

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Cálculo das Retas numa Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$

Geraldo de Assis Junior

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Cálculo das Retas numa Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$

por

Geraldo de Assis Junior.

sob orientação de

Prof^a. Dra Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Fevereiro de 2011
João Pessoa-PB

A848c Assis Junior, Geraldo de.
Cálculo das retas numa superfície cúbica em P^3 / Geraldo de Assis Junior. -- João
Pessoa : [s.n.], 2011.
55 f. il.
Orientadora: Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.
1. Matemática. 2. Superfície Cúbica. 3. Contagem das Retas. 4. Espaço Projetivo.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Cálculo das Retas numa Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$

por

Geraldo de Assis Junior

Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática da UFPB como requisito para a
obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof^a. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia - UFPB (Orientadora)

Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo - UFPE

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB

Agradecimentos

À UFPB por ter me acolhido no programa de pós-graduação em matemática.

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo em todos momentos da minha vida possibilitando a concretização deste sonho.

Às minhas irmãs, Selma, Gelly e Lili, pelo carinho e por todos os momentos de alegria que revigoravam minhas energias na luta pelo objetivo final.

À minha orientadora Jacqueline Rojas, pela paciência, confiança e motivação sem os quais não teria realizado este trabalho.

Aos professores Jacqueline, Andrade, Everaldo, Lisandro e Fagner não só pelo conhecimento adquirido mas também pelo exemplo de bons profissionais.

Aos professores Roberto Bedregal e André Luiz, por terem aceitado participar da banca.

Aos meus grandes amigos Claudemir, Pryscilla, Maikon e Viviane, pelos momentos de estudo e também de descontração.

Resumo

Neste trabalho estudamos as superfícies cúbicas em $\mathbb{P}^3$. Mais precisamente, nos preocupamos em contabilizar o número de retas sobre estas superfícies. No capítulo um provamos o conhecido resultado que afirma que o número de retas sobre uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ é 27. No capítulo dois, como motivação para o capítulo três, é abordada a classificação das singularidades de curvas planas. Para o caso singular, abordado no capítulo três, utilizamos dois algoritmos para contar as retas. O primeiro consiste em dividir as retas em seis pacotes, que na verdade são os abertos que cobrem a grassmanniana $G(2, 4)$, e em cada pacote contamos as retas que estão sobre a superfície dada. O segundo algoritmo consiste em dividir as retas sobre S em dois pacotes: O pacote das retas que passam por P e o pacote das retas que não passam por P , sendo P uma singularidade isolada da superfície em questão.

Palavras-chave: Superfície cúbica, contagem das retas, espaço projetivo.

Abstract

In this work we study cubic surfaces in $\mathbb{P}^3$. More specifically, we take care to count the number of lines on these surfaces. In chapter one we proved that the number of lines on a non-singular cubic surface in $\mathbb{P}^3$ is 27. In chapter two, as the motivation for chapter three, we focused in the classification of singularities of plane curves. For the singular case, discussed in chapter three, we used two algorithm to compute the number of lines. The first one consists in to divide the computation in six packages, which are actually the open set of the grassmannian $G(2, 4)$, and in each open set we count the lines contained on the given surface. The second algorithm consists of dividing the lines on S in two packages: The package of lines passing through P and those lines that not passing through P but they are contained in a plane that contain some line passing through P , here P is an isolated singularity of the given surface.

Key Words: Surface cubic, computation of lines, projective space.

Sumário

1	Contagem das 27 Retas numa Superfície Cúbica Regular em $\mathbb{P}^3$	1
1.1	Um Problema de Existência	1
1.2	Determinação das 27 Retas de uma Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$	2
2	Classificação das Singularidades Isoladas Segundo Arnold (1937-2010)	5
2.1	Séries de Potência	5
2.2	Classificação das Singularidades das Cúbicas Planas	7
3	Contagem das Retas numa Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$	10
3.1	Caso 1: Posto de f_2 é zero	12
3.2	Caso 2: Posto de f_2 é igual a 1	13
3.3	Caso 3: Posto de $f_2 \geq 2$	22
A	Resultados Preliminares	34
B	Classificação Projetiva das Cúbicas em $\mathbb{P}^2$	45

Introdução

Pode-se dizer que o estudo do problema de determinar o número de retas sobre uma superfície projetiva nasceu de discussões entre Arthur Cayley e George Salmon. Cayley provou que uma superfície cúbica geral contém um número finito de retas, mas coube a Salmon provar que este número é justamente 27. O ponto chave para demonstrar que o número de retas sobre uma superfície cúbica regular $S \subset \mathbb{P}^3$ é 27 consiste em verificar que S contém pelo menos uma reta. Feito isso, usamos um resultado que diz que dada uma reta l sobre uma cúbica regular S existem exatamente 5 planos distintos contendo l cuja interseção com S é igual a união de três retas. Usando este resultado sucessivamente obtemos 27 retas. O problema agora consiste em provar que estas 27 retas são duas a duas distintas e que não há mais retas sobre S diferentes das já determinadas.

De fato, se denotarmos por $F_k(X)$ a variedade de Fano formada pelos k -planos em $\mathbb{P}^n$ contidos na subvariedade $X \subset \mathbb{P}^n$. No caso em que $k = 1$ e X é uma superfície cúbica, então $F_1(X)$ consiste de todas as retas contidas em S , como mencionado anteriormente se S for não singular $F_1(X)$ tem dimensão zero e grau 27. Por outro lado, como veremos no capítulo três deste trabalho, se tirarmos a condição de S ser não singular, nos depararemos, caso $F_1(X)$ seja de dimensão zero, que o cardinal de $F_1(X)$ varia entre 1 e 21. Já no caso de superfícies de grau $d > 3$ em $\mathbb{P}^3$ verifica-se que pode não conter retas.

Voltando ao estudo de $F_1(S)$ sendo S uma superfície cúbica singular faz-se necessário classificar as singularidades. Considere por exemplo a curva afim $f(x, y) = 0$. Se $P = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ for um ponto regular o Teorema da Função Implícita nos diz que esta curva é o gráfico de uma função analítica de uma variável em uma vizinhança de P . Se P é um ponto singular o problema se complica um pouco mais. Por exemplo, a curva irreduzível $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ (lemniscata) possui uma singularidade na origem $(0, 0)$. Não podemos usar o Teorema da Função Implícita mas podemos utilizar o Diagrama de Newton para obter uma equação local da curva, o que nos dá $(x + y)(x - y) = 0$. Assim para reconhecer algebricamente a redutibilidade local de uma curva singular iremos recorrer à extensão $\mathbb{C}[[x, y]]$ de $\mathbb{C}[x, y]$. Assim dizemos que duas hipersuperfícies definidas pelos polinômios $f, g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ que têm singularidade isolada na origem são equivalentes se existir um isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\varphi : \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]] \rightarrow \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]]$ tal que $\varphi(f) = g$. Com esta relação de equivalência Arnould classificou as singularidades de hipersuperfícies nas seguintes formas normais

$$A_n \quad z_1^{n+1} + \sum_2^r z_i^2 \quad (n \geq 1)$$

$$E_7 \quad z_1^3 + z_1 z_2^3 + \sum_3^r z_i^2$$

$$D_n \quad z_1^{n-1} + z_1 z_2^2 + \sum_3^r z_i^2 \quad (n \geq 4)$$

$$E_8 \quad z_1^3 + z_2^5 + \sum_3^r z_i^2$$

$$E_6 \quad z_1^3 + z_2^4 + \sum_3^r z_i^2$$

$$\widehat{E}_6 : z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3\lambda z_1 z_2 z_3 + \sum_4^r z_i^2, \quad \lambda^3 \neq -1$$

Feita esta classificação podemos calcular as retas sobre uma superfície cúbica irreduzível singular que possui apenas pontos isolados. Usamos neste texto dois algoritmos para obter tais retas. O primeiro consiste em dividir o conjunto de todas as retas nos seis abertos que cobrem a grassmanniana $G(2, 4)$. Cada aberto determinará um sistema de equações cujo número de soluções será igual ao número de retas deste aberto contidas em S . Para usar o segundo algoritmo considere $S = Z(F)$, com $F = x_3 f_2 + f_3$ e $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(S)$. O método consiste em calcular as retas sobre S em duas etapas. Retas que passam por P e retas que não passam por P . As retas que passam por P estão em bijeção com $f_2 \cap f_3 \subset \mathbb{P}^2$ se $f_2 \neq 0$ (Ver figura 3.1) e as retas que não passam por P estão contidas em algum plano que contem alguma reta que passa por P .

Capítulo 1

Contagem das 27 Retas numa Superfície Cúbica Regular em $\mathbb{P}^3$

Neste capítulo $S \subset \mathbb{P}^3$ denotará uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$. Nosso objetivo é mostrar que uma superfície cúbica não singular $S \subset \mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas.

Denotemos por $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ o anel dos polinômios nas variáveis $x_0, \dots, x_3$ a coeficientes em $\mathbb{C}$. Para cada $d \geq 0$ inteiro seja R_d o subespaço vetorial de R formado pelos polinômios homogêneos de grau d . Lembremos que $\dim R_d = \binom{3+d}{3}$. A seguir mostremos que a cúbica de Fermat $S = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F = x_0^3 + \dots + x_3^3$ contém exatamente 27 retas.

Exemplo 1.1 *Considere o polinômio $F = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. A superfície cúbica $Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas.*

Tendo em consideração que uma reta $l = Z(f, g)$ está contida em $Z(F)$ se, e somente se, $F = \alpha f + \beta g$ para algum $\alpha, \beta \in R_2$. E usando o fato que $x_i^3 + x_j^3 = (x_i + \alpha_1 x_j)(x_i + \alpha_2 x_j)(x_i + \alpha_3 x_j)$ onde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ são as raízes cúbicas da unidade, concluímos que $S = Z(F)$ contém 27 retas. Por outro lado, uma verificação local, usando os abertos básicos U_{ij} da grassmanniana de retas (Ver apêndice A) nos permite concluir que S contém exatamente 27 retas.

1.1 Um Problema de Existência

A seguir demonstraremos o importante fato de que toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta, este fato será o ponto de partida para demonstrarmos que o número de retas sobre uma cúbica não singular $S \subset \mathbb{P}^3$ é exatamente 27.

Teorema 1.1 *Toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém ao menos uma reta.*

Demonstração:

Considere a variedade projetiva $\Gamma = \{(l, [F]) \in G(2, 4) \times \mathbb{P}(R_3) \mid l \subset Z(F)\} \subset \mathbb{P}^{119}$ e as projeções $p_1 : \Gamma \rightarrow G(2, 4)$ e $p_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}(R_3)$. Note que p_1 é sobrejetiva. Se p_2 for sobrejetiva, então temos o resultado que buscamos. Assim, vamos supor por absurdo que $p_2(\Gamma) \subsetneq \mathbb{P}(R_3)$.

Sejam $L_1, L_2 \in R_1$ linearmente independentes e $l = Z(L_1, L_2) \subset \mathbb{P}^3$ uma reta, é fácil ver que o conjunto $V_l = \{F \in R_3 \mid F = AL_1 + BL_2, \text{ com } A, B \in R_2\}$ é um subespaço

vetorial de R_3 . Nosso objetivo agora é calcular a dimensão de V_l . Considere a aplicação linear sobrejetiva $\psi : R_2 \times R_2 \longrightarrow V_l$ dada por $(A, B) \longmapsto AL_1 + BL_2$, temos que $\text{Ker}(\psi) \cong R_1$. Com efeito, se $(A, B) \in \text{Ker}\psi$, então $AL_1 + BL_2 = 0$. Logo existe $A_1 \in R_1$ tal que $A = A_1L_2$ e $B = -A_1L_1$. Assim $\text{Ker}(\psi) = \{(A_1L_2, -A_1L_1) \mid A_1 \in R_1\} \cong R_1$. Logo pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que $\dim(R_2 \times R_2) = \dim R_1 + \dim V_l$, e portanto $\dim V_l = 16$.

Agora seja $l = Z(L_1, L_2)$, então $p_1^{-1}(l) = \{(l, [F]) \mid l \subset Z(F)\} = \{l\} \times \mathbb{P}(V_l) \equiv \mathbb{P}(V_l) \equiv \mathbb{P}^{15}$. Logo $\dim p_1^{-1}(l) = 15$. Aplicando o Teorema da Dimensão das Fibras ao morfismo $p_1 : \Gamma \longrightarrow G(2, 4)$, temos que $\dim \Gamma - \dim G(2, 4) = \dim p_1^{-1}(l)$, para toda l num aberto não vazio de $G(2, 4)$. Pela proposição A.6 temos que $\dim G(2, 4) = 4$. Logo $\dim \Gamma = 19$. Agora seja $\Gamma_1 = p_2(\Gamma)$, temos da proposição A.4 que $\dim(\Gamma_1) < 19$. Seja $[F] \in \Gamma_1$. Pelo Teorema da Dimensão das Fibras $\dim p_2^{-1}([F]) \geq \dim \Gamma - \dim \Gamma_1 > 0$. Logo $\dim p_2^{-1}([F]) \geq 1$, o que implica que $p_2^{-1}([F])$ é um conjunto infinito. Concluimos assim que, sendo $S \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular, ou S contém infinitas retas ou não contém retas, o que é uma contradição, pois como vimos no exemplo 1.1 a superfície $Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \subset \mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas. Portanto p_2 é sobrejetiva. ■

1.2 Determinação das 27 Retas de uma Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$

A seguir enunciaremos três lemas cujas demonstrações podem ser encontradas em [7] ou nas proposições 4.0.2 e 4.0.3 em [1].

Lema 1.1 *Sejam $S \subsetneq \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular e $H \subset \mathbb{P}^3$ um plano, existem três possibilidades para a curva $H \cap S$, a saber: Uma curva cúbica irredutível, a união de uma cônica irredutível com uma reta ou três retas distintas.*

Lema 1.2 *Seja $p \in S$ e l_1, l_2 e l_3 retas distintas em S tais que $p \in l_1 \cap l_2 \cap l_3$. Então l_1, l_2 e l_3 são coplanares.*

Lema 1.3 *Dada uma reta $l \subset S$ existem exatamente cinco planos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ e π_5 contendo l tais que $\pi_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$, onde l, l_i e l'_i são três retas distintas.*

Afirmção 1.1 *Considere as retas $l, l_1, l'_1, \dots, l_5, l'_5$ como no lema 1.3. Então $l_i \cap l_j = l_i \cap l'_j = l'_i \cap l'_j = \emptyset$.*

Demonstração: Provaremos apenas que $l_i \cap l_j = \emptyset$. Os demais casos são análogos. Assim, suponha que exista $p \in l_i \cap l_j$, podemos considerar duas possibilidades.

1. $p \in l$. Neste caso segue do lema 1.2 que l, l_i e l_j são coplanares. Logo $\pi_i = \pi_j$.
2. $p \notin l$. Se $p \notin l$, então existe um único plano que contém l e p . Ora, mas π_i, π_j contém l e p . Logo $\pi_i = \pi_j$.

■

Proposição 1.1 *S contém pelo menos 27 retas distintas.*

Demonstração: O teorema 1.1 garante a existência de uma reta l em S . Aplicando o lema 1.3 à reta l obtemos 5 planos $\pi_1, \dots, \pi_5$ e 10 retas $l_1, l'_1, \dots, l_5, l'_5$ tais que $\pi_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$, como mostra a tabela 1.1. Aplicando o lema 1.3 à reta l_1 obtemos mais 8 retas em S , $m_2, m'_2, \dots, m'_5$, conforme mostra a tabela 1.2. Aplicando o lema 1.3 uma última vez, mas agora sobre a reta l'_1 , obtemos mais 8 retas em S , $k_2, k'_2, \dots, k'_5$, como se vê na tabela 1.3.

Tabela 1.1: Planos contendo l cuja interseção com S consiste de três retas distintas.

planos	retas
π_1	l, l_1 e l'_1
π_2	l, l_2 e l'_2
π_3	l, l_3 e l'_3
π_4	l, l_4 e l'_4
π_5	l, l_5 e l'_5

Tabela 1.2: Planos contendo l_1 cuja interseção com S consiste de três retas distintas.

planos	retas
π_1	l, l_1 e l'_1
π'_2	m_2, l_1 e m'_2
π'_3	m_3, l_1 e m'_3
π'_4	m_4, l_1 e m'_4
π'_5	m_5, l_1 e m'_5

Tabela 1.3: Planos contendo l'_1 cuja interseção com S consiste de três retas distintas.

planos	retas
π_1	l, l_1 e l'_1
π''_2	k_2, k'_2 e l'_1
π''_3	k_3, k'_3 e l'_1
π''_4	k_4, k'_4 e l'_1
π''_5	k_5, k'_5 e l'_1

Observe que as retas de cada tabela são duas a duas distintas. Para ver que nenhuma das 8 retas $m_2, m'_2, \dots, m'_5$ coincide com alguma das 11 retas da tabela 1.1 suponha sem perda de generalidade que $m_i = l_j$ para algum $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ e para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ (Note que m_i já é diferente de l, l_1 e l'_1). Daí o plano π'_i contém as retas l_j e l_1 . Assim $l_j \cap l_1 \neq \emptyset$ com $j \neq 1$, o que contradiz a afirmação 1.1. De modo análogo concluímos que as retas $m_2, m'_2, \dots, m_5$ são diferentes de todas as retas da tabela 1.3. O mesmo raciocínio se estende para as retas $k_2, k'_2, \dots, k'_5$, de modo a concluirmos que as 27 retas do conjunto $\mathcal{L}_S = \{l, l_1, l'_1, \dots, m_2, m'_2, \dots, k_5, k'_5\}$ são duas a duas distintas. ■

Lema 1.4 *Seja $L \subset S$ uma reta tal que $L \cap l \neq \emptyset$ ou $L \cap l_1 \neq \emptyset$ ou $L \cap l'_1 \neq \emptyset$, então $L \in \mathcal{L}_S$.*

Demonstração: De fato, seja $L \subset S$ uma reta. Suponha sem perda de generalidade que $L \cap l \neq \emptyset$. Se $L = l$, então $L \in \mathcal{L}_S$ e se $L \cap l = \{p\}$, então as retas l e L determinam um único plano π que as contém. Pelo lema 1.1 a interseção $\pi \cap S$ pode representar no plano π , uma curva cúbica irredutível, a união de uma reta com uma cônica irredutível ou a união de três retas distintas. Se $\pi \cap S$ é uma curva cúbica irredutível α no plano π , então $L \subset \pi \cap S = \alpha$. Como $\dim L = \dim \alpha = 1$, então pela proposição A.4 temos que $L = \alpha$, o que é um absurdo. Se $\pi \cap S$ é a união de uma reta r com uma cônica α no plano π , então $L \subset \pi \cap S = r \cup \alpha$. Logo $L = (r \cap L) \cup (\alpha \cap L)$ e pela proposição A.3 temos que $L = r$. Analogamente, como $l \subset \pi \cap S$ temos que $l = r$. Logo $l = L$, o que é um absurdo. Portanto $\pi \cap S$ consiste de três retas distintas. Pelo lema 1.3 temos que $\pi = \pi_i$ para algum $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e portanto $L \in \{l_i, l'_i\} \subset \mathcal{L}_S$. ■

Lema 1.5 *Seja $L \subset S$ uma reta, então $L \cap l \neq \emptyset$ ou $L \cap l_1 \neq \emptyset$ ou $L \cap l'_1 \neq \emptyset$.*

Demonstração: Primeiramente observe que dois planos distintos em $\mathbb{P}^3$ sempre se interceptam determinando uma reta. Além disso dado um plano π e uma reta r em $\mathbb{P}^3$, temos pela proposição A.3 que $\pi \cap r \neq \emptyset$. Agora seja $L \subset S$ uma reta e seja π_1 o plano cuja interseção com S são as retas l, l_1 e l'_1 , temos que existe $p \in L \cap \pi_1$. Logo $p \in \pi_1 \cap S = l \cup l_1 \cup l'_1$, isto é, uma das interseções $L \cap l, L \cap l_1, L \cap l'_1$ é não vazia. ■

Teorema 1.2 *S contém exatamente 27 retas.*

Demonstração: A proposição 1.1 nos permitiu construir um conjunto com 27 retas distintas em S . Os lemas 1.4 e 1.5 garantem que qualquer reta em S pertence a este conjunto. Portanto uma superfície cúbica não singular S contém exatamente 27 retas. ■

Capítulo 2

Classificação das Singularidades Isoladas Segundo Arnold (1937-2010)

Neste capítulo iremos classificar as singularidades das curvas cúbicas planas como motivação para o próximo capítulo onde usaremos esta classificação para contabilizar as retas sobre uma superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$.

2.1 Séries de Potência

Seja K um corpo e sejam $z_1, \dots, z_r$ indeterminadas sobre K . Denotamos por $K[[z_1, \dots, z_r]]$, o conjunto das somas formais do tipo:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots,$$

onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i nas indeterminadas $z_1, \dots, z_r$.

Sejam $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ e $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$, definimos

$$f + g := \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i)$$

e

$$f \cdot g := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i P_j Q_{i-j}.$$

Prova-se que com essas operações $K[[z_1, \dots, z_r]]$ é um anel comutativo com unidade.

Além disso, um elemento $P = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ é invertível em $K[[z_1, \dots, z_r]]$ se, e somente se, P_0 é

invertível em K . Com efeito, seja $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$ o inverso de f , então $fg = 1$, e portanto

$$\begin{aligned} P_0 Q_0 &= 1 \\ P_0 Q_1 + P_1 Q_0 &= 0 \\ &\dots \\ P_0 Q_i + \dots + P_i Q_0 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Em particular, de $P_0 Q_0 = 1$, temos que P_0 é invertível. Reciprocamente, note que se P_0 é invertível, então as equações acima nos permite determinar sucessivamente $Q_0, Q_1, \dots$

de forma que $f.g = 1$, onde $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$.

Fixando $f_1, \dots, f_r \in \langle z_1, \dots, z_r \rangle$, é sempre possível determinar um homomorfismo de anéis $\varphi : K[[z_1, \dots, z_r]] \mapsto K[[z_1, \dots, z_r]]$ tal que $\varphi(z_i) = f_i$ e $\varphi(a) = a$, $\forall a \in K$. Este homomorfismo será um isomorfismo se, e somente se, as partes lineares de $f_1, \dots, f_r$ são linearmente independentes. (Veja proposição 8 pag. 13 em [3].)

Considere a seguinte relação em $K[[z_1, \dots, z_r]]$

$$f \sim g \iff \exists \varphi \text{ isomorfismo, tal que } \varphi(f) = g.$$

Note que esta é uma relação de equivalência. Com efeito,

- i Se φ é a identidade, então $\varphi(f) = f$ e portanto $f \sim f, \forall f$.
- ii Se $f \sim g$, então $\exists \varphi$ tal que $\varphi(f) = g$. Logo $\varphi^{-1}(g) = f$ e portanto $g \sim f$.
- iii Se $f \sim g$ e $g \sim h$, então $\exists \varphi_1, \varphi_2$ tais que $\varphi_1(f) = g$ e $\varphi_2(g) = h$. Logo $\varphi_2 \circ \varphi_1(f) = h$ e portanto $f \sim h$.

Considere uma hipersuperfície $Z(f) \subset \mathbb{A}^r$, e seja P uma singularidade isolada de $Z(f)$, a menos de uma mudança de coordenadas afim podemos considerar $P = (0, \dots, 0)$. Assim temos que f é equivalente a um dos seguintes polinômios, denominados formas normais:

$$\begin{aligned} A_n \quad & z_1^{n+1} + \sum_2^r z_i^2 \quad (n \geq 1) \\ D_n \quad & z_1^{n-1} + z_1 z_2^2 + \sum_3^r z_i^2 \quad (n \geq 4) \\ E_6 \quad & z_1^3 + z_2^4 + \sum_3^r z_i^2 \\ E_7 \quad & z_1^3 + z_1 z_2^3 + \sum_3^r z_i^2 \\ E_8 \quad & z_1^3 + z_2^5 + \sum_3^r z_i^2 \\ \widehat{E}_6 \quad & z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3\lambda z_1 z_2 z_3 + \sum_4^r z_i^2, \quad \lambda^3 \neq -1 \end{aligned}$$

Assim, se por exemplo f for equivalente a $z_1^{n+1} + \sum_2^r z_i^2$, então dizemos que a singularidade P é do tipo A_n . Esta classificação das singularidades isoladas de uma hipersuperfície é devida a Arnold. Para classificar uma singularidade $P \in C = Z(f)$ quando C é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^r$, consideramos um aberto do tipo $U_i = Z(x_i)^C$ de forma que $P \in C \cap U_i$. Assim tomando a identificação $C \cap U_i \xleftarrow{\phi} \tilde{C} = Z(\tilde{f}) \subset \mathbb{A}^r$, o tipo da singularidade $P \in C$ será definido como o tipo da singularidade de $\phi(P) \in \tilde{C}$.

Definição 2.1 *Sejam $d, w_1, \dots, w_r \in \mathbb{Z}$ e $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$, dizemos que f é um polinômio quase-homogêneo de tipo $(d; w_1, \dots, w_r)$ se, e somente se, todo monômio $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r}$ que aparece em f tem grau d relativo aos pesos $w_1, \dots, w_r$, onde*

$$\text{grau}(z^\alpha) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r.$$

Dizemos que $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ é quase-homogêneo se for quase-homogêneo de algum tipo.

Exemplo 2.1 *O polinômio $f = z_1^3 + z_2^2 + z_3^2 \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ é quase-homogêneo de tipo $(1; \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*

Definição 2.2 *Seja $f \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]]$, f é dita semiquasehomogênea de tipo $(d; w_1, \dots, w_r)$ se, e somente se,*

$$f = f_0 + f_1,$$

onde f_0 é um polinômio em $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ quase-homogêneo de tipo $(d; w_1, \dots, w_r)$ que possui uma singularidade isolada na origem e $\text{grau}(f_1) > \text{grau}(f_0)$, onde

$$\text{grau}(f_1) = \inf \{ \text{grau}(z^\alpha) \mid f_1 = \sum_{\alpha} c_{\alpha} z^{\alpha}, c_{\alpha} \neq 0 \}.$$

f_0 é dita parte principal da série de potência f .

Exemplo 2.2 *Considere $f = f_0 + f_1 \in \mathbb{C}[[z_1, z_2, z_3]]$, onde $f_0 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^3$ e $f_1 = z_1^4 + z_2^4 + z_3^5 + z_1^6 + z_2^6 + z_3^7 + \dots$. Note que f_0 é quase-homogêneo de tipo $(1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, a origem é seu único ponto singular e $\text{grau}(f_1) = 2 > 1 = \text{grau}(f_0)$. Logo f é semiquasehomogênea de tipo $(1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.*

Teorema 2.1 (Princípio do Reconhecimento) *Seja $f \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_r]]$ uma série de potência. Atribua pesos $w_1, \dots, w_r$ às variáveis $z_1, \dots, z_r$ de maneira que uma das formas normais $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, \hat{E}_6$ tenha grau 1. Se $f = f_0 + f_1$ é semiquasehomogênea de tipo $(1; w_1, \dots, w_r)$, então $f \sim f_0$ e f_0 é equivalente à respectiva forma normal de grau 1 na classificação de Arnold.*

Demonstração: Veja corolário pag. 245 em [5].

■

2.2 Classificação das Singularidades das Cúbicas Planas

Observemos inicialmente que uma cúbica plana projetiva não reduzida não possui singularidades isoladas. Assim a seguir trataremos com cúbicas projetivas planas reduzidas. No apêndice B provamos que uma curva cúbica plana projetiva reduzida é projetivamente equivalente a uma das seguintes: $x_0 x_1 x_2$, $x_0 x_1 (x_0 + x_1)$, $(x_0 x_2 - x_1^2) x_1$, $(x_0 x_2 - x_1^2) x_0$, $x_1^2 x_2 - x_0^3 - x_0^2 x_2$, $x_2 x_1^2 - x_0^3$.

Caso 1 $f = x_0x_1x_2$

Note que $P_1 = [0 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : 1 : 0]$ e $P_3 = [1 : 0 : 0]$ são pontos singulares de $C = Z(f)$. Vamos mostrar que estes são os únicos. Com efeito, seja $P = [a : b : c] \in Z(f)$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = bc$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = ac$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = ab$. Se P é diferente de P_1 , P_2 e P_3 , então pelo menos duas de suas entradas são não nulas. Logo pelo menos uma das derivadas acima é não nula. Portanto P não é um ponto singular.

Para classificar a singularidade no ponto $P = [0 : 0 : 1]$, considere o aberto afim $x_2 = 1$. Logo $\tilde{f} = x_0x_1$. Agora considerando o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{C}[[x_0, x_1]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[x_0, x_1]] \\ a & \longmapsto & a \\ x_0 & \longmapsto & x_0 + ix_1 \\ x_1 & \longmapsto & x_0 - ix_1 \end{array}$$

temos que $\tilde{f} \sim x_0^2 + x_1^2$. Portanto a singularidade $P = [0 : 0 : 1]$ é do tipo A_1 . Analogamente, escolhendo abertos convenientes, concluímos que as demais singularidades também são do tipo A_1 .

Caso 2 $f = x_0x_1(x_0 + x_1)$

Vamos provar que $P = [0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de $C = Z(f)$. Com efeito, seja $P = [a : b : c]$ outro ponto singular de C , então $f(P) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = 0$. Assim temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} ab(a+b) = 0 \\ a(2b+a) = 0 \\ b(2a+b) = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são $b = a = 0$. Portanto $P = [0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular. No aberto afim $x_2 = 1$, temos que $\tilde{f} = x_0x_1(x_0 + x_1)$. Para finalizar, considere o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0 + ix_1$, $x_1 \mapsto x_0 - ix_1$. Note que $\tilde{f} \sim 2(x_0^3 + x_0x_1^2) \sim x_0^3 + x_0x_1^2$. Logo a singularidade $P = [0 : 0 : 1] \in C$ é do tipo D_4 .

Caso 3 $f = (x_0x_2 - x_1^2)x_0$

Seja $P = [a : b : c]$ um ponto singular de $C = Z(f)$. Segue que $a = 0$ pois $\frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = a^2$, e $b = 0$ pois $\frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = 2ac - b^2 = -b^2$. Logo $P = [0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de $C = Z(f)$. Tomando o aberto afim $x_2 = 1$, temos que $\tilde{f} = x_0^2 - x_0x_1^2$. Considerando o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto u^2x_0^2 + x_1$, $x_1 \mapsto u\sqrt{2}x_1$, onde $u^4 = -1$, concluímos que $\tilde{f} \sim x_0^4 + x_1^2$. Portanto a singularidade $P = [0 : 0 : 1] \in C$ é do tipo A_3 .

Caso 4 $f = (x_0x_2 - x_1^2)x_1$

Neste caso os únicos pontos singulares de $C = Z(f)$ são $P_1 = [0 : 0 : 1]$ e $P_2 = [1 : 0 : 0]$. Com efeito, seja $P = [a : b : c]$ um ponto singular de C , temos que $\frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = 0$. Assim temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} bc & = & 0 \\ ac - 3b^2 & = & 0 \\ ab & = & 0 \end{cases}$$

que tem como solução $a = b = 0$ ou $b = c = 0$. Logo $P = [0 : 0 : 1]$ ou $P = [1 : 0 : 0]$. No aberto afim $x_2 = 1$, temos que $\tilde{f} = x_0x_1 - x_1^3$. Considere o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0 + ix_1, x_1 \mapsto x_0 - ix_1$

Note que $\tilde{f} \sim x_0^2 + x_1^2 - x_0^3 + 3ix_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 - ix_1^3$. Pondo peso $1/2$ em ambas variáveis x_0 e x_1 , temos que $x_0^2 + x_1^2$ têm grau 1 , e $-x_0^3 + 3ix_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 - ix_1^3$ tem grau maior que 1 . Assim, Pelo princípio do Reconhecimento, temos que $\tilde{f} \sim x_0^2 + x_1^2$. Logo $P_1 = [0 : 0 : 1] \in C$ é uma singularidade do tipo A_1 .

Analogamente, no aberto $x_0 = 1$ temos que $\tilde{f} = x_1x_2 - x_1^3$. Definindo o isomorfismo induzido por $x_1 \mapsto x_1 + ix_2$ e $x_2 \mapsto x_1 - ix_2$ concluímos que $\tilde{f} \sim x_1^2 + x_2^2 - x_1^3 + 3ix_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 - ix_2^3$. Pondo novamente peso $1/2$ em ambas variáveis x_1 e x_2 e usando o Princípio do Reconhecimento concluímos que $\tilde{f} \sim x_1^2 + x_2^2$. Portanto $P_2 = [1 : 0 : 0] \in C$ também é uma singularidade do tipo A_1 .

Caso 5 $f = x_1^2x_2 - x_0^3 - x_0^2x_2$

Do lema B.7 concluímos que f possui exatamente um ponto singular, a saber, $P = [0 : 0 : 1]$. Tomando o aberto afim $x_2 = 1$, segue que $\tilde{f} = x_1^2 - x_0^3 - x_0^2$. Considere o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto ix_0$ e $x_1 \mapsto x_1$. Segue que $\tilde{f} \sim x_0^2 + x_1^2 - ix_0^3$. Pondo peso $1/2$ em ambas as variáveis, segue do Princípio do Reconhecimento que $\tilde{f} \sim x_0^2 + x_1^2$. Logo a singularidade $P \in C$ é do tipo A_1 .

Caso 6 $f = x_2x_1^2 - x_0^3$

Novamente temos que $P = [0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular da curva. Tomando o aberto afim $x_2 = 1$, segue que $\tilde{f} = x_1^2 - x_0^3$. Considere agora o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto -x_0$ e $x_1 \mapsto x_1$, segue que $\tilde{f} \sim x_0^3 + x_1^2$. Logo P é uma singularidade do tipo A_2 .

Capítulo 3

Contagem das Retas numa Superfície Cúbica em $\mathbb{P}^3$

Neste capítulo sejam $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e $R_i \subset R$ o subespaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau i . Considere $F \in R_3$ não nulo e $S = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$. Observe que se S for uma superfície não reduzida, isto é, F é um polinômio que não é livre de quadrados, então $F = L^3$ ou $F = L^2M$ com L, M L.I. em R_1 . Portanto S contém infinitas retas.

Agora, se S for uma superfície reduzida e redutível necessariamente $F = LQ$ ou $F = LM_1M_2$ com L, M_1, M_2 L.I. em R_1 e $Q \in R_2$ irredutível. Assim, neste caso também contém infinitas retas.

Assim, daqui em diante assumiremos que S é irredutível e reduzida, o que nos leva a analisar duas possibilidades, a saber: S é não singular ou S é singular. Se S é não singular então S contém exatamente 27 retas (Ver capítulo 1). Se S for singular então temos a seguinte descrição para as singularidades, $Sing(S) \subset S$, de S .

Teorema 3.1 *Seja $S = Z(F)$ uma superfície cúbica irredutível reduzida e singular em $\mathbb{P}^3$. Então $\dim Sing(S) = 0$, ou seja, S só possui singularidades isoladas ou $Sing(S)$ é uma reta em $\mathbb{P}^3$.*

Demonstração: Como $Sing(S)$ é uma subvariedade contida estritamente em S e $\dim(S) = 2$, temos que $\dim Sing(S) \leq 1$. Se $\dim Sing(S) = 0$, então naturalmente S só possui singularidades isoladas. Assim, nos resta mostrar que se $\dim Sing(S) = 1$, então $Sing(S)$ é uma reta. Com efeito, seja $(\mathbb{P}^3)^* = \{H \subset \mathbb{P}^3 \mid H \text{ é um plano}\}$ o dual de $\mathbb{P}^3$, o Teorema de Bertini (1846 - 1933) garante que existe um aberto não vazio U de $(\mathbb{P}^3)^*$ tal que $H \cap S$ é irredutível para todo $H \in U$. Seja C uma componente irredutível de dimensão 1 de $Sing(S)$. Seja d o grau da curva C . Sabemos que existe um aberto não vazio V em $(\mathbb{P}^3)^*$ tal que $H \cap C$ consiste de exatamente d pontos distintos para todo $H \in V$. Além disso, prova-se que cada ponto de $H \cap C$ é um ponto singular da curva $H \cap S$. Por outro lado, se escolhermos $H \in U$, então $H \cap S$ é uma cúbica irredutível, logo admite no máximo um ponto singular. Escolhendo $H \in U \cap V$, concluímos que C é uma curva de grau $d = 1$, e portanto é uma reta.

Concluímos até aqui que toda componente irredutível de dimensão 1 de $Sing(S)$ é uma reta. Agora suponha que existam retas distintas l_1, l_2 tais que $l_1 \cup l_2 \subset Sing(S)$. Neste caso existe um aberto V_1 de $(\mathbb{P}^3)^*$ tal que $H \cap (l_1 \cup l_2)$ consiste de 2 pontos distintos. Escolhendo $H \in U \cap V_1$ concluímos que a curva irredutível $H \cap S$ possui dois pontos singulares, o que é um absurdo.

Para finalizar, suponha que existam l reta e $P \notin l$ tais que $l \cup \{P\} \subset \text{Sing}(S)$. Por uma mudança de coordenadas podemos considerar $l = Z(x_2, x_3)$ e $P = [0 : 0 : 0 : 1]$. De $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ temos que $F = x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2)$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos que $f_3(\alpha, \beta, 0) = F(\alpha, \beta, 0, 0) = 0$. Logo $Z(x_2) \subset Z(f_3)$ em $\mathbb{P}^2$, e portanto existe $h \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tal que $f_3 = hx_2$. Por outro lado, $f_2(\alpha, \beta, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_3}(\alpha, \beta, 0, 0) = 0$. Logo $Z(x_2) \subset Z(f_2)$ em $\mathbb{P}^2$, e portanto existe $\tilde{h} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tal que $f_2 = \tilde{h}x_2$. Logo $F = x_2(x_3\tilde{h} + h)$, o que é um absurdo. ■

O conjunto dos pontos singulares de $S = Z(F)$ é uma reta em $\mathbb{P}^3$

Proposição 3.1 *Seja $S = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica irredutível e reduzida tal que $\text{Sing}(S) = Z(x_0, x_1) \subset \mathbb{P}^3$. Então*

1. $F = x_3 f_2(x_0, x_1) + x_2 g_2(x_0, x_1) + g_3(x_0, x_1)$ para algum $f_2, g_2, g_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneos de grau 2 e 3 conforme os índices.

2. S contém infinitas retas.

Demonstração: Como $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(S)$, então podemos escrever $F = x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2)$ com f_i homogêneo de grau $i = 2, 3$ e $f_3 \neq 0$. Por sua vez, podemos ainda escrever $f_2 = \alpha_0 x_2^2 + x_2 \alpha_1(x_0, x_1) + \alpha_2(x_0, x_1)$ e $f_3 = \beta_0 x_2^3 + \beta_1(x_0, x_1) x_2^2 + \beta_2(x_0, x_1) x_2 + \beta_3(x_0, x_1)$ com $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ homogêneos de graus 1, 2 e 3 conforme o índice e α_0, β_0 constantes.

Sejam $Q = [0 : 0 : 1 : 0]$, $Q_1 = [0 : 0 : 1 : 1] \in \text{Sing}(S)$, temos que $\frac{\partial F}{\partial x_3}(Q) = \alpha_0 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = 3\beta_0 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(Q) = \frac{\partial \beta_1}{\partial x_i}$ para $i = 0, 1$ donde concluímos que $\beta_1 = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x_i}(Q_1) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i}$ para $i = 0, 1$ donde concluímos que $\alpha_1 = 0$. Portanto $F = x_3 \alpha_2(x_0, x_1) + x_2 \beta_2(x_0, x_1) + \beta_3(x_0, x_1)$, e assim provamos 1. Agora se $\alpha_2 = 0$ ou $\beta_2 = 0$, então S é um cone. Logo contém infinitas retas como veremos no caso 1 na subseção 3.1. No caso $\alpha_2 \beta_2 \neq 0$, considere para cada $\mu \in \mathbb{C}$ o plano $H_\mu = Z(x_0 - \mu x_1)$. A interseção $H_\mu \cap S$ é definida pelo polinômio $F(\mu x_1, x_1, x_2, x_3) = x_1^2 [\alpha_2(\mu, 1)x_3 + \beta_2(\mu, 1)x_2 + \beta_3(\mu, 1)x_1]$. Assim determinamos uma família infinita de retas $l_\mu = Z(x_0 - \mu x_1, \alpha_2(\mu, 1)x_3 + \beta_2(\mu, 1)x_2 + \beta_3(\mu, 1)x_1)$ contidas em S . ■

A conclusão do caso geral segue da utilização de uma mudança de coordenadas projetiva $\mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T}(\text{Sing}(S)) = Z(x_0, x_1)$.

A superfície $S = Z(F)$ só possui singularidades isoladas

Após fazer uma mudança de coordenada projetiva, se necessário, podemos assumir que $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(S)$. Assim com um cálculo análogo ao que fizemos no lema B.7 podemos concluir que

$$F = x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2), \quad (3.1)$$

onde f_i é homogêneo de grau $i = 2, 3$ e $f_3 \neq 0$.

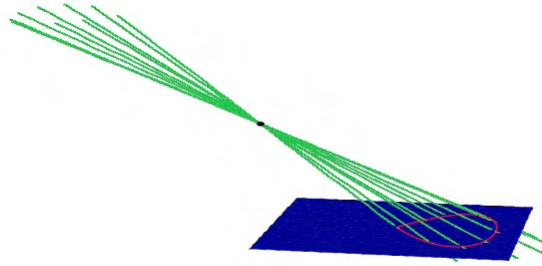
Definimos o posto da forma quadrática f_2 como sendo o posto da matriz hessiana associada a f_2 . A seguir faremos a classificação das superfícies cúbicas irredutíveis reduzidas e singulares estudando o posto de f_2 . Para contabilizar as retas sobre a superfície utilizaremos dois algoritmos. O primeiro consiste em dividir as retas em seis pacotes,

que na verdade são os abertos que cobrem a grassmanniana $G(2,4)$, e em cada pacote contamos as retas que estão sobre a superfície dada. Usaremos este algoritmo no caso em que o posto de f_2 é igual a 1. O segundo algoritmo consiste em dividir as retas sobre S em dois pacotes: O pacote das retas que passam por P e o pacote das retas que não passam por P . Para contabilizar as retas que passam por P usamos a proposição 3.5 que afirma que estas estão em bijeção com $Z(f_2) \cap Z(f_3) \subset \mathbb{P}^2$ se $f_2 \neq 0$. Para contabilizar as retas que não passam por P usamos a proposição 3.6 que afirma que estas estão contidas em planos determinados pelas retas que contém P .

3.1 Caso 1: Posto de f_2 é zero

Neste caso $f_2 = 0$ e portanto $F = f_3(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Assim S é um cone. Observe que

$$S = Z(F) = \bigcup_{Q \in S \cap Z(x_3)} l_{P,Q},$$



onde $l_{P,Q} \subset \mathbb{P}^3$ denota a única reta em $\mathbb{P}^3$ passando por $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ e $Q \in S \cap Z(x_3)$. Logo S contém infinitas retas. Além disso $Sing(S)$ depende das singularidades da curva $C = S \cap Z(x_3)$. De fato,

Teorema 3.2 *Seja $S = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F = f_3(x_0, x_1, x_2)$ uma superfície cúbica irreduzível reduzida. Então*

$$Sing(S) = \begin{cases} \{P\}, & \text{se } Sing(C) = \emptyset \\ l_{P,Q}, & \text{se } Sing(C) = \{Q\}. \end{cases}$$

Demonstração:

Assuma que $C = Z(f_3) \subset \mathbb{P}^2$ é não singular. Seja $R = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ um ponto singular de $Z(F) \subset \mathbb{P}^3$. Então

$$f_3(a, b, c) = \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(a, b, c) = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, então $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ é um ponto singular de C , o que está proibido por hipótese. Logo $R = P$ e portanto $Sing(S) = \{P\}$.

Reciprocamente, assuma que C é singular. Como f_3 é irreduzível segue do lema B.7 que C admite um único ponto singular. Seja $R = [a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ o ponto singular de C

e seja $Q = [a : b : c : 0] \in \mathbb{P}^3$, afirmamos que $\text{Sing}(S) = l_{P,Q}$. Com efeito, se $P_1 \in l_{P,Q}$, então $P_1 = [sa : sb : sc : t]$ para algum $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Logo

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_i}(P_1) = \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(sa, sb, sc) = s^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(a, b, c) = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2.$$

Logo $P_1 \in \text{Sing}(S)$. Portanto, segue-se do teorema 3.1 que $\text{sing}(S) = l_{P,Q}$. $\blacksquare$

Se S admite P como singularidade isolada, então P é uma singularidade isolada do tipo $\widehat{E}_6$, conforme mostra o próximo teorema.

Teorema 3.3 *Seja $S = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F = f_3(x_0, x_1, x_2)$ uma superfície cúbica irredutível reduzida singular. Se $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular em S , então existe uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T_\bullet x_3 = x_3$ e $T_\bullet F = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2$, $\lambda \neq -1$ e portanto P é um ponto singular do tipo $\widehat{E}_6$. Caso contrário, existe $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ mudança de coordenadas projetivas tal que $T_\bullet x_3 = x_3$ e*

$$T_\bullet F = \begin{cases} x_2(x_1^2 - x_0^2) - x_0^3 \\ \text{ou} \\ x_2x_1^2 - x_0^3. \end{cases}$$

Demonstração: Se $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de $S \subset \mathbb{P}^3$, então a curva $Z(f_3)$ é não singular. Assim pelo lema B.8 existe uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $T_\bullet f_3 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2$. Note que $\{T_\bullet x_0, T_\bullet x_1, T_\bullet x_2, x_3\} \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_1$ é linearmente independente. Daí podemos definir o isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\tilde{T}_\bullet : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ pondo $\tilde{T}_\bullet x_3 = x_3$ e $\tilde{T}_\bullet x_i = T_\bullet x_i$, $i = 0, 1, 2$. Desta forma obtemos uma mudança de coordenadas $\tilde{\mathbb{T}} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\tilde{T}_\bullet F = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2$ e $\tilde{T}_\bullet x_3 = x_3$.

Se $\text{Sing}(S) = l_{P,Q}$, então a curva $Z(f_3)$ é singular. Segue da proposição B.5 que existe uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que

$$T_\bullet f = \begin{cases} x_2(x_1^2 - x_0^2) - x_0^3 \\ \text{ou} \\ x_2x_1^2 - x_0^3. \end{cases}$$

Logo, definimos $\tilde{T}_\bullet : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ pondo $\tilde{T}_\bullet x_3 = x_3$ e $\tilde{T}_\bullet x_i = T_\bullet x_i$, $i = 0, 1, 2$. $\blacksquare$

3.2 Caso 2: Posto de f_2 é igual a 1

Seja $F = F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ como em (3.1). Se o posto de f_2 é igual a 1, então pelo teorema A.4 existe uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $T_\bullet f_2 = x_0^2$. Definamos $\tilde{T}_\bullet : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ pondo $\tilde{T}_\bullet x_3 = x_3$ e $\tilde{T}_\bullet x_i = T_\bullet x_i$ com $i = 0, 1, 2$. Segue que $\tilde{T}_\bullet F = x_3 x_0^2 + g_3(x_0, x_1, x_2)$, onde g é homogêneo de grau 3. Escrevendo $g_3(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 h_1(x_0, x_1, x_2) + x_0 h_2(x_1, x_2) + h_3(x_1, x_2)$ com h_i homogêneo de grau $i = 1, 2, 3$ temos que

$$\tilde{T}_\bullet F = (x_3 + h_1(x_0, x_1, x_2))x_0^2 + x_0 h_2(x_1, x_2) + h_3(x_1, x_2).$$

Considere a mudança de coordenadas $\mathbb{S} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $S_\bullet(x_3 + h_1(x_0, x_1, x_2)) = x_3$ e $S_\bullet x_i = x_i$, $i = 0, 1, 2$. Assim obtemos

$$G = x_3x_0^2 + x_0h_2(x_1, x_2) + h_3(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

Lema 3.1 *Seja G como em (3.2). Se $Z(h_3) \subset \mathbb{P}^1$ consiste de três pontos distintos, então $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de $S = Z(G) \subset \mathbb{P}^3$. Além disso P é um ponto singular do tipo D_4 .*

Demonstração:

Sendo $\sharp(Z(h_3)) = 3$ existem $L, L_1, L_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]_1$ formas lineares duas a duas L.I. tais que $h_3 = LL_1L_2$. Assim existem $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tais que $L = aL_1 + bL_2$. Considere a mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T_\bullet x_0 = x_0$, $T_\bullet x_3 = x_3$, $T_\bullet L_1 = \mu b(x_1 + ix_2)$, $T_\bullet L_2 = \mu a(x_1 - ix_2)$ onde $\mu^3 = \frac{1}{2a^2b^2}$. Segue que

$$T_\bullet G = x_3x_0^2 + x_0\tilde{h}_2(x_1, x_2) + x_1^3 + x_1x_2^2.$$

Assim podemos dizer que a menos de uma mudança de coordenadas

$$G = x_3x_0^2 + x_0\tilde{h}_2(x_1, x_2) + x_1^3 + x_1x_2^2.$$

Dado $R = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ temos que $\frac{\partial G}{\partial x_0}(R) = 2ad + \tilde{h}_2(b, c)$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(R) = a\frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x_1}(b, c) + 3b^2 + c^2$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}(R) = a\frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x_2}(b, c) + 2bc$ e $\frac{\partial G}{\partial x_3}(R) = a^2$.

Se $R \in \text{Sing}(S)$, então das equações acima concluímos que $a = b = c = 0$ e portanto $R = P$. Para verificar que P é um ponto singular do tipo D_4 . Note que no aberto afim $x_3 = 1$, obtemos

$$G = x_0^2 + x_0\tilde{h}_2(x_1, x_2) + x_1^3 + x_1x_2^2.$$

Atribuindo os pesos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ as variáveis x_0, x_1, x_2 respectivamente e usando o Princípio do Reconhecimento concluímos que $G \sim x_0^2 + x_1^3 + x_1x_2^2$. Logo P é um ponto singular de S do tipo D_4 . ■

Proposição 3.2 *Seja $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ como em (3.2). Suponha que $Z(h_3) \subset \mathbb{P}^1$ consiste de três pontos distintos. Logo $S = Z(G) \subset \mathbb{P}^3$ contem exatamente 6 retas.*

Demonstração: Para provar a proposição iremos calcular quantas das retas contidas em cada aberto U_{ij} de $G(2, 4)$ (Ver apêndice A) estão contidas em $S = Z(G)$, onde $G(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3x_0^2 + x_0(\alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2) + x_1^3 + x_2^3$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Considere o conjunto $U_{12} = \{[(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{12}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, t, sa + tc, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} b + \gamma a^2 + a^3 = 0 \\ d + \beta a + \gamma ac + 3a^2c = 0 \\ \alpha\beta c + \gamma c^2 + 3c^2a = 0 \\ 1 + c^3 = 0 \end{cases}$$

Note que a equação $1 + c^3 = 0$ admite exatamente 3 soluções distintas em $\mathbb{C}$, e para cada valor de c fixado as demais equações nos fornecem valores únicos para a, b e d . Logo existem exatamente três retas de U_{12} contidas em S .

Considere o conjunto $U_{13} = \{[(1, a, 0, b), (0, c, 1, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{13}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, sa + tc, t, sb + td) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} b + \alpha a^2 + a^3 = 0 \\ d + 2ac\alpha + \beta a + 3a^2c = 0 \\ \alpha c^2 + \beta c\gamma 3ac^2 = 0 \\ 1 + c^3 = 0 \end{cases}$$

Analogamente este sistema admite três soluções. Porém as retas aqui encontradas são as mesmas retas do caso anterior. Com efeito, seja $l = \mathbb{P}(W) \in U_{13}$ com $W = [(1, a, 0, b), (0, c, 1, d)]$ e $l \subset S$. Como $c \neq 0$, podemos escrever $W = [(1, 0, a', b'), (0, 1, c', d')]$ e portanto $l \in U_{12}$.

Considere o conjunto $U_{14} = \{[(1, a, b, 0), (0, c, d, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{14}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, sa + tc, sb + td, t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \alpha a^2 + ab\beta + \gamma b^2 + a^3 + b^3 = 0 \\ 1 + 2ac\alpha + \beta(ad + bc) + 2\gamma bd + 3a^2c + 3b^2d = 0 \\ \alpha c^2 + \beta cd + \gamma d^2 + 3ac^2 + 3bd^2 = 0 \\ c^3 + d^3 = 0 \end{cases}$$

Sabemos que cada solução (a, b, c, d) do sistema acima determina uma reta $l = \mathbb{P}(W) \in U_{14}$ com $W = [(1, a, b, 0), (0, c, d, 1)]$. Note que $l \in U_{12}$ se $c \neq 0$ e $l \in U_{13}$ se $d \neq 0$. Além disso, o sistema não admite solução para $c = d = 0$. Logo não existem retas em U_{14} contidas em S além das já encontradas em U_{12} e U_{13} .

Considere o conjunto $U_{23} = \{[(a, 1, 0, b), (c, 0, 1, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{23}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, s, t, sb + td) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} a^2b + \alpha a + 1 = 0 \\ a^2d + 2acb + \alpha c + \beta a = 0 \\ 2acd + c^2b + \beta c + \gamma a = 0 \\ c^2d + \gamma c + 1 = 0 \end{cases}$$

Novamente, o sistema não admite solução se $c = 0$. Logo não existe reta $l \in U_{23}$ contida em S além das já determinadas em U_{12} .

Considere o conjunto $U_{24} = \{[(a, 1, b, 0), (c, 0, d, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{24}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, s, sb + td, t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \alpha a + \beta ab + \gamma ab^2 + b^3 + 1 = 0 \\ \alpha c + a^2 + 3db^2 + \beta cb + \gamma cb^2 + 2\gamma adb = 0 \\ 3d^2b + 2ac + \beta cd + 2\gamma cdb + \gamma ad^2 = 0 \\ c^2 + d^3 + \gamma cd^2 = 0 \end{cases}$$

Se $c = 0$, então $d = a = 0$ e $b^3 = -1$. Assim obtemos mais três retas diferentes das já encontradas nos abertos anteriores. Se $c \neq 0$ recaímos no caso do aberto U_{12} .

Finalmente, considere o conjunto $U_{34} = \{[(a, b, 1, 0), (c, d, 0, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{34}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, sb + td, s, t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \gamma a + \beta ab + \alpha ab^2 + b^3 + 1 = 0 \\ a^2 + \gamma c + \alpha cb^2 + 2\alpha abd + 3db^2 + \beta cb + \beta ad = 0 \\ 2ac + 3d^2b + \beta cd + 2\alpha cdb + \alpha ad^2 = 0 \\ c^2 + \alpha cd^2 + d^3 = 0 \end{cases}$$

Se $c = 0$, então $d = a = 0$ e $b^3 = -1$. Assim obtemos as três retas já determinadas no aberto anterior. Se $c \neq 0$ recaímos no caso do aberto U_{13} . ■

Proposição 3.3 *Seja $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ como em (3.2) e $S = Z(G) \subset \mathbb{P}^3$. Se $Z(h_3) \subset \mathbb{P}^1$ consiste de dois pontos distintos, então a menos de uma mudança de coordenadas*

$$G = x_3x_0^2 + x_0\tilde{h}_2(x_1, x_2) + x_1^2x_2.$$

Além disso, se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, então $\text{Sing}(S) = \{P\}$ onde $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é uma singularidade isolada do tipo D_5 e S contém exatamente três retas. Se $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$, então $\text{Sing}(S) = Z(x_0, x_1)$. Logo S contém infinitas retas.

Demonstração: Como $\sharp(Z(h_3)) = 2$, existem L_1, L_2 formas lineares L.I. em $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ tais que $h_3(x_1, x_2) = L_1^2L_2$. Tomando a mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T_\bullet x_0 = x_0$, $T_\bullet x_3 = x_3$, $T_\bullet L_1 = x_1$, $T_\bullet L_2 = x_2$ obtemos $T_\bullet G = x_3x_0^2 + x_0\tilde{h}_2(x_1, x_2) + x_1^2x_2$, onde $\tilde{h}_2(x_1, x_2)$ é homogêneo de grau 2. Agora dividiremos o resto da prova em cinco partes.

1. $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de S se, e somente se, $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$.

Dado $R = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$, note que $\frac{\partial G}{\partial x_3}(R) = a^2$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}(R) = a\frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x_2}(b, c) + b^2$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(R) = a\frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x_1}(b, c) + 2bc$, $\frac{\partial G}{\partial x_0}(R) = 2ad + \tilde{h}_2(b, c)$. Segue que $R \in \text{Sing}(S)$ se, e somente se, $a = b = 0$ e $c^2\tilde{h}_2(0, 1) = 0$. Assim, se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$ então $c = 0$ e portanto P é o único ponto singular de S . Reciprocamente, se $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$, então para quaisquer valores de c, d temos que $R = [0 : 0 : c : d] \in \text{Sing}(S)$ e portanto P não é o único ponto singular de S .

2. Se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, então P é uma singularidade do tipo D_5 .

Considere $\tilde{h}_2(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, então $\gamma \neq 0$. No aberto afim $x_3 = 1$ obtemos $G = x_0^2 + x_0(\alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2) +$

$x_1^2 x_2$. Atribuindo os pesos $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ às variáveis x_0, x_1, x_2 respectivamente e usando o Princípio do Reconhecimento concluímos que $G \sim x_0^2 + x_1^2 x_2 + \gamma x_0 x_2^2$. Considere o isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\varphi : \mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]] \rightarrow \mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]]$ induzido por $x_0 \mapsto x_0 + x_2^2 i, x_1 \mapsto u_1 u_2 x_1, x_2 \mapsto v_1 v_2 x_2$ com $u_1^2 v_1 = 1, v_1^2 \gamma = 1, v_2^2 = -2i, u_2^2 v_2 = 1$. Segue que $G \sim x_0^2 + x_1^2 x_2 + x_2^4$ e portanto $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(S)$ é do tipo D_5 .

3. $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$ se, e somente se, $Z(x_0, x_1) = \text{Sing}(S)$.

Como vimos em 1. $R = [a : b : c : d]$ é singular se, e somente se, $a = b = c^2 \tilde{h}_2(0, 1) = 0$. Assim, pondo a condição $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$ temos que $R \in \text{Sing}(S)$ se, e somente se, $a = b = 0$. Segue que $\text{Sing}(S) = Z(x_0, x_1)$. Reciprocamente, se $\text{Sing}(S) = Z(x_0, x_1)$, então $R = [0 : 0 : 1 : 0]$ é um ponto singular de S . Logo satisfaz a condição $c^2 \tilde{h}_2(0, 1) = 0$. Como neste caso $c = 1$, temos que $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$.

4. Se $\text{Sing}(S) = \{P\}$, então S contém exatamente 3 retas.

Seja $\tilde{h}_2(x_1, x_2) = \alpha x_0^2 + \beta x_0 x_1 + \gamma x_1^2$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Se $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de S , então pelos itens 1 e 3 desta proposição concluímos que $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, e portanto $\gamma \neq 0$.

Considere o conjunto $U_{12} = \{[(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{12}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, t, sa + tc, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \gamma a^2 + b = 0 \\ d + 2\gamma ac + \beta a = 0 \\ \gamma c^2 + \alpha + \beta c + a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Note que o sistema acima admite somente uma solução, a saber $a = -\alpha, b = -\alpha^2 \gamma, c = 0, d = \alpha \beta$. Logo, apenas uma reta do aberto U_{12} está contida em S .

Considere o conjunto $U_{13} = \{[(1, a, 0, b), (0, c, 1, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{13}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, sa + tc, t, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \alpha a^2 + b = 0 \\ d + \beta a + 2\alpha ac + a^2 = 0 \\ \beta c + \alpha c^2 + \gamma + 2ac = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases}$$

As duas últimas equações deste sistema implicam em $\gamma = 0$, o que é um absurdo já que $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$. Logo, nenhuma reta do aberto U_{13} está contida em S .

Considere o conjunto $U_{14} = \{[(1, a, b, 0), (0, c, d, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{14}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, sa + tc, sb + td, t) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \gamma b^2 + \beta ab + \alpha a^2 + a^2 b = 0 \\ 1 + \beta bc + \beta ad + 2\alpha ac + 2\gamma bd + 2abc + a^2 d = 0 \\ \beta cd + \alpha c^2 + \gamma d^2 + c^2 b + 2acd = 0 \\ c^2 d = 0 \end{cases}$$

Seja $l = \mathbb{P}(W)$ com $W = [(1, a, b, 0), (0, c, d, 1)]$. Se $c \neq 0$ então $l \in U_{14} \cap U_{12}$, e se $d \neq 0$ então $l \in U_{14} \cap U_{13}$. Além disso, o sistema acima não admite solução para $c = d = 0$. Logo não existe retas em U_{14} contidas em S além da já determinada em U_{12} .

Considere o conjunto $U_{23} = \{[(a, 1, 0, b), (c, 0, 1, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{23}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, s, t, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} a^2 b + \alpha a = 0 \\ \beta a + 2abc + a^2 d + ac + 1 = 0 \\ bc^2 + 2acd + \beta c + \gamma a = 0 \\ c^2 d + \gamma c = 0 \end{cases}$$

Seja $l = \mathbb{P}(W)$ com $W = [(a, 1, 0, b), (c, 0, 1, d)]$. Se $c \neq 0$, então $l \in U_{23} \cap U_{12}$. Se $c = 0$, então o sistema não admite solução. Logo não existe reta em U_{23} além da já determinada em U_{12} .

Considere o conjunto $U_{24} = \{[(a, 1, b, 0), (c, 0, d, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{24}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, s, sb + td, t) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \beta ab + \gamma ab^2 + \alpha a + b = 0 \\ a^2 + \alpha c + \beta bc + \beta ad + d + \gamma b^2 c + 2\gamma abd = 0 \\ 2ac + \beta cd + 2\gamma bcd + \gamma ad^2 = 0 \\ \gamma cd^2 = 0 \end{cases}$$

Seja $l = \mathbb{P}(W)$ com $W = [(a, 1, b, 0), (c, 0, d, 1)]$. Se $c \neq 0$, então $l \in U_{24} \cap U_{12}$. Se $a \neq 0$, então $l \in U_{14} \cap U_{24}$. Se $a = c = 0$, então $b = d = 0$ e portanto obtemos a reta $l = \mathbb{P}([(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)])$. Note que esta reta é diferente daquela determinada em U_{12} .

Considere o conjunto $U_{34} = \{[(a, b, 1, 0), (c, d, 0, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{34}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, sb + td, s, t) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \alpha ab^2 + \gamma a + \beta ab + b^2 = 0 \\ a^2 + \alpha b^2 c + 2\alpha abd + \gamma c + 2bd + \beta bc + \beta ad = 0 \\ 2ac + 2\alpha bcd + \alpha ad^2 + \beta cd + d^2 = 0 \\ c^2 + \alpha cd^2 = 0 \end{cases}$$

Seja $l = \mathbb{P}(W)$ com $W = [(a, b, 1, 0), (c, d, 0, 1)]$. Se $a \neq 0$, então $l \in U_{14} \cap U_{34}$. Se $b \neq 0$, então $l \in U_{24} \cap U_{34}$. Se $c \neq 0$, então $l \in U_{13} \cap U_{34}$. Se $d \neq 0$, então $l \in U_{23} \cap U_{34}$. Sendo $a = b = c = d = 0$ uma solução do sistema obtemos $l = \mathbb{P}([(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)])$. Note que esta reta é diferente das duas anteriores. Assim, concluímos que S contém exatamente três retas.

5. Segue da proposição 3.1 que se $Sing(S) = Z(x_0, x_1)$, então S contém infinitas retas. ■

Proposição 3.4 *Seja $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ como em (3.2) e $S = Z(G) \subset \mathbb{P}^3$. Assuma que $Z(h_3) \subset \mathbb{P}^1$ consiste de um único ponto. Segue que, a menos de uma mudança de coordenadas,*

$$G = x_3 x_0^2 + x_0 \tilde{h}_2(x_1, x_2) + x_1^3.$$

Além disso, se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, então $Sing(S) = \{P\}$ onde $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é uma singularidade isolada do tipo E_6 e $Z(x_0, x_1)$ é a única reta contida em S . Se $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$, então $Sing(S) = Z(x_0, x_1)$. Logo S contém infinitas retas.

Demonstração:

A demonstração será dividida em cinco partes.

1. $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de S se, e somente se, $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$.

Dado $R = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$, note que $\frac{\partial G}{\partial x_3}(R) = a^2$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}(R) = a \frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x_2}(b, c)$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(R) = a \frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial x_1}(b, c) + 3b^2$, $\frac{\partial G}{\partial x_0}(R) = 2ad + \tilde{h}_2(b, c)$. Segue que $R \in Sing(S)$ se, e somente se, $c^2 \tilde{h}_2(0, 1) = a = b = 0$. Assim, se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$ então $c = 0$ e portanto P é o único ponto singular de S . Reciprocamente, se $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$, então para quaisquer valores de c, d temos que $R = [0 : 0 : c : d] \in Sing(S)$ e portanto P não é o único ponto singular de S .

2. Se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, então P é uma singularidade do tipo E_6 .

Considere $\tilde{h}_2(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Se $\tilde{h}_2(0, 1) \neq 0$, então $\gamma \neq 0$. No aberto afim $x_3 = 1$ obtemos $G = x_0^2 + \alpha x_0 x_1^2 + \beta x_0 x_1 x_2 + \gamma x_0 x_2^2 + x_1^3$. Atribuindo os pesos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ às variáveis x_0, x_1, x_2 respectivamente e usando o Princípio do Reconhecimento concluímos que $G \sim x_0^2 + \gamma x_0 x_2^2 + x_1^3$. Considere o isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\varphi : \mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]] \rightarrow \mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]]$ definido por $x_0 \mapsto x_0 + x_2^2 i$, $x_1 \mapsto x_1$, $x_2 \mapsto \lambda_1 \lambda_2 x_2$ com $\lambda_1^2 = -2i$ e $\lambda_2^2 = \gamma^{-1}$. Segue que $G \sim x_1^3 + x_2^4 + x_0^2$ e portanto $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in Sing(S)$ é do tipo E_6 .

3. $Sing(S) = Z(x_0, x_1)$ se, e somente se, $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$.

Como vimos em 1. $R = [a : b : c : d]$ é um ponto singular se, e somente se, $a = b = c^2 \tilde{h}_2(0, 1) = 0$. Assim, pondo a condição $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$ temos que $R \in Sing(S)$ se, e somente se, $a = b = 0$. Segue que $Sing(S) = Z(x_0, x_1)$. Reciprocamente, se $Sing(S) = Z(x_0, x_1)$, então $R = [0 : 0 : 1 : 0]$ é um ponto singular de S . Logo satisfaz a condição $c^2 \tilde{h}_2(0, 1) = 0$. Como neste caso $c = 1$, temos que $\tilde{h}_2(0, 1) = 0$.

4. Se $Sing(S) = \{P\}$, então $Z(x_0, x_1)$ é a única reta contida em S .

Considere o conjunto $U_{12} = \{[(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, t, sa + tc, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} b + \gamma a^2 = 0 \\ d + 2ac\gamma + \beta a = 0 \\ \gamma c^2 + \alpha + \beta c = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Note que o sistema não admite solução.

Considere o conjunto $U_{13} = \{[(1, a, 0, b), (0, c, 1, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{13}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, sa + tc, t, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \alpha a^2 + b + a^3 = 0 \\ d + \beta a + 2\alpha ac + 3a^2 c = 0 \\ \beta c + \alpha c^2 + \gamma + 3ac^2 = 0 \\ c^3 = 0 \end{cases}$$

Das duas últimas equações obtemos $\gamma = 0$, o que contradiz a hipótese de ser P o único ponto singular de S .

Considere o conjunto $U_{14} = \{[(1, a, b, 0), (0, c, d, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{14}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(s, sa + ct, sb + td, t) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \gamma b^2 + \beta ab + \alpha a^2 + a^3 = 0 \\ 1 + \beta bc + \beta ad + 2\alpha ac + 2\gamma bd + 3a^2 c = 0 \\ \beta cd + \alpha c^2 + \gamma d^2 + 3ac^2 = 0 \\ c^3 = 0 \end{cases}$$

As duas últimas equações nos dão que $c = d = 0$. Substituindo na segunda equações obtemos $1=0$. Logo o sistema não admite solução.

Considere o conjunto $U_{23} = \{[(a, 1, 0, b), (c, 0, 1, d)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{23}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, s, t, sb + td) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} ba^2 + \alpha a + 1 = 0 \\ \beta a + a^2 d + 2abc + \alpha c = 0 \\ 2acd + bc^2 + \beta c + \gamma a = 0 \\ c^2 d + \gamma c = 0 \end{cases}$$

Se $c \neq 0$ recaímos no caso do aberto U_{12} . Se $c = 0$ obtemos da terceira equação que $a = 0$. Substituindo $a = c = 0$ na segunda equação obtemos $1 = 0$. Logo o sistema não admite solução.

Considere o conjunto $U_{24} = \{[(a, 1, b, 0), (c, 0, d, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{24}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, s, sb + td, t) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \beta ab + \alpha a + \gamma ab^2 + 1 = 0 \\ a^2 + \alpha c + \beta bc + \beta ad + \gamma b^2 c + 2\gamma abd = 0 \\ 2ac + \beta cd + 2\gamma bcd + \gamma ad^2 = 0 \\ c^2 + \gamma cd^2 = 0 \end{cases}$$

Se $d \neq 0$ recaímos no caso do aberto U_{23} . Se $d = 0$, obtemos $c = 0$ da quarta equação e $a = 0$ da segunda. Substituindo $a = 0$ na primeira equação obtemos $1 = 0$. Logo o sistema não admite solução.

Considere o conjunto $U_{34} = \{[(a, b, 1, 0), (c, d, 0, 1)] \in G(2, 4) \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$. Seja $l \in U_{34}$ tal que $l \subset S = Z(G)$, então

$$G(sa + tc, sb + td, s, t) = 0, \forall s, t \in \mathbb{C}.$$

Da equação acima obtemos o sistema em a, b, c, d

$$\begin{cases} \gamma a + \beta ab + \alpha ab^2 + b^3 = 0 \\ a^2 + \gamma c + \alpha b^2 c + 2\alpha abd + 3b^2 d + \beta bc + \beta ad = 0 \\ 2ac + 3bd^2 + \beta cd + 2\alpha bcd + \alpha ad^2 = 0 \\ c^2 + \alpha cd^2 + d^3 = 0 \end{cases}$$

Se $d \neq 0$, então recaímos no caso do aberto U_{23} . Se $d = 0$, obtemos $a = b = c = 0$. Assim determinamos a reta $l = \mathbb{P}([(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)])$, que é a única reta contida em S .

5. Segue da proposição 3.1 que se $Sing(S) = Z(x_0, x_1)$, então existem infinitas retas sobre S .

■

3.3 Caso 3: Posto de $f_2 \geq 2$.

Lembre-se que neste capítulo $S = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ denota uma cúbica singular irredutível e reduzida. Como em (3.1) consideramos $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(S)$ e portanto

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2).$$

Proposição 3.5 *Assuma que $f_2 \neq 0$, então existe uma bijeção entre $\mathfrak{F}_P = \{l \subset \mathbb{P}^3 \mid l \subset S \text{ e } P \in l\}$ e $\mathfrak{A} = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 \mid f_2(a_0, a_1, a_2) = f_3(a_0, a_1, a_2)\} = Z(f_1, f_2)$.*

Demonstração: Para cada $q = [q_0 : q_1 : q_2] \in \mathfrak{A}$, seja $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : 0] \in S$. Mostremos que a reta l_{PQ} pertence a $\mathfrak{F}_P$. Com efeito, seja $R = [sq_0 : sq_1 : sq_2 : t] \in l_{PQ}$. Temos que

$$F(R) = ts^2 f_2(q_0, q_1, q_2) + s^3 f_3(q_0, q_1, q_2) = 0.$$

Assim temos uma aplicação φ bem definida que a cada $q = [q_0 : q_1 : q_2] \in \mathfrak{A}$ associa a reta $l_{PQ} \in \mathfrak{F}_P$, com $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : 0]$. Reciprocamente, considere $l_{PQ} \in \mathfrak{F}_P$, com $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$. Se $R \in l_{PQ}$, então R se escreve como $R = [sq_0 : sq_1 : sq_2 : sq_3 + t]$ para algum $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Fazendo $s = 1$ e $t = -q_3$ obtemos $R_1 = [q_0 : q_1 : q_2 : 0] \in l_{PQ}$. Como $l_{PQ} \subset S$, temos que $R_1 \in S$ e portanto $f_3(q_0, q_1, q_2) = 0$. Fazendo $s = 1$ e $t = -q_3 + 1$ obtemos $R_2 = [q_0 : q_1 : q_2 : 1] \in l_{PQ}$. Como $l_{PQ} \subset S$, temos que $R_2 \in S$, e portanto $f_2(q_0, q_1, q_2) = 0$. Logo $q = [q_0 : q_1 : q_2] \in \mathfrak{A}$. Assim temos bem definida a inversa φ^{-1} . ■

Proposição 3.6 *Sejam $S = Z(F)$ uma cúbica singular irredutível e reduzida, $P = [0 : 0 : 0 : 1] \in \text{Sing}(S)$ e $l \subset S$ uma reta que não contem P . Seja $\pi \subset \mathbb{P}^3$ o único plano que contém l e P . Então $\pi \cap S = l \cup l_1 \cup l_2$, onde l_1 e l_2 são retas que contém P , não necessariamente distintas.*

Demonstração: Afirmamos que P é um ponto singular da curva $\pi \cap S$. Com efeito, já sabemos que a menos de uma mudança de coordenadas podemos supor $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ e $F = x_3 f_2 + f_3$, onde $f_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_i$, $i = 2, 3$. Seja $\pi = Z(h)$ com $h = ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3$. Como $P \in \pi$ temos que $h(P) = d = 0$. Logo $h = ax_0 + bx_1 + cx_2$. Suponhamos sem perda de generalidade que $c \neq 0$, assim podemos finalmente escrever $h = x_2 + \alpha x_1 + \beta x_0$. Considere a mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $x_0 \mapsto x_0, x_1 \mapsto x_1, x_2 \mapsto x_2 - \alpha x_0 - \beta x_1, x_3 \mapsto x_3$. Segue que $\mathbb{T}(P) = P$, $\mathbb{T}_\bullet h = x_2$ e $\mathbb{T}_\bullet F = x_3 f_2 + \tilde{f}_3$ onde $\tilde{f}_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_i$, $i = 2, 3$. Isto significa que a menos de uma mudança de coordenadas podemos considerar $h = x_2$. Escreva $f_2 = x_2 q_1 + r_2$ e $f_3 = x_2 q_2 + r_3$, onde $q_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_i$ e $r_j \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_j$, $i = 1, 2, j = 2, 3$, assim temos $F = x_2(x_3 q_1 + q_2) + x_3 r_2 + r_3$. Segue que $\pi \cap S = Z(x_2, F) = Z(x_2, x_3 r_2 + r_3)$. Logo $\pi \cap S$ é a curva de equação $h_3 = x_3 r_2 + r_3$ no plano π . Assim verifica-se facilmente que P é um ponto singular de $\pi \cap S$. Agora, como o plano π e a cúbica S contém a reta l , segue que $\pi \cap S = l \cup C$, onde C é uma cônica no plano π . Por outro lado, como $P \in \pi \cap S$ e $P \notin l$, temos que $P \in C$. Sendo P um ponto singular de $l \cup C$, segue que $P \in \text{Sing}(C)$. Logo C é redutível e portanto contem uma reta passando por P . ■

Proposição 3.7 *Notações como em (3.1). Seja $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \neq P$ outro ponto singular de S . São verdadeiras as seguintes asserções.*

1. A reta l_{PQ} , determinada pelos pontos P e Q , está contida em S .

2. Se P é uma singularidade isolada, então $\tilde{Q} = [q_0 : q_1 : q_2] \notin \text{Sing}(Z(f_2))$.
3. Se P é uma singularidade isolada, então $l_{P,Q} \cap \text{Sing}(S) = \{P, Q\}$.
4. Se P é uma singularidade isolada e posto de f_2 é igual a 2, então existe uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbb{T}(P) = P$, $T_\bullet x_3 = x_3$, $T_\bullet f_2 = x_0 x_1$ e $\mathbb{T}(Q) = [1 : 0 : 0 : \tilde{q}_3]$.
5. Se P é uma singularidade isolada e posto de f_2 é igual a 3, então existe uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbb{T}(P) = P$, $T_\bullet x_3 = x_3$, $T_\bullet f_2 = x_1^2 - x_0 x_2$ e $\mathbb{T}(Q) = [0 : 0 : 1 : \tilde{q}_3]$.

Demonstração: Seja $\tilde{Q} = [q_0 : q_1 : q_2]$.

1. Sendo $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$ um ponto singular de $S = Z(F)$, com $F = x_3 f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2)$ segue que $f_2(\tilde{Q}) = \frac{\partial F}{\partial x_3}(Q) = 0$ e $f_3(\tilde{Q}) = F(Q) = 0$. Agora, seja $R = [sq_0 : sq_1 : sq_2 : sq_3 + t] \in l_{PQ}$, temos que $F(R) = (sq_3 + t)s^2 f_2(\tilde{Q}) + s^3 f_3(\tilde{Q}) = 0$. Logo $l_{PQ} \subset S$.
2. Suponha que $\tilde{Q} \in \text{Sing}(Z(f_2))$, então $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = f_2(\tilde{Q}) = 0$, $i = 0, 1, 2$. Por outro lado, como $Q \in \text{Sing}(S)$ segue que $\tilde{Q} \in \text{Sing}(Z(f_3))$.
Agora, seja $R = [sq_0 : sq_1 : sq_2 : sq_3 + t] \in l_{PQ}$, temos que $\frac{\partial F}{\partial x_3}(R) = s^2 f_2(\tilde{Q}) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x_i}(R) = (sq_3 + t)s \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) + s^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = 0$, $i = 0, 1, 2$. Logo $l_{PQ} \subset \text{Sing}(S)$, o que contradiz a hipótese de P ser uma singularidade isolada.
3. Seja $R = [sq_0 : sq_1 : sq_2 : sq_3 + t] \in l_{PQ} \cap \text{Sing}(S)$. Então $\frac{\partial F}{\partial x_i}(R) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Por outro lado, para $i = 0, 1, 2$ temos $\frac{\partial F}{\partial x_i}(R) = s(sq_3 + t) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) + s^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = s^2 [q_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_i}(\tilde{Q})] + st \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = st \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q})$. Logo $st \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) = 0$. Sabemos do item 2. que $\tilde{Q} \notin \text{Sing}(Z(f_2))$, isto é, $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\tilde{Q}) \neq 0$ para algum $i = 0, 1, 2$. Logo $s = 0$ ou $t = 0$. Se $s = 0$ temos $R = P$, e se $t = 0$ temos $R = Q$.
4. Sendo o posto de f_2 igual a 2 já temos do teorema A.4 que por uma mudança de coordenadas podemos tomar $f_2 = x_0 x_1$. Seja $\tilde{Q} = [q_0 : q_1 : q_2]$. Como $\tilde{Q} \in Z(x_0 x_1)$, segue que $q_0 = 0$ ou $q_1 = 0$. Por outro lado, temos do item 2 que $\tilde{Q} \notin \text{Sing}(Z(f_2))$, e portanto $q_0 \neq 0$ ou $q_1 \neq 0$. Logo $Q = [1 : 0 : \frac{q_2}{q_0} : \frac{q_3}{q_0}]$ ou $Q = [0 : 1 : \frac{q_2}{q_1} : \frac{q_3}{q_1}]$. Se $Q = [1 : 0 : \frac{q_2}{q_0} : \frac{q_3}{q_0}]$, então a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{q_2}{q_0} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induz uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ com as propriedades desejadas. Se $Q = [0 : 1 : \frac{q_2}{q_1} : \frac{q_3}{q_1}]$, então a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{q_2}{q_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induz uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ com as propriedades desejadas.

5. O teorema A.4 nos garante que a cônica f_2 é projetivamente equivalente à cônica $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ que por sua vez é equivalente à $x_1^2 - x_0x_2$. Isto significa que existe $\mathbb{S}_1 : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $S_{1\bullet}f_2 = x_1^2 - x_0x_2$. Assim podemos obter $\mathbb{S} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbb{S}(P) = P$, $S_{\bullet}x_3 = x_3$ e $S_{\bullet}f_2 = x_1^2 - x_0x_2$ pondo $S_{\bullet}x_i = S_{1\bullet}x_i$, $i = 0, 1, 2$. Agora, note que $\tilde{Q} \in Z(x_1^2 - x_0x_2)$ se, e somente se $\tilde{Q} = [a^2 : ab : b^2]$ para algum $[a : b] \in \mathbb{P}^1$. Assim $\mathbb{S}(\tilde{Q}) = [a^2 : ab : b^2 : q_3]$ para algum $[a : b] \in \mathbb{P}^1$.

Se $a = 0$, então $b \neq 0$ e $\mathbb{S}(\tilde{Q}) = [0 : 0 : b^2 : q_3] = [0 : 0 : 1 : \frac{q_3}{b^2}]$, e assim segue o resultado. Se $a \neq 0$, então $\mathbb{S}(\tilde{Q}) = [1 : c : c^2 : \tilde{q}]$, onde $c = \frac{b}{a}$ e $\tilde{q} = \frac{q_3}{a^2}$. Considere a projetividade $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T_{\bullet}x_0 = c^2x_0 - 2cx_1 + x_2$, $T_{\bullet}x_1 = c(c^2 - 1)x_0 + (1 - 2c^2)x_1 + cx_2$, $T_{\bullet}x_2 = (1 - c^2)^2x_0 + 2c(1 - c^2)x_1 + c^2x_2$ e $T_{\bullet}x_3 = x_3$. Segue que $T_{\bullet}(x_1^2 - x_0x_2) = x_1^2 - x_0x_2$, $\mathbb{T}(P) = P$ e $\mathbb{T}([1 : c : c^2 : \tilde{q}]) = [0 : 0 : 1 : \tilde{q}]$.

■

Proposição 3.8 *Notações como em (3.1). Considere as curvas $C = Z(f_2)$ e $C' = Z(f_3)$ em $\mathbb{P}^2$. São verdadeiras as seguintes asserções.*

1. *Se posto de f_2 é igual a 2, então existe uma bijeção entre $Sing(S) - \{P\}$ e o conjunto $\{\tilde{Q} \in \mathbb{P}^2 \mid I_{\tilde{Q}}(C, C') \geq 2\} - Sing(f_2)$.*
2. *Se posto de f_2 é igual a 3, então existe uma bijeção entre $Sing(S) - \{P\}$ e o conjunto $\{\tilde{Q} \in \mathbb{P}^2 \mid I_{\tilde{Q}}(C, C') \geq 2\}$*

Demonstração:

1. Seja $Q \in Sing(S) - \{P\}$. Segue da proposição 3.7 que existe uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{S} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $S_{\bullet}f_2 = x_0x_1$ e $\mathbb{S}(\tilde{Q}) = [1 : 0 : 0]$ a qual induz $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ com $T_{\bullet}f_2 = x_0x_1$, $T_{\bullet}x_3 = x_3$, $\mathbb{T}(P) = P$ e $\mathbb{T}(Q) = [1 : 0 : 0 : q_3]$. Assim

$$I_{\tilde{Q}}(C, C') = I_{[1:0:0]}(\mathbb{S}(C), \mathbb{S}(C')) = I_{[1:0:0]}(Z(x_0), \mathbb{S}(C')) + I_{[1:0:0]}(Z(x_1), \mathbb{S}(C'))$$

Sejam $\mathbb{S}(C') = Z(\tilde{f}_3)$ e $l = Z(x_1)$. Escreva $\tilde{f}_3(x_0, x_1, x_2) = x_1g_2(x_0, x_1, x_2) + g_3(x_0, x_2)$, com $g_3(x_0, x_2) = a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_2 + a_2x_0x_2^2 + a_3x_2^3$. Como $\tilde{f}_3(1, 0, 0) = 0$, então $a_0 = 0$. Além disso, de $\frac{\partial T_{\bullet}F}{\partial x_2}(1, 0, 0, q_3) = 0$ segue que $\frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x_2}(1, 0, 0) = 0$ e portanto $a_1 = 0$. Daí $\tilde{f}_3|_{x_1} = x_2^2(a_2x_0 + a_3x_2)$, onde $a_2 \neq 0$ ou $a_3 \neq 0$. Logo $I_{[1:0:0]}(Z(x_1), \mathbb{S}(C')) \geq 2$, e portanto $I_{\tilde{Q}}(C, C') \geq 2$.

Reciprocamente, seja $\tilde{Q} \in \mathbb{P}^2$ tal que $I_{\tilde{Q}}(C, C') \geq 2$. Considere uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{S} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $S_{\bullet}f_2 = x_0x_1$ e $\mathbb{S}(\tilde{Q}) = [1 : 0 : 0]$ da qual podemos deduzir $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ com $T_{\bullet}f_2 = x_0x_1$, $T_{\bullet}x_3 = x_3$ e $\mathbb{T}(P) = P$. Segue que

$$I_{\tilde{Q}}(C, C') = I_{[1:0:0]}(\mathbb{S}(C), \mathbb{S}(C')) = I_{[1:0:0]}(Z(x_0), \mathbb{S}(C')) + I_{[1:0:0]}(Z(x_1), \mathbb{S}(C')).$$

Como $I_{\tilde{Q}}(C, C') \geq 2$ concluímos que $I_{[1:0:0]}(Z(x_1), \mathbb{S}(C')) \geq 2$. Seja $\mathbb{S}(C') = Z(\tilde{f}_3)$, onde $\tilde{f}_3(x_0, x_1, x_2) = x_1g_2(x_0, x_1, x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_2 + a_2x_0x_2^2 + a_3x_2^3$. Como $\tilde{f}_3(1, 0, 0) =$

0, então $a_0 = 0$. Além disso, $a_1 = \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x_2}(1, 0, 0)$ e de $I_{[1:0:0]}(Z(x_1), \mathbb{S}(C')) \geq 2$ vem que $a_1 = 0$. Agora, seja $G = T_\bullet F = x_3 x_0 x_1 + \tilde{f}_3(x_0, x_1, x_2)$. Tome $Q = [1 : 0 : 0 : t]$, com $t = -\frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x_1}(1, 0, 0)$. Note que $\frac{\partial G}{\partial x_3}(Q) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}(Q) = \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x_2}(1, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(Q) = t + \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x_1}(1, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial x_0}(Q) = 0$.

2. Seja $Q \in \text{Sing}(S) - \{P\}$. Segue da proposição 3.7 que existe uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbb{T}(P) = P$, $\mathbb{T}(Q) = [0 : 0 : 1 : \tilde{q}_3]$, $T_\bullet f_2 = x_1^2 - x_0 x_2$ e $T_\bullet x_3 = x_3$. Assim $T_\bullet F = x_3(x_1^2 - x_0 x_2) + g_3$, com $g_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo de grau 3. Escreva $g_3 = (x_1^2 - x_0 x_2)L(x_0, x_1, x_2) + h_3$, onde $L(x_0, x_1, x_2)$ é linear e $h_3 = a_0 x_0^3 + a_1 x_0^2 x_1 + a_2 x_0^2 x_2 + a_3 x_0 x_1 x_2 + a_4 x_0 x_2^2 + a_5 x_1 x_2^2 + a_6 x_2^3$. Daí $T_\bullet F = (x_3 + L(x_0, x_1, x_2))(x_1^2 - x_0 x_2) + h_3(x_0, x_1, x_2)$, que é projetivamente equivalente a $G = x_3(x_1^2 - x_0 x_2) + h_3(x_0, x_1, x_2)$. Note que $a_6 = 0$, pois pela proposição 3.7, a reta $l_{P,Q}$ está contida em S , e pela proposição 3.5, $h_3(0, 0, 1) = 0$. Logo $\frac{\partial G}{\partial x_3}(Q) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}(Q) = 3a_6 = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(Q) = a_5$ e $\frac{\partial G}{\partial x_0}(Q) = \tilde{q}_3 + a_4$. Por outro lado, todos os pontos da curva $Z(x_1^2 - x_0 x_2)$ são da forma $[a^2 : ab : b^2]$. Prova-se que a multiplicidade das curvas $Z(x_1^2 - x_0 x_2)$ e $Z(h_3)$ no ponto $[0 : 0 : 1]$ é igual a multiplicidade da raiz $[0 : 1]$ do polinômio $h_3(a^2, ab, b^2) = a_0 a^6 + a_1 a^5 b + a_2 a^4 b^2 + a_3 a^3 b^3 + a_4 a^2 b^4 + a_5 a b^5 = a^2(a_0 a^4 + a_1 a^3 b + a_2 a^2 b^2 + a_3 a b^3 + a_4 b^4) + a_5 a b^5$. Segue que a multiplicidade de $[0 : 1]$ em $h_3(a^2, ab, b^2)$ é maior que 1 se, e somente se, $a_5 = 0$.

Assim concluímos que, se $Q = [0 : 0 : 1 : \tilde{q}_3] \in \text{Sing}(S)$, então $a_5 = 0$, e portanto $\tilde{Q} = [0 : 0 : 1]$ é um ponto múltiplo de $Z(x_1^2 - x_0 x_2, h_3)$. Reciprocamente se $\tilde{Q} = [0 : 0 : 1]$ é um ponto múltiplo de $Z(x_1^2 - x_0 x_2, h_3)$, então $Q = [0 : 0 : 1 : -a_4] \in \text{Sing}(S)$.

■

Corolário 3.1 *Notações como em (3.1). Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. Se o posto de f_2 é igual a 2, então S possui no máximo 3 pontos singulares.
2. Se o posto de f_2 é igual a 3, então S possui no máximo 4 pontos singulares.

Teorema 3.4 *Notações como em (3.1), assuma que o posto de f_2 é igual a 2. Então,*

1. Se $f_3(0, 0, 1) \neq 0$, então P é um ponto singular do tipo A_2 .
2. se $f_3(0, 0, 1) = 0$, então P é uma singularidade do tipo $A_{k_0+k_1+1}$, onde $k_0 = I_{[0:0:1]}(Z(x_0), Z(f_3))$ e $k_1 = I_{[0:0:1]}(Z(x_1), Z(f_3))$.
Além disso, $k_0 = 1$ ou $k_1 = 1$
3. Existe uma bijeção entre $\{\tilde{Q} \in \mathbb{P}^2 \mid I_{\tilde{Q}}(Z(f_2), Z(f_3)) = m \geq 2\} - \text{Sing}(Z(f_2))$ e $\{Q \in \text{Sing}(S) - \{P\} \mid Q \text{ é uma singularidade isolada do tipo } A_{m-1}\}$.

Demonstração: Assuma que $F = x_3 x_0 x_1 + f_3(x_0, x_1, x_2)$.

1. Escreva

$$f_3(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1 l(x_0, x_1, x_2) + x_0 a(x_0, x_2) + x_1 b(x_1, x_2) + \alpha x_2^3,$$

onde l é homogêneo de grau 1 e a, b são homogêneos de grau 2.

Assim,

$$F = (x_3 + l(x_0, x_1, x_2))x_0x_1 + x_0a(x_0, x_2) + x_1b(x_1, x_2) + \alpha x_2^3,$$

podemos assumir, após uma mudança de coordenadas projetivas que

$$F = x_0x_1x_3 + x_0a(x_0, x_2) + x_1b(x_1, x_2) + \alpha x_2^3.$$

Note que, $f_3(0, 0, 1) = \alpha$. Logo $\alpha \neq 0$. No aberto afim $x_3 = 1$, temos que

$$F = x_0x_1 + x_0a(x_0, x_2) + x_1b(x_1, x_2) + \alpha x_2^3.$$

Sejam $a(x_0, x_2) = a_0x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_2^2$ e $b(x_1, x_2) = b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2$. Atribuindo os pesos $x_0 \leftrightarrow \frac{1}{2}$ e $x_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, temos pelo Princípio do Reconhecimento que $F \sim x_0x_1 + \alpha x_2^3$. Considere o isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]] \rightarrow \mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]]$ definido por $x_0 \mapsto x_0 + ix_1$, $x_1 \mapsto x_0 - ix_1$, e $x_2 \mapsto ux_2$, onde $u^3\alpha = 1$.

Logo $F \sim x_2^3 + x_0^2 + x_1^2$. Portanto P é uma singularidade do tipo A_2 .

2. Vamos provar inicialmente que $k_0 = 1$ ou $k_1 = 1$. Com efeito, suponha que $k_0, k_2 \geq 2$, mas lembre-se que $1 \leq k_0, k_1 \leq 3$. Temos que

$$f_3(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1l(x_0, x_1, x_2) + x_0a(x_0, x_2) + x_1b(x_1, x_2),$$

já que $\alpha = f_3(0, 0, 1) = 0$. Note que $R_{f_3, x_0}(x_1, x_2) = f_3|_{x_0} = x_1(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2)$.

Assim, $k_0 \geq 2$ se, e somente se, $b_2 = 0$. Analogamente, $R_{f_3, x_1}(x_0, x_2) = f_3|_{x_1} = x_0(a_0x_0^2 + a_1x_0x_2 + a_2x_2^2)$. Assim, $k_1 \geq 2$ se, e somente se, $a_2 = 0$. Segue que

$$f_3 = x_0x_1l(x_0, x_1, x_2) + x_0^2(a_0x_0 + a_1x_2) + x_1^2(b_0x_1 + b_1x_2).$$

Daí $\frac{\partial f_3}{\partial x_i}(0, 0, 1) = 0$, $\forall i = 0, 1, 2$ e portanto P não pode ser uma singularidade isolada de S , pois $l_{P, Q} \subset \text{Sing}(S)$, onde $Q = [0 : 0 : 1 : 0]$. Agora assuma sem perda de generalidade que $k_0 = 1$, daí temos 3 casos a analisar.

Caso 1: $k_1 = 1$

Neste caso $a_2, b_2 \neq 0$. No aberto afim $x_3 = 1$, temos que

$$F = x_0x_1 + x_0a(x_0, x_2) + x_1b(x_1, x_2).$$

Considerando os pesos $x_0 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_2 \leftrightarrow \frac{1}{4}$, temos pelo Princípio do Reconhecimento que $F \sim x_0x_1 + a_2x_0x_2^2 + b_2x_1x_2^2 \sim x_0x_1 + x_0x_2^2 + x_1x_2^2$. Do isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0 - x_2^2$, $x_1 \mapsto x_1 - x_2^2$, e $x_2 \mapsto x_2$ concluímos que $F \sim x_0x_1 - x_2^4 \sim x_2^4 + x_1^2 + x_0^2$. Logo P é uma singularidade do tipo A_3 .

Caso 2: $k_1 = 2$

Neste caso, $b_2 \neq 0$, $a_2 = 0$ e $a_1 \neq 0$. No aberto afim $x_3 = 1$, temos

$$F \sim x_0x_1 + x_0^2(a_0x_0 + x_2) + x_1(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + x_2^2).$$

Considerando o automorfismo em $\mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]]$ dado por $x_0 \mapsto x_0 - x_2^2$, $x_1 \mapsto x_1 - x_2^3$, $x_2 \mapsto x_2$, tomando os pesos $x_0 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_2 \leftrightarrow \frac{1}{5}$ e usando o

Princípio do Reconhecimento obtemos $F \sim x_0x_1 + x_2^5 \sim x_0^2 + x_1^2 + x_2^5$. Logo P é uma singularidade do tipo A_4 .

Caso 3: $k_1 = 3$

Neste caso, $a_1 = a_2 = 0$ e $b_2, a_0 \neq 0$. No aberto afim $x_3 = 1$, temos

$$F \sim x_0x_1 + x_0^3 + x_1(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + x_2^2).$$

Considerando o automorfismo em $\mathbb{C}[[x_0, x_1, x_2]]$ dado por $x_0 \mapsto x_0 - x_2^2$, $x_1 \mapsto x_1 - x_2^4$, $x_2 \mapsto x_2$, atribuindo os pesos $x_0 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_2 \leftrightarrow \frac{1}{6}$ e usando o Princípio do Reconhecimento obtemos por um cálculo direto que $F \sim x_0x_1 - x_2^6 \sim x_2^6 + x_1^2 + x_0^2$. Logo P é uma singularidade do tipo A_5 .

3. Seja $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \in \text{Sing}(S) - \{P\}$. A proposição 3.7 nos diz que a menos de uma mudança de coordenadas temos $Q = [1 : 0 : 0 : q_3]$, $f_2 = x_0x_1$ e $F = x_0x_1x_3 + f_3(x_0, x_1, x_2)$. Vamos considerar a priori o caso em que $f_3(0, 0, 1) \neq 0$. Neste caso, se $[a : b : c] \in Z(f_2) \cap Z(f_3)$ então temos $a = 0$ ou $b = 0$ e nunca $a = b = 0$. O Teorema de Bezout garante que $Z(f_2) \cap Z(f_3)$ consiste de 6 pontos contando as multiplicidades. Seja $Z(f_2) \cap Z(f_3) = \{P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3\}$ com $P_i = [1 : 0 : \alpha_i]$ e $Q_i = [0 : 1 : \beta_i]$, $i = 1, 2, 3$. Assim podemos escrever $f_3 = (x_2 - \alpha_1x_0)(x_2 - \alpha_2x_0)(x_2 - \alpha_3x_0) + (x_2 - \beta_1x_1)(x_2 - \beta_2x_1)(x_2 - \beta_3x_1) - x_2^3$ (Ver figura 3.1). Agora note que $\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = -3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = q_3$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ e $\frac{\partial F}{\partial x_3}(Q) = 0$. Sendo Q um ponto singular de S , então $q_3 = 0$ e pelo menos 2 dos α_i são nulos, digamos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Para determinar a multiplicidade da interseção $Z(f_2) \cap Z(f_3)$ em $\tilde{Q} = [1 : 0 : 0]$ note que $I_{\tilde{Q}}(Z(x_0x_1), Z(f_3)) = I_{\tilde{Q}}(Z(x_0), Z(f_3)) + I_{\tilde{Q}}(Z(x_1), Z(f_3)) = I_{\tilde{Q}}(Z(x_1), Z(f_3))$. Fazendo $x_1 = 0$ em f_3 obtemos $x_2^2(x_2 - \alpha_3x_0)$. Daí $I_{\tilde{Q}}(Z(f_2), Z(f_3)) = 2$ se, e somente se $\alpha_3 \neq 0$ e $I_{\tilde{Q}}(Z(f_2), Z(f_3)) = 3$ se, e somente se $\alpha_3 = 0$. Assim temos o seguinte: Se $I_{\tilde{Q}}(Z(f_2), Z(f_3)) = 2$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 \neq 0$. No aberto afim $x_0 = 1$, ponha peso $\frac{1}{2}$ para cada variável x_1, x_2, x_3 e use o Princípio do Reconhecimento para obter $F \sim x_1x_3 - \alpha_3x_2 \sim x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Logo $Q = [1 : 0 : 0 : 0]$ é uma singularidade do tipo A_1 . Se $I_{\tilde{Q}}(Z(f_2), Z(f_3)) = 3$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. No aberto afim $x_0 = 1$, ponha os pesos $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente às variáveis x_2, x_1 e x_0 e use o Princípio do Reconhecimento para obter $F \sim x_1x_3 + x_2^3 \sim x_1^2 + x_2^3 + x_3^3$. Logo Q é uma singularidade do tipo A_2 .

Agora vamos ao caso em que $f_3(0, 0, 1) = 0$. Escreva $f_3 = x_0x_1L(x_0, x_1, x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_2 + a_2x_0x_2^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3$, onde $L(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$. Se $f_3(0, 0, 1) = 0$ então $a_6 = 0$. Assim podemos escrever $f_3 = x_0x_1L(x_0, x_1, x_2) + x_0h_2(x_0, x_2) + x_1g_2(x_0, x_2)$ com $h_2, g_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_2]$ homogêneos de grau 2. Portanto, a menos de uma mudança de coordenadas temos $F = x_3x_0x_1 + x_0(x_2 - \alpha_1x_0)(x_2 - \alpha_2x_0) + x_1(x_2 - \beta_1x_1)(x_2 - \beta_2x_2)$. Note que $\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = 3\alpha_1\alpha_2$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = q_3$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = -\alpha_1 - \alpha_2$ e $\frac{\partial F}{\partial x_3}(Q) = 0$. Como $Q \in \text{Sing}(S)$, então $q_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Fazendo $x_1 = 0$ em f_3 obtemos $x_2^2(x_0 - x_2^2)$. Concluimos que neste caso a multiplicidade de $\tilde{Q}$ em $Z(f_2) \cap Z(f_3)$ sempre é igual 2. Por outro lado, no aberto afim $x_0 = 1$ temos $F = x_1x_3 + x_2^2 + x_1x_2^2 - \beta_2x_1^2x_2 - \beta_1x_1^2x_2 + \beta_1\beta_2x_1^3 - x_2^3$. Atribuído peso $\frac{1}{2}$ a todas as variáveis e usando o Princípio do Reconhecimento obtemos $F \sim x_1x_3 + x_1^2 \sim x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Logo Q é uma singularidade do tipo A_1 .

■

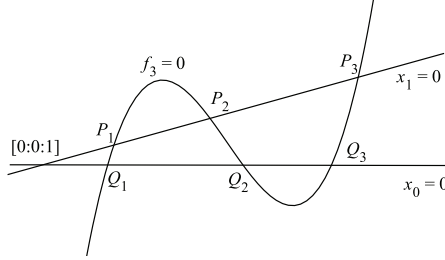


Figura 3.1: Interseção das curvas $f_2 = 0$ e $f_3 = 0$

Teorema 3.5 *Notações como em (3.1), assuma que $f_3(0, 0, 1) \neq 0$ e que o posto de f_2 é igual a 2, então o número de retas contidas em S , a cardinalidade de $\mathfrak{A} = Z(f_2) \cap Z(f_3)$, e os tipos de singularidades se relacionam conforme a tabela abaixo.*

$\sharp(\mathfrak{A})$	n° de retas	sing.
6	15	A_2
5	11	A_2A_1
4	7	$2A_2$
	8	A_22A_1
3	5	$2A_2A_1$
2	3	$3A_2$

onde a simbologia nA_kmA_l indica que existem em S , n pontos singulares do tipo A_k e m do tipo A_l .

Demonstração: Como vimos na demonstração do item 3 do teorema 3.4 podemos escrever, a menos de uma mudança de coordenadas,

$$F = x_3x_0x_1 + \prod_{i=1}^3(x_2 - \alpha_ix_0) + \prod_{i=1}^3(x_2 - \beta_ix_1) - x_2^3.$$

Assuma que a cardinalidade de $\mathfrak{A}$ é 6, isto é, todos os pontos são simples. Segue da proposição 3.8 que $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é o único ponto singular de S . Assim, pela proposição 3.5 temos seis retas distintas em S passando por P , a saber $l_1 = l_{P,[1:0:\alpha_1:0]}$, $l_2 = l_{P,[1:0:\alpha_2:0]}$, $l_3 = l_{P,[0:1:\alpha_3:0]}$, $m_1 = l_{P,[0:1:\beta_1:0]}$, $m_2 = l_{P,[0:1:\beta_2:0]}$ e $m_3 = l_{P,[0:1:\beta_3:0]}$.

Agora, considere π_{ij} , o plano determinado pelas retas l_i e m_j . Temos um total de 9 planos deste tipo. Vamos determinar a equação deste plano. Para isto considere $h_{ij}(x_0, x_1, x_2) = Ax_0 + Bx_1 + Cx_2$, temos que $h_{ij}(P) = D$, $h_{ij}(P_i) = A + C\alpha_i$ e $h_{ij}(Q_j) = B + C\beta_j$, onde $P_i = [1 : 0 : \alpha_i]$ e $Q_j = [0 : 1 : \beta_j]$. Logo, $h_{ij}(x_0, x_1, x_2) = -\alpha_ix_0 - \beta_jx_1 + x_2$ define o plano π_{ij} . Assim, podemos determinar $S \cap \pi_{ij}$. Com efeito, temos que

$$F(x_0, x_1, \alpha_ix_0 + \beta_jx_1, x_3) = x_0x_1L_{ij}$$

onde $L_{ij} = x_3 + \Delta_{ij}x_0 + \Lambda_{ij}x_1$, e $\Delta_{ij}, \Lambda_{ij}$ são constantes que podem ser expressadas algebricamente em termos dos α_i, β_j . Daí $S \cap \pi_{ij} = l_i \cup m_j \cup l_{ij}$. É importante observar que cada uma das nove retas $l_{ij} = Z(h_{ij}, L_{ij})$ é diferente das seis anteriores, basta notar que $P \notin l_{ij}$. Para ver que as retas l_{ij} são duas a duas distintas note que $Q_{ij} = [0 : 1 : \beta_j : -\Lambda_{ij}] \in l_{ij}$ mas $Q_{ij} \notin l_{i_1j_1}$ com $j \neq j_1$, pois caso contrário teríamos que $0 = h_{i_1j_1}(Q_{ij}) = \beta_j - \beta_{j_1}$, e portanto $\beta_j = \beta_{j_1}$. Analogamente $P_{ij} = [1 : 0 : \alpha_i : -\Delta_{ij}] \in l_{ij}$ mas $P_{ij} \notin l_{i_1j_1}$ com $i \neq i_1$, pois do contrário teríamos $\alpha_i = \alpha_{i_1}$. Assim temos um total de 15 retas. Uma verificação local em termos dos abertos U_{ij} da grassmanniana $G(2, 4)$ nos levará a concluir que estas são todas as retas contidas em S . De fato, tendo em consideração a proposição 3.6 é suficiente estudar a interseção $\pi \cap S$ com π um plano contendo uma das retas em S passando por P .

Agora, suponha que a cardinalidade de $\mathfrak{A}$ seja 5. Note que não podemos ter $P_i = Q_j$ pois estes pontos estão em retas distintas. Suponha sem perda de generalidade que $P_1 = P_2$. Assim obtemos cinco retas passando por P , a saber l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 . Destas cinco retas obtemos seis planos $\pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{32}, \pi_{33}$ que determinam seis novas retas, totalizando 11 retas.

O caso $\sharp(\mathfrak{A}) = 4$ se desdobra em duas possibilidades dependendo das disposição dos pontos da interseção $f_2 \cap f_3$ sobre a curva $f_2 = x_0x_1$. Podemos ter dois pontos sobre cada reta $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$, e assim teremos 4 retas que passam por P . Estas retas determinarão quatro planos cada um deles contendo uma nova reta, totalizando 8 retas. Outra possibilidade é termos três pontos sobre uma das retas e um ponto sobre a reta oposta. Assim teremos quatro retas que passam por P . Estas retas agora determinarão 3 planos cada um deles contendo uma nova reta, totalizando 7 retas.

Para completar os dados da tabela procedemos da mesma forma quando a cardinalidade de $\mathfrak{A}$ seja sucessivamente 3 ou 2. ■

Teorema 3.6 *Notações como em (3.1), assuma que $f_3(0, 0, 1) = 0$ e que o posto de f_2 é igual a 2, então o número de retas contidas em S , a cardinalidade de $\mathfrak{A} = Z(f_2) \cap Z(f_3)$, e os tipos de singularidades se relacionam conforme as tabelas abaixo.*

$\sharp(\mathfrak{A})$	nº de retas	sing.
5	10	A_3
4	7	A_3A_1
3	5	A_32A_1

Tabela 3.1: $k_0 = 1, k_1 = 1$

$\sharp(\mathfrak{A})$	nº de retas	sing.
4	6	A_4
3	4	A_4A_1

Tabela 3.2: $k_0 = 1, k_1 = 2$

$\sharp(\mathfrak{A})$	nº de retas	sing.
3	3	A_5
2	2	A_5A_1

Tabela 3.3: $k_0 = 1, k_1 = 3$

Demonstração:

Sendo o posto de f_2 igual a 2, podemos escrever $F = x_3x_0x_1 + f_3(x_0, x_1, x_2)$. Seja $f_3(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1L(x_0, x_1, x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_2 + a_2x_0x_2^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2x_2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3$, onde $L(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$. Desde que $f_3(0, 0, 1) = 0$ obtemos $a_6 = 0$. Assim podemos escrever

$$f_3 = x_0x_1L(x_0, x_1, x_2) + x_0h_2(x_0, x_2) + x_1g_2(x_0, x_2).$$

Portanto, a menos de uma mudança de coordenadas temos

$$F = x_3x_0x_1 + x_0(x_2 - \alpha_1x_0)(x_2 - \alpha_2x_0) + x_1(x_2 - \beta_1x_1)(x_2 - \beta_2x_2).$$

Segue do teorema 3.4 que $k_0 = 1$ ou $k_1 = 1$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $k_0 = 1$. Assim, temos 3 casos a analisar, a saber, $k_1 = 1$, $k_1 = 2$, $k_1 = 3$. A seguir nos remeteremos ao caso $k_1 = 1$ deixando os outros casos por conta do leitor. Seja $\tilde{P} = [0 : 0 : 1]$. Como $I_{\tilde{P}}(Z(f_2), Z(f_3)) = k_0 + k_1 = 2$, então a cardinalidade de $\mathfrak{A}$ é no máximo cinco. Suponha que $\sharp(\mathfrak{A}) = 5$. Assim, obtemos cinco retas em S que passam por P , $l = l_{P,[0:0:1:0]}$, $l_1 = l_{P,[1:0:\alpha_1:0]}$, $l_2 = l_{P,[1:0:\alpha_2:0]}$, $m_1 = l_{P,[0:1:\beta_1:0]}$ e $m_2 = l_{P,[0:1:\beta_2:0]}$. Assim como fizemos na demonstração do teorema anterior cada um dos quatro planos π_{ij} , determinados pelas retas l_i e m_j , dá origem a uma nova reta l_{ij} , totalizando 9 retas. É importante observar que quando aplicamos este processo com a reta l não obtemos retas novas. Por exemplo, note que $l = Z(x_0, x_1)$ e $m_1 = Z(x_0, x_2 - \beta_1 x_1)$. Logo $\pi = \langle l, m_1 \rangle = Z(x_0)$, e portanto $\pi \cap S = Z(x_0, F)$. Como $F|_{x_0=0} = x_1(x_2 - \beta_1 x_1)(x_2 - \beta_2 x_1)$, temos que $\pi \cap S = l \cup m_1 \cup m_2$.

Apesar da reta l não nos fornecer uma nova reta utilizando o processo acima, ela será crucial na determinação da ultima reta contida em S conforme a proposição 3.6. Com efeito, note que todo plano que contem $l = Z(x_0, x_1)$ é da forma $\pi_{[a:b]} = Z(ax_0 + bx_1)$. Se $a = 0$, então temos que $\pi_{[0:1]} = Z(x_1)$, e neste caso, temos $\pi_{[0:1]} \cap S = l \cup l_1 \cup l_2$. Se $a = 1$, então $\pi_{[1:-\mu]} = Z(x_0 - \mu x_1)$. Para determinar a interseção $\pi_{[1:-\mu]} \cap S$, note que

$$F(\mu x_1, x_1, x_2, x_3) = x_1 h_2(x_1, x_2, x_3)$$

onde,

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = (\mu^3 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) x_1^2 + (-\mu^2 \alpha_1 - \mu^2 \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2) x_1 x_2 + (\mu + 1) x_2^2 + \mu x_1 x_3$$

Estamos interessados em determinar a interseção $\pi_{[1:-\mu]} \cap S$ no caso em que a mesma é igual a união de três retas. Para isto é necessário que h_2 seja redutível. Sabemos que a quádrlica h_2 é redutível se, e somente se, a matriz associada

$$\begin{bmatrix} \mu^3 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 & \frac{-\mu^2 \alpha_1 - \mu^2 \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2}{2} & \frac{\mu}{2} \\ \frac{-\mu^2 \alpha_1 - \mu^2 \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2}{2} & \mu + 1 & 0 \\ \frac{\mu}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem determinante igual a zero. Como o determinante desta matriz é igual $-\frac{1}{4}\mu^2(\mu + 1)$, segue que h_2 é redutível se, e somente se, $\mu = 0$ ou $\mu = -1$. Se $\mu = 0$, temos $\pi_{[1:0]} \cap S = l \cup m_1 \cup m_2$, e portanto não obtemos novas retas. Se $\mu = -1$, temos $\pi_{[1:1]} \cap S = l \cup l \cup m$, onde $m = Z(x_0 + x_1, x_3 + (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2) x_2)$ é uma nova reta diferente das nove anteriores. Assim obtemos 10 retas contidas em S se $k_0 = k_1 = 1$ e $\sharp(\mathfrak{A}) = 5$. ■

Em relação as notações em (3.1) a proposição 3.8 afirma que cada ponto múltiplo da interseção $f_2 \cap f_3$ gera um ponto singular em S diferente de P . No teorema a seguir classificaremos o tipo de singularidade destes pontos. Para isto observemos que se $Q \in \text{Sing}(S) - \{P\}$, então a proposição 3.7 nos garante que existe uma mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbb{T}(P) = P$, $\mathbb{T}(Q) = [0 : 0 : 1 : -a_4]$, $T_\bullet f_2 = x_1^2 - x_0 x_2$ e $T_\bullet x_3 = x_3$. Assim $T_\bullet F = x_3(x_1^2 - x_0 x_2) + g_3$, com $g_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo de grau 3. Escreva $g_3 = (x_1^2 - x_0 x_2)L(x_0, x_1, x_2) + h_3$, onde $L(x_0, x_1, x_2)$ é linear e $h_3 = a_0 x_0^3 + a_1 x_0^2 x_1 + a_2 x_0^2 x_2 + a_3 x_0 x_1 x_2 + a_4 x_0 x_2^2 + a_5 x_1 x_2^2 + a_6 x_3^3$. Daí $T_\bullet F = (x_3 + L(x_0, x_1, x_2))(x_1^2 - x_0 x_2) + h_3(x_0, x_1, x_2)$, que é projetivamente equivalente a $G = x_3(x_1^2 - x_0 x_2) + h_3(x_0, x_1, x_2)$.

Proposição 3.9 *Seja $G = x_3(x_1^2 - x_0 x_2) + h_3$ nas condições acima e $S = Z(G)$. Então*

1. S só possui singularidades isoladas.
2. $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é uma singularidade isolada do tipo A_1 .
3. Se $\tilde{Q} \in Z(x_1^2 - x_0x_2, h_3)$ é tal que $I_{\tilde{Q}}(Z(x_1^2 - x_0x_2), Z(h_3)) = m \geq 2$, então $\tilde{Q}$ determina uma única singularidade isolada do tipo A_{m-1} .

Demonstração:

1. Sejam $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \neq P$ outro ponto singular de S e $R \in l_{P,Q}$. Assim $R = [sq_0 : sq_1 : sq_2 : sq_3 + t]$, onde $[s : t] \in \mathbb{P}^1$. Note que $\frac{\partial G}{\partial x_3}(R) = s^2 \frac{\partial G}{\partial x_3}(Q) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_2}(R) = s^2 \frac{\partial G}{\partial x_2}(Q) - stq_0 = -stq_0$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(R) = s^2 \frac{\partial G}{\partial x_1}(Q) + 2stq_1 = 2stq_1$ e $\frac{\partial G}{\partial x_0}(R) = s^2 \frac{\partial G}{\partial x_0}(Q) - stq_2 = -stq_2$. Segue que R é um ponto singular de S se, e somente se, $stq_0 = stq_1 = stq_2 = 0$. Como $Q \neq P$ concluímos que $st = 0$. Portanto $l_{P,Q} \cap \text{Sing}(S) = \{P, Q\}$, e portanto S só admite singularidades isoladas.
2. Agora, no aberto afim $x_3 = 1$, obtemos $G = x_1^2 - x_0x_2 + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1x_2 + a_4x_0x_2^2 + a_5x_1x_2^2 + a_6x_2^3$. Atribuindo os pesos $x_0 \leftrightarrow \frac{1}{2}$, $x_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}$ e $x_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}$ e usando o Princípio do Reconhecimento obtemos $G \sim x_1^2 - x_0x_2 \sim x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Portanto P é uma singularidade isolada do tipo A_1 .
3. É possível provar que a multiplicidade de interseção das curvas $Z(x_1^2 - x_0x_2)$ e $Z(h_3)$ no ponto $[0 : 0 : 1]$ é igual a multiplicidade da raiz $[0 : 1]$ do polinômio $h_3(a^2, ab, b^2) = a_0a^6 + a_1a^5b + a_2a^4b^2 + a_3a^3b^3 + a_4a^2b^4 + a_5ab^5 + a_6b^6$. Assim dividiremos a prova em 5 casos.

Caso 1. $I_{[0:0:1]}(Z(x_1^2 - x_0x_2), Z(h_3)) = 2$. Neste caso devemos ter $a_6 = a_5 = 0$ e $a_4 \neq 0$. Daí $G = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1x_2 + a_4x_0x_2^2$. Considere a projetividade $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $T_\bullet x_i = x_i$, $i = 0, 1, 2$ e $T_\bullet x_3 = x_3 + a_4x_2$. Assim $\mathbb{T}([0 : 0 : 1 : -a_4]) = [0 : 0 : 1 : 0]$ e $T_\bullet G = (x_3 + a_4x_2)(x_1^2 - x_0x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1x_2 + a_4x_0x_2^2$. No aberto afim $x_2 = 1$, temos $T_\bullet G = x_3x_1^2 - x_0x_3 + a_4x_1^2 + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2 + a_3x_0x_1$. Atribuindo peso $\frac{1}{2}$ a cada uma das variáveis x_0, x_1, x_3 e usando o Princípio do Reconhecimento, obtemos $-x_0x_3 + a_4x_1^2 + a_2x_0^2 + a_3x_0x_1$. Aplicando o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0 + ix_3$, $x_1 \mapsto ux_1$, $x_3 \mapsto (a_2 - 1)x_0 + a_3ux_1 + i(a_2 + 1)x_3$ com $a_4u^2 = 1$ obtemos $T_\bullet G = x_0^2 + x_1^2 + x_3^2$. Logo $Q = [0 : 0 : 1 : -a_4]$ é uma singularidade do tipo A_1 .

Caso 2. $I_{[0:0:1]}(Z(x_1^2 - x_0x_2), Z(h_3)) = 3$. Neste caso, $a_6 = a_5 = a_4 = 0$ e $a_3 \neq 0$. Logo $G = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1x_2$. Como $a_4 = 0$ então $Q = [0 : 0 : 1 : 0]$, e portanto não há necessidade de uma nova mudança de coordenadas. Daí, no aberto afim $x_2 = 1$, temos $G = x_3x_1^2 - x_0x_3 + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2 + a_3x_0x_1$. Aplicando o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_3 + a_3x_1$, em seguida atribuindo os pesos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente às variáveis x_0 , x_1 e x_3 e usando o Princípio do Reconhecimento obtemos $G \sim a_3x_1^3 - x_0x_3 + a_2x_0^2$. Por fim, aplicando o isomorfismo induzido por $x_1 \mapsto x_1$, $x_0 \mapsto x_0 + ix_3$, $x_3 \mapsto (a_2 - 1)x_0 + (a_2 + 1)ix_3$ com $u^3a_3 = 1$ obtemos $G \sim x_1^3 + x_0^2 + x_3^2$. Logo Q é uma singularidade isolada do tipo A_2 .

Caso 3. $I_{[0:0:1]}(Z(x_1^2 - x_0x_2), Z(h_3)) = 4$. Neste caso, $a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = 0$ e $a_2 \neq 0$. Logo $G = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2$. No aberto afim $x_2 = 1$, obtemos $G = x_3x_1^2 - x_3x_0 + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2$. Atribuindo os pesos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$

respectivamente às variáveis x_0, x_1 e x_3 e usando o Princípio do Reconhecimento temos $G = x_3x_1^2 - x_3x_0 + a_2x_0^2$. Aplicando o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto ix_0 + u^2x_1^2 + x_3$, $x_1 \mapsto ux_1$, $x_3 \mapsto (a_2 + 1)ix_0 + 2a_2u^2x_1^2 + (a_2 - 1)x_3$ com $a_2u^4 = 1$, concluimos que $G \sim x_1^4 + x_0^2 + x_3^2$, e portanto Q é uma singularidade isolada do tipo A_3 .

Caso 4. $I_{[0:0:1]}(Z(x_1^2 - x_0x_2), Z(h_3)) = 5$. Neste caso, $a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Logo $G = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1$. No aberto afim $x_2 = 1$, obtemos $G = x_3x_1^2 - x_3x_0 + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1$. Aplicando o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0 + x_1^2$, $x_1 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_3$ temos que $G \sim -x_0x_3 + a_1x_1^5 + a_0x_0^3 + 3a_0x_0^2x_1^2 + 3a_0x_0x_1^4 + a_0x_1^6 + a_1x_0^2x_1 + 2a_1x_0x_1^3$. Atribuindo os pesos $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente às variáveis x_0, x_1 e x_3 e usando o Princípio do Reconhecimento obtemos que $G \sim -x_0x_3 + a_1x_1^5 \sim x_1^5 + x_0^2 + x_3^2$. Logo $Q = [0 : 0 : 1 : 0]$ é uma singularidade isolada do tipo A_4 .

Caso 5. $I_{[0:0:1]}(Z(x_1^2 - x_0x_2), Z(h_3)) = 6$. Neste caso, $a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = 0$ e $a_0 \neq 0$. Logo $G = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + a_0x_0^3$. No aberto afim $x_2 = 1$ obtemos $G = x_3x_1^2 - x_3x_0 + a_0x_0^3$. Aplicando o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x_0 + x_1^2$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_3 \mapsto x_3$ temos $G \sim -x_0x_3 + a_0(x_0 + x_1^2)^3$. Atribuindo os pesos $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$ respectivamente às variáveis x_0, x_1 e x_3 e usando o Princípio do Reconhecimento temos $G \sim -x_0x_3 + a_0x_1^6 \sim x_1^6 + x_0^2 + x_3^2$. Logo $Q = [0 : 0 : 1 : 0]$ é uma singularidade isolada do tipo A_5 .

■

Para finalizar este capítulo vamos contabilizar as retas sobre a superfície cúbica S para o caso em que posto de f_2 é igual a 3. Novamente estamos considerando S uma superfície cúbica singular irredutível e reduzida. O algoritmo utilizado será o mesmo do caso anterior. Primeiro vamos contar as retas que passam por $P = [0 : 0 : 0 : 1]$, que pela proposição 3.5 estão em bijeção com $Z(f_2) \cap Z(f_3)$. Depois iremos determinar para cada par de retas que passam por P o único plano que as contem. A proposição 3.6 garante que cada reta que não passa por P está contido em algum destes planos ou em algum outro plano contendo uma reta que passa por P associada a um ponto múltiplo da interseção $Z(f_2) \cap Z(f_3)$. Veremos que neste caso as estimativas da proposição 3.6 são verificadas no sentido de que cada plano determinado por um par de retas passando por P contém uma reta que não contém P e sempre que a interseção $Z(f_2) \cap Z(f_3)$ tiver um ponto múltiplo a reta associada determinará uma nova reta que não passa por P . Tudo isso será provado na proposição abaixo.

Teorema 3.7 *Seja S nas condições supracitadas. Assuma que posto de f_2 é igual a 3, então a cardinalidade de $\mathfrak{A} = Z(f_2) \cap Z(f_3)$, o número de retas contidas em S e os tipos de singularidades se relacionam conforme a tabela abaixo.*

$\sharp(\mathfrak{A})$	n° de retas	sing.
6	21	A_1
5	16	$2A_1$
4	12	$3A_1$
3	9	$4A_1$
	8	$2A_1A_2$
2	5	$2A_1A_3$
	5	A_12A_2
	4	A_1A_4
1	2	A_1A_5

Demonstração: Começaremos com o caso $\sharp(\mathfrak{A}) = 6$. Sejam $P_1, \dots, P_6$ os pontos da interseção $\mathfrak{A} = Z(f_2) \cap Z(f_3)$. Sendo $f_2 = x_1^2 - x_0x_2$ e usando uma mudança de coordenadas projetivas se for preciso, podemos assumir que os pontos da interseção são da forma $P_i = [a_i^2 : a_i : 1]$, $i = 1, \dots, 6$. Pela proposição 3.5 temos seis retas $l_{P,P_1}, \dots, l_{P,P_6}$ contidas em S que passam por P . Por outro lado, sabemos que a menos de uma mudança de coordenadas podemos considerar $F = x_3(x_1^2 - x_0x_2) + f_3$, com $f_3 = x_0^3 + c_1x_0^2x_1 + c_2x_0^2x_2 + c_3x_0x_1x_2 + c_4x_0x_2^2 + c_5x_1x_2^2 + c_6x_3^2$. Sendo $a_1, \dots, a_6$ as raízes de $f_3(x^2, x, 1) = x^6 + c_1x^5 + c_2x^4 + c_3x^3 + c_4x^2 + c_5x + c_6$, podemos usar as relações de Girard para expressar os coeficientes $c_1, \dots, c_6$ em termos dos parâmetros $a_1, \dots, a_6$. Seja $\pi_{12} = Z(x_0 - (a_1 + a_2)x_1 + a_1a_2x_2)$ o plano determinado pelas retas $l_{P,P_1} = Z(x_1 - a_1x_2, x_0 - (a_1 + a_2)x_1 + a_1a_2x_2)$ e $l_{P,P_2} = Z(x_1 - a_2x_2, x_0 - (a_1 + a_2)x_1 + a_1a_2x_2)$. Note que $F((a_1 + a_2)x_1 - a_1a_2x_2, x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1x_2)(x_1 - a_2x_2)L_{12}$, onde $L_{12} = (-2a_1a_2a_4 - 2a_1a_2a_3 - 2a_1a_2a_6 - 2a_1a_2a_5 - a_2^2a_4 - a_2^2a_5 - a_1^2a_3 - a_2^2a_3 - a_1^2a_5 - a_1^2a_6 - a_1^2a_4 - a_2^2a_6)x_1 + (a_1a_2^2a_6 + a_1^2a_2a_5 + a_1^2a_2a_4 + a_1a_2^2a_5 + a_1^2a_2a_6 - a_2a_3a_4a_5 + a_1a_2^2a_4 - a_1a_3a_4a_6 + a_1^2a_2a_3 - a_1a_3a_5a_6 + a_1a_2^2a_3 - a_1a_3a_4a_5 - a_1a_4a_5a_6 - a_2a_3a_5a_6 - a_2a_4a_5a_6 - a_2a_3a_4a_6)x_2 + x_3$. Assim $S \cap \pi_{12}$ consiste de três retas, a saber l_{P,P_1} , l_{P,P_2} e $l_{12} = Z(x_0 - (a_1 + a_2)x_1 + a_1a_2x_2, L_{12})$. A reta l_{12} é diferente das seis anteriores porque $P \notin l_{12}$. Com este raciocínio determinamos 15 novas retas l_{ij} , cada uma delas diferente das seis retas que passam por P . Para verificar que as retas l_{ij} com $i < j \in \{1, \dots, 6\}$ são duas a duas distintas note que $[a_{i_1} + a_{i_2} : 1 : 0 : -(a_{i_1} + a_{i_2})^2(a_{i_3} + a_{i_4} + a_{i_5} + a_{i_6})] \in l_{i_1i_2}$. Assim, por exemplo, a reta l_{12} é diferente das retas l_{1j} e l_{2j} com $j = 3, \dots, 6$. Mas poderíamos ter $l_{12} = l_{34}$ no caso em que tivéssemos $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$. No entanto, note que os planos π_{12} e π_{jk} com $j < k \in \{3, 4, 5, 6\}$ são distintos, pois do contrário teríamos uma curva de grau quatro neste plano. Logo a reta l_{12} é diferente de todas as outras. Os demais casos seguem de forma análoga, sendo válido ressaltar que sempre que depararmos com um ponto múltiplo de $\mathfrak{A}$ o processo descrito acima pode não determinar todas as retas sobre S . Neste caso procedemos como no teorema 3.6, determinamos todos os planos contendo a reta associada a este ponto múltiplo e intersectamos com S afim de obter uma nova reta. ■

Apêndice A

Resultados Preliminares

Neste anexo iremos abordar de forma sucinta os temas necessários para o desenvolvimento desta dissertação. A referencia básica para este capítulo é [4].

Topologia de Zariski

Seja K um corpo algebricamente fechado e $A = K[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $x_1, \dots, x_n$. Definimos o conjunto de zeros de um ideal $I \subset A$ como o conjunto

$$Z(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I\}.$$

Agora considere a família $\Sigma = \{Z(I)^c\}_{I \in \mathfrak{I}(A)}$, onde $\mathfrak{I}(A)$ denota a família de todos os ideais de A . Temos que:

1. $\emptyset, K^n \in \Sigma$
2. $Z(I_1) \cup Z(I_2) \in \Sigma$
3. $\bigcap Z(I_\lambda)_{\lambda \in L} \in \Sigma$, onde L é uma família qualquer de índices.

Assim temos que Σ define uma topologia em K^n denominada **Topologia de Zariski**.

Dado $X \subset K^n$ definimos o ideal de X por $\mathfrak{I}(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f \equiv 0 \text{ em } X\}$. Assim temos o seguinte resultado.

Proposição A.1 *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $A = K[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $x_1, \dots, x_n$. Para todo ideal I de A , temos que*

$$\mathfrak{I}(Z(I)) = \sqrt{I}.$$

Demonstração: Veja teorema 1.16 pag. 23 em [6]. ■

Dizemos que um espaço topológico não vazio X é irredutível quando satisfaz as seguintes condições equivalentes:

1. X não pode ser escrito como uma união de subconjuntos fechados próprios.
2. A interseção de dois abertos não vazios é não vazia.

3. Todo aberto não vazio é denso.

De posse desta definição podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição A.2 *Dado $X \subset K^n$, temos que X é irredutível se, e somente se, $\mathfrak{S}(X)$ é um ideal primo.*

Demonstração: Ver [6] pág. 20. ■

Espaço Afim e Espaço Projetivo

Definição A.1 (Espaço Afim) *O espaço afim $\mathbb{A}^n$ é o conjunto $\mathbb{C}^n$ munido da topologia de Zariski.*

Definição A.2 (Variedade afim) *Uma variedade afim do espaço afim $\mathbb{A}^n$ é um fechado $Z(I)$ da topologia de Zariski.*

Definição A.3 (Espaço Projetivo) *Seja K um corpo e V um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ sobre K . Podemos definir a seguinte relação de equivalência em $V - \{0\}$,*

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \text{ tal que } u = \lambda v.$$

Assim definimos o Espaço Projetivo associado a V pelo quociente:

$$\mathbb{P}(V) := \frac{V - \{0\}}{\sim}.$$

Denotaremos por $[u] \in \mathbb{P}(V)$ a classe de equivalência de $u \in V - \{0\}$.

Exemplo A.1 *Se $K = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{C}^{n+1}$, então $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ é chamado de n -Espaço Projetivo. Dado $v = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, o ponto $p = [v] \in \mathbb{P}^n$ será denotado por $p = [p_0 : p_1 : \dots : p_n]$, onde $p_i \in \mathbb{C}$ são chamadas de coordenadas homogêneas de p .*

Definição A.4 *Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Chamamos F de polinômio homogêneo de grau d se para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tivermos $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$. O polinômio nulo é homogêneo de qualquer grau.*

Sabemos que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano, isto é, todo ideal é finitamente gerado. Um ideal I é dito homogêneo quando admite um conjunto de geradores homogêneos.

Definição A.5 (Variedade projetiva) *Uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é o conjunto de zeros de um ideal homogêneo $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, isto é, $X = Z(I)$, onde*

$$Z(I) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I\}.$$

Uma variedade X , afim ou projetiva, será dita irredutível quando for irredutível como espaço topológico.

Definição A.6 *As variedades definidas por um ou mais polinômios homogêneos de grau 1 são chamadas de variedades lineares ou variedades projetivas lineares em $\mathbb{P}^n$.*

Exemplo A.2 As variedades em $\mathbb{P}^n$ dadas por apenas um polinômio não constante e livre de quadrados são chamadas de hipersuperfícies, e possuem o grau do polinômio que as define. Por exemplo,

- (i) Uma hipersuperfície de grau um em $\mathbb{P}^n$ é chamada de hiperplano.
- (ii) Uma hipersuperfície de grau dois em $\mathbb{P}^2$ é chamada de cônica.
- (iii) Uma hipersuperfície de grau dois em $\mathbb{P}^3$ é chamada de superfície quádrlica.
- (iv) Uma hipersuperfície de grau três em $\mathbb{P}^3$ é chamada de superfície cúbica.

Definição A.7 Consideremos a variedade linear $l = Z(l_1, \dots, l_{n-1}) \subset \mathbb{P}^n$ onde $l_i = a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, $i = 1, \dots, n-1$. Seja J_l a seguinte matriz:

$$J_l = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Dizemos que l é uma reta em $\mathbb{P}^n$ se o posto de J_l é igual a $n-1$.

Proposição A.3 Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo de grau d não nulo e $l \subset \mathbb{P}^n$ uma reta, então $l \subset Z(F)$ ou $l \cap Z(F)$ consiste de no máximo d pontos.

Demonstração: Veja proposição 5 pag. 64 em [8]. ■

Definição A.8 Um subconjunto finito $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ de um corpo K é dito algebricamente independente se o único polinômio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ é o polinômio nulo. Um subconjunto arbitrário $S \subset K$ é dito algebricamente independente quando cada subconjunto finito $S' \subset S$ for algebricamente independente. Um subconjunto $S \subset K$ é dito algebricamente dependente quando não for algebricamente independente.

Definição A.9 Seja K um corpo e F uma extensão de K . Um subconjunto $S \subset F$ é uma base de transcendência para F se S é um conjunto algebricamente independente sobre K tal que F é uma extensão algébrica de $K(S)$.

Exemplo A.3 O subconjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base de transcendência para o corpo de frações $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$.

É possível mostrar que quaisquer duas bases de transcendência de F têm a mesma cardinalidade. Assim faz sentido a seguinte definição.

Definição A.10 Seja K um corpo e F uma extensão de K . O grau de transcendência de F sobre K é definido como a cardinalidade de qualquer base de F .

Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade irredutível. Definimos o anel de coordenadas de X como sendo $A(X) = \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{\mathfrak{S}(X)}$. Sendo X irredutível temos que $\mathfrak{S}(X)$ é um ideal primo, e portanto $A(X)$ é um domínio de integridade. Assim podemos falar no corpo de fração do

anel $A(X)$ que também chamamos de corpo de funções da variedade X e denotamos por $K(X)$.

No caso de uma variedade projetiva irredutível $X \subset \mathbb{P}^n$. Seja i tal que $X \cap U_i \neq \emptyset$, então definimos o corpo de funções de X , $K(X)$, como o corpo de frações $K(U)$ onde¹ $U = X \cap U_i$.

Definição A.11 (Dimensão) *A dimensão de uma variedade irredutível $X \subset \mathbb{P}^n$ é por definição o grau de transcendência do corpo de frações $K(X)$ sobre $\mathbb{C}$.*

A dimensão de uma variedade redutível $X \subset \mathbb{P}^n$ é definida como o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis. Se todas as componentes tem a mesma dimensão d dizemos que X tem dimensão pura igual a d .

Exemplo A.4 *Os espaços $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n$ têm dimensão n .*

Exemplo A.5 *A variedade linear $Z(f_1, \dots, f_{n-k}) \subset \mathbb{P}^n$, com $\{f_1, \dots, f_{n-k}\}$ L.I, tem dimensão igual a k .*

Proposição A.4 *Se $X \subset Y$, então $\dim X \leq \dim Y$. Agora, se Y é irredutível e $X \subset Y$ é uma subvariedade fechada com $\dim X = \dim Y$, então $X = Y$.*

Demonstração: Veja teorema 1 pag. 68 em [9]. ■

Definição A.12 *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$. Dizemos que X é uma variedade quase-projetiva se existir um aberto $A \subset \mathbb{P}^n$ e um fechado $F \subset \mathbb{P}^n$ tal que $X = A \cap F$.*

Definição A.13 *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade algébrica quase-projetiva e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é regular em $p \in X$ se, e somente se, existe um aberto $U \subset X$ contendo p e $F, G \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos do mesmo grau tais que:*

$$f(q) = \frac{F(q)}{G(q)} \quad \forall q \in U \quad \text{e} \quad G(q) \neq 0 \quad \forall q \in U.$$

Dizemos que f é regular quando for regular em todo ponto $p \in X$.

Definição A.14 *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quase-projetiva e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ uma função. Dizemos que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ é regular ou morfismo se, e somente se, $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função regular para todo $i = 1, \dots, m$.*

Definição A.15 *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade algébrica quase-afim e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^m$ uma função. Dizemos que φ é regular ou um morfismo se, e somente se:*

1. φ é contínua.
2. Para todo aberto $U_i = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^m \mid a_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^m$ tem-se que $\varphi_i = \varphi|_{\varphi^{-1}(U_i)} : \varphi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \cong \mathbb{A}^m$ é regular.

¹Considere $U_i = Z(x_i)^C \subset \mathbb{P}^n$, existe um bijeção $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$ induzida pela aplicação $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$. Assim quando escrevemos $U = X \cap \mathbb{A}^n$, a rigor, estamos nos referimos ao conjunto $U = \varphi(X \cap U_i)$.

Exemplo A.6 Sejam $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ polinômios homogêneos de grau d tais que $Z(f_0, \dots, f_n) = \emptyset$. A aplicação $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $q \mapsto [f_0(q) : \dots : f_n(q)]$ é um morfismo.

Teorema A.1 (Teorema da Dimensão das Fibras) Seja $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um morfismo regular entre variedades projetivas e seja $Y = f(X) \subset \mathbb{P}^n$. Então:

$$1 \dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y, \forall y \in Y.$$

$$2 \text{ Existe um aberto não vazio } U \subset Y \text{ tal que } \dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y, \forall y \in U.$$

Demonstração: Veja teorema 6 pag. 76 em [9]. ■

Observação A.1 Dadas as variedades projetivas $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ o mergulho de Segre (Veja [9] pag. 54) nos permite dar uma estrutura de variedade projetiva ao produto cartesiano $X \times Y$. Também pode-se definir a noção de morfismo regular para funções cujo domínio está contido num produto.

Corolário A.1 Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ variedades projetivas. Então $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Demonstração: Considere o morfismo $p : X \times Y \rightarrow X$ dado por $(x, y) \mapsto x$. Temos que $p^{-1}(x) = \{(x, y) \mid y \in Y\} = \{x\} \times Y \equiv Y$. Segue do Teorema da dimensão das fibras que $\dim(X \times Y) - \dim X = \dim Y$, isto é, $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$. ■

Definição A.16 Dada uma hipersuperfície $X = Z(f) \in \mathbb{P}^n$, definimos o espaço tangente a X no ponto $P \in X$ como

$$T_P X = \left\{ [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) x_i = 0 \right\}.$$

Definição A.17 Seja $X = Z(f)$ uma hipersuperfície, dizemos que $P \in X$ é um ponto singular se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$ ($i = 0, \dots, n$). Do contrário dizemos que P é um ponto regular.

Proposição A.5 Dada uma hipersuperfície irredutível $X = Z(f) \subset \mathbb{P}^n$ o conjunto

$$X_{reg} := \{P \in X \mid P \text{ é um ponto regular de } X\}$$

é aberto e denso em X .

Demonstração: Note que X_{sing} , o complementar de X_{reg} , é dado por

$$X_{sing} = Z\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

e portanto é um fechado. Logo X_{reg} é aberto. Para completar a demonstração note que sendo X irredutível temos que qualquer aberto não vazio é denso. Assim resta provar que $X_{sing} \neq X$. Com efeito, suponha que $X_{sing} = X$, então todas as derivadas parciais se anulam em X , isto é, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \langle f \rangle$. Como o grau de f é maior que o grau de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ temos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, e portanto f é constante, o que é uma contradição. ■

Definição A.18 Dizemos que um ponto P de uma hipersuperfície $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma singularidade isolada se existir um aberto U de X contendo P tal que P é o único ponto singular de X em U .

Por exemplo, $P = [0 : 0 : 0 : 1]$ é uma singularidade isolada de $Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) \subset \mathbb{P}^3$.

Grassmannianas e Mergulho de Plücker

Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo K , a k -grassmanniana de V , denotada por $G(k, V)$ ou $G(k, n)$, é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de V de dimensão k . O objetivo desta seção é dar uma estrutura de variedade projetiva à grassmanniana $G(k, V)$. Para isto vamos definir uma aplicação injetiva de $G(k, V)$ em $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} = \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ cuja imagem é uma subvariedade deste espaço.

Se fixarmos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V , então o conjunto $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ é uma base de $\bigwedge^k V$. Um k -vetor $w \in \bigwedge^k V$ é dito decomponível quando for possível escrevê-lo na forma $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. A afirmação abaixo fornece uma caracterização dos vetores decomponíveis de $\bigwedge^k V$.

Afirmção A.1 *Um vetor $w \in \bigwedge^k V$ é decomponível se, e somente se, o subespaço $L(w) = \{v \in V \mid w \wedge v = 0\} \subset V$ tem dimensão igual a k .*

Demonstração: Seja $w \in \bigwedge^k V$, $w \neq 0$ decomponível, então existem vetores linearmente independentes $v_1, \dots, v_k \in V$ tais que $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. Considere $L = [v_1, \dots, v_k]$ mostraremos que $L = L(w)$. Com efeito, se $x \in L$ então $w \wedge x = 0$, portanto $x \in L(w)$. Por outro lado, se $x \in L(w)$, então $w \wedge x = 0$. Daí $\bigwedge^{k+1}[v_1, \dots, v_k, x] = 0$. Portanto $x \in L$.

Reciprocamente, suponha que $\dim L(w) = k$. Então seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $L(w)$, podemos estendê-la a uma base $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ de V . Assim

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}.$$

Como $w \wedge v_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, temos que $a_{i_1 \dots i_k} = 0$, $\forall \{i_1, \dots, i_k\} \neq \{1, \dots, k\}$. Logo $w = a_{1 \dots k} v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. ■

Agora podemos falar sobre o Mergulho de Plücker, porém, para tornar a exposição mais acessível, começaremos com um caso particular.

Exemplo A.7 *Considere a grassmanniana $G(2, 4)$ e $\omega : G(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$ dada $L = [u, v] \mapsto \bigwedge^2 L = [u \wedge v]$.*

Para ver que esta aplicação está bem definida considere $\{u', v'\}$ outra base de L . Então $u' = x_1 u + x_2 v$ e $v' = y_1 u + y_2 v$. Daí $u' \wedge v' = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot u \wedge v$, isto é, $u' \wedge v' = \det(A) \cdot u \wedge v$, onde A é a matriz mudança de base da base $\{u', v'\}$ para a base $\{u, v\}$. Logo $[u \wedge v] = [u' \wedge v']$. Portanto, a aplicação está bem definida e sua imagem é o conjunto de todos os 2-vetores decomponíveis de $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$.

Para dar uma descrição do mergulho ω em termos de coordenadas homogêneas considere $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^4$ e $\{f_1, \dots, f_6\}$ base canônica de $\mathbb{C}^6$. Se definirmos o isomorfismo linear

$$\begin{aligned} \varphi : \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{C}^6 \\ e_1 \wedge e_2 &\longmapsto f_1 \\ &\vdots \\ e_3 \wedge e_4 &\longmapsto f_6 \end{aligned}$$

poderemos fazer a identificação $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4) \cong \mathbb{P}^5$. Assim sejam $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ e $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4$ temos que $u \wedge v = w_{12} e_1 \wedge e_2 + w_{13} e_1 \wedge e_3 + w_{14} e_1 \wedge e_4 + w_{23} e_2 \wedge e_3 + w_{24} e_2 \wedge e_4 + w_{34} e_3 \wedge e_4$ onde $w_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. Assim podemos descrever

o Mergulho Plücker como a correspondência $[u, v] \mapsto [w_{12} : \dots : w_{34}]$. As coordenadas $w_{12}, \dots, w_{34}$ são chamadas de coordenadas de Plücker, que na verdade são os menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

Para uma descrição da imagem de ω em coordenadas homogêneas note que, pela afirmação A.1, $w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ é decomponível se, e somente se, $\dim L(w) = 2$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem isto é equivalente a dizer que a aplicação $\varphi_w : \mathbb{C}^4 \rightarrow \bigwedge^3 \mathbb{C}^4$ dada por $x \mapsto w \wedge x$ tem posto 2. Mas se $[w] = [x_{12} : \dots : x_{34}]$, então φ_w tem como matriz

$$\begin{pmatrix} x_{23} & -x_{13} & x_{12} & 0 \\ x_{24} & -x_{14} & 0 & x_{12} \\ x_{34} & 0 & -x_{14} & x_{13} \\ 0 & x_{34} & -x_{24} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Esta matriz tem posto dois se, e somente se, todos os menores 3×3 são nulos e algum menor 2×2 é não nulo, isto nos dar que $x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24} + x_{12}x_{34} = 0$. Logo $\omega(G(2, 4)) = Z(F)$, onde $F = x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24} + x_{12}x_{34}$.

Para o caso geral considere $\omega : G(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^N$, onde $N = \binom{n}{k} - 1$, definido por $[v_1, \dots, v_k] \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$. Assim para caracterizar $G_{k,n}$ é suficiente caracterizar os vetores decomponíveis de $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$. Pela afirmação acima, um vetor $w \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ é decomponível se, e só se, $\dim L(w) = k$, mas isto só ocorre se, e somente se, o posto da matriz $\varphi_w : \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ dada por $x \mapsto w \wedge x$ for igual a $n - k$, o que é equivalente a dizer que os menores $(n - k) \times (n - k)$ da matriz de φ_w se anulam. Isto significa que as coordenadas Plücker de w satisfazem relações polinomiais de grau $n - k$.

Assim acabamos de mostrar o seguinte teorema:

Teorema A.2 Dada a aplicação $\omega : G(k, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ definida por $L \mapsto [\bigwedge^k L]$ (Mergulho de Plücker), temos que $G_{k,n} = \omega(G(k, \mathbb{C}^n)) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ é uma variedade projetiva.

Escrevendo as coordenadas de $\mathbb{P}^N$ na forma $[x_{1\dots k} : \dots : x_{n-k+1\dots n}]$, temos que o conjunto $Z(x_{i_1\dots i_k})^C$ é um aberto de $\mathbb{P}^N$. Dado $L = [v_1, \dots, v_k] \in G(k, n)$ e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$, temos que $v_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$, $i = 1, \dots, k$. Assim as coordenadas homogêneas $[p[1\dots k] : \dots : p[n - k + 1\dots n]]$ são dadas pelos menores $k \times k$ da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

ordenados lexicograficamente. Assim os conjuntos da forma $U_{i_1\dots i_k} = Z(x_{i_1\dots i_k})^C \cap G_{k,n} = \{[p[1\dots k] : \dots : p[n - k + 1\dots n]] \in G_{k,n} \mid p[i_1\dots i_k] = \det(A(i_1\dots i_k)) \neq 0\}$, onde $A(i_1\dots i_k)$ é o menor da matriz A formado pelas colunas $i_1, \dots, i_k$ formam uma cobertura aberta de $G_{k,n}$. A seguir usaremos este fato para mostrar que $G_{k,n}$ tem dimensão $k(n - k)$.

Proposição A.6 $G_{k,n}$ é uma subvariedade de $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ de dimensão igual a $(n - k)k$.

Demonstração: Podemos escolher uma base para $\mathbb{C}^n$ de forma que $A(i_1 \dots i_k) = I_k$. Como sobram $(n - k)k$ entradas arbitrárias na matriz A reescrita nessa nova base, então temos uma bijeção $U_{i_1 \dots i_k} \longleftrightarrow \mathbb{A}^{k(n-k)}$, que na verdade é um morfismo. Assim podemos usar o teorema da dimensão das fibras para concluir que $U_{i_1 \dots i_k}$ têm dimensão $k(n - k)$. Logo, concluímos que $G_{k,n}$ pode ser coberta por abertos de dimensão $k(n - k)$, e portanto $G_{k,n}$ tem dimensão $k(n - k)$. ■

Uma outra maneira de abordarmos a k -grassmanniana é por meio do conjunto $\mathbb{G}(k, n)$ das variedades lineares de dimensão k em $\mathbb{P}^n$. Assim dizemos que $\mathbb{G}(k, n)$ parametriza as variedades lineares de dimensão k ou k -planos de $\mathbb{P}^n$. Existe uma bijeção entre os conjuntos $\mathbb{G}(k, n)$ e $G(k + 1, n + 1)$ dada por $Z(f_1, \dots, f_{n-k}) \mapsto \bigcap_{i=1}^{n-k} \text{Ker}(f_i)$, onde $f_1, \dots, f_{n-k}$ são polinômios homogêneos de grau 1 em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ que também podem ser vistos como funcionais lineares do espaço dual $(\mathbb{C}^{n+1})^*$.

Variedade de Fano

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva, o conjunto $F_k(X) = \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, n) \mid \Lambda \subset X\}$ é uma subvariedade projetiva de $\mathbb{G}(k, n)$ denominada de variedade de Fano. O objetivo desta seção é calcular a dimensão desta subvariedade. Se $X = Z(f_1, \dots, f_s)$, temos que $F_k(X) = F_k(X_1) \cap \dots \cap F_k(X_s)$, onde $X_i = Z(f_i)$. Assim podemos reduzir nosso estudo sobre $F_K(X)$ ao caso em que X é uma hipersuperfície.

Proposição A.7 *Considere uma hipersuperfície $X \subset \mathbb{P}^n$ de grau d . Temos que $F_k(X) \subset \mathbb{G}(k, n)$ é uma subvariedade de dimensão*

$$\varphi(n, k, d) = (k + 1)(n - k) - \binom{k + d}{k}.$$

Demonstração:

Dado $\Lambda = Z(f_1, \dots, f_{n-k}) \in \mathbb{G}(k, n)$, vamos calcular a dimensão do $\mathbb{C}$ -espaço vetorial $\mathfrak{S}(\Lambda)_d = \{f \in \mathfrak{S}(\Lambda) \mid f \text{ é homogêneo de grau } d\}$. Note que $\mathfrak{S}(\Lambda) = \langle f_1, \dots, f_{n-k} \rangle$. Desta forma $\mathfrak{S}(\Lambda)_d = \{f_1 g_1 + \dots + f_{n-k} g_{n-k} \mid g_1, \dots, g_{n-k} \in R_{d-1}\}$. Como $\{f_1, \dots, f_{n-k}\} \subset (\mathbb{C}^{n+1})^*$ são linearmente independentes podemos completá-lo a uma base $\alpha = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$. Note que α é algebricamente independente. Desta forma $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n+1}]$. Agora considere a aplicação linear

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n+1}]_d &\longrightarrow \mathbb{C}[f_{n-k+1}, \dots, f_{n+1}]_d \\ f_1 g_1 + \dots + f_{n+1} g_{n+1} &\longmapsto f_{n-k+1} g_{n-k+1} + \dots + f_{n+1} g_{n+1} \end{aligned}$$

Note que $\text{Ker} \varphi = \mathfrak{S}(\Lambda)_d$. Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$l = \dim \mathfrak{S}(\Lambda)_d = \binom{n + d}{d} - \binom{k + d}{d}$$

Considere agora subvariedade $\Gamma = \{(\Lambda, [G]) \in \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{P}(R_d) \mid \Lambda \subset X\}$ de $\mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{P}(R_d)$. Vamos calcular a dimensão de Γ . Para isto considere $p_1 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{G}(k, n)$ dado por $(\Lambda, [G]) \longmapsto \Lambda$. Segue que $p_1^{-1}(\Lambda) = \{(\Lambda, [G]) \in \Gamma \mid \Lambda \subset X\} = \{(\Lambda, [G]) \in \Gamma \mid G \in$

$\mathfrak{S}(\Lambda)_d = \{\Lambda\} \times \mathbb{P}(\mathfrak{S}(\Lambda)_d) \equiv \mathbb{P}^l$. Portanto, pelo Teorema da dimensão das fibras, temos que $\dim \Gamma - \dim \mathbb{G}(k, n) = \dim \mathbb{P}^l$. Logo $\dim \Gamma = l + (k+1)(n-k) - 1$.

Finalmente vamos calcular a dimensão de $F_k(X)$. Considere $p_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{S}(\Lambda)_d)$ definida por $(\Lambda, [G]) \mapsto [G]$. Segue que $p_2^{-1}([G]) = \{(\Lambda, [G]) \in \Gamma \mid \Lambda \subset X\} = \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, n) \mid \Lambda \subset X\} \times \{[G]\} \equiv F_k(X)$. Assim, pelo Teorema da Dimensão das Fibras, temos que $\dim \Gamma - \dim \mathbb{P}(R_d) = \dim F_k(X)$. Portanto $\dim F_k(X) = \varphi(n, k, d)$. ■

Teorema A.3 *Para todo n, k e $d \geq 3$ temos que a variedade de Fano $F_k(X)$ de k -planos numa hipersuperfície geral de $\mathbb{P}^n$ é vazia se $\varphi(n, d, k) < 0$, e de dimensão $\varphi(n, d, k)$ se $\varphi(n, d, k) \geq 0$.*

Demonstração: Veja teorema 12.8 pag. 154 em [4]. ■

Corolário A.2 *Uma superfície $S \subset \mathbb{P}^3$ de grau $d \geq 4$ pode não conter retas.*

Mudança de Coordenadas Projetivas

Nosso objetivo é definir uma bijeção $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ que transforma uma variedade projetiva X em uma outra variedade projetiva $\mathbb{T}(X)$ e que preserva propriedades como grau, dimensão, singularidades e etc. Com efeito, dado um isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ a aplicação induzida $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\mathbb{T}([v]) = [T(v)]$ é dita *projetividade* ou *mudança de coordenadas projetivas*.

Note ainda que um isomorfismo $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ também induz o isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $T_\bullet : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ que associa a cada polinômio $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ o polinômio $T_\bullet F(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$. Além disso, observe que $T_\bullet$ preserva grau e portanto induz o isomorfismo $T_d : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ dado por $T_d F = T_\bullet F$.

Na prática usamos uma mudança de coordenadas quando queremos obter expressões mais simples para os polinômios que definem uma dada variedade. Por exemplo, os polinômios $f = x_0x_1 + x_2x_3$ e $g = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ definem a mesma quádrlica em $\mathbb{P}^3$, a menos de uma mudança de coordenadas projetivas. Intuitivamente podemos obter o polinômio g a partir do polinômio f substituindo respectivamente x_0, x_1, x_2, x_3 por $x_0 + ix_1, x_0 - ix_1, x_2 + ix_3, x_2 - ix_3$. Veremos adiante que este processo de substituição de variáveis induz uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbb{T}(Z(f)) = Z(g)$.

Lembremos que para se definir um isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $T_\bullet : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ basta escolher a imagem das constantes e de cada indeterminada. Assim, considere

$$\begin{array}{ccc} T_\bullet : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \\ a & \longmapsto & a \\ x_0 & \longmapsto & T_\bullet x_0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \longmapsto & T_\bullet x_n \end{array}$$

isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras tal que $\{T_\bullet x_0, \dots, T_\bullet x_n\} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1$ é linearmente independente. Segue que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} T^{-1} : \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & (T_\bullet x_0, \dots, T_\bullet x_n) \end{array}$$

é um isomorfismo linear cuja inversa induz uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$. Por fim, dado $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ temos que $T_d F(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n)) = F(T_\bullet x_0, \dots, T_\bullet x_n)$.

Lema A.1 *Sejam $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ uma mudança de coordenadas induzida pelo isomorfismo $T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ e $X = Z(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Segue que $\mathbb{T}(X) = Z(T_{d_1} f_1, \dots, T_{d_k} f_k)$, onde d_i é o grau de f_i , isto é, mudança de coordenadas preserva variedades algébricas.*

Demonstração: Note que $\mathbb{T}(Z(f_i)) = \{[T(v)] \mid [v] \in Z(f_i)\} = \{[T(v)] \mid f_i(v) = 0\} = \{[w] \mid f_i(T^{-1}(w)) = 0\} = Z(T_{d_i} f_i)$. Segue que $\mathbb{T}(X) = \mathbb{T}(\bigcap_{i=1}^k Z(f_i)) = \bigcap_{i=1}^k \mathbb{T}(Z(f_i)) = \bigcap_{i=1}^k Z(T_{d_i} f_i) = Z(T_{d_1} f_1, \dots, T_{d_k} f_k)$. ■

Lema A.2 *Sejam $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície e $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ uma mudança de coordenadas projetivas. Se $P \in \text{Sing}(X)$, então $\mathbb{T}(P) \in \text{Sing}(\mathbb{T}(X))$, isto é, mudança de coordenadas projetivas preserva singularidades.*

Demonstração: Considere $[T^{-1}] = (a_{ij})$ a matriz de $T^{-1} : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ na base canônica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja P um ponto singular de X , ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Segue da regra da cadeia que

$$\frac{\partial (F \circ T^{-1})}{\partial x_j}(T(P)) = \sum_{i=0}^n a_{i+1,j+1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

Logo $\mathbb{T}(P)$ é um ponto singular de $\mathbb{T}(X)$. ■

Lema A.3 *Sejam $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície e $\mathbb{T} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ uma mudança de coordenadas projetivas. Segue $\dim(X) = \dim(\mathbb{T}(X))$, isto é, mudança de coordenadas preserva dimensão.*

Demonstração: A priori considere X como sendo uma variedade projetiva irredutível. Note que X é irredutível se, e somente se $\mathbb{T}(X)$ também o é. O isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ que induz a mudança de coordenadas projetivas $\mathbb{T}$ também induz um isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\begin{aligned} T_\bullet : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \\ F(x_0, \dots, x_n) &\longmapsto F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Afirmamos que $T_\bullet(\mathfrak{I}(X)) = \mathfrak{I}(\mathbb{T}(X))$. Com efeito, $T_\bullet F \in T_\bullet(\mathfrak{I}(X)) \iff F(v) = 0$ sempre que $[v] \in X \iff T_\bullet F(w) = 0$ sempre que $[w] = [T(v)] \in \mathbb{T}(X) \iff T_\bullet F \in \mathfrak{I}(\mathbb{T}(X))$. Disto, segue que

$$\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{\mathfrak{I}(X)} \simeq \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{\mathfrak{I}(\mathbb{T}(X))}.$$

Sendo os corpos acima isomorfos segue que seus graus de transcendência são iguais, o que implica em $\dim(X) = \dim(\mathbb{T}(X))$. No caso de X ser redutível com componentes

$X_1, \dots, X_k$, temos que $\mathbb{T}(X)$ também é redutível com componentes $\mathbb{T}(X_1), \dots, \mathbb{T}(X_k)$. Logo

$$\dim(X) = \max_i \{\dim(X_i)\} = \max_i \{\dim(\mathbb{T}(X_i))\} = \dim(\mathbb{T}(X)).$$

■

Teorema A.4 (*Forma Normal para Quádricas em $\mathbb{P}^n$*) Seja $Q \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície quádrlica. A menos de uma mudança de coordenadas, Q é definido por um polinômio homogêneo de uma das seguintes formas:

- 1) $F_1 = x_0^2$;
- 2) $F_2 = x_0^2 + x_1^2$;
- $\vdots$
- $n+1$) $F_{n+1} = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Demonstração: De fato, seja $F = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x_i x_j = x^t A x$, onde $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e

$A = (a_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$ é uma matriz simétrica. Sabemos que existe uma matriz ortogonal

P tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$. Considere o isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$

cujas matriz associada na base canônica é P . Temos que $T_\bullet F = \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 x_i^2$. Considerando

$S : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ onde $S_\bullet x_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } \lambda_i = 0 \\ \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}}, & \text{se } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$ e renomeando os índices se necessário

concluimos que $S_\bullet(T_\bullet F) = \sum_{i=0}^k x_i^2$. ■

Apêndice B

Classificação Projetiva das Cúbicas em $\mathbb{P}^2$

Neste apêndice são apresentadas algumas das noções básicas no estudo das curvas algébricas planas, segundo as referências [6], [10] e [11].

Lembremos que uma curva plana de grau d em $\mathbb{P}^2$ é dada pela classe de equivalência de um polinômio homogêneo não nulo em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$, onde $f \sim g$ com $f, g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ se existir $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $f = \lambda g$. Naturalmente, se a curva definida por $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ for reduzida, isto é, f for um polinômio livre de quadrados, então podemos identificar a classe de f com $Z(f) \subset \mathbb{P}^2$.

Interseção de Curvas Planas

Definição B.1 *Seja A um anel comutativo com unidade e $f, g \in A[x]$*

$$\begin{aligned} f &= a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \\ g &= b_e x^e + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Definimos a resultante de f e g por

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} a_d & a_{d-1} & \dots & a_0 & & & \\ & a_d & & \dots & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & \dots & & & \\ b_e & b_{e-1} & \dots & b_0 & & & \\ & b_e & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & a_d & \dots & a_0 \\ & & & & b_e & \dots & b_0 \end{bmatrix}$$

com e linhas de a 's e d linhas de b 's.

Exemplo B.1 *Considere $f = y^2 + x^2 - 2x, g = y^2 - x \in A[y]$, onde $A = \mathbb{C}[x]$. Então*

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 - 2x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{bmatrix} = x^2(x-1)^2.$$

Lema B.1 *Sejam $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=1}^m b_i x^i \in A[x]$ polinômios não constantes sobre um domínio fatorial A . Então $R_{f,g} = 0$ se, e somente se, $a_n = b_m = 0$ ou f e g têm um fator comum não constante em $A[x]$.*

Demonstração: Digamos $a_n \neq 0$. Então afirmamos que f e g admitem fator não constante se, e somente se, existem $p, q \in A[x]$ tal que $\text{grau}(p) \leq n-1$ e $\text{grau}(q) \leq m-1$ tais que

$$qf = pg. \quad (\text{B.1})$$

Com efeito, se $f = ph$ e $g = qh$, segue a relação. Reciprocamente, como $A[x]$ é domínio fatorial, a relação (B.1) implica que algum fator irredutível de f ocorre em g , pois $\text{grau}(f) > \text{grau}(p)$. Escrevendo

$$\begin{aligned} p &= u_0 x^{n-1} + \cdots + u_{n-1} \\ q &= v_0 x^{m-1} + \cdots + v_{m-1}, \end{aligned}$$

temos de (B.1) que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n v_0 & = & b_m u_0 \\ a_{n-1} v_0 + a_n v_1 & = & b_{m-1} u_0 + b_m u_1 \\ & \cdots & \\ a_0 v_{m-1} & = & b_0 u_{n-1} \end{array} \right.$$

Note que este é um sistema linear nas variáveis $v_0, \dots, v_{m-1}, u_0, \dots, u_{n-1}$ cujo determinante coincide com $R_{f,g}$ a menos de sinal. Logo o sistema tem solução não trivial se, e só se, $R_{f,g} = 0$. ■

Lema B.2 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinômios homogêneos de graus m e n respectivamente. Suponha que $f(0, 0, 1)$ e $g(0, 0, 1)$ são não nulos. Então $R_{f,g}(z)$ é homogêneo de grau mn .*

Demonstração: Escrevendo f e g na variável z temos

$$\begin{aligned} f &= a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m \\ g &= b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \end{aligned}$$

Note que cada a_i é homogêneo de grau i e $a_0 = f(0, 0, 1) \neq 0$. Analogamente, cada b_i é homogêneo de grau i e $b_0 \neq 0$. Assim temos que o determinante

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & \cdots & & a_m & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & a_0 & \cdots & a_m \\ & b_0 & \cdots & & b_n & & & \\ & & & & & b_0 & \cdots & b_n \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

é não nulo. Então, seja c_{ij} a ij -ésima entrada da matriz. Observe que os c_{ij} não nulos são

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{se } i \leq m \\ b_{m+j-i} & \text{se } i > m. \end{cases}$$

Assim, c_{ij} é homogêneo de grau $j-i$ (se $i \leq m$) ou $m+j-i$ (se $i > m$). Lembremos que o determinante de uma matriz $A_{n \times n} = (a_{ij})$ é dado por $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$, onde

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é par.} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Desta forma, para concluir que R_{fg} é homogêneo de grau mn vamos mostrar que cada parcela $\prod_{i=1}^{m+n} c_{\sigma(i)i}$ da expressão do determinante quando não nula é homogênea de grau mn . Reescrevemos o produtório como

$$\prod_{\sigma(i) \leq m} c_{\sigma(i)i} \prod_{\sigma(i) > m} c_{\sigma(i)i}$$

concluimos que este é um polinômio de grau

$$\sum_{\sigma(i) \leq m} (\sigma(i) - i) + \sum_{\sigma(i) > m} (m + \sigma(i) - i) = mn + \sum_{i=1}^{m+n} i - \sum_{i=1}^{m+n} \sigma(i) = mn.$$

■

Lema B.3 *Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio homogêneo não nulo e de grau n , então*

$$f = c \prod_{i=1}^n (b_i x - a_i y)^{m_i},$$

onde $c \in \mathbb{C}$, $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$ e $m_i \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Veja proposição III.1.11(b) pag. 67 em [2].

■

Lema B.4 *Dados $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Escrevendo f e g na variável x*

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n \\ g &= b_0 x^m + \cdots + b_{m-1} x + b_m, \end{aligned}$$

temos que $R_{f,g}(x)$ se anula em $(c_2, c_3) \in \mathbb{C}^2$ se, e somente se, a_0 e b_0 se anulam em (c_2, c_3) ou existe $c_1 \in \mathbb{C}$ tal que f e g se anulem em (c_1, c_2, c_3) .

Demonstração: Note que $R_{f,g}(c_2, c_3) = R_{f(x, c_2, c_3), g(x, c_2, c_3)}$. Logo, do lema B.1 segue que $R_{f,g}(c_2, c_3) = 0$ se, e só se, $a_0(c_2, c_3) = b_0(c_2, c_3) = 0$ ou $f(x, c_2, c_3)$ e $g(x, c_2, c_3)$ tem um fator comum não constante em $\mathbb{C}[x]$, isto é, existe $c_1 \in \mathbb{C}$ tal que $f(c_1, c_2, c_3) = g(c_1, c_2, c_3) = 0$.

■

Observação B.1 *Sejam $C = Z(f)$ e $C' = Z(g)$ curvas reduzidas em $\mathbb{P}^2$ sem componentes em comum. Então existe uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ satisfazendo a seguinte condição.*

$$[0 : 0 : 1] \notin \mathbb{T}(C) \cup \mathbb{T}(C') \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap C'} L_{\mathbb{T}(p), \mathbb{T}(q)}.$$

Basta escolher um ponto $P_0 \notin C \cup C' \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap C'} L_{pq}$ e aplicar uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $(\mathbb{T})(P_0) = [0 : 0 : 1]$

A condição mencionada na observação acima será crucial na definição de multiplicidade. Note que dados os pontos $P = [x_p : y_p : z_p], Q = [x_q : y_q : z_q] \in C \cap C'$, então a equação da reta L_{PQ} é $(y_p z_q - y_q z_p)x + (x_q z_p - x_p z_q)y + (x_p y_q - y_p x_q)z = 0$. Portanto, se $[0 : 0 : 1] \notin L_{PQ}$, então $x_p y_q - y_p x_q \neq 0$, e portanto $[x_p : y_p] \neq [x_q : y_q]$.

Agora, pelo lema B.4 $R_{f,g}(c_1, c_2) = 0 \iff \exists c_3 \in \mathbb{C}$ tal que $f(c_1, c_2, c_3) = g(c_1, c_2, c_3) = 0$. Pelo lema B.2 $R_{f,g}$ é homogêneo de grau mn , e finalmente pelo lema B.3 temos que $R_{f,g}$ se escreve como

$$R_{f,g} = c \prod_{P \in C \cap C'} (v_P x - u_P y)^{m_P}.$$

Assim, já estamos em condição de definir o índice de interseção.

Definição B.2 *Sejam $C = Z(f)$ e $C' = Z(g)$ curvas reduzidas em $\mathbb{P}^2$ sem componentes em comum, onde $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Escolhendo coordenadas em $\mathbb{P}^2$ de modo que,*

$$[0 : 0 : 1] \notin C \cup C' \cup \bigcup_{p \neq q \in C \cap C'} L_{pq},$$

definimos a multiplicidade ou índice de interseção de C e D no ponto $P = [u : v : w] \in \mathbb{P}^2$ como

$$I_P(C, C') = \begin{cases} 0, & \text{se } P \notin C \cap C' \\ m, & \text{se } P \in C \cap C' \end{cases}$$

onde m é o expoente de $vx - uy$ na fatoração de $R_{f,g}(z)$.

Exemplo B.2 *O índice de interseção da cônica $f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ com sua reta tangente no ponto $P = [0 : 1 : i]$ é igual a 2.*

Com efeito, note que uma equação da reta tangente é $x_1 + ix_2$, logo

$$R_{f,g}(x_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0^2 + x_1^2 \\ i & x_1 & 0 \\ 0 & i & x_1 \end{bmatrix} = -x_0^2.$$

Teorema B.1 (Bézout) *Sejam C e C' duas curvas de graus d e d' respectivamente. Suponha que elas não tenham componentes em comum, então C e C' se interceptam em dd' pontos, contados com multiplicidades, isto é,*

$$\sum_{P \in C \cap C'} I_P(C, C') = mn.$$

Demonstração: Como já mencionado $R_{f,g}$ é um polinômio homogêneo de grau mn que se escreve na forma $R_{f,g} = c \prod_{P \in C \cap C'} (v_P x - u_P y)^{m_P}$. Logo $\sum_{P \in C \cap C'} m_P = mn$, e assim temos o resultado. ■

Proposição B.1 *Sejam C e C' duas curvas planas projetivas e $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ uma mudança de coordenadas. Então*

$$I_P(C, C') = I_{\mathbb{T}(P)}(\mathbb{T}(C), \mathbb{T}(C')).$$

Demonstração: Veja proposição 14 pag. 63 em [11]. ■

Lema B.5 *Sejam C e C' duas curvas planas projetivas e sejam C_1 e C_2 as componentes de C . Então $I_P(C, C') = I_P(C_1, C') + I_P(C_2, C')$.*

Demonstração: Veja proposição 2 pag. 70 em [11]. ■

Definição B.3 *Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva plana e $P \in C$ um ponto regular, dizemos que P é um ponto de inflexão se, e somente se, $I_P(C, T_PC) \geq 3$. A reta tangente T_PC relativa a P é dita tangente inflexional ou simplesmente reta inflexional.*

Definição B.4 *Dado um polinômio $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, o Hessiano de f é dado por*

$$h_f := \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dada uma curva $C = Z(f)$ de grau d a Hessiana de C é a curva $H = Z(h_f)$. Note que se $d = 2$, então H pode ser vazia. Caso contrário $H = \mathbb{P}^2$ ou H é uma curva de grau $3(d - 2)$.

Proposição B.2 *Seja C uma curva regular de grau $d \geq 3$ com curva Hessiana H . Então $H \cap C$ é igual ao conjunto dos pontos de inflexão de C .*

Demonstração: Primeiramente observemos que tal afirmação é invariante por uma mudança de coordenadas uma vez que temos a seguinte relação

$$h_{T_\bullet F} = (\det[T])^2 h_F,$$

onde $F \in R_d$ e $T : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma mudança de coordenadas projetivas.

Logo a afirmação que estamos a provar é invariante sobre mudança de coordenadas. Assim considere $P \in C = Z(f)$ e $T_PC = Z(l)$ a reta tangente em P . Por uma mudança de coordenadas podemos considerar $l = x_2$ e $P = (u, v, 0)$. Logo escrevendo

$$f = a_0 x_2^d + a_1(x_0, x_1) x_2^{d-1} + \dots + a_d(x_0, x_1),$$

com a_i homogêneo de grau i , concluímos que

$$R_{f,l}(x_0, x_1) = a_d(x_0, x_1) = (vx_0 - ux_1)^{m_P} \prod_{P \neq Q} (v_Q x_0 - u_Q x_1)^{m_Q}.$$

Agora note que $m_P \geq 3 \iff h_f(P) = 0$. ■

Lema B.6 *Toda curva plana regular C de grau $d \geq 3$ tem pelo menos um ponto de inflexão.*

Demonstração: Pela proposição B.2 os pontos de inflexão da curva C são dados pela interseção $H \cap C$, onde H é a hessiana de C . Como a interseção entre duas curvas planas é sempre não vazia, segue o resultado. ■

Classificação das Cúbicas Singulares

Proposição B.3 *Seja C uma curva cúbica plana que se decompõe numa união de três retas. Então C é projetivamente equivalente a uma das seguintes curvas:*

1. $C = Z(x_0x_1x_2)$
2. $C = Z(x_0x_1(x_0 + x_1))$
3. $C = Z(x_0^2x_1)$
4. $C = Z(x_0^3)$

Demonstração: Por hipótese $C = l_1 \cup l_2 \cup l_3$, onde $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{P}^2$ são retas. Isto significa que $l_i = Z(L_i)$ e $C = Z(f)$, onde $f = L_1L_2L_3$ e L_i são polinômios homogêneos de grau 1. Assim temos os seguintes casos a analisar.

1. As três retas são distintas e se intersectam em pontos distintos, isto é, as formas lineares L_1, L_2 e L_3 são linearmente independentes. Neste caso, consideremos o isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (L_1(x_0, x_1, x_2), L_2(x_0, x_1, x_2), L_3(x_0, x_1, x_2)).$$

Este isomorfismo induz uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $\mathbb{T}(Z(f)) = Z(f \circ T^{-1})$ e $T_\bullet f(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1x_2$ como desejado.

2. As três retas são distintas e se intersectam em um único ponto. Neste caso temos que $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$ com $\alpha, \beta \neq 0$. Tomando uma forma linear $M : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ de forma que $\{L_1, L_2, M\}$ seja linearmente independente podemos definir o isomorfismo linear $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ dado por

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (\alpha L_1(x_0, x_1, x_2), \beta L_2(x_0, x_1, x_2), M(x_0, x_1, x_2)).$$

Segue que $\mathbb{T}(Z(f)) = Z(f \circ T^{-1}) = Z(x_0x_1(x_0 + x_1))$.

3. $l_1 = l_2 \neq l_3$. Com um raciocínio análogo concluímos o caso 3.
4. $l_1 = l_2 = l_3$. Analogamente concluímos o caso 4.

■

Proposição B.4 *Seja C uma curva cúbica plana que se decompõe na união de uma reta com uma cônica irredutível. Então C é projetivamente equivalente a uma das seguintes curvas.*

1. $C = Z((x_0x_2 - x_1^2)x_1)$
2. $C = Z((x_0x_2 - x_1^2)x_0)$

Demonstração:

Por hipótese $C = C_0 \cup L$, onde C_0 é uma cônica irredutível e L é uma reta. Sabemos que C_0 sendo uma cônica irredutível é projetivamente equivalente a $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Note ainda que a cônica regular $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ é projetivamente equivalente a $x_0x_2 - x_1^2$. Além disso, como a reta L intersecta C_0 em 2 pontos, contando com multiplicidades, temos as seguintes possibilidades.

1. L intersecta C_0 em dois pontos.
2. L é tangente a C_0 no ponto P_0 .

Note que todo ponto da cônica C_0 é da forma $[\alpha^2 : \alpha\beta : \beta^2]$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Segue que a matriz

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$$

define uma transformação em $\mathbb{P}^2$ que deixa fixa a cônica C_0 . Assim para uma escolha conveniente de a, b, c , e d podemos, no caso 1, escolher como imagem dos pontos de interseção os pontos $[1 : 0 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$, e no caso 2, o ponto $[0 : 0 : 1]$. Como a reta que contém os pontos $[1 : 0 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$ tem equação $x_1 = 0$ e a reta que é tangente a C_0 no ponto $[0 : 0 : 1]$ tem equação $x_0 = 0$, então temos o resultado. ■

Lema B.7 *Seja C uma curva cúbica singular irredutível. Então C tem exatamente uma singularidade.*

Demonstração: Podemos assumir que $P = [0 : 0 : 1]$ é um ponto singular da curva C . Assim, a equação f da curva C pode ser escrita da forma

$$f = x_2 q_2(x_0, x_1) + q_3(x_0, x_1),$$

com $q_2(x_0, x_1) \neq 0$ homogêneo de grau 2 e $q_3(x_0, x_1) \neq 0$ homogêneo de grau 3.

Com efeito, escrevamos

$$f = \alpha x_2^3 + q_1(x_0, x_1)x_2^2 + q_2(x_0, x_1)x_2 + q_3(x_0, x_1),$$

com $q_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau i e $\alpha \in \mathbb{C}$. Daí $\alpha = f(P) = 0$. Logo

$$f = q_1(x_0, x_1)x_2^2 + q_2(x_0, x_1)x_2 + q_3(x_0, x_1).$$

Assim temos para $i = 0, 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_2^2 \frac{\partial q_1}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \frac{\partial q_3}{\partial x_i}.$$

Desta última equação segue que

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_i}(P) + \frac{\partial q_2}{\partial x_i}(P) + \frac{\partial q_3}{\partial x_i}(P) = 0.$$

Como $\frac{\partial q_2}{\partial x_i}$ é homogêneo de grau 1 e $\frac{\partial q_3}{\partial x_i}$ homogêneo de grau 2, temos que

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_i}(P) = \frac{\partial q_3}{\partial x_i}(P) = 0.$$

Logo $\frac{\partial q_1}{\partial x_i}(P) = 0$, e portanto $q_1 \equiv 0$. Assim, como queríamos concluir, temos que $f = x_2 q_2(x_0, x_1) + q_3(x_0, x_1)$, com $q_2 \neq 0$, pois do contrário f seria redutível, uma vez que todo polinômio em duas indeterminadas sobre $\mathbb{C}$ é redutível. Da mesma forma $q_3 \neq 0$, caso contrário f seria redutível.

A quádrlica q se fatora em duas formas lineares

$$q_2(x_0, x_1) = l_0(x_0, x_1)l_1(x_0, x_1).$$

Assim temos dois casos a analisar:

a. $\{l_0, l_1\}$ é linearmente independente.

Neste caso, se necessário, aplicando uma mudança de coordenadas temos que

$$l_0(x_0, x_1) = x_0 \text{ e } l_1(x_0, x_1) = x_1.$$

Logo f pode ser escrito na forma

$$f = x_2 x_0 x_1 + q_3(x_0, x_1).$$

Assim temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = x_1 x_2 + \frac{\partial q_3}{\partial x_0} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_0 x_2 + \frac{\partial q_3}{\partial x_1} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_0 x_1 \quad (\text{B.4})$$

Seja $Q = [u_0 : u_1 : u_2]$ outro ponto singular. De (B.4) segue-se que $u_0 = 0$ ou $u_1 = 0$. Se $u_0 = 0$, então de (B.3) temos que $\frac{\partial q_3}{\partial x_1}(Q) = 0$. Mas, sendo $q_3(x_0, x_1) = bx_0^3 + cx_0^2 x_1 + dx_0 x_1^2 + ex_1^3$, segue-se

$$\frac{\partial q_3}{\partial x_1}(Q) = cu_0^2 + 2du_0 u_1 + 3eu_1^2 = 3eu_1^2.$$

Como $\frac{\partial q_3}{\partial x_1}(Q) = 0$ e $e \neq 0$, uma vez que $f(x_0, x_1, x_2)$ é irredutível, então $u_1 = 0$, e portanto $Q = [0 : 0 : 1]$.

Agora, se $u_1 = 0$, então segue de (B.2) que $\frac{\partial q_3}{\partial x_0}(Q) = 0$. Como

$$\frac{\partial q_3}{\partial x_0}(Q) = 3bu_0^2 + 2cu_0 u_1 + du_1^2 = 3bu_0^2$$

Logo $u_0 = 0$, e novamente temos que $Q = [0 : 0 : 1]$.

b. $\{l_0, l_1\}$ é linearmente dependente.

Se necessário, aplicando uma mudança de coordenadas temos que $l_0(x_0, x_1) = l_1(x_0, x_1) = x_1$. Assim

$$f = x_2 x_1^2 + q_3(x_0, x_1),$$

e daí

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial q_3}{\partial x_0} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_2 x_1 + \frac{\partial q_3}{\partial x_1} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 \quad (\text{B.7})$$

Seja $Q = [u_0 : u_1 : u_2]$ outro ponto singular. De (B.7), temos que $u_1 = 0$. De (B.5) segue-se $\frac{\partial q_3}{\partial x_0}(Q) = 0$. Sendo $q_3(x_0, x_1) = bx_0^3 + cx_0^2x_1 + dx_0x_1^2 + ex_1^3$, concluimos que

$$\frac{\partial q_3}{\partial x_0} = 3bu_0^2 + 2cu_0u_1 + du_1^2 = 3bu_0^2.$$

Logo $u_0 = 0$, e portanto $Q = [0 : 0 : 1]$. ■

Proposição B.5 *Seja C uma curva cúbica singular irredutível. Então C é projetivamente equivalente a uma das seguintes curvas:*

1. $C = Z(x_1^2x_2 - x_0^3 - x_0^2x_2)$
2. $C = Z(x_2x_1^2 - x_0^3)$

Demonstração:

Podemos assumir que $P = [0 : 0 : 1]$ é o ponto singular da curva. Desta forma, como vimos no lema B.7, a equação f da curva C pode ser escrita na forma

$$f = x_2q(x_0, x_1) + bx_0^3 + cx_0^2x_1 + dx_0x_1^2 + ex_1^3, \text{ com } q(x_0, x_1) \neq 0.$$

A quádrlica q se fatora em duas formas lineares

$$q(x_0, x_1) = l_0(x_0, x_1)l_1(x_0, x_1).$$

Assim temos dois casos a analisar:

- a. $\{l_0, l_1\}$ é linearmente independente.

Neste caso, aplicamos uma mudança de coordenadas tal que

$$l_0(x_0, x_1) \mapsto x_0 \text{ e } l_1(x_0, x_1) \mapsto x_1.$$

Logo f pode ser escrito na forma

$$f = x_2x_0x_1 + b'x_0^3 + c'x_0^2x_1 + d'x_0x_1^2 + e'x_1^3.$$

Sendo f irredutível, então $b'e' \neq 0$. Considere $\varphi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1 \longrightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$, o isomorfismo induzido por $x_2 \mapsto \beta\gamma(x'_2 - 6x'_0) + \frac{c'}{\beta}(x'_0 + x'_1) + \frac{d'}{\gamma}(x'_0 - x'_1)$, $x_0 \mapsto -\frac{1}{\beta}(x'_0 + x'_1)$, $x_1 \mapsto -\frac{1}{\gamma}(x'_0 - x'_1)$, com $\beta^3 = b'$, $\gamma^3 = e'$, obtemos $f = x'_2((x'_0)^2 - (x'_1)^2) - 8(x'_0)^3$, que é projetivamente equivalente a $x_1^2x_2 - x_0^2x_2 - x_0^3$.

- b. $\{l_0, l_1\}$ é linearmente dependente.

Neste caso, podemos assumir que $l_0(x_0, x_1) = l_1(x_0, x_1) = x_1$. Logo

$$f = x_2x_1^2 + b'x_0^3 + c'x_0^2x_1 + d'x_0x_1^2 + e'x_1^3.$$

Note que $b' \neq 0$, caso contrário x_1 divide f . Considere $\varphi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1 \longrightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$, o isomorfismo induzido por $x_0 \mapsto x'_0 - \frac{c'}{3b'}x_1$, temos $f = x_2x_1^2 + b'(x'_0)^3 + d''x'_0x_1^2 + e''x_1^3$, $b' \neq 0$, e fazendo $x_2 \mapsto -b'x'_2 - d''x'_0 - e''x_1$, obtemos

$$f = -b'(x'_2x_1^2 - (x'_0)^3),$$

que é projetivamente equivalente a $x_2x_1^2 - x_0^3$. ■

Classificação das Cúbicas Regulares

Lema B.8 *Toda cúbica plana regular é projetivamente equivalente a*

$$Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \lambda x_0 x_1 x_2), \text{ com } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Seja $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ uma cúbica plana regular. Como C tem grau três segue que sua Hessiana $H = Z(h_f)$ também tem grau 3, desde que $h_f \neq 0$. Logo, pelo Teorema de Bezout $C \cap H$ consiste de 9 pontos contando com multiplicidades. Por outro lado, pela proposição B.2 temos que $C \cap H$ é o conjunto dos pontos de inflexão de C , que são os pontos da curva cujas multiplicidades de interseção com sua tangente são ≥ 3 . Neste caso são exatamente iguais a 3. Concluimos assim que C possui 3 pontos de inflexão.

Sejam P_1 e P_2 dois pontos de inflexão de C com tangentes inflexionais $l_1 = Z(L_1)$ e $l_2 = Z(L_2)$. Podemos definir uma mudança de coordenadas $\mathbb{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $T_\bullet L_1 = x_0$, $T_\bullet L_2 = x_1$, $\mathbb{T}(P_1) = [0 : 1 : 0]$ e $\mathbb{T}(P_2) = [1 : 0 : 0]$. Para isto considere $l_3 = Z(L_3)$ a reta determinada pelos pontos P_1 e P_2 . Note que as formas lineares L_1, L_2, L_3 são linearmente independentes.

Defina $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ por $T(u) = (L_1(u), L_2(u), L_3(u))$. Note que $L_1(P_1) = L_3(P_1) = 0$, logo $\mathbb{T}(P_1) = [0 : 1 : 0]$. Analogamente $L_2(P_2) = L_3(P_2) = 0$ e portanto $\mathbb{T}(P_2) = [1 : 0 : 0]$. Além disso, $T_\bullet L_1(x_0, x_1, x_2) = L_1(T^{-1}(x_0, x_1, x_2)) = x_0$ e $T_\bullet L_2(x_0, x_1, x_2) = L_2(T^{-1}(x_0, x_1, x_2)) = x_1$.

Agora seja

$$g = T_\bullet f = a_0 x_0^3 + a_1 x_0^2 x_1 + a_2 x_0 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_0^2 x_2 + a_5 x_0 x_2^2 + a_6 x_2^3 + a_7 x_1^2 x_2 + a_8 x_1 x_2^2 + a_9 x_0 x_1 x_2.$$

Fazendo $x_0 = 0$, obtemos $g(x_1, x_2) = a_3 x_1^3 + a_6 x_2^3 + a_7 x_1^2 x_2 + a_8 x_1 x_2^2$. Sendo $\mathbb{T}(P_1) = [0 : 1 : 0]$ o único ponto da interseção $Z(x_0) \cap Z(g)$, concluimos que $a_3 = a_7 = a_8 = 0$. Analogamente, fazendo $x_1 = 0$ obtemos $g(x_0, x_2) = a_0 x_0^3 + a_4 x_0^2 x_2 + a_5 x_0 x_2^2 + a_6 x_2^3$. Sendo $\mathbb{T}(P_2) = [1 : 0 : 0]$ o único ponto da interseção $Z(x_1) \cap Z(g)$ temos que $a_0 = a_4 = a_5 = 0$.

Assim concluimos que

$$g(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_9 x_2) + a_6 x_2^3.$$

Note que $a_1 a_2 \neq 0$, pois caso contrário a curva seria singular. Se $a_9 = 0$, então considere o isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $T_\bullet : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ induzido por $x_0 \mapsto \frac{eu}{a_1} x_0 + \frac{e^2 u}{a_1} x_1$, $x_1 \mapsto \frac{e^2 u}{a_2} x_0 + \frac{eu}{a_2} x_1$ e $x_2 \mapsto v x_2$, onde $u^3 = -a_1 a_2$, $v^3 = \frac{1}{a_6}$ e $e = \frac{-1 + \sqrt[3]{3}i}{2}$. Segue que $T_\bullet g = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$. Se $a_9 \neq 0$, então considere o isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras induzido por $x_0 \mapsto \frac{eu}{a_1} x_0 + \frac{e^2 u}{a_1} x_1 - \frac{v}{a_1} x_2$, $x_1 \mapsto \frac{e^2 u}{a_2} x_0 + \frac{eu}{a_2} x_1 - \frac{v}{a_2} x_2$ e $x_2 \mapsto \frac{3v}{a_9} x_2$, onde $u^3 = -a_1 a_2$, $v^3 = \frac{a_1 a_2 a_9^3}{a_9^3 + 27 a_1 a_2 a_6}$ e $e = \frac{-1 + \sqrt[3]{3}i}{2}$. Segue que $T_\bullet g = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \lambda x_0 x_1 x_2$, onde $\lambda = \frac{3u^2 v}{a_1 a_2}$.

■

Referências Bibliográficas

- [1] Assis, C. F. C. As 27 Retas Sobre uma Superfície Cúbica não Singular. Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2004.
- [2] Garcia, A. & Lequain, Y. Elementos de Álgebra. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006 (Projeto Euclides)
- [3] Hefez, A. Singularidades de Curvas Irredutíveis Planas. In **The Sixth Workshop On Real And Complex Singularities**. USP-São Carlos 17-21 July, 2000
- [4] Harris, J. Algebraic Geometry: A First Course. Springer-Verlag, 1992.
- [5] Bruce, J. W. & Wall, C. T. C. On The Classification of Cubic Surfaces. In **J. London Math. Soc.** vol. 19, p. 245-256, 1979.
- [6] Hulek, K. Elementary Algebraic Geometry. Translated by Helena Verrill. AMS, 2003.
- [7] Reid, M. Undergraduate Algebraic Geometry. Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1988. (London Mathematical Society Students Texts 12)
- [8] Rojas, J & Mendoza, R. Álgebra Linear e o Problema das Quatro Retas do Cálculo de Schubert. In **Revista Matemática Universitária**. nº 45, p. 55-69, 2010.
- [9] Shafarevich, I. R. Basic Algebraic Geometry, vol 1. New York: Springer, 1988.
- [10] Tura, F. C. Resultantes, Equações Polinomiais e o Teorema de Bezout. Dissertação de mestrado, DM-UFRGS, 2006.
- [11] Vainsencher, I. Introdução às Curvas Algébricas Planas. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Coleção Matemática Universitária).