C}[x_0,x_1]}$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

Portanto $[F]$ é um Cone. ■

B.3.1 Dimensão e Singularidade

Definição B.3.7 *Seja a variedade linear $Z = Z(l_1, ..., l_{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^n$ onde $l_i = a_{i0}x_0 + ... + a_{in}x_n \in P_1$, com $i = 1, ..., n-1$. Seja J_Z a seguinte matriz:*

$$J_Z = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dizemos que Z é uma reta em $\mathbb{P}^n$ se posto $J_Z = n-1$.

Definição B.3.8 *Seja $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade reduzida e $p \in Z$. Definimos o Espaço Tangente Projetivo de Z em p com sendo o conjunto*

$$T_pZ = \{[a_0 : a_1 : ... : a_n] \in \mathbb{P}^n | \nabla f(p) \cdot (a_0, a_1, ..., a_n) = 0, \forall\ f \in \mathcal{I}(Z)\},$$

onde ∇f denota o vetor gradiente.

Exemplo B.3.9 *$T_p\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n$. De forma mais geral, se $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade linear e $p \in Z$, então $T_pZ = Z$.*

Definição B.3.10 *Se $Z = Z(l_1, ..., l_s) \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade linear, conforme a **Definição B.3.7**, então definimos a dimensão de Z como sendo*

$$\dim Z = n - \textit{posto } J_Z.$$

Definição B.3.11 *Seja Z uma variedade irredutível e reduzida em $\mathbb{P}^n$. Definimos a dimensão de Z como sendo*

$$\dim Z = \min\{\dim(T_pZ) | p \in Z\}.$$

Definição B.3.12 *Seja Y uma variedade redutível e reduzida em $\mathbb{P}^n$ e Y_i suas componentes irredutíveis. Definimos a dimensão de Y como sendo*

$$\dim Y = \max \{\dim (Y_i)\}.$$

Teorema B.3.13 *Se $X \subseteq Y$ então $\dim X \leq \dim Y$. Além disso, se Y é irredutível e $X \subseteq Y$ é uma subvariedade fechada com $\dim X = \dim Y$ então $X = Y$.*

Definição B.3.14 *Seja $Z = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida e $p \in Z$. Dizemos que p é um ponto singular se $\nabla F(p) = 0$.*

Definição B.3.15 *Seja $Z = Z(F_1, ..., F_k)$ uma variedade reduzida em $\mathbb{P}^n$ e $p \in Z$. Dizemos que p é um ponto singular de Z se, e somente se, $\dim T_pZ > \dim Z$. Denotamos o conjunto dos pontos singulares de Z por Sing (Z).*

Observação B.3.16 *Sejam X, Y duas variedades em $\mathbb{P}^n$ tal que $X \subseteq Y \subsetneq \mathbb{P}^n$, então $T_pX \subseteq T_pY, \forall\, p \in X$. De fato, pois se $X \subseteq Y \subsetneq \mathbb{P}^n$, então $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(Y)$.*

Se $Z \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida e $p \in Z-$Sing (Z), então T_pZ é um hiperplano em $\mathbb{P}^n$.

B.4 Mudança de coordenadas projetivas

Seja $T : V \longrightarrow V$ um isomorfismo linear. Deixaremos ao leitor interessado a verificação de que T preserva subespaços k-dimensionais de V. Então T induz uma bijeção em $\mathbb{P}(V)$, que denotaremos por $\mathbb{T}$ e chamaremos de *mudança de coordenadas projetivas* (*Mcp*), definida por $\mathbb{T}([v]) = [T(v)]$. Note que T induz um isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\begin{aligned} T\cdot : P &\longrightarrow P \\ F &\longmapsto T \cdot F \end{aligned},$$

onde $T \cdot F(x_0, ..., x_n) = F(T^{-1}(x_0, ..., x_n))$. Tal isomorfismo preserva a graduação de P, isto é, $T \cdot (P_d) = P_d$, para todo $d \geq 0$. Por simplicidade denotaremos $T \cdot |_{P_d} = T_d$. Além disso, como T preserva subespaços, então, pela **Definição B.1.4**, temos que retas, planos, etc. são aplicados respectivamente em retas, planos, etc., pela mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T}$ e são chamadas de projetivamente equivalentes. De forma mais geral temos que:

I) *Mcp preservam variedades projetivas.* Sejam $F \in P_d$ e $T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um isomorfismo linear. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(Z(F)) &= \{[T(v)] \in \mathbb{P}^n |\, [v] \in Z(F)\} = \{[T(v)]\, |F(v) = 0\} \\ &= \left\{[w] \in \mathbb{P}^n | F\left(T^{-1}(w)\right) = 0\right\} \qquad (\star) \\ &= \{[w] \in \mathbb{P}^n | T_d \cdot F(w) = 0\} = Z(T_d \cdot F). \end{aligned}$$

II) *Mcp preservam o grau das hipersuperfícies.* De fato, seja $Z = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida de grau d. Então, segue-se de $(\star)$ que $\mathbb{T}(Z(F)) = Z(T_d \cdot F))$ e, como T_d é um isomorfismo linear em P_d concluímos que $\mathbb{T}(Z(F))$ é uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$. De fato, $\mathbb{T}$ induz uma bijeção de $\mathbb{P}(S_d)$ em $\mathbb{P}(S_d)$ definida por $[F] \mapsto [T \cdot F]$

III) *Mcp preservam variedades irredutíveis.* Suponhamos que *Mcp* não preservam variedades irredutíveis, então existe $Z(I) \subset \mathbb{P}^n$, variedade irredutível, onde $I = \langle F_1, ..., F_k \rangle \subseteq P$ é um ideal homogêneo radical e $F_i \in P_{d_i}$, tal que $\mathbb{T}(Z(I)) = Z(J_1) \cup Z(J_2) = Z(J_1 J_2)$, para algum $J_1, J_2 \subseteq P$ ideais. Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(Z(I)) &= \mathbb{T}\left(\bigcap_{i=1}^{k} Z(F_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{T}(Z(F_i)) = \bigcap_{i=1}^{k} Z(T_{d_i} \cdot F_i) \\ &= Z(\langle T_{d_1} \cdot F_1, ..., T_{d_k} \cdot F_k \rangle).\end{aligned}$$

Suponhamos que $J_1 = \langle h_1, ..., h_r \rangle$ e $J_2 = \langle g_1, ..., g_s \rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(Z(I)) &= Z(\langle h_i g_j \rangle), \text{ com } 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq s \\ &\Rightarrow Z(\langle T_{d_1} \cdot F_1, ..., T_{d_k} \cdot F_k \rangle) = Z(\langle h_i g_j \rangle). \qquad (\star\star)\end{aligned}$$

Observe que $h_i g_j$, com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, são polinômios homogêneos, pois, por ***I)*** e por $(\star\star)$, $Z(\langle h_i g_j \rangle)$ é uma variedade projetiva. Assim h_i e g_j são polinômios homogêneos, para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Consideremos que o grau de h_i e de g_j são D_i e E_j respectivamente. Como T_{D_i} e T_{E_j} são isomorfismos, então existem $H_i \in P_{D_i}$ e $G_j \in P_{E_j}$ tal que $T_{D_i} \cdot H_i = h_i$ e $T_{E_j} \cdot G_j = g_j$. Assim

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(Z(I)) &= Z(\langle T_{D_i} \cdot H_i T_{E_j} \cdot G_j \rangle), \text{ com } 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq s \\ &= \bigcap_{i,j} Z(T_{D_i} \cdot H_i T_{E_j} \cdot G_j) \\ &= \bigcap_{i,j} \mathbb{T}(Z(H_i G_j)) = \mathbb{T}(Z(\langle H_i G_j \rangle)) \\ &\Rightarrow Z(I) = Z(\langle H_i G_j \rangle).\end{aligned}$$

Fazendo $\mathcal{J}_1 = \langle H_1, ..., H_r \rangle$ e $\mathcal{J}_2 = \langle G_1, ..., G_s \rangle$, temos que

$$Z(I) = Z(\mathcal{J}_1) \cup Z(\mathcal{J}_2) \quad (\rightarrow \mid \leftarrow).$$

IV) *Mcp preservam pontos singulares.* Sejam $X = Z(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície reduzida de grau d e seja $p = [v] \in X$ um ponto singular, então $\nabla F(v) = 0$. Devemos mostrar que $\mathbb{T}(p)$ é um ponto singular de $\mathbb{T}(Z(F)) = Z(T_d \cdot F)$. Como $\nabla(F(T^{-1}))(x_0, ..., x_n) = \nabla F(T^{-1}(x_0, ..., x_n)) T^{-1}(x_0, ..., x_n)$, então

$$\nabla(T_d \cdot F)(x_0, ..., x_n) = \nabla F\left(T^{-1}(x_0, ..., x_n)\right) T^{-1}(x_0, ..., x_n).$$

Agora, façamos $(x_0, ..., x_n) = T(v)$. Assim

$$\nabla(T_d \cdot F)(T(v)) = \nabla F(v) v = 0.$$

Logo $\mathbb{T}(p) = \mathbb{T}([v]) = [T(v)]$ é um ponto singular de $\mathbb{T}(Z(F))$.

Exemplo B.4.1 *Seja* $H \subseteq \mathbb{P}^3$ *um plano e* $p \in \mathbb{P}^3$ *tal que* $p \notin H$, *então existe uma Mcp tal que* $\mathbb{T}(H) = Z(x_3)$ *e* $\mathbb{T}(p) = [0:0:0:1]$. *De fato, temos que* $p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$, *se* $p_3 \neq 0$, *então façamos* $p = [p_0 : p_1 : p_2 : 1]$, *e se* $p_3 = 0$, *então façamos uma Mcp de tal modo que* $p_3 \neq 0$ *e assim encontraremos* $p = [p_0 : p_1 : p_2 : 1]$. *Além disso,temos que* $H = Z(h)$, *onde* $h = Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 + Dx_3$, *de modo que*

$$h(p) = Ap_0 + Bp_1 + Cp_2 + D = \mu \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Assim consideremos $\widetilde{h} = \frac{A}{\mu}x_0 + \frac{B}{\mu}x_1 + \frac{C}{\mu}x_2 + \frac{D}{\mu}x_3$ *e observe que* $\widetilde{h}(p) = 1$.

Agora, vamos determinar $a_{ij} \in \mathbb{C}$, *com* $1 \leq i \leq 4$ *e* $1 \leq j \leq 3$, *de maneira que a matriz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

seja a matriz associada a T^{-1} *na base canônica. Facilmente verificamos que* $\mathbb{T}(p) = [0:0:0:1]$. *Já para a condição* $T_1 \cdot \widetilde{h} = x_3$, *temos que*

$$T_1 \cdot \widetilde{h}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 \Leftrightarrow \widetilde{h}\left(T^{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3)\right) = x_3.$$

Concluímos que

$$\begin{cases} Aa_{11} + Ba_{21} + Ca_{31} + Da_{41} = 0 \\ Aa_{12} + Ba_{22} + Ca_{32} + Da_{42} = 0 \\ Aa_{13} + Ba_{23} + Ca_{33} + Da_{43} = 0 \\ \frac{A}{\mu}p_0 + \frac{B}{\mu}p_1 + \frac{C}{\mu}p_2 + \frac{D}{\mu} = 1 \end{cases}.$$

Logo basta escolhermos $u_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i})$ *com* $i = 1, 2, 3$ *tais que* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *é lineramente independentes e* $[u_i] \in Z\left(\widetilde{h}\right)$ *para* $i = 1, 2, 3$.

Apêndice C

Mapas regulares

Definição C.0.2 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Dizemos que X é uma variedade quase-projetiva se for possível encontrar $A, F \subseteq \mathbb{P}^n$, A aberto e F fechado, tais que $X = A \cap F$.*

Definição C.0.3 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade quase-projetiva e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma funcão. Dizemos que φ é regular em $p \in X$ se existe uma vizinhança aberta V_p de p e também $F, G \in P_d$ tais que $\varphi = \frac{F}{G}$ em V_p e $G(q) \neq 0 \ \forall \ q \in V_p$. Dizemos que φ é regular se for regular em todo ponto $p \in X$.*

Observação C.0.4 *Nem sempre conseguimos polinômios $F, G \in P_d$ tais que $\varphi = \frac{F}{G}$ em V_p e $G(q) \neq 0 \ \forall \ q \in X$, mas localmente o temos para abertos específicos.*

Definição C.0.5 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade quase-projetiva e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}^m$ uma funcão. Dizemos que φ é regular (ou um morfismo) se, e somente se, $\varphi_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é regular para todo $i = 1, ..., m$, onde $\varphi(q) = (\varphi_1(q), \varphi_2(q), ..., \varphi_m(q)) \ \forall \ q \in X$.*

A partir da **Definição C.0.5** podemos verificar que:

i) φ é contínua (em relação a topoligia de Zariski);

ii) Para todo aberto básico $V_i = \{[a_0 : ... : a_i : ... : a_m] \in \mathbb{P}^m | a_i \neq 0\} \subsetneq \mathbb{P}^m$ temos que $\psi_i = \varphi|_{\varphi^{-1}(V_i)} : \varphi^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$ é regular, $\forall \ i = 0, ..., m$.

Exemplo C.0.6 *Sejam $F_0, F_1, ..., F_n \in P_d$ não nulos tais que $Z(F_0, F_1, ..., F_n) \neq \emptyset$. Consideremos a função*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ q &\longmapsto [F_0(q) : ... : F_n(q)] \end{aligned} .$$

Note que φ é relugar, pois:

$\bullet$) *φ está bem definida. (deixaremos a cargo do leitor)*

$\bullet\bullet$) *φ é contínua. De fato, dado $X = Z(G)$ temos que*

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(X) &= \{q \in \mathbb{P}^n | \, [F_0(q) : ... : F_n(q)] \in X\} \\ &= \{q \in \mathbb{P}^n | G\left(F_0(q), ..., F_n(q)\right) = 0\} \\ &= Z(Q), \text{ onde } Q = G\left(F_0, ..., F_n\right).\end{aligned}$$

Logo $\varphi^{-1}(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^n$.

$\bullet\bullet\bullet$) *Seja $V_i = \{[a_0 : ... : a_i : ... : a_n] \in \mathbb{P}^n | \; a_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, então $\varphi^{-1}(V_i) = \{q \in \mathbb{P}^n | F_i(q) \neq 0\}$. Consideremos $\psi_i = \varphi|_{\varphi^{-1}(V_i)} : \varphi^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$ de modo que $\psi_i(q) = (\psi_{i,0}(q), ..., \psi_{i,m}(q)) \; \forall \; q \in V_i$. Note que $\psi_{i,j} : V_i \longrightarrow \mathbb{C}$, com $j = 0, ..., m$, é regular, pois $\psi_{i,j} = \frac{F_j}{F_i} \; \forall \; q \in V_i$. Logo ψ_i é relugar.*

Definição C.0.7 *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades projetivas, com X sendo irredutível. Um mapa racional $\phi : X \cdots \longrightarrow Y$ é uma classe de equivalência do conjunto quociente*

$$\frac{\{(U, \varphi) \, | U \subseteq X \text{ é um aberto não vazio}, \; \varphi : U \longrightarrow Y \text{ é regular}\}}{\sim}$$

onde $(U, \varphi) \sim (V, \psi) \Longleftrightarrow \varphi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$.

Definição C.0.8 *Seja $\varphi : \mathbb{P}^n \cdots \longrightarrow \mathbb{P}^n$ o mapa racional definido pelos polinômios não nulos $F_0, F_1, ..., F_n \in P_d$, isto é, $\varphi(p) = [F_0(p) : ... : F_n(p)]$. Dizemos que φ é um mapa dominante se, e somente se, $\overline{\varphi\left(\mathbb{P}^n - Z\left(F_0, ..., F_n\right)\right)} = \mathbb{P}^n$.*

Lema C.0.9 *Sejam $F_0, F_1, ..., F_n \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau. Seja*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{P}^n \cdots &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\longmapsto [F_0(p) : ... : F_n(p)]\end{aligned},$$

o mapa racional associado e

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi} : \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ v &\longmapsto (F_0(v), ..., F_n(v))\end{aligned}$$

o mapa afim associado a φ. Então φ é dominante se, e somente se, $\widetilde{\varphi}$ é dominante.

Demonstração: $\Rightarrow$) Provemos pela contra-positiva. Suponhamos que $\widetilde{\varphi}$ não é dominante, então $\overline{\widetilde{\varphi}(\mathbb{C}^{n+1})} \subsetneq \mathbb{C}^{n+1}$. Assim, existe uma hipersuperfície $Z(G) \subsetneq \mathbb{C}^{n+1}$ tal que

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right) &\subseteq \overline{\widetilde{\varphi}(\mathbb{C}^{n+1})} \subseteq Z(G) \subsetneq \mathbb{C}^{n+1} \\ &\Rightarrow G(\widetilde{\varphi}(v)) = 0, \; \forall \; v \in \mathbb{C}^{n+1} \\ &\Rightarrow G(F_0(v), ..., F_n(v)) = 0, \; \forall \; v \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Se G não é um polinômio homogêneo, então $G = G_0 + G_1 + ... + G_d$, onde d é o grau de G e $G_i \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ são polinômios homogêneos de grau i $\forall$ $i = 0, ..., d$. Fixemos $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, então $\widetilde{\varphi}(\lambda v) = \lambda^k \widetilde{\varphi}(v)$, $\forall$ $\lambda \in \mathbb{C}$ e $k = \partial(F_i)$. Assim

$$
\begin{aligned}
G(\widetilde{\varphi}(\lambda v)) = 0, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C} & \\
& \Rightarrow G_0(\widetilde{\varphi}(\lambda v)) + ... + G_d(\widetilde{\varphi}(\lambda v)) = 0, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C} \\
& \Rightarrow G_0 + \lambda^k G_1(\widetilde{\varphi}(v)) + ... + \lambda^{dk} G_d(\widetilde{\varphi}(v)) = 0, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C} \\
& \Rightarrow G_i(\widetilde{\varphi}(v)) = 0, \ \forall \ i = 0, ..., d \\
& \Rightarrow \overline{\widetilde{\varphi}(\mathbb{C}^{n+1})} \subseteq Z(G_i), \ \forall \ i = 0, ..., d.
\end{aligned}
$$

Assim podemos escolher uma hipersuperfície definida por um polinômio homogêneo G tal que $\overline{\widetilde{\varphi}(\mathbb{C}^{n+1})} \subseteq Z(G)$. Então

$$
\begin{aligned}
G([F_0(p) : ... : F_n(p)]) = 0, \ \forall \ p \in \mathbb{P}^n - Z(F_0, ..., F_n) & \\
& \Rightarrow \varphi(\mathbb{P}^n - Z(F_0, ..., F_n)) \subseteq Z(G) \\
& \Rightarrow \overline{\varphi(\mathbb{P}^n - Z(F_0, ..., F_n))} \subseteq Z(G) \subsetneq \mathbb{P}^n.
\end{aligned}
$$

Portanto φ não é dominante.

$\Leftarrow$) Provemos também pela contra-positiva. Suponhamos que φ não é um mapa dominante. Então existe uma hipersuperfície $Z(H) \subsetneq \mathbb{P}^n$ tal que

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi(\mathbb{P}^n - Z(F_0, ..., F_n))} \subseteq Z(H) \subsetneq \mathbb{P}^n & \\
& \Rightarrow H(\varphi(p)) = 0, \ \forall \ p \in \mathbb{P}^n - Z(F_0, ..., F_n) \\
& \Rightarrow H(\widetilde{\varphi}(v)) = 0, \ \forall \ v \in \mathbb{C}^{n+1}; [v] \in \mathbb{P}^n - Z(F_0, ..., F_n) \\
& \Rightarrow H(\widetilde{\varphi}(v)) = 0, \ \forall \ v \in U = \mathbb{C}^{n+1} - C_{Z(F_0, ..., F_n)} \\
& \Rightarrow \widetilde{\varphi}(U) \subseteq Z(H) \\
& \Rightarrow U \subseteq \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{\varphi}(U)) \subseteq \widetilde{\varphi}^{-1}(Z(H)) \\
& \Rightarrow \overline{U} = \mathbb{C}^{n+1} \subseteq \widetilde{\varphi}^{-1}(Z(H)) \\
& \Rightarrow \overline{\widetilde{\varphi}(\mathbb{C}^{n+1})} \subseteq \overline{\widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi}^{-1}(Z(H)))} \subseteq \overline{Z(H)} = Z(H) \subsetneq \mathbb{C}^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\widetilde{\varphi}$ não é um mapa dominante. ■

Definição C.0.10 *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um mapa regular e dominante. Seja $x \in X$ tal que $\varphi(x) \in Y - Sing(Y)$. Dizemos que φ é suave em x se, e somente se, $x \in X - Sing(X)$ e $\dim Ker(d\varphi_x) = \dim X - \dim Y$.*

Proposição C.0.11 *Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um mapa regular e dominante. Então $U = \{x \in X | \varphi$ é suave em $x\}$ é um aberto não vazio e denso em X.*

Demonstração: Conferir a Proposição 3.6, pag 42 em [Mum2]. ■

Lema C.0.12 *Seja* $\varphi : \mathbb{P}^n \cdot \cdot\cdot \longrightarrow \mathbb{P}^n$ *uma mapa racional dado por* $\varphi(x) = [H_0(x) : ... : H_n(x)]$ *no aberto* $U = \mathbb{P}^n - Z$*, onde* $Z = Z(H_0, ..., H_n) \subseteq \mathbb{P}^n$ *e* $H_0, ..., H_n$ *são polinômios homogêneos do mesmo grau tal que* $mdc(H_0, ..., H_n) = 1$*. Então* $\overline{\varphi^{-1}(q)} - \varphi^{-1}(q) \subseteq Z$*.*

Demonstração: Definamos $\widetilde{\mathbb{P}^n} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ como o seguinte conjunto

$$\widetilde{\mathbb{P}^n} = \{(p,b) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n | b = [b_0 : ... : b_n] \text{ e } H_i(p)\, b_j = H_j(p)\, b_i,\ \forall\ i,j \in \{0,...,n\}\}.$$

Tal conjunto é conhecido como explosão de $\mathbb{P}^n$ ao longo de Z. Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{array}{c} \pi_1 : \widetilde{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (p,b) \longmapsto p \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \pi_2 : \widetilde{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (p,b) \longmapsto b \end{array}.$$

Assim, note que:

1) para todo $y \in \mathbb{P}^n - Z$, temos que

$$\pi_1^{-1}(y) = \left\{(p,b) \in \widetilde{\mathbb{P}^n} | p = y\right\} = \left\{(y,b) \in \widetilde{\mathbb{P}^n}\right\} = \{(y, \varphi(y))\},$$

pois se $H_i(y)\, b_j = H_j(y)\, b_i$, para todo $i,j \in \{0,...,n\}$, então

$$\varphi(y) = [H_0(y) : ... : H_n(y)] = [b_0 : ... : b_n] = b;$$

2) se definimos $E = \pi_1^{-1}(Z)$, temos que $\widetilde{\mathbb{P}^n} - E$ esta em bijeção com $\mathbb{P}^n - Z$. De fato, pois

$$\begin{array}{c} \widetilde{\mathbb{P}^n} - E \longleftrightarrow \mathbb{P}^n - Z \\ (p, \varphi(p)) \leftrightarrow p \end{array};$$

3) se $q \in Z$, temos que

$$\pi_1^{-1}(q) = \left\{(p,b) \in \widetilde{\mathbb{P}^n} | p = q\right\} = \left\{(q,b) \in \widetilde{\mathbb{P}^n}\right\} = \{q\} \times \mathbb{P}^n,$$

pois $H_i(q) = 0$ para todo $i = 0, ..., n$.

Finalmente, observe que se $\varphi^{-1}(q)$, então não temos nada a provar. Do contrário, temos que

$$\pi_2^{-1}(q) = \left[E \cap \pi_2^{-1}(q)\right] \dot{\cup} \left[\left(\widetilde{\mathbb{P}^n} - E\right) \cap \pi_2^{-1}(q)\right]$$

Além disso:

i) $E \cap \pi_2^{-1}(q) \subseteq Z \times \{q\}$;

ii) $\left(\widetilde{\mathbb{P}^n} - E\right) \cap \pi_2^{-1}(q) \subseteq \varphi^{-1}(q) \times \{q\}$.

De *i)* e *ii)* concluímos que

$$\pi_2^{-1}(q) \subseteq [Z \times \{q\}] \dot{\cup} \left[\varphi^{-1}(q) \times \{q\}\right].$$

Agora, como $\pi_1\left(\pi_2^{-1}(q)\right)$ é um fechado que contem $\varphi^{-1}(q)$, então

$$\begin{aligned}\overline{\varphi^{-1}(q)} \subseteq \pi_1\left(\pi_2^{-1}(q)\right) &\Rightarrow \overline{\varphi^{-1}(q)} \subseteq Z \dot{\cup} \varphi^{-1}(q) \\ &\Rightarrow \overline{\varphi^{-1}(q)} - \varphi^{-1}(q) \subseteq Z.\end{aligned}$$

■

Corolário C.0.13 *Sejam $q \in \operatorname{Im}\varphi$ e $w \in \overline{\varphi^{-1}(q)} - \varphi^{-1}(q)$, então $l_{w,q} \subseteq Z$.*

Demonstração: Segue-se do **Corolário 3.0.9** que cada H_i verifica o **Teorema Chave**. Assim $H_i(p) = H_i(p + \lambda H(v))$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, onde $H = (H_0, H_1, ..., H_n)$, com $i = 0, ..., n$. Logo, concluímos que $\varphi(x) = \varphi(x + \lambda\varphi(x))$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Agora, seja $p \in \varphi^{-1}(q)$, então $\varphi(p) = q$. Portanto

$$\varphi(p + \lambda\varphi(p)) = \varphi(p + \lambda q) = q, \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sabemos que $p \notin Z$, então existe $i \in \{0, ..., n\}$ tal que

$$H_i(p) \neq 0 \Rightarrow H_i(p + \lambda q) \neq 0 \Rightarrow p + \lambda q \notin Z, \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Assim $\widehat{l_{p,q}} = l_{p,q} - \{q\} \subseteq \varphi^{-1}(q)$. Logo

$$\varphi^{-1}(q) = \bigcup_{p \in \varphi^{-1}(q)} \widehat{l_{p,q}}.$$

Agora, suponhamos que $l_{w,q} \cap \varphi^{-1}(q) \neq \varnothing$, então existe algum $p \in l_{w,q} \cap \varphi^{-1}(q)$. Como $p \in \varphi^{-1}(q)$, então

$$\begin{aligned} p \in \mathbb{P}^n - Z &\Rightarrow p \neq w \text{ e } p \neq q \Rightarrow l_{p,q} = l_{w,q} \\ &\Rightarrow \widehat{l_{p,q}} = \widehat{l_{w,q}} \subseteq \varphi^{-1}(q) \Rightarrow w \in \varphi^{-1}(q) \qquad (\rightarrow \mid \leftarrow). \end{aligned}$$

Portanto

$$l_{w,q} \subseteq \overline{\varphi^{-1}(q)} = \varphi^{-1}(q) \dot{\cup} \left[\overline{\varphi^{-1}(q)} - \varphi^{-1}(q)\right] \Rightarrow l_{w,q} \subseteq Z.$$

■

Referências Bibliográficas

[CRS] C. CILIBERTO, F. RUSSO e A. SIMIS. *Homaloidal Hypersurfaces and Hypersurfaces with vanishing Hessian.* Advances in Mathematics, vol 218, 2008, pag 1759-1805.

[EGH] J. H. EWING, F. W. GEHRING e P. R. HALMOS. *Algebraic Geometry, A First Course*, Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1990.

[GN] P. GORDAN e M. NOETHER. *Üeber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.* Math. Ann., vol 10, 1876, pag 547–568.

[GR] A. GARBAGNATI e F. REPETTO. *A Geometrical approach to Gordan-Noether's and Franchetta's contributions to a question posed by Hesse.* Collectanea Mathematica, vol 60, 2009, pag 27-41.

[HE] L. O. HESSE. *Über die Bedingung, unter welche eine homogene ganze Function von nunabhängigen Variabeln durch Lineäre Substitutionem von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurück-führen lässt, die eine Variable weniger enthält.* J. reine angew. Math., vol 42, 1851, pag 117–124.

[IMA] I. M. GELFAND, M. M. KAPRANOV e A. V. ZELEVINSKY. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants.* Springer, 1994.

[Ivan] I. MEZZONO. *Sobre Dualidade de Variedades Projetivas.* Paraíba: UFPB, 2005. Tese (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática.

[Mum1] D. MUMFORD. *Red Book.* Springer - Verlag Lecture Notes in Mathematics 1358, 1988.

[Mum2] D. MUMFORD. *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 221. Springer, 1976.

[RM] J. ROJAS e R. MENDOZA. *Álgebra Linear e o problema das quatro retas do cálculo de Schubert.* Revista Matemática Universitária, n^o 45, 2008, pag 55-69.

[Rob] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.

[ZAK] F. L. Zak, *Determinants of projective varieties and their degrees*, in *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, Proc. Conference "Interesting algebraic varieties arising in algebraic transformation group theory", Enc. Math. Sci. 132, Springer Verlag, Berlim, 2004, pag 207-238.