



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A Desigualdade Isoperimétrica [†]

por

Charleson Clivandir de Araujo Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2013
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

S586d Silva, Charleson Clivandir de Araujo.
 A desigualdade isoperimétrica / Charleson Clivandir de
 Araujo Silva.- João Pessoa, 2013.
 79f.
 Orientador: Manassés Xavier de Souza
 Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
 1.Matemática. 2.Desigualdade isoperimétrica. 3.Geometria.
 4.Polígonos. 5.Princípio de indução finita. 6.Curva fechada
 simples.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

A Desigualdade Isoperimétrica

por

Charleson Clivandir de Araujo Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza -UFPB (Orientador)

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira - UFPB

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - UFPE

Abril/2013

Agradecimentos

À Deus, por estar sempre presente na minha vida.

Aos colegas da turma 2011, pelo companheirismo durante o curso, em especial aos colegas José Luiz Lucena Travassos, Laércio Francisco Feitosa e Luis Rodrigo Dandrada Bezerra.

Aos professores da Universidade Federal da Paraíba do Departamento de Matemática, que deram as condições necessárias para nossa aprendizagem.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em avaliar esta dissertação, em especial ao professor Manassés Xavier de Souza que me orientou durante todo trabalho.

Aos meus familiares, em especial minha esposa Valeria Lima da Silva, e todas aquelas pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

Dedicatória

*A todos os que se alegram com o nosso
sucesso.*

Resumo

Neste trabalho tratamos do estudo da Desigualdade Isoperimétrica, com foco principal na sua demonstração, utilizando geometria. O trabalho está dividido em duas partes. O capítulo preliminar aborda algumas definições e proposições da geometria plana relativa a polígonos, curvas e relações entre área e perímetro, além de uma abordagem sobre máximo, mínimo, média e o princípio de indução finita, que servem de base para o capítulo seguinte. No segundo capítulo, temos um pouco de história do problema isoperimétrico e a demonstração da desigualdade isoperimétrica, inicialmente provamos para polígonos e depois no caso geral de uma curva fechada simples.

Abstract

In this work we treat the study the isoperimetric inequality, with primary focus in its demonstration, using geometry. It is divided in two parts. The preliminary chapter, which portrays some definitions and propositions of the plane geometry regarding polygons, curves and relationships between area and perimeter, as well as a study on maximum, minimum, average and the principle of finite induction, that serve as basis for the next chapter. The second chapter, we have a little history of isoperimetric problem and demonstration of the isoperimetric inequality, initially for polygons and then the general case of a simple closed curve.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Polígonos e Curvas	1
1.2	Relações entre área e perímetro	12
1.3	Máximo e mínimo de funções	30
1.4	Médias	32
1.5	Princípio de indução finita	34
2	A Desigualdade Isoperimétrica	35
2.1	O problema isoperimétrico	35
2.2	Dois resultados da geometria clássica	37
2.3	A desigualdade isoperimétrica para polígonos	40
2.4	Prova do resultado principal	54
2.5	Aplicações da desigualdade isoperimétrica	58
	Referências Bibliográficas	63

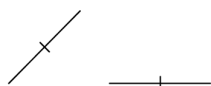
Notações A

P_1P_2	segmento de reta
$\overline{P_1P_2}$	comprimento do segmento de reta
$\overrightarrow{P_1P_2}$	semirreta com origem no ponto P_1 passando por P_2
$\overleftrightarrow{P_1P_2}$	reta passando pelos pontos P_1 e P_2
$r//s$	retas paralelas r e s
$P_1P_2 \dots P_n$	polígono de n lados
$P_1\widehat{P_2}P_3$	ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{P_2P_1}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$
$\widehat{P_1}$	ângulo interno de um polígono, ângulo inscrito
$\widehat{APB}$	arco de circunferência passando pelos pontos A, P , e B
LAL	Dois triângulos com dois lados correspondentes e o ângulo formando entre eles respectivamente iguais
LLL	Dois triângulos com três lados correspondentes iguais
AA	Dois triângulos com dois ângulos correspondentes iguais
A_{ABC}	área de polígono de vértices A, B , e C

Notações B



ângulo reto



segmentos com mesmo comprimento



ângulos com mesma medida

Lista de Figuras

1.1	Polígono	2
1.2	Polígono não convexo	2
1.3	Polígono convexo	2
1.4	Diagonal P_1P_5	3
1.5	Ângulo interno e externo	3
1.6	Regular	4
1.7	Equilátero	4
1.8	Equiângulo	4
1.9	Curva fechada	5
1.10	Curva aberta	5
1.11	Curva convexa	6
1.12	Curva não convexa	6
1.13	Circunferência	6
1.14	Elementos do círculo	7
1.15	Ângulos no círculo	7
1.16	Polígonos inscritos	8

1.17	Mediatrizes no triângulo	8
1.18	Ângulos Inscritos	9
1.19	Quadrilátero não inscritível	10
1.20	Polígono regular	11
1.21	Polígonos circunscritos	12
1.22	Triângulo de mesma área	13
1.23	Triângulo retângulo	14
1.24	Triângulo isósceles	15
1.25	Triângulo retângulo	17
1.26	Triângulo retângulo em B	18
1.27	Triângulo escaleno	19
1.28	Ângulo agudo	20
1.29	Ângulo obtuso	21
1.30	Triângulos sobrepostos	23
1.31	Quadrilátero	25
1.32	Conservação do perímetro	28
1.33	Conservação da área	28
1.34	Permutação de lados	29
2.1	Cartago	37
2.2	Braga	37
2.3	Triângulos de mesma base	39
2.4	Polígonos no mesmo semi-plano	41

2.5	Construção do polígono convexo	42
2.6	Triângulos escalenos de mesma base	44
2.7	Polígonos de lado fixo $V_n V_{n+1}$	45
2.8	Polígonos com base AB e $A'B'$	46
2.9	Polígonos de $m + 1$ lados AB	46
2.10	Polígonos congruentes	48
2.11	Polígonos equilátero não regular	49
2.12	Quadrilátero inscritível	50
2.13	Polígonos regulares de mesmo perímetro	52
2.14	Construção do polígono de $m + 1$ lados	52
2.15	Polígonos inscrito e circunscrito	53
2.16	Polígonos convexo	54
2.17	Polígono regular	55
2.18	Região entre curvas	56
2.19	Curva fechada não convexa	57
2.20	Curvas circunscritíveis	57
2.21	Cercado circular	58
2.22	Curva sobre a margem	59
2.23	Janela em arco romano	60
2.24	Semicírculo	60
2.25	Contorno retangular	60
2.26	Região descampada	61

2.27 Cercado poligonal	61
----------------------------------	----

Introdução

Este trabalho trata do estudo da Desigualdade Isoperimétrica, a qual afirma que toda curva fechada de comprimento L engloba uma área menor ou igual a $L^2/4\pi$. E esse valor só é alcançado para o círculo de raio $L/2\pi$. Em especial, focamos na produção de uma demonstração simples e elementar desse teorema, baseada no artigo de Moreira [7] disponibilizado no banco indutor do PROFMAT.

Esse direcionamento foi dado, em virtude da riqueza de conceitos matemáticos básicos utilizados na demonstração, com o intuito de disponibilizar um material didático que possa ser usado pelos professores do ensino básico na elaboração de suas aulas. Assim, dividimos este trabalho em dois capítulos.

Inicialmente, no primeiro capítulo, fazemos um estudo preliminar de conceitos e proposições que serão abordados no desenvolvimento da demonstração. A priori, embasamos a geometria usada no problema isoperimétrico, através dos conceitos de polígonos, curvas e das relações entre área e perímetro. Em seguida, fizemos uma ligeira abordagem sobre máximo, mínimo, média e o princípio de indução finita, devido suas contribuições na demonstração da desigualdade isoperimétrica.

No segundo capítulo realizamos a demonstração da desigualdade isoperimétrica. Para tanto, buscamos a origem desse problema isoperimétrico através da obra literária Eneida, de Virgílio [13], onde enxergamos a beleza desse teorema. Primeiro demonstramos a desigualdade isoperimétrica nos polígonos, partindo de um polígono

não convexo e chegando num polígono regular com perímetro L menor ou igual e área maior, que por sua vez, tem área menor do que o círculo de comprimento igual a L . E de posse desse resultado, generalizamos a desigualdade para um curva fechada simples qualquer. Para finalizar, mostramos algumas aplicações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iniciaremos o estudo apresentando conceitos e proposições necessárias para uma maior compreensão da demonstração da desigualdade isoperimétrica que veremos no próximo capítulo. A princípio faremos um resumo das definições, notações e classificações relativas a polígonos e curvas, baseado nos textos de Parente [9] e Pesco [10]. Em seguida analisaremos algumas proposições que relacionam o perímetro e a área de polígonos, norteado por Barbosa [1], Carmo [2] e Pesco [10].

Posteriormente estudaremos conceitos de máximo, mínimo e média que auxiliarão na demonstração da desigualdade isoperimétrica, baseado em Lima [5] e Stewart [12] com auxílio de Lima [6] e Oliveira [8]. Bem como, o princípio de indução que servirá de ferramenta fundamental nas demonstrações realizadas no Capítulo 2, norteado por Hefez [4] e Oliveira [8].

1.1 Polígonos e Curvas

Definição 1.1.1 *Dado um conjunto de pontos ordenados no plano $P_1, P_2, \dots, P_n$ com $n \geq 3$ tal que três pontos consecutivos não sejam colineares. Denomina-se*

polígono a reunião dos segmentos consecutivos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$.

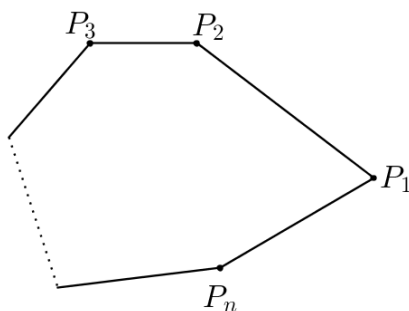


Figura 1.1: Polígono

Os pontos P_i , $1 \leq i \leq n$, são chamados de **vértices** e os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ são os **lados** do polígono. O comprimento do lado denotaremos por $\overline{P_iP_{i+1}}$, $1 \leq i < n$, $\overline{P_nP_1}$ ou $\overline{P_1P_n}$. E a soma das medidas dos lados será o **perímetro** do polígono.

Definição 1.1.2 Um polígono $P_1P_2P_3 \dots P_n$ é **convexo** quando a reta $\overleftrightarrow{P_iP_{i+1}}$, determinada por dois vértices consecutivos, deixa os demais pontos do polígono num mesmo semi-plano, dentre os gerados pela reta. Caso contrário dizemos que o polígono é **não convexo**.

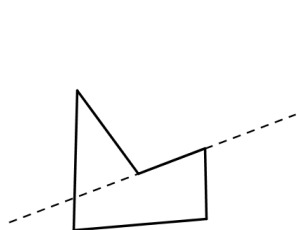


Figura 1.2: Polígono não convexo

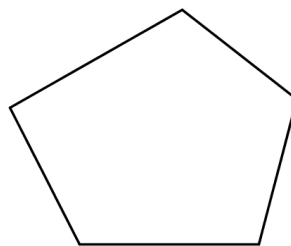


Figura 1.3: Polígono convexo

Para quaisquer vértices P_i e P_j não consecutivos de um polígono convexo chamamos de **diagonal** o segmento P_iP_j .

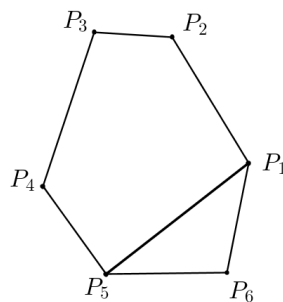


Figura 1.4: Diagonal P_1P_5

Os ângulos $P_{i-1}\widehat{P_i}P_{i+1}$, formados pelas semirretas $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ relativo ao vértice P_i , são denominados **ângulos internos** do polígono e serão representados por $\widehat{P_i}$. E o ângulo formado por um lado qualquer e o prolongamento do lado adjacente é chamado de **ângulo externo** do polígono convexo.

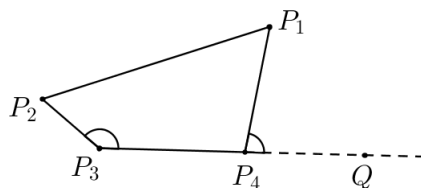


Figura 1.5: Ângulo interno e externo

Na Figura 1.5, $P_1\widehat{P_4}Q$ é o ângulo externo relativo ao vértice P_4 , onde P_1P_4 é um lado e o segmento P_4Q o prolongamento do lado adjacente P_3P_4 .

Um polígono convexo de n lados é denominado n -ágono e classificamos os polígonos com respeito ao número de lados por:

nome	nº de lados	nome	nº de lados
triângulo	3	eneágono	9
quadrilátero	4	decágono	10
pentágono	5	undecágono	11
hexágono	6	dodecágono	12
heptágono	7	...	...
octógono	8	icoságono	20

Dois polígonos convexo são congruentes, quando é possível coincidir-los por superposição. E têm portanto seus elementos de mesmo nome com medidas respectivamente iguais.

Definição 1.1.3 *Um polígono convexo é **regular** quando seus lados são congruentes e seus ângulos internos são congruentes, caso contrário dizemos que o polígono é **não regular**. Se um polígono convexo tiver apenas seus lados congruentes chamaremos de **polígono equilátero**. E denominaremos de **polígono equiângulo** aqueles que tiverem apenas seus ângulos internos congruentes.*

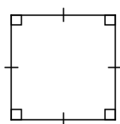


Figura 1.6: Regular

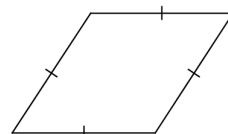


Figura 1.7: Equilátero

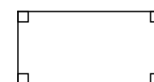


Figura 1.8: Equiângulo

Os polígonos regulares de três e quatro lados são chamados respectivamente de **triângulo equilátero** e **quadrado** enquanto os demais polígonos acrescentamos a expressão **regular** no seu nome, conforme a seguinte tabela:

nome	nº de lados
triângulo equilátero	3
quadrado	4
pentágono regular	5
hexágono regular	6
heptágono regular	7
octógono regular	8

nome	nº de lados
eneágono regular	9
decágono regular	10
undecágono regular	11
dodecágono regular	12
...	...
icoságono regular	20

Definição 1.1.4 Uma *curva fechada simples* é um conjunto de pontos que delimitam o plano em duas regiões, uma interna e outra externa a curva. Caso contrário, dizemos que a *curva* é *aberta simples*.

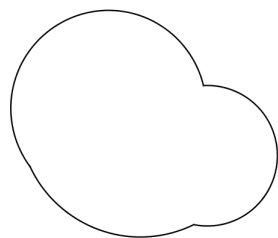


Figura 1.9: Curva fechada

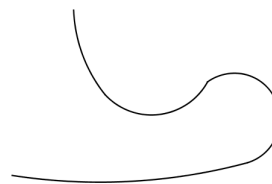


Figura 1.10: Curva aberta

Definição 1.1.5 Quando qualquer segmento, determinado por dois pontos de uma curva simples, está contido no interior da mesma, dizemos que a *curva* é *convexa*. Caso exista um segmento que esteja contido no exterior da curva dizemos que ela é *não convexa*.

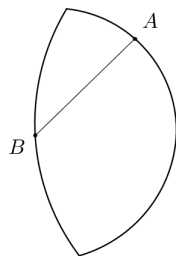


Figura 1.11: Curva convexa

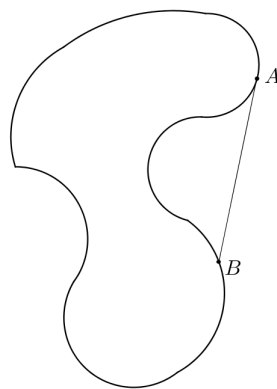


Figura 1.12: Curva não convexa

Definição 1.1.6 *Círculo ou circunferência de centro O pertencente ao plano, é o conjunto de pontos P do plano tais que a distância de P até O é constante, igual a r , denominado de **raio**.*

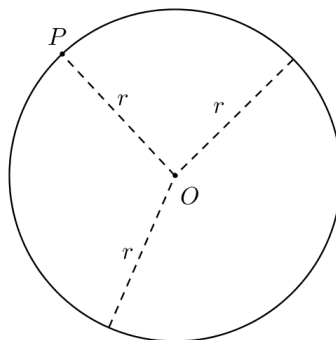


Figura 1.13: Circunferência

O segmento de reta que liga dois pontos distintos da circunferência chamamos de **corda** e a parte da curva delimitada por esses dois pontos denominamos de **arco**. A corda que passa pelo centro da circunferência chamamos de **diâmetro** e seu comprimento corresponde ao dobro da medida do raio. Na Figura 1.14 ilustramos alguns desses elementos: a corda AB , o arco $\widehat{APB}$, o diâmetro CD e o raio $r = \overline{OD}$.

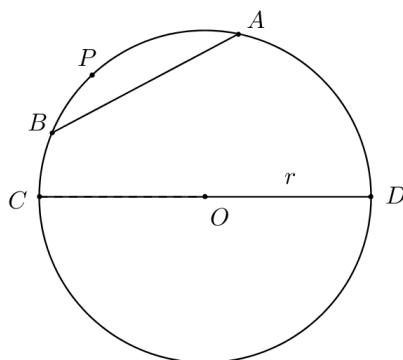


Figura 1.14: Elementos do círculo

Observação 1.1.1 Associamos a medida do arco $\widehat{APB}$ ao ângulo $\widehat{AOB}$, delimitado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com vértice na origem, chamado de **ângulo central**. O ângulo $\widehat{ADB}$ com vértice D pertencente a circunferência formado pelas cordas DA e DB denominaremos de **ângulo inscrito** $\widehat{D}$ e sua medida correspondente a metade do ângulo central $\widehat{AOB}$ relativa ao arco $\widehat{APB}$ (Para detalhes veja Parente [9], Teorema 5).

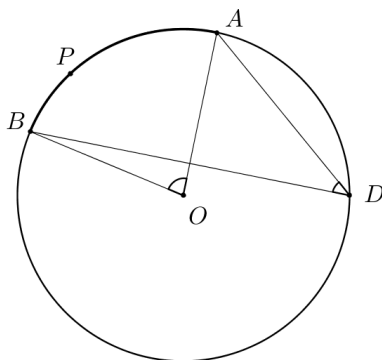


Figura 1.15: Ângulos no círculo

Definição 1.1.7 Um polígono convexo está **inscrito** numa circunferência quando seus vértices também são pontos da circunferência.

Exemplo:

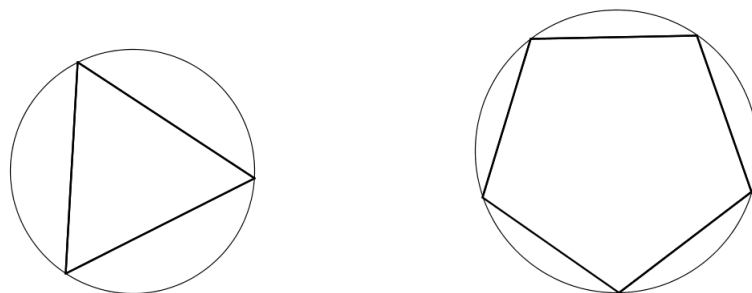


Figura 1.16: Polígonos inscritos

◇

Definição 1.1.8 A mediatriz do lado AB de um triângulo ABC é uma reta r perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que passa pelo ponto médio M de AB .

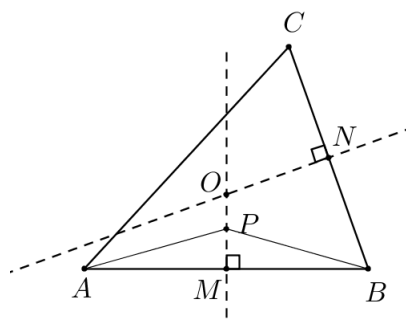


Figura 1.17: Mediatrizes no triângulo

Note que qualquer ponto P pertencente a mediatriz de AB está a mesma distância dos vértices A e B , pois os triângulos retângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LAL , logo $\overline{PA} = \overline{PB}$. Essa observação também vale para as mediatrizes dos demais lados do triângulo e dizemos que o ponto P pertencente a mediatriz é equidistante aos vértices do lado correspondente.

Outra característica importante é que as mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram num único ponto denominado circuncentro. De fato, sendo o ponto

O a interseção das mediatrizes dos lados AB e BC temos $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{OB} = \overline{OC}$, logo $\overline{OA} = \overline{OC}$ e teremos o ponto O também pertencente a mediatriz do lado AC .

Lema 1.1.1 *Todo triângulo está inscrito numa circunferência*

Demonstração: Seja ABC um triângulo de circuncentro O . Como o circuncentro é ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo e, por sua vez, a mediatriz representa o lugar dos pontos equidistantes aos vértices teremos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Assim os vértices estão a mesma distância do ponto fixo O , logo pertencem ao círculo de raio $r = \overline{OA}$ e centro no ponto O . Desta forma o triângulo é inscritível.

■

Lema 1.1.2 *Um quadrilátero $ABCD$ convexo é inscritível, se somente se, $\hat{A} + \hat{C} = \pi$ ou $\hat{B} + \hat{D} = \pi$.*

Demonstração: Supondo que o quadrilátero seja inscritível então seus vértices pertencem a um círculo e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são inscritos.

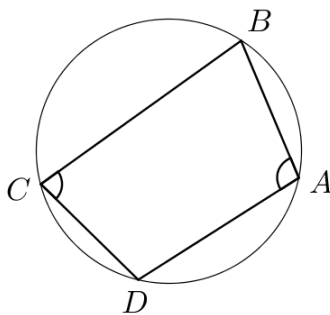


Figura 1.18: Ângulos Inscritos

Pela Observação 1.1.1, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ correspondem respectivamente a metade das medidas dos arcos $\widehat{BCD}$ e $\widehat{BAD}$, ou seja,

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{1}{2} \widehat{BCD} + \frac{1}{2} \widehat{BAD},$$

consequentemente,

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{1}{2}(\widehat{BCD} + \widehat{BAD}) = \pi.$$

Reciprocamente, admita que $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$ e suponha que o quadrilátero $ABCD$ não seja inscritível. Pelo Lema 1.1.1 temos uma circunferência passando pelos vértices A, B e C onde o ponto D está no seu interior ou exterior.

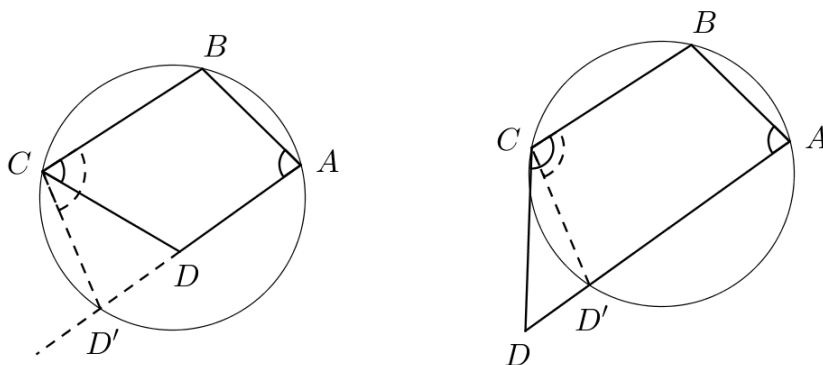


Figura 1.19: Quadrilátero não inscritível

Sendo D' o ponto de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e a circunferência, ou seja, $D' \neq D$, assim temos o quadrilátero $ABCD'$ inscritível. Logo $\widehat{BCD'} + \widehat{A} = \pi$, conforme foi provado na primeira parte dessa demonstração. Como $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$, temos $\widehat{BCD'} + \widehat{A} = \widehat{C} + \widehat{A}$, ou seja,

$$\widehat{BCD'} = \widehat{C}.$$

Portanto $D = D'$, contrariando o fato de $D' \neq D$. ■

Lema 1.1.3 *Todo polígono regular é inscritível.*

Demonstração: Considere um polígono regular $P_1P_2 \dots P_n$ de n lados.

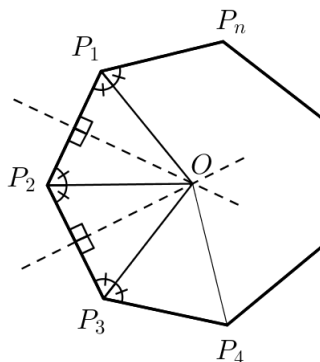


Figura 1.20: Polígono regular

As mediatrizes dos lados consecutivos P_1P_2 e P_2P_3 se encontram no ponto O equidistante dos vértices P_1, P_2 e P_3 . Logo, os triângulos P_1OP_2 e P_2OP_3 são congruentes pelo caso LLL e consequentemente os ângulos $\widehat{OP_2P_1}$ e $\widehat{OP_2P_3}$ são iguais tornando P_2O bissetriz de $\widehat{P_1P_2P_3}$. Da mesma forma temos P_1O e P_3O bissetrizes do ângulo $\widehat{P_1}$ e $\widehat{P_3}$, respectivamente.

Notemos que $\overline{P_4O} = \overline{P_3O}$ e P_4O é bissetriz de $\widehat{P_4}$, pois os triângulos P_2OP_3 e P_3OP_4 são congruentes pelo caso LAL . Usando esse mesmo raciocínio temos $\overline{P_5O} = \overline{P_4O}$ e P_5O sendo bissetriz de $\widehat{P_5}$. Seguindo esse processo até retornamos ao vértices P_1 , teremos:

$$\overline{P_1O} = \overline{P_2O} = \overline{P_3O} = \overline{P_4O} = \dots = \overline{P_nO}.$$

Ou seja, dado um ponto fixo O temos os vértices $P_1, P_2, \dots, P_n$ numa mesma distância desse ponto, logo existe uma circunferência, centrada no ponto O , que passa pelos vértices do polígono regular tornando-o inscrito. ■

Definição 1.1.9 Um polígono convexo é **circunscrito** a um círculo quando seus

lados são tangentes a circunferência. E dizemos que o círculo está inscrito no polígono.

Exemplo:

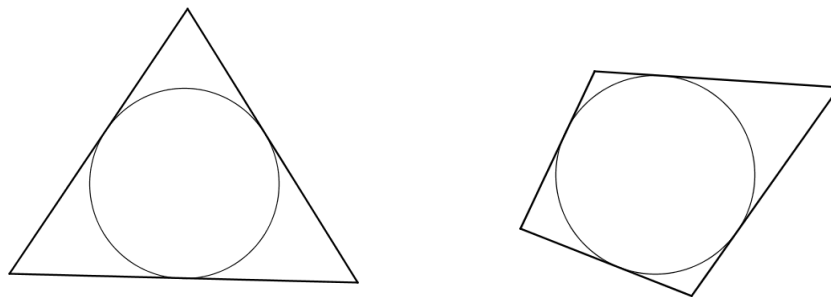


Figura 1.21: Polígonos circunscritos

◇

1.2 Relações entre área e perímetro

Lema 1.2.1 *Sejam os triângulos ABC e ABC' tais que $\overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, então $A_{ABC} = A_{ABC'}$.*

Demonstração:

Como as retas $\overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas os triângulos ABC e ABC' têm alturas de mesmo comprimento em relação ao lado AB .

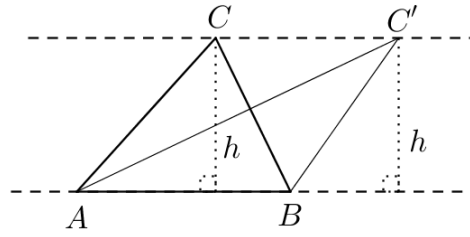


Figura 1.22: Triângulo de mesma área

Tendo altura equivalentes e mesma base então os triângulos ABC e ABC' possuem a mesma área. ■

Proposição 1.2.1 (Teorema de Pitágoras) *Num triângulo retângulo, a área do quadrado cuja lado seja a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos. Ou seja, sendo a o comprimento da hipotenusa e b, c as medidas dos catetos, temos:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração: Dado um triângulo retângulo ABC com hipotenusa $a = \overline{BC}$, catetos $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ construiremos sobre estes lados os quadrados $ACDE$, $ABFG$ e $BCHI$. E mostraremos que $A_{BCHI} = A_{ABFG} + A_{ACDE}$.

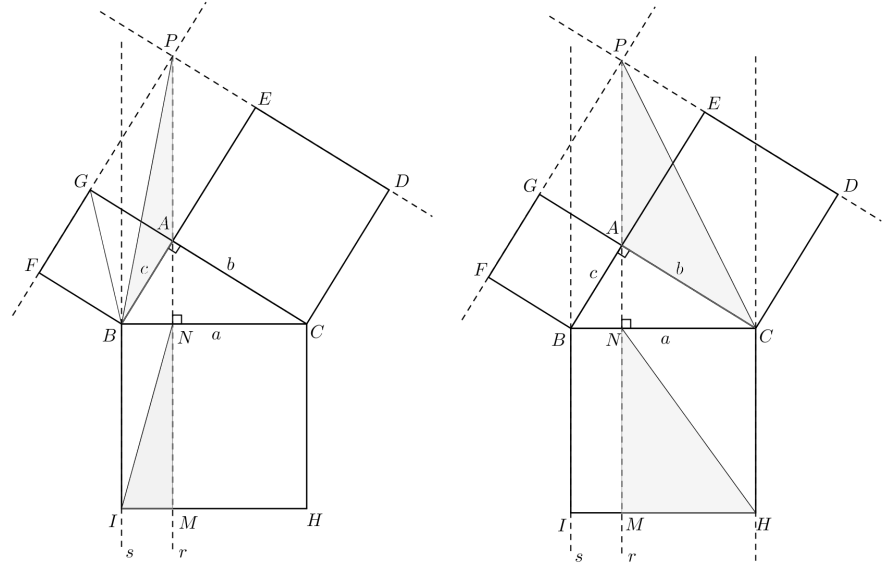


Figura 1.23: Triângulo retângulo

Traçando a reta r que passa pelo ponto A e paralela a reta $s = \overleftrightarrow{BI}$ temos os pontos N e M , obtendo os retângulos $BIMN$ e $CHMN$. Sendo o ponto P a interseção entre as retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{ED}$ percebe-se que a reta r também passa por este ponto. De fato, os triângulos AGP e BAC são congruentes pelo caso LAL levando o triângulo ANC ser semelhante a AGP pelo caso AA e consequentemente temos a congruência dos ângulos $\widehat{PAG}$ e $\widehat{CAN}$ tornando-lhes opostos pelo vértice em relação as retas $\overleftrightarrow{PN}$ e $\overleftrightarrow{GC}$.

Observando os triângulos BAG e BAP , como as retas $\overleftrightarrow{FP}$ e $\overleftrightarrow{BA}$ são paralelas temos pelo Lema 1.2.1 que $A_{BAG} = A_{BAP}$. Note que os triângulos BAP e IMN tem a mesma área pois possuem o mesmo comprimento de base $\overline{AP} = \overline{MN}$ e alturas equivalentes $\overline{NB} = \overline{MI}$, logo $A_{BAG} = A_{IMN}$. Perceba também que a área do triângulo BAG corresponde a metade da área do quadrado $ABFG$, da mesma forma que o triângulo IMN tem a metade da área do retângulo $BIMN$, assim temos $A_{BAFG} = A_{BIMN}$.

Para mostrar que $A_{CHMN} = A_{ACDE}$ usamos o mesmo raciocínio, olhando as retas paralelas $\overleftrightarrow{PD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ construímos, pelo Lema 1.2.1, o triângulo PAC de mesma área que EAC e verificamos que $A_{PAC} = A_{NMH}$, pois os triângulos PAC e NMH tem mesmo comprimento de base e alturas equivalentes e concluímos que $A_{NMH} = A_{EAC}$ e consequentemente $A_{CHMN} = A_{ACDE}$. Como $A_{BCHI} = A_{BIMN} + A_{CHMN}$, temos $A_{BCHI} = A_{ABFG} + A_{ACDE}$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. ■

Proposição 1.2.2 (Fórmula de Heron) *Se um triângulo ABC tem lados medindo a, b e c com perímetro $2p$, então a área desse triângulo será dada por:*

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $2p = a + b + c$.

Demonstração: Dado um triângulo ABC de lados a, b, c e altura h relativa ao lado c , conforme a Figura 1.24.

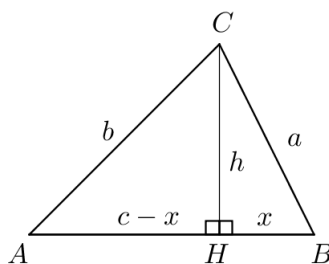


Figura 1.24: Triângulo isósceles

Podemos determinar a área desse triângulo em função da base c e da altura h , mas queremos em relação aos lados, logo devemos escrever h em função de a, b e c . Sendo o ponto H o pé da perpendicular baixada do vértice C ao lado AB , temos que AHC e BHC são triângulos retângulos, assim aplicando o Teorema de Pitágoras (ver Proposição 1.2.1), obtemos:

$$b^2 = h^2 + (c-x)^2. \quad (1.1)$$

e

$$a^2 = h^2 + x^2. \quad (1.2)$$

Efetuada a diferença em ambos lados da igualdade temos:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= (c - x)^2 - x^2 \\ &= c^2 - 2cx + x^2 - x^2 \\ &= c^2 - 2cx. \end{aligned}$$

Assim,

$$2cx = c^2 + a^2 - b^2.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}. \quad (1.3)$$

Substituindo x em (1.2), obtemos

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2,$$

assim,

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$h = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c}. \quad (1.4)$$

Assim, a área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{ch}{2} = \left(\frac{c}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c} \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{[2ac + (c^2 + a^2 - b^2)][2ac - (c^2 + a^2 - b^2)]}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{[(a+c)^2 - b^2][-(a-c)^2 + b^2]}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{[(a+c+b)(a+c-b)][(b+a-c)(b-a+c)]}}{4}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \sqrt{\frac{(a+c+b)}{2} \cdot \frac{(a+c-b)}{2} \cdot \frac{(b+a-c)}{2} \cdot \frac{(b-a+c)}{2}}. \quad (1.5)$$

Note que $2p = a + c + b$, então $a + c = 2p - b$, $a + b = 2p - c$ e $c + b = 2p - a$.

Logo fazendo as devidas substituições em (1.5), obtemos:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-c)(p-a)}.$$

■

Definição 1.2.1 *As razões entre os lados de um triângulo ABC retângulo em A , relativa aos ângulos internos $\hat{B}$ ou $\hat{C}$, são denominadas **razões trigonométricas** do triângulo retângulo.*

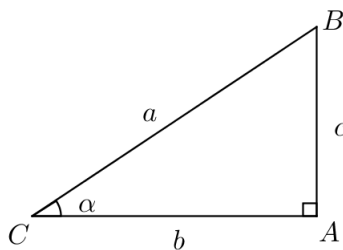


Figura 1.25: Triângulo retângulo

Vejamos os nomes das principais razões trigonométricas, relativa ao ângulo $\alpha = \widehat{C}$:

(I) **Seno** de α , representado por $\text{sen}\alpha$, corresponde a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{a}.$$

(II) **Cosseno** de α , denotado por $\text{cos}\alpha$, corresponde a razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa do triângulo, ou melhor,

$$\text{cos}\alpha = \frac{b}{a}.$$

(III) **Tangente** de α , representado por $\text{tg}\alpha$, corresponde a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a α , ou seja,

$$\text{tg}\alpha = \frac{c}{b}.$$

Exemplo: Dado um triângulo retângulo ABC com hipotenusa b e ângulo $\widehat{C} = \alpha$, determine as medidas dos catetos e mostre a relação fundamental trigonométrica $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$

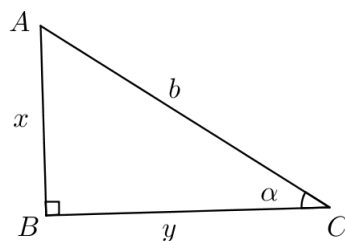


Figura 1.26: Triângulo retângulo em B

Chamemos de x e y as medidas dos catetos AB e BC , respectivamente. Pela definição de seno temos $\text{sen}\alpha = x/b$, onde

$$x = b \text{sen}\alpha.$$

E no caso do cosseno, segue que $\text{cos}\alpha = y/b$, ou seja,

$$y = b \text{cos}\alpha.$$

Logo obtemos os catetos de comprimentos $b \text{sen}\alpha$ e $b \text{cos}\alpha$. Para mostrar a relação fundamental basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC . Assim,

$$b^2 \text{sen}^2\alpha + b^2 \text{cos}^2\alpha = b^2,$$

donde,

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1. \quad (1.6)$$

Note que esta relação independe do valor da hipotenusa e vale para qualquer ângulo agudo α (para detalhes, veja Barbosa [1] Teorema 9.2). $\diamond$

Lema 1.2.2 *Se um triângulo ABC tem lados $a = \overline{BC}$ e $b = \overline{AC}$ com ângulo $\widehat{C} = \alpha$ então a área do triângulo é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}ab \text{sen}\alpha. \quad (1.7)$$

Demonstração: Seja um triângulo ABC , conforme a Figura 1.27

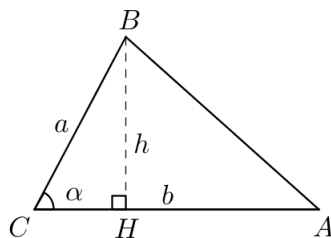


Figura 1.27: Triângulo escaleno

Traçando a altura h do triângulo em relação a base b temos o ponto H de interseção com o lado AC . Note que o triângulo BHC é retângulo em H e podemos usar a definição de seno para determinar o valor $h = a \operatorname{sen} \alpha$. Como a área do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2}bh,$$

temos,

$$A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \alpha.$$

■

Proposição 1.2.3 (*Lei dos cossenos*) Sendo um triângulo ABC com lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e ângulo $\widehat{C} = \alpha$ temos que o comprimento do lado AB é dado por:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

onde $c = \overline{AB}$.

Demonstração: Dado um triângulo ABC com lados BC , AC e ângulo $\widehat{C}$ conhecidos, temos duas situações:

Caso 1: Se α é um ângulo agudo, ao baixarmos a altura do vértice B ao lado AC obtemos um ponto H que determina os triângulos retângulos BHC e BHA .

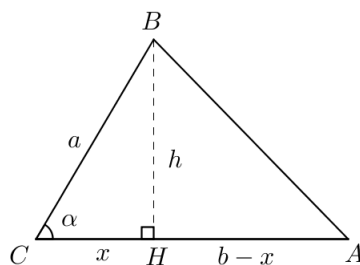


Figura 1.28: Ângulo agudo

Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras temos

$$a^2 = h^2 + x^2$$

e

$$c^2 = h^2 + (b - x)^2.$$

Fazendo a diferença, segue que

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= (b - x)^2 - x^2 \\ &= b^2 - 2bx + x^2 - x^2, \end{aligned}$$

donde,

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bx.$$

Como $x = a \cos \alpha$, pela definição do cosseno no triângulo retângulo BHC , obtemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (1.8)$$

Caso 2: Admitindo α ser um ângulo obtuso, ao baixarmos a altura h do vértice B em relação ao lado AC teremos um ponto H que determina os triângulos retângulo BHC e BHA .

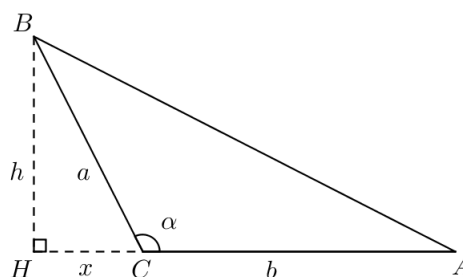


Figura 1.29: Ângulo obtuso

Assim, pelo Teorema de Pitágoras temos

$$a^2 = h^2 + x^2$$

e

$$c^2 = h^2 + (x + b)^2.$$

Subtraindo ambos lados da igualdade, segue que

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= (x + b)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2xb + b^2 - x^2, \end{aligned}$$

onde,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2xb.$$

Aplicando a definição de cosseno no triângulo retângulo BHC , temos $x = a \cos(180 - \alpha)$. Logo, obtemos

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(180 - \alpha). \quad (1.9)$$

Para que a Lei dos cossenos tenha validade em um ângulo α obtuso é necessário que (1.9) seja igual a equação (1.8), ou melhor,

$$a^2 + b^2 + 2ab \cos(180 - \alpha) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

donde,

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha. \quad (1.10)$$

Assim, definiremos o cosseno de um ângulo obtuso α da forma descrita em (1.10) e concluímos a demonstração. (Para detalhes dessa definição, veja Barbosa [1] Teorema 9.4). ■

Proposição 1.2.4 *Se dois arcos tem medidas β e α , então o cosseno da soma $\beta + \alpha$ é dado por:*

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha).$$

Demonstração: Considere dois triângulos retângulos ABC e ACD sobrepostos conforme a Figura 1.30

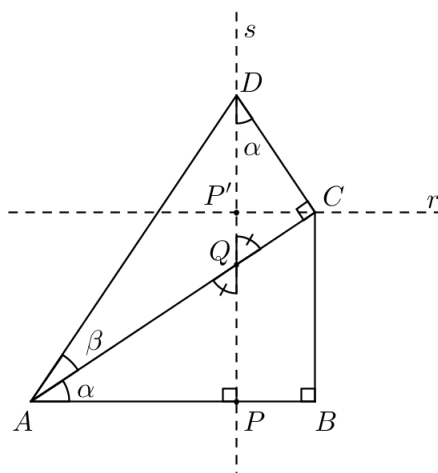


Figura 1.30: Triângulos sobrepostos

Traçando uma reta s passando pelo vértice D e perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$ temos os pontos Q e P de interseção com as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente, formando os triângulos retângulos APD , APQ e QCD . Perceba que estes dois últimos triângulos são semelhantes pelo caso AA devido $\widehat{DQC}$ e $\widehat{AQP}$ serem opostos pelo vértices. Logo $\widehat{QDC}$ e $\widehat{PAQ}$ são iguais.

Usando a definição de cosseno nos triângulos APD , ACD e ABC , obtemos:

$$\overline{AP} = \overline{AD} \cos(\beta + \alpha); \quad (1.11)$$

$$\overline{AC} = \overline{AD} \cos(\beta); \quad (1.12)$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cos(\alpha). \quad (1.13)$$

E substituindo (1.12) em (1.13), temos

$$\overline{AB} = \overline{AD} \cos(\beta) \cos(\alpha).$$

Na Figura 1.30, note que $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB}$, donde

$$\overline{AD} \cos(\beta + \alpha) = \overline{AD} \cos(\beta) \cos(\alpha) - \overline{PB}.$$

Assim precisamos mostrar que $\overline{PB} = \overline{AD} \sin(\beta) \sin(\alpha)$. De fato, traçando uma reta r passando por C paralela a $\overleftrightarrow{PB}$ temos um ponto P' de interseção com a reta $\overleftrightarrow{PD}$. Perceba que o triângulo formado é retângulo em P' e $\overline{P'C} = \overline{DC} \sin(\alpha)$. Como o quadrilátero $PBCP'$ é um paralelogramo temos $\overline{PB} = \overline{P'C}$, ou seja, $\overline{PB} = \overline{DC} \sin(\alpha)$, mas $\overline{DC} = \overline{AD} \sin(\beta)$ pela definição de seno no triângulo retângulo ACD . Logo $\overline{PB} = \overline{AD} \sin(\beta) \sin(\alpha)$. Desta forma, obtemos:

$$\overline{AD} \cos(\beta + \alpha) = \overline{AD} \cos(\beta) \cos(\alpha) - \overline{AD} \sin(\beta) \sin(\alpha),$$

ou seja,

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha).$$

■

Proposição 1.2.5 (*Extensão da Fórmula de Heron*) *Se um quadrilátero $ABCD$ tem lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$ e perímetro $2p$ então sua área será dada por:*

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]},$$

onde $2p = a + b + c + d$

Demonstração: Dado um quadrilátero $ABCD$, conforme a Figura 1.31, determinamos sua área A a partir da área dos triângulos DAB e BCD .

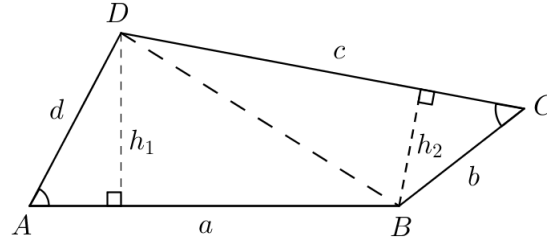


Figura 1.31: Quadrilátero

Logo, $A = A_{DAB} + A_{BCD}$ e pelo Lema 1.2.2 temos

$$A = \frac{1}{2}ad \sin \hat{A} + \frac{1}{2}cb \sin \hat{C}.$$

Agora utilizamos o quadrado da área A para que possamos substituir os termos em seno por cosseno, através das relações trigonométricas.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{ad \sin \hat{A}}{2} + \frac{cb \sin \hat{C}}{2} \right)^2, \\ A^2 &= \frac{a^2 d^2 \sin^2 \hat{A}}{4} + \frac{2abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C}}{4} + \frac{c^2 b^2 \sin^2 \hat{C}}{4}, \\ 4A^2 &= a^2 d^2 \sin^2 \hat{A} + 2abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C} + c^2 b^2 \sin^2 \hat{C}. \end{aligned}$$

Como $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$ então $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A}$, de mesma forma $\sin^2 \hat{C} = 1 - \cos^2 \hat{C}$. Logo,

$$\begin{aligned} 4A^2 &= a^2 d^2 (1 - \cos^2 \hat{A}) + 2abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C} + c^2 b^2 (1 - \cos^2 \hat{C}), \\ 4A^2 &= a^2 d^2 - a^2 d^2 \cos^2 \hat{A} + 2abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C} + c^2 b^2 - c^2 b^2 \cos^2 \hat{C}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.4 temos $\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \cos \hat{A} \cos \hat{C} - \sin \hat{A} \sin \hat{C}$, ou seja, $\sin \hat{A} \sin \hat{C} = \cos \hat{A} \cos \hat{C} - \cos(\hat{A} + \hat{C})$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} 4A^2 &= a^2 d^2 - a^2 d^2 \cos^2 \hat{A} + 2abcd \cos \hat{A} \cos \hat{C} - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) + c^2 b^2 - c^2 b^2 \cos^2 \hat{C}, \\ 4A^2 &= a^2 d^2 - [(ad \cos \hat{A})^2 - 2abcd \cos \hat{A} \cos \hat{C} + (cb \cos \hat{C})^2] - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) + c^2 b^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$4A^2 = a^2d^2 - (ad \cos \hat{A} + cb \cos \hat{C})^2 - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) + c^2b^2. \quad (1.14)$$

Aplicando a lei dos cossenos (ver Proposição 1.2.3) nos triângulos DAB e BCD em relação ao lado BD temos

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A} = (\overline{BD})^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \hat{C},$$

ou seja,

$$a^2 + d^2 - c^2 - b^2 = 2ad \cos \hat{A} - 2bc \cos \hat{C}.$$

Donde,

$$\frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2} = ad \cos \hat{A} - bc \cos \hat{C}. \quad (1.15)$$

Substituindo (1.15) em (1.14), obtemos

$$\begin{aligned} 4A^2 &= a^2d^2 - \frac{(a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2}{4} - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) + c^2b^2, \\ 4A^2 &= \frac{4a^2d^2 - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) + 4c^2b^2}{4}, \\ 16A^2 &= 4a^2d^2 + 4c^2b^2 - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}). \end{aligned}$$

Ou melhor,

$$16A^2 = (2ad)^2 + (2cb)^2 - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}). \quad (1.16)$$

Note que $(2ad)^2 + (2cb)^2 + 2(2ad)(2cb) = (2ad + 2cb)^2$, ou seja, $(2ad)^2 + (2cb)^2 = (2ad + 2cb)^2 - 8abcd$. Aplicando em (1.16), temos

$$\begin{aligned} 16A^2 &= (2ad + 2cb)^2 - 8abcd - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 - 8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\ &= (2ad + 2cb)^2 - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 - 8abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]. \end{aligned}$$

Como $(2ad + 2cb)^2 - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 = (2ad + 2cb + a^2 + d^2 - c^2 - b^2) \cdot (2ad + 2cb - a^2 - d^2 + c^2 + b^2)$, obtemos

$$16A^2 = [(a + d)^2 - (c - b)^2] \cdot [(c + b)^2 - (a - d)^2] - 8abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})].$$

Assim,

$$16A^2 = [(a + d + c - b)(a + d - c + b)] \cdot [(c + b + a - d)(c + b - a + d)] - 8abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]. \quad (1.17)$$

Como $a + b + c + d = 2p$ temos $a + b + c - d = 2p - 2d$, $a + b - c + d = 2p - 2c$, $a - b + c + d = 2p - 2b$ e $-a + b + c + d = 2p - 2a$. Logo, realizando as devidas substituições em (1.17), obtemos

$$\begin{aligned} 6A^2 &= 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - d) \cdot 2(p - a) - 8abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})], \\ A^2 &= (p - b)(p - c)(p - d)(p - a) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]. \end{aligned}$$

Donde,

$$A = \sqrt{(p - b)(p - c)(p - d)(p - a) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}. \quad (1.18)$$

Note que a formula de Heron é um caso particular da fórmula (1.18), bastando tomar $d = 0$. Assim,

$$A = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)p},$$

onde $2p = a + b + c$, correspondente a área de um triângulo ABC. ■

Exemplo: Num quadrilátero é possível permutarmos seus lados e mantermos sua área.

Seja um quadrilátero $ABCD$. Para permutar dois lados consecutivos AB e BC inicialmente determinamos um ponto B' tal que $\overline{AB'} = \overline{BC}$ e $\overline{CB'} = \overline{AB}$.

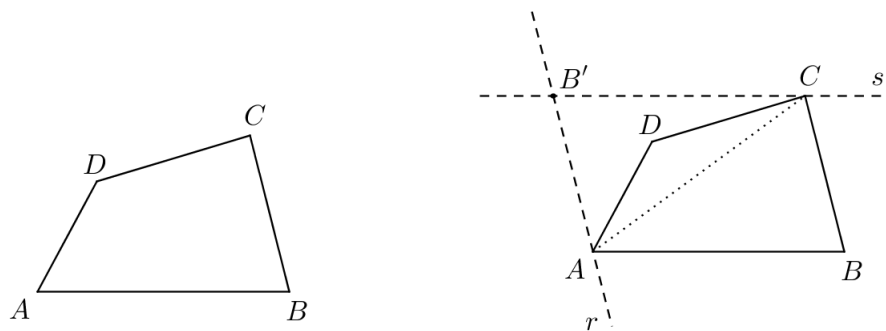


Figura 1.32: Conservação do perímetro

Para isso, basta traçar uma reta r passando pelo ponto A paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e outra reta s passando pelo ponto C paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. O ponto B' é a interseção de r e s , formando o paralelogramo $ABCB'$ que garante as igualdades $\overline{AB'} = \overline{BC}$ e $\overline{CB'} = \overline{AB}$. Note que o polígono $AB'CD$ apenas manteve o perímetro, para obtermos um quadrilátero de mesma área basta determinarmos um ponto B'' simétrico a B' em relação a diagonal AC .

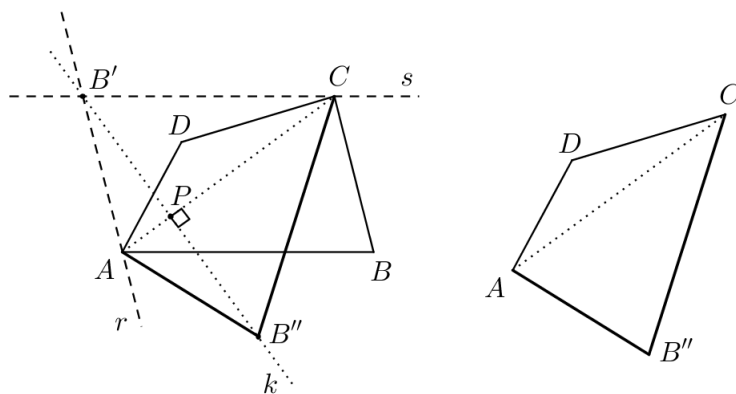


Figura 1.33: Conservação da área

O ponto B'' pertence a reta t perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ que passa pelo ponto B' tal que $\overline{B''P} = \overline{B'P}$, onde P é ponto de interseção entre t e $\overleftrightarrow{AC}$. Pelo caso LAL , CPB' e CPB'' são triângulos congruentes, da mesma forma que APB' e APB'' são

congruentes, logo

$$\overline{CB''} = \overline{CB'} = \overline{AB}$$

e

$$\overline{AB''} = \overline{AB'} = \overline{BC}.$$

Temos também a igualdades entre as áreas:

$$A_{ACB''} = A_{ACB'} = A_{ACB},$$

donde,

$$A_{AB''CD} = A_{ABCD}.$$

Assim podemos construir um quadrilátero $AB''CD$ mantendo o perímetro e conservando a área de $ABCD$, apenas permutando lados. $\diamond$

Proposição 1.2.6 *Dado um polígono de n lados podemos permutar seus lados mantendo seu perímetro e conservando a área.*

Demonstração: Seja um polígono $P_1P_2 \dots P_n$ de n lados. Dado dois lados consecutivos P_1P_2 e P_2P_3 determinamos um ponto P'_2 tal que $\overline{P'_2P_1} = \overline{P_2P_3}$ e $\overline{P'_2P_3} = \overline{P_1P_2}$ através da construção do paralelogramo $P_1P_2P_3P'_2$. E depois usamos o ponto P''_2 , simétrico a P'_2 em relação a $\overleftrightarrow{P_1P_3}$, para construir o polígono $P_1P''_2P_3 \dots P_n$ de mesmo perímetro e mesma área de $P_1P_2P_3 \dots P_n$.

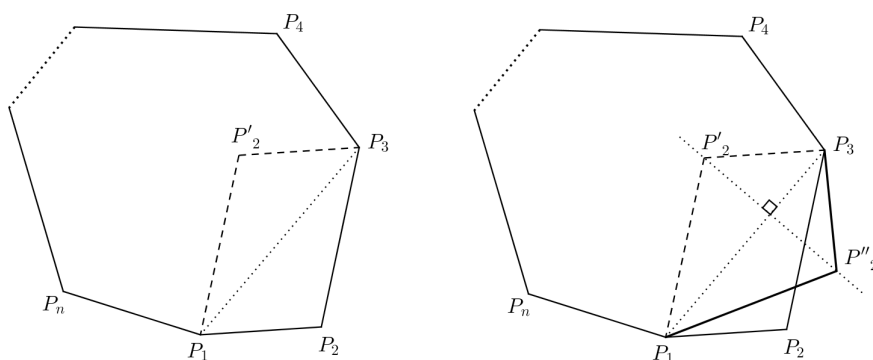


Figura 1.34: Permutação de lados

Para permutar dois lados não consecutivos P_nP_1 e P_3P_4 conservando área e perímetro basta escolher um lado P_3P_4 e permutar com seu lado vizinho mais próximo de P_nP_1 , mantendo esse processo de permutação até P_3P_4 se torne vizinho de P_nP_1 para podermos fazer a troca. Feito isso, realizaremos o processo inverso com P_nP_1 até coloca-lo na posição que estava o lado P_3P_4 . Assim podemos permutar quaisquer lados do polígono $P_1P_2 \dots P_n$ mantendo o perímetro e conservando a área. ■

1.3 Máximo e mínimo de funções

Definição 1.3.1 Dada uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in D$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x no domínio de f , dizemos que a função tem máximo absoluto em x_0 . E $f(x_0)$ é chamado de valor máximo de f em D .

Definição 1.3.2 Dada uma função $g : D \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in D$ tal que $g(x) \geq g(x_0)$ para todo x no domínio de g , dizemos que a função tem mínimo absoluto em x_0 . E chamamos $g(x_0)$ de valor mínimo de g em D .

Definição 1.3.3 Dada uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ com a e b pertencente ao domínio D :

- (I) Se existir um intervalo aberto I contido no domínio D , tal que $a \in I$ e $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in I$, dizemos que f tem um máximo local em $x = a$.
- (II) Se existir um intervalo aberto E contido no domínio D , tal que $b \in E$ e $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in E$, dizemos que f tem um mínimo local em $x = b$.

Definição 1.3.4 Sejam a , b e c números reais com $a \neq 0$, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, denominamos de função quadrática.

Proposição 1.3.1 *O valor y_v máximo ou mínimo de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado por:*

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a},$$

em $x_v = -b/2a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Sendo máximo quando $a < 0$ e mínimo em $a > 0$.

Demonstração: Para determinarmos o máximo ou mínimo da função quadrática basta representa-la na forma canônica $f(x) = a(x+m)^2 + k$, onde m e k são números reais. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right). \end{aligned}$$

Completando o quadrado de $x^2 + b/a$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left[x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Note que a função f assume valor mínimo quando $a > 0$, pois

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0,$$

donde,

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

ou seja,

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

tendo como valor mínimo $f(x) = -\Delta/4a$ em $x = -b/2a$.

Sendo $a < 0$, seque que

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 < 0,$$

assim,

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a},$$

ou seja,

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a},$$

com valor máximo $f(x) = -\Delta/4a$ em $x = -b/2a$. ■

1.4 Médias

Definição 1.4.1 A média aritmética M_a de n números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é dada por:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Observação 1.4.1 Uma característica da média aritmética está na sua conservação, pois ao acrescentarmos o valor de M_a na lista de números a nova média permanecerá igual a M_a . Na realidade essa característica é inerente ao conceito de média, como o valor representante da lista de números que goza de uma propriedade aritmética, geométrica ou outra que venha a ser apresentada. (Para detalhes, veja Lima [5]).

Proposição 1.4.1 Sendo a soma de n números positivos igual a S , então:

(I) pelo menos um deles é menor que a média aritmética S/n .

(II) *pelo menos um deles é maior que a média S/n .*

Demonstração: Dados $x_1, x_2, \dots, x_n$ números positivos onde $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$, inicialmente provaremos (I). Suponha que todos esses números são maiores que a média aritmética, ou seja,

$$x_1 > \frac{S}{n}, x_2 > \frac{S}{n}, \dots, x_n > \frac{S}{n}.$$

Então,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > \frac{S}{n} + \frac{S}{n} + \dots + \frac{S}{n} = S,$$

donde,

$$S > S.$$

Chegando num absurdo. Logo, existe pelo menos um número menor que a média S/n .

Agora provaremos o item (II). De forma análoga, suponha que todos números sejam menores que a média aritmética, ou seja,

$$x_1 < \frac{S}{n}, x_2 < \frac{S}{n}, \dots, x_n < \frac{S}{n}.$$

Então,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < \frac{S}{n} + \frac{S}{n} + \dots + \frac{S}{n} = S,$$

donde,

$$S < S.$$

Recaindo num absurdo. Assim, existe pelo menos um número maior que a média S/n . ■

1.5 Princípio de indução finita

Proposição 1.5.1 (*Princípio de Indução Finita*) Dada uma propriedade $P(n)$ em relação ao número natural n . Admitindo que

(I) $P(a)$ é verdadeira, com $a \in \mathbb{N}$.

(II) $P(n)$ verdadeira implica em $P(n+1)$ ser verdadeira, para todo $n \geq a$.

Então, $P(n)$ será verdadeira para todo $n \geq a$. (Para detalhes, veja Hefez [4] Teorema 1.3.1)

Capítulo 2

A Desigualdade Isoperimétrica

O objetivo desse capítulo é provar a desigualdade isoperimétrica, que afirma: Toda curva fechada de comprimento L engloba uma área menor ou igual a $L^2/4\pi$. E esse valor só é alcançado para o círculo de raio $L/2\pi$.

Como ponto de partida veremos o surgimento histórico do problema isoperimétrico baseado na obra Eneida do poeta Virgílio (vide Costa [3]). Em seguida, verificaremos alguns problemas isoperimétricos relacionados a polígonos de n lados, com $n \geq 3$, que fundamentarão a demonstração da desigualdade isoperimétrica, norteado por Moreira [7] e Sousa [11]. E posteriormente, mostraremos algumas aplicações.

2.1 O problema isoperimétrico

O Problema isoperimétrico surgiu na Grécia Antiga no século IX a.C a partir da Lenda de Dido, que falava de uma princesa fenícia denominada Dido, também chamada de Elisa, cuja história foi retratada na famosa obra Eneida do poeta Virgílio onde relatou o romance vivido entre Dido e o herói Enéias. Segundo a lenda depois

da morte do rei de Tiro, o reinado foi delegado ao irmão de Elisa, Pigmalião. Anos mais tarde, o próprio irmão assassinou seu marido, deixando-a aflita e obrigada a fugir para outra terra, conforme mostra o trecho abaixo, segundo a Epopeia Eneida traduzida por Mendes (vide Virgílio [13]).

”Pálida em sonhos lhe aparece a imagem:
Da casa o crime e trama desenleia;
A ara homicida, os retalhados peitos
Desnuda, e pátria intima-lhe que fuja:
Prata imensa e ouro velho, soterrados,
Para o exílio descobre. Ela, inquieta,
Apressa a fuga, e atrai os descontentes
Que ou rancor ao tirano ou medo instiga;
Acaso prestes naus, manda assaltá-las;
Dos tesouros do avaro carregadas
Empegam-se: a mulher conduz a empresa!
Chegam d’alta Cartago onde o castelo
Verás medrando agora e ingentes muros:
Mercam solo (do feito o alcunham Birsá)
Quanto um coiro taurino abranja em tiras.”

Dido seguiu em direção ao norte da África em busca de terras para estabelecer-se. Onde negociou um pedaço de terra com o Rei Jarbas, que permitiu-lhe comprar toda área cercada pelo couro de um touro. De forma inteligente, Elisa mandou cortar o couro em finas tiras e confeccionou uma longa corda, recaindo no problema isoperimétrico: Dentre todas curvas fechadas de mesmo perímetro, qual delimitará a maior área possível? Logicamente pensaram na circunferência. Como Dido tinha escolhido uma terra a beira mar, de maneira genial, ela usou a corda para fazer um

grande semicírculo e conseguiu uma área ainda maior. Assim construiu a cidade de Birsa, chamada posteriormente de Cartago, onde hoje fica localizada a Tunísia.



Figura 2.1: Cartago



Figura 2.2: Braga

Observando mapas da época, nota-se que os muros das cidades eram construídos na forma de um círculo e quando banhadas por um rio no formato de semicircunferência. Isto é um indício de que o povo conhecia a solução do problema isoperimétrico; assim podiam reduzir gastos construindo muro com mesma quantidade de material e garantindo a maior área interna possível. Apesar do conhecimento da solução do problema isoperimétrico, apenas em 1870 o matemático Weierstrass obteve uma demonstração formal.

A seguir, veremos dois casos particulares ligados ao problema isoperimétrico, que servirão como base para demonstração da desigualdade isoperimétrica associada aos polígonos.

2.2 Dois resultados da geometria clássica

Lema 2.2.1 *Dentre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado, temos que:*

(I) *Aquele de maior área é o isósceles.*

(II) *Dados dois triângulos ABC e ABC' com mesmo perímetro e tais que $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$, então a área de ABC é maior do que a área de ABC' .*

Demonstração: Inicialmente provaremos (I). Dado um triângulo de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, com perímetro $2p$ e base fixa c , pela Fórmula de Heron (ver Proposição 1.2.2), a área do triângulo é

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $2p = a + b + c$.

Como p e c são fixos temos que o produto $p(p-c)$ é uma constante e A dependerá dos valores de a e b . Assim a área do triângulo será máxima quando o produto $(p-a)(p-b)$ for máximo. Note que $a = 2p - b - c$, então

$$\begin{aligned} (p-a)(p-b) &= (p-2p+b+c)(p-b) \\ &= (-p+b+c)(p-b) \\ &= -p^2 + 2pb - b^2 - cb + cp. \end{aligned}$$

A expressão do lado direito da igualdade é uma função quadrática na variável b , $f(b) = -b^2 + (2p-c)b + cp - p^2$, e terá valor máximo (ver Proposição 1.3.1) quando

$$b = \frac{(2p-c)}{2},$$

logo, $b = a$. Assim o triângulo de maior área é isósceles.

Agora provaremos o item (II). Note que dentre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado aquele de maior área também terá maior altura em relação a base AB . E quanto menor a diferença entre os lados AC e BC mais próximos de se tornarem um triângulo isósceles, ou seja, mais próximo de atingirem a altura máxima.

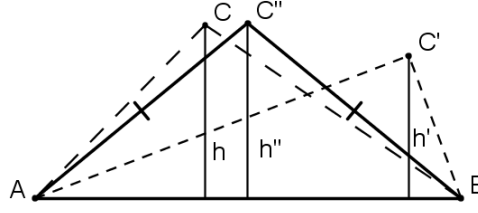


Figura 2.3: Triângulos de mesma base

Assim, dado dois triângulos ABC e ABC' de base fixa AB com mesmo perímetro, onde $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$, temos que a altura de ABC será maior do que a altura de ABC' , logo a área do triângulo ABC é maior do que a área do triângulo ABC' , pois possuem a mesma base. ■

Lema 2.2.2 *Dentre todos os quadriláteros de lados congruentes, temos que:*

- (I) *Aquele de maior área é o inscritível.*
- (II) *Dados dois quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com lados correspondentes iguais, se $|\widehat{A} + \widehat{C} - \pi| < |\widehat{A'} + \widehat{C'} - \pi|$ então a área de $ABCD$ é maior do que área de $A'B'C'D'$.*

Demonstração: Primeiro provaremos (I). Dado um quadrilátero $ABCD$ de lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$ e perímetro $2p$, pela generalização da fórmula de Heron para quadriláteros (ver Proposição 1.2.5), segue que a área do quadrilátero é:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\widehat{A} + \widehat{C}))}, \quad (2.1)$$

onde $2p = a + b + c + d$.

Como o comprimento dos lados do quadrilátero são fixo temos que p e o produto $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ são constantes e A dependerá dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$. Assim

a área do quadrilátero será máxima quando o valor de $abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}))/2$ for mínimo. Isto ocorre quando a expressão for igual a zero, ou seja:

$$abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})) = 0,$$

consequentemente,

$$1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}) = 0.$$

Logo,

$$\cos(\hat{A} + \hat{C}) = -1,$$

donde,

$$\hat{A} + \hat{C} = \pi.$$

Assim segue do Lema 1.1.2 que o quadrilátero é inscritível.

Agora provaremos a parte (II). Note que, na expressão (2.1) quanto mais próximo o ângulo $\hat{A} + \hat{C}$ fica de π o valor de $\cos(\hat{A} + \hat{C})$ diminui e consequentemente A aumenta. Logo, dado dois quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com $|\hat{A} + \hat{C} - \pi| < |\hat{A}' + \hat{C}' - \pi|$ temos que $\hat{A} + \hat{C}$ é mais próximo de π do que $\hat{A}' + \hat{C}'$, assim a área de $ABCD$ é maior que área de $A'B'C'D'$. ■

2.3 A desigualdade isoperimétrica para polígonos

Nesta seção, mostraremos que dado um polígono não convexo existe um polígono regular com números de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual e área maior. E posteriormente provaremos que entre os polígonos regulares de mesmo perímetro, o de maior número de lados tem a maior área, e este, possui menor área que um círculo de comprimento igual ao seu perímetro.

Inicialmente, mostraremos que é possível construir um polígono convexo a partir de um não convexo, com números de lados e perímetro menores e área maior. E de

posse desse fato, poderemos construir o polígono regular. A priori, vejamos esse fato para um caso particular e depois verificaremos sua veracidade para um polígono não convexo qualquer.

Considere um polígono não convexo, onde dois vértices não consecutivos determinam uma reta que deixa o polígono em um dos semi-planos produzidos por ela. Considerando o polígono não convexo $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8V_9$ podemos construir um polígono convexo $V_1V_2V_6V_7V_8V_9$, conforme a Figura 2.4, com

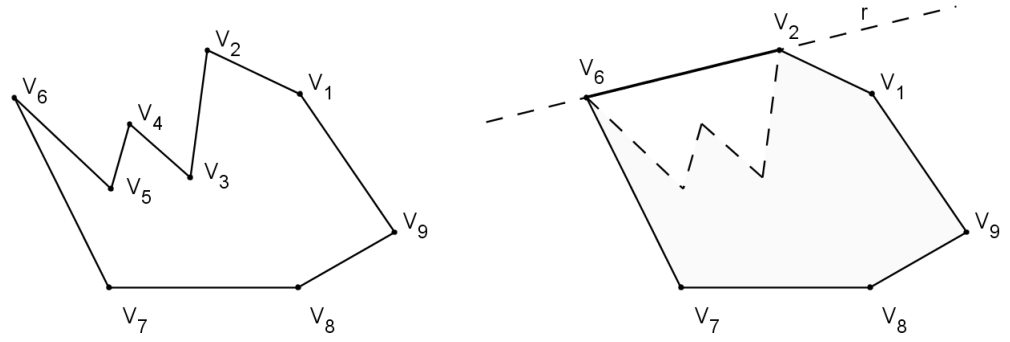


Figura 2.4: Polígonos no mesmo semi-plano

Note que o número de lados do polígono convexo é menor do que o número de lados do não convexo, perceba que o perímetro também é menor, pois $\overline{V_2V_6} < \overline{V_2V_3} + \overline{V_3V_4} + \overline{V_4V_5} + \overline{V_5V_6}$. Mas, a área do polígono convexo é maior do que a área do não convexo.

Proposição 2.3.1 *Dado um polígono não convexo, existe um polígono convexo com números de lados menor, perímetro menor e área maior.*

Demonstração: Seja um polígono não convexo $P_1P_2 \dots P_n$ de n lados, escolha dois vértices não consecutivos tal que a reta r determinada por eles deixem os demais vértices do polígono num mesmo semi-plano determinado pela reta.

Note que esta escolha é possível, basta considerar o polígono no plano cartesiano e tomar o vértice P_1 com maior coordenada x . Assim, a reta vertical que passa por este ponto deixará todo polígono num mesmo semi-plano. Gire esta reta em torno de P_1 até intersectar o primeiro vértice, mantendo o polígono no mesmo semi-plano. Caso a interseção da reta com o polígono não seja um dos lados, estes dois vértices são os que desejamos. Se não, devemos continuar a busca partindo do lado P_1P_2 . Mantendo o sentido de giro, rotacione a reta sobre o vértice P_2 até encontrar outro novo vértice, recaindo nos dois casos acima. Se a interseção da reta for novamente um dos lados continuamos esse processo.

Perceba que esse processo deve parar quando encontrarmos os dois vértices desejados. Caso contrário, retornaríamos ao vértice P_1 de tal forma que a reta determinada por quaisquer dois vértices consecutivos deixariam o polígono num mesmo semi-plano, contrariando o fato do polígono ser não convexo. Assim, denominando estes dois vértice de V_1 e V_2 , construiremos um polígono convexo $V_1V_2 \dots V_m$, com $m < n$.

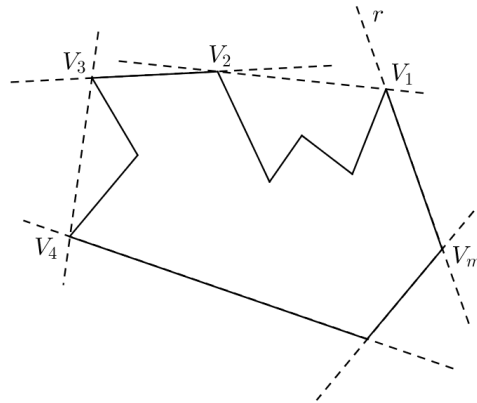


Figura 2.5: Construção do polígono convexo

De posse do lado V_1V_2 , seguindo o sentido de giro de V_1 para V_2 rotacione a

reta r no vértice V_2 até o primeiro vértice que permita a reta ter todo polígono $P_1P_2 \dots P_n$ no mesmo semi-plano. Chamando este vértice de V_3 obtemos o lado V_2V_3 . Continuando esses processo (mantendo o sentido de giro, rotacionado a reta r e determinado o lado adjacente) até voltarmos ao vértice V_1 teremos o polígono convexo desejado.

Como não usamos todos os vértices de $P_1P_2 \dots P_n$ na construção do polígono convexo temos que o número de vértices, ou melhor, o número de lados do polígono convexo é menor. Note que o lado V_1V_2 do polígono convexo foi construído a partir de dois vértices não adjacentes do polígono não convexo, logo o comprimento da linha poligonal de $P_1P_2 \dots P_n$ compreendida entre V_1 e V_2 é menor que $\overline{V_1V_2}$ e consequentemente temos o polígono convexo com perímetro menor do que $P_1P_2 \dots P_n$. Além disso, a área de $V_1V_2 \dots V_m$ é maior, pois o segmento V_1V_2 delimita uma região externa ao polígono $P_1P_2 \dots P_n$ que está interna ao polígono convexo. ■

Visto a existência do polígono convexo, munido das características apresentadas na Proposição 2.3.1, veremos que é possível construir um polígono regular a partir de um convexo, com números de lados e perímetro menores ou iguais e área maior. Para isso, mostraremos o caso particular do triângulo e posteriormente o Lema 2.3.1 que ajudará na generalização desse fato.

Exemplo: Entre os polígonos convexos de 3 lados e de mesmo perímetro, o de maior área é o triângulo equilátero.

De fato, dado o polígono ABC não regular. Seja L a média dos comprimentos dos lados do polígono.

Supondo que pelo menos um lado mede L , tome-o como a base fixa AB e pelo Lema 2.2.1 dentre todos os triângulos ABC de base fixa L e perímetro $3L$ aquele de maior área é o isósceles, logo o de maior área será o equilátero.

Caso contrário, temos que nenhum lado mede L . Como a média entre eles é

L então pelo menos um dos lados é maior que L (ver Proposição 1.4.1), da mesma forma que pelo menos um dos lados é menor que L . Assim escolha os lados vizinhos AC e BC onde um é maior e o outro é menor que L , ou seja, dados a e b positivos temos $\overline{AC} = L + a$ e $\overline{BC} = L - b$. E considere um ponto C' tal que $\overline{AC'} = L$ e o triângulo ABC' formado tenha o mesmo perímetro de ABC .

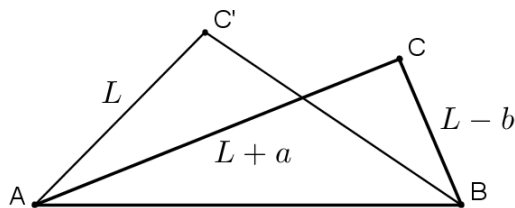


Figura 2.6: Triângulos escalenos de mesma base

Note que $|\overline{AC'} - \overline{BC'}| < |\overline{AC} - \overline{BC}|$, pois $\overline{AC'} - \overline{BC'} = a - b$ e $\overline{AC} - \overline{BC} = a + b$, logo pela parte (II) do Lema 2.2.1 temos um triângulo ABC' de mesmo perímetro e área maior que ABC . Como ABC' tem um lado medindo L voltamos a suposição inicial e teremos um triângulo equilátero $AB'C'$ com mesmo número de lados, mesmo perímetro e área maior. $\diamond$

Lema 2.3.1 *Dentre os polígonos de lado fixo AB e perímetro dado, o de maior área é o polígono cujo os demais lados são iguais.*

Demonstração: Mostraremos pelo Princípio de Indução Finita (ver seção 1.5) em relação ao número de lados do polígono.

No caso, do triângulo de base fixa AB e perímetro dado, temos pela parte (I) do Lema 2.2.1 que o triângulo de maior área é o isósceles. Sendo verdade para um polígono de 3 lados verificaremos para n lados.

Suponhamos que a afirmação é válida para polígonos de n lados e provaremos que será verdadeira para polígonos de $n+1$ lados. Dado um polígono $V_1V_2 \dots V_nV_{n+1}$

com lado $V_n V_{n+1}$ e perímetro fixos. Seja L a média dos comprimentos dos demais lados, assim temos:

Caso 1: Se $\overline{V_{n+1}V_1} = L$ obtemos o polígono $V_1 V_2 \dots V_n$ com lado fixo $V_n V_1$, cuja média dos demais lados também é L .

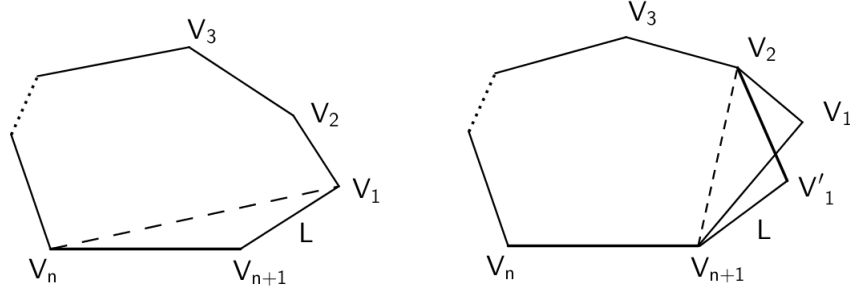


Figura 2.7: Polígonos de lado fixo $V_n V_{n+1}$

Logo, pela hipótese de indução existe um polígono de mesmo perímetro e área maior de lado fixo $V_n V_1$, com demais lados iguais a L . Assim, temos um polígono de $n + 1$ lados de base fixa $V_n V_{n+1}$ e demais lados iguais, com maior área.

Caso 2: Se $\overline{V_{n+1}V_1} \neq L$ considere, sem perda de generalidade, que $\overline{V_{n+1}V_1} > L$. Como L é a média de n lados do polígono, temos pelo menos um lado menor que L .

Sendo o lado adjacente $\overline{V_1 V_2} < L$, tome um ponto V'_1 tal que $\overline{V_{n+1}V'_1} = L$. Logo, pela parte (II) do Lema 2.2.1 obtemos um triângulo $V_{n+1}V_2V'_1$ de área maior e mesmo perímetro que $V_{n+1}V_2V_1$, assim podemos aumentar a área do polígono e termos o lado $\overline{V_{n+1}V'_1} = L$ adjacente ao lado fixo $V_n V_{n+1}$, recaindo nas condições do **Caso 1**.

Na hipótese do lado menor que L não esteja adjacente a $V_{n+1}V_1$ permutaremos os lados do polígono até chegarmos nesta condição (ver Proposição 1.2.6). Desta forma a afirmação será verdadeira para o polígono de $n + 1$ lados e pelo Princípio da Indução Finita será válida para todo polígono de n lados. ■

Afirmção 2.3.1 *Dado dois polígonos de lados correspondentes AB e $A'B'$, cujo demais lados são iguais e demais vértices possuem ângulos congruentes, como na Figura 2.8. Afirmamos que estes polígonos são congruentes.*

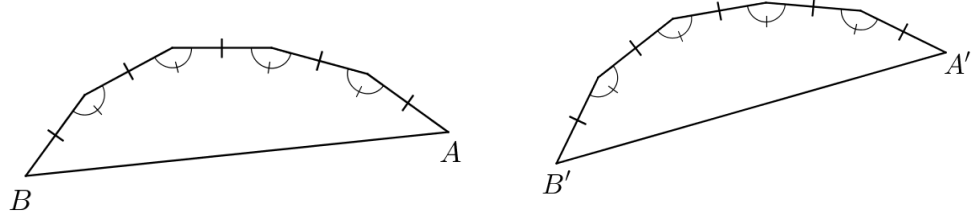


Figura 2.8: Polígonos com base AB e $A'B'$

Demonstração: De fato, usando Princípio da Indução Finita sobre o número n de lados (ver seção 1.5), verificamos inicialmente para $n = 3$ que ABC e $A'B'C'$ de bases AB e $A'B'$ com $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ são triângulos congruentes pelo caso LAL . Supondo que a Afirmção 2.3.1 é verdadeira para dois polígonos de n lados, mostraremos que será verdadeira para polígonos de $n+1$ lados.

Sejam $V_1V_2 \dots V_nV_{n+1}$ e $P_1P_2 \dots P_nP_{n+1}$ polígonos de lados correspondentes V_1V_{n+1} e P_1P_{n+1} , cujo demais lados são iguais e demais vértices possuem ângulos congruentes, conforme a Figura 2.9.

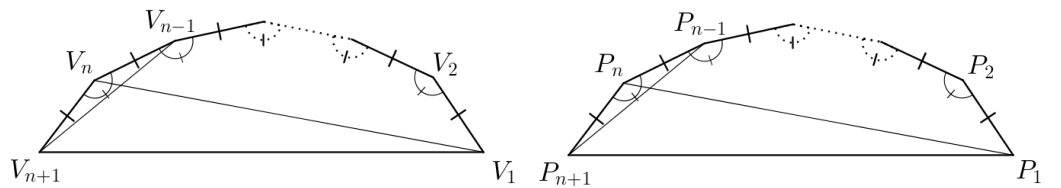


Figura 2.9: Polígonos de $m+1$ lados AB

Pela hipótese de indução temos $V_1V_2 \dots V_n \equiv P_1P_2 \dots P_n$, então $\overline{V_1V_n} = \overline{P_1P_n}$ e $V_1\widehat{V_n}V_{n-1} = P_1\widehat{P_n}P_{n-1}$. Como $V_{n-1}\widehat{V_n}V_{n+1} = P_{n-1}\widehat{P_n}P_{n+1}$ e $V_1\widehat{V_n}V_{n+1} = V_{n-1}\widehat{V_n}V_{n+1} -$

$V_1\widehat{V}_nV_{n-1}$, segue que $V_1\widehat{V}_nV_{n+1} = P_{n-1}\widehat{P}_nP_{n+1} - P_1\widehat{P}_nP_{n-1}$, ou seja, $V_1\widehat{V}_nV_{n+1} = P_1\widehat{P}_nP_{n+1}$. Logo $V_1V_nV_{n+1} \equiv P_1P_nP_{n+1}$ pelo caso LAL , então

$$V_1\widehat{V}_{n+1}V_n = P_1\widehat{P}_{n+1}P_n.$$

e

$$\overline{V_1V_{n+1}} = \overline{P_1P_{n+1}}$$

Usando a hipótese de indução nos polígonos $V_2V_3 \dots V_nV_{n+1}$ e $P_2P_3 \dots P_nP_{n+1}$ temos que $\overline{V_2V_{n+1}} = \overline{P_2P_{n+1}}$. E obtemos $V_1V_{n+1}V_2 \equiv P_1P_{n+1}P_2$ pelo caso LLL , donde

$$V_2\widehat{V}_1V_{n+1} = P_2\widehat{P}_1P_{n+1}.$$

Desta forma, $V_1V_2 \dots V_nV_{n+1} \equiv P_1P_2 \dots P_nP_{n+1}$, pois os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são iguais. ■

Proposição 2.3.2 *Dado um polígono não regular existe um polígono regular com mesmo números de lados, mesmo perímetro e área maior.*

Demonstração: Primeiro transformaremos o polígono não regular num polígono equilátero de lado igual a média L de todos os lados do polígono não regular. E depois, produziremos um polígono equiângulo, mantendo o comprimento dos lados e aumentando a área, assim obteremos o polígono regular desejado. Seja o polígono $V_1V_2 \dots V_n$ não regular de n lados e L a média de todos os lados do polígono.

Supondo que pelo menos um lado mede L , tome $\overline{V_{n-1}V_n} = L$. Logo, a média dos demais lados continua sendo L . Tomado $V_{n-1}V_n$ como lado fixo pelo Lema 2.3.1 temos um polígono equilátero de mesmo perímetro e área maior.

Caso contrário, todos lados são diferentes de L . Assim, tome dois lados consecutivos um maior e outro menor que L , essa situação é possível pois podemos

permutar os lados do polígono sem alterar seu perímetro e sua área conforme a Proposição 1.2.6.

Considerando $\overline{V_{n-1}V_n} > L$ e $\overline{V_nV_1} < L$ tome um ponto V'_n tal que $\overline{V_{n-1}V'_n} = L$, logo pela parte (II) do Lema 2.2.1 temos um triângulo $V_{n-1}V_1V'_n$ de área maior e mesmo perímetro que $V_{n-1}V_1V_n$, assim aumentamos a área do polígono e temos um lado $\overline{V_{n-1}V'_n} = L$, logo voltamos a suposição inicial e teremos um polígono equilátero de mesmo perímetro e área maior.

Agora vamos tornar o polígono equilátero $V_1V_2\dots V_{n-1}V'_n$ num polígono regular $P_1P_2\dots P_n$ de ângulo interno igual a média α de todos ângulos internos do polígono equilátero, transformando seus ângulos internos no ângulo interno α do polígono regular, sempre mantendo o perímetro e aumentando a área. Chamaremos os vértices do polígono equilátero cujo ângulo é igual a α de bons e os demais de maus.

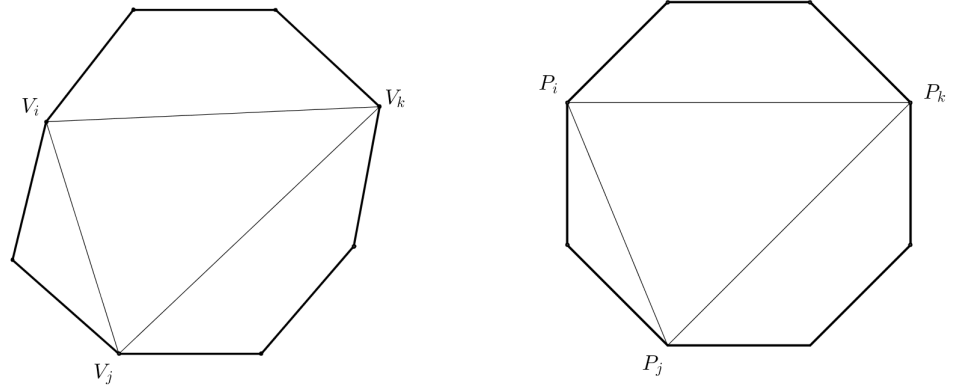


Figura 2.10: Polígonos congruentes

Note que temos pelo menos quatro ângulos maus. De fato, suponha que V_i, V_j e V_k sejam os únicos vértices maus. Pela Afirmação 2.3.1, os polígonos $V_iV_{i+1}\dots V_j$ e $P_iP_{i+1}\dots P_j$ são congruentes, da mesma forma que $V_jV_{j+1}\dots V_k$ e $P_jP_{j+1}\dots P_k$, $V_kV_{k+1}\dots V_i$ e $P_kP_{k+1}\dots P_i$ são congruentes. Logo, os triângulos $V_iV_jV_k$ e $P_iP_jP_k$ serão congruentes pelo caso *LLL* e verificaremos que o polígono

$V_1V_2 \dots V_{n-1}V'_n$ é regular, contrariando o fato de $V_1V_2 \dots V_{n-1}V'_n$ ter apenas 3 ângulos maus.

Assim, admitindo um polígono equilátero não regular e considerando $V_A, V_B, V_C, \dots, V_Z$ o conjunto dos vértices maus, provaremos que existe um polígono regular com mesmo perímetro e área maior, usando o Princípio de Indução Finita (ver seção 1.5) sobre o número de ângulos maus.

Primeiro verificaremos a veracidade para um polígono equilátero não regular, de lado L , com quatro vértices maus. Tome dois vértices consecutivos tal que $\widehat{V}_A$ seja um ângulo maior do que α e $\widehat{V}_B$ um ângulo menor do que α e considere o quadrilátero $V_AV_BV_CV_D$ formados pelos vértices maus.

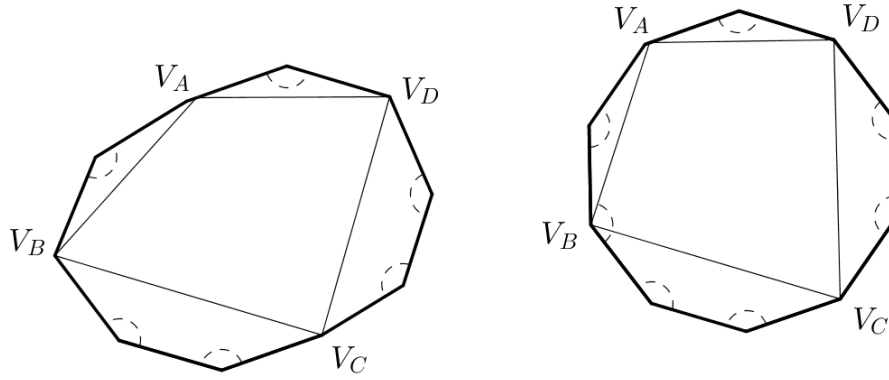


Figura 2.11: Polígonos equilátero não regular

Deformaremos este quadrilátero, mantendo o comprimento de seus lados fixo, de forma que os ângulos $\widehat{V}_A$ e $\widehat{V}_C$ diminuam e os ângulos $\widehat{V}_B$ e $\widehat{V}_D$ aumentem até V_A ou V_B torne-se um vértice bom. Note que, nesta deformação, a região compreendida entre o quadrilátero e o polígono não se altera, mas temos um aumento na área do quadrilátero e consequentemente no polígono.

De fato, tome o círculo que passa pelos vértices V_A e V_B com o mesmo raio da circunferência circunscrita ao polígono regular de lado L .

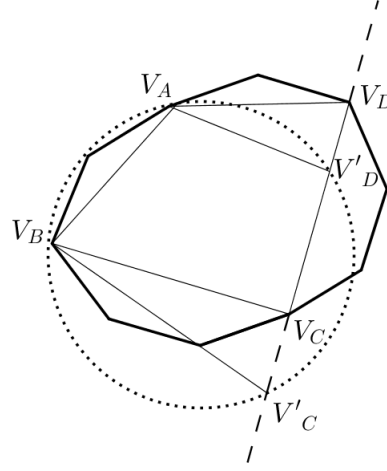


Figura 2.12: Quadrilátero inscritível

Sendo V'_C e V'_D os pontos de interseção da reta $\overleftrightarrow{V_C V_D}$ com o círculo temos:

$$V_B \widehat{V_A} V_D > V_B \widehat{V_A} V'_D \quad \text{e} \quad V_B \widehat{V_C} V_D > V_B \widehat{V'_C} V_D,$$

onde,

$$\begin{aligned} V_B \widehat{V_A} V_D + V_B \widehat{V_C} V_D &> V_B \widehat{V_A} V'_D + V_B \widehat{V'_C} V_D, \\ V_B \widehat{V_A} V_D + V_B \widehat{V_C} V_D &> \pi. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.2.2 enquanto $\widehat{V_A}$ for maior do que α e $\widehat{V_B}$ for menor do que α temos $\widehat{V_A} + \widehat{V_C} > \pi$. Desse modo obtemos um polígono de área maior com acréscimo de um vértice bom.

Perceba que ao transformarmos um dos quatros vértices maus num vértices bom os demais vértices serão bons devido não existir polígono equilátero não regular com menos de quatro vértices maus. Logo, temos um polígono regular de mesmo perímetro e área maior.

Agora, suponha que dado um polígono equilátero não regular de m vértices

maus, existe um polígono regular com mesmo perímetro e área maior. E mostraremos que será verdade para $m + 1$ vértices maus.

Considere o polígono $V_1V_2 \dots V_n$ equilátero e não regular com $m + 1$ vértices maus, onde $m + 1 \leq n$, cuja a média de todos seus ângulos internos é igual a α . Dentre os vértices maus, tome dois consecutivos tal que V_A tenha um ângulo maior do que α e V_B um ângulo menor do que α . E na sequência dos vértices maus $\{V_A, V_B, \dots, V_Z\}$ escolha V_C consecutivo a V_B e também V_Z antecessor de V_A para formar o quadrilátero $V_AV_BV_CV_Z$.

Usando a mesma ideia de deformação do quadrilátero, mostrada anteriormente, transformamos um vértice mau em bom e assim obtemos um polígono com m ângulos maus. Logo pela hipótese de indução temos um polígono regular com mesmo perímetro e área maior. ■

Proposição 2.3.3 *Dentre os polígonos regulares de mesmo perímetro p , temos:*

- (I) *Se $n < m$, a área do polígono de n lados é menor que a área do polígono de m lados;*
- (II) *a área do círculo, de raio $r = p/2\pi$, é maior que a área de qualquer polígono.*

Demonstração: Inicialmente provaremos (I) por indução sobre o número de lados. Para $n = 3$ e $m = 4$ temos um triângulo equilátero e um quadrado, ambos com mesmo perímetro p . Logo o lado do quadrado mede $p/4$ e do triângulo mede $p/3$.

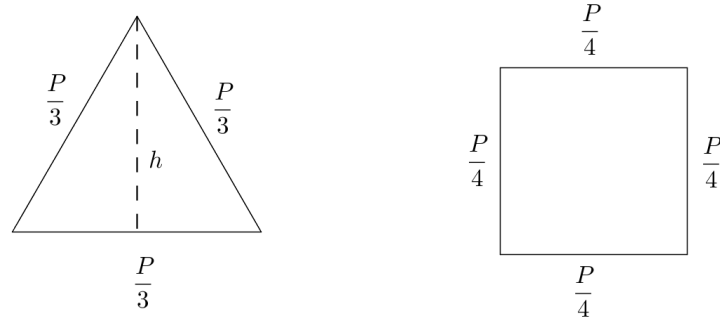
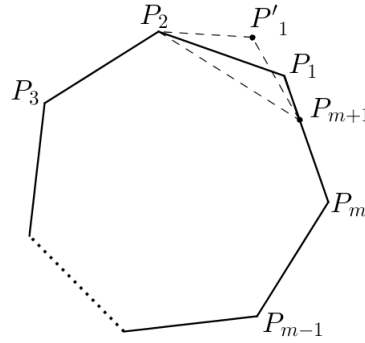


Figura 2.13: Polígonos regulares de mesmo perímetro

Teremos a altura do triângulo equilátero igual a $p\sqrt{3}/6$ e área $A_3 = p^2\sqrt{3}/36$. Como a área do quadrado é $A_4 = p^2/16$ temos que $A_3 < A_4$, ou seja, a proposição é verdadeira.

Suponha que seja verdade para $n < m$, queremos mostrar que será verdadeira para $m < m+1$. Seja $P_1P_2 \dots P_m$ um polígono regular de m lados com perímetro p , tome um ponto P_{m+1} sobre o lado P_mP_1 , tal que P_{m+1} esteja mais próximo de P_1 .

Figura 2.14: Construção do polígono de $m+1$ lados

Considerando o segmento $P_{m+1}P_2$ fixo, pelo Lema 2.2.1 podemos construir um triângulo $P_{m+1}P'_1P_2$ isósceles de mesmo perímetro e área maior que $P_{m+1}P_1P_2$. Logo, temos um polígono $P'_1P_2 \dots P_{m+1}$ não regular de $m+1$ lados com mesmo perímetro

e área maior que $P_1P_2 \dots P_m$. E usando a Proposição 2.3.2, o polígono $P'_1P_2 \dots P_{m+1}$ tem mesmo perímetro e área menor que um polígono regular de $m+1$ lados. Assim, a área do polígono regular de m lados é menor que a área do polígono regular de $m+1$ lados.

Agora provaremos a parte (II). Perceba que dentre os polígonos de mesmo perímetro quando o número de lados n aumenta, suas áreas tendem para área do círculo de mesmo perímetro. Considere uma circunferência com um polígono regular inscrito de n lados e outro com mesmo número de lados, mas circunscrito.

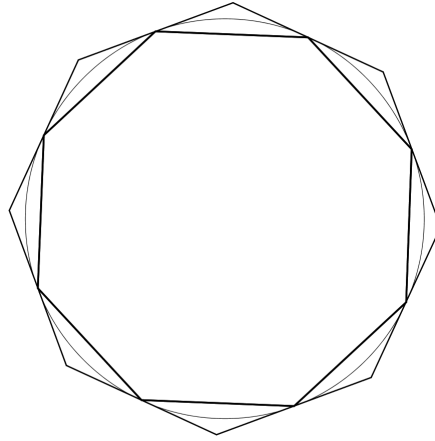


Figura 2.15: Polígonos inscrito e circunscrito

Sendo p o comprimento do círculo, p_i o perímetro do polígono inscrito e p_c o perímetro do circunscrito, temos que

$$p_i < p < p_c.$$

Quando aumentamos o número de lados dos polígonos o valor de p_i cresce enquanto o valor de p_c diminui e ambos tendem a p . Assim, fazendo n ser muito grande, tendendo para infinito, os polígonos e a circunferência terão o mesmo perímetro. Note que nesse mesmo processo as áreas A_i e A_c , dos polígonos inscrito e

circunscrito, tendem para área A , do círculo, devido $A_i < A < A_c$. Logo a circunferência tem área maior que qualquer polígono regular de mesmo perímetro. ■

2.4 Prova do resultado principal

Teorema 1 *Toda curva fechada de comprimento L engloba uma área menor ou igual a $L^2/4\pi$. E esse valor só é alcançado para o círculo de raio $L/2\pi$.*

Demonstração: Dado uma curva de comprimento L englobando uma área A tome n pontos ao longo da curva igualmente espaçados em relação ao comprimento de arco de curva entre eles. Com esses pontos formamos um polígono P de n lados e perímetro menor que L . Pela Proposição 2.3.1 podemos construir um polígono P' convexo com número de lados menor ou igual a n , perímetro menor que L e área maior que P .

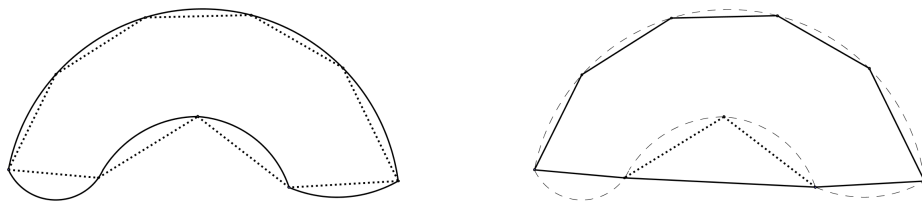


Figura 2.16: Polígonos convexo

Usando a Proposição 2.3.2 temos um polígono regular P'' de mesmo perímetro e área maior que P' . Aplicando a Proposição 2.3.3 obtemos um círculo C cuja área é maior que P'' , com mesmo perímetro. E consequentemente, o polígono P tem área menor e perímetro maior que C .

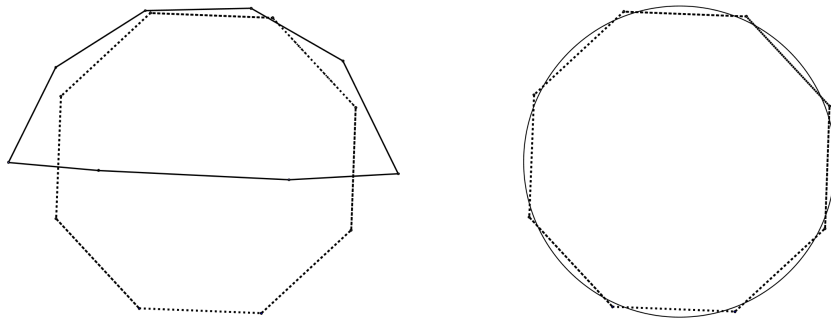


Figura 2.17: Polígono regular

Como o perímetro de P é menor que o comprimento L da curva fechada, temos que o comprimento L_c de C é menor que L , ou seja, $L_c < L$. Admitindo r como raio de C temos que $2\pi r = L_c$, donde

$$r = \frac{L_c}{2\pi},$$

logo,

$$A_c = \pi r^2 = \frac{L_c^2}{4\pi} < \frac{L^2}{4\pi}.$$

Assim o polígono P de n lados e perímetro menor que L tem área menor que $L^2/4\pi$.

Agora resta delimitarmos a área compreendida entre o polígono P e os pontos da curva que estão fora da região poligonal. Perceba que estes pontos distam menos de $L/2n$ de algum dos n vértices do polígono, pois cada arco de curva tem comprimento igual a L/n e consequentemente o ponto mais distante está a menos de $L/2n$ de um dos vértices.

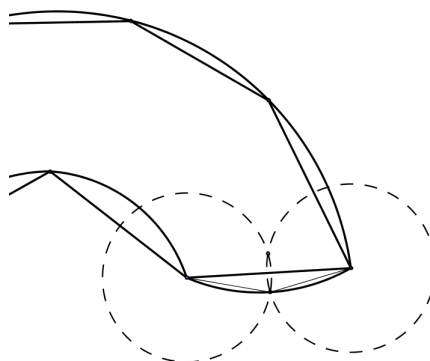


Figura 2.18: Região entre curvas

Essa região compreendida tem área menor que a área formada por n círculos de raio $L/2n$ e centros nos n vértices, ou seja, menor que $n\pi(L/2n)^2$. Logo a área delimitada pela curva fechada é menor ou igual a:

$$\frac{L^2}{4\pi} + \frac{n\pi L^2}{4n^2},$$

ou seja,

$$\frac{L^2}{4\pi} + \frac{\pi L^2}{4n}.$$

Como estimamos para qualquer n , temos que a área é menor ou igual a $L^2/4\pi$ (Fazendo n ser muito grande, tendendo para infinito).

Agora vamos mostrar que a curva fechada de comprimento L que engloba uma área de $L^2/4\pi$ é o círculo de raio $L/2\pi$. Suponha que esta curva não seja uma circunferência, temos que a curva não será convexa, ou sendo, não é circunscritível a um polígono regular.

Admitindo ser uma curva não convexa então existe um segmento de reta que liga dois de seus pontos e não está contido no interior da curva.

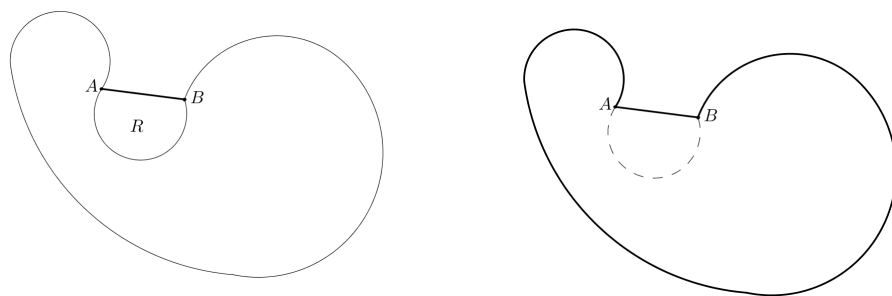


Figura 2.19: Curva fechada não convexa

Este segmento limita uma região R do plano que está fora da curva, conforme a Figura 2.19. Substituindo a parte da curva que limita R pelo segmento temos uma nova curva com perímetro menor e área maior, contrariando o fato da área máxima ser exatamente $L^2/4\pi$. Logo a curva é convexa.

Considerando que a curva não é circunscritível tome quatro pontos distintos A, B, C e D pertencente a curva, formando um quadrilátero $ABCD$. Mantendo fixo os arcos dentre dois vértices e deformando o quadrilátero até torna-lo inscritível, a curva continuará com o mesmo perímetro, mas haverá um aumento na área. Contrariando novamente a primeira parte do Teorema.

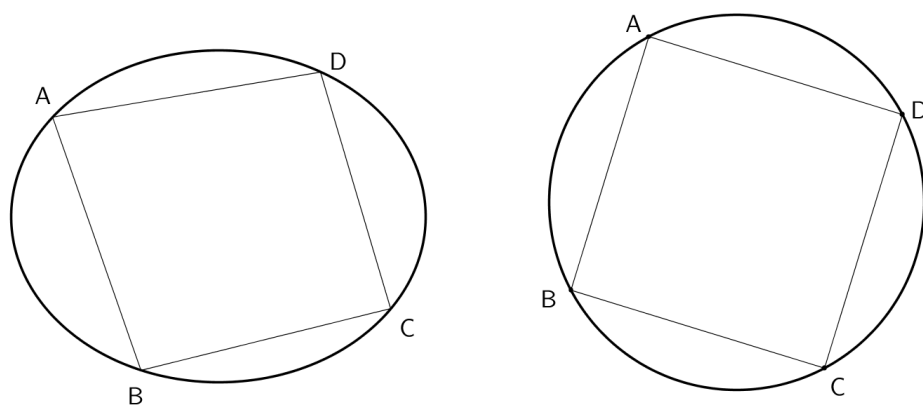


Figura 2.20: Curvas circunscritíveis

Note que o círculo tem área $L^2/4\pi$, então o raio é dado por:

$$\begin{aligned}\pi r^2 &= \frac{L^2}{4\pi}, \\ r^2 &= \frac{L^2}{4\pi^2},\end{aligned}$$

donde,

$$r = \frac{L}{2\pi}.$$

■

2.5 Aplicações da desigualdade isoperimétrica

Exemplo: Um fazendeiro necessita cercar uma área na margem do rio dispondo de 62,8 metros de cerca, qual a área máxima que poderá ser delimitada?

Pelo Teorema 1, dada uma curva fechada de comprimento 62,8 metros teremos a área máxima igual a:

$$A = \frac{(62,8)^2}{4\pi} \approx 314$$

Como dispomos de um rio, seguimos a ideia da princesa Dido na Seção 2.1 e construímos um semicírculo com área ainda maior que A .

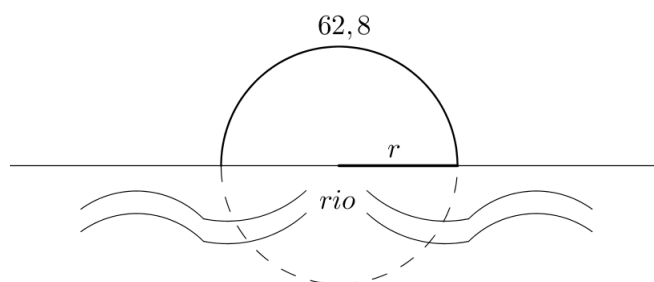


Figura 2.21: Cercado circular

A área delimitada corresponde a metade da área do círculo de comprimento 125,6. Como esta circunferência terá área máxima $S = (125,6)^2/4\pi \approx 1256$, o semicírculo tem área $628m^2$, que corresponde o dobro da área A . Faltando apenas confirmar que realmente a semicircunferência dará a maior área possível.

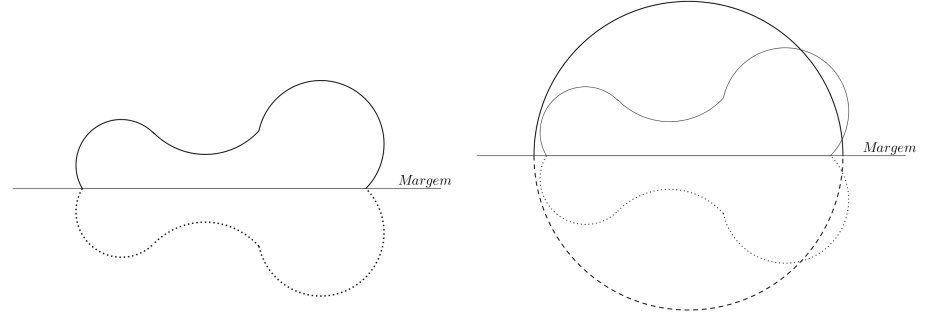


Figura 2.22: Curva sobre a margem

De fato, considerando um cercado de comprimento K em torno da margem do rio, podemos refletir a curva sobre a margem e construir um curva fechada com o dobro do comprimento do cercado. Assim podemos aplicar o Teorema 1 e obtermos um círculo de raio:

$$r = \frac{2K}{2\pi} = \frac{K}{\pi},$$

que maximiza a área para:

$$S = \frac{(2K)^2}{4\pi} = \frac{K^2}{\pi}.$$

Logo a curva de maior área em torno da margem será a semicircunferência cuja área $K^2/2\pi$ corresponde a metade da medida no círculo. Assim comparando com a área máxima $K^2/4\pi$ de uma curva fechada de comprimento K temos que o semicírculo possui a maior área possível. $\diamond$

Exemplo: Dada uma janela em arco romano, conforme Figura 2.23, com perímetro fixo p . Que medidas r e h determinam a maior luminosidade?

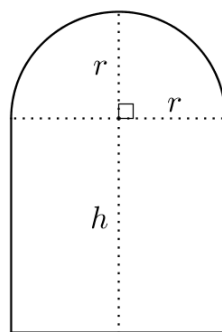


Figura 2.23: Janela em arco romano

Para termos uma maior luminosidade precisamos que a janela tenha maior área possível. Admitindo que r e h proporcionam a área máxima, decompomos a Figura 2.23 num semicírculo e um contorno retangular de perímetro $2r + 2h$.

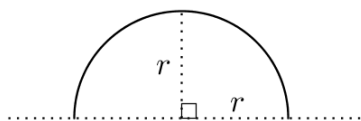


Figura 2.24: Semicírculo

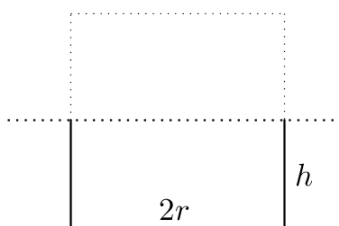


Figura 2.25: Contorno retangular

Como vimos no exemplo anterior, a semicircunferência de raio r já corresponde a maior área, mas necessitamos descobrir qual relação existe entre as medidas r e h que garante essa área máxima. Ao refletirmos a parte inferior da Figura 2.25 obtemos um retângulo de lados medindo $2r$ e $2h$ cuja área será máxima, mas pela Proposição 2.3.2 esse quadrilátero de maior área é um quadrado. Logo $2r = 2h$, ou seja, $r = h$. Assim temos maior luminosidade quando as medidas r e h forem iguais.

◇

Exemplo: Um grupo de escoteiros dispõem de 60 metros de fio e 4 bastões para instalar um alarme em torno de uma região descampada ao lado de uma montanha rochosa. Para proteger a maior área possível, qual deve ser o formato do cercado?



Figura 2.26: Região descampada

A princípio o semicírculo delimitaria a região de maior área, mas dispomos apenas de 4 bastões, assim nos restringimos a um cercado poligonal. Ao colocarmos 2 bastões encostado na rocha economizaremos fio e podemos construir uma região equivalente a metade de um polígono convexo de 4 ou 6 lados, conforme a Figura 2.27.

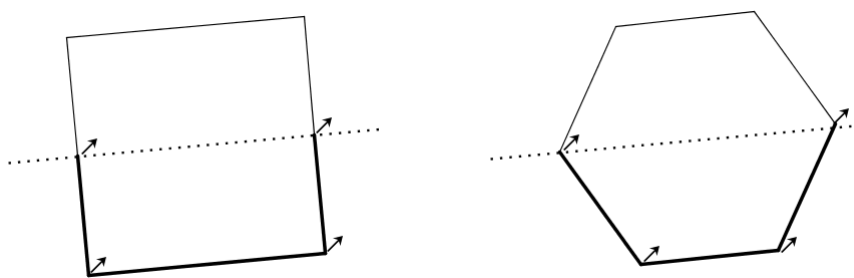


Figura 2.27: Cercado poligonal

Pela Proposição 2.3.2 para termos uma maior área os polígonos deverão ser

regulares e aplicando a Proposição 2.3.3 temos o hexágono regular como o polígono de área máxima, logo a região poligonal corresponde a metade de um hexágono regular. $\diamond$

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L.M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10^o ed. SBM. (2006).
- [2] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria/Números Complexos**. 3^o ed. Rio de Janeiro: SBM, (1992) Vol 13. Springer France.
- [3] COSTA, S.; LIMBERG, F. **A Lenda de Dido**. Video, Série: Matemática na Escola. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126>>. Acesso em: 21/03/2013.
- [4] HEFEZ, A. **Elementos da Aritmética**. 2^o ed. Rio de Janeiro: SBM, (2011).
- [5] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol.2, 6^o Ed. Rio de Janeiro: SBM, (2006).
- [6] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol.1, 9^o Ed. Rio de Janeiro: SBM, (2006).
- [7] MOREIRA, C. G. T. de A.; SALDANHA, N. C. **A desigualdade isoperimétrica**. Matemática Universitária N^o 15, 13-19, (1993). Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n15/n15_Artigo02.pdf>. Acesso em: 27/03/2013.

- [8] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, J. C. **Iniciação Matemática**: um curso com problemas e soluções. 1º ed. Rio de Janeiro: SBM, (2010).
- [9] PARENTE, J. B. A. **Fundamentos da Geometria Euclidiana Plana**. Material digital do Curso de Licenciatura da UFPB VIRTUAL. Disponível em: <http://portal.virtual.ufpb.br/biblioteca-virtual/files/fundamentos_da_geometria_euclidiana_1361970502.pdf>. Acesso em: 27/03/2013.
- [10] PESCO, D. U.; ARNAUT, R. G. T. **Geometria Básica**. CEDERJ (versão adaptada, PROFMAT 2011).
- [11] SOUSA, C. R. A. **Duas demonstrações da desigualdade isoperimétrica**. UFMG, Belo Horizonte, (2006). Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/espec/monografiasPdf/Monografia_CarlosRoberto.pdf>. Acesso em: 24/03/2013.
- [12] STEWART, James. **Cálculo**. Vol 1, 5º ed. São Paulo: Tomson, (2006).
- [13] VIRGILIO, P. **Eneida**. Tradução de Manoel Odorico Mendes. eBooksBrasil.com, Clássicos Jakson, Vol 3, (1854).