



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



A Construção do Pentágono Regular segundo Euclides

†

por

Alex Cristophe Cruz da Silva

sob orientação do

Prof. Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera

e co-orientação do

Prof. Doutor Fernando Antonio Xavier de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A Construção do Pentágono Regular segundo Euclides

por

Alex Cristophe Cruz da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Geometria Plana.

Aprovada por:



Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera -UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza - UFPB (Co-orientador)



Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Julho/2013

Agradecimentos

Quero agradecer a CAPES, SBM, PROFMAT, UFPB, CCEN-UFPB, DM;

também ao Professor Doutor João Marcos do Ó, ao meu orientador Professor Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera, ao meu co-orientador Professor Doutor Fernando Antonio Xavier de Souza, ao professor externo à banca o Professor Doutor Jorge Antonio Hinojosa Vera (UFRPE);

à Secretária de Educação Arleide Albuquerque Guerra, a Prefeitura Municipal de Timbaúba, ao Gestor da Escola de Referência em Ensino Médio de Timbaúba o Professor Mestre Antonio Barboza;

aos colegas de caminhada Leonardo Rodrigues de Araújo, Salatiel Dias da Silva, Márcio Alves Marinho e Gildecio José Justino;

ao grande amigo Gutemberg pelo incentivo, e ao Pe.Marinaldo Barbosa de Lima pelo apoio espiritual;

demais professores do polo UFPB;

e principalmente a Deus, pois sem Ele não haveria de chegar neste momento ímpar de crescimento pessoal e acadêmico.

Dedicatória

*Ao meu pai José Cassimiro, à minha
mãe Betânia Cristina (in memoriam), à
minha esposa Emetéria (Telma), à
meus filhos Alex Júnior e Alexia, à
minha madrinha Tereza.*

Resumo

Neste trabalho, apresentamos algumas construções do pentágono regular, sendo a principal delas uma construção de Euclides encontrada no seu livro *Os Elementos*. Apresentamos, também, algumas aplicações desta construção.

Palavras-chave: Polígonos regulares, Pentágono, Euclides, Segmento Áureo.

Abstract

In this work we present some constructions of the regular pentagon, the main one is a construction of Euclid found in his book *The Elements*. We also present some applications of this construction.

Keywords: Regular Polygons, Pentagon, Euclid, Golden Mean.

Sumário

1	Euclides de Alexandria - Um pouco de História	3
1.1	Introdução	3
1.2	Alexandria e Euclides	3
1.3	Obras Perdidas e Os Elementos	4
2	A construção do pentágono regular	7
2.1	Introdução	7
2.2	Os Polígonos regulares	7
2.3	Construções do Pentágono Regular	13
2.4	Outras Construções	29
3	Aplicações	43
3.1	Introdução	43
3.2	Elementos Notáveis do Polígono	43
3.3	Cálculo do Lado e Apótema do Polígono	45
A	O Segmento Áureo	54
	Referências Bibliográficas	57

Introdução

A matemática é uma ciência de aspecto único do pensamento humano e se difere de todas as outras ciências, ela possui inúmeros ramos para todos os possíveis estudantes dessa magnífica ciência exata. De seus ramos, a geometria é um desses que tem as mais diversas aplicações, que são utilizadas dos primórdios da civilização humana até o momento atual.

A geometria, em especial, tem grande aplicabilidade e a falta de um manual dessa área da matemática fez com que alguns matemáticos produzissem os seus primeiros manuais de ensino (primórdios dos livros). Dentre esses autores destaca-se Euclides de Alexandria o qual escreveu vários livros, entre estes Os Elementos.

Esta dissertação faz um apanhando histórico do pouco do que se sabe sobre Euclides. No capítulo I, será dada informações sobre: Alexandria, os livros perdidos de Euclides, o livro Os Elementos do qual faremos uma abordagem sintética de cada capítulo, informando o seu conteúdo para que o leitor, que queira mais informações sobre o mesmo, tenha uma referência.

No capítulo II, serão desenvolvidos os conceitos de polígonos regulares, com demonstrações de inscrição e circunscrição destes polígonos na circunferência; logo após é feita uma sequência lógica de teoremas e construções usadas por Euclides, do teorema de Pitágoras, inscrição de quadriláteros em uma circunferência, incluindo a construção do segmento áureo, dado um segmento qualquer, construção de um triângulo isósceles em que os ângulos da base é o dobro do ângulo do vértice, dado um segmento qualquer, as demonstrações feitas todas são com equivalência de áreas. Elas justificam, matematicamente, a construção do pentágono regular feita com régua e compasso, depois apresentamos mais três construções diferentes. O capítulo é finalizado com a demonstração que o segmento áureo da diagonal do pentágono regular é congruente com o lado desse polígono.

No capítulo III, utilizando os conceitos, construções e demonstrações apresentados no capítulo anterior, definimos os elementos notáveis de um polígono regular, com resolução de quatro problemas que são: calcular a apótema e o lado dos polígonos hexágono, decágono, pentágono e de um polígono regular de n lados.

O segmento áureo é comentado várias vezes neste trabalho, por isso incluímos um apêndice falando sobre o mesmo, demonstrando o valor dele, a sua incomensurabilidade e onde é encontrado em várias situações na natureza.

Capítulo 1

Euclides de Alexandria - Um pouco de História

1.1 Introdução

Neste capítulo falaremos sinteticamente o que ocorria na época de Euclides. Dissertaremos um pouco deste matemático fascinante e sobre o seu livro que serve de base para o estudo de uma área da matemática que provoca fascínio em vários estudiosos - a geometria.

1.2 Alexandria e Euclides

A morte de Alexandre, o Grande, levou a conflitos mortais entre os generais do exército grego. O controle da parte egípcia estava nas mãos dos Ptolomeus, os governantes macedônicos do Egito. Ptolomeu I assentou o alicerce da Universidade de Alexandria - Museu e Biblioteca - ela foi financiada tanto por Ptolomeu I como pelo seu filho Ptolomeu II. Deste centro acadêmico ele recrutou um grupo de sábios, os de primeira linha e em diversas áreas. Entre esses sábios se encontra Euclides - o autor de um dos livros mais estudado depois da Bíblia, Os Elementos (Stoichia). É interessante frisar que a Universidade de Alexandria, após uns 40 anos, ostentava mais de 600.000 rolos de papiro e em 300 a.C. a universidade abriu as portas e, com isso, a cidade de Alexandria se tornou a metrópole de amplo conhecimento

intelectual grego (veja [1]).

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, apenas que, sem dúvida, ele foi professor da primeira universidade que já se ouviu falar, a famosa Universidade de Alexandria. Trata-se da primeira instituição em que sua organização tem semelhança com as que existem atualmente. É uma infelicidade que não existem registros históricos da data e do local do nascimento de Euclides, mas sabe-se que, provavelmente, sua formação foi na escola platônica de Atenas. As obras que sobreviveram do destino trágico do esquecimento são: *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os Fenômenos* e *Óptica*. segundo [1] aparece um retrato de Euclides em vários livros de história da matemática, essa imagem é de Euclides de Samara (veja [1], [2], [3]).

1.3 Obras Perdidas e Os Elementos

Do que Euclides produziu, mais da metade foi perdido, bem como uma obra sobre cônicas de quatro volumes [1], também um tratado sobre Lugares Geométricos Sólidos (nome grego para as secções cônicas), de Aristeu, a obra dele foi superada pela a de Apolônio. Entre as obras que também foram perdidas temos uma sobre Lugares Geométricos de Superfície, outra sobre Pseudaria (ou falácias) e uma terceira sobre Porisma, segundo Pappus um porisma é algo intermediário entre um teorema, uma proposta de demonstração, ou uma construção para resolver um problema; outros descrevem como uma proposição em que se determina uma relação entre as quantidades conhecidas e variáveis ou indeterminadas, talvez a melhor proximidade de uma ideia de função (veja [1], [2]).

Os Elementos de Euclides é, sem dúvida, um dos livros mais citado e estudado. Nenhum livro, com exceção da bíblia exerceu uma grande influência no pensamento científico; segundo as informações descritas em [1] e [2], ambos afirmam que antes deste Elementos, existiram outros como a versão de Hipócrates de Chios, mas não é encontrada nenhuma versão anterior a de Euclides, pois de tão bem elaborada foi a que sobreviveu derrubando os seus concorrentes da época. Uma visão geral de alguns professores que acreditam que esse livro é um compêndio de geometria, entretanto esse achado fala de um texto introdutório cobrindo toda a matemática elementar. Ele aborda os seguintes conteúdos: *aritmética* (teoria dos números), *geometria sintética* (pontos, retas, planos, círculos e esferas) e álgebra. Todo esse

conteúdo foi distribuído ao longo de 13 livros ou capítulos; onde se desenvolvem 465 proposições. Serão feitos alguns comentários a respeito dos treze livros indicando-os por algarismos romanos.

O Livro I possui o seguinte conteúdo: 23 definições, 5 postulados, 9 noções comuns necessárias para as demonstrações e 48 proposições. As primeiras 23 proposições tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem os três teoremas de congruência. As proposições I 27 a I 32 estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a soma de dois ângulos retos. As outras proposições falam sobre paralelogramos, triângulos, quadrados, relação entre áreas e a demonstração euclidiana do teorema de Pitágoras com também a sua recíproca. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos [2].

O Livro II é pequeno comparado com o livro I. Este possui 14 proposições que lidam com a transformação de áreas (equivalência de áreas) e com a álgebra geométrica.

O Livro III possui trinta e nove proposições. Contém muito dos teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos associados que fazem parte dos textos de geometria elementar.

O Livro IV tem exatamente dezesseis proposições, que mostram a construção com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados, bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos num círculo dado.

O Livro V é uma exposição da teoria das proporções de Eudoxo, aplicável a grandezas comensuráveis e incommensuráveis; além disso, faz uma definição de proporção.

O Livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontram-se nesse livro os teoremas fundamentais de semelhança de triângulos; construções de terceira, quarta e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas; o teorema da bissetriz interna; a generalização do Teorema Pitágoras, entre outros.

Os Livros VII, VIII e IX tratam da teoria elementar dos números, nesses capítulos desenvolvem o *algoritmo euclidiano* para achar o *mdc* e o *mmc*; as proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas; o *teorema fundamental da aritmética*; a prova de que os números primos são infinitos com uso da *redução ao absurdo*.

O Livro X estuda os irracionais, segmentos de reta incommensuráveis com um

segmento de reta dado, nele existe uma fórmula para calcular cem ternos pitagóricos.

Os livros XI, XII e XIII falam sobre a geometria sólida (espacial), com exceção da esfera e o último a inscrição dos cinco poliedros de Platão em uma esfera.

Com esse riquíssimo material, Os Elementos torna-se o livro mais completo da época em preparar o estudante à iniciação dos estudos matemáticos onde é comparado como o necessário para aprender matemática, assim como são as letras do alfabeto são para aprender a ler (para maiores descrições destes livros veja [1], [2]).

Capítulo 2

A construção do pentágono regular

2.1 Introdução

Neste capítulo, mostraremos a construção do pentágono regular inscrito em uma circunferência, que é ponto alto do Livro IV de Os Elementos. Essa construção não usa semelhança, se baseia apenas na equivalência de áreas [8]. Para sua construção ele utiliza uma sequência lógica de proposições que são estudadas ao longo dos Livros I, II, III e IV, são as proposições IV.10 e IV.11 onde é feita essa construção. A sequência lógica, neste trabalho, será a mesma desenvolvida por Euclides como o fez em seu livro. Ao leitor, muitas vezes, pergunta-se de onde vem certas afirmações. Euclides, em cada livro, escreve definições, postulados e noções comuns que são utilizados em suas demonstrações e construções sem a necessidade de informá-la na mesma, já que está sendo aplicada sem a necessidade de demonstrá-la, apenas como aceitável. Todas essas definições, postulados podem ser encontrados em [4].

2.2 Os Polígonos regulares

Definição 2.1 *Um polígono é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.*

Ou seja, um polígono regular é equilátero e equiângulo.

Definição 2.2 *Denomina-se arco de circunferência a cada uma das partes em que ela é dividida por um par de seus pontos (veja figura 2.1).*

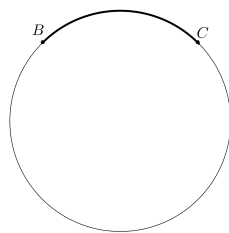


Figura 2.1:

Definição 2.3 *Denomina-se corda de circunferência a qualquer segmento de reta que tenha suas extremidades sobre ela.*

Quando uma reta corta uma circunferência formando uma corda ela é chamada de secante (veja figura 2.2).

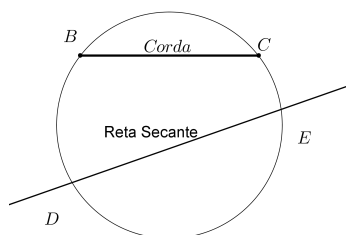


Figura 2.2:

Definição 2.4 *Denomina-se segmento de um círculo a região delimitada por um arco e uma corda de sua circunferência (veja figura 2.3).*

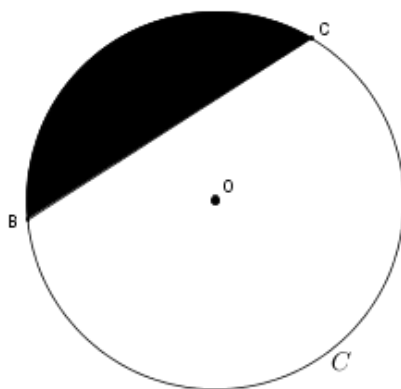


Figura 2.3:

Teorema 2.5 *Dividindo-se uma circunferência em n ($n \geq 3$) arcos congruentes, temos:*

- 1- *todas as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, reunidas, formam um polígono regular de n lados inscrito na circunferência;*
- 2- *as tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono regular de n lados circunscritos à circunferência.*

Demonstração: Sejam $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ os n pontos de divisão da circunferência C (veja figura 2.4). O polígono $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ é de n lados é inscrito, pois

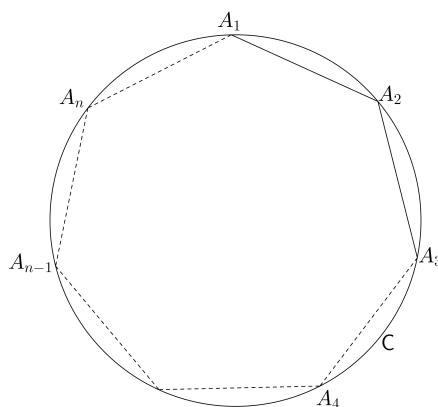


Figura 2.4:

todos os vértices pertencem à circunferência C . Sendo

$$\text{arco}A_1A_2 \equiv \text{arco}A_2A_3 \equiv \cdots \equiv \text{arco}A_{n-1}A_n \equiv \text{arco}A_nA_1 \quad (2.1)$$

então

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \cdots \equiv \overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_1} \quad (2.2)$$

Pois, numa mesma circunferência, arcos congruentes subtendem cordas congruentes. Os ângulos $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}, A_n$ são congruentes, pois cada um deles é ângulo inscrito em C e tem por medida metade da soma de $(n-2)$ dos arcos congruentes em que C ficou dividida. De (2.1) e (2.2) concluímos que $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ é um polígono regular de n lados inscrito na circunferência C , isto prova a primeira parte do teorema.

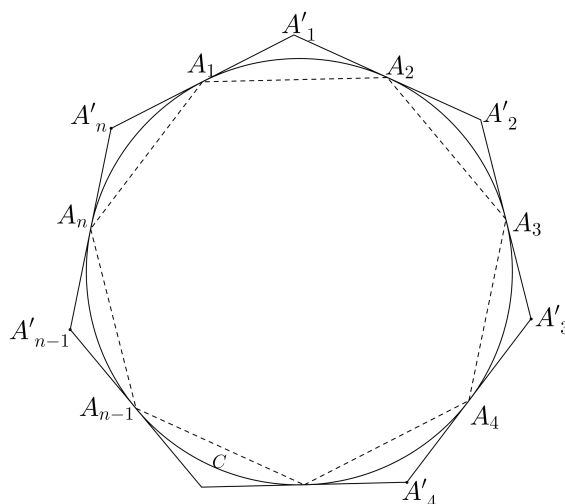


Figura 2.5:

Pelos pontos da divisão, que também são vértices de um polígono regular qualquer inscrito na circunferência C , $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}, A_n$ conduzimos tangentes a C nesses vértices e obtemos o polígono $A'_1A'_2A'_3A'_4 \cdots A'_{n-1}A'_n$ de n lados circunscrito a C (veja figura 2.5).

Os triângulos $\Delta A'_1A_1A_2, \Delta A'_2A_2A_3, \Delta A'_3A_3A_4, \Delta A'_4A_4A_5, \dots, \Delta A'_{n-1}A_{n-1}A_n$ e $\Delta A'_nA_nA_1$ são triângulos isósceles, pois cada um dos ângulos $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}$ e A_n destes triângulos, tem medida igual a metade da medida de uma das partes con-

gruentes arco A_1A_2 , arco A_2A_3 , arco A_3A_4 , arco $A_4A_5, \dots$, arco $A_{n-1}A_n$, arco A_nA_1 em que foi dividida a circunferência (são ângulos do segmento ou semi-inscritos) e congruentes pelo caso ALA, visto que sendo $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ um polígono regular (já demonstrado), e os lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ destes triângulos são congruentes. Da congruência dos triângulos decorre que $\hat{A}'_1 \equiv \hat{A}'_2 \equiv \hat{A}'_3 \equiv \dots \equiv \hat{A}'_{n-1} \equiv \hat{A}'_n$ (1); e, por soma conveniente, temos: $\overline{A'_1A'_2} \equiv \overline{A'_2A'_3} \equiv \overline{A'_3A'_4} \equiv \dots \equiv \overline{A'_{n-1}A'_n} \equiv \overline{A'_nA'_1}$ (2). De (1) e (2) concluímos que $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ é um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência C (veja [6]).

□

Teorema 2.6 *Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.*

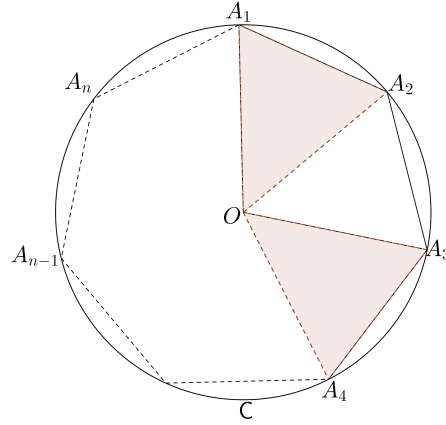


Figura 2.6:

Demonstração: Seja $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ o polígono regular (veja figura 2.6), pelos pontos $A_1A_2A_3$ tracemos a circunferência C e seja O o seu centro; provemos que C passa pelos demais vértices $A_4, A_5, \dots, A_{n-1}, A_n$ do polígono. Começemos provando que $A_4 \in C$. Consideremos os triângulos ΔOA_2A_1 e ΔOA_3A_4 . Estes triângulos são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_3A_4}$ (lados do polígono regular), $\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3}$ (raios da circunferência) e considerando o triângulo isósceles ΔA_2OA_3 (ângulos da base congruentes), e ainda, que os ângulos $\hat{A}_2$ e $\hat{A}_3$ do polígono são congruentes, por diferença decorre que $O\hat{A}_2A_1 \equiv O\hat{A}_3A_4$. $\Delta OA_2A_1 \equiv \Delta OA_3A_4 \implies \overline{OA_1} \equiv \overline{OA_4} \implies A_4 \in C$.

De modo análogo temos que $A_5 \in C$ (basta considerar ΔOA_3A_2 e ΔOA_4A_5), $\dots$, $A_{n-1} \in C$ e $A_n \in C$, e o polígono $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}$ (basta considerar $\Delta OA_{n-3}A_{n-4}$ e $\Delta OA_{n-2}A_{n-1}$) A_n (basta considerar $\Delta OA_{n-1}A_{n-2}$ e ΔOA_nA_1) inscrito na circunferência C (veja [6]).

□

Da unicidade da circunferência que passa por $A_1A_2A_3$ sai a unicidade de C por $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$.

Teorema 2.7 *Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.*

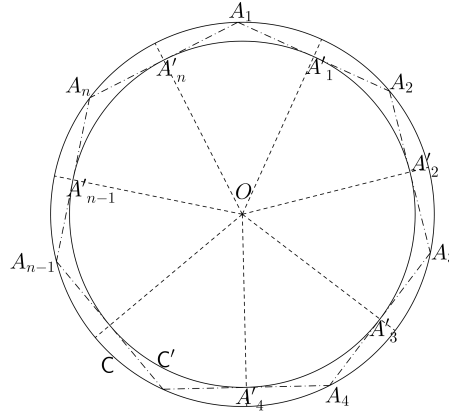


Figura 2.7:

Demonstração: Seja $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ o polígono regular. Em vista do Teorema 2.6, ele é inscrito numa circunferência C (veja figura 2.7). Seja O o centro dessa circunferência. Os lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são cordas congruentes de C , por isso distam igualmente do centro O . Sendo $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}, A'_n$ os respectivos pontos médios dos lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, temos $\overline{OA'_1} \equiv \overline{OA'_2} \equiv \dots \equiv \overline{OA'_{n-1}} \equiv \overline{OA'_n}$ (distância do centro a cordas congruentes) donde se conclui que O é o centro de uma circunferência C' que passa pelos pontos $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n-1}, A'_n$. E ainda sendo $\overline{OA'_1} \perp \overline{A_1A_2}, \overline{OA'_2} \perp \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{OA'_{n-1}} \perp \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{OA'_n} \perp \overline{A_nA_1}$, temos que $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ tem lados tangentes a C' . Conluímos que o polígono regular $A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A_n$ é circunscrito à circunferência C' .

□

Unicidade de C' , se existisse outra circunferência inscrita no polígono $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$, ela passaria pelos pontos $A'_1, A'_2, A'_3 \cdots$, e seria, então coincidente com C' (veja [6]).

2.3 Construções do Pentágono Regular

Teorema 2.8 *Se um quadrilátero tem dois lados paralelos e congruentes entre si ele é um paralelogramo.*

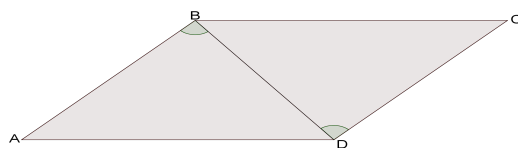


Figura 2.8:

Demonstração: Seja o quadrilátero ABCD, com $AB = CD$ e $AB \parallel CD$ (veja figura 2.3). Queremos mostrar que $AD = BC$ e $BC \parallel AD$. Unindo-se B a D, ficam formados os triângulos ABD e BCD. Tais triângulos são congruentes pelo critério LAL, pois BD é um lado comum, o $\angle ABD = \angle BCD$ (alternos-externos) e $AB = CD$. Logo, $BC = AD$ e o $\angle ADB = \angle CBD$. Logo, $BC \parallel AD$ ([5]).

□

Teorema 2.9 *Se pelo ponto médio de um lado de um triângulo for traçada a paralela a outro lado, essa paralela cortará o terceiro lado em seu ponto médio. Reciprocamente, a reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado.*

Demonstração: Seja o triângulo ABC e o ponto M, médio de AB (veja figura 2.9). Por M traçamos uma paralela a BC, cortando o lado AC no ponto N. Queremos, inicialmente, provar que N é ponto médio de AC, ou seja, $NA = NC$. Por C tracemos a paralela a AB, cortando a reta MN no ponto D.

O quadrilátero BCDM é um paralelogramo (lados opostos paralelos, por construção). Logo, $BM = CD$ e $MD = BC$. Como $BM = CD$ e $BM = AM$ (M é o ponto

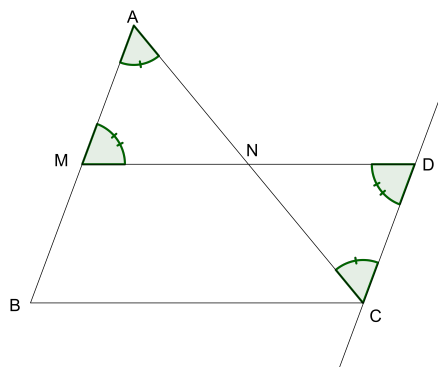


Figura 2.9:

médio de AB), $AM = CD$. Os triângulos AMN e CDN são congruentes (ALA) pois $AM = CD$, $\angle AMN = \angle CDN$ (alternos internos) e $\angle MAN = \angle DCN$ (alternos internos). Logo $NA = NC$.

Provemos agora o recíproco, ou seja, a reta que passa pelos pontos médios M e N de AB e AC é paralela a BC . As hipóteses agora são $AM = BM$ e $NA = NC$. Queremos provar que $MN \parallel BC$. Por C tracemos a paralela a AB , cortando MN no ponto D . Novamente os triângulos AMN e CND são congruentes (ALA), pois $\angle MAN = \angle DCN$ (alternos internos), $NA = NC$ e $\angle ANM = \angle CND$ (opostos pelo vértice). Logo, $CD = AM$. Mas $AM = BM$ (por hipótese). Logo $BM = CD$. Pelo Teorema 2.8, o quadrilátero $BCDM$ é um paralelogramo, porque tem dois lados congruentes (BM e CD). Logo $MD \parallel BC$, ou seja, $MN \parallel BC$. Ainda da congruência dos triângulos AMN e CND tem-se $MN = CD$ e, como $MN + ND = MD$, tem-se $MD = 2MN$. Mas $MD = BC$. Logo, $BC = 2MN$, ou seja, o segmento que une os pontos médios dos lados de um triângulo é congruente com a metade do terceiro lado paralelo a ele.

□

Teorema 2.10 *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de mesma base e altura congruente com a metade da altura do triângulo.*

Equivalente, neste contexto, significa que as figuras possuem a mesma área.

Demonstração: Seja o triângulo ABC qualquer (veja figura 2.10). Tomemos como base um dos lados, por exemplo, o lado BC e sobre um dos outros, por exemplo, lado AB , considere o ponto médio M . Por M tracemos a paralela a BC , que cortará o lado

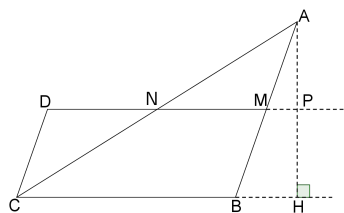


Figura 2.10:

AC no seu ponto médio N, (Teorema 2.9). Seja D o ponto de intersecção entre a reta que passa nos pontos M e N e a reta paralela a AB porque passa no ponto C. Os triângulos AMN e CDN são congruentes. Assim, o triângulo ABC foi decomposto no quadrilátero BCNM e no triângulo AMN, o paralelogramo BCDM foi decomposto no quadrilátero BCNM e no triângulo CDN que é congruente com o triângulo AMN. Logo, o triângulo ABC é equivalente ao paralelogramo BCDM. Resta provar que a altura do paralelogramo BCDM é a metade da altura do triângulo ABC. Pelo ponto A tracemos a perpendicular AH ao lado BC, cortando a reta MD no ponto P. Note que AH é altura do triângulo ABC e PH é a altura do paralelogramo BCDM, no triângulo ABH a reta MP é paralela a reta BH e M é ponto médio do lado AB. Logo, pelo Teorema 2.9, P é o ponto médio de AH. Assim, a altura do paralelogramo BCDM é a metade da altura do triângulo ABC(veja [5]).

□

De posse destes três teoremas, agora podemos demonstrar o teorema de Pitágoras. Essa demonstração foi feita por Euclides.

Teorema 2.11 *Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é equivalente ao quadrado construído sobre a hipotenusa.*

Demonstração: Sejam, então um triângulo ABC e os quadrados BCED, ABFG e ACKH, construídos sobre a hipotenusa e seus catetos (veja figura 2.11). **Queremos provar que, somados, os quadrados ABFG e ACKH, sobre os catetos, são equivalentes ao quadrado BCED, sobre a hipotenusa.**

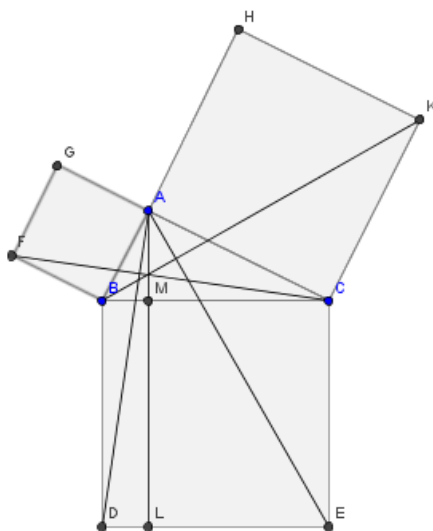


Figura 2.11:

Seja AL perpendicular a hipotenusa (portanto paralela a BD e CE), cortando-a no ponto M . Unindo F a C e A a D , ficam formados os triângulos BCF e ABD . Eles são congruentes (LAL) porque $BF = AB$ (lados de um quadrado), $BC = BD$ (lados de outro quadrado) e $\angle FBC = \angle ABD$, pois ambos são a soma de um reto com o $\angle ABC$. A altura do triângulo BCF em relação à base BF é o lado FG do quadrado $ABFG$. Pelo Teorema 2.10, **o triângulo BCF é equivalente** à metade do paralelogramo de base BF e altura AB , ou seja, **à metade do quadrado $ABFG$** . A altura do triângulo ABD , em relação à base BD , é o segmento BM . Logo, pelo Teorema 2.10, **o triângulo ABD é equivalente** à metade do paralelogramo de base BD e altura BM , ou seja, **à metade do paralelogramo $BDLM$** . Então, como os triângulos BCF e ABD são congruentes, **a metade do quadrado $ABFG$ é equivalente à metade do paalelogramo $BDLM$** . Ou seja, **o quadrado $ABFG$ é equivalente ao paralelogramo** (que também é um retângulo) **$BDLM$** .

Una-se, agora, o vértice B ao vértice K e o vértice A ao vértice E . Ficam formados os triângulos BCK e ACE . Com raciocínio análogo ao empregado com os triângulos BCF e ABD , prova-se que os triângulos BCK e ACE são congruentes e que o quadrado $ACKH$ é equivalente ao retângulo $CELM$.

Significa que os quadrados $ABFG$ e $ACKH$, somados, são equivalentes aos retângulos $BDLM$ e $CELM$ somados. Logo, a soma dos quadrados construídos sobre

os catetos é equivalente ao quadrado construído sobre a hipotenusa([4], [5]).

□

Essa demonstração é necessária pois ela serve de embasamento para as próximas demonstrações, construções e aplicações necessárias para a construção do pentágono regular.

Teorema 2.12 *Seja o segmento de reta $\overline{AB}$ dividido pelo ponto médio C e prolongada até o ponto D , então $\overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$.*

Esse teorema foi escrito da seguinte forma no livro de Euclides - *Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e for prolongada, o retângulo compreendido pela reta toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta, juntamente com o quadrado sobre a metade da primeira reta é igual ao quadrado sobre a reta formada por metade da reta mais a adjunta.*

Demonstração: Sejam C o ponto médio de AB e D , sobre o prolongamento de AB (veja figura 2.12)

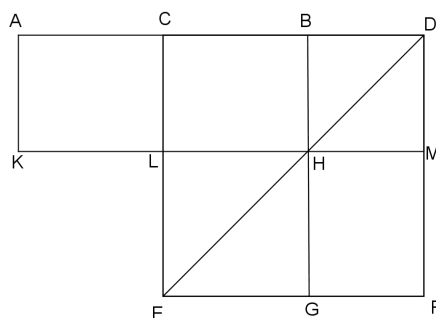


Figura 2.12:

Com o lado CD construa o quadrado $CEFD$. Una D a E . Por B trace GHB paralela a CE ou a DF . Pelo ponto H , trace KLM paralela a AD ou a EF e por A trace AK paralela a CL ou a DM . Então, como AC é igual a CB , o retângulo $AKLC$ é igual ao retângulo $CLHB$. Mas $CLHB$ é igual a $HGFM$, e portanto também $AKCL$ é igual a $HGFM$. A cada um desses retângulos adicione $CLMD$. Assim, $AKMD$ será igual a $CLHGFD$. Mas $AKMD$ é o retângulo formado por AD e DB , pois DM é igual a DB .

Então, o retângulo de lados AD e DB é igual a $CLHGFD$. A cada um, adicione $LEGH$, que é igual ao quadrado sobre CB . Portanto o retângulo de lados AD e

DB, juntamente com o quadrado sobre CB, é igual a CLHGFD e a LEGH. Mas CLHGFD, juntamente com LEGH, formam CEFD, que é o quadrado sobre CD. Portanto, o retângulo de lados AD e DB, juntamente com o quadrado sobre CB, é igual ao quadrado sobre CD ([8]).

□

Bem, para uma melhor compreensão, mostraremos essa demonstração algebricamente.

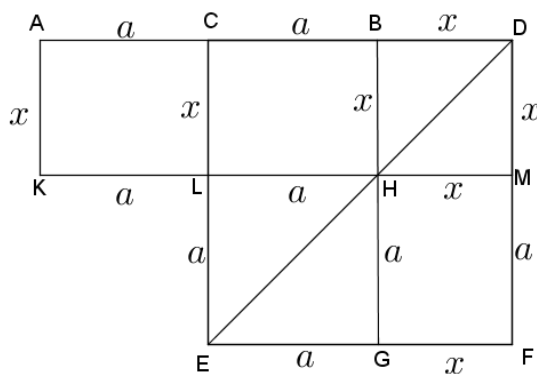


Figura 2.13:

Pela figura 2.13, temos $AC = CB$ medida de $AC = CB = a$ e o prolongamento de AB , $BD = x$. Então $AD = (2a + x)$, $BC = a$ e $CD = (a + x)$.

$$\overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(2a + x) \cdot x + a^2 = \overline{CD}^2$$

$$2ax + x^2 + a^2 = \overline{CD}^2$$

$$a^2 + 2ax + x^2 = \overline{CD}^2$$

$$(a + x)^2 = \overline{CD}^2$$

$$CD = (a + x)$$

□

Utilizaremos a seguinte construção que será necessária para o desenvolvimento da construção do pentágono regular; que é dividir uma reta dada de maneira que o retângulo formado pelo todo e por uma das partes seja igual ao quadrado sobre a outra parte. Essa construção dará origem ao segmento áureo([8]).

Queremos determinar um ponto H sobre AB tal que o retângulo de lados AB e HB seja igual ao quadrado sobre AH (veja figura 2.14).

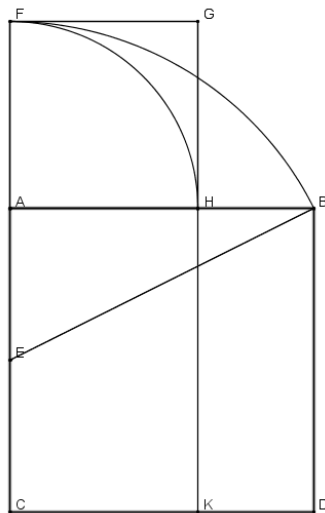


Figura 2.14:

Construa o quadrado ABCD e seja E o ponto médio de AC. Com centro em E e raio EB, descreva o arco de círculo que corta o prolongamento de CA em F. Com centro em E e raio EB, descreva o arco de círculo que corta o prolongamento de CA em F. Com centro de A e raio AF, descreva o arco de circunferência que corta AB em H. Afirmamos que o ponto H é solução do problema. Queremos provar que $AH^2 = HB \cdot AB$.

Aplicando o teorema 2.12 à reta AC, dividida ao meio por C, prolongada com AF temos que

$$FC \cdot FG + AE^2 = EF^2$$

mas

$$EF = EB$$

então

$$FC \cdot FG + AE^2 = EB^2 \Rightarrow FC \cdot FG = EB^2 - AE^2(1)$$

pelo teorema 2.11

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

logo,

$$EB^2 - AE^2 = AB^2(2)$$

De (1) e (2) temos que $FC \cdot FG = AB^2$, subtraindo de cada lado da igualdade $AC \cdot AH$,

$$FC \cdot FG - AC \cdot AH = AB^2 - AC \cdot AH$$

$$FG^2 = HB \cdot BD$$

mas

$$FG = AH$$

e

$$BD = AB$$

logo,

$$AH^2 = HB \cdot AB$$

□

Com isso temos que o quadrado de lado AH é igual ao retângulo de lados HB e AB .

Teorema 2.13 *Seja P um ponto exterior a um círculo C , seja r uma reta tangente a C no ponto $T \in C$, passando por P e seja s uma reta arbitrária que passa por P e corta C nos pontos R e S . Então $\overline{PR} \cdot \overline{PS} = \overline{PT}^2$.*

Existem dois casos para demonstrar, **um em que a reta passa pelo centro do círculo e outra em que ela não passa pelo centro.**

Demonstração: (A reta que passa por P , passa pelo centro do círculo (veja figura 2.15)).

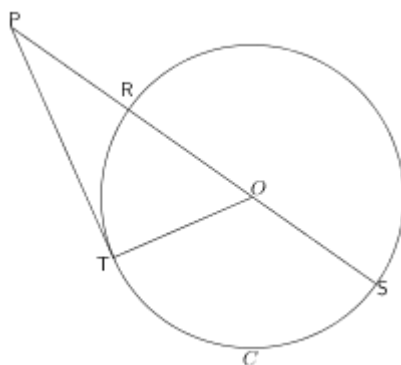


Figura 2.15:

Aplicando o Teorema 2.12 à reta RS , divida ao meio por O e prolongada com PR . Temos então que o retângulo de lados PR e PS , juntamente com o quadrado sobre RO , é igual ao quadrado sobre PO . Como RO e TO são raios do mesmo círculo, retirando do retângulo de lados PR e PS , juntamente com o quadrado sobre RO e do quadrado sobre PO o quadrado sobre RO e sobre TO , temos que o quadrado sobre RO é igual ao quadrado sobre TO . Segue-se então que o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado sobre PO menos o quadrado sobre TO . O Teorema 2.12 mostra que o quadrado sobre PO menos o quadrado sobre TO é igual ao quadrado sobre PT . Assim, o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado sobre PT , desta forma provamos o caso em que a reta passa pelo centro do círculo.

Provaremos agora o caso onde, a reta que passa por P , não passa pelo centro do círculo (veja figura 2.16).

Seja M o pé da perpendicular baixada de O sobre PS . Aplicando o Teorema 2.12 a RS prolongada por PR , temos que o retângulo de lados PR e PS , juntamente com o quadrado sobre RM , é igual ao quadrado sobre PM . Adicionando o quadrado sobre OM ao retângulo de lados PR e PS , juntamente com o quadrado sobre RM e ao quadrado sobre PM , temos que o retângulo de lados PR e PS , juntamente com os quadrados sobre RM e OM , é igual aos quadrados sobre PM e OM . Mas, pelo Teorema 2.12, o quadrado sobre RM , juntamente com o quadrado sobre OM , é igual ao quadrado sobre RO e o quadrado sobre PM , juntamente com o quadrado OM , é igual ao quadrado sobre PO . Mas estamos na situação do primeiro caso. Como o quadrado sobre RO é igual ao quadrado sobre TO , temos que o retângulo de lados

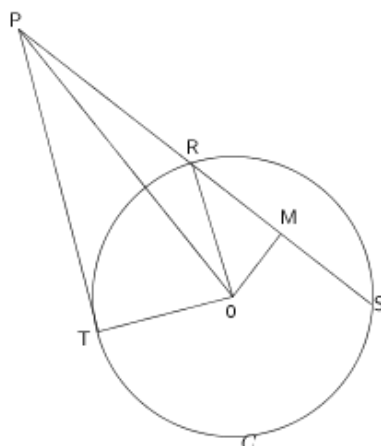


Figura 2.16:

PR e PS é igual ao quadrado de lado PO menos o quadrado de lado TO, ou seja, o quadrado de lado PT ([8]).

□

Teorema 2.14 *Seja um ponto A fora do círculo, forem traçadas duas retas passando pelo ponto A, uma delas interceptando o círculo em B e F, e a outra interceptando o círculo em D, então se $\overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AD}^2$, então $\overline{AD}$ é tangente no ponto D.*

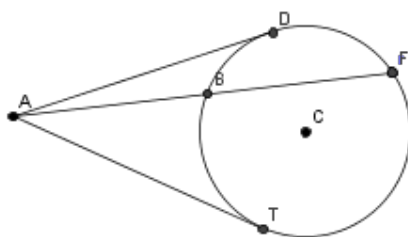


Figura 2.17:

Demonstração: por A traçamos $\overline{AT}$ (veja figura 2.17) tangente ao círculo no ponto T. Então, pelo Teorema 2.13, sabemos que o retângulo de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AT}$ é igual ao quadrado sobre $\overline{AD}$. Se dois quadrados são iguais, seus lados serão iguais, ou seja, $\overline{AT} = \overline{AD}$. Mas com T e D são simétricos em relação à reta que passa por A e T, D será ponto de tangência, ou seja, $\overline{AD}$ é tangente ao círculo([8]).

□

Teorema 2.15 *Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em um círculo são iguais, conjuntamente, a dois retos.*

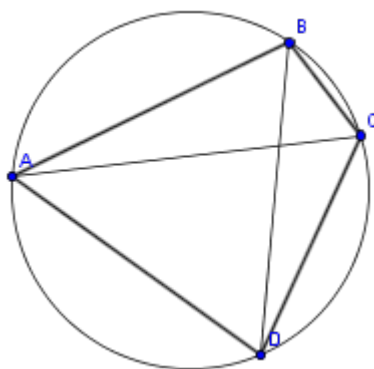


Figura 2.18:

Demonstração: Seja o círculo (veja figura 2.18) e nele esteja o quadrilátero, ABCD queremos demonstrar que os ângulos opostos são iguais a dois retos. Trace os segmentos AC, BD. Como se sabe, os três ângulos de todo triângulo são iguais a dois retos, portanto, os três ângulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$ do triângulo ABC são iguais a dois retos. Mas, por um lado, o $\angle CAB$ é igual ao $\angle BDC$, pois estão no mesmo arco BADC, e por outro lado, o $\angle ACB$ é igual ao $\angle ADB$, pois estão no mesmo arco ADCB, portanto, o $\angle ADC$ é igual a soma dos $\angle BAC$ e $\angle ACB$. Adicione o $\angle ABC$ ao ângulo $\angle ADC$ e aos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ACB$, temos então que $\angle ADC$ e $\angle ABC$ são iguais a $\angle ABC$, $\angle BAC$ e $\angle ACB$, que são iguais a dois retos. Logo, $\angle ADC$ e $\angle ABC$ são iguais a dois retos. Do mesmo modo, prova-se que $\angle BAD$ e $\angle DCB$ são iguais a dois retos. Portanto, um quadrilátero inscrito no círculo, os ângulos opostos são iguais a dois retos([5]).

□

Teorema 2.16 *Em um círculo, o ângulo subtendido por um diâmetro é reto; o contido em um segmento de círculo menor do que um semi-círculo será maior do que um reto; e o contido em um segmento de círculo maior que um semi-círculo será menor que um reto.*

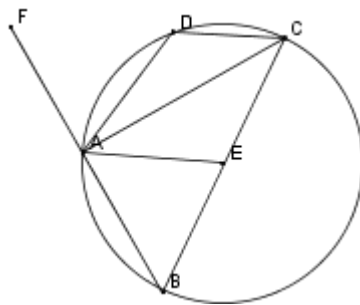


Figura 2.19:

Demonstração: Seja o círculo ABCD (veja figura 2.19) e sejam o BC um diâmetro dele e E o centro, e fiquem formados os segmentos BA, AC, AD, DC. Digo que $\angle BAC$ no semicírculo BAC é reto, o $\angle ABC$ que está no arco ABC é maior que o semicírculo BAC é menor que um reto, enquanto $\angle ADC$ no arco ADC é menor que o semicírculo BAC é maior que um reto. Ligue AE e trace BA até F.

$$\overline{BE} = \overline{EA} \Rightarrow \angle ABE = \angle BAE$$

do $\triangle AEB$ e

$$\overline{CE} = \overline{EA} \Rightarrow \angle ACE = \angle CAE$$

do $\triangle CEA$, portanto

$$\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB$$

mas

$$\angle FAC = \angle ABC + \angle ACB$$

ângulo externo do $\triangle ABC$. Portanto $\angle FAC = \angle BAC$, cada um é um ângulo reto. E como os ângulos $\angle ACB, \angle BAC$ do $\triangle ABC$ são menores que dois retos, e o $\angle BAC$

é reto, logo $\angle ABC$ é menor que um reto e está no arco ABC, que é maior que o semicírculo.

Como ABCD é quadrilátero inscrito em um círculo, logo pelo Teorema 2.15, os $\angle ABC$ e $\angle ADC =$ dois retos e $\angle ABC$ é menor que um reto, portanto $\angle ADC$ é maior que um reto e está no arco ADC que é menor do que o semicírculo. Observando a figura 2.19 o $\angle ADC$ subtendido pelo arco ABC é maior que um ângulo reto, por outro lado, o $\angle ABC$ subtendido pelo arco ADC é menor que um reto. O ângulo formado pelos segmentos BA e AC é reto. Portanto, o ângulo subtendido pelo arco ABC é maior que um reto. De novo, como pelos segmentos AC e AF é reto, o ângulo subtendido pelo arco ADC é menor que um reto.

Logo, em um círculo, o ângulo no semicírculo é reto, o ângulo que se encontra no arco menor é maior que um reto, e o ângulo que se encontra no arco maior é maior que um reto, por outro lado, o ângulo do arco maior é maior que um reto, e o ângulo do arco menor é menor que um reto([4]).

□

Teorema 2.17 *O ângulo entre uma tangente e uma corda de um círculo é igual ao ângulo subtendido pela corda, do lado oposto a tangente.*

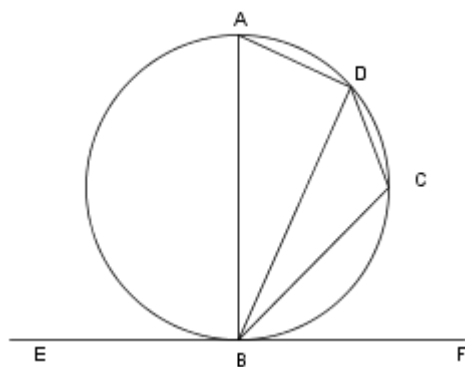


Figura 2.20:

Demonstração: Com efeito, sejam EF a reta tangente BD a corda. Trace o diâmetro AB do círculo, por B (veja figura 2.20); escolha C qualquer pertencente a circunferência, trace os segmentos AD, DC e BC; o $\angle ADB$, que se encontra sobre uma semicircunferência é reto, disso decorre que os $\angle BAD$ e $\angle ABD$, juntos, são

iguais a um reto, pois são ângulos internos no triângulo BAD. Como ABF é um ângulo reto, ele será igual a $\angle BAD$ e $\angle ABD$, juntos; subtraia de ambos o $\angle ABD$; segue-se que o $\angle DBF = \angle BAD$ ([8]).

□

Bem, para a construção do pentágono regular, segundo Euclides, devemos construir um triângulo isósceles em que cada ângulo da base é o dobro do ângulo no vértice.

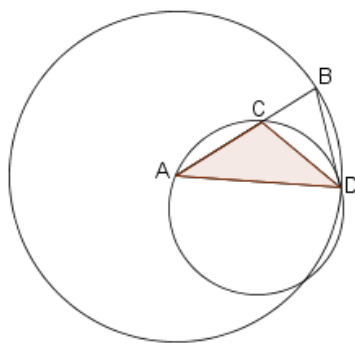


Figura 2.21:

Sejam dados o segmento de reta AB (veja figura 2.21). Determine o ponto C tal que o retângulo de lados AB, BC seja igual ao quadrado sobre CA. (Utilize a construção do segmento áureo para essa parte a seguir). Trace o círculo com centro A e raio AB; a partir de B, trace BD (com D sobre o círculo) igual a AC; trace AD e DC e construa o círculo ACD circunscrito ao triângulo ACD; como o retângulo de lados AB e BC é igual ao quadrado sobre AC e AC é igual a BD, o retângulo de lados AB e BC é igual ao quadrado sobre BD; como o ponto B é exterior ao círculo ACD, BA corta o círculo em C e A, e o retângulo de lados AB, BC é igual ao quadrado sobre BD, temos pelo Teorema 2.14, BD é tangente ao círculo ACD no ponto D. Então, teorema 2.17

$$\widehat{BDC} = \widehat{DAC}$$

$$\widehat{BDC} + \widehat{CDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA}$$

Observe $\triangle ACD$ e o ângulo externo $\widehat{BCD}$

$$\widehat{BCD} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BDA} (1)$$

Ora $\widehat{BDA} = \widehat{DBA}$, temos que

$$\widehat{BCD} = \widehat{BDA} = \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{DBC} \Rightarrow DB = DC$$

Como

$$DB = CA$$

(por construção), segue-se que

$$AC = CD$$

portanto,

$$\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$$

de (1)

$$\widehat{BCD} = 2 \times \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{BDA} = 2 \times \widehat{DAC}.$$

Desta forma, o triângulo isósceles foi construído com cada um dos ângulos da base BD é igual ao dobro do terceiro ([8]).

Vamos, agora inscrever, em um círculo com triângulo com ângulos iguais, respectivamente, aos ângulos de um triângulo dado.

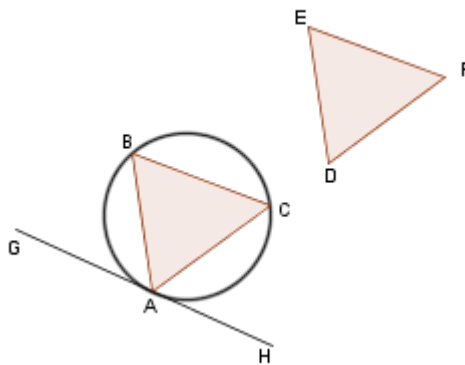


Figura 2.22:

Sejam dados o círculo e o triângulo DEF. Seja GH a tangente ao círculo, passando pelo ponto A (veja figura 2.22). Construa o ângulo HAC igual ao ângulo DEF e o ângulo GAB igual ao ângulo DFE. Trace BC, então, pelo Teorema 2.17, o ângulo HAC é igual ao ângulo ABC, portanto o ângulo ABC é igual ao ângulo DEF.

Analogamente, mostra-se que o ângulo ACB é igual ao ângulo DFE . Portanto, o ângulo BAC será igual ao ângulo EDF . Assim, foi inscrito um triângulo no círculo, com ângulos respectivamente iguais aos ângulos de um triângulo dado.

E agora, a última construção que é inscrever em um círculo um pentágono regular.

Construa o triângulo EGH no qual cada ângulo da base é o dobro do ângulo do vértice (construção anterior). Inscreva, no círculo, o triângulo ACD com o ângulo CAD igual ao ângulo E , e os ângulos em G e H iguais, respectivamente, aos ângulos ACD e CDA . Assim, cada um dos ângulos ACD e CDA é o dobro do ângulo CAD (veja figura 2.23).

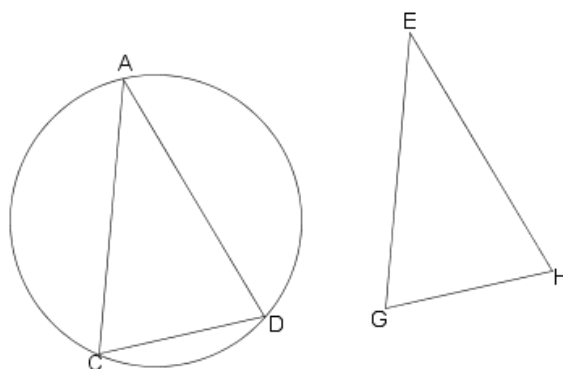


Figura 2.23:

Trace as bissetrizes dos ângulos ACD e CDA , respectivamente por CE , DB (veja figura 2.24).

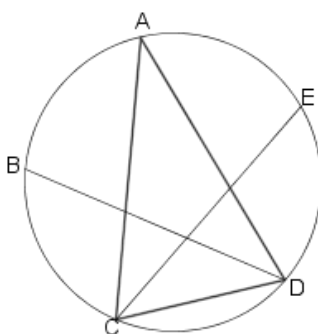


Figura 2.24:

Trace as retas AB, BC, DE, EA e BE (veja figura 2.25)

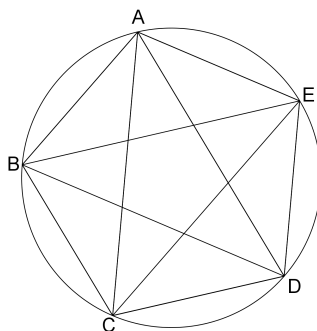


Figura 2.25:

Então, como cada um dos ângulos ACD, CDA é o dobro do ângulo CAD, e foram divididos ao meio pelas retas CE e DB, os cinco ângulos DAC, ACE, ECD, CDB, BDA são iguais entre si. Mas ângulos iguais subtendem arcos iguais, assim os arcos AB, BC, CD, DE, EA são iguais entre si. Assim o pentágono ABCDE é equilátero. Além disso, ele tem seus ângulos internos iguais entre si.

Com efeito, (veja figura 2.25) como o arco AB é igual ao arco DE, adicione o arco BCD a cada um deles; portanto, o arco ABCD é igual ao arco EDCB. Assim, o ângulo BAE é igual ao ângulo AED. Pela mesma razão, cada um dos ângulos ABC, BCD, CDE é também igual a cada um dos ângulos BAE, AED. Assim, o pentágono ABCDE tem todos seus ângulos internos iguais entre si. Como já mostramos que ele tem seu lados iguais entre si, foi demonstrado que ele é regular. Desta forma inscrevemos um pentágono regular em um círculo dado (veja [4] e [8]).

□

2.4 Outras Construções

Bem, existem outras construções do pentágono regular, uma muito boa é construí-lo a partir da construção do decágono regular que é feita na proposição VI-10 do livro Elementos. Observemos que, nessa construção e nas demais, utiliza-se o segmento áureo já construído anteriormente.

Em uma circunferência, inscrever um decágono regular. A uma circunferência qualquer de centro O e raio R. Trace um diâmetro qualquer AOB (veja figura 2.26).

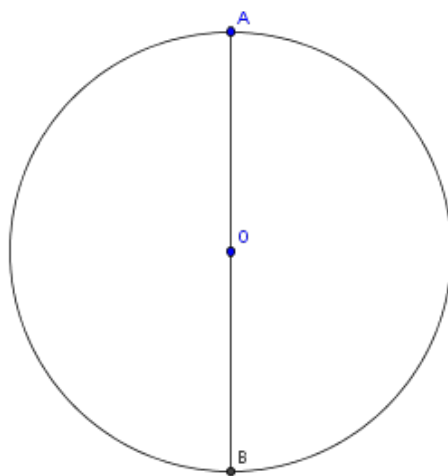


Figura 2.26:

Por O trace o raio OE perpendicular a AOB. Seja F o ponto médio de OE (veja figura 2.27).

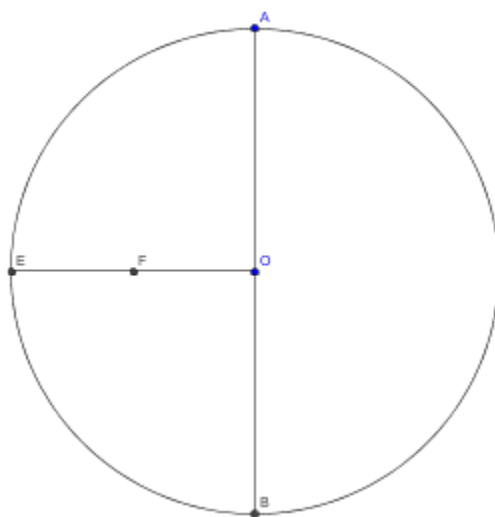


Figura 2.27:

Una-se F a B e trace a circunferência de centro F e raio FO. Ela cruza em FB no

ponto G; e GB é o segmento áureo do raio OB (veja figura 2.28).

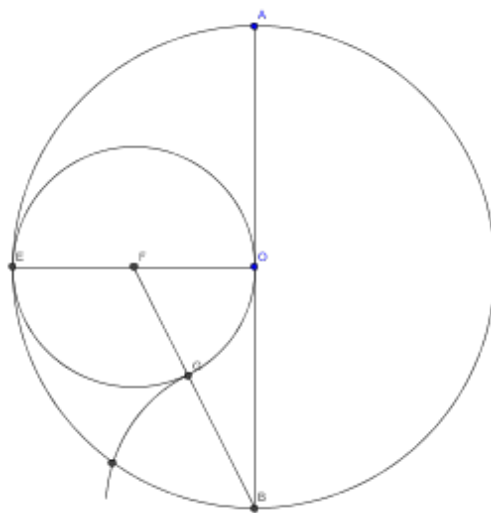


Figura 2.28:

Logo, ele é o lado do decágono regular inscrito na circunferência dada. Tomando-se B como um dos seus vértices, os outros nove são sucessivamente encontrados com o compasso, onde A é um deles (veja figura 2.29).

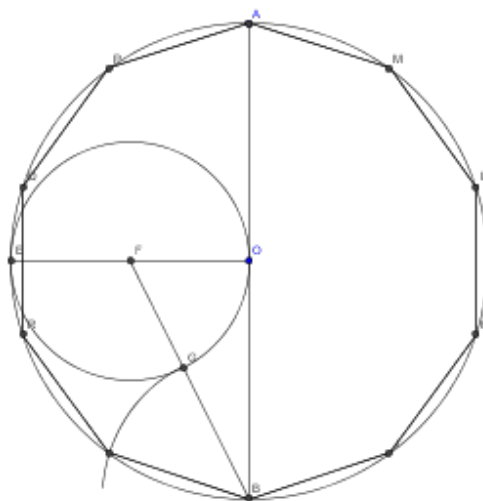


Figura 2.29:

Interligando alternadamente os vértices do decágono regular (veja figura 2.30)

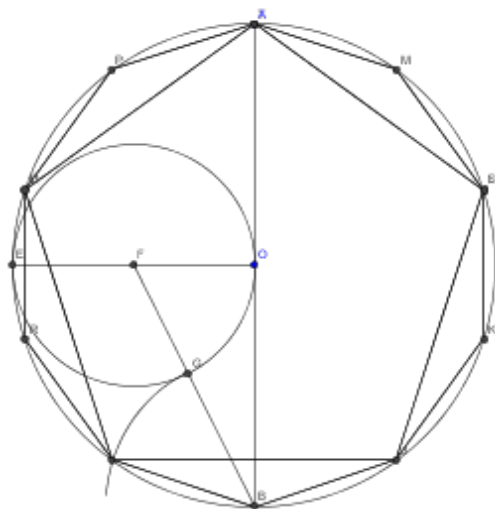


Figura 2.30:

encontramos o pentágono regular (veja [4] e [5]).

Vamos agora mostrar duas construções do pentágono regular utilizando também o segmento áureo, logo após, demonstraremos que o lado do pentágono regular é o segmento áureo de sua diagonal.

Primeiro tracemos uma circunferência qualquer de centro A (veja figura 2.31).

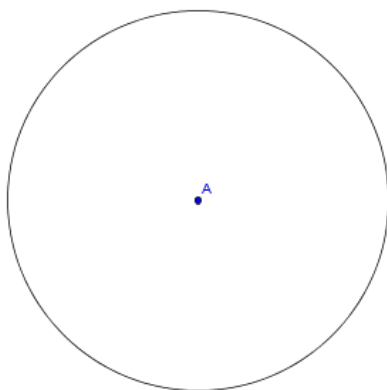


Figura 2.31:

Logo após, trace dois diâmetros perpendiculares e na intersecção dos dois diâmetros com a circunferência determine os quatro pontos B E F D, seja G o ponto

médio do segmento $\overline{AE}$ (veja figura 2.32).

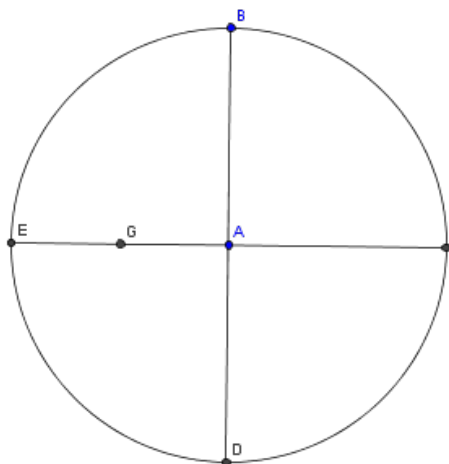


Figura 2.32:

Trace outra circunferência com centro em G e raio GB, com a intersecção desta circunferência com o raio AF determinamos o ponto H (veja figura 2.33).

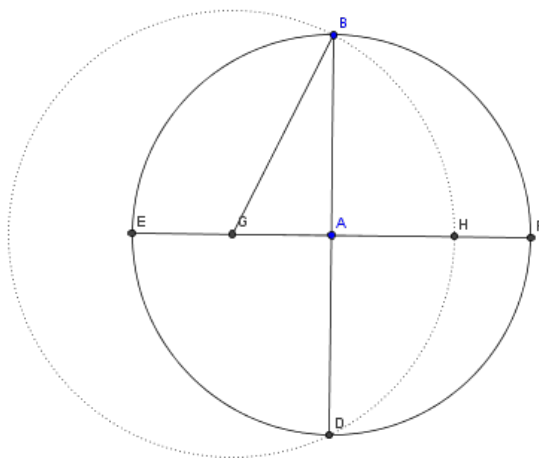


Figura 2.33:

Trace o segmento BH, ele será a medida do lado do pentágono regular que é um segmento áureo, o segmento AH é um segmento áureo que já foi construído anteriormente neste trabalho. Com essa medida BH, trace um arco que intersecta com a linha da circunferência inicial, determinamos o ponto J, com isso encontramos

A complex geometric diagram of a sphere with various points and lines. The sphere is represented by a circle with a horizontal line passing through its center, labeled A. Points B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z are marked on the sphere's surface. Lines connect many of these points, forming a network of triangles and other shapes. Several dashed circles are also shown, centered at different points on the sphere.

Desta maneira, terminamos mais uma construção.

Com uma circunferência qualquer traçamos dois diâmetros perpendiculares e determinemos o raio AB e AD e queremos encontrar um ponto H tal que AH seja o segmento áureo de AB. Com isso, vamos traçar um ponto médio G do raio AD e assim traçamos um segmento de BG, com a medida desse segmento tracemos um arco com essa medida determinemos um ponto I do raio AC. Desta maneira, encontramos um segmento de medida AI; e com ele tracemos um arco com medida desse segmento e determinamos o ponto H. AH é segmento áureo de AB. Com isso traçamos o segmento BH que também é segmento áureo e lado do pentágono regular (veja 2.35).

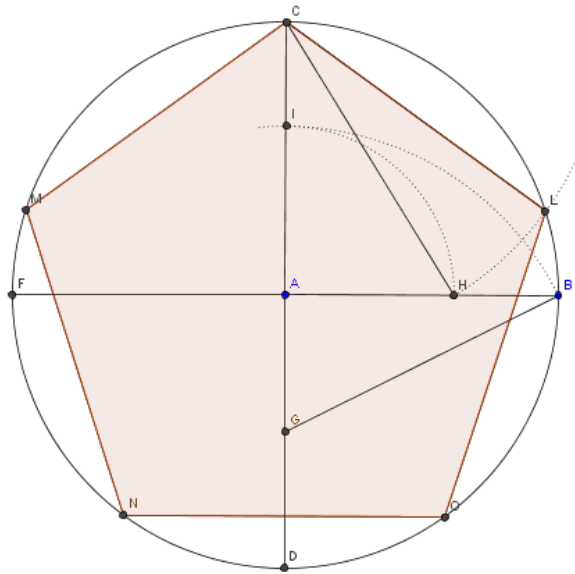


Figura 2.35:

Compare essa construção com a construção abaixo do segmento áureo já feito anteriormente (veja 2.36).

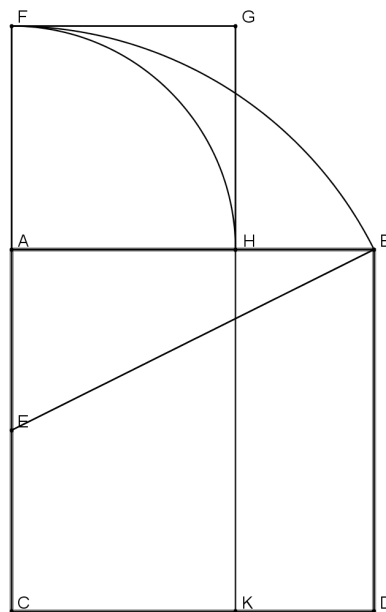


Figura 2.36:

Continuando as outras construções, faremos uma utilizando várias circunferências e verificaremos qual a ideia da mesma, e que esta construção está correta. Comece com um segmento de reta AB que será o lado do pentágono (veja 2.37):



Figura 2.37:

Com centro em A , faça uma circunferência de raio AB (veja 2.38):

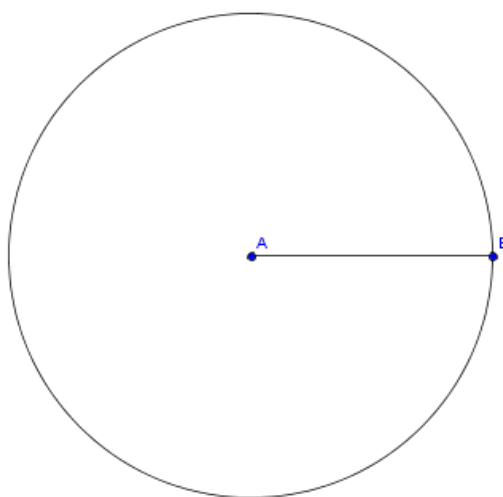


Figura 2.38:

Com centro em B , faça uma circunferência de raio BA . Marque os pontos de intersecção entre as duas circunferências como C e D (veja 2.39):

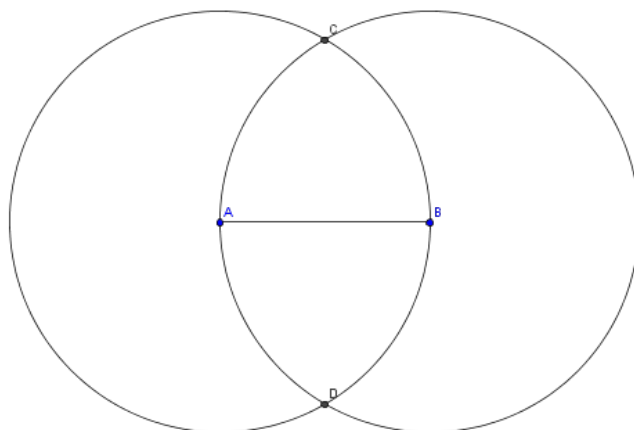


Figura 2.39:

Com centro em D, faça uma terceira circunferência de raio DA. Note que o raio $DA = DB = AB$. Marque os pontos de intersecção com as outras duas circunferências como E e H (veja 2.40):

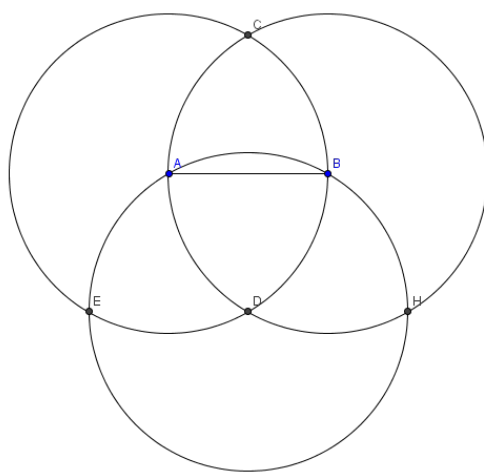


Figura 2.40:

Pelos pontos C e D trace uma reta, marcando o ponto I na intersecção com a terceira circunferência. Essa reta será a mediatriz do lado AB do pentágono (veja 2.41):

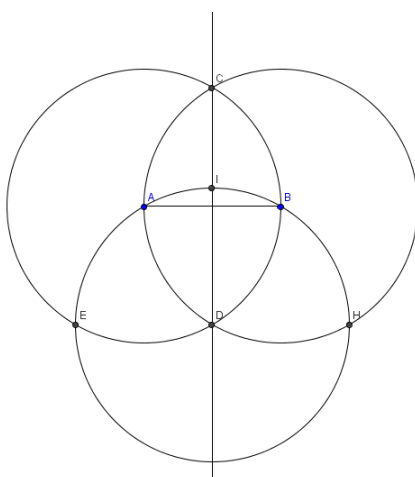


Figura 2.41:

Trace uma reta passando pelos pontos E e I, definindo o ponto L na intersecção com a segunda circunferência (veja 2.42):

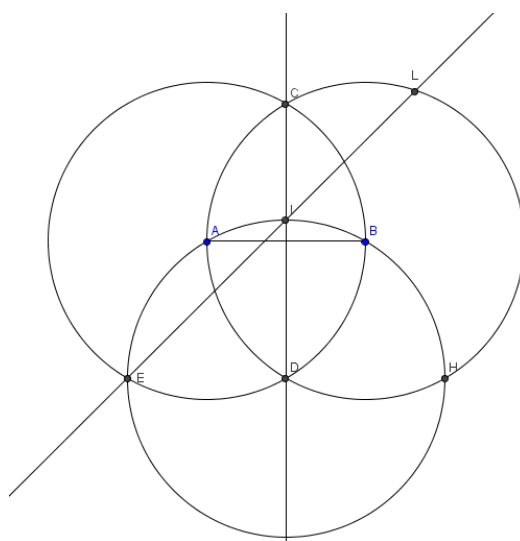


Figura 2.42:

Agora, trace uma reta passando pelos pontos H e I, definindo o ponto N na intersecção com a primeira circunferência (veja 2.43):

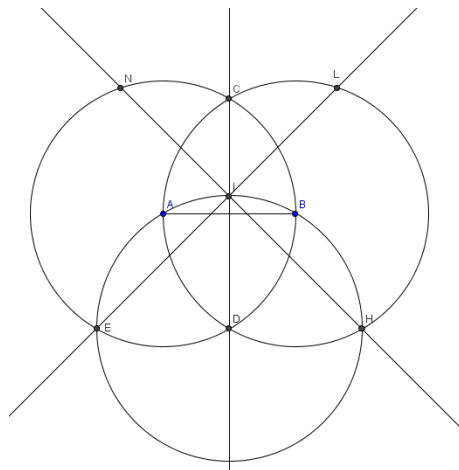


Figura 2.43:

Com centro em N faça uma nova circunferência de raio $AB = NA$. Agora, faça outra circunferência com centro em L e raio $AB = LB$. O ponto de intersecção dessas duas circunferências com a mediatriz define o ponto O (veja 2.44):

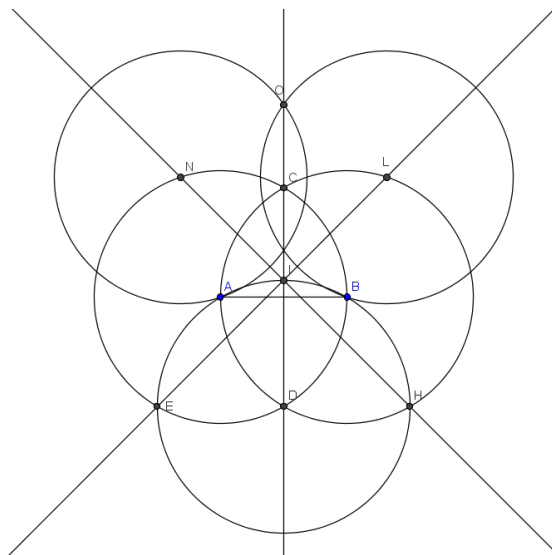


Figura 2.44:

Os pontos A, N, O, L e B, são os vértices do pentágono. Unindo estes pontos, formamos o pentágono regular (veja 2.45):

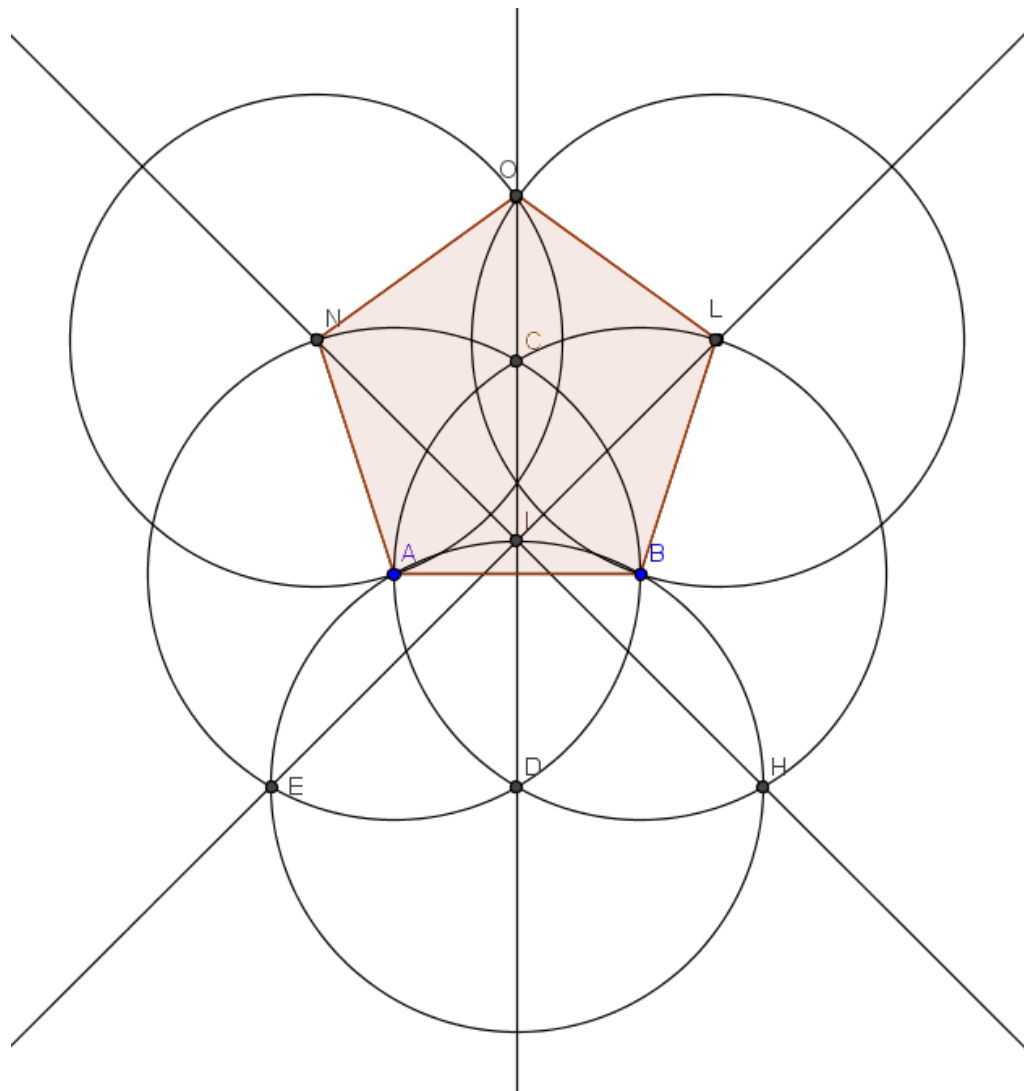


Figura 2.45:

Bom, vemos que essas construções são possíveis por causa do seguinte teorema que se encontra no livro Os Elementos é o Livro XIII proposição oito (veja em [4] e [5]).

Teorema 2.18 *O segmento áureo da diagonal do pentágono regular é congruente com o lado daquele polígono.*

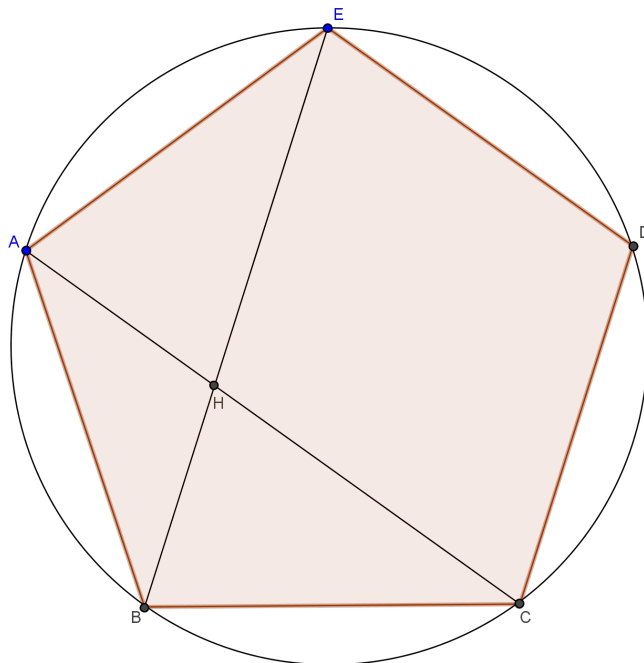


Figura 2.46:

), um pentágono regular $ABCDE$ e as diagonais consecutivas AC e BE . Seja H o ponto que elas se cruzam. Provaremos que AB (lado do pentágono) é o segmento áureo da diagonal AC . No quadrilátero inscritível $ACDE$ os ângulos $\angle EAC$ e $\angle EDC$ são suplementares. Como $\angle EAC = \angle DCA$ subtendem arcos congruentes, então $\angle EDC$ e $\angle DCA$ são suplementares. Logo ED e AC são paralelas. Da mesma forma BE e CD são paralelas. Logo o quadrilátero $CDEH$ é um paralelogramo e $DE = CH$, $DC = EH$ e $\angle EDC = \angle EHC$ - o ângulo do pentágono regular; mas $CD = DE$. Logo, os quatro lados do paralelogramo $CDEH$ são congruentes com os lados do pentágono. Os triângulos $\triangle ABH$ e $\triangle ABC$ são semelhantes porque o $\angle AHB = \angle ABC = \angle AHD = \angle EDC$, $\angle CAB = \angle HAB$. Logo, os lados homólogos desses triângulos são proporcionais e

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH}$$

mas

$$AH = AC - HC$$

e

$$HC = AB$$

Logo

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC - AB}$$

ou seja, AB é segmento áureo de AC .

□

Os pitagóricos tinham uma predileção pelo pentágono regular, a ponto de usá-lo como símbolo de sua sociedade. Tal polígono foi extremamente estudado e, devido a isso alguns historiadores conjecturam que a descoberta da incomensurabilidade feita por Hipasus possa ter envolvido o lado e a diagonal do pentágono e não a diagonal do quadrado (veja [5]).

Com o teorema anteriormente demonstrado, verificasse imediatamente a construção do ângulo do pentágono, toma-se um segmento de reta AC qualquer e encontra-se o seu segmento áureo HC e constrói-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência, pois $AB = BC = HC$. Isso significa que, dada uma circunferência qualquer, pode-se inscrever um pentágono regular tomando-se um diâmetro e com vértice em uma das extremidades construir, em semiplanos opostos de tal diâmetro, dois ângulos congruentes com metade do ângulo do pentágono. Com isso, acham-se três vértices do pentágono regular e seu lado, o que permite concluir a sua construção (veja [5]). Para mais informações do segmento áureo consulte o apêndice.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

Nesta parte utilizaremos as informações até agora estudadas para resolver alguns problemas de geometria, utilizando sempre qualquer um dos teoremas e construções estudadas até este momento.

3.2 Elementos Notáveis do Polígono

Vamos definir os elementos notáveis de um polígono regular (veja 3.2).

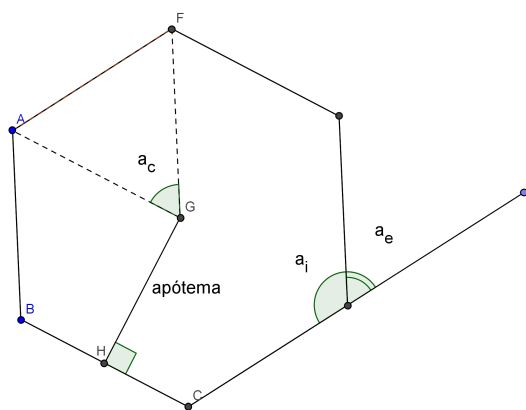


Figura 3.1:

Centro de um polígono regular é o centro comum das circunferências circunscrita e inscrita (ponto G).

Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado; o apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

Ângulo Cêntrico de um polígono regular (vértices no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) são congruentes; então a medida de cada um deles é dada por:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n} \text{ ou } a_c = \frac{4retos}{n}$$

onde n é o número de lados do polígono.

Além disso, podemos calcular o lado e o apótema de qualquer polígono regular; faremos aqui o cálculo do pentágono (veja [6]).

3.3 Cálculo do Lado e Apótema do Polígono

Indicaremos por l_n a medida do lado do polígono regular e a_n a medida do apótema do polígono regular de n lados. No nosso caso l_5 medida do lado do pentágono regular e a_5 medida da apótema do pentágono regular, e l_{10} medida do lado do decágono regular e a_{10} medida do apótema do decágono regular, l_6 medida do lado do hexágono regular e a_6 medida da apótema do hexágono regular.

Problema 1 Calcular o lado e o apótema do decágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Resolução Chamemos o raio da circunferência de R e calcularemos o l_{10} (veja figura 3.2).

Sendo

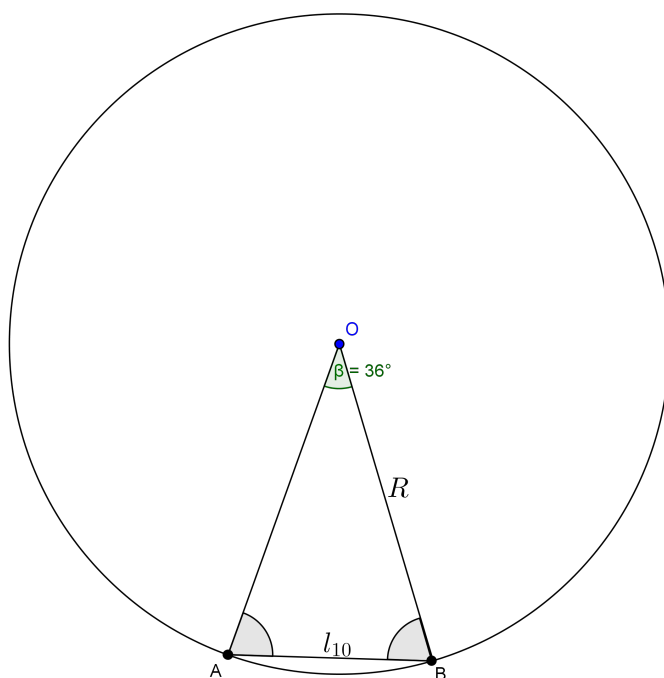


Figura 3.2:

$$\overline{AB} = l_{10},$$

então

$$\angle AOB = \frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 36^\circ \implies \hat{A} = \hat{B} = 72^\circ$$

Conduzindo $\overline{BC}$, bissetriz de $\widehat{B}$, (veja figura 3.3) vem :

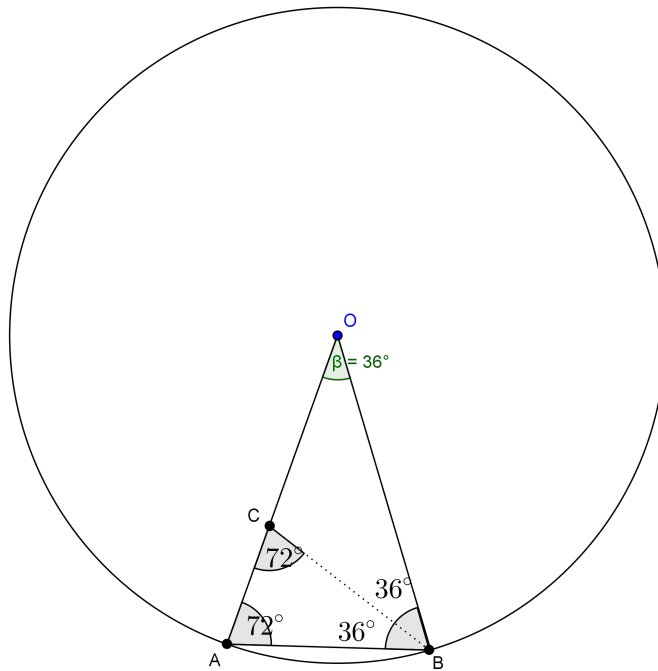


Figura 3.3:

$\triangle BAC$ é isósceles, então

$$(\widehat{A} = \widehat{C} = 72^\circ) \implies \overline{BC} = l_{10}$$

$\triangle COB$ é isósceles, então

$$(\widehat{O} = \widehat{B} = 36^\circ) \implies \overline{OC} = \overline{BC} = l_{10}$$

$$\overline{OC} = l_{10}$$
$$\overline{CA} = R - l_{10}$$
$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}} \Rightarrow$$

$$l_{10}^2 = R(R - l_{10}) \implies l_{10}^2 + Rl_{10} - R^2 = 0 \implies$$

$$l_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R}}{2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}.$$

Desprezando a solução negativa que não faz sentido na medida de um segmento, temos:

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$$

Bom, para o cálculo do ápotema a_{10} que é a altura relativa ao lado $\overline{AB} = l_{10}$ do $\triangle ODB$ como sabemos o valor de l_{10} temos:

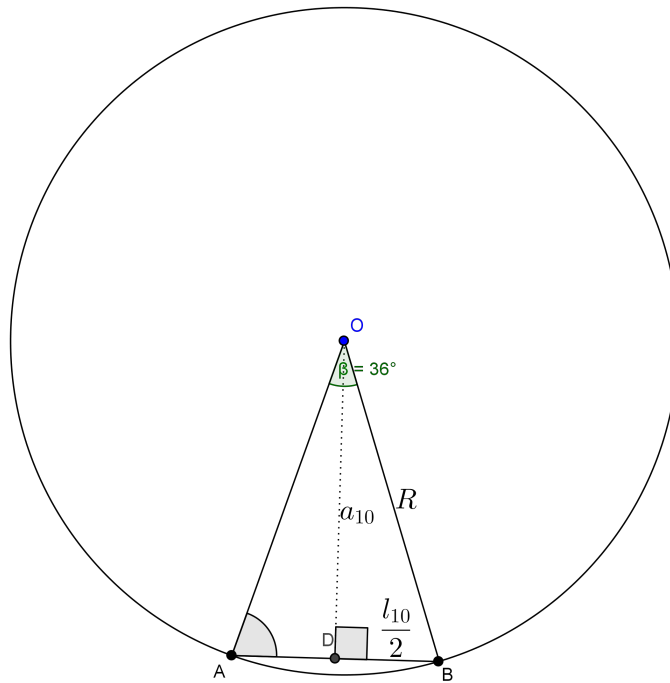


Figura 3.5:

Como o $\triangle ODB$ é retângulo em D, podemos utilizar o teorema de pitágoras já que a_{10} e $\overline{DB} = \frac{l_{10}}{2}$ são catetos e $\overline{OB} = R$ é a hipotenusa desse triângulo, temos:

$$\overline{OD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{OB}^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
a_{10}^2 + \left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2 &= R^2 \implies \\
a_{10}^2 + \left(\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}R}{2}\right)^2 &= R^2 \implies \\
a_{10}^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 R^2 &= R^2 \implies \\
a_{10}^2 &= R^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 R^2 \implies \\
a_{10}^2 &= R^2 \left(1 - \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2\right) \implies \\
a_{10}^2 &= R^2 \left(1 - \left[\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right]\right) \implies \\
a_{10}^2 &= R^2 \left(1 - \left[\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right]\right) \implies \\
a_{10}^2 &= R^2 \left(\frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}\right) \implies \\
a_{10}^2 &= R^2 \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right) \implies \\
a_{10} &= R \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Com isso chegamos as expressões do lado do decágono regular e o ápotea do decágono regular.

Problema 2 Calcular o lado e a apótema do hexágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Resolução Chamemos o raio da circunferência de R e calcularemos o l_6 e a apótema a_6 (veja figura 3.6).

No $\triangle AOB$, vamos encontrar o ângulo central $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ e bem como o $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \implies \widehat{A} = \widehat{B}$ então $\widehat{O} = \widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ \implies \triangle AOB$ é equilátero, logo

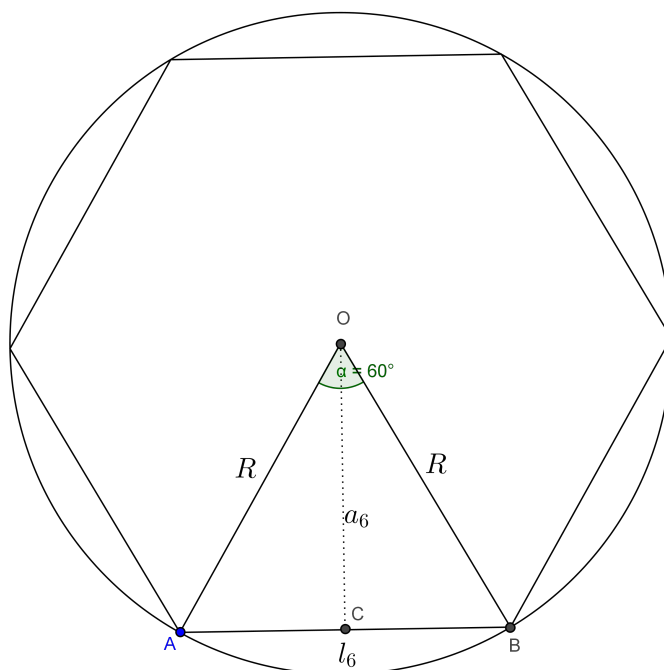


Figura 3.6:

$l_6 = R$. Sabendo que a_6 é a altura do triângulo equilátero de lado $R \Rightarrow a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Problema 3 Calcular o lado e o apótema do pentágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Resolução Chamemos o raio da circunferência de R e calcularemos o l_5 e a apótema a_5 .

Inicialmente provaremos a seguinte propriedade:

O l_5 é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujo os catetos são o l_{10} e o l_6 (l_5, l_6 e l_{10} relativos a um mesmo raio R). Seja $\overline{AB} = l_{10}$ e na reta AB um ponto C tal que $\overline{AC} = R$. Considerando a circunferência de centro A e raio R (circunferência λ'), o ângulo central $\hat{A} = 72^\circ$ faz corresponder $\overline{OC} = l_5$ basta observar que $72^\circ = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ$. Conduzindo por C a tangente $\overline{CD}$ circunferência λ de centro O e raio R , sabendo que $\overline{CA} = R$ e $\overline{CB} = R - l_{10}$ temos:

Potência de C em relação a λ :

$$(\overline{CD})^2 = (\overline{CA})X(\overline{CB}) \Rightarrow$$

$$(\overline{CD})^2 = R(R - l_{10}) \Rightarrow$$

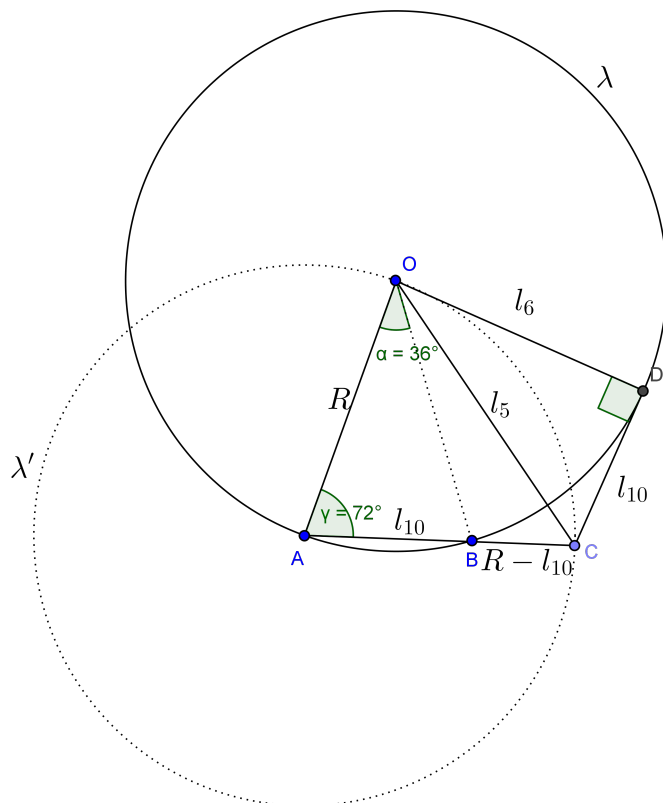


Figura 3.7:

onde pelo problema 1 vimos que

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

o que implica em

$$\overline{CD} = l_{10}$$

Isso mostra que l_{10} é segmento áureo do raio R ; a potência de um ponto foi demonstrada na construção do pentágono regular deste trabalho. Considerando o $\triangle ODC$ retângulo em D , temos: $\overline{OC} = l_5 =$ hipotenusa, $\overline{CD} = l_{10} =$ cateto e $\overline{OD} = R = l_6 =$ cateto. Calcularemos então o l_5 , aplicando o teorema de Pitágoras, vemos que:

$$l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2 \implies$$

$$\begin{aligned}
 l_5^2 &= R^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot R \right)^2 \Rightarrow \\
 l_5^2 &= \frac{R^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}) \Rightarrow \\
 l_5 &= \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

O cálculo do apótema do pentágono regular fica como exercício ao leitor que, após os devidos cálculos, chegará na seguinte expressão:

$$a_5 = \frac{R}{4} (\sqrt{5} - 1)$$

Problema 4 Deduzir a fórmula geral do apótema de um polígono regular. Vamos agora, neste momento, deduzir uma fórmula geral de a_n dados R e l_n .

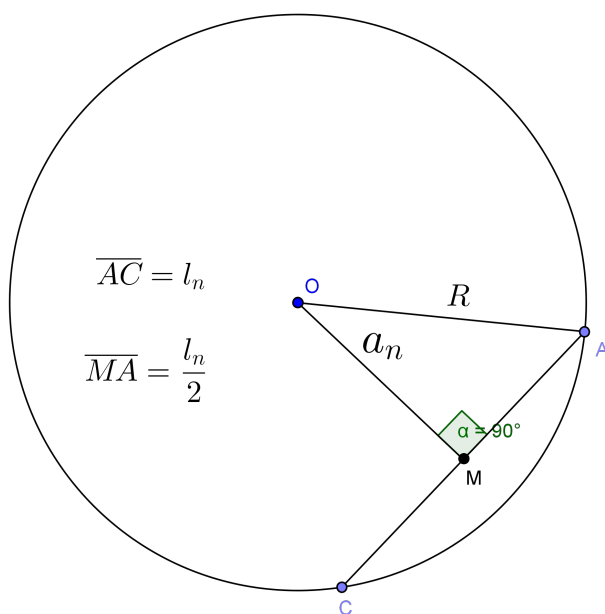


Figura 3.8:

Bem como o $\triangle AMO$ é retângulo em M e também ponto médio de $\overline{CA}$ temos:

$\overline{CA} = l_n$, $\overline{MA} = \frac{l_n}{2}$ e $\overline{OA} = R$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(\overline{OA})^2 = (\overline{MA})^2 + (\overline{OM})^2 \implies$$

$$(R)^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \implies$$

$$a_n^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4} \implies$$

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

Para os demais polígonos consulte [6].

Apêndice A

O Segmento Áureo

Quando um ponto P, entre A e B, é tal que $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$, diz que AP é o segmento áureo de AB e que P dividiu AB em média e extrema razão. É fácil ver que $AP > PB$ por que $\frac{AB}{PB} > 1$ (veja figura A.1).



Figura A.1:

A proporção áurea, número de ouro, número áureo, proporção de ouro ou segmento áureo é uma constante real algébrica irracional, com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. Mostraremos o cálculo do mesmo, primeiro chamemos de a a medida do segmento AB e de x a medida do segmento AP, logo a medida do segmento PB será $a - x$. Bom, pela definição dada acima

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{x} = \frac{a-x}{x} \Rightarrow$$

$$x^2 = a(a-x) \Rightarrow$$

$$x^2 + ax - a^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$$

Desde a Antiguidade, a proporção áurea é usada na arte, é frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto. Este número está envolvido com a natureza do crescimento. O número de ouro, pode ser encontrado na proporção das conchas (o nautilus, por exemplo), nos seres humanos (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo) e nas colméias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento. Justamente por estar envolvido no crescimento, este número se torna tão frequente. E justamente por haver essa frequência, o número de ouro ganhou um status de "quase mágico", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. Apesar desse status, o número de ouro é apenas o que é devido aos contextos em que está inserido: está envolvido em crescimentos biológicos, por exemplo. O fato de ser encontrado através de desenvolvimento matemático é que o torna fascinante. Figuras geométricas, por exemplo, um decágono regular, inscrito numa circunferência, tem os lados em proporção áurea com o raio da circunferência.

Segmentos do pentagrama estão na proporção áurea, como mostra a figura (veja figura A.2).

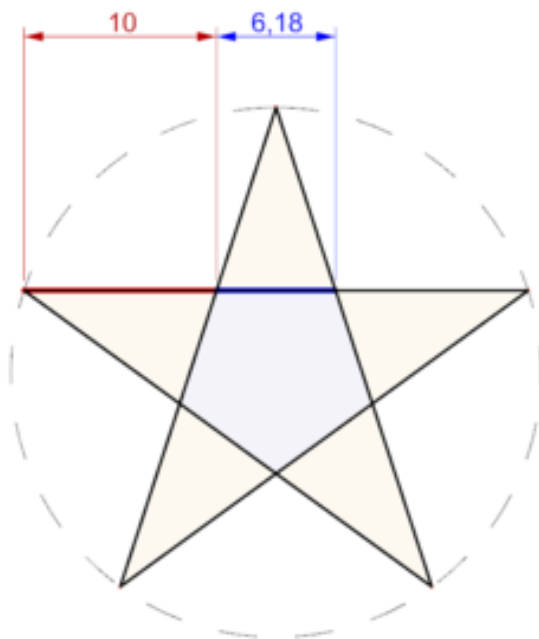


Figura A.2:

O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea. Chamando os vértices de um pentagrama de A, B, C, D e E, o triângulo isósceles formado por A, C e D tem seus lados em relação dourada com a base, e o triângulo isósceles A, B e C tem sua base em relação dourada com os lados. Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica. Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que "tudo é número", ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos. A Maçonaria também tomou emprestado o simbolismo da Proporção Dourada em seus ensinamentos, com a utilização de seu método para obtenção do Pentagrama e do Quadrado Oblongo, existentes em algumas Lojas Maçônicas, para mais artigos interessantes sobre o segmento áureo (veja [9]).

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. and MERZBACH, Uta C., *História da Matemática*. Tradução da Terceira Edição Americana, Editora Blucher. (2012).
- [2] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues, Editora UNICAMP (2008).
- [3] ROONET, A., *A História da Matemática*. Tradução de Mario Fecchio, Editora M.Books, (2012).
- [4] EUCLIDES, de Alexandria, *Os Elementos*. Tradução de Ireneu Bicudo, Editora UNESP, (2009).
- [5] GARBI, Gilberto G., *C. Q. D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*, Editora Livraria da Física, (2010).
- [6] DOLCE, O., and POMPEO. José N., *Coleção Fundamentos da Matemática Elementar Volume 9 - Geometria Plana*, Editora Atual, (2011).
- [7] WAGNER, E., *Coleção do Professor de Matemática - SBM - Construções Geométricas*, Editora SBM, (2007).
- [8] CARVALHO, João B. P. de, *A construção, por Euclides, do Pentágono Regular*. Artigo apresentado na V Bienal da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) na UFPB (Universidade Federal Da Paraíba), (2010).
- [9] http://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção_áurea acessado em 21/04/2013 as 13:12.