



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT



Aspectos Computacionais na Geometria da Espiral de Teodoro

por

Eduardo Manuel Gonçalves Junior

2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT



Aspectos Computacionais na Geometria da Espiral de Teodoro

por

Eduardo Manuel Gonçalves Junior

sob orientação do

Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade

Dissertação apresentada ao Corpo Docente de Pós- Graduação em Matemática do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

FEVEREIRO - 2015
João Pessoa - PB

Aspectos Computacionais na Geometria da Espiral de Teodoro

por

Eduardo Manuel Gonçalves Junior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente de Pós- Graduação em Matemática do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática, Geometria, Álgebra, Cálculo e Aritmética.

Aprovada por:

Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade
(UFPB - Presidente)

Prof. Dr. Edson de Figueirêdo Lima Junior
(UFPB - Examinador Externo)

Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira
(UFCG - Examinador Externo à Instituição)

FEVEREIRO - 2015

Agradecimentos

Quero agradecer a Deus, O Grande Arquiteto Do Universo, que me possibilitou saúde física e mental para completar essa etapa na minha existência aqui na Terra. Fico também grato a minha esposa Marcelle, por sua palavra de fortalecimento e por "segurar" nossos filhos nas horas de estudo. Meus filhos Maria Eduarda (Duda), João Manuel (JM) e Maria Sophia (Sufi), por suportarem a ausência de seu pai, em uma fase que eles tanto necessitam. Meus pais, Eduardo (*in memori*) e Severina pela educação que deram e pelos valores dados. Aos meus irmãos Edvaldo e Emanuela, pelo estímulo em fazer as provas e incentivo para prosseguir nos estudos.

A maçonaria como um todo, onde me reservo, a lembrar dos verdadeiros irmãos da loja Maçônica Imperador Dom Pedro II, da qual sou Mestre Instalado e pude através de seus ensinamentos, comportar-me como homem livre e de bons costumes. Meus queridos sobrinhos da Ordem Demolay, que suportaram minhas breves ausências e inoportunos atrasos.

Agradeço à secretaria de educação do Estado da Paraíba, em todos os níveis e escalões, por conceder-me o que determina a lei, e assim possibilitar o melhoramento deste profissional.

Agora, faço aqui o agradecimento aos funcionários da UFPB, que desde o portão até o DM de matemática, sempre fui muito bem tratado, em especial ressalto o Sr. Junior, secretário do PROFMAT.

E como não poderia ser diferente, fica aqui registrado, o sincero agradecimento aos coordenadores do PROFMAT, pelo empenho e zelo para com o curso, demonstrando de forma dinâmica e eficaz.

Aos amigos e novos irmãos da minha turma, que durante dois anos, tivemos um caloroso conviver.

Por fim, com deve ser, não só agradeço, mas venho reconhecer, o trabalho dos meus Mestres nesse curso, Napoleon, Gilmar, Manassés, Mirian, Alexandre, Elissandra, Flankin, Sérgio, Lenimar, Hinojosa e Bruno, meus caros professores meu muito obrigado, e minha total gratidão pelos conselhos, pelas conversas e competências que empregaram ao ensinar minha turma. e sem dúvida, ao meu orientador, o querido Professor Lenimar, por sua atenção e auxílio nessa tarefa que me proponho, obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Na qual o total agradecimento.

Dedicatória

A todos os que se alegram com o nosso sucesso.

Aos meus alunos, como a qualquer pessoa que se beneficie de alguma forma com o presente estudo.

Aos meus antigos professores, Os Joões, Pessoa, Bezerra e Domingos, Inês, Iolanda, Analí, Ivanzinho e meu padrinho Jurandir.

Resumo

O presente trabalho faz um estudo da espiral de Teodoro, no tocante aos aspectos geométricos da curva. De início, é feita a construção da espiral de Teodoro em duas e três dimensões. E por meio dos softwares, GeoGebra e wxMaxima, foram desenvolvidas respectivamente, as construções geométricas e os cálculos necessários. Com a posse da concatenação da espiral, observa-se o comportamento do padrão de crescimento e posição, do cateto no n -ésimo triângulo.

Passando por aferições da espiral de Teodoro com outras espirais, como por exemplo a arquimadiana, chega-se a denotar padrões de comportamento na expansão da espiral. A seguir, é mostrado um estudo aritmético na espiral, obtido através do comprimento dos ramos da mesma, que tanto atinge quadrados perfeitos e imperfeitos como também a relação de afastamento entre eles nos permite observar números como o π .

A distribuição dos números primos é vista como parte final desse estudo, onde se vê de forma especulativa, possibilitando a formação de novas curvas sobre a espiral, como parábolas.

Abstract

The present work is a study of Teodoro spiral, for the geometric aspects of the curve. At first, the construction of Teodoro spiral in two and three dimensions is made. And through the softwares, GeoGebra and wxMaxima were developed respectively, the geometric constructions and the necessary calculations. With the possession of the spiral of concatenation, observe the pattern of behavior of growth and position, the collared peccary in the n - th triangle.

Going through measurements of Teodoro spiral with other spirals such as the Archimedean, we come to denote behavior patterns in expanding spiral. The following is an arithmetic study on the spiral obtained by the length of the branches of the same, both perfect and imperfect hits with square also spaced apart relationship between them allows us to observe numbers as the π .

The distribution of prime numbers is seen as the final part of this study, where you see speculatively allowing the formation of new curves on the spiral, as parabolas.

Sumário

1	A estrutura da espiral de Teodoro	1
1.1	Construção da espiral de Teodoro	1
1.2	A lenda da espiral	3
1.3	O crescimento da espiral	4
1.4	Espiral de Teodoro obtida por meio do sistema $\text{\LaTeX}$	7
2	Elementos geométricos na espiral de Teodoro	9
2.1	Os triângulos	9
2.2	Arcos internos	10
2.3	Arcos externos	11
2.4	Círculos concêntricos	12
2.5	Desdobramento da espiral de Teodoro	13
2.5.1	O desdobramento e a irracionalidade	14
2.6	Quadratura da espiral de Teodoro	16
2.7	Triângulos necessário para revoluções	18
3	A espiral de Teodoro no sistema de coordenadas polares	20
3.1	Estrutura polar da espiral	20
4	Comparação entre espirais	25
4.1	Equação polar da espiral de Arquimedes	25
4.2	Parametrização da espiral de Arquimedes	26
4.3	Comprimento da espiral Teodoro, usando o comprimento da espiral de Arquimedes	29
4.4	Espiral inversa	31
4.5	Espiral de Arquimedes no espaço	32
4.6	Espiral de Teodoro no espaço	33
5	Os ramos da espiral de Teodoro	35
5.1	Ramos da Espiral de Teodoro	35
5.2	Ângulos entre ramos quadráticos	36
5.3	Ângulo entre duas raízes consecutivas no mesmo ramo quadrático	38

5.4 Ramos primos	40
Considerações finais	45
Apêndice	46
A Uso didático da espiral de Teodoro	46
B Observações Finais	48
B.1 Rotina em linguagem $\text{\LaTeX}$, da construção espiral de Teodoro	48
B.2 Constante de Teodoro	49
B.3 Espiral desenvolvida por Khan	50
B.4 Como determinar a sequência A072895	52
B.5 Outras espirais	53
Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

1.1	Passo 1	2
1.2	Passo 2	2
1.3	Espiral de Teodoro	3
1.4	Ângulo do enésimo triângulo	5
1.5	Ângulo entre hipotenusas	6
1.6	Espiral obtida no sistema L ^A T _E X.	8
2.1	Arcos da espiral	10
2.2	Arcos externos na espiral	11
2.3	Comprimentos dos arcos envoltos	12
2.4	círculos concêntricos	12
2.5	Desdobramento da espiral de Teodoro	13
2.6	Triângulos consecutivos no desdobramento	14
2.7	Razão entre as raízes quadradas de 8 e 2	15
2.8	Comparativo das raízes	15
2.9	Quadratura da espiral de Teodoro	16
2.10	Proporção da raiz quadrada de 8	16
3.1	Coordenas polares da espiral	20
3.2	Homotetia de um número complexo	22
3.3	Rotação de um número complexo	22
3.4	Quadratura do n-ésimo triângulos	23
4.1	Espiral arquimediana	27
4.2	Espiral de Arquimedes e sua derivada	27
4.3	Espirais de Teodoro e Arquimedes	28
4.4	Espirais de Teodoro expandida e de Arquimedes	28
4.5	Comparação arcos externos da espiral	30
4.6	Inversa da espiral de Arquimedes	31
4.7	Simetria da espiral de Arquimedes e sua inversa	31
4.8	Inversa da espiral de Teodoro	32
4.9	Estrutura paramétrica espacial da espiral de Arquimedes	32
4.10	Espiral de Arquimedes no espaço	33

4.11	Espiral de Teodoro no espaço	33
5.1	Ramos da espiral de Teodoro	36
5.2	Ramos quadráticos da espiral de Teodoro	37
5.3	Ângulo entre raízes no mesmo ramo	38
5.4	Números primos na espiral	41
5.5	Ramo primo de fator 18	42
5.6	Ramos primos de ordem 18	43
5.7	Ramos com diferença de segunda ordem de 18 e 20	43
5.8	Ramos primos com diferenças de 18, 20 e 22	44
B.1	Barriga de peixe	50
B.2	Espiral construída de forma manual por Khan	51
B.3	Hiperbólica	53
B.4	Espiral de Fibonacci	53
B.5	Espiral de Fermat	53
B.6	Espiral de Bernoulli	54
B.7	Espiral de Lituus	54
B.8	Espiral de cornu ou clotóide	54
B.9	Família de cornu's	55
B.10	Concha do Náutilo	55

Notações

Notações Gerais

- *arctg* - Refere-se à função arco-tangente de um número real.
- (*%#*) - Refere-se a linha de comando, no ambiente do programa wxMaxima.
- *atan* - Refere-se também à função arco tangente, só que no ambiente do programa wxMaxima.

Introdução

Em leitura do artigo da revista Cálculo, "*Uma escada de raízes quadradas*", páginas 20 e 21 da Ed.22, ANO-2, de 2012, me deparei com uma bela figura geométrica, a Espiral de Teodoro. No artigo propriamente dito, encontrei uma verdadeira diversificação de temas matemáticos que podem ser encontrados no estudo dessa figura. Para se ter um ideia, pode-se encontrar desde distribuição de números primos na espiral, como também o estudo das possibilidades de colorir cada triângulo da espiral, de forma a usar, cores diferentes para os triângulos, que não tenham hipotenusas em comum.

Do ponto de vista da curiosidade matemática, saltam-se várias outras perguntas, o que torna interessante o estudo mais aprofundado dessa figura.

As curvas em espiral, ou simplesmente espirais, são estudadas desde épocas remotas, onde podemos destacar os estudos pioneiros de Arquimedes, sendo então o primeiro do que se tem notícias, a compreender e formalizar alguns aspectos do comportamento dessas formas geométricas, chegando a determinar características interessantes, tanto do ponto de vista estético como matemático. Vale a ressalva de que, uma dessas curvas recebe seu nome, a espiral arquimedianas, que será um objeto de apoio, no estudo da espiral de Teodoro.

No renascimento, um matemático de família famosa e prolifera, Jakob Bernoulli, tinha tanta admiração pela espiral logarítmica, deixando o pedido, de que fosse colocada em sua lápide, o desenho da mesma, acompanhado do lema que usara por toda sua carreira acadêmica: "embora mudado, devo me erguer o mesmo", onde, tal inspiração se deve ao estudo feito por ele sobre a espiral logarítmica, através da ferramenta do cálculo, que a época era descoberta marcante e envolvente, de maneira que o mesmo pode compreender que a sua *spira mirabilis*, tinha uma envolvente, inversa e simétrica exatamente iguais à curva original, daí a inspiração. Pena que o pedreiro não sabia de matemática, e a espiral que ele "desenhara", fora a espiral arquimedianas, e não a desejada por Bernoulli, onde tal fato, pode ser visto até os dias de hoje na lápide, na catedral de Münster, em Basileia.

Daí por diante outros estudiosos se depararam e encontraram novos tipos de espirais, notando até uma matemática muito mais abrangente do que o esperado, não só do ponto de vista geométrico, como também, nas direções do estudo da trigonometria, álgebra, do cálculo e por incrível que pareça, da aritmética como o número de ouro e o π .

No caso da espiral que será estuda, seu nome vem de Teodoro, um filósofo e matemático grego da escola de Pitágoras, nasceu na cidade estado de Cirene por volta de 470 a.C., hoje

a região que compreendia tal cidade grega, pertencente a Líbia sob o nome de Shahhat. Mas tarde, se tornara professor de Platão, aluno pelo qual, o mundo passou a conhecer os trabalhos e pensamentos desse matemático, contidos em relatos de suas obras quando Platão se referia a matemática.

Teodoro¹ é tido como o pioneiro no estudo das raízes irracionais de números inteiros não quadráticos. Chegando a provar, que a raiz quadrada de 2 é um número irracional, por meio da geometria na própria espiral, que era uma forma de pensar da cultura filosófica e matemática a época.

¹Seu Lema: "São princípios da ação o prazer e a dor. Que aquele dimana da sabedoria e esta da ignorância".

Capítulo 1

A estrutura da espiral de Teodoro

Estudamos neste capítulo, a construção da espiral, tanto de forma manual como usando recursos computacionais, e assim são observados seus aspectos geométricos principais, como triângulos, ângulos e seus ramos.

Definição 1.1 *Espiraís são linhas curvas, que se enrolam em torno de um ponto central ou dois pontos, seguindo o sentido horário ou anti-horário.*

1.1 Construção da espiral de Teodoro

A construção manual da espiral é de fácil entendimento, muito embora, o processo requeira alguma paciência e bom uso do material de desenho geométrico.

A construção da espiral pitagórica ou de raízes quadradas, como é chamada por alguns autores a espiral de nosso estudo, recebe tal denominação, pois, ela é construída pela montagem consecutivas e sobreposta de triângulos retângulos, através dos seguintes passos:

1. Marca-se um ponto, e escolhe-se um tamanho qualquer com o compasso, (*unidade de comprimento*). Traça-se com a régua um segmento, de preferência horizontal, com medida igual à escolhida. Obtemos o primeiro cateto, que equivale a $\sqrt{1}$;
2. No final do segmento traçado, levanta-se um novo segmento perpendicular, com o uso de esquadros e com medida igual à unidade de comprimento escolhida. Obtemos o segundo cateto do primeiro triângulo;
3. Com a régua, fechamos o triângulo, traçando a hipotenusa, obtemos um segmento cujo comprimento é $\sqrt{2}$;
4. Com os esquadros, levanta-se um novo segmento perpendicular à hipotenusa do primeiro triângulo, e com medida igual à unidade de comprimento adotada;

1.1. CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL DE TEODORO

5. Com a régua, fechamos o segundo triângulo, e essa hipotenusa equivale a $\sqrt{3}$;
6. Agora, basta repetirmos os passos 4 e 5, várias vezes .

Vejamos assim a formação dos passos relatados, usando o Geogebra.

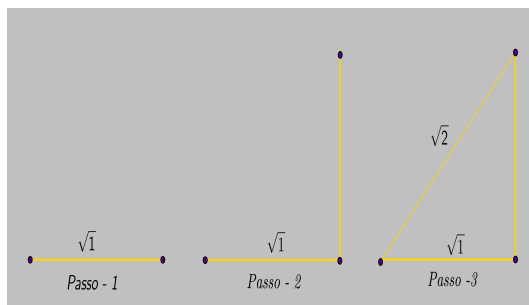


Figura 1.1: Passo 1

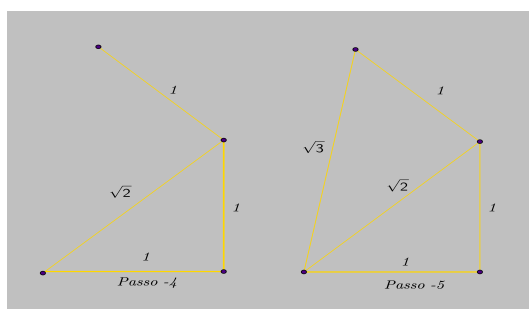


Figura 1.2: Passo 2

Continuando com esse processo chegaremos a uma estrutura bem interessante, que foi a espiral construída por *Theodorus de Cirene*.

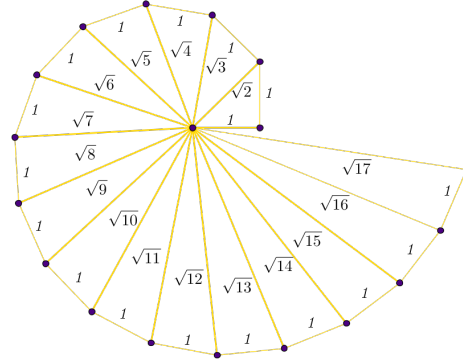


Figura 1.3: Espiral de Teodoro

1.2 A lenda da espiral

Conforme alguns pesquisadores [13], surgiu entre os estudiosos dessa estrutura, uma curiosidade, a de que Teodoro não ter prologado a espiral além da raiz quadrada de 17.

Na tentativa de responder a tal pergunta, inicia-se então um estudo interessante sobre a espiral, chegando a duas conclusões bem interessantes. A primeira, de Paul Nahim (1998), que defendia a ideia que não havia necessidade, pois, haveria apenas mais voltas seguindo a mesma estrutura com elementos de construções já bem definidos. A segunda ideia defendida é de Van Der Waerden (1961), onde Teodoro haveria demonstrado de forma geométrica, cada caso separadamente, o primeiro até a $\sqrt{17}$, e o segundo caso da raiz de $\sqrt{18}$, onde com uma boa olhada, percebe-se que o caso da $\sqrt{18}$ pode ser reduzido a casos anteriores, vendo que $(\sqrt{18})^2 = (\sqrt{17})^2 + (\sqrt{1})^2$. E determinar os casos anteriores a $\sqrt{18}$, seria mais complicado.

Assim, não se sabe ao certo qual seria a concreta intenção de Teodoro. Mas o interessante dessa "lenda", é a inspiração, que deu um Filósofo grego Próclus: "... *tudo que é irracional é privado de forma e deve ser mantido escondido*". Há quatro pesquisadores [13], que encontraram uma terceira resposta, de onde nos municia para vermos como a estrutura da espiral abre um leque de estudo. A resposta obtida, seria que Teodoro não teria condições de encontrar uma espiral perfeita, ou seja, a espiral não fecharia na primeira volta.

Para tal conclusão, vejamos que os ângulos internos, referentes aos de vértices comum ao centro da espiral, para cada triângulo, podem ser obtidos com o uso da expressão $\varphi_n = \arctg(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $n \in \mathbb{N}$.

Daí vejamos os resultados obtidos usando wxMaxima:

```
(%i32) L: makelist(atan(1/sqrt(n)), n, 1, 16);
```

```
(%o32) [ $\frac{\pi}{4}$ , atan( $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ),  $\frac{\pi}{6}$ , atan( $\frac{1}{2}$ ), atan( $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ), atan( $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ), atan( $\frac{1}{\sqrt{7}}$ ), atan( $\frac{1}{\sqrt{8}}$ ),
```

```
atan(1/3), atan(1/sqrt(10)), atan(1/sqrt(11)), atan(1/(2*sqrt(3))), atan(1/sqrt(13)), atan(1/sqrt(14)), atan(1/sqrt(15)),
atan(1/4)]
```

```
(%i42) S:float(Soma:apply("+",L));
```

```
(%o42) 6.128731000915157
```

V corresponderá a uma volta.

```
(%i46) V:float(2*pi);
```

```
(%o46) 6.283185307179586
```

Dif corresponderá a diferença entre uma volta completa e a soma dos ângulos dos triângulos.

```
(%i50) Dif:V-S;
```

```
(%o50) 0.15445430626443
```

Como vemos a diferença entre o $2\pi \text{ rad}$, que representa uma volta, e a soma de todos os ângulos dos 16 triângulos é de $0,15445430626443 \text{ rad}$. O próximo triângulo, como se sabe tem o cateto oposto ao ângulo, com medida igual a uma unidade de comprimento e o cateto adjacente igual a $\sqrt{17}$, o que resulta usando a fórmula em:

$$\varphi_{18} = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{18}}\right) = 0,23147736397018 \text{ rad} > 0,15445430626443 \text{ rad}.$$

Deste fato, vemos que a hipotenusa do triângulo 18, não coincide com o cateto unitário do primeiro triângulo. O que é de certo modo razoável, por dois aspectos, os gregos daquela época, adoravam usar a geometria em demonstrações matemáticas, e do gosto pelo belo, pela perfeição, assim, reforça cada vez mais o que disse Próclus, que o irracional é privado de forma.

Noutra perspectiva, poderia uma pessoa que se interessar em saber, se no desenvolvimento da espiral, haveria a chance de fechar em uma volta completa a espiral, ou melhor, já que na primeira volta as hipotenusa dos triângulos prolongadas não coincidem, será que esse fato se mantém com mais voltas?

Essa pergunta, que um matemático deve sempre que possível fazer, foi então conjecturada, e em 1958, Erich Teuffel, provou que por mais voltas que se dê na espiral pitagórica, as hipotenusas nunca irão coincidir.

1.3 O crescimento da espiral

Podemos analisar o crescimento da espiral por duas perspectivas, a primeira o ângulo total, onde o vértice está centrado no centro da espiral, a segunda, o raio da espiral que nesse caso, trata-se do tamanho da hipotenusa. Assim vejamos cada caso:

1. O ângulo do enésimo triângulo

1.3. O CRESCIMENTO DA ESPIRAL

Observando a figura abaixo, notamos que φ_n , do n -ésimo triângulo é obtido pela expressão recorrente:

$$\varphi_n = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

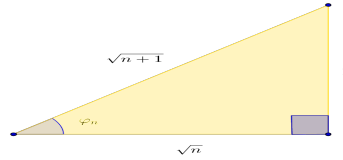


Figura 1.4: Ângulo do n -ésimo triângulo

Isso se deve ao fato de que, quando observamos o triângulo n , ele é construído sobrepondo-se ao triângulo $n-1$, tendo como cateto o oposto ao ângulo, o unitário, e o outro cateto, a hipotenusa do triângulo $n-1$, que usamos como base. Essa expressão também nos revela, a taxa de crescimento do ângulo da espiral.

Podemos determinar o ângulo total da espiral, com k triângulos, somando cada resultado, e tal processo, será feito com o uso do wxMaxima, para que não se torne um processo cansativo, além do que, ganharemos tempo. Determinamos então, o ângulo total, por um somatório:

$$\sum_{n=1}^k \varphi(n) = \sum_{n=1}^k \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

O ângulo entre duas hipotenusas

Podemos por uma observação na figura da espiral, determinar o ângulo entre duas hipotenusas pertencentes a um determinado triângulo da espiral. Vejamos na figura, a marcação dese ângulo.

Sem perda de generalidade, podemos fazer uso dessa figura, para determinar o ângulo entre as hipotenusas, dos triângulos de ordem k . Para tanto, já sabemos como calcular o ângulo total desse triângulo por (1.1), logo, consideremos dois triângulos não consecutivos de ordem h e l , com $0 \leq l < h \leq k$. Então o ângulo determinado

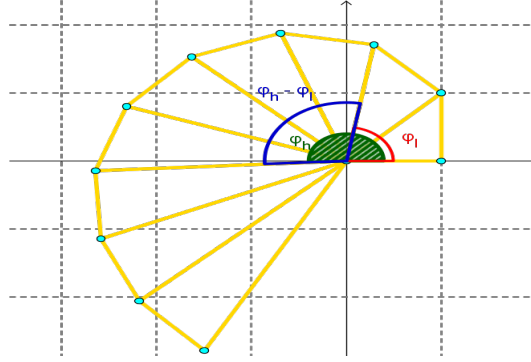


Figura 1.5: Ângulo entre hipotenusas

entre as hipotenusas desses dois triângulo, como se vê na figura, é a diferença entre os totais respectivos, desse modo temos que:

$$\varphi_h - \varphi_l = \sum_{n=1}^h \varphi(n) - \sum_{n=1}^l \varphi(n) = \sum_{n=1}^h \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sum_{n=1}^l \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Só que no cálculo do φ_h , está incluso a soma dos ângulos até o l -ésimo triângulo, portanto, devemos retirar, daí resulta em:

$$\varphi_h - \varphi_l = \sum_{n=h-l}^h \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

2. O raio do enésimo triângulo

O raio da espiral, como se vê em seu desenho, é crescente, e seu valor no enésimo triângulo, nada mais é, do que a medida da hipotenusa deste triângulo, assim podemos expressar o tamanho do raio da espiral com k triângulos como:

$$r_k = \sqrt{k}, \text{ com } k \in \mathbb{N}.$$

E para obtermos a taxa de crescimento desse do raio, que chamaremos de Δr , basta fazermos a diferença entre duas hipotenusas consecutivas, chegaremos em:

$$\Delta r = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Observe que, se aplicarmos limite temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|n+1| - |n|}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right]$$

Como $n \in \mathbb{N}$, segue que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|n+1| - |n|}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1 - n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0,$$

já que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$.

Daí, quanto maior for a espiral, mais seus raios tendem a se igualarem, tendendo a diminuir sua curvatura, ou ainda, a curva que envolve a espiral será mais suave.

1.4 Espiral de Teodoro obtida por meio do sistema $\text{\LaTeX}$

É possível fazer a construção da espiral de Teodoro com o uso da linguagem $\text{\LaTeX}$, e podemos até usar o algoritmo de construção do autor Felix Lindemann, que podemos obter em *WWW.TEXAMPLE.NET*.

A rotina está no apêndice desse trabalho. Com a sua implementação podemos construir a espiral sem maiores apetrechos computacionais, entretanto, trata-se de uma figura estática, onde podemos chegar a uma quantidade de triângulos quaisquer, mas não poderemos usar essa estrutura de maneira a produzir um estudo computacional direto.

Assim vejamos o resultado produzido, na figura que se segue:

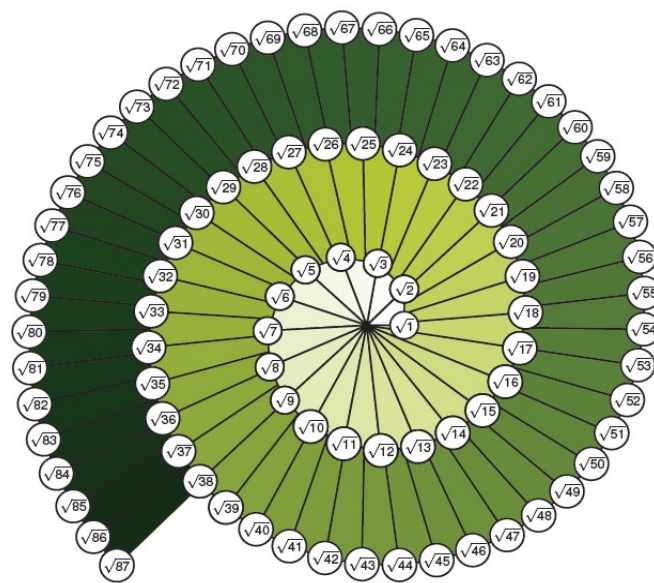


Figura 1.6: Espiral obtida no sistema $\text{\LaTeX}$.

Capítulo 2

Elementos geométricos na espiral de Teodoro

Neste segundo capítulo, observaremos as estruturas matemáticas formadas pelos elementos geométricos que podemos obter, por meio da espiral, de maneira que façamos uma análise das características de comportamento, tais como círculos, os triângulos e arcos de circunferência.

2.1 Os triângulos

Definimos por S_n , a área do n -ésimo triângulo, e por meio de recorrência, chegaremos a $S_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Agora, se quisermos determinar a área total da espiral com k triângulos, basta somarmos de cada triângulo suas respectivas áreas. Desse modo, chamando de S_k a área total, podemos defini-la por meio da seguinte expressão:

$$S_k = \sum_{n=1}^k S_n = \sum_{n=1}^k \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \sqrt{n}.$$

E fazendo o uso do wxMaxima, vamos calcular a área de uma espiral com 16 triângulos.

```
(%i2) sum(sqrt(k)/2, k, 1, 16);
```

```
(%o2)  $\frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} + 5$ 
```

```
(%i3) float(%);
```

```
(%o3) 22.2345983000713
```

Como se pode ver, as áreas dos 16 triângulos somadas resultaram em aproximados 22,2346 unidades de áreas.

As áreas dos triângulos crescem a taxa de $\Delta A_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$, que como já sabemos quando n tende ao infinito, $\Delta A_n \rightarrow 0$. Logo as áreas dos triângulos, vão se tornando iguais.

2.2 Arcos internos

Uma das construções que podemos obter com a espiral são arcos construídos sobre as hipotenusas, formando um bela estrutura geométrica como se pode observar na figura abaixo.

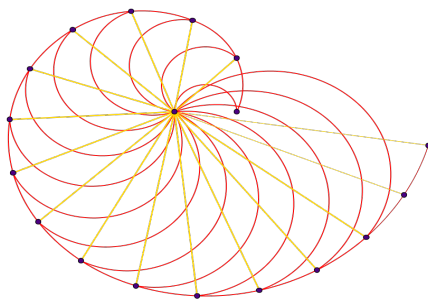


Figura 2.1: Arcos da espiral

Cada arco é construído em cima das hipotenusas, logo, a medida do raio r de cada um é determinada por $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Como sabemos, o comprimento C de uma circunferência é definido por $C = 2\pi.r$, segue então que o comprimento de cada arco é $C = \frac{\pi\sqrt{n}}{2}$.

Fazendo novamente o uso do wxMaxima, obtemos os comprimentos de 17 primeiros arcos.

```
(%i15) L: makelist(pi*sqrt(k)/2, k, 1, 17);
```

```
(%o15) [ $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{7}\pi}{2}$ ,  $\sqrt{2}\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{10}\pi}{2}$ ,  
 $\frac{\sqrt{11}\pi}{2}$ ,  $\sqrt{3}\pi$ ,  $\frac{\sqrt{13}\pi}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{14}\pi}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{15}\pi}{2}$ ,  $2\pi$ ,  $\frac{\sqrt{17}\pi}{2}$ ]
```

```
(%i16) float(%);
```

```
(%o16) [0.5  $\pi$ , 0.70710678118655  $\pi$ , 0.86602540378444  $\pi$ ,  $\pi$ , 1.118033988749895  
 $\pi$ , 1.224744871391589  $\pi$ , 1.322875655532295  $\pi$ , 1.414213562373095  $\pi$ , 1.5  
 $\pi$ , 1.58113883008419  $\pi$ , 1.6583123951777  $\pi$ , 1.732050807568877  $\pi$ , 1.802775637731995  
 $\pi$ , 1.870828693386971  $\pi$ , 1.936491673103709  
 $\pi$ , 2.0  $\pi$ , 2.06155281280883  $\pi$ ]
```

E pelo mesmo fato das áreas, quanto mais se expande a figura, se chega a arcos com tamanhos cada vez mais próximos. , Mas isso, nos diz também que tais arcos, não

apresentam um padrão de crescimento logarítmico, que é encontrado como por exemplo nas no interior da concha do Náutilo¹.

2.3 Arcos externos

Um outro arco encontrado que podemos detectar na espiral, é de que a cada três potos consecutivos, no caso, os vértices externos do triângulo, podemos determinar um arco de uma circunferência. Esse fato pode ser evidenciado pelo fato de que dado qualquer triângulo, ele admite um único círculo que passa por seus vértices, onde tal círculo, é chamado de circunscrito ao triângulo. Este fato é muito bem demonstrado e tratado em [18] p. 124.

Os arcos na figura, foram coloridos seguindo a sequência, vermelha, azul e verde, para que possamos identificar os três vértices consecutivos e consequentemente a sequência de arcos.

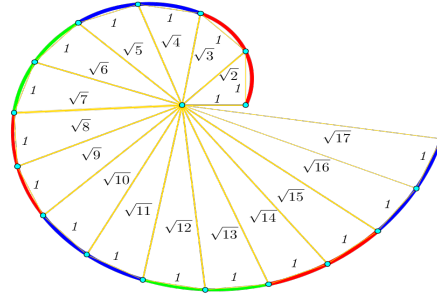


Figura 2.2: Arcos externos na espiral

Não faz muito sentido querermos colocar um novo arco contando a partir do segundo, terceiro e quarto vértice, estaríamos apenas, deslocando os arcos contados a partir já do primeiro.

Como se vê, esses arcos, a medida que evoluem na espiral, vão se tornando cada vez mais próximos do cateto unitário, logo, se pode determinar uma curva de contorno da espiral de Teodoro, que será feito mais adiante, num estudo analítico da espiral.

Como os catetos dos periféricos da espiral têm medidas iguais a uma unidade de comprimento, é evidente que se continuarmos desenhando a espiral, esses arcos tenderão a ter comprimento também iguais a duas dessa unidade. Esse fato, nos remete a outra perspectiva, de que a espiral em certo tempo, vai procurar ter uma curvatura mais suave, de modo que, sua envoltória apenas afaste-se a cada volta de maneira mais constante. Podemos ver tal fato, com a ajuda do GeoGebra, que como vimos na figura anterior, cada

¹Os nautilóides (Nautilidae) são cefalópodes marinhos arcaicos que foram muito abundantes no período Paleozoico, existindo ainda um gênero vivo. O náutilo que vive no sudoeste do Oceano Pacífico.

2.4. CÍRCULOS CONCÊNTRICOS

arco sobre dois catetos unitário, portanto seus comprimentos vão se aproximando de 2, vejamos com a seguinte figura.

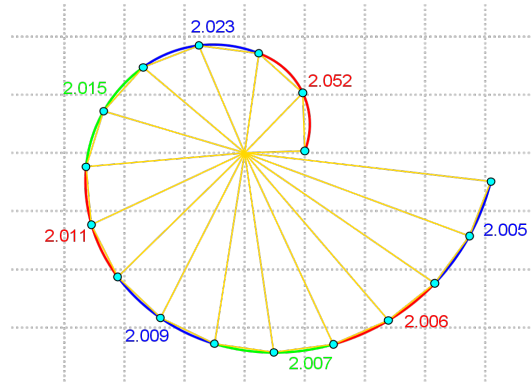


Figura 2.3: Comprimentos dos arcos envoltos

2.4 Círculos concêntricos

Por meio da espiral é possível construirmos círculos concêntricos, e claro, seus centros coincidem com o da espiral.

Tal processo, permite dividirmos um disco em cinco coroas de mesma área. Vejamos a imagem:

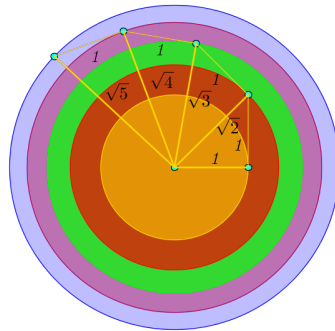


Figura 2.4: círculos concêntricos

Analisemos, agora, a área de cada um dos círculos, com seus respectivos raios r :

Círculo amarelo ($r = 1$) $\rightarrow S_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$;

Círculo vermelho ($r = \sqrt{2}$) $\rightarrow S_2 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$;

Círculo verde ($r = \sqrt{3}$) $\rightarrow S_3 = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi$;

Círculo roxo ($r = \sqrt{4}$) $\rightarrow S_4 = \pi \cdot (\sqrt{4})^2 = 4\pi$;

Círculo azul ($r = \sqrt{5}$) $\rightarrow S_5 = \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 5\pi$.

Notemos que, $S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = S_4 - S_3 = \dots = S_n - S_{n-1} = \pi$.

E assim fica constatado que a espiral vai se expandindo no espaço, abrangendo uma área equivalente, em unidades de área, a π .

2.5 Desdobramento da espiral de Teodoro

Uma outra forma de se encarar a espiral, é desdobrando-a, ou estirando-a ao longo de uma linha. A figura formada, é como se fosse uma linha poligonal, que se forma por meio de uma serra, com um crescimento dos seus dentes, vejamos:

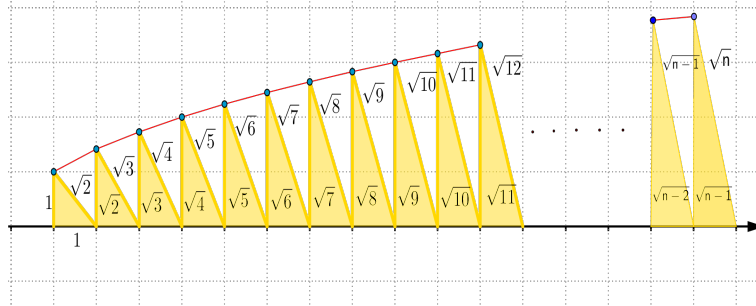


Figura 2.5: Desdobramento da espiral de Teodoro

Como se vê, esse desdobramento gera uma nova estrutura na espiral, que são a sucessão de triângulos isósceles. Vejamos também que a distância entre os "bicos" da serra, ou melhor, a distância entre os vértices das bases dos triângulos isósceles vai diminuindo. Uma expressão para essa distância pode ser obtida através da diferença das hipotenusas sucessivas. Vejamos a seguinte ilustração:

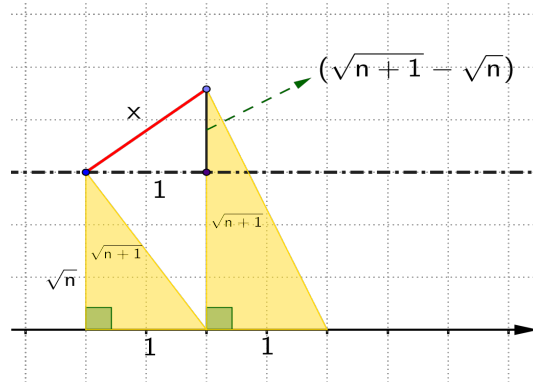


Figura 2.6: Triângulos consecutivos no desdobramento

Como as hipotenusas consecutivas são paralelas podemos construir um novo triângulo retângulo, onde, a hipotenusa dele, é a base do triângulo isósceles, que por meio do Teorema de Pitágoras, se chega a:

$$x^2 = 1^2 + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^2. \quad (2.1)$$

Desenvolvendo a expressão, temos que:

$$x = \sqrt{2 \left(n + 1 - \sqrt{n^2 + n} \right)}.$$

Sabemos por (1.3), que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = 0$, logo, a equação (2.1), quando $n \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 1$. Isso nos leva a conclusão de que, ao desdobrarmos a espiral, com uma grande números de triângulos, passaremos a ter retângulos, e a linha que se forma por meio dos "picos", tende a ficar paralela ao eixo de desdobramento.

2.5.1 O desdobramento e a irracionalidade

Inspirado pela forma grega antiga de pensar em matemática, podemos ver, por meio da estrutura de desdobramento da espiral, que as raízes quadradas de números primos, não podem ser expressas por um produto de raízes menores. Como por exemplo temos que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, conforme se pode constatar com a figura:

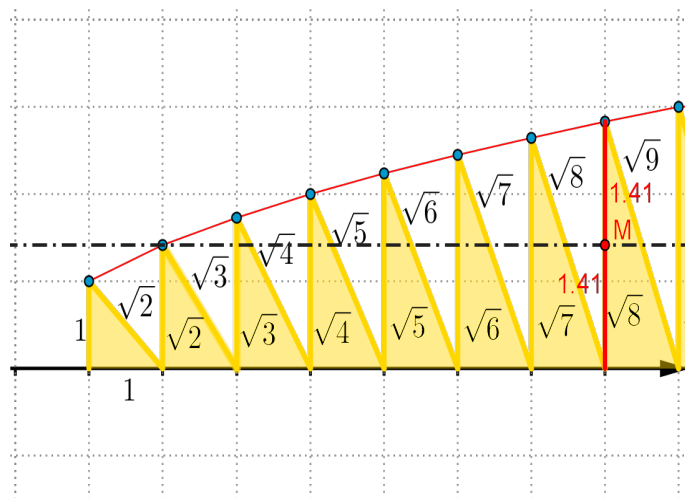


Figura 2.7: Razão entre as raízes quadradas de 8 e 2

Vejamos também, que se quisermos estabelecer esse tipo de razão com as raízes quadradas de 3, 5 e 7, não se estabelece uma proporção adequada.

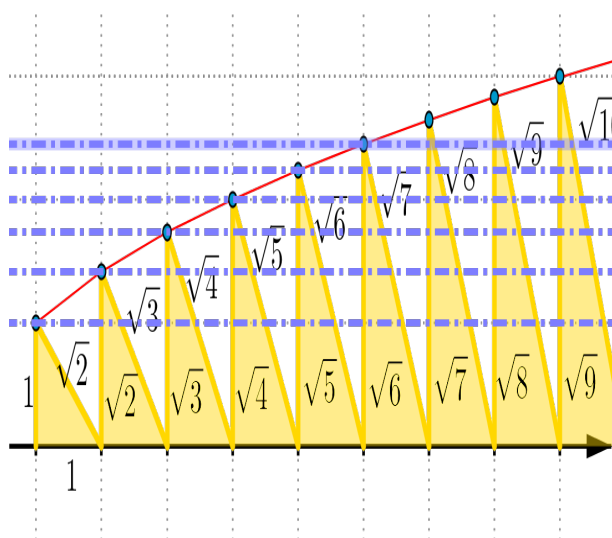


Figura 2.8: Comparativo das raízes

Isto de certo modo, reforça a segunda hipótese levantada sobre a "lenda da espiral" [1.2].

E claro, pelos motivos abordados anteriormente, a distância entre as retas tracejadas que aparecem na figura 2.8, à medida que se aumenta a quantidade de raízes, a distância entre essas retas vai tendendo a zero.

2.6 Quadratura da espiral de Teodoro

Uma outra forma, de analisarmos a irracionalidade das raízes quadradas de alguns números naturais, é fazendo a quadratura da espiral. Trata-se de um processo parecido com o desdobramento, entretanto, nós iremos manter fixo o centro da espiral, e rotacionar cada triângulo. Como todos os triângulos têm em comum o cateto unitário, eles então, ficarão dispostos em retângulo de largura igual a 1 claro, e comprimento igual a $\sqrt{n}$. Assim vejamos na figura a disposições de 17 triângulos.

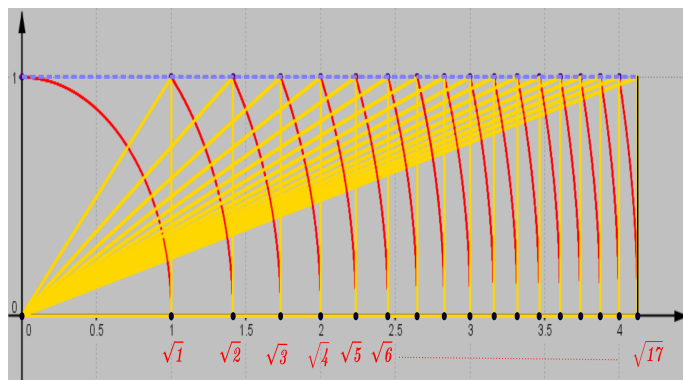


Figura 2.9: Quadratura da espiral de Teodoro

Agora, com o uso de um compasso, fixado na abscissas 1, e aberto até a origem do sistema de coordenadas, ao giramos, encontraríamos a abscissa da $\sqrt{4}$, logo, $\sqrt{4} = 2.1$. Já, se tentássemos, com compasso, uma abertura tal, que subdividisse a abscissa da $\sqrt{3}$, em partes iguais, não teríamos o mesmo êxito, logo, $\sqrt{3}$, não é racionalizável.

Essa quadratura, nos fornecem um método geométrico, para a simplificação de raízes, pois, sabemos que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, basta com compasso fazermos um procedimento análogo como na raiz de 2. Vejamos na figura seguinte:

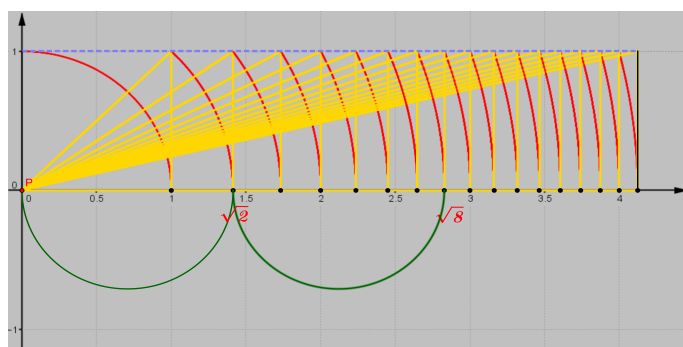


Figura 2.10: Proporção da raiz quadrada de 8

E a continuidade desse processo, irá nos fornecer o meio de determinarmos as outras raízes que são múltiplas da $\sqrt{2}$, onde a próxima raiz seria $\sqrt{18}$, que é $3\sqrt{2}$. E claro, que se escolhermos outra raiz, como por exemplo, a de 3, vamos, determinar as raízes múltiplas da raiz de 3, e assim por diante.

Uma outra pergunta que nos pode vir, e quando olhamos a quadratura da espiral, é se podemos encontrar um retângulo áureo?

Definição 2.1 *Seja um retângulo de dimensões a e b , ele é dito de ouro ou áureo, se vale a seguinte proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \phi$, onde ϕ , é uma constante, denominada de razão áurea.*

Esse número, que intriga muitos matemáticos desde a antiga Grécia, onde fora associada ao padrão do que é belo ao ser humano, fora estudada e determinado como um número irracional, e pode-se chegar a uma estimativa de seu valor, através de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398...$, e tal fato é demonstrado e muito bem trabalhado para fins didáticos, em [7].

Proposição 2.1 *Não é possível construir um retângulo áureo, com os triângulos da espiral pitagórica.*

Demonstração: Para verificarmos a validade dessa proposição, devemos notar na figura 2.10, que qualquer retângulo, tem comprimento 1 e largura $\sqrt{n}$, e tomando $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, para que se garanta a construção de um retângulo.

Agora fazendo $a = \sqrt{n}$ e $b = 1$, então por definição, um retângulo áureo com essas dimensões resultaria em:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}}{1} &= \frac{1}{\sqrt{n}-1} \\ (\sqrt{n}-1) \frac{\sqrt{n}}{1} &= \frac{1}{\sqrt{n}-1} (\sqrt{n}-1) \\ n - \sqrt{n} &= 1 \\ n - 1 &= \sqrt{n} \\ (n-1)^2 &= (\sqrt{n})^2 \\ n^2 - 2n + 1 &= n \\ n^2 - 3n + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Vejamos que as soluções dessas equações, seriam $n_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $n_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Em ambos os casos, temos que n é um número irracional, o que é uma contradição, pois, n é natural, portanto, esse retângulo não pode ser construído por meio desses triângulos. ■

2.7 Triângulos necessário para revoluções

Um fato curioso, que poderíamos indagar é a quantidade de triângulos necessários para conseguirmos executar um revolução com a espiral de Teodoro.

Bem, existe através do desenvolvimento da série de Taylor da expressão [1.1], chegando na $a(n) = \left[\left(k\pi - \frac{K}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \right]$, $k \leq 1\,000\,000\,000$ e sendo K a constante de Teodoro. Nos permite determinar quantos triângulos são necessário para se completar uma volta, na espiral de Teodoro.

Essa sequência pode ser vista em *THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES*², trata-se de um site que cataloga sequência de números inteiros. Neste site, a sequência é determinada pelo código A072895.

A sequência é dada pelos números:

n	$a(n)$
1	17
2	54
3	110
4	186
5	281
6	396
7	532
8	686
9	861
10	1055
11	1269
12	1503
13	1757
14	2030
15	2323
16	2636
17	2968
18	3320
19	3692
20	4084
21	4495
22	4927
23	5377
24	5848
25	6338
26	6849
27	7378

²<http://oeis.org/A072895>

Tal sequência, pode ser vista e explicada a sua construção por Herbert Kociemba, em seu próprio site ³.

³<http://kociemba.org/themen/spirale/theodorus.html>

Capítulo 3

A espiral de Teodoro no sistema de coordenadas polares

Neste capítulo vamos abordar a espiral usando geometria analítica, por meio de coordenadas polares, para que possamos fazer novas aferições e obter meios para estudarmos os aspectos comportamentais da curva.

3.1 Estrutura polar da espiral

Observando a espiral, vemos que os vértices externos dos triângulos podem ser tomados como pontos no plano cartesiano e, desse modo suas coordenadas podem ser observadas mediante um par coordenado. Em nosso caso, vamos fazer uso de coordenadas polares, devido ao fato de que cada vértice é determinado por uma hipotenusa, que usaremos como a medida do raio (*Distância do vértice ao polo*), e um ângulo, ou na linguagem polar, o argumento do vértice. Como polo, temos a origem do sistema de coordenadas, desse modo, cada vértice F_j com $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, e n referindo-se ao enésimo triângulo, fica então determinado pelo par de coordenadas polares $F_j = (r_j, \varphi_j)$. Vejamos na estrutura da espiral, os elementos descritos.

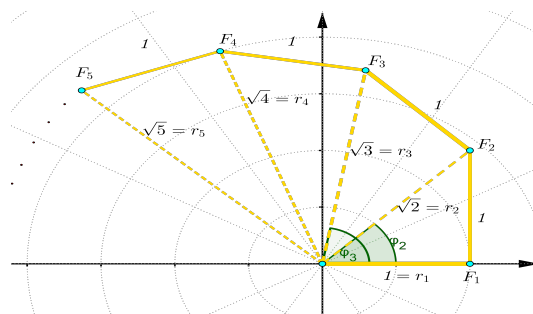


Figura 3.1: Coordenas polares da espiral

Diante da estrutura, vemos que:

$r_j = \sqrt{n}$ e $\varphi_j = \text{argumento de } F_j$, sendo o Polo = (0, 0).

Como, dito no primeiro capítulo, pode-se determinar o ângulo total da espiral, com k triângulos, por meio de (1), e desse modo chegaremos a seguinte conclusão:

$$\varphi_j = \arg F_j = \sum_{n=1}^k \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Desse modo podemos escrever $F_j = (\sqrt{j}, \varphi_j)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, para n sendo o n -ésimo triângulo.

É possível para nós, representarmos a espiral de Teodoro mediante uma estrutura geométrica complexa, pois, ela se encaixa perfeitamente em uma estrutura polar.

Sabemos, que um número complexo z , em sua forma polar é descrito como:

$$z = \rho (\cos \theta + i \sen \theta), \text{ onde, } \rho = |z| \text{ e } \theta \text{ o argumento de } z.$$

Graças a Euler, essa fórmula pode ser expressa por meio de uma exponencial, considerada por muitos como uma das belas fórmulas matemáticas, pois agrega números como e , i e em um caso particular π . Euler então, obteve a identidade, $\cos \theta + i \sen \theta = e^{i\theta}$.

Essa identidade, foi encontrada quando Euler fez o desenvolvimento da série de Taylor de:

$$\sen \theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (3.1)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (3.2)$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots \quad (3.3)$$

E observando que (3.3) pode ser obtido somando (3.1) com o produto de i por (3.2), desse modo, podemos escrever um número complexo da seguinte forma:

$$z = \rho (\cos \theta + i \sen \theta) = \rho \cdot e^{i\theta}.$$

Definição 3.1 *Seja r um número real positivo. Definimos uma **homotetia**, no plano complexo, pelo fator r , como sendo a transformação de $\mathbb{C}$ dada por $H_r(z) = rz$.*

Desse modo, podemos entender a homotetia como uma bijeção em $\mathbb{C}$, pois, como o domínio de H_r é claramente $\mathbb{C}$, já que a multiplicação em $\mathbb{C}$ é fechada, e dado um $w \in \mathbb{C}$, existe um único $z \in \mathbb{C}$, tal que, $w = rz$. E caso tenhamos $r > 1$, temos um crescimento do número z , e se $0 < r < 1$, temos uma contração de z . Vale a ressalva que tanto a contração, como a expansão se dá na mesma direção de z . Vejamos com a figura uma homotetia de expansão de uma número z .

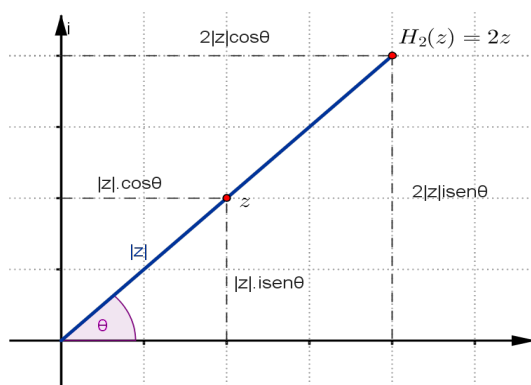


Figura 3.2: Homotetia de um número complexo

Definição 3.2 *Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos uma **rotação** no plano complexo, de θ radianos, como sendo a transformação de $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$.*

A transformação de rotação também é uma bijeção, já que claramente o domínio de R_φ é $\mathbb{C}$, e do fato de $e^{i\varphi}z = w$, dado que $w \in \mathbb{C}$ ser o único número que atende a este fato, de tal modo que a inversa, ou seja, $z = e^{i\varphi}w$.

Vejamos uma figura que mostra uma rotação de um número z .

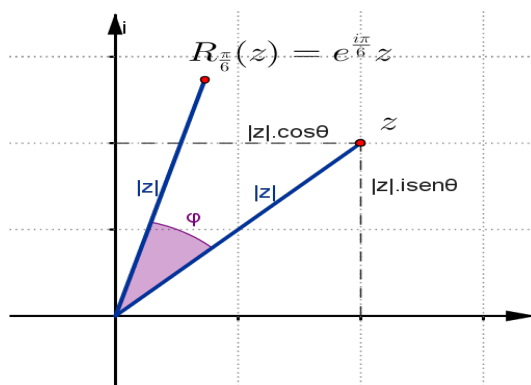


Figura 3.3: Rotação de um número complexo

Observação 3.1 *Uma homotetia de um número z , conserva o argumento θ do número, já a rotação, conserva a norma ou módulo ρ de z .*

Com base nessa observação feita, vemos que a espiral de Teodoro, simultaneamente uma homotetia e rotação, da $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. E fazendo uma analogia com fórmula polar de um número complexo, e as coordenadas polares da espiral de Teodoro, poderemos escrever uma equação no plano complexo para espiral de Teodoro da seguinte maneira.

$$F_j = |\sqrt{j}|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{j}e^{i\varphi}. \quad (3.4)$$

Sendo $j = 1, 2, \dots, n-1$, e n é o n -ésimo triângulo da espiral. E lembrando que

$$\varphi = \sum_{n=1}^{j+1} \arctg(1/\sqrt{n}).$$

Agora, se lançarmos mão da estrutura elaborada na 2.9, e remetê-la no plano complexo, determinaremos a seguinte composição:

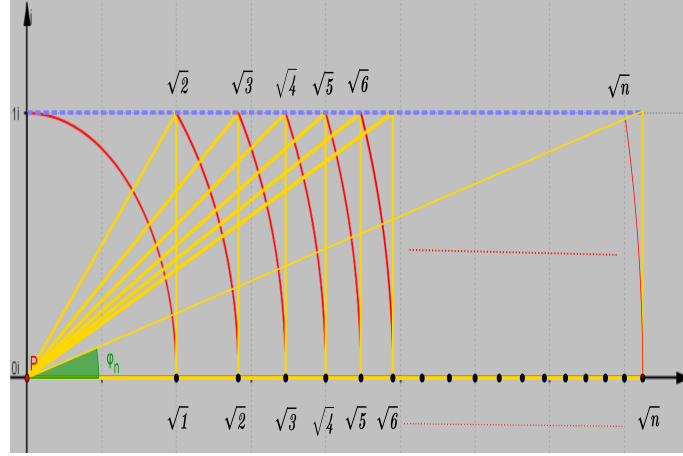


Figura 3.4: Quadratura do n -ésimo triângulos

Notemos que em cada triângulo, o seu argumento produz os seguintes resultados:

$$\cos \varphi_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}; \quad (3.5)$$

$$i \sin \varphi_n = \frac{1i}{\sqrt{n+1}}. \quad (3.6)$$

Somando, (3.5) com (3.6), chegaremos em $\frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}}$. Por outro lado, vimos que essa soma é a identidade (3.3), que agora, nos revela outra igualdade:

$$e^{i\varphi_n} = e^{i \arctg(1/\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}} \quad (3.7)$$

Daí, podemos reescrever a equação (3.4), da seguinte forma

$$F_n = \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}} \right) \quad (3.8)$$

E como já sabemos, ao caminharmos na espiral, estamos tanto rotacionado como expandindo o raio, de modo, que isso ocorre fazendo as transformações definidas.

Para então possamos proceder uma rotação no raio, devemos multiplicar o número complexo pelo fator $e^{i \cdot \varphi_n} = \frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}}$. E para expandirmos o mesmo número, multiplicamos

pela taxa $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$. Desse modo, para caminharmos de um ponto a outro da espiral, podemos então, concluirmos que:

$$F_{n+1} = F_n \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}} \right).$$

Capítulo 4

Comparação entre espirais

Nesta parte do trabalho, faremos um comparativo entre as espirais de Arquimedes e a de Teodoro, observando o crescimento, a curvatura e o comprimento de ambas.

Como foi visto na figura 2.4, a espiral de Teodoro segue em padrão de expansão. Isso, nos leva à conclusão de que a espiral de Teodoro tem um comportamento igual à espiral de Arquimedes. Este fato, também pode ser visto através de uma comparação feita com outras espirais, logarítmica, hiperbólica e parabólica, como é relatado em [8].

A espiral de Arquimedes é uma curva ou gráfico descrito por duas características bem interessantes, onde, consideremos dois pontos no plano. Fixando um, e movendo o outro de maneira que, esse ponto tenha velocidades, angular¹ e radial² constantes, dado um certo intervalo de tempo, ou seguindo o mesmo parâmetro. Esse é o motivo pelo qual, a espiral Arquimedes, se aproxima da pitagórica, pois, como vimos, r_j , que é o raio polar, aumenta a uma taxa constante de $\Delta r = \sqrt{j+1} - \sqrt{j}$, que seria nesse caso, a velocidade radial, e de mesmo modo, o ângulo também varia constantemente, a taxa de $\Delta\varphi = \arctg(1/\sqrt{j})$ sendo a velocidade angular.

4.1 Equação polar da espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes, se define pela equação, $r(\varphi) = a.\varphi$, onde a é uma constante definida por $a = \frac{V_r}{\omega}$, sendo V_r é a velocidade radial e ω a velocidade angular. [8]

Quando r tende ao infinito, temos que a Espiral de Arquimedes se aproxima da Espiral de Teodoro, como foi submetido o estudo através dos gráficos das curvas. Só que há, uma margem de aproximação, para que isso ocorra. Um estudo feito por J. B. Davis [6], descobriu essa margem através de interpolação do ângulo polar da Espiral de Teodoro. Assim foi determinado a constante de Teodoro 1,8600250792....(C_1), e mais tarde, E.

¹É a relação entre, a variação de um ângulo e um intervalo de tempo. Grandeza utilizada em estudos de movimentos circulares.

²É a relação entre, a distância que separa um ponto móvel de um ponto fixo, dado um intervalo de tempo.

Hlawka, fazendo novas especulações sobre os pontos da espiral, de forma diferenciável, chegou a constante de desenvolvimento da espiral, que é 2.157782996659446... (C_2).

Desse modo, a espiral de Teodoro se define por uma equação, que trata o ângulo em função do raio, da seguinte forma:

$$r(\varphi) = \frac{\varphi}{2} - \frac{C_2}{2}$$

.

4.2 Parametrização da espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes, é uma curva que podemos parametrizar, pois, ela atende as seguintes definições:

Definição 4.1 *Dada duas funções diferenciáveis em t , $x(t)$ e $y(t)$, o conjunto de pontos obtidos por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ descreve uma curva no plano.*

Definição 4.2 *Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma curva parametrizada plana, é uma função contínua $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Definição 4.3 *Uma curva $t \rightarrow \alpha(t)$ é diferenciável em $t = t_0$, se existir $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.*

Definição 4.4 *Uma curva parametrizada é regular em t , quando $\alpha'(t) \neq 0$.*

O que passamos a observar, através da equação paramétrica $\alpha(t)$, é a trajetória descrita por um ponto no plano, em função de um parâmetro t , onde por exemplo, podemos considerar um dado instante de tempo. Daí, justificamos o uso de t na expressão da função em $\alpha(t)$, onde, $t \in J$ e $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$, pois, não faria sentido tomarmos a espiral em si, como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = f(x)$.

A definição 3.4, nos garante que a curva é de forma suave, ou seja, ela não possui bicos. Isso pode ser constatado, quando plotamos o gráfico da espiral arquimediana, que pode ser vista por meio da parametrização $\alpha(t) = (a.t.\cos(t), a.t.\sin(t))$, onde a e $t \in \mathbb{R}$ sendo, a um valor constante.

Vejamos que $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, por meio da derivada do produto de duas funções, chegaremos a:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a[1.\cos(t) + t.(-\sin(t))] = a[\cos(t) - t.\sin(t)]. \\ y'(t) &= a[1.\sin(t) + t.\cos(t)] = a[\sin(t) + t.\cos(t)]. \end{aligned}$$

Segue então:

$$\alpha'(t) = a(\cos(t) - t.\sin(t), \sin(t) + t.\cos(t)).$$

4.2. PARAMETRIZAÇÃO DA ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Agora supondo que $\alpha'(t) = (0, 0)$ isso acarreta, os seguintes fatos:

$$\begin{aligned}\cos(t) - t \cdot \sin(t) &= 0 \implies \cos(t) = t \cdot \sin(t) \implies \cos^2(t) = t \cdot \sin(t) \cos(t). \\ \sin(t) + t \cdot \cos(t) &= 0 \implies \sin(t) = -t \cdot \cos(t) \implies \sin^2(t) = -t \cdot \sin(t) \cos(t).\end{aligned}$$

Sabemos que $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, e quando somamos as duas últimas expressões, chegaremos ao absurdo de $1 = 0$. Concluimos então, que não pode haver um $t \in J$; $\alpha'(t) = 0$, por tanto, a espiral de Arquimedes $\alpha(t)$ é uma curva plana regular.

Vamos agora traçar a espiral, onde, escolhendo $a = 0,5 > 0$, para que a trajetória se dê em sentido antihorário e $t \in J = [0, 6\pi]$, por meio do GeoGebra, teremos a figura abaixo.

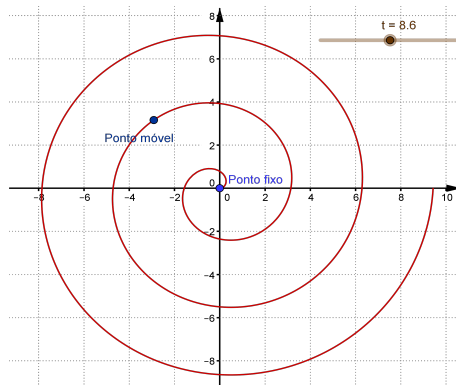


Figura 4.1: Espiral arquimediana

E de fato, podemos ver pelo gráfico, da função derivada de $\alpha(t)$ (em verde), realmente não passa por $(0, 0)$, ou seja, $\alpha'(t) \neq (0, 0)$.

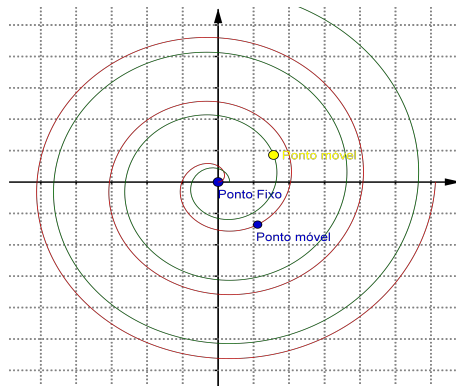


Figura 4.2: Espiral de Arquimedes e sua derivada

4.2. PARAMETRIZAÇÃO DA ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Vejamos agora, utilizando $a = 0,65$ para espiral de Arquimedes, e comparamos as duas espirais no mesmo plano.

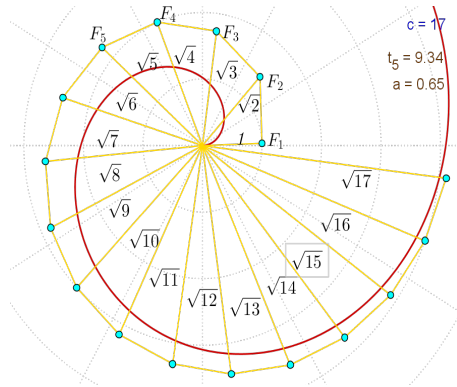


Figura 4.3: Espirais de Teodoro e Arquimedes

Observe que a curvatura da espiral de Arquimedes se mantém acompanhando a de Teodoro, conforme podemos ver na seguinte figura:

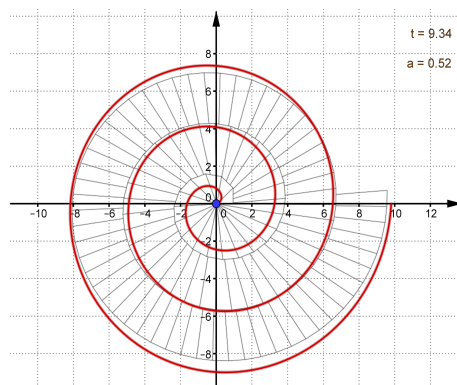


Figura 4.4: Espirais de Teodoro expandida e de Arquimedes

Pelos fatos relatados, a espiral de Teodoro é estudada com recursos analisados na espiral de Arquimedes, onde, vale mencionar dois estudo nessa área, que podem ser encontrados em [8] e [22].

4.3 Comprimento da espiral Teodoro, usando o comprimento da espiral de Arquimedes

A ideia de medir o comprimento de uma curva, segue o raciocínio de interligar pontos da curva por segmento, assim criaremos uma linha poligonal, que nada mais é, do que uma aproximação da curva. Mas em nosso caso, a curva em questão é a espiral de Arquimedes, e queremos por meio dela, encontrar valores para o comprimentos da espiral de Teodoro.

Poderíamos então, ser levados a pensar que, a Espiral de Teodoro, pelos catetos externo nos daria a aproximação desejada, isso é verdade quando, expandirmos a espiral, pois como já foi dito anteriormente, a variação de ângulo é nula, e a curvatura das espirais tendem a se aproximar. Só que, a partição feita com os catetos unitários, não são suficientemente pequena, daí evitarmos adotar esse procedimento.

Antes de calcularmos o comprimento da espiral, precisamos de alguns requisitos.

Seja $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em (a, b) , que representa uma curva parametrizada e regular no mesmo intervalo, cuja derivada $\alpha'(t)$ é uma função contínua. E seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$.

Associada a essa partição, temos uma linha poligonal formada pela união dos segmentos de reta que unem os pontos $(t_{i-1}, \alpha(t_{i-1}))$ e $(t_i, \alpha(t_i))$, sucessivamente. Essa linha é uma aproximação para o gráfico da função $\alpha(t)$.

E o comprimento dessa linha poligonal é dado por:

$$S = \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2}$$

Mas essa expressão remete a uma soma de Riemann, logo, calculando o limite de cada soma dessa, se chega a expressão:

$$S = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Vamos aferir alguns resultados usando o wxMaxima, calculando o comprimento da curva por meio dos dois primeiros triângulos:

```
(%i35) a:1.21;
```

```
(%o35) 1.21
```


4.3. COMPRIMENTO DA ESPIRAL TEODORO, USANDO O COMPRIMENTO DA ESPIRAL DE ARQUIMEDES

```
(%i36) x:a*t*cos(t);
(%o36) 1.21 t cos(t)
(%i37) y:a*t*sin(t);
(%o37) 1.21 t sin(t)
(%i38) f1:diff(x,t)^2;
(%o38) (1.21 cos(t) - 1.21 t sin(t))^2
(%i39) f2:diff(y,t)^2;
(%o39) (1.21 sin(t) + 1.21 t cos(t))^2
(%i40) fat_inte:sqrt(f1+f2);
(%o40)  $\sqrt{(1.21 \cos(t) - 1.21 t \sin(t))^2 + (1.21 \sin(t) + 1.21 t \cos(t))^2}$ 
(%i41) S:integrate(fat_inte, t, 0, 1.43);
(%o41) 2.208610055495077
```

Como vimos, o GeoGebra, pode nos fornecer os valores dos arcos externos, que envolvem a espiral, agora compare os resultados na figura seguinte:

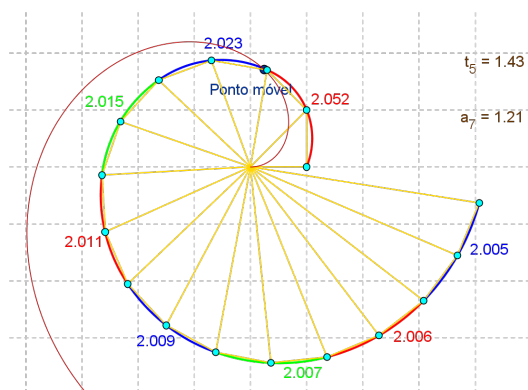


Figura 4.5: Comparação arcos externos da espiral

4.4 Espiral inversa

A ideia para encontrar o gráfico da inversa, é trocarmos as posições das coordenadas. Como sabemos a equação paramétrica da espiral de Arquimedes, que é $\alpha(t) = (a.t.\cos(t), a.t.\sin(t))$, agora, chamemos de $\beta(t)$ a curva inversa. Desse modo, a curva inversa se escreve como $\beta(t) = (a.t.\sin(t), a.t.\cos(t))$. Vejamos o gráfico de $\beta(t)$.

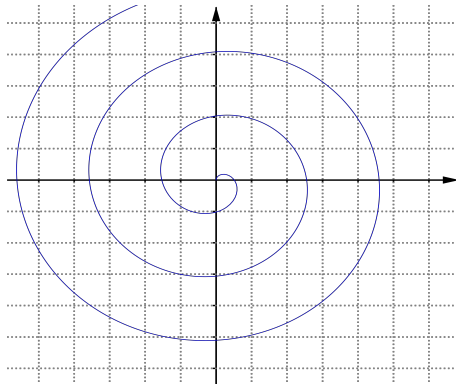


Figura 4.6: Inversa da espiral de Arquimedes

O mais interessante é quando colocamos no mesmo gráfico, as duas espirais, onde, em azul teremos $\beta(t)$ e em vermelho $\alpha(t)$. O que iremos perceber, é a simetria entre as duas espirais, em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares (*reta $y = x$*).

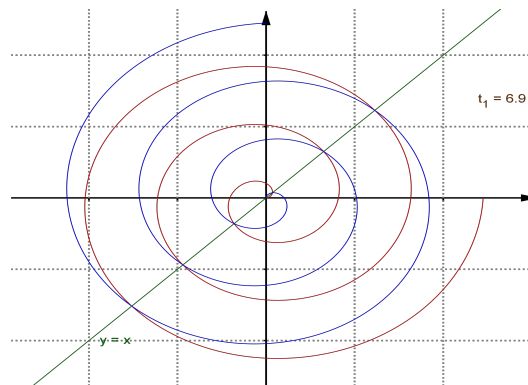


Figura 4.7: Simetria da espiral de Arquimedes e sua inversa

4.5. ESPIRAL DE ARQUIMEDES NO ESPAÇO

E se resolvermos construir a espiral de Teodoro em sentido inverso?

Teríamos de determinar pontos F'_j (*em verde*), que seriam simétricos em relação a alguma reta, com os pontos F_j , (*em vermelho*), que estariam no sentido em que nós estamos desenvolvendo nosso estudo, haja vista, o comportamento próximo entre a espiral de Teodoro e a de Arquimedes.

Com a ajuda do GeoGebra, podemos ver as expectativas respondidas, conforme a figura: que a simetria se dá próxima a reta $y = -0,47x$.

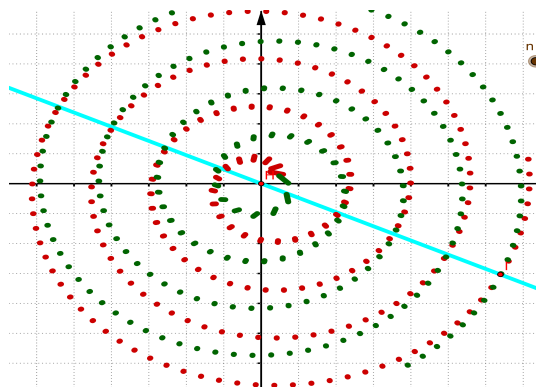


Figura 4.8: Inversa da espiral de Teodoro

4.5 Espiral de Arquimedes no espaço

Seguindo a perspectiva da parametrização, podemos então, plotar a espiral de Arquimedes no espaço, onde traçaremos uma reta perpendicular r ao plano XY , onde essa reta, é traçada a partir do ponto de intersecção das retas $x = at \cdot \cos(t)$ e $y = at \cdot \sin(t)$. Agora plotamos um plano α , paralelo ao plano XY , de equação $z = a \cdot t$. Por fim, pedimos a intersecção do plano α com a reta r . O resultado é seguinte figura:

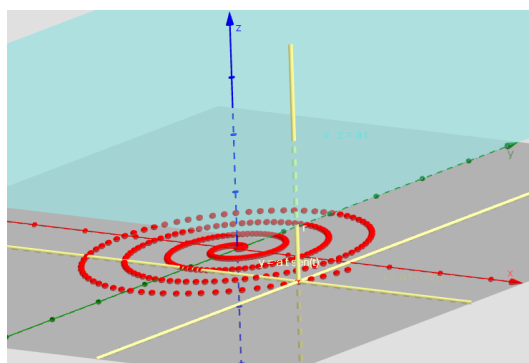


Figura 4.9: Estrutura paramétrica espacial da espiral de Arquimedes

4.6. ESPIRAL DE TEODORO NO ESPAÇO

Agora, vejamos como fica, quando plotamos o caminho *em azul*, do ponto de intersecção entre r e α .

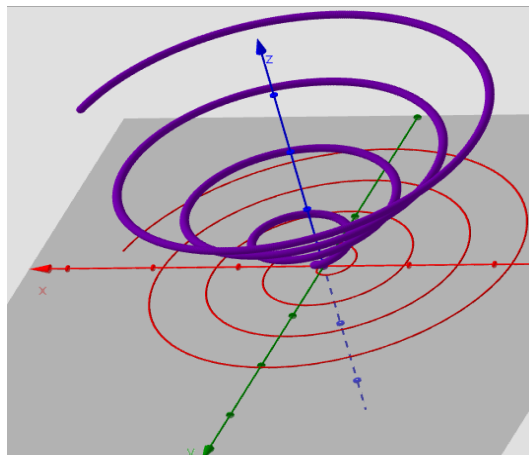


Figura 4.10: Espiral de Arquimedes no espaço

4.6 Espiral de Teodoro no espaço

Uma outra estrutura que podemos montar com a espiral de Teodoro, é uma escada em espiral, onde, colocaremos "degraus", que seguem altura igual as raízes quadradas. Na verdade, essa escada, se constrói, levantando em cada hipotenusa, um quadrado. Vejamos como fica a imagem dessa conjectura, na figura seguinte:

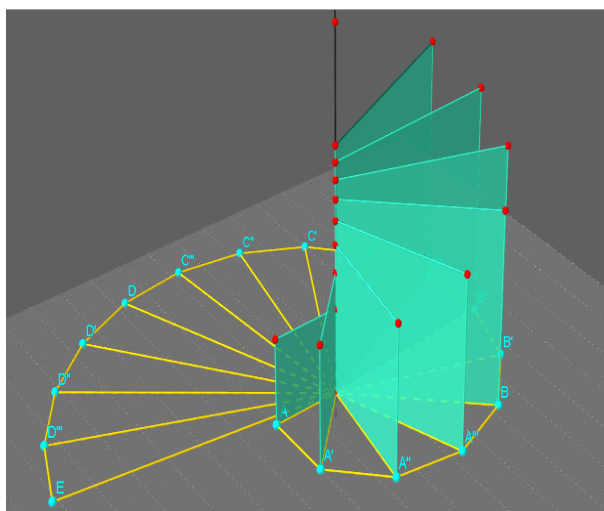


Figura 4.11: Espiral de Teodoro no espaço

4.6. ESPIRAL DE TEODORO NO ESPAÇO

Como se pode notar, se compactássemos os quadrado, ou seja, juntássemos, eles formariam uma figura como fileiras de livros em uma estante.

Bem cada quadrado, tem área definida por $S_n = (\sqrt{n})^2 = |n| = n$, já que $n \in \mathbb{N}$. Nós agora, podemos deduzir que uma pilha de livros pode formar uma espira de Teodoro se suas áreas estão em progressão aritmética.

Capítulo 5

Os ramos da espiral de Teodoro

Faremos agora, um estudo, nos sentidos geométrico e aritmético, de características da espiral de Teodoro, encontrada através de seus ramos, onde, notaremos a presença de números como o π , novos ramos, caracterizados pelos quadrados perfeitos e pelos números primos. Em cada enfoque será aferido o comportamento característico da espiral.

5.1 Ramos da Espiral de Teodoro

A evolução da espiral de Teodoro, envolve algumas característica que foram mostradas de forma discreta no segundo capítulo.

Na última seção do referido capítulo, mostramos que a evolução da espiral permite que encontremos discos com áreas iguais. E o número π , apareceu na expansão das áreas desses discos.

Só que o número π , aparece em outra estrutura da espiral, que são seus ramos, onde, à medida que ela evolui (*expande*), dois ramos consecutivos da espiral, vão estar separados por uma distância que tende a π .

Essa propriedade, se deve ao fato do comportamento aritmético da espiral, pois, a cada volta, existe uma circunferência de contenção, concêntrica com a espiral, onde, seguindo um eixo de expansão, o crescimento do raio, se dá por meio de progressão aritmética, este fato, faz com que a espiral de Arquimedes, seja também conhecida, por espiral aritmética. A denominação, circunferência de contenção, se dá, pelo motivo de que, a cada volta sobre o eixo de expansão escolhido, os pontos da espiral ficam contidos no disco da circunferência.

Na próxima figura, veremos a representação deste fato, por duas perspectiva:

1. Por Raízes próximas ao eixo de expansão (*Eixo das abscissas*).

```
(%i34) sqrt(54)-sqrt(17), float;
```

```
(%o34) 3.225363602731874
```

5.2. ÂNGULOS ENTRE RAMOS QUADRÁTICOS

```
(%i33) sqrt(110)-sqrt(54), float;
```

```
(%o33) 3.139619253351981
```

2. Pelos raios das circunferências de contensão.

```
(%i43) sqrt(73.42654)-sqrt(23.056037), float;
```

```
(%o43) 3.76725852427488
```

```
(%i39) sqrt(144.18182)-sqrt(73.42654),float;
```

```
(%o39) 3.438644688938739
```

Por meio da primeira perspectiva, chegamos a uma aproximação mais rápida de π .

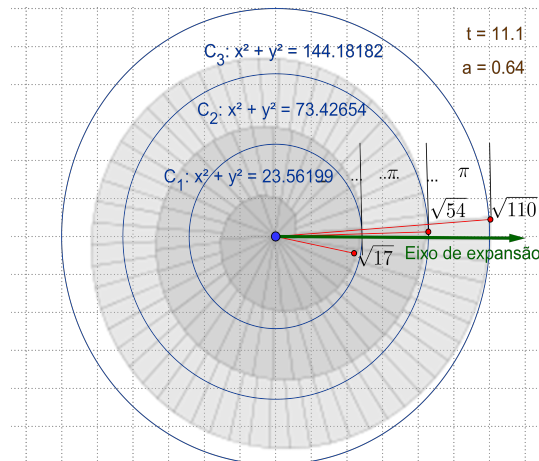


Figura 5.1: Ramos da espiral de Teodoro

5.2 Ângulos entre ramos quadráticos

A espiral de Teodoro, comporta uma outra espiral. Ela é construída de forma estrelada, ligando os pontos dos quadrados perfeitos, no sentido do centro para fora. Vejam na figura seguinte, ela traçada em laranja.

5.2. ÂNGULOS ENTRE RAMOS QUADRÁTICOS

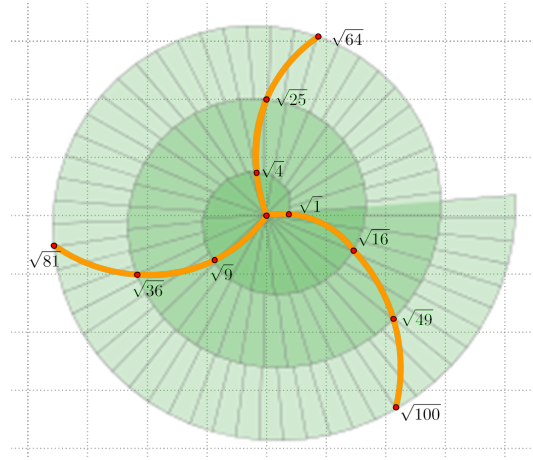


Figura 5.2: Ramos quadráticos da espiral de Teodoro

Vamos chamar esses ramos (em laranja), de quadráticos. Uma propriedade interessante, é a medida do ângulo formado por dois quadrados consecutivos, ρ_i $i = 1, 2, \dots$, de maneira que quando os ramos se expandem a medida do ângulo vai tendendo a $2rad$. Indexando os ângulos por i , de modo que $i = 1$, significa o ângulo entre os 2° e 1° , quadrados perfeitos, $i = 2$, ângulo formado entre o 3° e 2° , e assim por diante.

Já sabemos, obter o ângulo da enésima raiz, usa-se (1), onde, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, e como k se refere ao k -ésimo triângulo. As raízes que representam os quadrados perfeitos, serão indexadas em i , e tomando $j = (i + 1)^2$ e $l = i^2 - 1$. Observemos que as diferenças ocorrem com a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{llll}
 \rho_i \rightarrow & \varphi_{i+1} - \varphi_i \rightarrow & \sum_1^j \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) - \sum_1^l \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) \rightarrow & \sum_{j-l}^j \arctg(1/\sqrt{n}) \\
 \rho_1 \rightarrow & \varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow & \sum_1^3 \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) - \sum_0^0 \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) \rightarrow & \sum_1^3 \arctg(1/\sqrt{n}) \\
 \rho_2 \rightarrow & \varphi_3 - \varphi_2 \rightarrow & \sum_1^8 \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) - \sum_1^3 \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) \rightarrow & \sum_4^8 \arctg(1/\sqrt{n}) \\
 \rho_3 \rightarrow & \varphi_4 - \varphi_3 \rightarrow & \sum_1^{15} \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) - \sum_1^8 \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) \rightarrow & \sum_9^{15} \arctg(1/\sqrt{n}) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \rho_n \rightarrow & \varphi_{(n+1)^2} - \varphi_{n^2} \rightarrow & \sum_1^{(i+1)^2-1} \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) - \sum_1^{i^2-1} \arctg\left(1/\sqrt{k}\right) \rightarrow & \sum_{i^2}^{i^2+2i} \arctg(1/\sqrt{n})
 \end{array}$$

Usando o wxMaxima, vamos obter os seguintes resultados:

```
(%i10) phi:makelist(sum(atan(1/sqrt(i)),i, n^2-1, ((n+1)^2)-1), n, 2,
10),float;
```

```
(%o10) [2.496581439899081, 2.326129935275499, 2.244411214461376,
2.195830673695702, 2.163494190850821, 2.140379431860437, 2.123017877213123,
```


2.109492268528106, 2.098654346505588]

5.3 Ângulo entre duas raízes consecutivas no mesmo ramo quadrático

Outra propriedade interessante do ramo quadrático é que, em um mesmo ramo, duas raízes consecutivas, estão em circunferências de contenção diferentes, daí, para se caminhar de uma raiz a outra, termos que percorrer, quase toda circunferência, faltando um certo ângulo. Esse ângulo, à medida que o ramo fica maior, ou escolhemos raízes cada vez maiores consecutivas no ramo, ele tende a o valor de $(2\pi - 6) \text{ rad}$.

Não é difícil perceber isso, pois, para caminharmos de uma certa raiz, num determinado ramo, em direção a sua consecutiva no mesmo ramo, estaremos percorrendo três vezes o ângulo ρ , que como sabemos, tende a 2 rad , segue então, $3 \cdot 2 = 6 \text{ rad}$, e como já foi dito, esse, seria o explementar da volta completa ($2\pi \text{ rad}$). Vejamos na figura, abaixo:

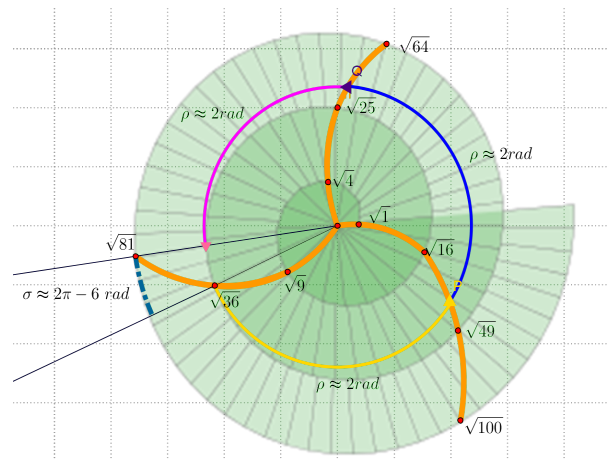


Figura 5.3: Ângulo entre raízes no mesmo ramo

Uma outra coisa bem interessante nos ramos quadrático, é a disposição dos quadrados perfeitos em cada ramos.

Observando o ramo que contém as raízes de 1, 16, 49 e 100. Nota-se que:

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = \sqrt{(1 + 3)^2}$$

$$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = \sqrt{(1 + 2 \cdot 3)^2}$$

$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = \sqrt{(1 + 3 \cdot 3)^2}$$

5.3. ÂNGULO ENTRE DUAS RAÍZES CONSECUTIVAS NO MESMO RAMO QUADRÁTICO

:

$$\sqrt{RQ_1 i} = \sqrt{n_i^2} = \sqrt{\left(\sqrt{1} + 3 \cdot (i - 1)\right)^2}$$

Sendo, $i = 1, 2, \dots$, e $RQ_1 i$ significa, o Ramo Quadrático que começa com a raiz de 1, a partir do centro.

Agora vejamos o ramo que contém as raízes de 4, 25 e 64. Nota-se:

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = \sqrt{(1 + 3)^2}$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = \sqrt{(2 + 1.3)^2}$$

$$\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = \sqrt{(2 + 2.3)^2}$$

:

$$\sqrt{RQ_4 i} = \sqrt{n_i^2} = \sqrt{\left(\sqrt{4} + 3 \cdot (i - 1)\right)^2}$$

Sendo, $i = 1, 2, \dots$, e $RQ_4 i$ significa, o Ramo Quadrático que começa com a raiz de 4, a partir do centro.

Por fim, analisando o terceiro ramo, que contém as raízes de 9, 36 e 81, tem que:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2}$$

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = \sqrt{(3 + 1.3)^2}$$

$$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = \sqrt{(3 + 2.3)^2}$$

:

$$\sqrt{RQ_9 i} = \sqrt{n_i^2} = \sqrt{\left(\sqrt{9} + 3 \cdot (i - 1)\right)^2}$$

Sendo, $i = 1, 2, \dots$, e $RQ_9 i$ significa, o Ramo Quadrático que começa com a raiz de 9, a partir do centro.

Assim, como nós detemos apenas três formas, podemos identificar a qual ramo pertence o quadrado perfeito. E mais, esses ramos quadráticos, dividem a espiral em três setores

distintos, devido a constância dos ângulos entre eles, em consequência disso, podemos identificar dada uma raiz qualquer, em qual setor ela se posiciona.

Exemplo: Se quisermos saber, qual seria a posição da $\sqrt{70}$?

Como se sabe $\sqrt{64} < \sqrt{70} < \sqrt{81}$, logo, a raiz de 70, está situada entre o 2º e 3º RQ's.

◇

5.4 Ramos primos

Desde os tempos da antiga Grécia, os números primos encantam os matemáticos, e tem em Eratóstenes, com o seu crivo, a primeira tentativa de colocar um padrão de distribuição dos números primos. Então no renascimento, se retoma os estudos dos números primos, por parte de matemáticos como, Euler, Fermat, Gauss, Goldbach dentre outros grandes nomes, que fizeram surgir novas teorias e conjecturas, que até hoje estão sem respostas.

Entre uma das mais almejadas procuras da teoria dos números, é a de encontrar uma forma ou padrão de distribuição dos números primos, onde não existe até hoje uma resposta.

O matemático Stanislaw Ulam, por volta de 1963 notou um padrão interessante, ao "desenhar" os números inteiros, sob o formato de espiral, (*espiral de Ulma*), ou espiral numérica, o padrão era a respeito dos números primos, que sempre acabam em linhas diagonais, surpreendentemente as linhas diagonais, ficam alternando em ímpares e pares. Muito mais interessante foi a tendência de alguns primos em ficarem em algumas diagonais mais do que em outras e isso, acontecia não importa se você começasse com o um no centro, ou qualquer outro número. O motivo pelo qual isso acontecia, ainda hoje é desconhecido e alvo de muita especulação.

Inspirado na ideia de Ulan, poderemos fazer a mesma coisa, distribuindo números naturais nos vértices da espiral de Teodoro. Quando isso acontece, notamos que os primos não ficam em diagonais isolados, mas ocorre as seguintes fatos:

1. Os primos se acomodam em ramos espiralados;
2. Há um espaçamento, que segue um padrão entre os ramos;
3. Há três tipos de ramos primos, onde, dois têm a mesma rotação, e terceiro rotação inversa;
4. Os ramos se diferem, com relação a pontos que são atingidos, baseados na diferença de segunda ordem dos pontos.

Para que não haja uma poluição de imagem, e uma melhor compreensão, construiremos os passo, de modo a ressaltar cada tópico mencionado anteriormente.

5.4. RAMOS PRIMOS

Vejamos primeiramente a distribuição de números primos, na espiral com 122 triângulos.

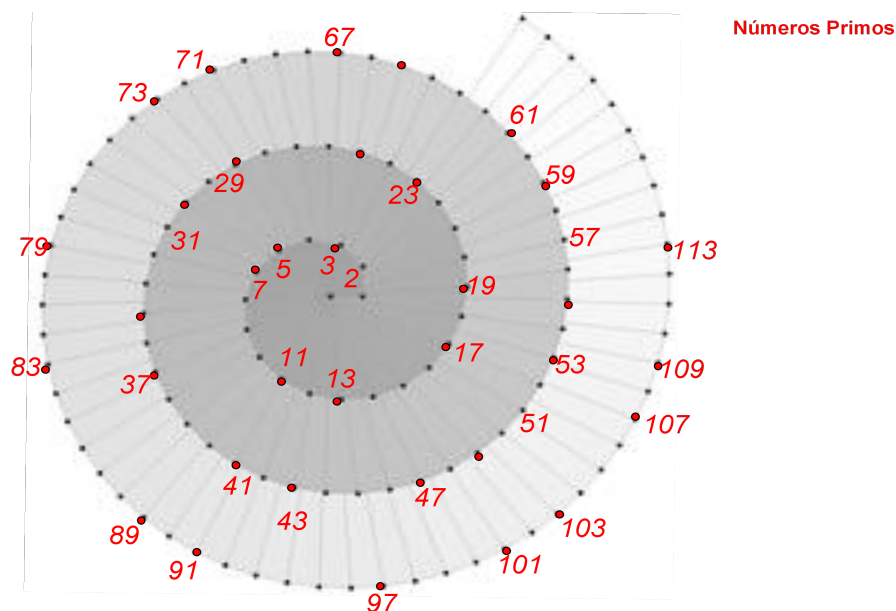


Figura 5.4: Números primos na espiral

Agora, se observarmos alguns primos, há um certo padrão, como por exemplo, do 101 e 103 há uma diferença de um triângulo, e o mesmo ocorre entre 51 e 53. Agora repare na estrutura que liga os primos 107, 59 e 29.

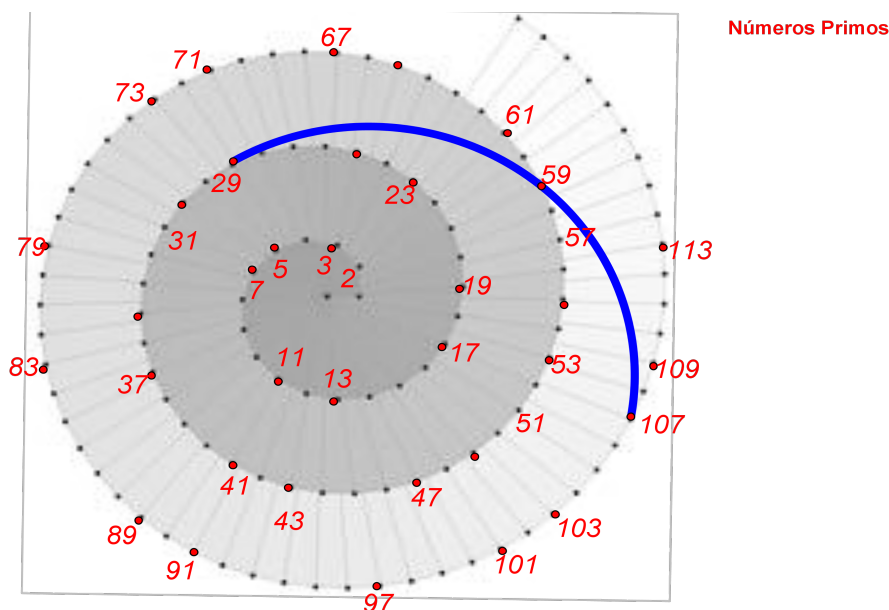


Figura 5.5: Ramo primo de fator 18

E o próximo primo depois de 107 é 109, que passa apenas um triângulo, se seguirmos esse padrão, com relação a 59, chegaremos a 61 e repetindo para próximo ramo, vamos passar de 29 e chegarmos em 31, o interessante em seguir esse padrão é o fato desses números possuírem a mesma diferenças, em segunda ordem, vejamos:

$$\begin{array}{r|l}
 107-59 = 48 & 109-61=48 \\
 59-29 = 30 & 61 - 31 = 30 \\
 48-30 = 18 & 48 - 30 = 18
 \end{array}$$

E vejamos que se pularmos três triângulos, após, 109, chegaremos em 113, fazendo o mesmo processo nos ramos internos, atingiremos 59, 23 e 5:

$$\begin{array}{rcl}
 113 - 59 & = & 54 \\
 & & 54 - 36 = 18 \\
 59 - 23 & = & 36 \\
 & & 36 - 18 = 18 \\
 23 - 5 & = & 18
 \end{array}$$

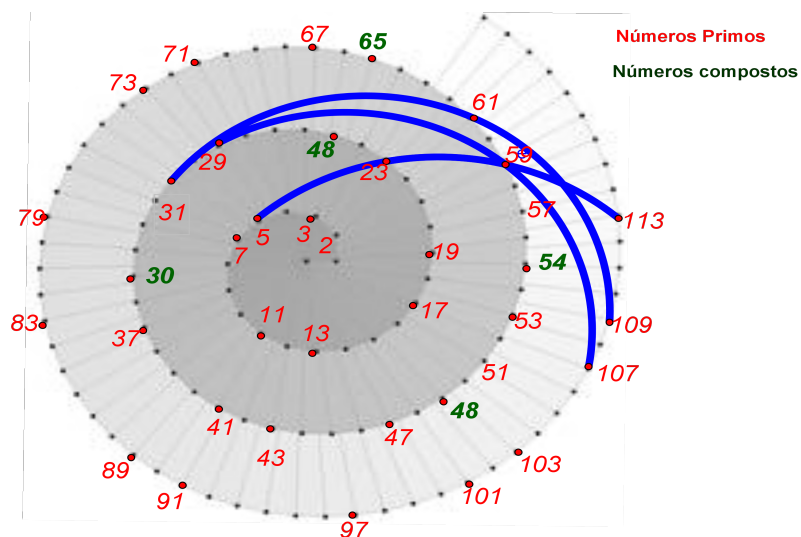


Figura 5.6: Ramos primos de ordem 18

Bom seguindo esse processo, poderemos determinar vários ramos com essa característica, vejamos a figura:

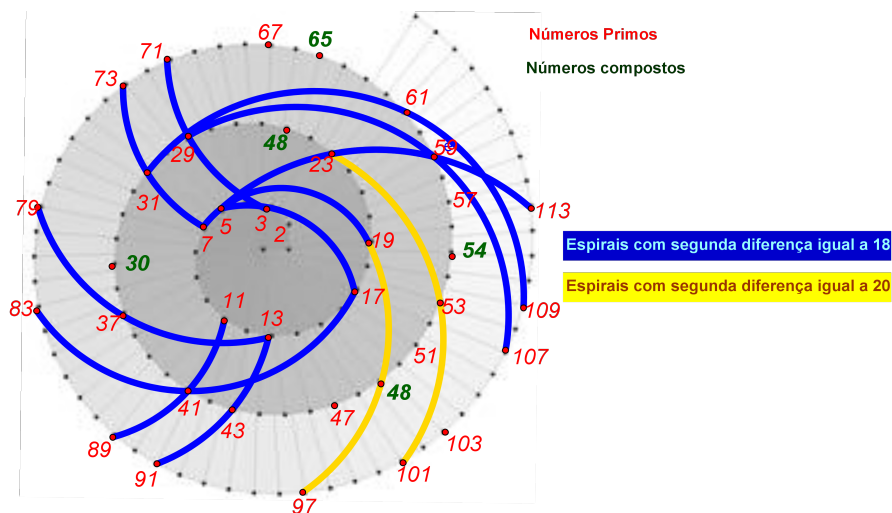


Figura 5.7: Ramos com diferença de segunda ordem de 18 e 20

Como se pode ver na figura, podemos perceber que os ramos estão no mesmo sentido de giro, e formam um "vórtex" próximo do centro.

Agora, uma coisa bem interessante, é que podemos colecionar primos com ramos que atinjam sequência de números, cuja diferença de segunda ordem é 22. Só que nesse caso, ocorre, uma inversão da rotação do ramo. Vejamos na figura:

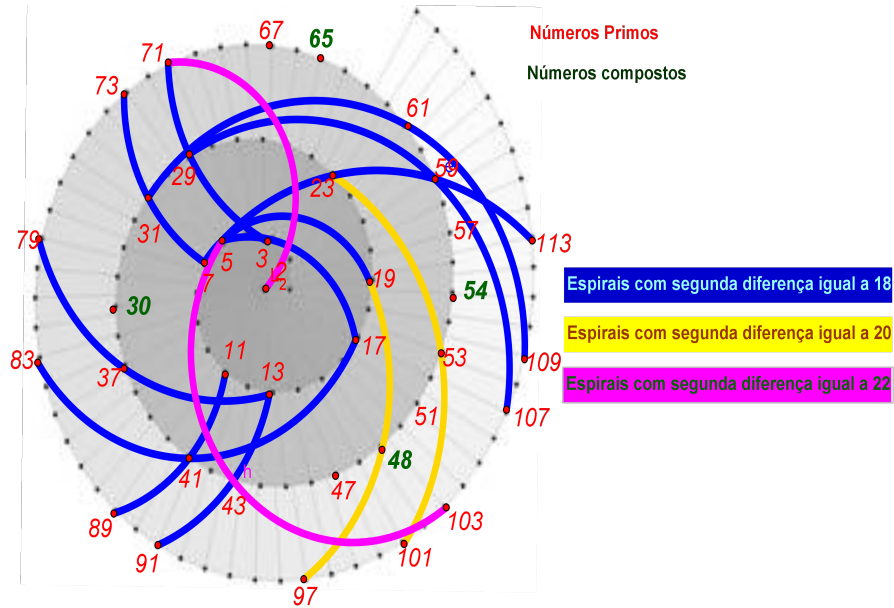


Figura 5.8: Ramos primos com diferenças de 18, 20 e 22

É sem dúvida um estudo fascinante, e podemos citar [8], que fez um estudo dedicado inteiramente a respeito da distribuição de números primos na espiral de Teodoro, inclusive, chegando a desenvolver um polinômio do 2º grau, para interpretar algebricamente a distribuição. E para determinar esse complexo sistema, ele fez um estudo de uma espiral com quase 300 triângulos, onde coloco no apêndice tal figura. E apesar de bela, ficou uma imagem com muitas imagens (*ramos*), o que torna a leitura difícil.

Considerações finais

A espiral de Teodoro, pode até não ter os encantos da espiral logarítmica *mirabilis*) mas, em um estudo mais avançado, é uma ferramenta que nos permite imaginar várias frentes de estudos da matemática, agradando a gregos e troianos.

Sua diversificação de temas matemáticos, abrangem o cálculo, chegando até as séries, passando pela álgebra onde poderia ser feito um estudo vetorial da espiral, que para não termos um longo estudo, preferi não fazer algum tipo de alusão neste sentido. A geometria se fez bastante presente, inclusive a Geometria Diferencial. Pode-se ainda, fazer um estudo de interpolação dos pontos da curva. Isso são sugestões que ficam, para mostrar a força que tem essa figura.

E como havia dito, é uma estrutura que com os recursos computacionais, nos permite ver com mais facilidade suas propriedades de forma clara e com exatidão. Seria um esforço muito grande estudar isso, sem o auxílio computacional.

Nos apêndices, é mostrado outras espirais, afim de comparações e apreciações visuais, inclusive com suas respectivas equações polares.

Apêndice A

Uso didático da espiral de Teodoro

É uma unanimidade nos livros didáticos do 9º ano, encontrarmos o estudo da radiciação e do teorema de Pitágoras, e com poucas exceções, o teorema de Pitágoras é introduzido no 8º ano. O que não se vê é a conexão com os dois temas.

Essa perspectiva que se pode levantar, sem dúvida dará ao aluno uma concepção maior dos dois temas, pois, ele irá enxergar os conhecimentos aritmético e algébrico, usados nas simplificações de raízes, geometricamente com a simples abordagem da espiral de Teodoro. Neste sentido, recomendamos que logo após a conclusão do estudo feito sobre a radiciação, fosse introduzido o teorema de Pitágoras, no qual como atividade lúdica pedagógica, os alunos passaria para construção da espiral de Teodoro. Em seguida, se faria o desdobramento como fora mostrado no Capítulo 2, seção 5. Com isso é visto a questão de proporcionalidade entre algumas raízes. E como também fora feito na mesma seção, o estudo sobre a irracionalidade de algumas raízes quadradas.

Ainda os alunos poderão perceber que, apesar da $\sqrt{2}$ ser irracional, e pela abordagem atual dos livros didáticos é um número decimal infinito e não periódico, ela tem um tamanho determinado em qualquer unidade de comprimento escolhida.

Para o ensino médio, o enquadramento tratado na seção 6 do Capítulo já citado, é uma forma de mostrar a distribuição de números irracionais, referentes às raízes quadradas, ao longo da reta Real, onde alguns autores, já fazem uso do recurso de rebatimento da hipotenusa sobre a reta, só que não abrangem mais do que a $\sqrt{3}$ e não fazem qualquer aferição sobre o resultado do processo inverso. Também pode-se introduzir algo que não se aborda com tanta clareza, que é a geometria dos números complexos, tendo em vista que sua construção ter sido elaborada por meio das coordenadas polares, o que nos dias atuais é um sistema ignorado no nível médio. Fazendo uma abordagem das coordenadas polares com o uso da espiral, de modo que seria o primeiro contato do aluno com esse sistema, nos mesmos moldes do que se faz hoje com o cartesiano, utilizando apenas números inteiros. Mostrado as transformações de homotetia e rotação, tornando mais acessível para os alunos a compreensão da geometria dos números complexos.

Neste sentido, fica nosso posicionamento sobre o uso da espiral de Teodoro como

instrumento didático no ensino da matemática, de forma mais dinâmica e concreta a nível fundamental e médio.

Apêndice B

Observações Finais

Trazemos aqui uma complementação do texto.

B.1 Rotina em linguagem $\text{\LaTeX}$, da construção espiral de Teodoro

```
\documentclass{minimal}

\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{calc}
\begin{document}

\pagestyle{empty}
\pgfdeclarelayer{background}
\pgfdeclarelayer{foreground}
\pgfsetlayers{background,main,foreground}

\xdefinecolor{darkgreen}{RGB}{175, 193, 36}
\newcounter{cntShader}
\newcounter{cntRoot}
\setcounter{cntShader}{20}
\def\couleur{darkgreen}

\begin{tikzpicture}
  \foreach \y in {86,38,15}{
    \setcounter{cntShader}{1}
    \coordinate (a) at (0,0);
    \coordinate (b) at (0:1);
```

```
\foreach \x in {1,...,\y}{%
  \coordinate (c) at ($ (b)!1cm!270:(a) $);
  \begin{pgfonlayer}{background}
    \draw[fill=\couleur!\thecntShader] (a)--(b)--(c)--cycle;
  \end{pgfonlayer}
  \setcounter{cntRoot}{\x}
  \addtocounter{cntRoot}{1}
  \node[fill=white,draw,circle,inner sep=1pt] at (c)
    {$\sqrt{\thecntRoot}$};
  \coordinate (b) at (c);
  \pgfmathsetcounter{cntShader}{\thecntShader+4}
  \setcounter{cntShader}{\thecntShader}
}
}
\node[fill=white,draw,circle,inner sep=1pt] at (0:1) {$\sqrt{1}$};
\end{tikzpicture}

\end{document}
```

O desenho está mostrado na seção (1.4). Todo código fonte mostrado acima, pode ser encontrado no site WWW.TEXAMPLE.NET .

B.2 Constante de Teodoro

Apesar de alguns autores se referirem a constante de Teodoro como sendo $\sqrt{3}$, inclusive, em épocas remotas era considerado um número sagrado, definido através do encontro de dois círculos unitários conforme artigo:

"Bexiga Piscis (bexiga de peixe em latim) ou mandorla era um símbolo que era conhecido nas antigas civilizações da Mesopotâmia, África e Ásia. Consistiu de dois círculos de mesmo raio, de modo que se cruzam no centro de cada um dos círculos estava na circunferência da outra.

A relação matemática entre a largura (o que foi medido pelos pontos de extremidade do "corpo", exceto para a "cauda") multiplicado pela sua altura foi aproximado pela proporção 265: 153. Esta razão, que corresponde a 1,73203, um número sagrado foi chamado, a extensão do peixe foi considerado no momento. Especificamente, a relação geométrica entre estas dimensões é a raiz quadrada de três, ou 1,73205 ... (porque se desenhar a linha reta que une os centros dos dois círculos, com os dois pontos onde os círculos se interceptam, é obtido como resultado dois triângulos equiláteros são unidas por um lado). A relação de 265: 153 é apenas uma estimativa da raiz quadrada de 3, não pode ser obtido qualquer abordagem mais justificável com números menores."

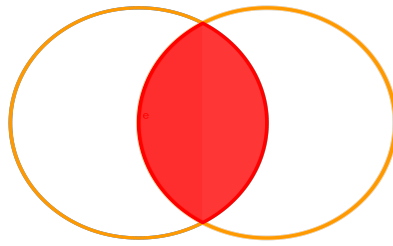


Figura B.1: Barriga de peixe

E não fora feita referência em nosso estudo, pois, a constante de Teodoro mencionada fora obtida por uma correção no cálculo do ângulo total da espiral, como foi dito, por tanto discrepante nao só de encontro como de valores.

B.3 Espiral desenvolvida por Khan

Vejamos com difícil e trabalhoso, construir manualmente, com o intuito de elaborar um estudo da distribuição dos números primos na espiral de Teodoro. Sem dúvida, trata-se de um trabalho árduo e minuciosos, digno da paciência de um matemático e claro de um elogio artístico.

B.3. ESPIRAL DESENVOLVIDA POR KHAN

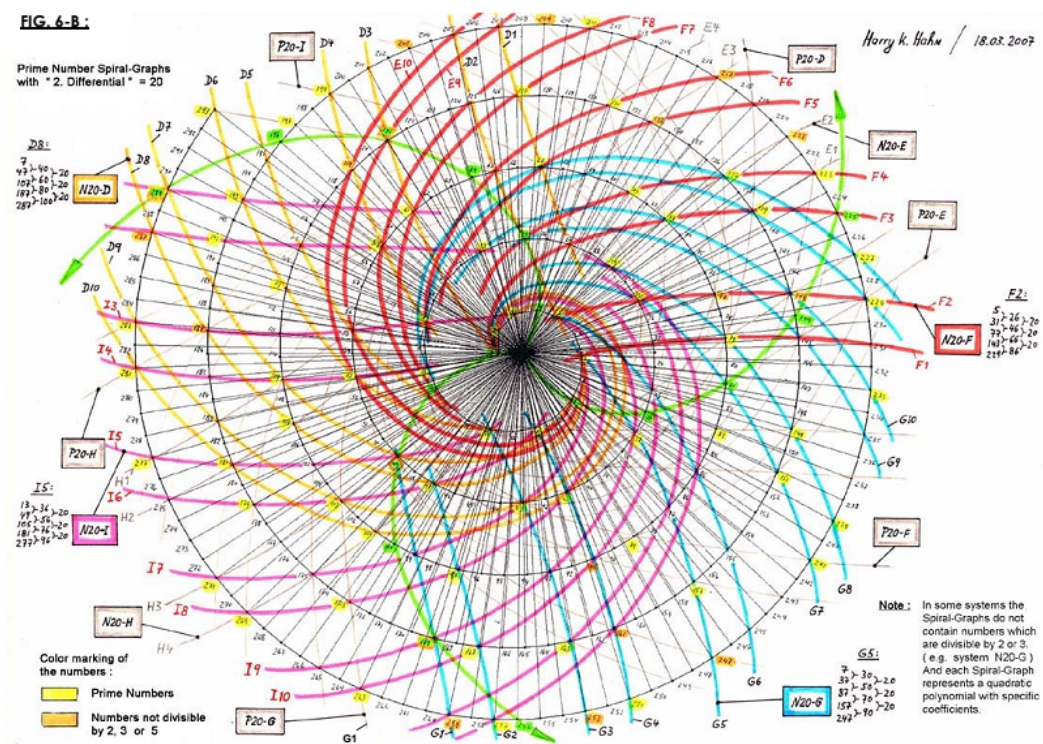


Figura B.2: Espiral construída de forma manual por Khan

B.4 Como determinar a sequência A072895

Vamos agora, estipular limites para o ângulo do enésimo triângulo da espiral. Onde as seguintes funções são muito boas aproximações dos limites inferior e superior respectivamente, para $\Phi(r)$ com um erro da ordem $\left(\frac{1}{r^3}\right)$, sendo r , o raio da espiral e K , a constante de Teodoro:

$$\varphi_{Ls}(r) = K + r + \frac{\sqrt{9r^2 + 3}}{3}$$

$$\varphi_{Li}(r) = K + \frac{\sqrt{36r^2 + 6}}{3}$$

Para ver isto, nós comparamos a série de Taylor em $\varphi_L(r) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ e expandiu-se r ao infinito têm-se:

$$\varphi_{Ls}(r) = K + 2r + \frac{1}{6r} - \frac{1}{72r^3}O + \frac{1}{r^5}O$$

$$\varphi_{Li}(r) = K + 2r + \frac{1}{6r} - \frac{1}{144r^3}O + \frac{1}{r^5}O.$$

Surpreendentemente temos que $\varphi_{Li}(r) < \varphi(r) < \varphi_{Ls}(r)$, para todos $r \geq 0$. $\varphi_L(r)$ têm funções inversas simples, com $a = \frac{(\varphi-K)}{2}$, temos:

$$r_{Ls}(\varphi) = \varphi_{Ls}^{-1}(\varphi) = \sqrt{a^2 - \frac{1}{6}}$$

e

$$r_{Li}(\varphi) = \varphi_{Li}^{-1}(\varphi) = a - \frac{1}{12a}.$$

Portanto, $r_{Li}(\varphi) < r(\varphi) < r_{Ls}(\varphi)$, $\varphi > \frac{\sqrt{6}}{3} + K$.

Sequência A072895 do Encyclopedia On-Line de Integer Sequences é definido como o menor número de triângulos para completar k revoluções. Seus elementos são 17, 54, 110, 186, 281, 396, 532, 686, 861, 1055, 1269, 1503, 1757, 2030, 2323, 2636, 2968, 3320, 3692, 4084, 4495, 4927, 5377, 5848, 6338.

Temos $r_{Li}(2k\pi) < r(2k\pi) < r_{Ls}(2k\pi)$ e porque $n = 2r - 1$ segue que $[r_{Li}(2k\pi)^2] < A072895(k) < [r_{Ls}(2k\pi)^2] \forall k \leq 1\,000\,000\,000$

Como os dois tetos são iguais, por isso temos:

$$A072895(k) = [r_L(2k\pi)^2] = \left[\left(k\pi - \frac{K}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\right], \quad k \leq 1\,000\,000\,000.$$

B.5 Outras espirais

Espiral hiperbólica, equação polar $r = \frac{a}{\theta}$.

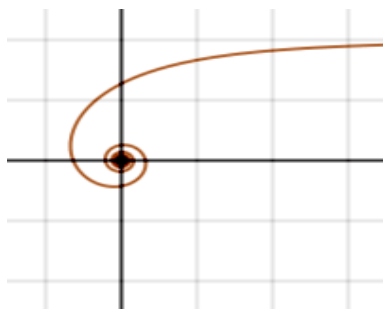


Figura B.3: Hiperbólica

Espiral de Fibonacci, símbolo da nossa SBM.

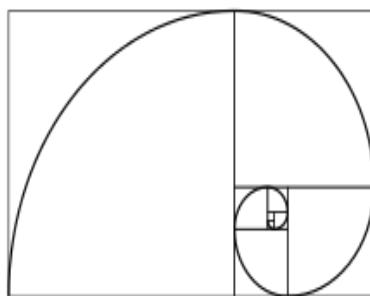


Figura B.4: Espiral de Fibonacci

Espiral de Fermat ou parabólica, de equação polar $r = a.\sqrt{\theta}$.

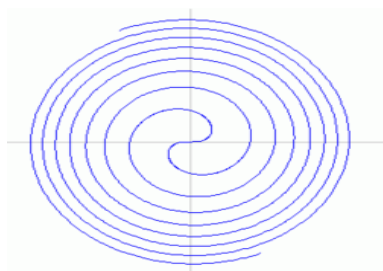


Figura B.5: Espiral de Fermat

Espiral logarítmica ou de Bernoulli (*mirabilis*) com equação polar $r = ab^\theta$.

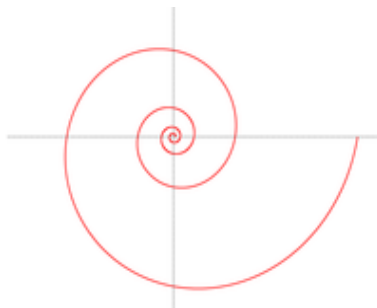


Figura B.6: Espiral de Bernoulli

Espiral de Lituus, equação polar $r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$.

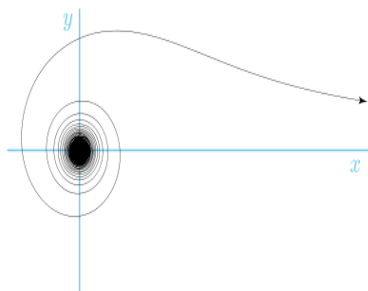


Figura B.7: Espiral de Lituus

Espiral de Cornu de equação paramétricas: $S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, $C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$.

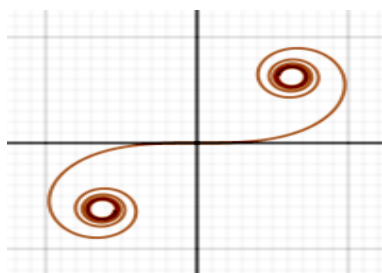


Figura B.8: Espiral de cornu ou clotóide

Família de clotóides.

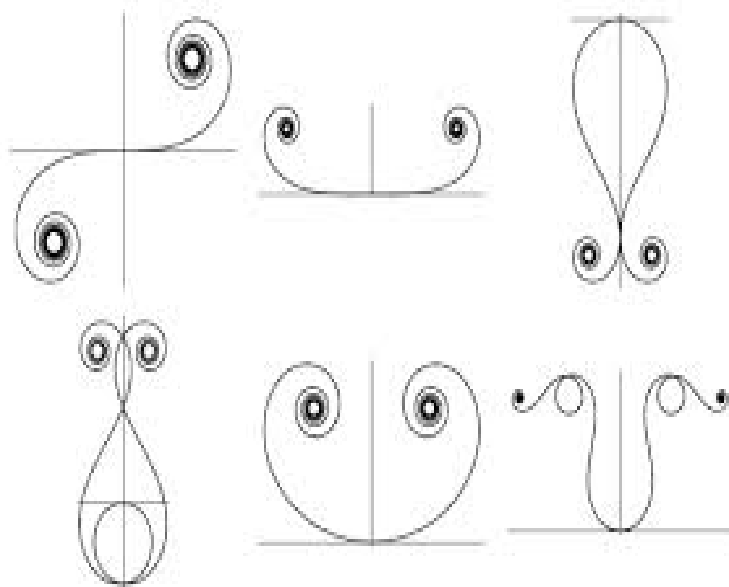


Figura B.9: Família de cornu's

Interior da concha do Náutilo



Figura B.10: Concha do Náutilo

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Lenimar Nunes de, *Breve introdução ao LATEX*, UFPB, 24/ABRIL/2000.
- [2] ANTON, HOWARD, Irl Bivens, Stephen Davis, *Cálculo, V. II*, Tradução Claus Ivo Doering - 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [3] BARBOSA JUNIOR, Joaquim, *Resolução de Problemas Usando wxMaxima*, dissertação de mestrado do PROFMAT, UFTM, MG, 2012.
- [4] Cálculo MATEMÁTICA PARA TODOS, Ed.22, ANO 2, 2012.
- [5] EVES, Howard, *Introdução à história da matemática*, Tradução:hygino H. Domingues, Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [6] FINCH, Steven, *Constant of Theodorus*, April 9, 2005.
- [7] GARCIA, Vera Clotilde, *O NÚMERO DE OURO COMO INSTRUMENTO DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ESTUDO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS*, INSTITUTO DE MATEMÁTICA, UFRGS.
- [8] HARN, Harry K., *The Distribution of Prime Numbers on The Square Root Spiral*, Ludwig Erdard - Str. 10, Ettlingln, Germany, 30, June 2007.
- [9] HEFEZ, Abramo *Aritmética / Abramo Hefez*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [10] HEFEZ, Abramo e VILLELA, Maria Lucia Torres, *Polinômios e Equações Algébricas / Abramo Hefez; Maria Lucia Torres Villela*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [11] LANDAU, Edmund Georg Hermann, *Teoria Elementar dos Números*, Rio de Janeiro, RJ, Editora Ciência Moderna, 2002.
- [12] MEDEIROS, Luiz Adaauto da Justa, *Introdução às Funções Complexas*, Editora MCGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA, São Paulo - SP & Rio de Janeiro - RJ, 1972.

- [13] MENEZES, Daniel Brandão, Antônio Airtton Freitas Filho, Evaldo Oliveira Maia, Artur Texeira Peraia *O MISTÉRIO DA ESPIRAL DE CIRENE*, universidade estadual do Ceará - UEC, Artigo apresentado no III ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.
- [14] MOAR, Eli, *e: A história de um número*, tradução de Jorge Calife. - 4ª ed. - Rio de Janeiro, RJ, Record, 2008.
- [15] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de, *Manual de redação matemática: com um dicionário etimológico explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação*, Campina Grande, PB, 2010.
- [16] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araújo, *Tópicos de Teoria dos Números / Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira; Fábio E. Brochedo Martínez; Nicolau Corção Saldanha*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [17] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*, 2ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [18] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, *Geometria / Antonio Caminha Muniz Neto*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [19] PILLING, Sérgio, *CÁLCULO NUMÉRICO*, Universidade de engenharia arquitetura e urbanismo - FEAU, UNIVAP, São José dos Campos - SP.
- [20] SPENTHOF, Roberto Luiz e SOUZA, Josiney Alves de, *PRIMOS: DA ALEATORIEDADE AO PADRÃO*, Artigo da PMO-SBM, volume 1, número 1, 2013.
- [21] STEWART, Ian, 1945, *Mania de matemática: diversão e jogos de lógica matemática*, tradução Maria Luiza X. de A. Borges, Rio de Janeiro - RJ, Jorge Zahar Ed., 2005.
- [22] WALDVOGEL, Jörg, *Analytic Continuation of The Theodorus Spiral*, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich, October 9, 2008 to February 2009.