



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT



# Euler e o problema de Basileia<sup>†</sup>

por

MARCOS FERNANDO CANCIO JUSTO DOS  
SANTOS FILHO

sob orientação de

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014  
João Pessoa - PB

---

<sup>†</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# Euler e o problema de Basileia

por

**MARCOS FERNANDO CANCIO JUSTO DOS SANTOS  
FILHO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UEPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Lizandro Sánchez Challapa - UEPB**

---

**Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE**

**Agosto/2014**

# Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar a Deus por me permitir conquistar mais essa batalha. Pelos livramentos nas idas e vindas entre Recife João Pessoa, João Pessoa e Recife. Agradecer aos amigos por compartilhar comigo o dia a dia do curso muitas vezes dedicando horas que seriam de suas famílias a fim de compartilhar conosco todos os desafios apresentados no curso, em especial, a Alex Pereira Bezerra. Venho aqui também aproveitar a oportunidade para agradecer ao meu orientador, professor doutor Napoleón Caro Tuesta pelos momentos em sala de aula e, sobretudo pela orientação deste trabalho.

Agradeço também a todos os meus familiares que sempre me apoiaram e me estimularam a começar, cursar e concluir este curso. Em especial aos meus pais, irmãos e a minha amada esposa e filha. Não poderia deixar de agradecer a uma família que me acolheu com grande amor e carinho durante todo o curso, a família do honrado Sr<sup>o</sup> Arlindo Gomes da Silva e a Sr<sup>a</sup> Maria das Neves da Silva.

# Dedicatória

*Dedico este trabalho as duas pessoas mais importantes na minha vida, são elas: Lucicleide da Silva Santos Cancio, minha amada e adorável esposa, e a Laura Malu Santos Cancio, minha linda filha, por sempre me apoiarem e depositarem total confiança no meu potencial, por suas incansáveis orações para que se tornasse possível a realização, com êxito, deste curso, estando elas sempre na torcida ao meu favor.*

# Sumário

|          |                                           |           |
|----------|-------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>O Problema de Basileia</b>             | <b>1</b>  |
| 1.1      | O Enunciado . . . . .                     | 1         |
| 1.2      | A Prova de Euler . . . . .                | 1         |
| 1.3      | A Prova de Bernoulli . . . . .            | 4         |
| <b>2</b> | <b>Duas Provas Modernas do Problema</b>   | <b>8</b>  |
| 2.1      | Primeira Prova . . . . .                  | 8         |
| 2.2      | Segunda Prova . . . . .                   | 11        |
| <b>3</b> | <b>Séries de Fourier</b>                  | <b>14</b> |
| 3.1      | Contribuições de Joseph Fourier . . . . . | 14        |
| 3.2      | Introdução . . . . .                      | 15        |
| 3.2.1    | Séries de Fourier . . . . .               | 15        |
| <b>4</b> | <b>Apêndice</b>                           | <b>25</b> |
| 4.1      | Polinômios . . . . .                      | 25        |
| 4.2      | Integração por Partes . . . . .           | 28        |
| 4.3      | Integrais Duplas . . . . .                | 30        |
| 4.4      | Integral Dupla . . . . .                  | 31        |
| 4.5      | Séries de Números Reais . . . . .         | 33        |
| 4.6      | A função zeta de Riemann . . . . .        | 35        |
| <b>5</b> | <b>Considerações Finais</b>               | <b>37</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>         | <b>38</b> |

# Lista de Figuras

|     |                                          |    |
|-----|------------------------------------------|----|
| 1   | Mapa da Suíça . . . . .                  | x  |
| 2   | Leonhard Paul Euler . . . . .            | x  |
| 3   | Irmãos Bernoulli . . . . .               | xi |
| 4.1 | Função definida no domínio $D$ . . . . . | 32 |
| 4.2 | Integral Parcial $A(x)$ . . . . .        | 32 |

# Resumo

Iniciamos este trabalho com a apresentação da Prova de Euler ao problema de Basileia em seguida apresentamos outra demonstração mais atual ao Problema de Basileia e por fim uma abordagem aos conteúdos preliminares para o entendimento das demonstrações aqui citadas. As demonstrações estudadas e apresentadas neste documento foram extraídas de [11] e [10].

**Palavras-chave:** A prova de Euler, inversos dos quadrados de naturais, somas infinitas.

# Abstract

We began this work with the presentation of proof of Euler to the problem of Basel then we present two other most current statements when problem Basel and finally an approach to preliminary content for the understanding the demonstrations here cited. Studied and statements presented in this document were extracted from [11] and [10].

**Keywords:** Proof of Euler inverse of the square of natural, infinite sums.



# Introdução

Em 15 de abril de 1707 na cidade de Basileia na Suíça, (figura 1), nascia Leonhard Paul Euler, que viria a ser um matemático e físico mundialmente conhecido. Euler, é considerado o matemático mais produtivo na história da Matemática. Seus trabalhos estão relacionados a diversas áreas, da Engenharia à Mecânica, da Óptica à Astronomia, da Música à Matemática (curvas, séries, cálculo de variações, cálculo infinitesimal, Geometria, Álgebra).

Filho de Paul Euler, pastor calvinista e de Marguerite Brucker, filha de um pastor, passou sua infância na cidade de Riehen juntamente com sua família que se mudou pouco depois do seu nascimento. Seguindo a tradição familiar Euler foi a princípio educado pelos seus pais, sua mãe orientava-o sobre a tradição familiar e humanística e ao estudo dos clássicos gregos e romanos, já a sua instrução em matemática foi conduzida por seu pai, sacerdote calvinista, pois na época toda formação deveria passar por conhecimentos básicos do universo matemático, explicando sobre notações e fundamentação das operações básicas desta ciência que viria a ser sua porta para o sucesso, bem como tornar-se um dos grandes matemáticos de todos os tempos, contrariando assim todas as expectativas da família em ver Euler ser um sacerdote calvinista.

Ao completar idade de ir para a escola, aos oito anos de idade, Euler voltou para Basileia, onde foi viver com sua avó materna para prosseguir os estudos. Na escola pouco aprendeu sobre matemática, mas seu dom manifestou-se desde criança. Aos 14 anos matriculou-se na Universidade de Basileia para estudar Teologia, pois seu pai queria que seguisse carreira religiosa. Paul Euler era um amigo da família Bernoulli, ele havia estudado com Jacques Bernoulli (1654 - 1705), pai de Jean Bernoulli (1667 - 1748) que foi um dos matemáticos mais importantes da Europa e tornou-se uma influência no pequeno Euler, uma vez que ele recebia aulas particulares de Jean Bernoulli, que rapidamente percebeu seu talento para a matemática.

Euler estudava teologia, grego e hebraico por vontade de seu pai, para mais tarde tornar-se pastor. Porém Jean Bernoulli interveio e convenceu Paul Euler que seu filho estava destinado a ser um grande matemático apesar de também estudar Medicina. Na universidade, Euler foi aluno de Jean Bernoulli. Em 1723 terminou a graduação em Filosofia, obtendo o grau de Magister, dissertando em latim sobre os trabalhos de Descartes (1596-1650) e Newton (1643 - 1727).



Figura 1: Mapa da Suíça

Em 1726, Euler (figura 2) obteve seu título de doutor também pela Universidade de Basileia com sua tese sobre a propagação do som, e ainda no mesmo ano participou do Grande Prêmio da Academia de Paris, que costumava propor problemas e premiar as melhores soluções. Neste ano o problema em questão era encontrar a melhor maneira de dispor os mastros de um navio. Euler ficou em segundo lugar, perdendo somente para Pierre Bouger, (1698 - 1758) hoje conhecido como “pai da arquitetura naval”. O seu espírito matemático está bem definido nas palavras finais da sua candidatura: “Não senti necessidade de testar experimentalmente a solução que proponho, porque esta se baseia nos mais sólidos princípios da Mecânica, o que leva que nenhuma questão se possa levantar sobre o que sucederá na prática”. Mais tarde ele frequentemente apresentou ensaios em concursos organizados pela mesma academia, ganhando o cobiçado prêmio por doze vezes. Mesmo antes disso em 1724 Euler partilhou com Maclaurin e Daniel Bernoulli um prêmio para ensaios sobre marés.



Figura 2: Leonhard Paul Euler

---

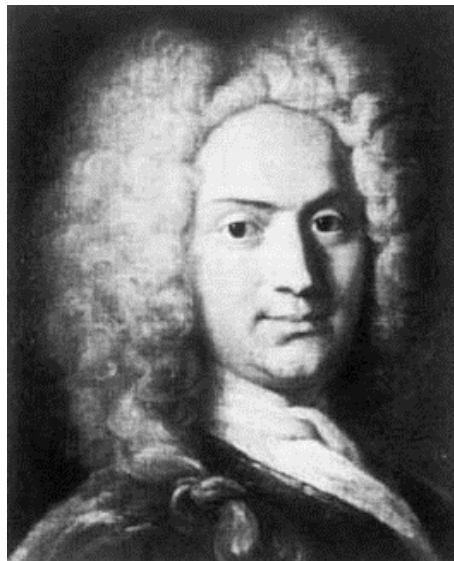
Em 1727, quando tinha apenas 20 anos de idade, os irmãos Nicolaus e Daniel Bernoulli (figura 3 e figura 4) que tinham ido como professores de matemática para Academia de São Petersburgo, fundada por Catarina I segundo os moldes fixados por seu falecido marido Pedro, o Grande, conseguiu com que ela aconselhada por Leibniz convidassem Euler para ocupar um lugar vago na academia de medicina. Porém no dia em Euler chegou, Catarina morreu. O seu amigo Nicolaus Bernoulli tinha morrido em São Petersburgo no ano anterior ao de sua chegada.

Euler e Daniel Bernoulli eram amigos, moravam na mesma casa e trabalhavam frequentemente juntos. Euler começou a dominar a língua russa e criou a sua vida em São Petersburgo. Também aceitou um trabalho adicional como médico-tenente na Marinha Russa de 1727 a 1730, onde tornou-se professor de Física na Academia, e em 1733 Daniel Bernoulli deixou a Rússia para ocupar a cadeira de matemática em Basileia.

Euler tornou-se o principal matemático da Academia de São Petersburgo aos 26 anos, desta forma melhorando de vida financeiramente e podendo se dedicar às pesquisas na área de matemática.



(a) Nicolaus Bernoulli



(b) Daniel Bernoulli

Figura 3: Irmãos Bernoulli

Em sete de janeiro de 1734 Euler casa-se com Katharina Gsell, filha de um pintor da Academia Gymnasium. O casal comprou uma casa perto do Rio Nevae, tiveram 13 filhos, dos quais apenas 5 sobreviveram à infância. Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida deixando ainda ao morrer uma série de manuscritos que

---

enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais de quarenta e sete anos. Logo após seu retorno a São Petersburgo Euler ficou completamente cego de um olho, aliás, ele já era cego do olho direito desde 1735, o que explica a pose com que aparece em seus retratos. O problema de visão de Euler não impediu de manter a extraordinária atividade produtiva de seus trabalhos, pois ele tinha uma memória fenomenal e um poder de concentração incomum. Euler foi um escritor magistral, caracterizando seus livros pela grande clareza, riqueza de detalhe e abrangência. Os seus livros alcançaram pronunciada e longa popularidade e ainda hoje são uma leitura muito agradável e proveitosa.

Em 1735, Euler conquistou reputação internacional após resolver o Problema de Basileia. O problema não foi resolvido pelos matemáticos mais importantes da época, dentre eles Jacques Bernoulli (1654 - 1705) que teve a humildade de admitir seu fracasso e mais uma vez tornou público o problema em sua publicação "Tractatus de seiebusinfinitis", Jacques era professor na Universidade de Basileia. A solução então foi feita por Euler de maneira tão didática e clara que o tornou notável e famoso aos vinte e oito anos de idade. Inclusive suas ideias foram tomadas anos depois por Bernhard Riemann em seu artigo de 1859, onde definiu sua função zeta e demonstrou suas propriedades básicas. O problema deve seu nome à cidade onde residia Euler (Basileia), cidade onde vivia também a família Bernoulli.

## Basiléia

Basiléia (em alemão: Basel) (figura 1) ver página 6, é a terceira maior cidade da Suíça. No grego koinê, Basiléia significa “reino” ou “domínio”. A cidade foi fundada pelos romanos com o nome de Basilia. Localizada no noroeste da Suíça, Basileia faz fronteira com a Alemanha e com a França. É cortada pelo rio Reno. Sua localização favoreceu o desenvolvimento da cidade, como polo financeiro e de transportes.

A Universidade de Basileia foi fundada em 4 de abril de 1460, e é a mais antiga universidade da Suíça em funcionamento contínuo.

A Universidade da Basiléia é considerada uma instituição que desenvolveu muito cedo métodos novos de aprendizagem e ensinamento. A Universidade de Basileia destaca-se presentemente pelas pesquisas em medicina tropical.

Entre os nomes de matemáticos associados à instituição estão os de Erasmo, Paracelso, Daniel Bernoulli, Jacob Burckhardt, Leonhard Euler, Friedrich Nietzsche, Eugen Huber.

---

## Academia de São Petersburgo

A Academia foi fundada em São Petersburgo por Pedro, o Grande, e implementada pelo decreto do Senado de 28 de Janeiro de 1724. No período de 1724 e 1917 ela foi chamada de Academia das Ciências de São Petersburgo. Entre os convidados para trabalhar na Academia estavam os matemáticos Leonhard Euler, Christian Goldbach, Georg Bernhard Bilfinger, Nicolaus e Daniel Bernoulli, o botânico Johann Georg Gmelin, o embriologista Caspar Friedrich Wolff, astrônomo e geógrafo Joseph-Nicolas Delisle, o físico Georg Wolfgang Kraft, e o historiador Gerhard Friedrich Müller.

Sob a liderança da Princesa Catarina Vorontsova-Dashkova (1783-96), a Academia estava engajada em compilar o enorme Dicionário Acadêmico da Língua Russa. Expedições para explorar áreas remotas do país tiveram como líderes ou membros mais participantes os próprios cientistas da Academia. A Academia é criada tendo como base os modelos das academias ocidentais - mas diferentemente delas, tem autonomia com relação ao Estado.

## Academia de Berlim

A Academia de Ciências da Prússia (em alemão: Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften) foi fundada em 11 de julho de 1700 em Berlim, pelo então príncipe eleitor Frederico III, depois da coroação em 1701 Frederico I da Prússia. Gottfried Leibniz, que planejou a academia, foi nomeado seu primeiro presidente.

Após a coroação de Frederico I da Prússia, em 1701, a academia passou a ser denominada Königlich Preußische Sozietät der Wissenschaften. Diferentemente de outras academias, até 1809 a Academia de Ciências da Prússia não foi financiada pelo estado. Para sua sobrevivência financeira Leibniz propôs, com a anuição de Frederico III, o monopólio da academia sobre a produção e venda do calendário de Brandemburgo. Um estatuto para academia somente foi obtido em 1710. Um ano após ocorreu a abertura oficial da academia. O estatuto estabeleceu a divisão dos membros da academia em quatro classes, duas de ciências naturais e duas de ciências humanas.

Enquanto outras academias, como por exemplo, a Royal Society de Londres ou a Académie des Sciences e a Academia Francesa de Paris, se limitavam a determinadas áreas científicas. A academia da Prússia foi a primeira na qual as ciências naturais e humanas foram igualmente contempladas desde o início.

---

## Contribuições científicas de Euler

O saber e o interesse de Euler não se limitavam apenas à matemática e à física. Era um erudito autêntico, estendendo-se seus conhecimentos à astronomia, medicina, botânica, química, teologia e às línguas orientais. Dedicava-se a leitura dos escritores romanos eminentes, conhecia bem a história civil e literária de todas as épocas e nações e era bastante versado em línguas e em vários ramos da literatura. Em tudo isso, sem dúvida, eras grandemente auxiliado por sua excepcional memória.

As contribuições de Euler à matemática são demasiado numerosas, segundo Bradley e Sandifer (2007), dentre as muitas pesquisas, Euler fez muitas contribuições para a matemática moderna no que se refere à notação e terminologia. Segue abaixo algumas notações:

|           |                                          |
|-----------|------------------------------------------|
| $f(x)$    | para funções,                            |
| $e$       | para a base de logaritmos naturais,      |
| $a, b, c$ | para os lados de um triângulo ABC,       |
| $s$       | para o semiperímetro do triângulo ABC,   |
| $r$       | para o inraio do triângulo ABC,          |
| $R$       | para o circunraio do triângulo ABC,      |
| $\Sigma$  | para somatórios,                         |
| $i$       | para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$ . |

Também se deve a ele a notabilíssima fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

que, para  $x = \pi$ , se transforma em

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como

$$i^i = e^{-\pi/2}$$

Dos 886 trabalhos de Euler podemos ver alguns deles a seguir:

---

## Análise

Na análise, Euler ficou conhecido por usar frequentemente e por desenvolver as séries de potência, tais como:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right)$$

Euler descobriu a expansão das séries de potências para série  $e$  e a inversa da função tangente. O uso dessas séries de potências permitiu que Euler pudesse resolver o problema de Basileia chegando ao seguinte resultado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Bradley e Sandifer (2007) expõem que Euler expressiu o caminho para investigação analítica das funções exponencial e logarítmica como também notou maneiras variadas para expressar as funções logarítmicas usando séries de potências. Ele também obteve uma definição de logaritmos para números negativos e complexos, expandindo, assim, as aplicações matemáticas de logarítmicos. Também deu sentido à função exponencial para números complexos, relacionando-a com as funções trigonométricas.

Euler afirmou que a fórmula  $e^{i\phi} + 1 = 0$ , é um caso especial, de:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$$

Onde  $\phi = \pi$  é o número de Euler (da base de logaritmos naturais),  $i$  é a unidade imaginária que satisfaz  $i^2 = -1$  e  $\pi$  é a razão entre a circunferência de um círculo para com o seu diâmetro.

Esta fórmula foi eleita por Euler como a mais bela fórmula matemática, pois integra 1 e 0, que são básicos no nosso sistema numérico e três tipos de operações matemáticas - adição, multiplicação e potenciação - os dois números irracionais notáveis  $\pi$  e  $e$ , e ainda  $i$ , a base dos números imaginários.

---

## Teoria dos números

Em muitas pesquisas iniciadas por Euler sobre a Teoria dos números teve-se como base as obras de Fermat. Euler relacionou a natureza da distribuição dos números primos com as ideias da análise. Provou que a soma dos inversos dos primos diverge. Então ele descobriu uma relação entre a função Zeta de Riemann com os números primos, que hoje em dia é conhecida como a fórmula do produto de Euler para a função Zeta de Riemann. A ligação entre os números primos e a função Zeta descoberta por Euler, comprovaram a seguinte identidade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Onde, por definição, o lado direito é um produto infinito que se estende para todos os números primos (tais expressões são chamadas produtos de Euler):

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 7^{-s}} \cdots \frac{1}{1 - p^{-s'}} \cdots$$

Ambos os lados da fórmula do produto de Euler converge para maior que 1. A prova da identidade de Euler usa apenas a fórmula para a série geométrica e o teorema fundamental da aritmética.

Já mencionamos que Euler provou a generalização do pequeno Teorema de Fermat. Também provou que todos os números perfeitos pares são apresentados na estrutura dada por Euclides (330 a.C. - 260 a.C.). A partir dessas duas últimas investigações, Euler deu continuidade aos estudos de Teoria dos Números, e assim, em 1747, publicou na *Nova Acta Eruditorum*, o primeiro de três trabalhos dedicados aos números amigáveis, mesmo depois de apontar para o insucesso dos seus predecessores, Fermat (com somente dois pares desses números) e Descartes (com apenas um par). Ele supôs que houvesse uma infinidade de pares de números amigáveis, porém isso é uma questão ainda em aberto. Desenvolveu um procedimento que geraria pares de números amigáveis, o que foi publicado, de forma resumida no artigo *De Numeres amicabileis*, na *Nova Acta Eruditorum* e, assim, Euler descobriu 61 novos pares de amigáveis.

Euler também trabalhou com a teoria dos números figurados, mais especificamente com os números pentagonais. Ele propôs uma expansão do conceito desse número e que resultou no artigo (E542) *Mirabilibus Proprietatibus Numerorum Pentagonalium*, trabalho em que Euler expôs de forma detalhada suas pesquisas sobre os números pentagonais.



---

## Teoria de Grafos

Não há como falar de Teoria de Grafos e não falar em Euler. Para Sampaio (1997, p.2) um grafo é uma figura constituída de um número finito de arcos (ou curvas), chamados “arcos” ou “arestas” do grafo, cujas extremidades são chamadas de “vértices” do grafo. Um mesmo vértice pode pertencer a vários arcos, e dois arcos só podem ter em comum um ou dois vértices de suas extremidades. As duas extremidades de um arco podem coincidir dando lugar a único vértice.

Em 1736, Euler lançou as bases da teoria dos grafos. Segundo Sampaio (1997, p.1) tudo começou quando os habitantes de Königsberg, na Prússia, propuseram um desafio. Este desafio era fazer um passeio, passando pelas sete pontes da cidade, porém passando apenas uma vez sobre cada uma. Esse problema matemático foi resolvido por Euler.

Sampaio (1997, p.1) supôs que Euler teria pensado da seguinte maneira: “Este é um tipo de problema no qual as distâncias envolvidas são irrelevantes. O que importa é como as várias porções de terra estão interligadas entre si”. Euler queria dizer que este problema pode ser pensado, geometricamente, da seguinte maneira: há quatro porções de terra envolvidas separadas uma das outras pelas águas do rio Pregel. O resultado foi um diagrama que representa as várias interligações entre essas porções de terra, que é um exemplo de grafo. Com essa ideia, Euler provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições e criou uma teoria que se aplica a vários problemas desse tipo.

A solução do problema das sete pontes de Königsberg é considerada o primeiro teorema dos grafos.

## Matemática Aplicada

Alguns dos famosos trabalhos de Euler foram em Matemática Aplicada. Temos como exemplo:

- Relação do cálculo diferencial de Leibniz (1646 - 1716) com Método de Newton, dentro do contexto da Mecânica.
- Desenvolvimento de ferramentas facilitadoras da aplicação do cálculo para problemas físicos.
- Desenvolvimentos das aproximações de Euler, que resultou no método de Euler e na fórmula de Euler-Maclaurim.

---

Euler teve grande interesse da aplicação de ideias matemáticas na música. Tanto que escreveu o *Tentamen musicae theoriae novae* (1739), na esperança de integrar teoria musical como parte da matemática. Porém esse trabalho não teve grande repercussão no meio matemático.

Além disso, Euler também trabalhou na área de cartografia, no período que foi nomeado diretor da seção de geografia, da Academia de São Petersburgo. Durante esse período, resultou em um atlas russo (1745), composto de 20 mapas.

## Física e Astronomia

Foram variadas suas contribuições na Física. Como sempre contribuições importantes foram seus pontos fortes. O ramo da Física em sua colaborações científicas se destacam:

1. Ótica;
2. Na área da teoria ondulatória da luz e
3. Na área da teoria do movimento lunar, entre outras áreas da física.

Euler ajudou a desenvolver a equação de viga de Euler-Bernoulli, que se tornou um marco da engenharia. Ele aplicou suas ferramentas analíticas para os problemas na mecânica clássica e aos problemas celestiais. Seu trabalho em astronomia foi reconhecido por cientistas, ganhando uma série de prêmios da Academia de Paris, com realizações que estão incluídas na astronomia, determinando as órbitas de cometas e outros corpos celestes, compreendendo a natureza dos cometas e o cálculo da paralaxe do sol.

Uma obra notável, diga-se de passagem, a altura de Leonhard Euler, foi de acordo com Fiolhais (2008, p.5) o livro *Mechanica* unificando assim pela primeira vez os trabalhos principais de Newton e de Leibniz nessa área da física.

Um Matemático completo, podemos assim dizer, devido o fato dele ser considerado grande colaborador da Matemática nas suas diversas áreas foi um ator protagonista não só na Matemática, mas também na Astronomia e na Física com descobertas em diversos campos dessas áreas, acabamos de registrar aqui algumas das contribuições de Euler, diante de muitas contribuições deste Matemático brilhante.

# Capítulo 1

## O Problema de Basileia

### 1.1 O Enunciado

O **Problema de Basileia** é um famoso problema de teoria dos números proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli e resolvido por Leonhard Euler em 1735. Posto que o problema não foi resolvido pelos matemáticos mais importantes da época, a solução tornou Euler rapidamente conhecido aos vinte e oito anos. Euler generalizou o problema consideravelmente, e suas ideias foram tomadas anos depois por Bernhard Riemann em seu artigo de 1859 *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen GröÙe*, onde definiu sua função zeta e demonstrou suas propriedades básicas. O problema de Basileia consiste em encontrar a soma exata dos inversos dos quadrados dos inteiros positivos, isto é, a soma exata da série infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Pelo apêndice 4.5, sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$  converge, então pergunta-se qual é o valor de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

### 1.2 A Prova de Euler

A prova formulada por Euler parte da série de Taylor para a função seno.

Em 1735 Euler resolve o problema. A prova de Euler é brilhante pelo aspecto didático pelo qual ela foi construída.

Sabemos que através do Exemplo:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

E esta converge para todo real.

Consideremos agora a função

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Note que  $\sin(x) = x \cdot f(x)$ . Euler utiliza de maneira implícita o Teorema Fundamental da Álgebra, sendo que o mesmo seria demonstrando após alguns anos.

Lembremos assim, que todo polinômio de grau  $n$ , seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , com  $n$  raízes reais sendo elas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $p(x)$  decompõe-se em fatores de grau 1 da seguinte maneira:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Quando  $a_0 \neq 0$  todas as raízes serão diferentes de zero (Obviamente pelas relações entre os coeficientes, que  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$ , assim nenhuma raiz poderá ser nula) e se podemos portanto escrever a decomposição da seguinte forma se:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

Euler aqui recorre à série de potências da função seno e trata a mesma como um polinômio, sendo assim a função  $f(x) = \sin x/x$  tem raízes da forma  $k\pi$ , com  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , Euler escrevendo-a através de produtos de fatores do primeiro grau, obtém:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Em (1.2) o coeficiente do termo  $x^2$ , é:

$$-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{25\pi^2} - \dots$$

E em (1.1) é  $-\frac{1}{3!}$ , sendo assim Euler conclui que:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{25\pi^2} - \dots \quad (1.3)$$

Já multiplicando (1.3) por  $\pi^2$  em ambos os membros, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler chega assim ao resultado exato do problema.

**Observação:** Fica assim a seguinte pergunta: Por que esta prova não é válida hoje?

Refletindo um pouco, chegaremos a seguinte conclusão: séries de potências não são polinômios, portanto não gozam de todas as propriedades de polinômios. Para observarmos isso, considere o seguinte polinômio  $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , com raízes  $r_1, r_2, r_3, r_4$ .

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos  $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ . Pelas relações entre coeficientes e raízes de um polinômio,

$$a_0 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

e

$$a_1 = -r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Evidentemente que:

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \quad (1.4)$$

Note que o argumento acima não funciona para um “polinômio infinito”. No exemplo, temos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + \dots$$

quando  $|x| < 1$ .

Agora considere a seguinte função  $g(x) = 2 - \frac{1}{1-x}$ . Perceba que  $g(x)$  possui  $\frac{1}{2}$  como única raiz. Além disso a expansão de  $g(x)$  em série de potências seria:

$$g(x) = 1 - x - x^2 - x^3 - \dots$$

Assim  $a_0 = 1$  e  $a_1 = -1$ . Mas a soma dos recíprocos das raízes não é  $-\frac{a_1}{a_0}$ .

Sendo assim vale lembrar, que em sua época Euler não dispunha da teoria de convergência de séries que dispomos hoje em qualquer livro de Cálculo em nível de graduação. Tal conhecimento no tempo de Euler era puramente informal.

Podemos aqui também perceber que matemáticos do século XVIII valiam-se também de manipulações meramente informais, lógico que os procedimentos de Euler para os padrões de hoje não teriam ampla aceitação, pois sabemos que existe uma diferença nítida entre funções e séries infinitas.

Não é fácil aceitar, por exemplo, que as propriedades de raízes de um polinômio sejam necessariamente válidas para séries infinitas, porém temos que considerar o contexto ao qual Euler estava inserido, devemos então avaliar a sua obra sob a ótica científica da época.

## 1.3 A Prova de Bernoulli

Aqui vamos abordar três temas relacionados com o trabalho deste capítulo. Primeiro vamos fornecer a solução alternativa de Euler do Problema Basileia. Em segundo lugar, descrever sua aplicação das descobertas narradas acima. E, finalmente, vamos discutir um desafio subsidiário que tem resistido aos esforços de Euler e todos os que se seguiu.

Como se observa, alguns dos contemporâneos de Euler, enquanto que aceitar a sua resposta para o Problema de Basileia, perguntou sobre a validade do argumento de que ele chegou lá. Daniel Bernoulli estava especialmente preocupado e escreveu a Euler a este respeito. Em uma tentativa de silenciar esses céticos, Euler concebeu outra, bem diferente, a prova disso  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ . Embora ao contrário do primeiro, é tão magistral.

Este argumento requer três resultados preliminares, cada um dos quais cai bem dentro do âmbito de um curso de cálculo moderna.

Notemos que  $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 = \int_0^x \frac{\sin^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Esta igualdade segue imediatamente da substituição  $u = \sin^{-1} t$ .

Sabemos também que:

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt$$

Substituímos a expressão sobre a integral por sua série binomial e integrar termo a termo para obter

$$\begin{aligned} \sin^{-1} x &= \int_0^x \left( 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2^2 \cdot 2!}t^4 + \frac{1.3.5}{2^3 \cdot 3!}t^6 + \frac{1.3.5.7}{2^4 \cdot 4!}t^8 + \dots \right) dt \\ &= t + \frac{1}{2} \times \frac{t^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \times \frac{t^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \times \frac{t^7}{7} \\ &\quad + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \times \frac{t^9}{9} + \dots \Big|_0^x \\ &= x + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \times \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \times \frac{x^7}{7} \\ &\quad + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \times \frac{x^9}{9} + \dots \end{aligned}$$

Provemos que  $\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$  para  $n \geq 1$ , com efeito, seja

$$J = \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Vamos aplicar integração por partes com  $u = t^{n+1}$  e  $dv = (t/\sqrt{1-t^2}) dt$  para obter

$$\begin{aligned} J &= \left( -t^{n+1} \sqrt{1-t^2} \right) \Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^1 \frac{t^n (1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt - (n+1) J \end{aligned}$$

Portanto

$$(n+2)J = (n+1) \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

e o resultado segue.

Agora siga Euler na montagem desses componentes para re-provar sua fórmula. Basta deixar para obter:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} (\sin^{-1} 1)^2 = \int_0^1 \frac{\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Em seguida, substitua-o por sua expansão em série, e integrar termino a termino:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{2.3} \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1.3}{2.4.5} \int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\quad + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \int_0^1 \frac{t^7}{\sqrt{1-t^2}} dt + \dots \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1$$

Avaliamos os outros integrais usando a recursão em

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{2.3} \left[ \frac{2}{3} \right] + \frac{1.3}{2.4.5} \left[ \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \right] + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \left[ \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \right] + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \end{aligned}$$

Um somatório envolvendo apenas os quadrados ímpares.



**Teorema 1.1.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \left[ 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots \right] + \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \cdots \right] \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots \right] + \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots \right] \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

E assim

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

■

# Capítulo 2

## Duas Provas Modernas do Problema

### 2.1 Primeira Prova

Esta prova de autoria de Tom Apostol, bastante conhecido no universo matemático internacionalmente, principalmente pelos seus livros de cálculo.

**Teorema 2.1.**  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Demonstração:**

Consiste em dois cálculos diferentes da integral dupla

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx$$

Para o primeiro cálculo, expandimos  $\frac{1}{1-xy}$  como uma série geométrica, decompos as parcelas em produto, e integramos sem esforço nenhum:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \int_0^1 x^n dx \right) \left( \int_0^1 y^n dy \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) \end{aligned}$$

Esse cálculo também mostra que a integral dupla (de uma função positiva com um pólo em  $x = y = 1$ ) é finita. Note que a computação também é fácil e direta quando a lemos de trás para diante - dessa forma, o cálculo de  $\zeta(2)$  leva à integral dupla  $I$ .

A segunda maneira de calcular é através de uma mudança de coordenadas: uma rotação de  $45^\circ$  conduz às coordenadas

$$\begin{aligned} u &= \frac{y+x}{\sqrt{2}} & \text{e} & & v &= \frac{y-x}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{u-v}{\sqrt{2}} & \text{e} & & y &= \frac{u+v}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

A substituição dessas novas coordenadas resulta em

$$1 - xy = 1 - \frac{u^2 - v^2}{2}$$

e, assim,

$$\frac{1}{1 - xy} = \frac{2}{2 - u^2 + v^2}$$

O novo domínio de integração e a função a ser integrada são simétricos com respeito ao eixo dos  $u$ , de forma que precisamos apenas calcular a integral sobre a metade superior do domínio, que dividimos em duas partes na maneira mais natural:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \left( \int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du$$

Usando  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ , isso se torna

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du$$

Agora, duas substituições trigonométricas simples completam o serviço. Para a primeira integral, pomos  $u = \sqrt{2} \sin \theta$ . O intervalo  $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$  corresponde a  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ .

## 2.1. PRIMEIRA PROVA

---

Computamos  $du = \sqrt{2} \cos \theta d\theta$  e  $\sqrt{2 - u^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{2} \cos \theta$ , e assim

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2 - u^2}} du &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} \arctan \left( \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{2} \cos \theta} \right) \sqrt{2} \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 4 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Para a segunda integral, usamos  $u = \sqrt{2} \cos 2\theta$ . Aqui,  $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$  se traduz em  $\frac{\pi}{6} \geq \theta \geq 0$ . Obtemos  $du = -2\sqrt{2} \sin 2\theta d\theta$ , com

$$\sqrt{2 - u^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos^2 2\theta} = \sqrt{2} \sin 2\theta = 2\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta$$

$$\sqrt{2} - u = \sqrt{2} (1 - \cos 2\theta) = 2\sqrt{2} \sin^2 \theta$$

e assim,

$$\begin{aligned} 4 \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan \frac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2 - u^2}} du &= 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{1}{\sqrt{2} \sin 2\theta} \arctan \left( \frac{2\sqrt{2} \sin^2 \theta}{2\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta} \right) (-2\sqrt{2}) \sin 2\theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\theta d\theta = 4 \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Juntando as duas integrais, obtemos

$$I = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

■

## 2.2 Segunda Prova

Esta prova é de autoria desconhecida, segundo [9], porém os Arquimedianos, em 1982, atribuem a John Scholes.

**Demonstração:** O primeiro passo é estabelecer uma notável relação entre valores da função (ao quadrado) cotangente. Ou seja, para todo  $m \geq 1$  vale

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \cot^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6} \quad (2.1)$$

Para provar isso, começaremos com a relação

$$\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$$

E tomamos sua parte imaginária, que é

$$\operatorname{sen} nx = \binom{n}{1} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \operatorname{sen}^3 x \cos^{n-3} x \pm \cdots \quad (2.2)$$

Agora tomamos  $n = 2m + 1$ , ao passo que, para  $x$ , consideraremos os  $m$  valores diferentes  $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ , para  $r = 1, 2, \dots, m$ . Para cada um desses valores, temos  $nx = r\pi$  e assim  $\operatorname{sen} nx = 0$ , ao passo que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  implica que obtemos  $m$  valores positivos distintos para  $\operatorname{sen} x$ .

Em particular, podemos dividir (2.2) por  $\operatorname{sen}^n x$ , o que dá

$$0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \cdots$$

isto é,

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \cdots$$

Para cada um dos  $m$  valores distintos de  $x$ . Assim, para o polinômio de grau  $m$ ,

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \cdots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

Conhecemos  $m$  raízes distintas

$$a_r = \cot^2 \left( \frac{r\pi}{2m+1} \right) \text{ para } r = 1, 2, \dots, m$$

Portanto o polinômio coincide com

$$p(t) = \binom{2m+1}{1} \left( t - \cot^2 \left( \frac{\pi}{2m+1} \right) \right) \cdots \left( t - \cot^2 \left( \frac{m\pi}{2m+1} \right) \right)$$

Comparando os coeficientes de  $t^{m-1}$  em  $p(t)$ , achamos agora que a soma das raízes é

$$a_1 + \cdots + a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

O que prova (2.1).

Também precisamos de uma segunda identidade do mesmo tipo,

$$\csc^2 \left( \frac{\pi}{2m+1} \right) + \csc^2 \left( \frac{2\pi}{2m+1} \right) + \cdots + \csc^2 \left( \frac{m\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m+2)}{6} \quad (2.3)$$

Para a função co-secante,  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ . Mas

$$\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$$

De modo que podemos deduzir (2.3) de (2.1) somando a ambos os lados da equação. Agora a cena está preparada e tudo cai em seu lugar. Usamos no intervalo  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  nos dá

$$0 < \sin y < y < \tan y$$

E, assim,

$$0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y$$

o que implica

$$\cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$$

Agora tomamos essa dupla desigualdade, que aplicamos a cada um dos  $m$  valores distintos de  $x$  e somamos os resultados. Usando (2.1) para o primeiro membro e (2.3) para o segundo membro, obtemos

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}$$

Isto é,

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-1}{2m+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m+2}{2m+1}$$

Mas tanto o primeiro membro quanto o segundo convergem para  $\frac{\pi^2}{6}$  quando  $m \rightarrow \infty$ ; fim da prova. ■

# Capítulo 3

## Séries de Fourier

Neste capítulo desenvolveremos as noções básicas sobre séries de Fourier que nos permitirá compreender melhor as demonstrações ao problema de Basiléia.

### 3.1 Contribuições de Joseph Fourier

Fourier nasceu em Auxerre em 1786 e faleceu em Paris em 1830. Filho de um alfaiate, torna-se órfão aos oito anos de idade e foi educado numa escola militar dirigida por beneditinos, onde veio a ocupar uma cadeira de matemática. Tendo ajudado a promover a Revolução Francesa foi recompensado com uma cátedra na Escola Politécnica. Renunciou essa posição para, juntamente com Monge, poder acompanhar Napoleão na expedição ao Egito. Em 1798 foi indicado governador do Baixo Egito. Após as vitórias britânicas e a capitulação da França em 1801, Fourier retornou à França, tornando-se prefeito de Grenoble. Foi quando de sua estada em Grenoble que começou suas experiências com o calor.

No desenvolvimento do artigo que Fourier apresentou à Academia de Ciências da França, ele fez a surpreendente afirmação de que toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno. Ele afirmou que uma função qualquer, não importa quão caprichosamente seja definida no intervalo  $(-\pi, \pi)$ , pode ser representada nesse intervalo por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x)$$

Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são números reais convenientes. Essa série é conhecida como Série Trigonométrica.

Embora se tivesse provado que a afirmação de Fourier de que toda função pode ser expressa por uma série trigonométrica (hoje chamada de Série de Fourier) é exagerada, na realidade a classe das funções para as quais vale essa representação é muito extensa. As Séries de Fourier provaram ser da mais alta utilidade em campos de estudo como a acústica, a óptica, a eletrodinâmica, a termodinâmica e vários outros, e tem um papel fundamental na análise harmônica, problemas sobre vigas e pontes e na solução de equações diferenciais. De fato, foram as séries de Fourier que motivaram os métodos modernos de física e matemática que envolvem a integração de equações diferenciais parciais sujeitas a condições de contorno.



## 3.2 Introdução

Neste capítulo abordaremos o problema de Euler via as chamadas séries de Fourier, utilizadas na obtenção de soluções de variados problemas de física matemática.

### 3.2.1 Séries de Fourier

#### Funções Periódicas

Uma função  $f$  é dita periódica se existe um número real  $P$ , chamado período de  $f$ , tal que:

$$f(x) = f(x + P), \quad (3.1)$$

para todo  $x$  no domínio de  $f$ .

**Proposição 3.1.** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $P$ , então:*

- (i)  $f(ax)$ ,  $a \neq 0$ , é periódica de período  $\frac{P}{a}$ ;
- (ii)  $f(\frac{x}{b})$ ,  $b \neq 0$ , é periódica de período  $bP$

#### Demonstração:

(i) Suponha que  $P^*$ , é o período de  $f(ax)$ , de modo que

$$f(ax) = f[a(x + P^*)] = f(ax + aP^*)$$

Fazendo  $u = ax$ , obtemos  $f(u) = f(u + aP^*)$ . Logo pela hipótese de que  $f$  é periódica de período  $P$ , concluímos que  $P = aP^*$  donde  $P^* = \frac{P}{a}$ .

(ii) Suponha que  $P^*$ , é o período de  $f(\frac{x}{b})$ , de modo que

$$f(\frac{x}{b}) = f[\frac{1}{b}(x + P^*)] = f[\frac{x}{b} + \frac{P^*}{b}]$$

fazendo  $u = \frac{x}{b}$  obtemos  $f(u) = f(u + P^*)$  Logo pela hipótese de que  $f$  é periódica de período  $P$ , concluímos que  $P = \frac{P^*}{b}$ , donde  $P^* = b \cdot P$ . ■

### 3.2. INTRODUÇÃO

---

**Proposição 3.2.** *Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas funções periódicas de mesmo período  $P$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  duas constantes reais quaisquer. A função  $h$  definida por  $h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ , também é periódica de período  $P$ .*

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_1(x + P) + \alpha_2 f_2(x + P) \\ &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

■

### Relações ortogonais

**Teorema 3.1.** *Se  $m, n \in \mathbb{Z}_*^+$ , então:*

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_0^T \text{sen}\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = 0, \forall m, n \quad (3.4)$$

As relações (3.2), (3.3) e (3.4) são chamadas relações de ortogonalidade. Prova-remos (3.2) e as demais serão deixadas como exercício para o leitor.

**Demonstração:** Caso  $m \neq n$ ,

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \cos\left(\frac{2m\pi x}{T} + \frac{2n\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2m\pi x}{T} - \frac{2n\pi x}{T}\right) \right] dx$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2(m+n)\pi x}{T} \right) \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m-n)\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2(m-n)\pi x}{T} \right) \right]_0^T \\
 &= \frac{T}{4\pi(m+n)} [\operatorname{sen}(2(m+n)\pi) - \operatorname{sen}(0)] + \frac{T}{4\pi(m-n)} [\operatorname{sen}(2(m-n)\pi) - \operatorname{sen}(0)] = 0
 \end{aligned}$$

Caso  $m = n$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \cos \left( \frac{2n\pi x}{T} \right) \cos \left( \frac{2\pi x}{T} \right) dx &= \int_0^T \left[ \cos \left( \frac{2n\pi x}{T} \right) \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[ 1 + \cos \left( \frac{4n\pi x}{T} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ x + \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{4n\pi x}{T} \right) \right]_0^T \\
 &= \frac{1}{2} \left[ T + \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}(4n\pi) - 0 - \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}(0) \right] \\
 &= \frac{1}{2} T = \frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

■

## Séries de Fourier

Analisaremos agora às séries trigonométricas da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{2n\pi x}{T} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{2n\pi x}{T} \right) \quad (3.5)$$

Na qual observamos que todas as infinitas parcelas são periódicas de período  $T$ . No conjunto de valores para as quais a série (3.5) converge ela define uma função periódica  $f$  de período  $T$ . Dizemos então que a série (3.5) é a **série de Fourier para  $f$**  e escrevemos:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \quad (3.6)$$

Onde  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{Z}_+^*$ , são chamados coeficientes de Fourier.

### Determinação dos coeficientes de Fourier:

Dada uma função periódica de período  $[T]$  nosso objetivo é determinar os coeficientes de Fourier, para esta função em particular.

**Determinação de  $a_0$ :** Integramos os membros de (3.6) sobre o intervalo  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) dx &= \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0x) + b_n \sin(nw_0x) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} x \Big|_0^T + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{nw_0} \sin(nw_0x) \right) \Big|_0^T - \left[ \frac{b_n}{nw_0} \cos(nw_0x) \right] \Big|_0^T \\ &= \frac{a_0 T}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{nw_0} [\sin(nw_0T)] - \frac{b_n}{nw_0} [\cos(nw_0T) - 1] \\ &= \frac{a_0 T}{2} \end{aligned}$$

Uma vez que  $\sin(2n\pi) = 0$  e  $\cos(2n\pi) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Assim o coeficiente  $a_0$  é dado por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \quad (3.7)$$

**Determinação de  $a_n$ :** Multiplicando ambos os membros de (3.6) por  $\cos(mw_0x)$  e integrando sobre o intervalo  $[0, T]$

$$\int_0^T f(x) \cos(mw_0x) dx = \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} \cos(mw_0x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0x) \cos(mw_0x) + b_n \sin(nw_0x) \cos(mw_0x) \right] dx$$

$$= \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos(mw_0x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_0^T \cos(nw_0x) \cos(mw_0x) dx + b_n \int_0^T \sin(nw_0x) \cos(mw_0x) dx \right]$$

Por (3.4) a segunda integral do somatório é nula. Pela equação (3.2) a segunda integral do somatório é nula para  $m \neq n$  e vale  $\frac{T}{2}$  para  $m = n$ .

Assim temos:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \cos(nw_0x) dx &= \frac{a_0}{2nw_0} [\sin(nw_0x)]_0^T + a_n \frac{T}{2} \\ &= \frac{a_0}{2nw_0} [\sin(nw_0T)] + a_n \frac{T}{2} = a_n \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Daí, } \int_0^T f(x) \cos(nw_0x) dx = a_n \frac{T}{2} = \frac{a_0}{2nw_0} [\sin(nw_0T)] + a_n \frac{T}{2} = a_n \frac{T}{2}$$

$$\text{então } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(nw_0x) dx. \quad (3.8)$$

**Determinação de  $b_n$ :** Multiplicamos ambos os membros de (3.6) por  $\sin(mw_0x)$  e integramos sobre o intervalo  $[0, T]$ .

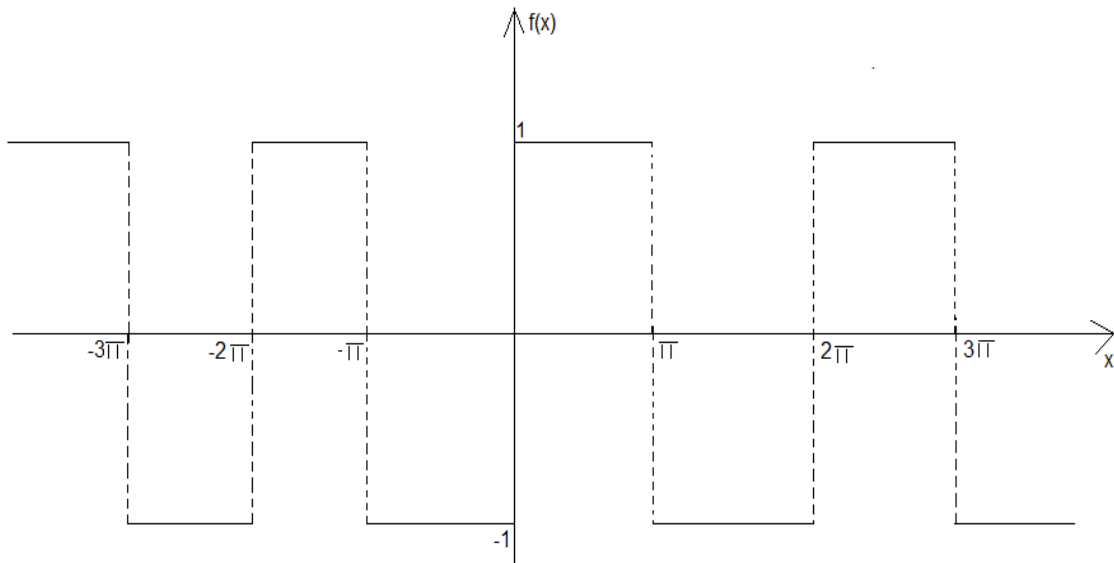
De maneira análoga, temos:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(nw_0x) dx \quad (3.9)$$

As equações (3.7), (3.8) e (3.9), são chamadas fórmulas de Euler-Fourier e se destinam ao cálculo dos coeficientes de Fourier da série (3.6) para uma dada função  $f$  periódica de período  $T$ .

### Exemplos de Séries de Fourier

**Exemplo:** Determine a representação em série de Fourier da onda quadrada mostrada na figura abaixo:



Temos  $T = 2\pi$  e  $w_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ . Sua forma analítica pode ser dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -\pi \leq x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x < \pi \end{cases} , f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} dx \right] = - \frac{1}{\pi} x \Big|_0^{\pi}$$

$$a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] \\ &= - \frac{1}{n\pi} [\text{sen}(nx)]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [\text{sen}(nx)]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{-\pi}^0 \text{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \sin(nx)$$

Podemos reescrever da forma:

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim,

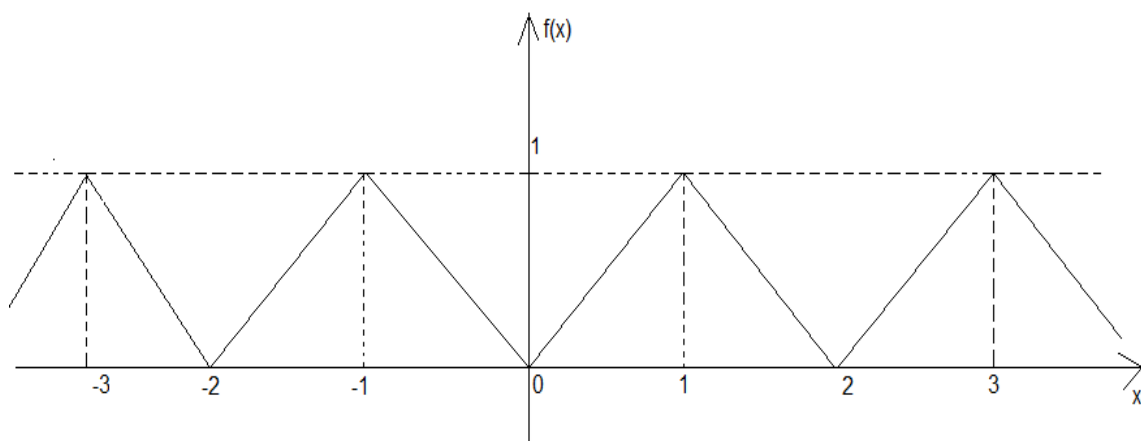
$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots$$

Ou ainda

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)x]$$

◇

**Exemplo:** Determine a representação em série de Fourier da onda triangular mostrada na figura abaixo:



### 3.2. INTRODUÇÃO

---

Temos  $T = 2$ ,  $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} -x & , -1 \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \end{cases} , \quad f(x+2) = f(x)$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = 1$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx &= \int_{-1}^0 -x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\ a_n &= - \left[ \frac{x}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \right] \Big|_{-1}^0 + \left[ \frac{x}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 -x \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) = 0 \end{aligned}$$

Então:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

Ou ondas,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] \cos(n\pi x)$$

Como

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$



### 3.2. INTRODUÇÃO

---

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi x) - \dots$$

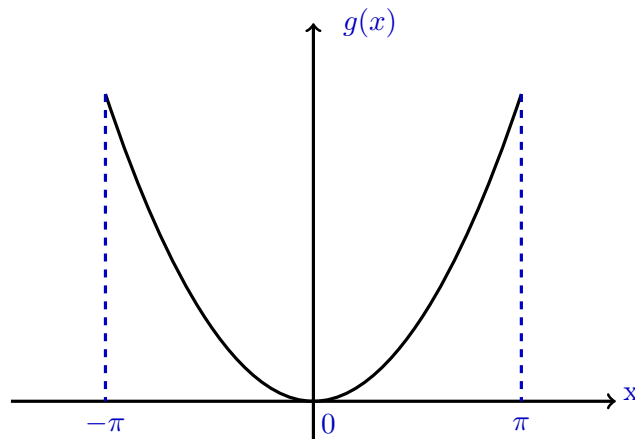
Ou ainda:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)\pi x]$$

◇

**Cálculo do valor**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Consideremos a seguinte função  $g(x) = x^2$ , definida em  $-\pi < x \leq \pi$ . Calculando os coeficientes de Fourier, temos:



Como  $g(x)$  é par,  $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

### 3.2. INTRODUÇÃO

---

Portanto, a série de Fourier associada a  $g(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$

Fazendo  $x = \pi$  temos:

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n \\ \frac{2}{3}\pi^2 &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2}\end{aligned}$$

daí por fim chegamos na equação:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

provando assim a convergência da soma dos inversos dos quadrados de números naturais.

# Capítulo 4

## Apêndice

Aqui apresentaremos definições e teoremas necessários aos resultados encontrados nos capítulos anteriores, a fim de subsidiar as demonstrações apresentadas ao longo deste trabalho.

### 4.1 Polinômios

Um polinômio real (ou simplesmente polinômio) é uma expressão do tipo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Em que a letra  $x$  indica uma variável e os valores  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , são números reais. Quando  $a_n \neq 0$ , como na expressão acima, dizemos que o grau de  $p(x)$  é  $n$ , e  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  são denominados de coeficientes do polinômio, onde destaca-se com denominação especial o termo  $a_n$  que é chamado coeficiente líder.

**Observação:** Dado um polinômio  $p(x)$ , denominamos que  $p(x)$  é nulo quando  $a_\alpha = 0$ , para todo  $0 \leq \alpha \leq n$ , sendo  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Podemos somar, multiplicar e dividir polinômios da maneira usual, como exemplificaremos a seguir.

**Exemplo:** Considere os polinômios

$$p(x) = x^5 - 4x^3 - \frac{1}{3} \text{ e } q(x) = x^3 - 1$$

A soma de  $p(x)$  e  $q(x)$  será:

$$(p + q)(x) = \left(x^5 - 4x^3 - \frac{1}{3}\right) + (x^3 - 1) = x^5 - 3x^3 - \frac{4}{3}$$

O produto será:

$$(p \cdot q)(x) = \left(x^5 - 4x^3 - \frac{1}{3}\right) \cdot (x^3 - 1) = x^8 - 4x^6 - x^5 + \frac{11}{3}x^3 + \frac{1}{3}$$

◇

A divisão de dois polinômios é bastante similar à feita para números inteiros. Dividir um polinômio  $p(x)$  por outro  $q(x)$  é conseguir polinômios  $g(x)$  e  $r(x)$  tais que  $p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ , e no qual  $r(x)$  é o polinômio nulo ou um polinômio de grau menor que o de  $q(x)$ .

**Exemplo:** Ao dividirmos o polinômio  $x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$  pelo polinômio  $x^3 - 3$ , teremos:

$$x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x^3 - 3) \cdot (x^2 + x + 1) + (2x + 5)$$

Sendo que o termo  $2x + 5$  é o resto da divisão. Sempre é possível dividir-se dois polinômios e conseguir um resto que seja 0 (zero) ou de grau menor do que o polinômio pelo qual se está dividindo. Dizemos que um polinômio  $q$  divide um polinômio  $p$  se o resto da divisão de  $p$  por  $q$  for o polinômio nulo.  $\diamond$

**Exemplo:** Ao dividirmos  $x^5 + 4x^3 + x^2 - 5x + 5$  por  $x^2 + 5$ , temos:  $q(x) = (x^3 - x + 1)$ , note que podemos reescrever:

$$x^5 + 4x^3 + x^2 - 5x + 5 = (x^2 + 5) \cdot (x^3 - x + 1)$$

$\diamond$

**Teorema 4.1.** *O quociente e o resto da divisão de um polinômio  $D(x)$  por um polinômio  $d(x)$  (não identicamente nulo) existem e são únicos.*

**Demonstração:** Começamos com a unicidade. Suponhamos que existam dois pares de polinômios  $(q_1, r_1)$  e  $(q_2, r_2)$  satisfazendo a definição de divisão de  $D$  por  $d$ . Isto é:

$$\begin{aligned} D &= dq_1 + r_1 \\ D &= dq_2 + r_2 \end{aligned}$$

Temos:

$$dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2$$

e

$$d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

A identidade ocorre somente quando os polinômios em ambos os lados são identicamente nulos. Portanto, temos necessariamente,  $q_1 = q_2$  e  $r_1 = r_2$ .

Para a demonstração da existência, empregaremos um processo algorítmico através do qual reduziremos sucessivamente o grau do dividendo até que ele se torne menor que o divisor e a divisão se torne imediata. Note que, se  $D$  tem grau menor que  $d$ , então certamente  $D$  pode ser dividido por  $d$ , já que  $q = 0$  e  $r = D$  cumprem as condições  $\text{grau}(r) < \text{grau}(d)$  e  $D = dq + r$ .

Suponhamos, então, que  $D$  tenha grau  $n$  e  $d$  tenha grau  $m$ . Se  $m > n$ , não há nada a fazer. O quociente da divisão é  $q = 0$  e o resto é  $r = D$ , caso contrário, consideremos os termos  $a_0 = x^n$  e  $b_m = x^m$ , e  $d$ , respectivamente. Seja  $r_1$  o polinômio definido por

$$r_1(x) = D(x) - (a_n/b_m) \cdot x^{n-m}d(x)$$

Note que  $r_1$  é obtido subtraindo de  $D$  o resultado da multiplicação de  $d$  pelo quociente dos termos de mais alto grau de  $D$  e  $d$ ;  $r_1$  é chamado de primeiro resto parcial no processo de divisão, por motivos que se tornarão claros a seguir.

Observe que:

$$\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot d(x)$$

É um polinômio de grau  $n$  cujo termo de mais alto grau é igual ao termo de mais alto grau  $a_n x^n$  de  $D$ . Logo  $r_1$  tem grau no máximo igual a  $n - 1$ . Não sabemos ainda se  $r_1$  pode ser dividido por  $d$ ; isto é, se existem polinômios  $q_1$  e  $r$  (com  $\text{grau}(r) < \text{grau}(d)$ ) tais que  $r_1 = q_1 d + r$ . Mas, se tais polinômios existem, então  $D$  também pode ser dividido por  $d$ , já que teremos:

$$\begin{aligned} D(x) &= (a_n/b_m) x^{n-m} d(x) + r_1(x) \\ &= (a_n/b_m) x^{n-m} d(x) + q_1(x) d(x) + r(x) \\ &= ((a_n/b_m) x^{n-m} + q_1(x)) d(x) + r(x) \end{aligned}$$

Isto é, o resto é o mesmo que na divisão de  $r_1$  por  $d$ , enquanto o quociente é obtido somando ao polinômio  $q$ , cujo grau é no máximo  $n - m - 1$ , o termo:

$$\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Após um número finito de passos, obteremos um resto parcial  $r_k$  de grau menos que  $m$ , para o qual a divisão é possível e imediata: O quociente é  $q_k = 0$  o resto é  $r = r_k$ . Retornando sobre nossos passos, concluímos que cada resto parcial pode ser dividido por  $d$ . O resto da divisão original é igual ao último resto parcial  $r_k$  e o quociente é formado colecionando os termos obtidos em cada passo.

Assim, temos uma prova de que é possível dividir  $D$  por  $d$  e, simultaneamente, um processo para executar a divisão em um número finito de passos. Todo processo apresentado acima é trabalhando com polinômios complexos, no entanto, se todos os coeficientes de  $D$  e  $d$  são reais, então todos os coeficientes gerados no processo são obtidos através de operações envolvendo somente com números reais e são, portanto, reais. Logo, o quociente e o resto da divisão de um polinômio real por outro são também polinômios reais. ■

## 4.2 Integração por Partes

A integração possui propriedades bastante boas com relação à soma de funções e ao produto de uma função por escalar. No que diz respeito ao produto de funções, a relação entre a derivada de um produto de suas funções e as derivadas de cada parcela não é tão direta, mas, mesmo assim, temos uma fórmula para calcular essa derivada do produto (dada na Seção 5.3.4). Usaremos essa fórmula para deduzir outra envolvendo integrais, que será de grande valia em muitos casos (essa técnica é chamada de integração por partes).

Começemos recordando a regra da derivação de um produto de funções. Dada duas funções deriváveis  $f$  e  $g$ , sabemos que o produto  $fg$  também será derivável e valerá a relação:

$$(f.g)'(x) = g(x).f'(x) + f(x).g'(x), \quad \forall x \in A$$

Reescrevendo, teremos

$$g(x).f'(x) = (f(x).g(x))' - f(x).g'(x)$$

Calculando-se as integrais de ambos os lados dessa igualdade, segue que

$$\begin{aligned} \int g(x).f'(x) dx &= \int [(f(x).g(x))' - f(x).g'(x)] dx \\ &= \int (f(x).g(x))' dx - \int f(x).g'(x) dx \\ &= f(x).g(x) - \int f(x).g'(x) dx \end{aligned}$$

## 4.2. INTEGRAÇÃO POR PARTES

---

(observe: usamos que uma primitiva de  $(f(x) \cdot g(x))'$  é  $f(x) \cdot g(x)$ ). Com isso, temos a regra da integração por partes:

$$(*) \quad \int g(x) \cdot f'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

A utilização dessa regra se dará a partir da seguinte ideia: Suponha que gostaríamos de calcular a integral de uma função que é o produto de duas funções podendo ser escrita como  $g(x) \cdot f'(x)$  e que a integral  $\int f(x) \cdot g'(x) dx$  seja mais fácil de ser calculada. Se tivermos isso, podemos usar a regra acima e reduzir o problema a um cálculo mais simples. A melhor maneira de se convencer da utilidade dessa regra é por meio de exemplos.

**Exemplo:** Vamos calcular  $\int x e^x dx$ . Não temos ideia de uma primitiva de  $h(x) = x e^x$ , diretamente, e, também, não é possível calcular tal integral a partir das técnicas vistas até a seção anterior. Vemos, no entanto, que  $x e^x$  é um produto de duas funções simples dadas por  $h_1(x) = x$  e  $h_2(x) = e^x$ , das quais conhecemos tanto as suas derivadas quanto as suas primitivas. Essa é uma situação em que a integração por partes pode dar certo. A questão de se escolher qual das funções irá fazer o papel de  $f'$  e qual o de  $g$  na relação  $(*)$  ficará mais fácil a partir de certa prática na sua utilização. Uma dica geral é escolher como função  $g$  aquela cuja derivada  $g'$  seja mais simples que  $g$ . No caso, podemos escolher  $g(x) = x$  e  $f'(x) = e^x$ . É claro, também, que devemos escolher como  $f'$  uma das funções para a qual conhecemos suas primitivas. É o caso de nossa escolha.

$$g(x) = x \rightarrow g'(x) = 1 \text{ e } f'(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x$$

Com isso, teremos (usando  $(*)$ ):

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \\ &= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\int x e^x dx = e^x (x - 1) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

◇

## 4.3 Integrais Duplas

### Introdução

Consideremos uma função de duas variáveis  $f(x, y)$  e suponhamos que a derivada parcial em relação a  $x$ , seja  $f_x(x, y) = 6xy$ .

Mantendo  $y$  como constante e integrando essa derivada parcial em relação a  $x$ , obtemos a função  $f(x, y)$ :

$$\int f_x(x, y) dx = \int 6xy dx = 3x^2y + c(y)$$

Assim

$$f(x, y) = 3x^2y + c(y)$$

A integral calculada é chamada integral parcial em relação a  $x$ . A constante de integração  $c(y)$  é função de  $y$ , pois  $y$  é mantido constante na integração parcial em relação a  $x$ . Caso quiséssemos calcular a integral definida de  $f_x(x, y)$ , com limites de integração entre 0 e  $2y$ , teríamos:

$$\int_0^{2y} f_x(x, y) dx = \int_0^{2y} 6xy dx = [3x^2y]_0^{2y} = 3(2y)^2y - 0 = 12y^3$$

Analogamente, se em uma função  $f(x, y)$  conhecêssemos a derivada parcial em relação a  $y$ ,  $f_y(x, y) = 2x + y$  o cálculo de  $f(x, y)$  seria feito pela integral parcial em relação a  $y$ , ou entre

$$f(x, y) = \int f_y(x, y) dy = \int (2x + y) dy = 2xy + \frac{y^2}{2} + c(x)$$

Em que  $c(x)$  é uma constante que depende de  $x$ . Caso estivéssemos calculando a integral parcial definida, em relação a  $y$ , entre os limites 1 e  $x$ , teríamos:

$$\int_1^x (2x + y) dy = \left[ 2xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^x = 2x(x) + \frac{x^2}{2} - \left( 2x \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$$



## 4.4 Integral Dupla

Consideremos uma função  $f(x, y)$  não negativa, definida no domínio  $D$  constituído retângulo dados pela inequações  $a \leq x \leq b$  e  $c \leq y \leq d$  (Figura 4.1). Ao calcularmos a integral parcial (em relação a  $y$ )  $A(x)$ , entre  $c$  e  $d$ , estaremos mantendo  $x$  constante. Assim,  $A(x)$  representará a área da secção do gráfico da função, perpendicular ao eixo  $x$ , num ponto genérico entre  $a$  e  $b$ . Isto é,  $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  (Figura 4.2).

O produto  $A(x)dx$  representa o volume do sólido de área  $A(x)$  e espessura  $dx$ . Assim, a integral de  $A(x)$  em relação a  $x$  representará o volume do sólido sob o gráfico de  $f(x, y)$ , acima do domínio  $D$ . A esse volume damos o nome de integral dupla de  $f(x, y)$  no domínio  $D$ . Dessa forma, indicando por  $V$  o volume do referido sólido, teremos

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Simbolizando a integral dupla por

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Poderíamos também ter calculado a área de uma secção perpendicular ao eixo  $y$ ,  $B(y)$  da seguinte forma

$$B(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

E em seguida calculado o volume do sólido sob o gráfico da função e acima do domínio  $D$  por

$$V = \int_c^d B(y) dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

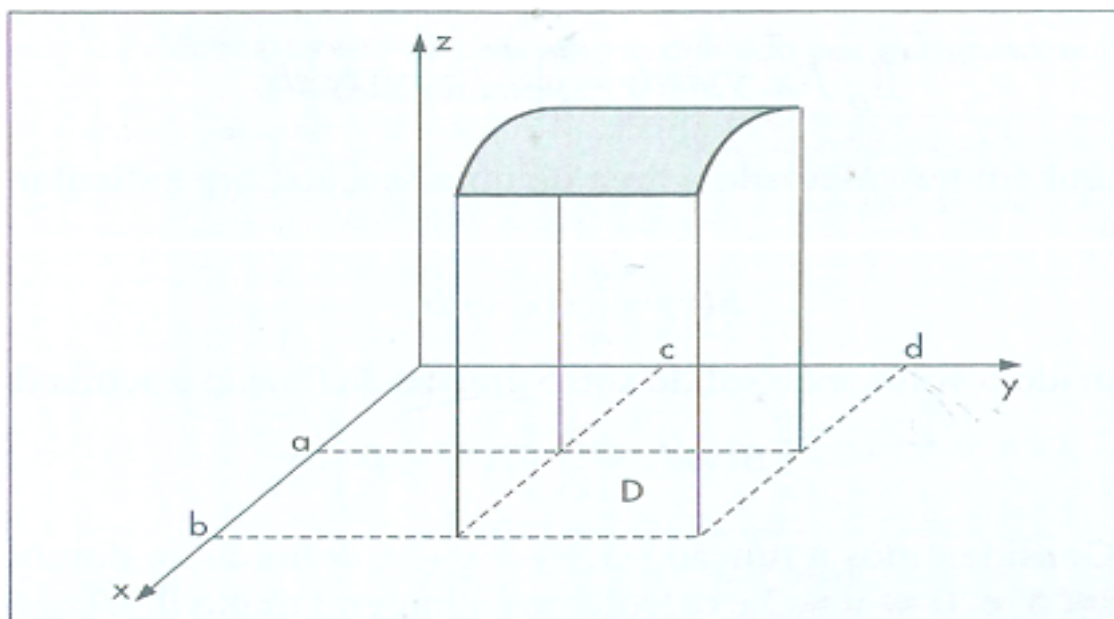


Figura 4.1: Função definida no domínio  $D$

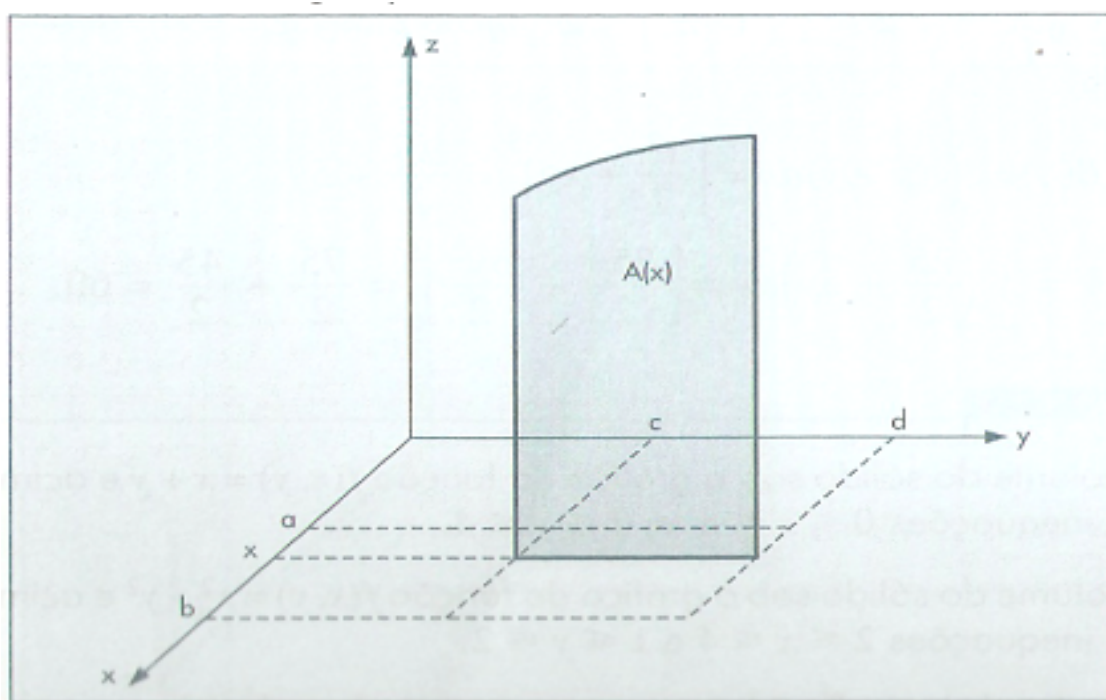


Figura 4.2: Integral Parcial  $A(x)$

**Exemplo:** Consideremos a função  $f(x, y) = x + y$ , definida no domínio  $D$  dado pelas inequações  $0 \leq x \leq 5$  e  $0 \leq y \leq 3$  e calculemos a integral dupla  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , ou seja, o volume  $V$  do sólido sob o gráfico da função e acima de  $D$ .

a) Primeiro modo

$$A(x) = \int_0^3 (x + y) dy = \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^3 = 3x + \frac{9}{2}$$

$$V = \int_0^5 \left( 3x + \frac{9}{2} \right) dx = \left[ \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2}x \right]_0^5 = \frac{75}{2} + \frac{45}{2} = 60$$

b) Segundo modo

$$B(y) = \int_0^5 (x + y) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^5 = \frac{25}{2} + 5y$$

$$V = \int_0^3 \left( \frac{25}{2} + 5y \right) dy = \left[ \frac{25y}{2} + \frac{5y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{75}{2} + \frac{45}{2} = 60$$

◇

## 4.5 Séries de Números Reais

Neste tópico faremos uma abordagem com relação as séries de números reais, seguida de exemplos, bem como uma demonstração de que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , é convergente.

**Definição 4.1.** *Seja  $(a_n)$  uma seqüência infinita. A soma infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$  é chamada **Série Numérica Infinita** de termo geral  $a_n$ . Se somarmos os  $n$  primeiros termos desta série, teremos o que chamamos de **soma parcial***

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

**Exemplo:**

- (1) A sequência numérica  $(1, 2, 6, 24, 120, \dots)$  fornece a série  $1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n!$  de termo geral  $a_n = n!$
- (2) A sequência numérica  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$  fornece a série  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , de termo geral, conhecido como **Série harmônica**.

◇

**Definição 4.2.** Dizemos que um número real  $S$  é a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , ou que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **converge** para  $S$  quando  $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = S$ . Neste caso, escrevemos  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Quando o  $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n$  não existe, dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **diverge**.

**Teorema 4.2** (Critério geral da comparação).

Seja  $0 \leq a_n \leq b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- i) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  é uma série convergente então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série convergente.
- ii) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série divergente então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  é uma série divergente.

**Demonstração:**

- i) Sejam as sucessões das somas parciais:

$$S_n = a_1 + \dots + a_n \text{ e } t_n = b_1 + \dots + b_n$$

Como  $0 \leq a_n \leq b_n$ , tem-se  $S_n \leq t_n$ . Ora sendo  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  uma série convergente,  $t_n$  é uma sucessão majorada; conseqüentemente a sucessão  $S_n$  também é uma sucessão majorada. Concluindo-se que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série convergente.

- ii) Tendo presente que sendo A, B proposições,  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$  tem-se de imediato ii) de i). ■

**Analizando a convergência da série**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

A série à analisar tem a mesma natureza que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ . Ora se  $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ ;  $n \in \mathbb{N}$  em que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  é uma série de Mengoli convergente. Do critério geral de comparação tem-se então que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.

## 4.6 A função zeta de Riemann

A função zeta de Riemann  $\zeta(s)$  é definida, para  $s > 1$  real, por

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Nossas estimativas para  $H_n$ , implicam que a série para  $\zeta(1)$  diverge, mas ela converge para qualquer real  $s > 1$ . A função zeta tem uma continuação canônica no plano complexo inteiro (com um pólo simples em  $s = 1$ ), que pode ser construída usando-se expansão em série de potências. A função complexa resultante é da maior importância para a teoria dos números primos. Mencionemos aqui três conexões diversas:

A notável identidade devia a Euler

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

É uma consequência simples da expansão em série geométrica

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

O lugar dos zeros complexos da função zeta é o assunto da “hipótese de Riemann”: Uma das mais famosas e importantes conjecturas não-resolvidas em toda a matemática. Ela afirma que todos os zeros não-triviais  $s \in \mathbb{C}$  da função zeta satisfazem

$$\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$$

A função zeta se anula em todos os inteiros negativos pares, os quais são referidos como “zeros triviais”.

Recentemente, *Jeff Lagarias* mostrou que, surpreendentemente, a hipótese de Riemann equivale à seguinte assertiva elementar: para todo  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n)$$

Em que, novamente,  $H_n$  é o  $n$ -ésimo número harmônico, com igualdade apenas para  $n = 1$ .

Sabe-se há muito que  $\zeta(s)$  é um múltiplo racional de  $\pi^s$  e, portanto, irracional, se  $s$  é um inteiro par  $s \geq 2$ . Aqui apresentamos uma prova digna d’O Livro de que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , uma famosa identidade, devida a Euler, de 1734. Em contraste, a irracionalidade de  $\zeta(3)$  foi provada por Roger Apéry somente em 1979.

Apesar de esforços consideráveis, o quadro para  $\zeta(s)$  é bastante incompleto quanto aos outros valores ímpares,  $s = 2t + 1 \geq 5$ . A última notícia matemática sobre isso, um artigo de Rivoal, implica que infinitos valores  $\zeta(2t + 1)$  são irracionais.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Apresentamos aqui o famoso problema de Basileia demonstrado por Leonhard Euler, provando assim que tal problema é trata-se de uma série convergente, muito embora Euler utilizasse definições de fatoração de polinômios que existem controvérsias que tal artifício não teria validade, pois sabemos que os polinômios não se definem com frações algébricas. O que tentamos aqui foi mostrar que um estudante ao ter domínio dos conhecimentos básicos pré-requisitos hora já mencionado aqui neste trabalho, poderá ter uma aprendizagem significativa a partir do momento que o professor trabalhar a História da Matemática como recurso pedagógico, orientando também o para o fato do contexto histórico no qual Euler estava inserido.

Alguns outros aspectos são de extrema relevância neste trabalho, tais como:

- A demonstração de Euler é válida plenamente.
- A soma de racionais pode gerar irracionais.

Diante do exposto a demonstração do capítulo 1 nos coloca na posição de estarmos sempre pesquisando questionando e sobre tudo questionando acerca desta ciência tão fascinante que é a Matemática, bem como estudar esta área do conhecimento é sobretudo questionar-se sempre diante dos resultados e acima de tudo desenvolver métodos eficientes, eficazes e modernos, contudo disponibilizando assim um leque de métodos de resolução de problemas, de mesma foram aqui apresentados ao longo desta pesquisa acerca do famoso problema de Basileia nos capítulos 2 e 3.

# Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras Histórias*, 1<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. (Coleção do Professor de Matemática)
- [2] LIMA, E; Carvalho, P; Wagner. E; Morgado. A. *A Matemática do Ensino Médio*. 9<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006, v.1. (Coleção do Professor de Matemática)
- [3] LIMA, E; Carvalho, P; Wagner. E; Morgado. A. *A Matemática do Ensino Médio*. 6<sup>a</sup> .ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006, v.3. (Coleção do Professor de Matemática) Mathematics, Boston, Mass-London, Pitman, (1980).
- [4] LIMA, E; Carvalho, P; Wagner. E; Morgado. A. *A Matemática do Ensino Médio*. 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2010, v.4. (Coleção do Professor de Matemática)
- [5] DOLCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 8<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atual 2005, v.9.
- [6] OLIVEIRA, KrerleyIrraciel Martins; Fernández, Adan José Corcho. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. 2<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006, v.1. (Coleção Olimpíada de Matemática)
- [7] GUIDORIZZI, H. *Curso de Cálculo*. 5<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro-RJ: Ed LTC, 2006, v.3.
- [8] IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 5<sup>a</sup> ed São Paulo: Ed Atual.
- [9] AIGNER, M.; ZIEGLER, Gunter M; KARL H. Hofmann-Proofs from the book-Springer (2009).
- [10] ÁVILA, G. *Revista Matemática Universitária*, Rio de Janeiro-RJ: SBM, n°42, p. 9-12, 2007.
- [11] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*, Campinas, SP: Ed. Da Unicamp, 2004.