



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# Sobre o número $\pi$ †

por

**Marcelo Rodrigues Nunes Dantas**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2013  
João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

D192s Dantas, Marcelo Rodrigues Nunes.  
Sobre o número  $\pi$  / Marcelo Rodrigues Nunes Dantas.--  
João Pessoa, 2013.  
64f. : il.  
Orientador: Napoleón Caro Tuesta  
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Número  $\pi$ . 3. Propriedades fundamentais.  
4. Irrracionalidade. 5. Transcendência. 6. Cronologia.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Sobre o número $\pi$

por

**Marcelo Rodrigues Nunes Dantas**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Teoria dos números.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB**

---

**Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE**

**Março/2013**

# Agradecimentos

A Deus por me mostrar os caminhos da luz e conceder sabedoria em todos os momentos que precisei.

A Ercílio Soares Dantas, meu pai, mesmo não estando mais entre nós, tem participação ativa em toda minha vida e a Maria Irani Rodrigues Nunes Dantas, minha mãe, por todo empenho, por ser símbolo de tudo que há de mais sublime, por todo amor. Mãe, esse trabalho é mais seu do que meu.

A Talita Helen Araújo de Almeida, minha esposa, e Marcelo Rodrigues Nunes Dantas Filho, por suas existências, pois ambos são motivos de meu máximo empenho na conclusão desse trabalho. A vida é bem melhor com vocês.

A Lenimar Nunes de Andrade, primo, padrinho e ídolo. Sempre foi fonte de inspiração em todos os momentos de minha vida.

A Marcílio Rodrigues Nunes Dantas, meu irmão, por toda parceria e bons momentos.

A todos os professores e colegas de curso pelo crescimento intelectual proporcionado e às coordenações, local e geral, do PROFMAT pelo excelente projeto que deu novo rumo à minha vida. Em especial ao professor Elon Lages Lima, por toda bondade em me ouvir na hora em que precisei. Sem sua ajuda não teria conseguido.

A Napoleón Caro Tuesta, meu orientador, por toda contribuição intelectual e pelas horas de empenho em busca de me mostrar os melhores caminhos da pesquisa. Minhas expectativas foram alcançadas e superadas por seu excelente apoio.

Aos amigos Pedro Júnior, Fernando Viana, Edson Filho, Francisco Lima e Cícero Demétrio, pelas verdadeiras amizades cultivadas graças ao advento da matemática em nossas vidas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

# Dedicatória

*À minha mãe, Maria Irani Rodrigues  
Nunes Dantas. Por tudo.*

# Resumo

Por mais de 2500 anos, muitos dos grandes matemáticos se interessaram na natureza e nos mistérios do fascinante número  $\pi$ , mentes brilhantes como Arquimedes, Euler, Gauss, Abel, Jacobi, Weierstrass, entre outros. Neste trabalho, estudaremos algumas das propriedades fundamentais que caracterizam o número  $\pi$ . Iniciamos nosso trabalho, provando que a razão entre o comprimento de uma circunferência arbitrária e seu diâmetro é constante. Para isto, usamos a completude dos números reais. Tal constante é precisamente o número  $\pi$ . O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da irracionalidade de  $\pi$ . Apresentamos três provas, a clássica, devida a Lambert, e duas provas mais modernas de Cartwright e Ivan Niven. Além de ser irracional, o número  $\pi$  é transcendente, isto é, não existe um polinômio não nulo com coeficientes racionais que tenha  $\pi$  como raiz. Tal fato foi demonstrado inicialmente por Lindemann e, como consequência, o problema clássico da quadratura do círculo não tem solução. No capítulo 3, apresentamos, sem prova, um resultado mais geral, o celebrado Teorema de Lindemann-Weierstrass que tem como corolário, a transcendência de  $\pi$ . Finalmente, no capítulo 4, a cronologia, curiosidades, aproximações e séries sobre  $\pi$  são estudadas.

**Palavras-chave:**  $\pi$ , irracionalidade, transcendência, cronologia.

# Abstract

For more than 2500 years, many of the great mathematicians interested in the nature and the mysteries of fascinating number  $\pi$ , wonderful minds such that Archimedes, Euler, Gauss, Abel, Jacobi, Weierstrass, among others. In this work we will study some of the fundamental properties that characterize the number  $\pi$ . We begin our work, proving that the ratio between the length of an arbitrary circumference and its diameter is constant. For this, we use the completeness of the real numbers. This constant is precisely the number  $\pi$ . The chapter 2 is dedicated to the study of the irrationality of  $\pi$ . We present three proofs, a classical proof, due to Lambert, and two modern proofs due to Cartwright and Ivan Niven. In addition to be irrational, the number  $\pi$  is transcendental, that is, there is not a non zero polynomial in one variable with rational coefficients that has  $\pi$  as root. This fact was initially proved by Lindemann and as a consequence, the classical problem of squaring the circle has no solution. In the chapter 3 we present, without proof, a more general result, the celebrated Lindemann-Weierstrass theorem, which has a corollary, the transcendence of  $\pi$ . Finally, in the chapter 4, chronology, curiosities, approximations and series on  $\pi$  are studied. **Key words** :  $\pi$ , **irrationality, transcendence, chronology.**

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>x</b>
<b>1 Definição e existência do número <math>\pi</math></b>	<b>1</b>
1.1 A definição de comprimento de arco . . . . .	1
1.2 A existência de $\pi$ . . . . .	4
1.3 Cálculo do comprimento do arco usando limites . . . . .	8
1.4 Teorema da adição para comprimento de arco . . . . .	11
1.5 Aproximando a área de um setor circular por defeito . . . . .	13
1.6 Aproximando a área do setor circular por excesso . . . . .	15
<b>2 Demonstrações da irracionalidade de <math>\pi</math></b>	<b>17</b>
2.1 Números naturais . . . . .	17
2.2 Conjuntos enumeráveis . . . . .	18
2.3 Prova de Ivan Niven . . . . .	21
2.4 Prova de Cartwright . . . . .	26
2.5 A prova de Lambert . . . . .	30
<b>3 Transcendência de <math>\pi</math></b>	<b>36</b>
3.1 Números algébricos . . . . .	36
3.2 A Quadratura do Círculo . . . . .	38
3.3 Teorema de Lindemann - Weierstrass . . . . .	39
<b>4 Cronologia e curiosidades sobre <math>\pi</math></b>	<b>40</b>
4.1 O período geométrico . . . . .	40
4.1.1 Polígonos inscritos com $n$ e $2n$ lados . . . . .	42
4.2 O Período Clássico . . . . .	43
4.2.1 Série de Leibniz . . . . .	43
4.2.2 Série de Euler . . . . .	44
4.2.3 Série de Machin . . . . .	45
4.2.4 Outras Fórmulas envolvendo $\pi$ . . . . .	46
4.3 O período moderno . . . . .	47
4.4 Aproximações de $\pi$ usando probabilidade geométrica . . . . .	49

---

4.4.1	Agulhas de Buffon . . . . .	49
4.4.2	Método de Monte Carlo . . . . .	51
4.5	Curiosidades . . . . .	51
4.5.1	Mnemônicos . . . . .	51
4.5.2	Diferença Ínfima . . . . .	52
4.5.3	Quem é maior: $e^\pi$ ou $\pi^e$ ? . . . . .	52
4.5.4	Questões em aberto . . . . .	53

# Introdução

Por mais de 2500 anos, o número  $\pi$  tem ocupado uma posição central na história da matemática. Muitos dos grandes matemáticos se interessaram na natureza e os mistérios do fascinante número  $\pi$  : Arquimedes e os matemáticos da antiga Grécia calcularam várias aproximações para o cálculo da área do círculo. Os matemáticos do Renascimento acharam aplicações na arte e arquitetura. Euler e seus inúmeros trabalhos. Gauss, *princeps mathematicorum*, especialista em ciclotomia, isto é, na divisão do círculo em partes iguais ou a construção de polígonos regulares ou, analiticamente, achar as raízes  $n$ -ésimas da unidade e que muitas vezes esteve à frente de seu tempo. Abel e Jacobi, criadores dos fundamentos da teoria das funções elípticas. Hermite, cuja prova da transcendência do número  $e$  inspirou a prova da transcendência de  $\pi$  por Lindemann e sua posterior generalização por Weierstrass com o celebrado Teorema de Lindemann-Weierstrass. E Ramanujan, cuja inesperada fórmula ainda desperta o interesse dos especialistas na atualidade. O objetivo de nosso trabalho é apresentar algumas das propriedades básicas do número  $\pi$ . Para isto, dividimos a dissertação em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, usamos a completude dos números reais, para definir o comprimento de uma circunferência e, mais geralmente, o comprimento de arco. Mostramos que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é sempre constante, isto é, independe da circunferência. Tal constante é precisamente  $\pi$ . Tal fato é bem conhecido, mas, poucas vezes demonstrado nos textos. Faremos uma prova elementar com ajuda da geometria. Usando fatos sobre enumerabilidade, é possível provar que existem números irracionais. Uma das primeiras características é que  $\pi$  é irracional. A primeira prova deste fato foi obra do matemático francês Johann Henrich Lambert em 1777.

No segundo capítulo, apresentamos três provas da irracionalidade de  $\pi$  que incluem a de Lambert, Mary Cartwright e uma prova mais moderna do teorista Ivan Niven. Um dos problemas clássicos da antiguidade foi a chamada *quadratura do círculo*, consistindo em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado. Em 1882, Ferdinand Lindemann provou que  $\pi$  é um número transcendente, isto é, não existe um polinômio com coeficientes racionais não todos nulos dos quais  $\pi$  seja uma raiz. Como resultado disto o problema da quadratura é impossível.

---

No capítulo 3, apresentamos as noções de números algébricos e demonstramos que são enumeráveis. Os números complexos, que não são algébricos, são chamados transcendentos. Portanto, o conjunto dos transcendentos é não enumerável e em particular, é não vazio. Apresentamos o celebrado Teorema de Lindemann-Weierstrass sem prova, dado o caráter técnico da prova, mas usamos ele para provar como corolário que os números  $e$  e  $\pi$  são transcendentos.

Finalmente no capítulo 4, apresentamos uma breve história sobre  $\pi$ , algumas fórmulas e séries que permitem calculá-lo, assim como aproximações usando probabilidade geométrica. O trabalho acaba com algumas curiosidades sobre este número maravilhoso, que juntamente com os números  $e$ ;  $i$ ;  $1$ ;  $0$  são, ao dizer de Euler, os mais importantes da matemática e que ele os juntou na sua famosa fórmula:  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . Fazendo menção ao filme indicado ao OSCAR, resumimos nosso trabalho como *The Life of  $\pi$* .

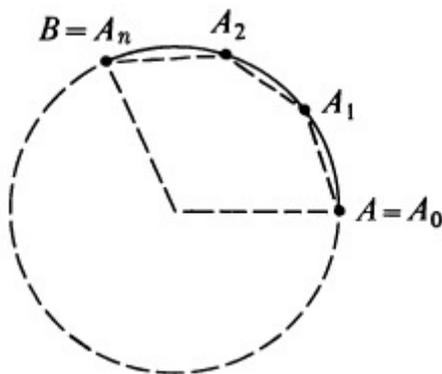
# Capítulo 1

## Definição e existência do número $\pi$

Neste primeiro capítulo, usaremos a completude dos números reais para mostrar a existência do número  $\pi$ .

### 1.1 A definição de comprimento de arco

Considere um arco  $\widehat{AB}$  de um círculo  $C$ :



Tomemos uma sequência de pontos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  sobre o arco, tais que  $A_0 = A$  e  $A_n = B$ , e para cada par de pontos consecutivos  $A_{i-1}, A_i$ , consideremos o segmento  $\overline{A_{i-1}A_i}$ . A união desses segmentos de reta gera uma poligonal pontilhada e a soma de seus comprimentos é denotada por  $p_n$ , ou seja,

$$p_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n = \sum_{i=1}^n \overline{A_{i-1}A_i},$$

onde  $\overline{A_{i-1}A_i}$  denota o comprimento do segmento  $\overline{A_{i-1}A_i}$ .

## 1.1. A DEFINIÇÃO DE COMPRIMENTO DE ARCO

---

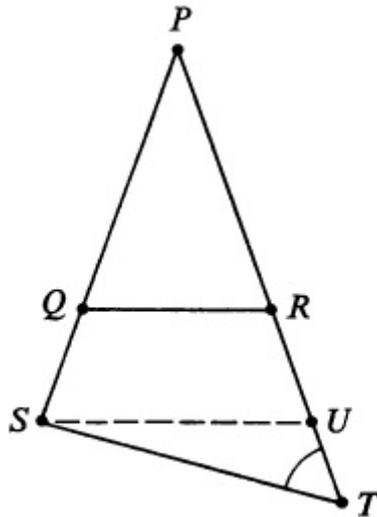
Seja  $P$  o conjunto formado por todos os números  $p_n$  que são comprimentos de linhas pontilhadas inscritas em  $\widehat{AB}$ , como acima, ou seja,

$$P = \left\{ p_n \mid p_n = \sum_{i=1}^n A_{i-1}A_i \right\}$$

Notemos que  $P \neq \emptyset$ , pois, por exemplo, o comprimento do segmento  $\overline{AB}$  é um elemento de  $P$ .

Afirmamos que o conjunto  $P$  é limitado superiormente. Consequentemente, terá supremo. Para justificarmos essa afirmação, precisaremos do seguinte:

**Lema 1.1.1** *Seja  $\triangle PQR$  um triângulo isósceles, de base  $\overline{QR}$ . Consideremos os pontos  $S$ ,  $U$  e  $T$  (como na figura) de modo que  $\overline{QR} \parallel \overline{SU}$ . Então  $ST > QR$ .*



**Prova:** Observemos que o triângulo  $\triangle PQR$  é semelhante ao triângulo  $\triangle PSU$ . Logo

$$\frac{SU}{QR} = \frac{PS}{QP} > 1$$

e, portanto,

$$SU > QR$$

Além disso, o ângulo  $\widehat{QRP}$  é agudo, pois é base de um triângulo isósceles. Assim, o ângulo  $\widehat{QRU}$  é obtuso e o ângulo  $\widehat{RUS}$  agudo. Então, o ângulo  $\widehat{SUT}$  é obtuso e o

## 1.1. A DEFINIÇÃO DE COMPRIMENTO DE ARCO

---

ângulo  $\widehat{STU}$  é agudo. Mas, sabemos que, num triângulo, o lado de maior medida é oposto ao maior ângulo. Portanto,

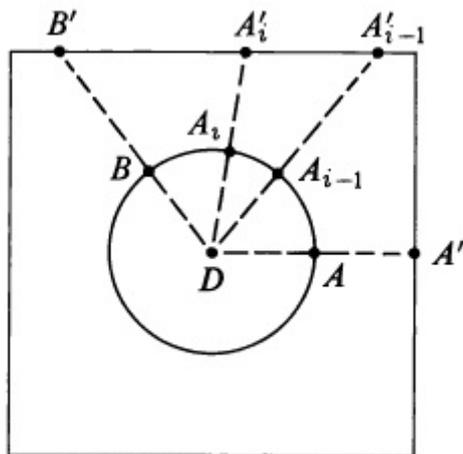
$$ST > QR.$$

■

Agora, provemos a afirmação anterior.

**Teorema 1.1.1** *O conjunto  $P$  é limitado superiormente.*

**Prova:** Tomemos um quadrado que contenha a circunferência  $C$  em sua totalidade, como na figura abaixo. Consideremos os pontos  $A'_i$  sobre o quadrado, que são obtidos a partir dos prolongamentos dos respectivos segmentos  $\overline{DA_i}$ .



Agora, utilizando o Lema 1.1.1, vemos que  $A_{i-1}A_i < A'_{i-1}A'_i$ . Logo,

$$p_n = \sum_{i=1}^n A_{i-1}A_i < \sum_{i=1}^n A'_{i-1}A'_i,$$

mas

$$\sum_{i=1}^n A'_{i-1}A'_i \leq q,$$

onde  $q$  é o perímetro do quadrado. Assim,  $p_n \leq q$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto prova que o conjunto  $P$  é limitado superiormente.

■

**Observação:** Pelo axioma da completude dos números reais o conjunto  $P$  possui supremo que denotaremos por  $p$ . Isto nos permite dar a seguinte definição:

**Definição 1** Definimos o **comprimento** do arco  $AB$  como sendo o supremo do conjunto  $P$ , isto é,

$$\ell(\widehat{AB}) := p = \sup P$$

**Observação:** Para definirmos o comprimento da circunferência  $C$ , procedemos de modo análogo ao caso anterior. Para isto, consideremos o polígono inscrito de vértices

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A_0.$$

Consideremos  $p_n$  a soma dos comprimentos das linhas pontilhadas inscritas, isto é,

$$p_n = \sum_{i=1}^n A_{i-1}A_i,$$

Seja  $P$  o conjunto de todos os comprimentos  $p_n$ . Prova-se, como acima, que  $P \neq \emptyset$  e que  $P$  é limitado superiormente. Pelo axioma da completude dos números reais, existe  $p = \sup P$ . Isto nos permite nos dar a seguinte definição:

**Definição 2** Definimos o comprimento da circunferência  $C$  por

$$p = \ell(C) := \sup P$$

## 1.2 A existência de $\pi$

Nesta seção, provaremos a existência do número  $\pi$ . Mostraremos que a razão entre o comprimento de qualquer circunferência e seu diâmetro é constante. Essa razão será denotada por  $\pi$ . Antes disso, precisaremos de alguns resultados:

Seja  $P$  um conjunto não-vazio e limitado superiormente tal que  $P \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  e seja  $k \in \mathbb{R}^+$ . Consideremos o seguinte conjunto:

$$kP := \{kp \mid p \in P\}$$

Por exemplo, se

$$P = [0, 1] \text{ e } k = 3$$

então,

$$3P = [0, 3].$$

Observemos que se  $j \in \mathbb{R}^+$ , então

$$j(kP) = (jk)P.$$

**Lema 1.2.1** *Se  $b$  é uma cota superior de  $P$ , então  $kb$  é uma cota superior de  $kP$ .*

**Prova:** *Se  $b$  é uma cota superior de  $P$ , então*

$$p \leq b \text{ para todo } p \in P,$$

*e como  $k > 0$ , então  $kb \leq kp$  para todo  $p \in P$ .*

*Portanto,  $kb$  é uma cota superior de  $kP$ .* ■

Notemos que o Lema anterior mostra que  $kP$  é limitado superiormente

**Lema 1.2.2** *Se  $c$  é uma cota superior de  $kP$ , então  $c/k$  é uma cota superior de  $P$ .*

**Prova:** *Se  $c$  é uma cota superior de  $kP$ , então*

$$kp \leq c, \text{ para todo } p \in P.$$

*Como  $k > 0$ , temos que*

$$p \leq \frac{c}{k}, \text{ para todo } p \in P,$$

*o que garante que  $\frac{c}{k}$  é uma cota superior de  $P$ .* ■

Como  $kP \neq \emptyset$  (pois  $P \neq \emptyset$ ) e  $kP$  é limitado superiormente, o axioma da completude dos números reais garante a existência de  $\sup(kP)$ . Mais ainda, temos a seguinte relação:

**Lema 1.2.3**  $\sup(kP) = k\sup(P)$  para todo  $k \geq 0$

**Prova:** *Seja  $b$  o supremo de  $P$ . Então,  $b$  é cota superior de  $P$ . Pelo Lema 1.2.1,  $kb$  é cota superior de  $kP$ . Afirmamos que  $kb$  é o supremo de  $kP$ . De fato, suponhamos, por absurdo, que  $kP$  tem cota superior  $c$  tal que*

$$c < kb.$$

*Do lema 1.2.2, temos que  $c/k$  é uma cota superior de  $P$  que seria menor que  $b$ , o que é uma contradição, pois  $b$  é a “menor” das cotas superiores de  $P$ .* ■

Agora estamos prontos para provar que a razão entre o comprimento e o diâmetro de toda circunferência é constante.

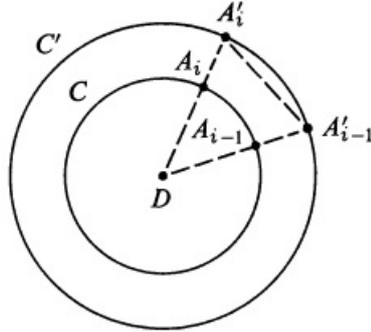
## 1.2. A EXISTÊNCIA DE $\pi$

---

**Teorema 1.2.1 (existência de  $\pi$ )** *Sejam  $C$  e  $C'$  dois círculos de raios  $r$  e  $r'$  e comprimentos  $p$  e  $p'$ , então,*

$$\frac{p}{2r} = \frac{p'}{2r'}.$$

**Prova:** *Suponhamos, sem perda de generalidade, que os círculos são concêntricos de centro  $D$  e que  $r' > r$ , como na figura a seguir:*



*Consideremos uma seqüência de pontos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A_0$  sobre o círculo  $C$ . Para cada  $0 \leq i \leq n$ , seja  $A'_i$  o ponto de  $C'$  obtido a partir do prolongamento do segmento  $\overline{DA_i}$ . Assim, obtemos uma seqüência de pontos  $A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_n = A'_0$  sobre o círculo  $C'$ . Logo, os triângulos*

$$\triangle DA_{i-1}A_i \sim \triangle DA'_{i-1}A'_i.$$

*são semelhantes. Portanto,*

$$\frac{A'_{i-1}A'_i}{A_{i-1}A_i} = \frac{r'}{r}$$

*Agora, se os perímetros dos polígonos, inscritos em  $C$  e  $C'$ , formados pelos segmentos  $A_{i-1}A_i$  e  $A'_{i-1}A'_i$  são denotados por  $p_n$  e  $p'_n$ , temos que*

$$p'_n = \sum_{i=1}^n A'_{i-1}A'_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r'}{r}\right) (A_{i-1}A_i) = \frac{r'}{r} \sum_{i=1}^n (A_{i-1}A_i) = \frac{r'}{r} p_n.$$

*Assim,*

$$p'_n = \frac{r'}{r} p_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

*Observemos que os pontos  $A'_i$  foram obtidos a partir dos pontos  $A_i$ , mas o processo é reversível, isto é, podemos considerar primeiro uma seqüência de pontos*

1.2. A EXISTÊNCIA DE  $\pi$

---

$A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_n = A'_0$  sobre  $C'$  e obter os pontos  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A_0$  sobre  $C$  como intersecções dos segmentos  $DA'_i$  com o círculo  $C$ .

Pela Definição 2,

$$p = \sup P = \sup \left\{ p_n \mid p_n = \sum_{i=1}^n A_{i-1}A_i \right\}$$

e

$$p' = \sup P' = \sup \left\{ p'_n \mid p'_n = \sum_{i=1}^n A'_{i-1}A'_i \right\}$$

Da expressão (1.1) e do lema 1.2.3 (fazendo  $k = \frac{r'}{r}$ ), temos que

$$P' = \frac{r'}{r} \cdot P.$$

Portanto

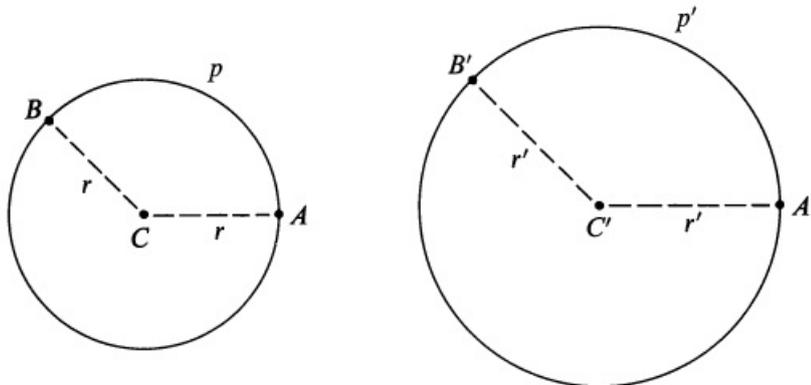
$$\sup P' = \frac{r'}{r} \sup P, \quad \text{ou seja, } \frac{p'}{r'} = \frac{p}{r}.$$

Dividindo os dois membros da equação por 2, temos nosso enunciado. ■

Outro teorema análogo ao anterior pode ser provado para arcos de circunferência.

**Teorema 1.2.2** *Sejam  $C$  e  $C'$  dois círculos de raio  $r$  e  $r'$ , respectivamente. Sejam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  arcos de  $C$  e  $C'$ , respectivamente, que possuem a mesma medida em graus. Se  $p$  e  $p'$  são os comprimentos dos arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$ , então*

$$\frac{p}{r} = \frac{p'}{r'}$$



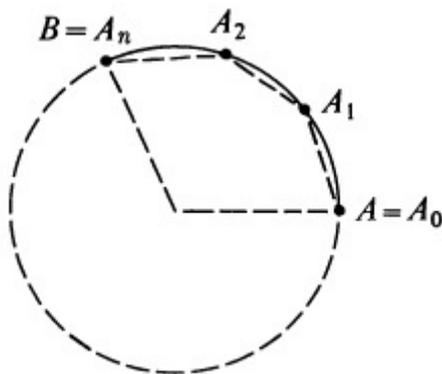
**Observações:**

- (1) Esta razão é conhecida como **medida em radianos** do  $\angle BCA$ . O teorema diz que a medida em radianos depende somente do ângulo, ou que a medida em graus do arco, é independente do raio do círculo. Se  $\theta$  denota a medida em radianos do ângulo  $\angle BCA$ , temos que  $\theta = \frac{p}{r}$ , donde  $p = \theta r$ , a clássica fórmula da trigonometria.
- (2) A demonstração desse teorema é semelhante à do teorema 1.2.1. Sem perda de generalidade podemos supor que os círculos são concêntricos e tomar sequências de pontos  $A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$  e  $A = A'_1, A'_2, \dots, A'_n = B'$  como na prova do teorema anterior.

### 1.3 Cálculo do comprimento do arco usando limites

Nesta seção, veremos que os perímetros das linhas pontilhadas inscritas de um arco se aproximam do comprimento do arco quando as medidas do lado maior das linhas pontilhadas se aproximam de zero.

Antes de tornar mais precisa nossa afirmação, consideremos  $\widehat{AB}$  um arco sobre um círculo, como na seguinte figura:



Para cada sequência de pontos  $A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$  sobre o círculo  $\widehat{AB}$ , denotemos como  $B_n$  a linha pontilhada que é a união dos segmentos  $A_{i-1}, A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e denotemos com  $m(B_n)$  o maior dos comprimentos, isto é,

$$m(B_n) := \max \{A_{i-1}, A_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

### 1.3. CÁLCULO DO COMPRIMENTO DO ARCO USANDO LIMITES

É claro que  $m(B_n) \leq p_n$ , onde  $p_n = \sum_{i=1}^n A_{i-1}, A_i$ . Como antes, seja

$$P = \left\{ p_n \mid p_n = \sum_{i=1}^n A_{i-1}, A_i \right\}. \text{ Por definição,}$$

$$\ell(\widehat{AB}) = p, \text{ onde } p = \sup P$$

Agora, precisamos nossa afirmação com o seguinte:

**Teorema 1.3.1** *Seja  $\widehat{AB}$  um arco de comprimento  $p = \sup P$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $m(B_n) < \delta$ , então  $p_n > p - \varepsilon$ .*

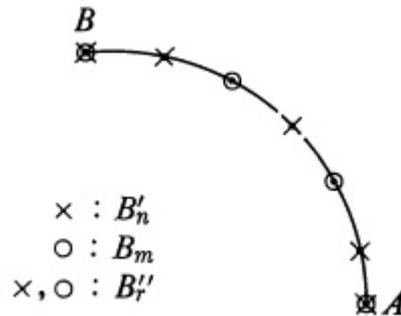
**Prova:** *Pela definição de supremo, existe  $p'_n \in P$  tal que*

$$p'_n > p - \frac{\varepsilon}{2}.$$

*Seja  $B'_n$  uma linha pontilhada inscrita no círculo e de comprimento  $p'_n$ .*

*Agora, seja  $B_m$  uma linha pontilhada inscrita num círculo qualquer de comprimento  $P_m$ . Seja  $B''_r$  a linha pontilhada obtida usando todos os vértices de  $B_m$  e de  $B'_n$ . Seja  $p_r$  o comprimento de  $B''_r$ .*

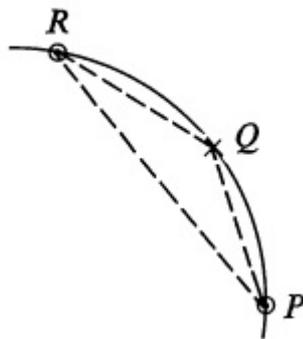
*Para ilustrar isto, na figura, os pontos marcados com cruzeiros são os vértices de  $B'_n$  e os pontos marcados com círculos, são os vértices de  $B_m$ .*



*Após repetidas aplicações da desigualdade triangular, temos que  $p''_r \geq p'_n$ , portanto  $p''_r > p - \frac{\varepsilon}{2}$ .*

*Também é imediato perceber que  $p_m \leq p''_r$ , pois cada vez que tomarmos um vértice de  $B''_r$ , proveniente apenas da marcação de  $B'_n$ , teremos uma redução na formação de  $B_m$  em relação à de  $B''_r$ . Essa "redução" fica ainda mais clara quando analisamos a figura a seguir:*

### 1.3. CÁLCULO DO COMPRIMENTO DO ARCO USANDO LIMITES



Note que  $PR < PQ + QR$  (desigualdade triangular), onde  $PR \in B_m$  e  $PQ, QR \in B'_n$ . O número de vezes em que essa redução ocorre é, no máximo,  $n - 1$  vezes para o caso em que  $B'_n$  tem marcações apenas em  $A$  e  $B$ , podendo ainda, não ocorrer vez alguma, caso  $B'_n$  tenha marcações sobre todos os pontos de  $B_m$ . Se denotamos com  $k$  o maior lado de  $B_m$ , então

$$p_r'' - p_m \leq (n - 1) \cdot k$$

Por outro lado, sabemos que  $p_r'' > p - \frac{\varepsilon}{2}$ , isto é,  $p - p_r'' < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Logo,

$$p - p_m = (p - p_r'') + (p_r'' - p_m) < \frac{\varepsilon}{2} + (n - 1)k.$$

Como desejamos concluir que  $p - p_m < \varepsilon$ , isto seguirá se  $(n - 1)k < \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja,

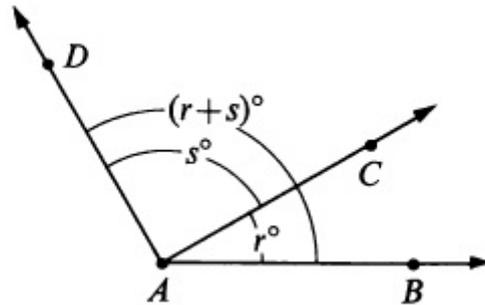
$$k < \frac{\varepsilon}{2(n - 1)}.$$

Então, nosso problema está resolvido se escolhermos  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2(n - 1)}$ , pois se  $k < \delta$ , então  $p - p_m < \varepsilon$  e como  $p_m \leq p$ , isto será equivalente a  $|p - p_m| < \varepsilon$ . ■

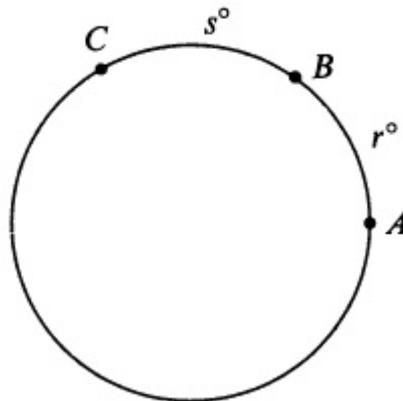
**Observação:** Em outras palavras, o teorema diz que  $p_n$  se aproxima de  $p$  quando o maior lado de  $B_n$ , se aproxima de zero. Isto, obviamente, equivale à aplicação de um limite.

## 1.4 Teorema da adição para comprimento de arco

Um dos postulados para medida angular é o postulado da adição. Este afirma que se um ponto  $C$  está no interior do ângulo  $\angle DAB$ , então  $m\angle DAB = m\angle DAC + m\angle CAB$ .



A partir disto, pode-se provar um resultado semelhante para a medida angular de arcos circulares. Isto é,  $m\widehat{ABC} = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$ . O seguinte teorema é o enunciado correspondente para comprimentos de arco.



**Teorema 1.4.1** *Sejam  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{BC}$  arcos de um mesmo círculo, com somente um ponto  $B$  em comum para ambos. Sejam  $s_1$  e  $s_2$  os comprimentos de  $AB$  e  $BC$ , e seja  $s$  o comprimento de  $ABC$ . Então,*

$$s_1 + s_2 = s$$

**Prova:** (1) *Suponhamos que  $s_1 + s_2 > s$ . Então,  $s_1 + s_2 - s > 0$ . Seja*

$$\varepsilon = s_1 + s_2 - s.$$

#### 1.4. TEOREMA DA ADIÇÃO PARA COMPRIMENTO DE ARCO

---

Consideremos uma linha pontilhada  $B_n$  inscrita em  $\widehat{AB}$  de comprimento  $p_n$ , de modo que

$$p_n > s_1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, seja  $B'_m$  uma linha pontilhada inscrita em  $\widehat{BC}$ , de comprimento  $p'_m$ , de modo que

$$p'_m > s_2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo a união dessas linhas pontilhadas, obtemos uma nova linha denotada por  $B''_{m+n}$  de comprimento  $p''_{m+n}$  tal que

$$p''_{m+n} = p_n + p'_m$$

Como  $B''_{m+n}$  está inscrito em  $\widehat{ABC}$ , segue-se que  $p''_{m+n} \leq s$ . Por outro lado, temos que

$$p''_{m+n} = p_n + p'_m > s_1 + s_2 - \varepsilon = s$$

Dessa forma,  $p''_{m+n} \leq s$  e  $p''_{m+n} > s$ , uma contradição.

(2) Agora, suponhamos que  $s_1 + s_2 < s$ . Então  $s - s_1 - s_2 > 0$ . Seja  $\varepsilon = s - s_1 - s_2$ . Assim,

$$s = s_1 + s_2 + \varepsilon.$$

Seja  $\delta$  um número positivo de modo que se  $B_n$  é uma linha inscrita em  $\widehat{AB}$  de comprimento  $p_n$  e  $m(B_n) < \delta$ , então

$$s - p_n < \varepsilon \text{ ou } p_n > s - \varepsilon.$$

Tal  $\delta$  existe pelo Teorema 1.3.1. Agora, seja  $B_n$  uma linha pontilhada inscrita em  $\widehat{ABC}$  com  $m(b_n) < \delta$  tal que  $B$  é um vértice de  $B_n$ . Seja  $p_n$  o comprimento de  $B_n$ , então  $B_n$  pode ser dividida em duas linhas pontilhadas  $B'_m, B''_r$  ( $m + r = n$ ), uma inscrita em  $\widehat{AB}$  e a outra inscrita em  $\widehat{BC}$ . Se os comprimentos dessas linhas pontilhadas são, respectivamente,  $p'_m$  e  $p''_r$ , temos que

$$p'_m + p''_r \leq p_n,$$

$$p'_m \leq s_1,$$

$$p''_r \leq s_2.$$

Portanto,

$$p_n \leq s_1 + s_2$$

## 1.5. APROXIMANDO A ÁREA DE UM SETOR CIRCULAR POR DEFEITO

---

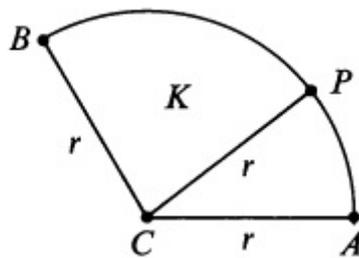
Mas,  $s_1 + s_2 = s - \varepsilon$ . Então

$$p_n \leq s - \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Consequentemente,  $s_1 + s_2 = s$ . ■

### 1.5 Aproximando a área de um setor circular por defeito

Seja  $C$  um círculo com centro  $C$  e raio  $r$  e sejam  $\widehat{AB}$  um arco de  $C$  e  $K$  a união de todos os raios  $\overline{CP}$ , onde  $p \in \widehat{AB}$ .



**Definição 3** O conjunto  $K$  é chamado setor circular de raio  $r$  e fronteira  $\widehat{AB}$ .

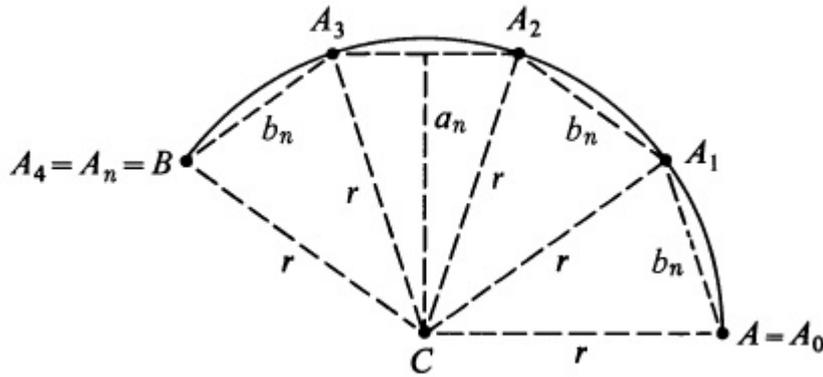
**Teorema 1.5.1** Seja  $K$  um setor circular de raio  $r$  e fronteira de comprimento  $s$ . Então, há uma sequência de regiões poligonais  $K_1, K_2, \dots$  todas contidas em  $K$  de tal modo que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha K_n = \frac{1}{2} \cdot r \cdot s,$$

onde  $\alpha K_n$  denota a área de  $K_n$ .

**Prova:** Seja  $B_n$  uma linha pontilhada inscrita no arco  $AB$  na qual todos os seus lados são congruentes de comprimento  $b_n$ :

1.5. APROXIMANDO A ÁREA DE UM SETOR CIRCULAR POR DEFEITO



Observando a figura, é fácil ver que os triângulos  $\Delta A_{n-1}A_nC$  são congruentes. Portanto, as alturas têm mesma medida, que denotamos por  $a_n$ . Assim, a área de qualquer um desses triângulos é  $\frac{1}{2}a_nb_n$ . Seja agora  $K_n$  a região poligonal que corresponde à união desses triângulos. Então

$$\alpha K_n = \frac{1}{2}na_nb_n$$

Seja  $s$  o comprimento de  $\widehat{AB}$ . Notemos que  $nb_n$  é o comprimento da linha pontilhada  $B_n$ . Logo,

$$nb_n \leq s$$

e, portanto,

$$0 \leq b_n \leq \frac{s}{n}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{n} = s \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = s \cdot 0 = 0,$$

segue-se pelo Teorema do Confronto que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Como  $m(B_n) = b_n$ , pois todos os segmentos de  $B_n$  são iguais, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = s$$

Por outro lado, examinando um triângulo do tipo  $\Delta A_{i-1}CA_i$  vemos que

$$r < a_n - \frac{b_n}{2}.$$

Portanto,

$$r - \frac{b_n}{2} < a_n < r.$$

## 1.6. APROXIMANDO A ÁREA DO SETOR CIRCULAR POR EXCESSO

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , então, pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$$

Dos resultados obtidos, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot b_n \right] = \frac{1}{2} r s,$$

o que prova nosso teorema. ■

## 1.6 Aproximando a área do setor circular por excesso

Nesta seção, mostraremos que existe uma sequência de regiões poligonais  $L_1, L_2, \dots$ , cada uma delas contendo o setor  $K$  de modo que

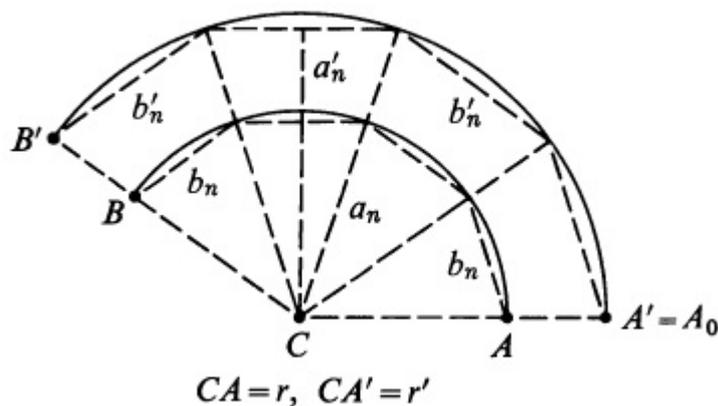
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha L_n = \frac{1}{2} r s,$$

em que  $\alpha L_n$  denota a área da região  $L_n$ .

**Teorema 1.6.1** *Sejam  $K$  um setor circular de raio  $r$ , de fronteira  $\widehat{AB}$  e comprimento  $s$ , e seja  $\varepsilon$  um número arbitrário positivo. Então, existe uma região poligonal  $L$ , contendo  $K$ , de modo que*

$$\alpha L < \frac{1}{2} r s + \varepsilon.$$

**Prova:** *Para encontrar tal região poligonal, tracemos um setor circular  $K'$  com o mesmo centro que  $K$  e raio  $r'$  de modo que  $r' > r$ .*



## 1.6. APROXIMANDO A ÁREA DO SETOR CIRCULAR POR EXCESSO

---

Na figura, a linha pontilhada no setor menor é a mesma que do teorema anterior. Já a linha inscrita no setor maior tem lados  $b'_n$  e altura  $a'_n$ . Seja  $L$  a região poligonal inscrita no setor maior. Então

$$\alpha L = \frac{n}{2} a'_n b'_n.$$

Seja  $s'$  comprimento de  $\widehat{A'B'}$ . Pelo teorema 1.3.1, temos que

$$\frac{s'}{r'} = \frac{s}{r},$$

portanto

$$s' = \frac{r' \cdot s}{r}$$

Além disso, sabendo que

$$n b'_n \leq s',$$

temos

$$n b'_n \leq \frac{r' \cdot s}{r}.$$

Por semelhança de triângulos, segue que

$$\frac{a'_n}{a_n} = \frac{r'}{r},$$

ou seja,

$$a'_n = \frac{a_n \cdot r'}{r} \text{ e } \alpha L \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n r'}{r} \cdot \frac{r' \cdot s}{r} \leq \frac{1}{2} \frac{r'^2 \cdot s}{r}$$

Até então, tudo é válido para todo  $r' > r$  e para todo  $n$ . Precisamos escolher  $r'$  de modo que  $\alpha L < \frac{1}{2} r s + \varepsilon$  e, em seguida, escolher  $n$ , tal que  $K \subset L$ . Desejamos que

$$\frac{r'^2 s}{r} < r s + 2\varepsilon, \text{ ou seja, } r'^2 < r^2 + \frac{2\varepsilon r}{s},$$

ou, equivalentemente,

$$r' < \sqrt{r^2 + 2\varepsilon r/s}.$$

Então, basta tomar  $r' > r$ , satisfazendo a condição anterior. Desde que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = r'$ , segue que  $a'_n > r$  para algum  $n$ . Escolhendo esse  $n$ , temos que  $L$  contém  $K$ . Isto prova nosso teorema. ■

# Capítulo 2

## Demonstrações da irracionalidade de $\pi$

Neste capítulo, serão mostradas três demonstrações da irracionalidade de  $\pi$ . Inicialmente, mostraremos alguns resultados sobre conjuntos enumeráveis, que provarão a existência de números irracionais. Em seguida, usando basicamente ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral faremos a três demonstrações.

### 2.1 Números naturais

Fazer referência ao conjunto dos números naturais, inevitavelmente, corresponde a associações sobre contagem. A utilização desses números é bastante antiga e mesmo sem noções formais sobre o conjunto dos números naturais, várias civilizações, ao longo do tempo, deixaram registros do uso desse conjunto.

É de Giuseppe Peano (1858 - 1932) a elaboração da teoria dos números naturais. Utilizando apenas quatro propriedades básicas, conhecidas como axiomas de Peano, é possível obter todas as afirmações verdadeiras que conhecemos sobre os números naturais.

Há duas maneiras de exibirmos tais axiomas, uma formal e outra que utiliza uma linguagem mais usual, menos rigorosa. Utilizaremos a segunda, visando tornar a leitura um pouco menos técnica:

- Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
- Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)
- Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de “número um”.

- Se um subconjunto dos números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com  $\mathbb{N}$ , isto é, contém todos os números naturais.

O último axioma é conhecido como Princípio da Indução Matemática e é muito útil na demonstração de propriedades que envolvem números naturais.

Um princípio equivalente ao princípio da Indução é o chamado Princípio da Boa Ordem, que afirma que todo conjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  possui menor elemento.

A partir do conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ , podemos construir o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  e o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ , cujos elementos são quocientes de números inteiros.

## 2.2 Conjuntos enumeráveis

Desde os primórdios, é comum encontrar os mais diversos tipos de associações entre objetos e quantidades. O significado dessas situações é, simplesmente, contar ou, ainda, enumerar.

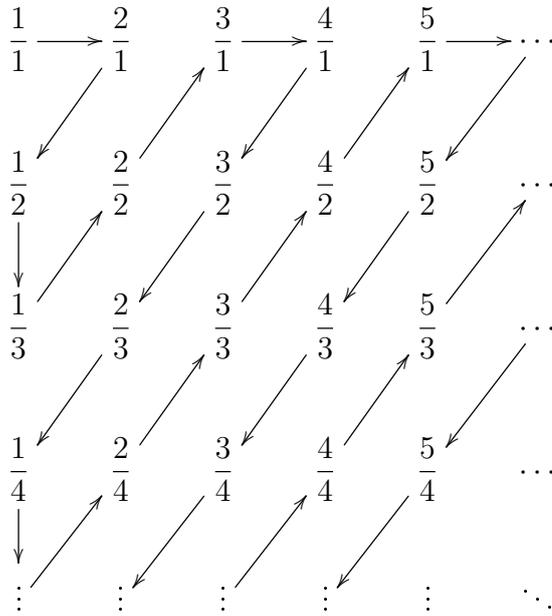
**Definição:** Um conjunto  $A$ , infinito, é dito enumerável se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com os naturais. Em outras palavras,  $A$  é enumerável se existe uma função bijetora  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Exemplos:**

- **O conjunto dos números naturais pares  $\mathbb{P}$  é enumerável:** facilmente encontramos uma bijeção. Basta tomar  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$  tal que  $f(n) = 2n$ .
- **$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável:** O diagrama abaixo ajuda a construir uma bijeção de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  com  $\mathbb{N}$ .



## 2.2. CONJUNTOS ENUMERÁVEIS



$$0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

em que cada  $a_i$  pertence ao conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Suponhamos, agora, que  $A$  é enumerável. Assim, seus elementos podem ser representados da seguinte maneira:

$$0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

$$\vdots$$

Agora, consideremos o número  $0, b_1 b_2 b_3 \dots$  em que todos os valores de  $b_i$  são diferentes de 0 e 9 e  $b_n \neq a_{nn}$ . Então,  $0, b_1 b_2 b_3 \dots$  não pertence ao conjunto  $A$ , o que é uma contradição. Portanto  $A$  é não enumerável, e, conseqüentemente,  $\mathbb{R}$  não é enumerável. ■

beginCorolario Existem números irracionais.

**Prova:** Sabemos que  $\mathbb{Q}$  é enumerável e que  $\mathbb{R}$  é não enumerável. Então  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  é um conjunto não vazio, mais ainda, pela Proposição 1,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  não é enumerável.

Mesmo sabendo da infinidade de irracionais, alguns deles se destacam. Os números  $e$  e  $\pi$  possuem inúmeras aplicações e foram estudados por grandes matemáticos ao longo da história. A seguir, faremos uma abordagem sobre  $\pi$ , provando, de três maneiras diferentes, sua irracionalidade. ■

## 2.3 Prova de Ivan Niven

Embora o número  $\pi$  tenha sido estudado desde a antiguidade, assim como o conceito de número irracional, foi apenas no século XVIII que se provou a irracionalidade de  $\pi$ . Observaremos abaixo uma demonstração moderna de sua irracionalidade, apresentada em 1947, pelo matemático canadense Ivan Niven (1915-1999). O método que Hermite (1822-1901) desenvolveu, para provar a transcendência do número  $e$ , foi a fonte de inspiração para essa demonstração.

A demonstração consiste em supor que  $\pi^2$  é racional, e mostrar que essa afirmação leva a uma contradição. Conseqüentemente  $\pi^2$  é irracional, e, portanto  $\pi$  é irracional. Antes de provar isso, mostraremos alguns resultados preliminares.

**Lema 2.3.1** Dado o polinômio  $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ , se  $0 < x < 1$ , então

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}.$$

**Prova:** Para  $0 < x < 1$ , temos que  $0 < x^n < 1$  e  $0 < (1-x)^n < 1$ .

Logo,

$$0 < x^n \cdot (1-x)^n < 1$$

Multiplicando a última desigualdade por  $\frac{1}{n!}$ , obtemos

$$0 < \frac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$$

Portanto  $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$  para todo  $0 < x < 1$ . ■

Para cada  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$  consideremos a função polinomial

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n, x \in \mathbb{R}.$$

**Lema 2.3.2**  $f_n^{(k)}(0)$  e  $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

**Prova:** Observe que  $f_n(x)$  é obtida a partir do produto  $x^n(1-x)^n$ . Portanto, seu grau varia de  $n$  a  $2n$ . Assim,  $f_n(x)$  pode ser escrita na forma

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i, \text{ com } c_i \in \mathbb{Z}$$

Para provarmos o lema proposto, será necessário analisar os possíveis valores de  $f_n^{(k)}(0)$  e  $f_n^{(k)}(1)$ . Note que

Se  $k < n$ , então  $f_n^{(k)}(0) = 0$  pois  $f_n$  é aplicada no ponto  $x = 0$ .

Se  $k > 2n$ , então  $f_n^{(k)}(0) = 0$ , pois o grau de  $f_n$  é  $2n$ .

Observe ainda que

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i = \frac{1}{n!} [c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \dots + c_{2n} x^{2n}]$$

Então para  $n \leq k \leq 2n$ , temos

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} [n!c_n + \overbrace{(n+1)!c_{n+1}x + \cdots + \frac{(2n)!}{n!} \cdot c_{2n}x^n}^{\text{termos envolvendo } x}]$$

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!} [(n+1)!c_{n+1} + \overbrace{(n+2)!c_{n+2}x + \cdots + \frac{(2n)!}{(n-1)!} \cdot c_{2n}x^{n-1}}^{\text{termos envolvendo } x}]$$

⋮

$$f_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} [(2n)!c_{2n}]$$

Assim, temos que

$$f_n^{(n)}(0) = c_n,$$

$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1)c_{n+1}$$

⋮

$$f_n^{(2n)}(0) = (2n)(2n-1) \dots (n+1)c_{2n}$$

Então, podemos concluir que  $f_n^{(k)}(0)$  é inteiro para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Além disso, é imediato perceber que

$$f_n(x) = f_n(1-x),$$

logo,

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x),$$

e, portanto,

$$f_n^{(k)}(1) = (-1)^k f_n^{(k)}(0).$$

Assim,  $f_n^{(k)}(1)$  também é um inteiro para todo  $k$ . ■

**Lema 2.3.3** Se  $a$  é qualquer número e  $\varepsilon > 0$ , então para  $n$  suficientemente grande

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

**Prova:** Para provar esse resultado, observe que, se  $n > 2a$ , então

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

### 2.3. PROVA DE IVAN NIVEN

---

Agora, seja  $n_0$  qualquer número natural com  $n_0 \geq 2a$ . Então, qualquer que seja  $\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$ , as seguintes desigualdades podem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\ \frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\ &\vdots \\ \frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} &< \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}. \end{aligned}$$

Se  $k$  é tão grande que  $\frac{a^{n_0}}{(n_0)!} < 2^k \cdot \varepsilon$ , então

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \varepsilon.$$

■

**Teorema 2.3.1**  $\pi^2$  é irracional.

**Prova:** Suponha que  $\pi^2$  é racional. Então,  $\pi^2 = \frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{Z}$  com  $q \neq 0$  e considere os seguintes polinômios:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

e

$$F(x) = q^n [\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)]$$

Do Lema 2.3.2, concluímos que  $F(0)$  e  $F(1)$  são inteiros. Agora, observe que

$$[F^{(1)}(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x)]' =$$

$$\begin{aligned} F^{(2)}(x) \operatorname{sen}(\pi x) + F^{(1)}(x) \pi \cos(\pi x) - [F^{(1)}(x) \pi \cos(\pi x) + F(x) \pi^2 (-\operatorname{sen}(\pi x))] = \\ F^{(2)}(x) \operatorname{sen}(\pi x) + F(x) \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \end{aligned}$$

Além disso,

$$F^{(2)}(x) = q^n [\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n \pi^2 f^{(2n+2)}(x)]$$

e

$$\pi^2 F(x) = q^n [\pi^{2n+2} f(x) - \pi^{2n} f^{(2)}(x) + \dots + (-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)]$$

### 2.3. PROVA DE IVAN NIVEN

---

Note que  $f^{(2n+2)}(x) = 0$ , pois o grau de  $f(x)$  é  $2n$ . Logo,

$$F^{(2)}(x) \operatorname{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x) \operatorname{sen}(\pi x) = q^n \pi^{2n} \pi^2 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) = p^n \cdot \pi^2 f(x) \operatorname{sen}(\pi x).$$

Assim,

$$p^n \pi^2 \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) f(x) dx = [F^{(1)}(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x)] \Big|_0^1$$

Portanto,

$$p^n \pi^2 \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) f(x) dx = \pi [F(1) + F(0)],$$

isto é,

$$p^n \pi \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) f(x) dx = F(1) + F(0). \quad (2.1)$$

Como já foi mostrado  $F(1) + F(0)$  é inteiro.

Agora, do Lema (2.3.1) e da expressão 2.1, temos

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{\pi p^n}{n!} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx.$$

Mas,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Logo,

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{2p^n}{n!}.$$

Do Lema 2.3.3 podemos tomar  $n$  tal que  $\frac{2p^n}{n!} < 1$ . Mas, o lado direito da expressão (2.1) é um inteiro e

$$0 < p^n \pi \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx < 1,$$

o que corresponde a uma contradição, pois não há inteiros entre 0 e 1. ■

**Corolário 2.3.1**  $\pi$  é irracional.

**Prova:** Suponha que  $\pi$  é racional, então existem  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$  de modo que  $\pi = \frac{a}{b}$  é irredutível. Então  $\pi^2 = \frac{a^2}{b^2}$  também é racional, o que contraria o teorema anterior. Logo,  $\pi$  é irracional. ■

## 2.4 Prova de Cartwright

A seguinte prova foi proposta pela matemática britânica Mary Lucy Cartwright (1900-1998). O cálculo de integrais e o raciocínio recursivo são predominantes nessa demonstração.

**Lema 2.4.1** *Dada a sequência de integrais*

$$I_n(x) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \cos(tx) dt \text{ com } x \neq 0,$$

é possível escrevê-la de maneira recursiva, obtendo

$$I_n(x) = \frac{2n(2n-1)}{x^2} I_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{x^2} I_{n-2},$$

onde  $I_0(x) = \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{x}$  e  $I_1(x) = \frac{4}{x^2} \left[ -\cos x + \frac{1}{x} \operatorname{sen} x \right]$

**Prova:** *Aplicando integração por partes, temos que*

$$I_n(x) = \frac{\overbrace{(1-t^2)^n \operatorname{sen}(xt)}^0}{x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{2nt(1-t^2)^{n-1} \operatorname{sen}(xt) dt}{x} = \frac{2n}{x} \int_{-1}^1 t(1-t^2)^{n-1} \operatorname{sen}(xt) dt$$

Aplicando, mais uma vez, integração por partes,

$$I_n = \frac{2n}{x} \cdot \overbrace{(-t) \cdot (1-t^2)^{n-1} \frac{\cos(xt)}{x}}^0 \Big|_{-1}^{-1} + \int_{-1}^1 [(1-t^2)^{n-1} - (n-1)2t^2(1-t^2)^{n-2}] \frac{\cos(xt)}{x} dt$$

$$I_n = \frac{2n}{x^2} \left[ I_{n-1} - 2(n-1) \int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{n-2} \cos(xt) dt \right] \quad (2.2)$$

Nossa intenção é escrever  $\int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{n-2} \cos(xt) dt$  de modo recursivo. Portanto, utilizaremos o seguinte artifício:

$$\int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{n-2} \cos(xt) dt = \int_{-1}^1 (1-1+t^2)(1-t^2)^{n-2} \cos(xt) dt$$

chegando à conclusão que  $\int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{n-2} \cos(xt) dt$  equivale a

$$\underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-2} \cos(xt) dt}_{I_{n-2}} - \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-1} \cos(xt) dt}_{I_{n-1}}$$

Substituindo na equação (2.2), temos

$$I_n = \frac{2n}{x^2} [I_{n-1}(2n-1) - 2(n-1)I_{n-2}]$$

e, portanto,

$$I_n = \frac{2n(2n-1)I_{n-1}}{x^2} - \frac{4n(n-1)I_{n-2}}{x^2}.$$

■

Agora, considere a função

$$J_n(x) = x^{2n+1}I_n(x).$$

Usando o Lema 2.4.1, conclui-se que

$$J_n(x) = x^{2n+1} \left[ \frac{2n(2n-1)}{x^2} I_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{x^2} I_{n-2} \right],$$

ou seja,

$$J(x) = \underbrace{x^{2n-1}I_{n-1}}_{J_{n-1}} 2n(2n-1) - \underbrace{x^{2n-3}I_{n-2}}_{J_{n-2}} x^2 4n(n-1),$$

portanto,

$$J_n(x) = 2n(2n-1)J_{n-1}(x) - 4n(n-1)x^2J_{n-2}(x), \quad (2.3)$$

onde  $J_0(x) = x^{2 \cdot 0+1}I_0$ , ou seja,

$$J_0(x) = 2 \operatorname{sen} x,$$

além disso,  $J_1(x) = x^{2 \cdot 1+1}I_1(x)$ , portanto

$$J_1(x) = -4x \cos x + \operatorname{sen} x$$

O que nos faz perceber que  $J_n(x)$  está bem definida.

■

**Lema 2.4.2** Para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$

$$J_n(x) = x^{2n+1}I_n(x) = n! [P_n(x) \operatorname{sen} x + Q_n(x) \cos x],$$

em que  $P_n(x)$  e  $Q_n(x)$  pertence a  $\mathbb{Z}[x]$  e os graus de  $P_n(x)$  e  $Q_n(x)$  são menores ou iguais a  $2n$ .

**Prova:** Para  $n = 0$ ,  $J_0(x) = 2 \operatorname{sen} x$

Para  $n = 1$ ,  $J_1(x) = 4 \operatorname{sen} x - 4x \cos x$  Agora, suponha, por hipótese de indução que

$$J_{n-2} = (n-2)! (P_{n-2} \operatorname{sen} \alpha + Q_{n-2} \cos \alpha)$$

$$J_{n-1} = (n-1)! (P_{n-1} \operatorname{sen} \alpha + Q_{n-1} \cos \alpha),$$

onde  $P_{n-1}$ ,  $Q_{n-1}$ ,  $P_{n-2}$ ,  $Q_{n-2}$  são polinômios com coeficientes inteiros e os graus de  $P_{n-1}$  e  $Q_{n-1}$  são menores que  $2(n-1)$  e os de  $P_{n-2}$  e  $Q_{n-2}$  são menores que  $2(n-2)$ . Da equação (2.3) e da hipótese de indução, concluímos que:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= 2n(2n-1)(n-1)! (P_{n-1} \operatorname{sen} \alpha + Q_{n-1} \cos \alpha) - \\ &4n(n-1)x^2(n-2)! (P_{n-2} \operatorname{sen} \alpha + Q_{n-2} \cos \alpha). \end{aligned}$$

Assim, observe que, agrupando as expressões de maneira conveniente, chegaremos à demonstração do Lema acima enunciado. De fato,

$$J_n(x) = n! \left[ [(4n-2)P_{n-1} - 4x^2P_{n-2}] \operatorname{sen} \alpha + [(4n-2)Q_{n-1} - 4x^2Q_{n-2}] \cos \alpha \right],$$

onde

$$P_n(x) = (4n-2)P_{n-1} - 4x^2P_{n-2}$$

$$Q_n(x) = (4n-2)Q_{n-1} - 4x^2Q_{n-2}$$

Portanto,  $J_n(x) = n! [P_n(x) \operatorname{sen} x + Q_n(x) \cos x]$  e a prova está finalizada. ■

**Teorema 2.4.1**  $\pi^2$  é irracional.

**Prova:** Fazendo  $x = \frac{\pi}{2}$  e supondo que  $\frac{\pi}{2}$  é racional, temos que  $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{b}$ , sendo  $a$  e  $b$  números naturais primos entre si. Do Lema 2.4.2

$$J_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n! \left( P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Logo,

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n+1}} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n! P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{então} \quad \frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) b^{2n+1}. \quad (2.4)$$

Note que

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}, \quad \text{com } a_i \in \mathbb{Z}.$$

## 2.4. PROVA DE CARTWRIGHT

---

Assim,

$$b^{2n+1}P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = b^{2n+1}P_n\left(\frac{a}{b}\right) = b^{2n+1}\left(a_0 + a_1\frac{a}{b} + \cdots + a_{2n}\frac{a^{2n}}{b^{2n}}\right)$$

e, portanto,

$$b^{2n+1}P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Mais ainda,

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq M(b-a).$$

Em nosso caso,  $I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \cos(tx)dt$ . Se  $-1 \leq t \leq 1$ , então  $0 \leq t^2 \leq 1$ . Assim temos que  $0 \leq 1-t^2 \leq 1$ . Logo, podemos concluir que

$$|(1-t^2)^n| \leq 1.$$

Também sabemos que  $|\cos(tx)| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto,

$$\left| \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \cos(xt)dt \right| \leq 1 \cdot (1 - (-1)),$$

donde

$$0 < I_n < 2.$$

Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n!} = 0$ . Dessa forma, é possível tomar  $n$ , suficientemente grande, de modo que

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1,$$

o que equivale a dizer que poderíamos encontrar algum inteiro entre 0 e 1, absurdo. Logo,  $\pi^2$  é irracional. Portanto, pelo Corolário 2.3.1, segue que  $\pi$  também é irracional. ■

## 2.5 A prova de Lambert

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um matemático de origem francesa, radicado na Alemanha. Lambert obteve a primeira prova da irracionalidade de  $\pi$ , no final do século XVIII, usando frações contínuas. Porém, seus cálculos são bastante longos, tornando a prova muito técnica. Mostraremos, a seguir, uma versão mais simplificada dessa demonstração.

Para cada  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , consideremos a função

$$f_k(x) = 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^4}{k(k+1)2!} - \frac{x^6}{k(k+1)(k+2)3!} + \dots$$

definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O seguinte Lema provará que  $f_k(x)$  está bem definida em  $\mathbb{R}$

**Lema 2.5.1**  $f_k(x)$  é convergente.

*Prova:* A demonstração consiste na aplicação direta do teste da razão para séries infinitas. Observe que

$$f_k(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n! \prod_{j=0}^{n-1} (k+j)}$$

Agora, considere

$$a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{n! \prod_{j=0}^{n-1} (k+j)}$$

assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(n+1)! \prod_{j=0}^n (k+j)}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{n! \prod_{j=0}^{n-1} (k+j)}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|(n+1)(k+n)|} = 0$$

Portanto, pelo teste da razão,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente e, conseqüentemente,  $f_k(x)$  é convergente. ■

**Lema 2.5.2** *São válidas as seguintes igualdades*

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \cos(2x)$$

e

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}$$

**Prova:** *Usando séries de potências, temos*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.6)$$

Agora, observe a expressão

$$k(k+1) \dots (k+n-1) \cdot n!$$

Para  $k = \frac{1}{2}$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \left(n - \frac{1}{2}\right) n! = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2n}{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot n! = \frac{(2n)!}{4^n}$$

e, para  $k = \frac{3}{2}$ ,

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \dots \left(n + \frac{1}{2}\right) n! = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2n \cdot (2n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot n! = \frac{(2n+1)!}{4^n}$$

Então,

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2x).$$

Analogamente, obtemos

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{\frac{(2n+1)!}{4^n}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Multiplicando e dividindo por  $2x$ , obtemos:

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = 1 + \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

■

**Lema 2.5.3** Para cada  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , temos as seguintes igualdades:

$$\frac{x^2}{k(k+1)} f_{k+2}(x) = f_{k+1}(x) - f_k(x)$$

**Prova:** Vamos expandir as expressões (2.5) e (2.6) e comparar os coeficientes de  $x^{2n}$ .

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^4}{k(k+1)2!} - \frac{x^6}{k(k+1)(k+2)3!} + \dots + \\ &\quad + \overbrace{\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}}^{(I)} + \dots \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= 1 - \frac{x^2}{k+1} + \frac{x^4}{(k+1)(k+2)2!} - \frac{x^6}{(k+1)(k+2)(k+3)3!} + \dots + \\ &\quad + \overbrace{\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(k+1)(k+2)\dots(k+n)}}^{(II)} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{k+2}(x) &= 1 - \frac{x^2}{k+2} + \frac{x^4}{(k+2)(k+3)2!} - \frac{x^6}{(k+2)(k+3)(k+4)3!} + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(k+2)(k+3)\dots(k+n+1)} + \dots \end{aligned}$$

Fazendo (II) - (I), temos

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(k+1)(k+2)\dots(k+n)} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)} = \\ &\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \left[ \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} - \frac{1}{n!k(k+1)\dots(k+n-1)} \right] = \\ &\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)} \left( \frac{k}{k+n} - 1 \right) = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(n-1)!k(k+1)(k+2)\dots(k+n)} \end{aligned}$$

É importante observar que, na expressão  $\frac{x^2}{k(k+1)}f_{k+2}(x)$ , o termo em  $x^{2n}$  não é o que se encontra na  $n$ -ésima posição, mas sim, o seu antecessor, o que nos leva a encontrar a seguinte expressão:

$$\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(n-1)!k(k+1)(k+2)\dots(k+n)},$$

o que mostra a veracidade do nosso lema. ■

**Lema 2.5.4**  $\lim_{r \rightarrow \infty} f_r(x) = 1$

*Prova:* Do Lema 2.3.3, é imediato que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 0$ . Então, existe  $k > 0$  de modo que  $\left| \frac{x^{2n}}{n!} \right| \leq k$  para todo  $n$ .

Portanto, se  $r > 1$ , segue que

$$|f_r(x) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{r^n} = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{k}{r-1}.$$

Assim,

$$\frac{-k+r-1}{r-1} \leq f_r(x) \leq \frac{k-1+r}{r-1}$$

e pelo Teorema do Confronto, temos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_r(x) = 1. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.5.1** Se  $x \neq 0$  e  $x^2$  é racional, então  $f_k(x) \neq 0$  e  $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$  é irracional para todo  $k \in \mathbb{Q}, k \neq 0, 1, 2, \dots$

*Prova:* Suponha que para algum  $k$ ,  $f_k(x) = 0$  ou  $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$  é racional. Então, é possível mostrar que  $f_k(x)$  e  $f_{k+1}(x)$  são múltiplos inteiros de uma mesma quantidade, que denotaremos por  $y$ . De fato, seja  $k \in \mathbb{Q}, k \neq 0, 1, 2, \dots$ , de modo que  $f_k(x) = 0$  e  $x = \frac{b}{a}$ . Assim, pelo Lema 2.5.3,

$$f_{k+1}(x) = \frac{x^2}{k(k+1)} = b \frac{f_{k+2}(x)}{ak(k+1)}$$

Fazendo  $y = \frac{f_{k+2}(x)}{ak(k+1)}$  temos

$$f_{k+1}(x) = by. \quad (2.9)$$

Além disso,  $f_k(x) = 0y$

Por outro lado, se  $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$  é racional, então  $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \frac{b}{a}$ , ou seja,

$$y = \frac{f_{k+1}(x)}{b} = \frac{f_k(x)}{a}$$

Assim, podemos concluir que

$$f_{k+1}(x) = by \text{ e } f_k(x) = ay,$$

como tínhamos afirmado. Note que  $y$  não pode valer zero, pois assim, teríamos  $f_{k+n}(x) = 0$ , contrariando o Lema 2.5.4.

Agora, considere  $q$  um inteiro positivo de modo que  $\frac{bq}{k}$ ,  $\frac{kq}{x^2}$ ,  $\frac{q}{x^2}$  também sejam inteiros. Primeiro, observe que é possível obter algum  $q \in \mathbb{Z}^+$  sob essas condições, lembrando que  $x^2 = \frac{b}{a}$  e  $k = \frac{m}{n}$ , queremos que  $q \left(\frac{b.n}{m}\right)$ ,  $q \left(\frac{a.m}{b.n}\right)$ ,  $q \left(\frac{a}{b}\right)$  sejam inteiros. Portanto, basta tomar  $q = b.m.n$ .

Seja

$$G_0 = f_k(x) \text{ e } G_n = \frac{q^n}{k(k+1) \dots (k+n-1)} f_{k+n}(x) \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Observe que  $G_0 = ay$ ,  $G_1 = \left(\frac{bq}{k}\right)y$ , e do Lema 2.5.3, concluímos que

$$G_{n+2} = \left(\frac{kq}{x^2} + \frac{q}{x^2}n\right) G_{n+1} - \left(\frac{q^2}{x^2}\right) G_n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.10)$$

Já mostramos que os coeficientes da expressão (2.10) são inteiros. Assim, podemos afirmar que  $G_n$  é múltiplo de  $y$  para todo  $n$ . Do Lema 2.3.3, temos que  $f_{k+n}(x) \rightarrow 1$ , além disso, pelo Lema 2.5.4, sabemos que

$$\frac{q^n}{k(k+1) \dots (k+n-1)} \rightarrow 0,$$

então  $G_n \rightarrow 0$ . Mas, afirmar que  $f_{k+n}(x) \rightarrow 1$  implica que  $G_n$  é positiva para  $n$  suficientemente grande. Porém, múltiplos inteiros de  $y$  não podem convergir para zero. Portanto,  $f_k(x) \neq 0$  e  $\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \notin \mathbb{Q}$ . ■

**Corolário 2.5.1**  $\pi^2$  é irracional

*Prova:*  $f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Portanto,  $\pi$  também é irracional. ■

**Corolário 2.5.2** Se  $x \neq 0$  é racional, então  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$  é irracional.

*Prova:* Sabendo que  $\left(\frac{x}{2}\right)^2$  é um número racional e diferente de zero, então

$$\frac{f_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}{f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Assim,  $\operatorname{tg} x$  também é irracional. ■

# Capítulo 3

## Transcendência de $\pi$

No capítulo anterior, vimos que  $\pi$  é irracional, ou seja, não pode ser escrito como quociente de dois inteiros. Além disso, veremos a seguir que  $\pi$  não é raiz de nenhum polinômio não nulo com coeficientes racionais, isto é,  $\pi$  é transcendente.

### 3.1 Números algébricos

Um número complexo  $\alpha$  é um **número algébrico** se existe um polinômio não nulo com coeficientes racionais

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ tal que } p(\alpha) = 0$$

**Exemplos:**

- É claro que todo número racional é algébrico, pois  $r$  é solução da equação  $x - r = 0$ . Mas nem todo algébrico é racional, por exemplo,  $\sqrt{2}$  é algébrico, pois é solução da equação  $x^2 - 2 = 0$ , mas  $\sqrt{2}$  não é racional.
- O número de ouro<sup>1</sup>  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é algébrico, pois é solução da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ .
- $\sin 10^\circ$  é algébrico. De fato, basta utilizar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\sin(3\theta) = 3 \sin(\theta) - 4 \sin^3(\theta).$$

Então, se fizermos  $\theta = 10^\circ$ , obtemos  $4 \sin^3(10^\circ) - 3 \sin(10^\circ) + \frac{1}{2} = 0$ . Assim, concluímos que  $\sin 10^\circ$  é solução da equação  $8x^3 - 6x + 1 = 0$ .

---

<sup>1</sup>A proporção áurea, número de ouro, número áureo ou proporção de ouro é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega  $\phi$  (PHI), em homenagem ao escultor *Phideas* (Fídias), que a teria utilizado para conceber o Parthenon, e com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618.

### 3.1. NÚMEROS ALGÉBRICOS

---

- $\sin 18^\circ$  é algébrico. Com efeito, fazendo  $\theta = 18^\circ$  temos que  $4\theta = 72^\circ$ . Logo,

$$\sin \theta = \cos 4\theta.$$

Assim,

$$\sin \theta = 2 \cos^2(2\theta) - 1,$$

donde

$$\sin \theta = 1 - 8 \sin^2 \theta + 4 \sin^4 \theta.$$

Portanto,  $\sin 18^\circ$  é solução de  $8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$ .

**Teorema 3.1.1** *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

**Prova:** *Seja  $P(x)$  um polinômio de coeficientes inteiros da forma*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0. \quad (3.1)$$

*A altura de  $P(x)$  é um número natural dado por*

$$|P| = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n$$

*O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que  $P(x) = 0$  tem exatamente  $n$  raízes complexas. Todas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Agora o número de polinômios do tipo (3.1) com uma dada altura é apenas um número finito. (Observe que é para essa afirmação que incluímos a parcela  $n$  na definição de altura). Portanto, as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito.*

■

**Corolário 3.1.1** *Existem números transcendentos.*

**Prova:** *Como  $\mathbb{R}$  é não enumerável e  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , então  $\mathbb{C}$  é um conjunto não enumerável. Desde que o conjunto dos números algébricos é enumerável, concluímos que o conjunto dos números transcendentos é não vazio. Em particular, não enumerável.*

■

**Observações:** O conjunto dos números algébricos é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ , ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- A soma de dois algébricos é algébrico.
- O produto de dois algébricos é algébrico.
- O simétrico  $-\alpha$  de um número algébrico  $\alpha$  é algébrico.

### 3.2. A QUADRATURA DO CÍRCULO

---

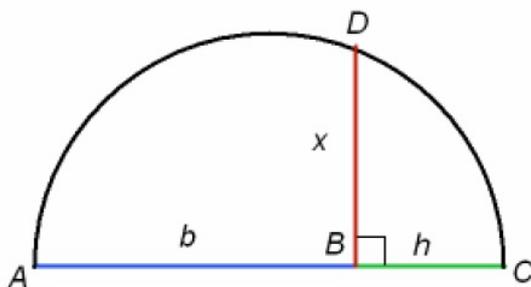
iv. O inverso  $\alpha^{-1}$  de um número algébrico  $\alpha \neq 0$  é algébrico.

A demonstração dessas afirmações podem ser encontradas no livro [3].

Como consequência da observação, podemos mostrar que  $\cos 36^\circ$  é algébrico. Com efeito, observemos que  $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ . Como  $\sin 18^\circ$  é algébrico e o conjunto dos números algébricos é um corpo, concluímos que  $\cos 36^\circ$  é algébrico.

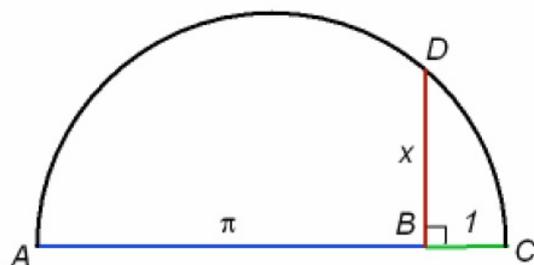
## 3.2 A Quadratura do Círculo

Os gregos sabiam construir um quadrado cuja a área fosse igual à de um polígono qualquer dado. Por exemplo, se quisermos construir um quadrado cuja a área seja igual à de um paralelogramo em que a base  $b$  e a altura  $h$  sejam conhecidas. Basta construir um quadrado de lado  $x$  que satisfaça à equação  $x^2 = b.h$ . Observado a figura seguinte, temos uma ideia bastante simples para descobrir a medida de  $x$ .



O procedimento consiste em desenharmos uma circunferência de diâmetro  $b+h$ . Por B, traçamos uma perpendicular ao diâmetro que intersecta o semicírculo no ponto D. Assim, temos o comprimento de  $x$ .

Os gregos também sabiam construir um quadrado cuja área fosse igual à de um polígono qualquer. Mas não obtiveram êxito ao tentar construir um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo de raio 1. Usando raciocínio análogo aos das áreas dos quadriláteros e baseados na figura abaixo, obtiveram a equação  $x^2 = \pi$ . Desse forma, era possível construir medidas desejadas utilizando apenas régua e compasso.



Porém, para eles, surge um grande problema: Como encontrar a medida de  $\pi$ ? Atualmente, utilizando alguns resultados de álgebra, é possível mostrar que apenas números algébricos podem ser construídos através dessa técnica. O teorema de Lindemann-Weierstrass garante que  $\pi$  é transcendente e, por isso, não pode ser encontrado através da quadratura do círculo.

### 3.3 Teorema de Lindemann - Weierstrass

O teorema de Lindemann - Weierstrass é um resultado muito útil para estabelecer a transcendência de números complexos. Ele afirma que se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são números algébricos linearmente independentes sobre o corpo dos números racionais  $\mathbb{Q}$  (visto  $\mathbb{C}$  como um  $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial) então  $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}$  tem grau de transcendência  $n$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

O teorema é chamado assim por Ferdinand Von Lindemann e Karl Weierstrass. Lindemann provou em 1882 que  $e^\alpha$  é transcendente para todo número algébrico  $\alpha \neq 0$ . Por outro lado, Weierstrass mostrou o resultado geral mais tarde em 1885.

Em particular, como 1 é algébrico e linearmente independente sobre  $\mathbb{Q}$ , então  $e^1 = e$  é transcendente.

Por outro lado, suponhamos que  $\pi$  é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ . Então  $i\pi$  também seria algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ . Pelo teorema de Lindemann- Weierstrass,  $e^{i\pi}$  seria transcendente sobre  $\mathbb{Q}$ , mas  $e^{i\pi} = -1$ , o que é uma contradição. Este argumento prova o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.1** *O número  $\pi$  é transcendente.*



# Capítulo 4

## Cronologia e curiosidades sobre $\pi$

Neste capítulo, exibiremos um pouco da história do número  $\pi$ , desde as noções intuitivas usadas em civilizações antigas, até a atualidade, em que se utilizam algoritmos sofisticados associados a super-computadores para determinar  $\pi$  com trilhões de casas decimais.

Também serão comentadas algumas curiosidades e problemas, que até hoje, envolvem  $\pi$ , e ainda estão em aberto.

### 4.1 O período geométrico

Durante muito tempo, civilizações utilizaram apenas o conhecimento geométrico para obter aproximações referentes a  $\pi$ .

Por volta de 2000 a.C., os babilônios usavam  $3\frac{1}{8} = 3,125$  como aproximação. Na mesma época, os egípcios usavam que um círculo de diâmetro 9, tinha a mesma área que um quadrado de lado 8. Para eles  $\pi \approx \frac{256}{81} = 3,1604$ . No Antigo Testamento, os hebreus usavam  $\pi \approx 3$ , como podemos destacar na seguinte passagem bíblica:

"Hirão fez também o mar de bronze que tinha dez côvados de uma barda à outra, perfeitamente redondo, e de altura 5 côvados; sua circunferência media-se com um fio de trinta côvados"(I Reis 7:23)

Arquimedes (287 a.C - 212 a.C.), um dos maiores matemáticos da antiguidade, dedicou parte de seu tempo ao cálculo de aproximações para o valor de  $\pi$ . Arquimedes inscreveu e circunscreveu hexágonos em uma mesma circunferência, tentando se aproximar de seu comprimento por falta e por excesso. Com esse raciocínio, foi obtido que o perímetro de um polígono com 96 lados, inscrito em uma circunferência de raio 1, é 6,28206. Isto corresponde à seguinte aproximação:  $\pi \approx 3,14103$ . Esse resultado foi obtido por volta de 250 anos antes de Cristo.

#### 4.1. O PERÍODO GEOMÉTRICO

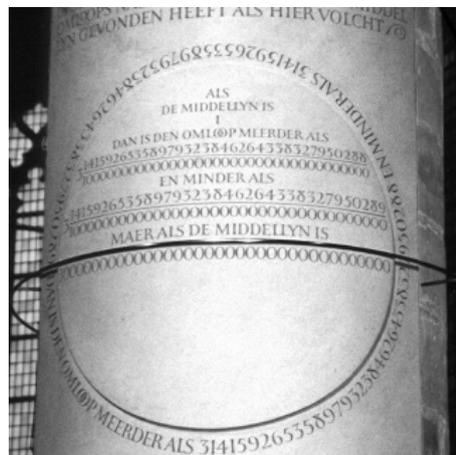
---

Durante, aproximadamente, 1800 anos, a ideia de Arquimedes foi utilizada por outros matemáticos em busca de melhores aproximações para  $\pi$ .

Na China, por volta do século V, Chung-Chih calculou  $\pi$  com 7 casas decimais corretas.

Após mil anos, Al-Kashi utilizou um polígono de  $3.2^{28}$  lados (cerca de 800 milhões de lados) e encontrou 14 casas decimais corretas para  $\pi$ .

Em 1609, Ludolph van Ceulen obteve 35 casas decimais de  $\pi$ . O cálculo envolveu um polígono com  $2^{62}$  lados, algo superior a  $16 \times 10^{18}$  lados. O que levou considerável parte de sua vida para ser concluído. Em virtude desse trabalho, na Alemanha,  $\pi$  também é conhecido como o número de Ludolph. Em seu túmulo, está registrada a aproximação obtida por ele.

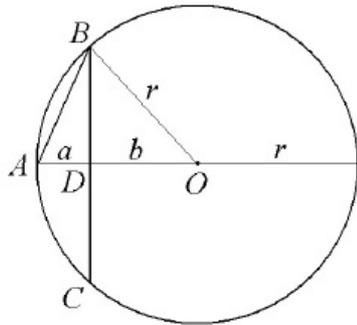


A tabela a seguir, exhibe algumas aproximações encontradas durante o período geométrico.

Nome	Ano	Casas decimais
Egípcios	2000 A.C.	1
Babilônios	2000 A.C.	1
Hebreus	550 A.C.	0
Arquimedes	250 A. C.	3
Ptolomeu	150	3
Liu Hui	263	5
Tsu Chung Chi	480	7
Al-Kashi	1429	14
Romanus	1593	15
Van Ceulen	1615	35

### 4.1.1 Polígonos inscritos com $n$ e $2n$ lados

Como foi visto no Capítulo 1, podemos pensar no comprimento da circunferência como sendo uma situação limite do perímetro de um polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência. Considerando  $n$  o maior valor possível, obtem-se melhores aproximações.



Na figura acima, consideramos uma circunferência de raio  $r = 1$  com  $\ell_n = \overline{BC}$  como sendo o lado de um polígono regular de  $n$  lados e  $\ell_{2n} = \overline{AB}$  como o lado do polígono regular de  $2n$  lados, ambos inscritos na circunferência. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABD e BDO, temos:

$$(\ell_{2n})^2 = a^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 \quad (4.1)$$

$$1 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + (1 - a)^2 \quad (4.2)$$

Da equação (4.2), obtemos

$$a = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2}$$

que substituindo em (4.1), nos fornece

$$\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\ell_n)^2}} \quad (4.3)$$

Sabemos que  $\ell_4 = \sqrt{2}$ . Substituindo na equação 4.3, obtemos:  $\ell_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ . Usando repetidas vezes na equação (4.3), decorrem os seguintes resultados:

$$\ell_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\ell_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\ell_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$$

A partir das aproximações de  $\ell_n$ , é possível obter o perímetro  $P_n$  do polígono regular de  $n$  lados, inscrito na circunferência de raio  $r = 1$ . A tabela seguir mostra alguns valores desses perímetros:

$n$	$P_n$	$n$	$P_n$
4	5,6568542494	512	6,2831458807
8	6,1229349178	1024	6,2831754505
16	6,2428903045	2048	6,2831828430
32	6,2730969810	4096	6,2831846911
64	6,2806623139	8192	6,2831851531
128	6,2825545018	16384	6,2831852686
256	6,2830276022	32768	6,2831852975

## 4.2 O Período Clássico

Com a invenção do Cálculo Diferencial e Integral, ocorre uma mudança considerável na concepções matemáticas. Consequentemente, surgem novas abordagens ao se tentar cacular o valor de  $\pi$ .

Esse foi o período das séries relacionadas ao valor de  $\pi$ . Nessa época, também foi provada sua irracionalidade e transcendência.

Em seguida, apresentamos a prova de algumas séries que envolvem o valor de  $\pi$

### 4.2.1 Série de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

**Prova:** Sabe-se que  $\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2}$ . Usando séries de potências, é imediato que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_1^{\infty} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Fazendo  $x = 1$ , então  $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

### 4.2.2 Série de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Prova:** Da expansão binomial

$$(a+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n.$$

Analogamente, uma função  $f(x)$ , com várias raízes, pode ser escrita da seguinte maneira

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n$$

Decompondo  $f(x)$ , obtemos

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) \tag{4.4}$$

Onde  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  são as raízes da equação.

Dividindo a equação (4.4) por  $r_1 r_2 r_3 \dots r_n$ , temos

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \left(1 - \frac{x}{r_2}\right) \left(1 - \frac{x}{r_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{r_n}\right) \tag{4.5}$$

mas

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Da equação (4.5), podemos concluir que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{r_1}\right) \left(1 - \frac{x^2}{r_2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{r_3}\right) \dots$$

Portanto,

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{r_1}\right) \left(1 - \frac{x^2}{r_2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{r_3}\right) \dots$$

## 4.2. O PERÍODO CLÁSSICO

---

Igualando os termos de correspondentes, obtemos os coeficientes de  $x^2$ :

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots\right)$$

Sabemos que  $\text{sen } x = 0$  para  $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Então, para  $\frac{\text{sen } x}{x} = 0$ ,  $\left(1 - \frac{\pi^2}{r_1}\right) = 0$ ,  $\frac{1 - (2\pi)^2}{r_2} = 0 \dots$

Portanto,  $r_1 = \pi^2$   $r_2 = (2\pi)^2$   $r_3 = (3\pi)^2 \dots$  Assim, concluímos que

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Em decorrência dessa série, Euler obteve mais uma coleção de fórmulas com estrutura parecida à anterior.

### 4.2.3 Série de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

**Prova:** Seja  $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ . Então

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(4x) = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Assim, obtemos

$$\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

ou seja,

$$4x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Portanto,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

Usando essa fórmula,  $\pi$  foi calculado com 100 casas decimais. Outra demonstração da fórmula de Machin pode ser feita usando-se propriedades do argumento principal de um número complexo.

#### 4.2.4 Outras Fórmulas envolvendo $\pi$

O vienense Johan Z. Dase, considerado um computador humano, fazia cálculos mentais como  $79532853 \times 93758479$  em 54 segundos. Ele multiplicava dois números de 20 algarismos em 6 minutos e dois de 100 algarismos em menos 8 h 45 min. Em 1844, utilizando a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8},$$

J.Z. Dase calculou, mentalmente, o valor de  $\pi$  com impressionantes 200 casas decimais corretas. Dase era tão hábil em cálculos mentais, que, em virtude disso, Gauss planejava tê-lo como assistente. Mas ele morreu logo depois.

Inúmeras fórmulas envolvendo  $\pi$  e séries infinitas ou combinações de arcotangentes, semelhantes às anteriores, foram obtidas usando raciocínios parecidos. Algumas delas aparecem a seguir:

- $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$
- $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdots$
- $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$
- $\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$
- $\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$
- $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$

A tabela a seguir, traz algumas aproximações obtidas, por alguns matemáticos, no período clássico.

NOME	ANO	DÍGITOS
Sharp & Halley	1699	71
Machin	1706	100
Strassnitzky & Dase	1844	200
Rutherford	1853	440
Shanks	1874	527
Ferguson	1947	808
Reitwiesner & outros (ENIAC)	1949	2.037
Genuys	1958	10.000
Shanks & Wrench	1961	100.265
Guilloud & Bouyer	1973	1.001.250

### 4.3 O período moderno

Esse período é marcado pelo advento dos computadores. Sua associação a fórmulas de rápida convergência, permitiu obter gigantescas aproximações. Atualmente, há registros da ordem de trilhões de casas decimais para  $\pi$ .

Em 1914, o matemático Srinivasa Ranamujam (1887-1920) descobriu algumas fórmulas envolvendo  $\pi$ . Abaixo temos uma delas. Encontrada em 1914 por Ranamujam, certamente, é a mais surpreendente de todas

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! [1103 + 26390n]}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Essa fórmula converge de modo que a cada parcela somada, tem-se 8 novas casas decimais corretas para  $\pi$ . Em 1985, utilizando essa expressão, Gosper obteve 17 milhões de casas decimais .

Por volta de 1988, os irmãos David e Gregory Chudnovsky descobriram uma série, do mesmo tipo da de Ramanujan:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! 13591409 + 545140134n}{(3n)! (n!)^3 640320^{3n + \frac{3}{2}}}$$

A cada termo somado, temos em média, 14 novas casas decimais corretas. Em 1994, essa fórmula permitiu escrever  $\pi$  com mais de 4 bilhões de dígitos.

Outras fórmulas dessa família foram descobertas na década de 90, incluindo uma que acrescenta 50 algarismos corretos a cada termo somado.

Em 1995, Bailey, Borwein e Plouffe descobriram uma nova família de fórmulas chamadas séries BBP, cujas convergências são bastante rápidas:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right) \frac{(-1)^n}{4^n}$$

### 4.3. O PERÍODO MODERNO

---

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \frac{1}{16^n} \quad (4.6)$$

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \frac{64}{10n-3} \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right) \frac{(-1)^n}{1024^n}$$

Para termos melhor ideia, a série (4.6), para  $n = 1$  fornece o valor 3,1333..., para  $n = 2$  obtém 3,141422466..., e, para  $n = 5$  é possível, com um computador de casa e um assistente matemático, obter milhões de casa decimais corretas em menos de um segundo.

A tabela, a seguir, mostra algumas aproximações obtidas no período moderno, inclusive a mais atual que informa cerca de 10 trilhões de casa decimais.

NOME	ANO	DÍGITOS
Miyoshi - Kanada	1981	2.000.036
Kanada - Yoshino - Tamura	1982	16.777.206
Gosper	1985	17.526.200
Bailey	Jan/1986	29.360.111
Kanada - Tamura	Out/1986	67.108.839
Kanada - Tamura	Jan/1988	201.326.551
Chudnovskys	Mai/1989	480.000.000
Kanada - Tamura	Jul/1989	536.870.898
Kanada - Tamura	Nov/1989	1.073.741.799
Chudnovskys	Ago/1991	2.260.000.000
Chudnovskys	Mai/1994	4.044.000.000
Kanada - Takahashi	Out/1995	6.442.450.938
Kanada - Takahashi	Jul/1997	51.539.600.000
Kanada - Takahashi	Set/1999	206.158.430.000
Kanada - Ushiro - Kuroda	Dez/2002	1.241.100.000.000
Daisuke Takahashi	2009	2.576.980.370.000
Fabrice Bellard	2010	2.699.999.990.000
Shigeru Kondo - Alexander Yee	Ago/2010	5.000.000.000.000
Shigeru Kondo - Alexander Yee	2011	10.000.000.000.00

Tais aproximações não possuem valor prático em problemas envolvendo  $\pi$ . Apenas 40 casas decimais seriam suficientes para determinar o perímetro de uma circunferência capaz de envolver todo o universo conhecido, com um erro inferior a um átomo de Hidrogênio.

Antes da Segunda Guerra, os motivos pelos quais alguém se interessava por aproximações gigantescas do valor de  $\pi$  se resumiam apenas ao desejo de resolver desafios, e, eventualmente, “escrever” seu nome na história da matemática.

Atualmente, além da questão de status, o cálculo de  $\pi$  testa a velocidade dos novos computadores. Uma excelente maneira de anunciar a potência de uma nova máquina, é divulgando que a mesma possibilitou a quebra do recorde de casas decimais para  $\pi$ .

Mais espantoso que o progresso dos super-computadores, é o surgimento dos algoritmos que permitem esses cálculos. A afirmação do matemático Neal Carothers traduz muito bem esse progresso:

"O cálculo dos 100 265 primeiros dígitos do PI, em 1961, precisou de aproximadamente 105 000 operações aritméticas, enquanto que o algoritmo inventado pelos irmãos Borwein em 1984 precisou de apenas 112 operações aritméticas para obter os mesmos dígitos. Com meras 8 iterações desse algoritmo ( o que envolveu 56 operações aritméticas ) eles obtiveram em poucos segundos a aproximação que consumiu 15 anos da vida de Wm. Shanks".

## 4.4 Aproximações de $\pi$ usando probabilidade geométrica

Nesse capítulo, analisamos as ideias que alguns matemáticos, ao longo dos séculos, empregaram para determinar aproximações ou séries que convergem para o valor de  $\pi$ . Técnicas geométricas, aritméticas, ferramentas de cálculo diferencial e utilização de super-computadores. Em todos os casos, trabalhamos com eventos determinísticos. Porém, surpreendentemente, também é possível fazer boas aproximações par o valor de  $\pi$  utilizando apenas conhecimentos de probabilidade, que é exatamente o que será comentado nessa seção.

### 4.4.1 Agulhas de Buffon

Em 1777, o francês, Georges Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707 – 1788) propôs o seguinte problema: Em um plano, traçamos retas paralelas, separadas, umas das outras, por uma distância constante denotada por  $d$ . Lançamos sobre o plano uma agulha de comprimento  $l$  em que  $l \leq d$ . Calcular a probabilidade que a agulha toque algumas das retas. Sabe-se que a probabilidade de ocorrer o toque é

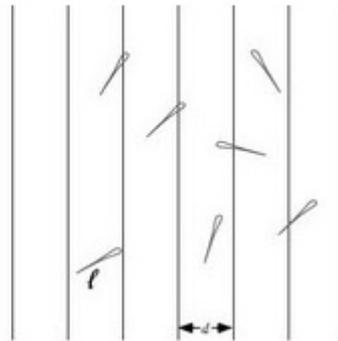
$$P = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d}.$$

Em particular, se  $d = l$ , a probabilidade será

$$P = \frac{2}{\pi}.$$

#### 4.4. APROXIMAÇÕES DE $\pi$ USANDO PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

---



Consequentemente, é possível obter resultados para  $\pi$  experimentalmente. Ou seja, se fizermos  $a$  lançamentos e, em  $b$  ocasiões, a agulha toca uma das retas, temos que  $\frac{b}{a} = \frac{2}{\pi}$ . Então, teremos a seguinte aproximação:

$$\pi \approx \frac{2a}{b}$$

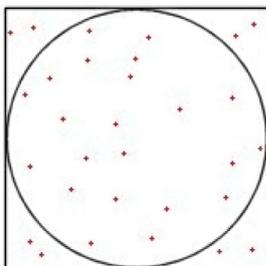
Alguns matemáticos afirmaram ter realizado vários lançamentos e baseados nas informações de cada um, temos algumas aproximações:

Experimentador	Ano	Número de lançamentos	Valor aproximado de $\pi$
Wolf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1884	1120	3,1419
Lazzarini	1901	3408	3,1415929

Todos os experimentadores obtiveram bons resultados. Porém o que obteve resultado mais surpreendente foi Mario Lazzarini. Com 3408 arremessos, obteve a estimativa de  $\frac{355}{113}$  com um erro da ordem de 0,0000003. Lazzarini realizou lançamentos de 213 agulhas de cada vez e realizou o experimento 16 vezes para obter o valor estimado. Por isso, o valor de 3048 agulhas. Mesmo tendo sido tendencioso ao aplicar o experimento repetidas vezes, Lazzarini obteve um resultado bastante expressivo, haja visto que para obter um erro da ordem de 0,0000002, usando as agulhas de Buffon, seria necessário, atirar uma agulha a cada 5 segundos, durante cerca de 3,6 milhões de anos.

### 4.4.2 Método de Monte Carlo

Uma técnica probabilística ainda mais eficiente é o método de Monte Carlo, que consiste em: traçamos uma circunferência inscrita em um quadrado de lado 2 metros, obtendo um espécie de alvo, como na figura abaixo.



Dessa maneira, temos um círculo de área  $\pi m^2$  e um quadrado de área  $4m^2$ . Portanto se lançarmos vários dardos em nosso suposto alvo, supondo que todos irão, pelo menos, dentro do quadrado, a tendência é que a razão entre a quantidade de dardos arremessados dentro do círculo e o total se aproxime do valor  $\frac{\pi}{4}$ .

O método de Monte Carlo, em concomitância com o uso de computadores, é bastante utilizado para estimar áreas de figuras irregulares.

## 4.5 Curiosidades

Além dos expressivos resultados conhecidos acerca do número  $\pi$ , há algumas curiosidades bastante peculiares inerentes a essa constante.

Provavelmente o uso do símbolo tenha sido inspirado na primeira letra da palavra  $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\iota\alpha$  (periferia).

A sequência 123456789 aparece pela primeira vez no 523551502º dígito.

A soma dos primeiros 144 dígitos de  $\pi$  é 666, e sabemos que 144 é igual a  $(6 + 6) \times (6 + 6)$ .

A sinuosidade de um rio é descrita pelo comprimento de sua curva dividido pela distância deste ponto até o oceano em linha reta. O resultado é que, em média, os rios têm uma sinuosidade de aproximadamente 3,14.

### 4.5.1 Mnemônicos

Algumas frases nos “sugerem” o valor de  $\pi$ , são as mnemônicas. Algumas delas são:

- Sou o medo e pavor constante do menino vadio (3,14159265);
- Ama a Deus e segue fielmente as lições dadas por Jesus Nazareno (3,14159265358);

- Cai a neve e novas ferrovias de marfim serão por casas trocadas (3, 14159265358).

### 4.5.2 Diferença Ínfima

Espantosamente, alguns cálculos quase impossíveis de efetuar mentalmente são muito próximos de números inteiros.

- $e^\pi - \pi = 19,999099979\dots \approx 20$
- $\cos(\ln(\pi + 20)) = -0,99999999243\dots \approx -1$
- $e^6 - \pi^5 - \pi^4 = 0,000017673\dots \approx 0$
- $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,999999999925007\dots$
- $\int_0^{2\pi} \cos(2x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right) dx \approx \frac{\pi}{8}$ ,

em que os membros da última aproximação diferem apenas após a 42ª casa decimal.

### 4.5.3 Quem é maior: $e^\pi$ ou $\pi^e$ ?

Prova: Suponha que  $\pi^e > e^\pi$ . Assim, obtemos

$$\ln \pi^e > \ln e^\pi,$$

ou seja,

$$\frac{\ln \pi}{\pi} > \frac{\ln e}{e} \tag{4.7}$$

Para avaliar a desigualdade (4.7) consideremos a função

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ com } x > 0$$

e analisemos seus intervalos de crescimento. Derivando  $f(x)$ , segue que

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Observe que para valores menores que  $e$ ,  $f'(x) > 0$ . Logo, de imediato, podemos concluir que

$$f(\pi) < f(e)$$

portanto,

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$$

O que contradiz 4.7.

#### 4.5.4 Questões em aberto

Apesar de ter sido analisado por grandes matemáticos, ao longo dos anos, ainda é possível listar alguns problemas, envolvendo  $\pi$ , que estão em aberto.

Não sabemos se  $\pi$  é um número normal, ou seja, se qualquer sucessão de algarismos aparece nas casas decimais de  $\pi$ . Mais ainda, se isso seria verdadeiro em qualquer base, não apenas na base dez. No ano 2000, foi provada a normalidade de  $\pi$  na base 2.

Também não se sabe que algarismos aparecem um número infinito de vezes na constituição de  $\pi$ .

Sem grandes dificuldades, podemos comparar  $e^\pi$  e  $\pi^e$ , porém não sabemos se esses números são transcendentos ou algébricos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Adrian, Y. E. O., The Pleasures of Pi, e and Other Interesting Numbers. World Scientific. Cambridge University (2006).
- [2] Eymard, P., Lafon, J., P., The number  $\pi$ . American Mathematical Society. USA (2004).
- [3] Figueredo, D. G., Números irracionais e transcendentos. 3ª edição. Rio de Janeiro. SBM, (2002), pág. 9-20.
- [4] Laczkovich, M., On Lambert's Proof of the Irrationality of  $\pi$  Mathematical Association of America, (1997).
- [5] Miller, S. J., An Invitation to Modern Number Theory Countable, Uncountable, Algebraic and Transcendentals. Princeton University, (2003).
- [6] Moise, E. E., Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. 3ª edição. New York. (1990), pág. 320-335.
- [7] Neri, C., Um curso de Análise Real. Rio de Janeiro. Universidade Federal do Rio de Janeiro (2006).
- [8] Niven, I., Numbers: Rational and irrational. New mathematical library. University of Oregon, (1961).
- [9] Posamentier, A. S., A biography of the world's most misterous number's. Prometheus Books, New York (2004).
- [10] Rio, R. R., El número  $\pi$ : de la Geometría al Cálculo Numérico. Madrid. Universidad Complutense de Madrid, (2006).
- [11] Spivak, M., Calculus, W. A. Benjamin 1967.