

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE INFORMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

TEOBALDO LEITE BULHÕES JÚNIOR

ALGORITMOS EXATOS PARA O PROBLEMA DE EDIÇÃO DE  $p$ -*CLUSTERS*

João Pessoa

2015

TEOBALDO LEITE BULHÕES JÚNIOR

ALGORITMOS EXATOS PARA O PROBLEMA DE EDIÇÃO DE  $p$ -*CLUSTERS*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática do Centro de Informática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Informática.

Orientador: Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

Co-Orientador: Prof. Dr. Anand Subramanian

João Pessoa

2015

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de  
Mestrado de **TEOBALDO LEITE BULHÕES  
JUNIOR**, candidato ao título de Mestre em  
Informática na Área de Sistemas de Computação,  
realizada em 21 de julho de 2015.

Ao vigésimo primeiro dia do mês de julho do ano de dois mil e quinze, às dezesseis horas, no Centro de Informática - Universidade Federal da Paraíba (unidade Mangabeira), reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o Trabalho Final do **Sr. Teobaldo Leite Bulhões Junior**, candidato ao grau de Mestre em Informática, na área de “*Sistemas de Computação*”, na linha de pesquisa “*Computação Distribuída*”, do Programa de Pós-Graduação em Informática, da Universidade Federal da Paraíba. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: **Lucídio dos Anjos Formiga Cabral (PPGI-UFPB)**, orientador e presidente da Banca, **Anand Subramanian (PPGI-UFPB)**, examinador interno, **Roberto Quirino do Nascimento (PPGI-UFPB)**, examinador interno e **Manoel Bezerra Campelo Neto (UFC)**, examinador externo à Instituição. Dando início aos trabalhos, o professor Lucídio dos Anjos Formiga Cabral cumprimentou os presentes, comunicou aos mesmos a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Algoritmos Exatos para o Problema da Edição de p-Clusters*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “*aprovado*”. Assim sendo, eu, Nadja Rayssa Soares de Almeida, Auxiliar em Administração, Secretária do PPGI – Programa de Pós Graduação em Informática, lavrei a presente ata que segue assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, 21 de julho de 2015.

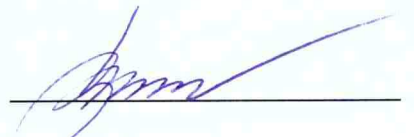
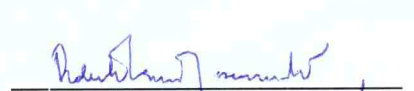
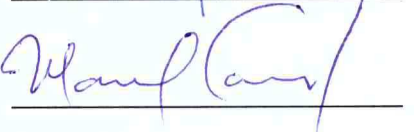
  
Nadja Rayssa Soares de Almeida

**Profº Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral**  
Orientador e presidente da Banca (PPGI-UFPB)

**Profº Dr. Anand Subramanian**  
Examinador Interno(PPGI-UFPB)

**Profº Dr. Roberto Quirino do Nascimento**  
Examinador Interno (PPGI – UFPB)

**Profº Dr. Manoel Bezerra Campelo Neto**  
Examinador Externo à Instituição (UFC)

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais e minha tia Gracinha, pelo apoio dado durante toda a minha vida.

A minha namorada, Ana, pelo amor, amizade e muitos bons momentos.

Aos meus orientadores, Lucídio e Anand, por todos os ensinamentos e oportunidades dadas durante minha graduação e meu mestrado.

A todos os meus colegas do Labmeqa, pelo companheirismo.

A CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

## RESUMO

Este trabalho trata do Problema de Edição de  $p$ -Clusters ( $p$ -PEC), o qual consiste em realizar um número mínimo de edições (adições ou remoções de arestas) em um grafo  $G$  de modo a transformá-lo em uma união disjunta de  $p$  cliques (ou *clusters*), sendo  $G$  e  $p$  dados de entrada. O  $p$ -PEC é um problema NP-Difícil que possui aplicações em áreas como biologia computacional e aprendizagem de máquina. Para resolvê-lo, foram propostas duas novas formulações matemáticas e melhorias em uma formulação proveniente da literatura, bem como novas desigualdades válidas. As três formulações consideradas foram estudadas tanto teoricamente, através da comparação entre as relaxações lineares, quanto empiricamente, através do desenvolvimento de três algoritmos exatos: dois baseados em *Branch-and-Cut* (BC) e um baseado em *Branch-and-Price* (BP). Os algoritmos foram testados em instâncias com até 211 vértices. Os resultados mostram o impacto da razão entre  $p$  e o número de vértices, da densidade do grafo e das desigualdades nos desempenhos dos algoritmos. No geral, os algoritmos BC foram superiores ao algoritmo BP. Porém, em algumas instâncias, os melhores limites duais foram obtidos pelo algoritmo BP.

Palavras-chave: Edição de Grafos; *Clusterização*; *Branch-and-Cut*; *Branch-and-Price*.

## ABSTRACT

This work deals with the  $p$ -Cluster Editing Problem ( $p$ -CEP), which consists in performing a minimum number of editions (additions or removals of edges) in a graph  $G$  in order to transform it in a disjoint union of  $p$  cliques (clusters), where  $G$  and  $p$  are input data.  $p$ -CEP is a NP-Hard problem with applications in areas such as computational biology and machine learning. To solve this problem, we propose two new mathematical formulations and improvements in a formulation from the literature, as well as new valid inequalities. The three formulations were studied both theoretically, by comparing their linear relaxations, and practically, by implementing three exact algorithms: two based on Branch-and-Cut (BC) and one based on Branch-and-Price (BP). The proposed algorithms were tested in instances with up to 211 vertices. The results show the performance of the algorithms according to the graph density and the ratio between  $p$  and the number of vertices. Overall, the BC algorithms were superior to the BP algorithm. However, the latter obtained the best dual bounds in some instances.

Keywords: Graph Editing; Clustering; Branch-and-Cut; Branch-and-Price.

## SUMÁRIO

|          |                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                    | <b>14</b> |
| 1.1      | Definição do Tema . . . . .                          | 14        |
| 1.2      | Justificativa . . . . .                              | 15        |
| 1.3      | Objetivos . . . . .                                  | 16        |
| 1.3.1    | Objetivo Geral . . . . .                             | 16        |
| 1.3.2    | Objetivos Específicos . . . . .                      | 16        |
| 1.4      | Estrutura do Trabalho . . . . .                      | 17        |
| <b>2</b> | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA</b> | <b>18</b> |
| 2.1      | Conceitos Básicos de Teoria dos Grafos . . . . .     | 18        |
| 2.2      | Trabalhos Relacionados . . . . .                     | 19        |
| 2.2.1    | PEC . . . . .                                        | 20        |
| 2.2.2    | $p$ -PEC . . . . .                                   | 21        |
| <b>3</b> | <b>FORMULAÇÕES E INEQUAÇÕES VÁLIDAS</b>              | <b>23</b> |
| 3.1      | Formulações . . . . .                                | 23        |
| 3.1.1    | Formulação $\mathcal{F}_1$ . . . . .                 | 24        |
| 3.1.2    | Formulação $\mathcal{F}_2$ . . . . .                 | 25        |
| 3.1.3    | Formulação $\mathcal{F}_3$ . . . . .                 | 27        |
| 3.1.4    | Comparação Teórica entre as Formulações . . . . .    | 28        |
| 3.2      | Inequações Válidas . . . . .                         | 32        |
| 3.2.1    | Inequações $ E $ - <i>bounds</i> . . . . .           | 32        |
| 3.2.2    | Inequações <i>Tree</i> . . . . .                     | 34        |
| 3.2.3    | Inequações <i>Kite</i> . . . . .                     | 34        |
| <b>4</b> | <b>ALGORITMOS <i>BRANCH-AND-CUT</i></b>              | <b>37</b> |
| 4.1      | Separação das Inequações Triangulares . . . . .      | 37        |
| 4.2      | Separação das Inequações <i>Kite</i> . . . . .       | 38        |

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|                                                                                | 7         |
| 4.3 Separação das Inequações <i>Tree</i> . . . . .                             | 39        |
| 4.4 Limite Primal Inicial . . . . .                                            | 40        |
| <b>5 ALGORITMO <i>BRANCH-AND-PRICE</i></b>                                     | <b>41</b> |
| 5.1 Geração de Colunas . . . . .                                               | 41        |
| 5.1.1 Subproblema de <i>Pricing</i> . . . . .                                  | 41        |
| 5.1.2 Formulações para o Subproblema de <i>Pricing</i> . . . . .               | 43        |
| 5.1.3 Heurística para o Subproblema de <i>Pricing</i> . . . . .                | 46        |
| 5.2 <i>Branching</i> . . . . .                                                 | 50        |
| 5.2.1 Regra de <i>Branching</i> . . . . .                                      | 50        |
| 5.2.2 Estratégias de <i>Branching</i> . . . . .                                | 51        |
| 5.3 Limite Primal Inicial . . . . .                                            | 51        |
| <b>6 UM LIMITE PRIMAL</b>                                                      | <b>52</b> |
| 6.1 GRASP para o $p$ -PEC . . . . .                                            | 52        |
| 6.1.1 Fase de Construção . . . . .                                             | 52        |
| 6.1.2 Fase de Busca Local . . . . .                                            | 54        |
| 6.2 Refinamento Baseado em Particionamento de Conjuntos . . . . .              | 59        |
| <b>7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS</b>                                             | <b>60</b> |
| 7.1 Instâncias . . . . .                                                       | 60        |
| 7.2 <i>Branch-and-Cut</i> . . . . .                                            | 61        |
| 7.2.1 Impacto das Inequações Válidas . . . . .                                 | 62        |
| 7.2.2 Impacto de $p/ V $ e da Densidade do Grafo . . . . .                     | 66        |
| 7.2.3 BC-F1 para Valores Pequenos de $p$ . . . . .                             | 68        |
| 7.3 <i>Branch-and-Price</i> . . . . .                                          | 69        |
| 7.3.1 Comparação entre as Formulações para o Subproblema de <i>Pricing</i> .   | 69        |
| 7.3.2 Comparação entre as Estratégias de <i>Branching</i> . . . . .            | 70        |
| 7.3.3 Impacto de $p/ V $ e da Densidade do Grafo . . . . .                     | 71        |
| 7.4 Comparação entre <i>Branch-and-Cut</i> e <i>Branch-and-Price</i> . . . . . | 72        |
| <b>8 CONCLUSÃO</b>                                                             | <b>76</b> |
| <b>APÊNDICES</b>                                                               | <b>83</b> |
| <b>A Resultados Detalhados dos Algoritmos <i>Branch-and-Cut</i></b>            | <b>84</b> |



**B Resultados Detalhados do Algoritmo *Branch-and-Price*****105**

## LISTA DE FIGURAS

|     |                                                                                         |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Uma instância do PEC e uma solução ótima com 3 edições. . . . .                         | 15 |
| 2.1 | Exemplos de grafos. . . . .                                                             | 19 |
| 3.1 | Subgrafos induzidos proibidos pelas inequações triangulares. . . . .                    | 24 |
| 3.2 | Contraexemplo associado à Proposição 4 . . . . .                                        | 31 |
| 3.3 | Exemplos de inequações <i>Tree</i> para $ V  = 5$ e $p = 3$ . . . . .                   | 35 |
| 3.4 | Duas inequações <i>Kite</i> . . . . .                                                   | 36 |
| 6.1 | GRASP para o $p$ -PEC: exemplo da fase de construção . . . . .                          | 54 |
| 6.2 | Exemplo de uma matriz de edições. . . . .                                               | 56 |
| 7.1 | <i>Gap</i> médio do nó raiz para cada grupo de instâncias em todos os cenários. . . . . | 64 |
| 7.2 | Tempo médio do nó raiz para cada grupo de instâncias em todos os cenários. . . . .      | 64 |
| 7.3 | Tempo médio gasto por BC-F2 em cada classe de densidade. . . . .                        | 68 |
| 7.4 | Comparação entre $\mathcal{F}_{L1}$ e $\mathcal{F}_{L2}$ . . . . .                      | 70 |
| 7.5 | Percentual de instâncias em que o algoritmo BP obteve um limite inferior . . . . .      | 72 |
| 7.6 | Tempo médio gasto por BP em cada classe de densidade. . . . .                           | 73 |
| 7.7 | Tempo médio gasto nas instâncias resolvidas por ambos os algoritmos. . . . .            | 74 |

## LISTA DE TABELAS

|      |                                                                                        |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 7.1  | Instâncias selecionadas. . . . .                                                       | 61 |
| 7.2  | Intervalo para $p/ V $ e tamanho de cada grupo de instâncias. . . . .                  | 61 |
| 7.3  | Programas lineares obtidos a partir de PL-F2. . . . .                                  | 62 |
| 7.4  | Valor médio da relaxação linear fornecido por cada programa linear . . . .             | 63 |
| 7.5  | Cenários a respeito de $ E $ - <i>bounds</i> e Inequações Triangulares Fortalecidas. . | 63 |
| 7.6  | Impacto das inequações <i>Tree</i> e <i>Kite</i> no nó raiz. . . . .                   | 65 |
| 7.7  | Resultados médios detalhados para cada grupo de instâncias. . . . .                    | 66 |
| 7.8  | Resultados médios detalhados para cada grafo. . . . .                                  | 67 |
| 7.9  | <i>Gaps</i> finais obtidos por BC-F1 e BC-F2 para valores pequenos de $p$ . . . . .    | 69 |
| 7.10 | Comparação entre as estratégias de <i>branching</i> . . . . .                          | 71 |
| 7.11 | Número de melhores limites encontrados pelos algoritmos . . . . .                      | 73 |
| 7.12 | Instâncias em que o BP superou os algoritmos BC . . . . .                              | 75 |
| A.1  | Resultados para o grafo nr_1059_size_55 ( $ V  = 55, d = 0.19$ ). . . . .              | 84 |
| A.2  | Resultados para o grafo nr_369_size_60 ( $ V  = 60, d = 0.27$ ). . . . .               | 85 |
| A.3  | Resultados para o grafo nr_492_size_61 ( $ V  = 61, d = 0.62$ ). . . . .               | 85 |
| A.4  | Resultados para o grafo nr_438_size_72 ( $ V  = 72, d = 0.26$ ). . . . .               | 85 |
| A.5  | Resultados para o grafo nr_238_size_78 ( $ V  = 78, d = 0.88$ ). . . . .               | 86 |
| A.6  | Resultados para o grafo nr_522_size_85 ( $ V  = 85, d = 0.44$ ). . . . .               | 86 |
| A.7  | Resultados para o grafo nr_173_size_86 ( $ V  = 86, d = 0.19$ ). . . . .               | 87 |
| A.8  | Resultados para o grafo nr_978_size_92 ( $ V  = 92, d = 0.76$ ). . . . .               | 87 |
| A.9  | Resultados para o grafo nr_317_size_95 ( $ V  = 95, d = 0.82$ ). . . . .               | 88 |
| A.10 | Resultados para o grafo nr_630_size_102 ( $ V  = 102, d = 0.15$ ). . . . .             | 88 |
| A.11 | Resultados para o grafo nr_104_size_112 ( $ V  = 112, d = 0.82$ ). . . . .             | 89 |
| A.12 | Resultados para o grafo nr_413_size_127 ( $ V  = 127, d = 0.45$ ). . . . .             | 89 |
| A.13 | Resultados para o grafo nr_57_size_129 ( $ V  = 129, d = 0.24$ ). . . . .              | 90 |
| A.14 | Resultados para o grafo nr_606_size_130 ( $ V  = 130, d = 0.92$ ). . . . .             | 91 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.15 Resultados para o grafo nr_480_size_139 ( $ V  = 139, d = 0.42$ ). . . . .  | 92  |
| A.16 Resultados para o grafo nr_537_size_144 ( $ V  = 144, d = 0.68$ ). . . . .  | 93  |
| A.17 Resultados para o grafo nr_116_size_152 ( $ V  = 152, d = 0.35$ ). . . . .  | 94  |
| A.18 Resultados para o grafo nr_593_size_157 ( $ V  = 157, d = 0.49$ ). . . . .  | 95  |
| A.19 Resultados para o grafo nr_176_size_169 ( $ V  = 169, d = 0.90$ ). . . . .  | 96  |
| A.20 Resultados para o grafo nr_459_size_171 ( $ V  = 171, d = 0.11$ ). . . . .  | 97  |
| A.21 Resultados para o grafo nr_9_size_178 ( $ V  = 178, d = 0.79$ ). . . . .    | 98  |
| A.22 Resultados para o grafo nr_200_size_179 ( $ V  = 179, d = 0.43$ ). . . . .  | 99  |
| A.23 Resultados para o grafo nr_263_size_186 ( $ V  = 186, d = 0.34$ ). . . . .  | 100 |
| A.24 Resultados para o grafo nr_365_size_196 ( $ V  = 196, d = 0.15$ ). . . . .  | 101 |
| A.25 Resultados para o grafo nr_232_size_206 ( $ V  = 206, d = 0.31$ ). . . . .  | 102 |
| A.26 Resultados para o grafo nr_279_size_209 ( $ V  = 209, d = 0.54$ ). . . . .  | 103 |
| A.27 Resultados para o grafo nr_489_size_211 ( $ V  = 211, d = 0.68$ ). . . . .  | 104 |
| B.1 Resultados para o grafo nr_1059_size_55 ( $ V  = 55, d = 0, 19$ ). . . . .   | 105 |
| B.2 Resultados para o grafo nr_369_size_60 ( $ V  = 60, d = 0, 27$ ). . . . .    | 106 |
| B.3 Resultados para o grafo nr_492_size_61 ( $ V  = 61, d = 0, 62$ ). . . . .    | 106 |
| B.4 Resultados para o grafo nr_438_size_72 ( $ V  = 72, d = 0, 26$ ). . . . .    | 106 |
| B.5 Resultados para o grafo nr_238_size_78 ( $ V  = 78, d = 0, 88$ ). . . . .    | 107 |
| B.6 Resultados para o grafo nr_522_size_85 ( $ V  = 85, d = 0, 44$ ). . . . .    | 107 |
| B.7 Resultados para o grafo nr_173_size_86 ( $ V  = 86, d = 0, 19$ ). . . . .    | 108 |
| B.8 Resultados para o grafo nr_978_size_92 ( $ V  = 92, d = 0, 76$ ). . . . .    | 108 |
| B.9 Resultados para o grafo nr_317_size_95 ( $ V  = 95, d = 0, 82$ ). . . . .    | 109 |
| B.10 Resultados para o grafo nr_630_size_102 ( $ V  = 102, d = 0, 15$ ). . . . . | 109 |
| B.11 Resultados para o grafo nr_104_size_112 ( $ V  = 112, d = 0, 82$ ). . . . . | 110 |
| B.12 Resultados para o grafo nr_413_size_127 ( $ V  = 127, d = 0, 45$ ). . . . . | 110 |
| B.13 Resultados para o grafo nr_57_size_129 ( $ V  = 129, d = 0, 24$ ). . . . .  | 111 |
| B.14 Resultados para o grafo nr_606_size_130 ( $ V  = 130, d = 0, 92$ ). . . . . | 111 |
| B.15 Resultados para o grafo nr_480_size_139 ( $ V  = 139, d = 0, 42$ ). . . . . | 112 |
| B.16 Resultados para o grafo nr_537_size_144 ( $ V  = 144, d = 0, 68$ ). . . . . | 113 |
| B.17 Resultados para o grafo nr_116_size_152 ( $ V  = 152, d = 0, 35$ ). . . . . | 114 |
| B.18 Resultados para o grafo nr_593_size_157 ( $ V  = 157, d = 0, 49$ ). . . . . | 115 |
| B.19 Resultados para o grafo nr_176_size_169 ( $ V  = 169, d = 0, 90$ ). . . . . | 116 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.20 Resultados para o grafo nr_459_size_171 ( $ V  = 171, d = 0, 11$ ). . . . . | 117 |
| B.21 Resultados para o grafo nr_9_size_178 ( $ V  = 178, d = 0, 79$ ). . . . .   | 118 |
| B.22 Resultados para o grafo nr_200_size_179 ( $ V  = 179, d = 0, 43$ ). . . . . | 119 |
| B.23 Resultados para o grafo nr_263_size_186 ( $ V  = 186, d = 0, 34$ ). . . . . | 120 |
| B.24 Resultados para o grafo nr_365_size_196 ( $ V  = 196, d = 0, 15$ ). . . . . | 121 |
| B.25 Resultados para o grafo nr_232_size_206 ( $ V  = 206, d = 0, 31$ ). . . . . | 122 |
| B.26 Resultados para o grafo nr_279_size_209 ( $ V  = 209, d = 0, 54$ ). . . . . | 123 |
| B.27 Resultados para o grafo nr_489_size_211 ( $ V  = 211, d = 0, 68$ ). . . . . | 124 |

## LISTA DE SIGLAS

|                 |                                                                  |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|
| PEC             | Problema de Edição de <i>Clusters</i>                            |
| $p$ -PEC        | Problema de Edição de $p$ - <i>Clusters</i>                      |
| PEC( $k$ )      | Versão de decisão do PEC (no máximo $k$ edições permitidas)      |
| $p$ -PEC( $k$ ) | Versão de decisão do $p$ -PEC (no máximo $k$ edições permitidas) |
| PTAS            | <i>Polynomial Time Approximation Scheme</i>                      |
| PL-F1           | Programa Linear da Formulação $\mathcal{F}_1$                    |
| PL-F2           | Programa Linear da Formulação $\mathcal{F}_2$                    |
| PL-F3           | Programa Linear da Formulação $\mathcal{F}_3$                    |
| BC              | <i>Branch-and-Cut</i>                                            |
| BC-F1           | Algoritmo BC utilizando a formulação $\mathcal{F}_1$             |
| BC-F2           | Algoritmo BC utilizando a formulação $\mathcal{F}_2$             |
| BP              | <i>Branch-and-Price</i>                                          |
| PMR             | Problema Mestre Restrito                                         |
| SP              | Subproblema de <i>pricing</i>                                    |
| HC-1            | Heurística Construtiva 1 para o SP                               |
| HC-2            | Heurística Construtiva 2 para o SP                               |
| VND             | <i>Variable Neighborhood Descent</i>                             |
| GRASP           | <i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure</i>               |
| BeFS            | <i>Best-First Search</i>                                         |
| BFS             | <i>Breadth-First Search</i>                                      |
| DFS             | <i>Depth-First Search</i>                                        |
| LC              | Lista de Candidatos                                              |
| LRC             | Lista Restrita de Candidatos                                     |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Definição do Tema

*Clusterização* é uma tema frequente em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, ciência da computação, ciências médicas e economia (Xu e Wunsch, 2005). De uma forma geral, a tarefa de *clusterizar* consiste em separar um conjunto de elementos em grupos de modo que dois critérios principais sejam satisfeitos: (i) elementos pertencentes a um mesmo grupo devem ser similares (homogeneidade); e (ii) elementos pertencentes a grupos distintos não devem ser similares (separação) (Hartigan, 1975; Kaufman e Rousseeuw, 2008; Xu e Wunsch, 2005). Tal similaridade é uma característica dependente do contexto ao qual a *clusterização* está sendo aplicada.

Tipicamente, são disponibilizados dados quantitativos em relação à similaridade entre os elementos. Porém, em alguns cenários de *clusterização*, há apenas dados qualitativos a respeito dessa similaridade. Isto é, dados dois elementos  $u$  e  $v$ , sabe-se apenas se  $u$  e  $v$  são similares ou não (Giotis e Guruswami, 2006). Nesse caso, os dados da *clusterização* podem ser interpretados como um grafo  $G = (V, E)$ , no qual cada vértice  $v \in V$  representa um elemento e uma aresta  $\{i, j\}$  existe se, e somente se, os elementos representados pelos vértices  $i$  e  $j$  são similares. Se os elementos estiverem perfeitamente *clusterizados*, então toda componente conexa de  $G$  será uma *clique* (ou *cluster*). Dessa forma, um modelo simples de *clusterização* é definido pelo Problema de Edição de *Clusters* (PEC): dado um grafo  $G = (V, E)$ , realize o número mínimo de edições (adições ou remoções de arestas) em  $G$  de modo a transformá-lo em uma união disjunta de *cliques* (ou *clusters*). O PEC é conhecido na literatura como *Cluster Editing* ou *Correlation Clustering*. A Figura 1.1 mostra uma instância do PEC e uma de suas soluções ótimas.

O PEC é um exemplo de um problema de modificação de grafos. Dados um grafo



Figura 1.1: Uma instância  $I$  do PEC (esquerda) e uma solução ótima para  $I$  com 3 edições (direita).

$G$  e uma propriedade  $\Pi$ , o objetivo de um problema de modificação de grafos é aplicar operações a  $G$  (adição de arestas, remoção de arestas, remoção de vértices etc.) de modo a transformar  $G$  em um novo grafo  $H$  que satisfaça a propriedade  $\Pi$  (Mancini, 2008). No caso do PEC, as operações permitidas são adições e remoções de arestas, enquanto que a propriedade desejada é que toda componente conexa do grafo resultante seja uma *clique*.

Este trabalho foca no Problema de Edição de  $p$ -Clusters ( $p$ -PEC), que é uma variante do PEC na qual a solução deve conter um número preestabelecido de *clusters*. Ou seja, aborda-se o seguinte problema: dados um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $p$ , transforme  $G$  em uma união disjunta de exatamente  $p$  *cliques* através da realização de um número mínimo de edições. Mais especificamente, este trabalho propõe algoritmos exatos para o  $p$ -PEC.

## 1.2 Justificativa

O PEC e suas variantes podem ser aplicados a diversas áreas, dentre elas: biologia computacional (Hartuv et al, 2000), projeto de circuitos VLSI (Hagen e Kahng, 1991), processamento de imagens (Wu e Leahy, 1993), aprendizagem de máquina (Bansal et al, 2004) e recuperação da informação (Hearst e Pedersen, 1996). No caso específico do  $p$ -PEC, o número fixo de *cliques* é um requisito externo que deve ser satisfeito em alguns cenários práticos (Giotis e Guruswami, 2006). Outras variantes do PEC também despertaram interesse nos últimos anos. Por exemplo, PEC com limites para o número de edições incidentes a um vértice (Abu-Khzam, 2013; Komusiewicz e Uhlmann, 2012), PEC com limites para o tamanho de uma *clique* (Abu-Khzam, 2013) e PEC em grafos ponderados (Rahmann et al, 2007).

Tanto o PEC quanto o  $p$ -PEC são problemas que pertencem à classe de complexidade NP-Difícil. Apesar de não ser um fato formalmente estabelecido, acredita-se que os problemas pertencentes a essa classe não podem ser resolvidos de forma eficiente, i.e., em tempo polinomial. Dessa forma, é comum recorrer a procedimentos heurísticos para



solucionar tais problemas. Ainda assim, o desenvolvimento de um método exato para um problema NP-Difícil justifica-se por diversos motivos, dentre eles:

- As soluções ótimas obtidas pelos algoritmos exatos servem para avaliar o desempenho de heurísticas. Mesmo nos casos em que o algoritmo exato não é capaz de determinar a solução ótima, pode-se utilizar os limites duais fornecidos pelo algoritmo para avaliação das heurísticas.
- O tamanho dos problemas que podem ser resolvidos por algoritmos exatos tende a crescer com o avanço contínuo da capacidade de processamento dos computadores e de pacotes de otimização como o CPLEX.

Por se tratar de um problema bastante abordado na literatura, alguns métodos exatos foram desenvolvidos para o PEC, sendo o melhor deles capaz de resolver instâncias do PEC com centenas de vértices. Em contrapartida, o trabalho de Perché (2012), que foi o único a produzir soluções exatas do  $p$ -PEC, só foi capaz de provar o ótimo de instâncias com até 25 vértices. Isso motivou o estudo de novos métodos exatos que sejam capazes de resolver instâncias maiores do  $p$ -PEC.

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1 Objetivo Geral

Propor algoritmos exatos para o Problema de Edição de  $p$ -Clusters.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Propor formulações matemáticas para o problema.
- Comparar teoricamente as formulações propostas e existentes na literatura.
- Propor inequações válidas para as formulações.
- Desenvolver um algoritmo *branch-and-cut* utilizando as formulações propostas e existentes na literatura.
- Desenvolver um algoritmo *branch-and-price* utilizando uma formulação com um número exponencial de variáveis.
- Desenvolver uma heurística para gerar limites primais para os algoritmos.

- Estudar o impacto da densidade do grafo e da razão entre o número de *clusters* e o número de vértices no desempenho dos algoritmos.
- Comparar os algoritmos propostos.

#### 1.4 Estrutura do Trabalho

O restante do trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, são apresentados conceitos básicos de Teoria dos Grafos e uma breve revisão da literatura do PEC e variantes.
- No Capítulo 3, são introduzidas as formulações matemáticas e as inequações válidas propostas neste trabalho.
- No Capítulo 4, são apresentados os algoritmos baseados em *branch-and-cut* propostos neste trabalho.
- No Capítulo 5, apresenta-se o algoritmo baseado em *branch-and-price* proposto neste trabalho.
- No Capítulo 6, é descrita a heurística proposta para a obtenção de limites primais.
- No Capítulo 7, são apresentados os resultados dos experimentos computacionais realizados com os algoritmos propostos.
- No Capítulo 8, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, são introduzidos alguns conceitos básicos de Teoria dos Grafos e uma revisão da literatura relacionada ao PEC. Uma introdução completa à Teoria dos Grafos pode ser encontrada no livro de Bondy e Murty (2008).

### 2.1 Conceitos Básicos de Teoria dos Grafos

Um grafo  $G = (V, E)$  é definido por um conjunto de vértices  $V$  e por um conjunto de arestas  $E$ , sendo cada aresta  $\{i, j\}$  composta por um par de vértices  $i, j \in V$ . As arestas podem ser *direcionadas* ou *não direcionadas*. No primeiro caso, a aresta é um par ordenado e, portanto,  $\{u, v\} \neq \{v, u\}$ . No segundo caso,  $\{u, v\} = \{v, u\}$ . Uma aresta  $\{u, v\}$  em que  $u = v$  é chamada de *laço*. Duas arestas  $\{u, v\}$  e  $\{x, y\}$  são ditas *paralelas* se  $u = x$  e  $v = y$ . Um grafo é *simples* se ele não possui arestas paralelas ou laços. Neste trabalho, são considerados apenas grafos simples e não direcionados.

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , diz-se que dois vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* (ou *vizinhos*) se  $\{u, v\} \in E$ . Além disso, diz-se que a aresta  $\{u, v\}$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$  e que os vértices  $u$  e  $v$  são os *extremos* da aresta  $\{u, v\}$ . O conjunto de *vizinhos* (vizinhança) de um vértice  $i$  é denotado por  $N(i)$  e  $N[i] = N(i) \cup \{i\}$  representa a *vizinhança fechada* de  $i$ . Em um grafo simples, o *grau* de um vértice  $v$ ,  $\delta(v)$ , é igual ao número de arestas que nele incidem, ou seja,  $\delta(v) = |N(v)|$ .

Um grafo  $G$  é dito *completo* se quaisquer dois vértices distintos de  $G$  são adjacentes. Denota-se o grafo completo com  $n$  vértices por  $K_n$ . Note que  $K_n$  possui  $n(n-1)/2$  arestas.

A *densidade* de um grafo  $G = (V, E)$ , denotada por  $d$ , é definida por

$$d = \frac{2|E|}{|V|(|V| - 1)}.$$

Observe que, quanto mais próximo  $G$  for de um grafo completo, mais próxima de 1 será sua densidade. De forma análoga, quanto mais próximo  $G$  for de um *grafo vazio* (grafo sem nenhuma aresta), mais próxima de 0 será sua densidade.

Um *caminho* em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices distintos  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tais que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são adjacentes,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . Um *ciclo* é um caminho fechado. Isto é, um ciclo é uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tais que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são adjacentes,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , e todos os vértices são distintos, com exceção do primeiro e do último vértice, que são iguais.

Um grafo  $G$  é dito *conexo* se, para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$ , existe um caminho em  $G$  com extremos em  $u$  e  $v$ . Do contrário,  $G$  é *desconexo*.

O grafo  $H = (V_H, E_H)$  é um *subgrafo* do grafo  $G = (V, E)$  se  $V_H \subseteq V$  e  $E_H \subseteq E$ . Se  $V_H = V$ , então  $H$  é um *subgrafo gerador* de  $G$ . Dado um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , o *subgrafo de  $G$  induzido* por  $S$  é o grafo definido pelos vértices de  $S$  e pelas arestas de  $G$  que neles incidem. De forma análoga, o subgrafo induzido por um conjunto de arestas  $E' \subseteq E$  é definido pelas arestas de  $E'$  e pelos vértices que são seus extremos.

Um subconjunto de vértices  $C \subseteq V$  é uma *clique* se o subgrafo induzido por  $C$  é completo.

Uma árvore  $T$  é um grafo conexo que não possui ciclos. Uma árvore  $T$  é dita uma *árvore geradora* de um grafo  $G$  se ela é um subgrafo gerador de  $G$ .

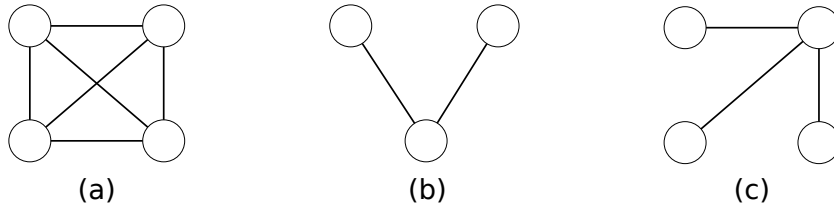


Figura 2.1: Exemplos de grafos: uma *clique* (a), um caminho (b) e uma árvore (c).

A Figura 2.1 ilustra alguns conceitos definidos nesta seção.

## 2.2 Trabalhos Relacionados

Nesta seção, os principais trabalhos relacionados ao PEC e ao  $p$ -PEC são brevemente revisados. Existem outras variantes do PEC que estipulam, por exemplo, limites para o número de edições incidentes a um vértice (Abu-Khzam, 2013; Komusiewicz e Uhlmann, 2012) e para o tamanho de uma *clique* (Abu-Khzam, 2013). Porém, por brevidade, evita-se discutir tais variantes. Uma revisão mais detalhada pode

ser encontrada no trabalho de Böcker e Baumbach (2013).

### 2.2.1 PEC

A complexidade do PEC foi estudada de forma independente por Shamir et al (2002) e Bansal et al (2004), os quais provaram que o problema é NP-Difícil. Também é sabido que o PEC permanece NP-Difícil em grafos com grau máximo igual a 6 e mesmo se forem permitidas, no máximo, 4 edições incidentes a cada vértice (Komusiewicz e Uhlmann, 2012). Por outro lado, o problema é solucionável em tempo polinomial em grafos com grau máximo igual a 2 (Böcker, 2011). Apesar do problema ser APX-Difícil (Charikar et al, 2005), aproximações de fator constante são conhecidas (Bansal et al, 2004; Ailon et al, 2008; Charikar et al, 2005), sendo a melhor delas uma aproximação de fator 3 (Ailon et al, 2008).

A versão de decisão do PEC foi extensivamente considerada na área de complexidade parametrizada. Complexidade parametrizada é um ramo recente da teoria da complexidade computacional cuja ideia principal é isolar a dificuldade de um problema em torno de um ou mais parâmetros - veja o trabalho de Downey e Fellows (1999) para obter mais detalhes sobre o tema. Na literatura, o parâmetro mais considerado para a versão de decisão do PEC é o número máximo de edições permitidas, denotado por  $k$ . Isto é, deseja-se decidir se um grafo  $G = (V, E)$  pode ser transformado em uma união disjunta de *cliques* através da realização de, no máximo,  $k$  edições. Denota-se essa versão de decisão do PEC por PEC( $k$ ).

Inicialmente, Gramm et al (2003) mostraram que o PEC( $k$ ) pode ser resolvido em tempo  $O(2, 27^k)$ . Esse tempo foi melhorado sucessivamente por diversos autores: para  $O(1, 92^k)$  por Gramm et al (2004); para  $O(1, 82^k)$  por Böcker et al (2008); para  $O(1, 76^k)$  por Böcker e Damaschke (2011); e, finalmente, para  $O(1, 62^k)$  por Böcker (2011). Vale salientar que o algoritmo de tempo  $O(1, 82^k)$  proposto por Böcker et al (2008) é capaz de resolver uma generalização do PEC( $k$ ) em que cada aresta  $\{i, j\}$  possui um custo de edição  $c_{ij} \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Diversas regras de redução foram desenvolvidas para o PEC( $k$ ). Em particular, Gramm et al (2003) mostraram como reduzir uma instância  $I$  do PEC( $k$ ) a uma instância equivalente  $I'$  com, no máximo,  $2k^2 + k$  vértices. O tamanho máximo da instância reduzida  $I'$  foi melhorado para  $24k$  por Fellows (2006), para  $6k$  por Fellows et al (2007) e para  $2k$  por Chen e Meng (2010). Regras de redução independentes do parâmetro  $k$  e que podem,

portanto, ser aplicadas ao PEC (versão de otimização) foram apresentadas nos trabalhos de Böcker et al (2011) e de Bastos et al (2014).

O primeiro algoritmo exato para o PEC foi proposto por Dehne et al (2006). O método baseia-se no algoritmo proposto por Gramm et al (2003) para o PEC(k) - que, além de decidir o PEC(k), é capaz de determinar a solução caso ela exista. Inicialmente, o método computa um limite inferior  $k_i$  para o número ótimo de edições, usando técnicas de programação linear. Depois, partindo de  $k_i$ , o método considera valores crescentes de  $k$  e utiliza o algoritmo do PEC(k) para decidir se há uma solução com custo  $k$ . O custo ótimo é o primeiro valor de  $k$  para o qual o algoritmo do PEC(k) retorna SIM. Os autores compararam o método com uma heurística gulosa e com uma heurística baseada em programação linear.

Mais tarde, Böcker et al (2011) desenvolveram um *branch-and-cut* para o PEC baseado na formulação proposta por Grötschel e Wakabayashi (1989). Essa formulação (discutida na Seção 3.1) não foi originalmente desenvolvida para o PEC, mas basta apenas modificar a sua função objetivo para se obter uma formulação para o PEC. Os autores mostraram que o *branch-and-cut* supera o algoritmo proposto por Dehne et al (2006) e que, quando combinado com regras de redução, é capaz de resolver instâncias com até 500 vértices em tempo aceitável.

Heurísticas para o PEC e variantes surgiram antes mesmo dos trabalhos de Shamir et al (2002) e de Bansal et al (2004), que foram os primeiros a provar que o PEC é NP-Difícil. Por exemplo, Milosavljevic et al (1995) propuseram uma heurística gulosa para uma generalização do PEC em que cada aresta  $\{i, j\}$  possui um custo de edição  $c_{ij} \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Essa heurística é conhecida como GREEDY e foi aplicada a problemas de sequenciamento de DNA. Outras heurísticas para essa mesma generalização do PEC baseiam-se no corte mínimo do grafo (Hartuv et al, 2000) e na arrumação espacial dos vértices (Rahmann et al, 2007). Recentemente, Bastos et al (2014) desenvolveram heurísticas para o PEC baseadas na combinação das meta-heurísticas GRASP e ILS com métodos baseados em Particionamento de Conjuntos (*Set Partitioning*, em inglês).

### 2.2.2 $p$ -PEC

O  $p$ -PEC foi bem menos explorado na literatura que o PEC. Shamir et al (2002) provaram que o problema é NP-Difícil para  $p \geq 2$ . Em contrapartida, o problema admite um Esquema de Aproximação de Tempo Polinomial (PTAS, do inglês *Polynomial Time*

*Approximation Scheme*) (Giotis e Guruswami, 2006). Um PTAS  $\mathcal{A}$  para um problema de minimização  $\Pi$  é um algoritmo que, dados uma instância  $I$  de  $\Pi$  e um parâmetro  $\varepsilon > 0$ , produz, em tempo polinomial em relação ao tamanho de  $I$ , uma solução  $s$  para  $I$  com fator de aproximação  $\varepsilon$  (Vazirani, 2003). É interessante notar que, sob a hipótese de que  $P \neq NP$ , o PEC clássico não admite um PTAS, uma vez que o problema é APX-Difícil.

Como no caso do PEC, a versão de decisão do  $p$ -PEC também foi considerada na área de complexidade parametrizada. Mais precisamente, o seguinte problema, aqui denotado por  $p$ -PEC( $k$ ), foi considerado: dados um grafo  $G = (V, E)$  e os inteiros  $p$  e  $k$ , decida se  $G$  pode ser transformado em uma união disjunta de exatamente  $p$  *cliques* através da realização de, no máximo,  $k$  edições. O  $p$ -PEC( $k$ ) pode ser resolvido em tempo  $2^{O(\sqrt{pk})} + n^{O(1)}$  (Fomin et al, 2014). Além disso, uma instância  $I$  do  $p$ -PEC( $k$ ) pode ser reduzida a uma instância  $I'$  que possui, no máximo,  $(p + 2)k + p$  vértices (Guo, 2007).

Perché (2012) adicionou um novo conjunto de variáveis à formulação proposta por Grötschel e Wakabayashi (1989), de modo a garantir que a solução possua exatamente  $p$  *cliques*. Porém, não foi considerada nenhuma técnica avançada de programação inteira e foram resolvidas instâncias com apenas 25 vértices. No mesmo trabalho, foi proposto um algoritmo heurístico para o  $p$ -PEC baseado na meta-heurística ILS.

### 3 FORMULAÇÕES E INEQUAÇÕES VÁLIDAS

Neste capítulo, são apresentadas as formulações matemáticas relevantes para este trabalho, a saber: formulações para o PEC e para o  $p$ -PEC provenientes da literatura, bem como duas novas formulações para o  $p$ -PEC. Além disso, as três formulações para o  $p$ -PEC são comparadas sob um ponto de vista teórico. Por fim, são propostas novas desigualdades válidas para as formulações do  $p$ -PEC.

#### 3.1 Formulações

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com conjunto de vértices  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  e conjunto de arestas  $E$ . Defina  $x_{ij}$  como uma variável binária associada a cada par de vértices  $i, j \in V$ , com  $i < j$ , tal que  $x_{ij} = 1$ , se a aresta  $\{i, j\}$  está presente na solução, e  $x_{ij} = 0$ , caso contrário. Portanto, o PEC pode ser formulado como abaixo.

$$\min \sum_{\{i,j\} \in E} (1 - x_{ij}) + \sum_{\{i,j\} \notin E} x_{ij} \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.} \quad -x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k, \quad (3.2)$$

$$x_{ij} - x_{ik} + x_{jk} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k, \quad (3.3)$$

$$x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k, \quad (3.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, i < j. \quad (3.5)$$

A formulação acima foi proposta por Grötschel e Wakabayashi (1989). A função objetivo (3.1) minimiza o número de remoções (primeira soma) e adições (segunda soma) de arestas. As restrições (3.2)-(3.4) garantem que a solução não possui um caminho com 3 vértices - denotado por  $P_3$  - como um subgrafo induzido (ver Figura 3.1). Isso é suficiente



para assegurar que a solução é uma união disjunta de *cliques*. Em todo o texto, o termo *inequações triangulares* refere-se às inequações (3.2)-(3.4).

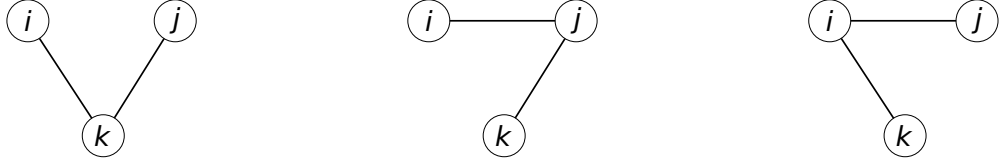


Figura 3.1: Subgrafos induzidos proibidos por (3.2)-(3.4) para cada três vértices  $i, j, k \in V$ , respectivamente da esquerda para a direita.

A seguir, são apresentadas as formulações para o  $p$ -PEC.

### 3.1.1 Formulação $\mathcal{F}_1$

O  $p$ -PEC pode ser formulado com variáveis de três índices. Denote os *clusters* de uma solução por  $C_1, C_2, \dots, C_p$  e defina o conjunto  $K = \{1, 2, \dots, p\}$ . Seja  $w_{ijt}$  uma variável binária tal que  $w_{ijt} = 1$ , se a aresta  $\{i, j\}$  pertencer ao *cluster*  $C_t$ , e  $w_{ijt} = 0$ , do contrário. Além disso, seja  $z_{it}$  uma variável binária tal que  $z_{it} = 1$ , se o vértice  $i$  pertencer ao *cluster*  $C_t$ , e  $z_{it} = 0$ , do contrário. A formulação  $\mathcal{F}_1$  pode ser descrita como segue.

$$(\mathcal{F}_1) \quad \min \sum_{\{i,j\} \in E} (1 - \sum_{t \in K} w_{ijt}) + \sum_{\{i,j\} \notin E} \sum_{t \in K} w_{ijt} \quad (3.6)$$

$$\text{s.a.} \quad w_{ijt} + 1 \geq z_{it} + z_{jt}, \quad \forall i, j \in V, i < j, \forall t \in K, \quad (3.7)$$

$$w_{ijt} \leq z_{it}, \quad \forall i, j \in V, i < j, \forall t \in K, \quad (3.8)$$

$$w_{ijt} \leq z_{jt}, \quad \forall i, j \in V, i < j, \forall t \in K, \quad (3.9)$$

$$\sum_{t \in K} z_{it} = 1, \quad \forall i \in V, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in V} z_{it} \geq 1, \quad \forall t \in K, \quad (3.11)$$

$$w_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, i < j, \forall t \in K, \quad (3.12)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, \forall t \in K. \quad (3.13)$$

A função objetivo (3.6) minimiza o número de edições no grafo de entrada. As restrições (3.7), (3.8) e (3.9) garantem que a aresta  $\{i, j\}$  pertence ao *cluster*  $C_t$  se, e somente se, os vértices  $i$  e  $j$  pertencem a  $C_t$ . Por fim, as restrições (3.10) e (3.11) determinam, respectivamente, que cada vértice deve pertencer a exatamente um *cluster* e que cada *cluster* possui, no mínimo, um vértice.

A formulação  $\mathcal{F}_1$  é bastante intuitiva, mas ela não possui uma boa relaxação linear. Na verdade, a relaxação linear da formulação  $\mathcal{F}_1$  é a pior possível, i.e., 0.

**Proposição 1.** *O valor ótimo da relaxação linear de  $\mathcal{F}_1$  é igual a 0 para  $p \geq 2$ .*

*Demonstração.* Considere a seguinte solução para o programa linear de  $\mathcal{F}_1$  (PL-F1):

$$s = \begin{cases} w_{ijt} = 1/p, \forall \{i, j\} \in E, \forall t \in K, \\ w_{ijt} = 0, \forall \{i, j\} \notin E, \forall t \in K, \\ z_{it} = 1/p, \forall i \in V, \forall t \in K. \end{cases}$$

É trivial verificar que, para  $p \geq 2$ ,  $s$  é uma solução viável para PL-F1 com custo igual a 0.  $\square$

Outra desvantagem de  $\mathcal{F}_1$  é sua inerente simetria, o que afeta negativamente o desempenho de um procedimento baseado em *branch-and-bound(cut)* com essa formulação.

A seguir, discute-se outra formulação para o  $p$ -PEC.

### 3.1.2 Formulação $\mathcal{F}_2$

Como mostrado por Perché (2012), a formulação para o PEC pode ser adaptada a fim de garantir que a solução tenha exatamente  $p$  *clusters*. Para isso, é suficiente definir um outro conjunto de variáveis binárias  $y_j$ ,  $\forall j \in V$ . Nesse caso,  $y_j = 1$  se o vértice  $j$  for um *líder de cluster*. O líder de um *cluster*  $C$  é o vértice  $j \in C$  com o menor índice. A formulação para o  $p$ -PEC proposta por Perché (2012) é dada por:

$$(\mathcal{F}_2) \quad \min \sum_{\{i,j\} \in E} (1 - x_{ij}) + \sum_{\{i,j\} \notin E} x_{ij} \tag{3.14}$$

$$\text{s.a. } (3.2), (3.3), (3.4),$$

$$y_1 = 1, \quad (3.15)$$

$$y_j \leq \frac{\sum_{i < j} (1 - x_{ij})}{j - 1}, \quad \forall j \in V, j \geq 2, \quad (3.16)$$

$$y_j \geq 1 - \sum_{i < j} x_{ij}, \quad \forall j \in V, j \geq 2, \quad (3.17)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = p, \quad (3.18)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, i < j, \quad (3.19)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in V. \quad (3.20)$$

Incluiu-se na formulação a restrição  $y_1 = 1$  apenas por clareza, pois isso segue diretamente da definição de líder de *cluster*. A restrição (3.18) determina que a solução tem  $p$  *clusters*. As restrições (3.16) e (3.17) asseguram que um vértice  $j$  é líder de *cluster* se, e somente se, ele não está conectado a nenhum vértice  $i$  tal que  $i < j$ . Em particular, (3.16) faz  $y_j$  assumir zero sempre que  $j$  está conectado a algum  $i$  tal que  $i < j$ , enquanto que (3.17) faz  $y_j$  assumir 1 quando  $j$  não está conectado a nenhum  $i$  tal que  $i < j$ .

### Modificações na Formulação Original

Nesta seção, são propostas modificações na formulação original de Perché (2012). Primeiro, note que as restrições (3.16), que são claramente fracas em um sentido poliedral, podem ser substituídas pelas seguintes inequações:

$$y_j \leq 1 - x_{ij}, \forall i, j \in V, i < j, j \geq 2. \quad (3.21)$$

Além disso, as inequações (3.2) podem ser fortalecidas, conforme discutido na Proposição 2.

**Proposição 2.** *As inequações triangulares (3.2) podem ser fortalecidas através da adição da variável  $y_k$ . Ou seja, as inequações*

$$-x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} + y_k \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k, \quad (3.22)$$

*são válidas para  $\mathcal{F}_2$ .*

*Demonstração.* Para provar que as inequações (3.22) são válidas, basta considerar o caso em que  $y_k = 1$ , pois, do contrário, as inequações são iguais às inequações triangulares originais. Se  $y_k = 1$ , então  $x_{ik} = x_{jk} = 0$ , uma vez que  $y_k = 1$  significa que o vértice  $k$  não está conectado a nenhum vértice  $i$  tal que  $i < k$ . Assim, a inequação pode ser reduzida a  $x_{ij} \geq 0$ , que é válida.  $\square$

Vale destacar que, devido ao papel dos índices em  $\mathcal{F}_2$ , o raciocínio da Proposição 2 não pode ser aplicado para fortalecer as inequações (3.3) e (3.4).

No resto do trabalho, formulação  $\mathcal{F}_2$  refere-se a: (3.14), (3.3), (3.4), (3.22), (3.15), (3.21), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20). Essa formulação não é simétrica e possui uma relaxação linear mais forte que a da formulação  $\mathcal{F}_1$ , como será mostrado na Seção 3.1.4.

### 3.1.3 Formulação $\mathcal{F}_3$

A última formulação para o  $p$ -PEC proposta neste trabalho é baseada em Particionamento de Conjuntos (*Set Partitioning*, em inglês). Nela, cada variável representa um *cluster* viável distinto. A ideia é selecionar  $p$  *clusters* (variáveis) de modo que cada vértice pertença a exatamente um *cluster* e que a soma dos custos dos *clusters* selecionados seja minimizada. Note que, se os vértices  $i$  e  $j$  pertencem ao *cluster*  $C$  e a aresta  $\{i, j\}$  não existe na entrada, deve-se somar 1 ao custo de  $C$ . Por outro lado, se a aresta  $\{i, j\}$  existe na entrada e os vértices  $i$  e  $j$  pertencem a dois *clusters* distintos  $C_i$  e  $C_j$ , então deve-se somar 0,5 aos custos de  $C_i$  e  $C_j$ . Nesse caso, o custo de remoção da aresta  $\{i, j\}$  é dividido entre os *clusters*  $C_i$  e  $C_j$ . O custo de um *cluster*  $C$  é definido matematicamente na Equação (3.23).

$$\text{custo}(C) = \sum_{\substack{i,j \in C, i < j \\ \{i,j\} \notin E}} 1 + \sum_{\substack{i \in C, j \notin C \\ \{i,j\} \in E}} 0,5 \quad (3.23)$$

Seja  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$  o conjunto de todos os *clusters* viáveis e seja  $C_i$  o  $i$ -ésimo *cluster* de  $\mathcal{C}$ . Além disso, sejam  $c_i$  e  $a_i$  o custo e o vetor de incidência associados a  $C_i$ . Isto é,  $a_i^j = 1$  se o vértice  $j$  pertencer a  $C_i$ ; do contrário,  $a_i^j = 0$ . Por fim, considere a variável binária  $\lambda_i$ , que assume o valor 1 se  $C_i$  estiver presente na solução. A formulação  $\mathcal{F}_3$  pode ser escrita como segue.

$$(\mathcal{F}_3) \quad \min \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} c_l \lambda_l \quad (3.24)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^j \lambda_l = 1, \quad \forall j \in V, \quad (3.25)$$

$$\sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} \lambda_l = p, \quad (3.26)$$

$$\lambda_l \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{C}|\}. \quad (3.27)$$

A função objetivo (3.24) minimiza a soma dos custos dos *clusters* selecionados. As restrições (3.25) determinam que cada vértice pertence a exatamente um *cluster*, enquanto que a restrição (3.26) garante que a solução possui  $p$  *clusters*. Por fim, as restrições (3.27) dizem respeito à integralidade das variáveis.

### 3.1.4 Comparação Teórica entre as Formulações

Considere duas formulações  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  para um problema de minimização  $\Pi$  e sejam  $\text{RL}(\mathcal{F}, I)$  e  $\text{RL}(\mathcal{F}', I)$  os valores das relaxações lineares das formulações  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$ , respectivamente, para uma instância  $I$ . A relaxação linear de  $\mathcal{F}$  é *estritamente mais forte* que a relaxação linear de  $\mathcal{F}'$  se: (i) para toda instância  $I$ ,  $\text{RL}(\mathcal{F}, I) \geq \text{RL}(\mathcal{F}', I)$ ; (ii) existe uma instância  $I$  para a qual  $\text{RL}(\mathcal{F}, I) > \text{RL}(\mathcal{F}', I)$ .

Esta seção mostra que a relaxação linear de  $\mathcal{F}_2$  é estritamente mais forte que a relaxação linear de  $\mathcal{F}_1$  e que a relaxação linear de  $\mathcal{F}_3$  é estritamente mais forte que a relaxação linear de  $\mathcal{F}_2$ .

**Proposição 3.** *A relaxação linear de  $\mathcal{F}_2$  é estritamente mais forte que a relaxação linear de  $\mathcal{F}_1$ .*

*Demonstração.* Uma vez que o valor da relaxação linear de  $\mathcal{F}_1$  é igual a 0 (Proposição 1), a relaxação linear de  $\mathcal{F}_2$  é, no mínimo, tão forte quanto a de  $\mathcal{F}_1$ . Portanto, deve-se apenas mostrar uma instância  $I$  para a qual  $\text{RL}(\mathcal{F}_2, I) > \text{RL}(\mathcal{F}_1, I)$ .

Considere a instância  $I$ :  $V = \{0, 1\}$ ,  $E = \{\{0, 1\}\}$ ,  $p = 2$ . Para essa instância, o programa linear de  $\mathcal{F}_2$  (PL-F2-I) pode ser descrito como segue.

$$\min \quad 1 - x_{01} \quad (3.28)$$

$$\text{s.a. } y_0 = 1, \quad (3.29)$$

$$y_1 \leq 1 - x_{01}, \quad (3.30)$$

$$y_1 \geq 1 - x_{01}, \quad (3.31)$$

$$y_0 + y_1 = 2, \quad (3.32)$$

$$y_0, y_1, x_{01} \in [0, 1]. \quad (3.33)$$

Note que PL-F2-I não possui inequações triangulares porque I tem apenas dois vértices. Pode-se observar que não é possível construir uma solução viável de PL-F2-I com custo igual a 0, já que as restrições (3.29)-(3.32) necessariamente implicam  $x_{01} = 0$ . Portanto, a única solução viável de PL-F2-I é  $\bar{s} = \{\bar{x}_{01} = 0, \bar{y}_0 = 1, \bar{y}_1 = 1\}$ , que possui custo igual a 1.  $\square$

**Proposição 4.** *A relaxação linear de  $\mathcal{F}_3$  é estritamente mais forte que a relaxação linear de  $\mathcal{F}_2$ .*

*Demonstração.* Seja  $\bar{s}_3 = (\bar{\lambda})$  a solução do programa linear da formulação  $\mathcal{F}_3$  (PL-F3) para uma instância I. Para um dado vértice  $j$ , considere  $L_j$  o conjunto dos índices das variáveis que representam *clusters* em que o vértice  $j$  é líder, i.e.,  $L_j = \{l \in \{1, \dots, |\mathcal{C}|\} \mid \sum_{i < j} a_l^i = 0 \wedge a_l^j = 1\}$ . Defina a seguinte solução do programa linear da formulação  $\mathcal{F}_2$  (PL-F2) para a instância I:

$$\bar{s}_2 = \begin{cases} \bar{x}_{ij} = \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l, \forall i, j \in V, i < j, \\ \bar{y}_j = \sum_{l \in L_j} \bar{\lambda}_l, \forall j \in V. \end{cases}$$

Claramente,  $\bar{x}_{ij} \geq 0$  e  $\bar{y}_j \geq 0$ . Além disso,  $\bar{x}_{ij} \leq 1$ , pois

$$\sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l \leq \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^i \bar{\lambda}_l = 1.$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que  $\bar{s}_2$  satisfaz  $\bar{y}_j \leq 1$ .

Substituindo os valores das variáveis da solução  $\bar{s}_2$  na inequação triangular fortalecida (ver (3.22)) relativa a três vértices  $i, j, k \in V$  com  $i < j < k$ , obtém-se a inequação

$$-\sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^i a_l^k \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^j a_l^k \bar{\lambda}_l + \sum_{l \in L_k} \bar{\lambda}_l \leq 1,$$

que pode ser reescrita como

$$-\sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j (1 - a_l^k) \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^k (1 - a_l^j) \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^j a_l^k (1 - a_l^i) \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j a_l^k \bar{\lambda}_l + \sum_{l \in L_k} \bar{\lambda}_l \leq 1,$$

a qual é verdadeira, uma vez que os quatro somatórios mais à direita da inequação consideram valores  $\bar{\lambda}_l$  distintos e relativos a *clusters* que possuem o vértice  $k$ . Isto é,

$$\sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^k (1 - a_l^j) \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^j a_l^k (1 - a_l^i) \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j a_l^k \bar{\lambda}_l + \sum_{l \in L_k} \bar{\lambda}_l \leq \sum_{l=1}^{|C|} a_l^k \bar{\lambda}_l = 1.$$

O mesmo raciocínio utilizado para mostrar que  $\bar{s}_2$  satisfaz as inequações (3.22) se aplica às inequações triangulares (3.3) e (3.4).

Substituindo os valores das variáveis da solução  $\bar{s}_2$  nas inequações (3.21), obtêm-se as inequações

$$\sum_{l \in L_j} \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l \leq 1, \forall i, j \in V, i < j, j \geq 2,$$

que são verdadeiras, pois

$$\sum_{l \in L_j} \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l \leq \sum_{l=1}^{|C|} a_l^j \bar{\lambda}_l = 1, \forall i, j \in V, i < j, j \geq 2.$$

As inequações (3.17) também são satisfeitas por  $\bar{s}_2$ , uma vez que

$$\sum_{l \in L_j} \bar{\lambda}_l + \sum_{i < j} \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l \geq \sum_{l=1}^{|C|} a_l^j \bar{\lambda}_l = 1, \forall j \in V, j \geq 2.$$

Para verificar as inequações anteriores, observe que o valor  $\bar{\lambda}_l$  referente a um *cluster*  $C_l$  tal que  $j \in C_l$  ou é considerado em  $\sum_{l \in L_j} \bar{\lambda}_l$ , quando  $j$  é o líder de  $C_l$ , ou é considerado em  $\sum_{i < j} \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l$ , se  $j$  não for o líder de  $C_l$ . No segundo caso, o número de vezes que o valor  $\bar{\lambda}_l$  é somado é igual ao número de vértices  $i \in C_l$  tais que  $i < j$ .

Por fim,  $\bar{s}_2$  satisfaz (3.18), já que

$$\sum_{j \in V} \sum_{l \in L_j} \bar{\lambda}_l = \sum_{l=1}^{|C|} \bar{\lambda}_l = p.$$

Portanto,  $\bar{s}_2$  é uma solução viável de PL-F2. Para verificar que  $\bar{s}_2$  e  $\bar{s}_3$  possuem o mesmo custo, note que:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{|C|} c_l \bar{\lambda}_l &= \sum_{l=1}^{|C|} \left( \sum_{\substack{i,j \in C_l \\ \{i,j\} \notin E}} 1 + \sum_{\substack{i \in C_l, j \notin C_l \\ \{i,j\} \in E}} 0, 5 \right) \bar{\lambda}_l = \\
&= \sum_{\{i,j\} \notin E} \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l + \sum_{\{i,j\} \in E} 0, 5 \left( \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i (1 - a_l^j) \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^j (1 - a_l^i) \bar{\lambda}_l \right) = \\
&= \sum_{\{i,j\} \notin E} \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l + \sum_{\{i,j\} \in E} 0, 5 \left( \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i \bar{\lambda}_l + \sum_{l=1}^{|C|} a_l^j \bar{\lambda}_l - 2 \sum_{l=1}^{|C|} a_l^i a_l^j \bar{\lambda}_l \right) = \\
&= \sum_{\{i,j\} \notin E} \bar{x}_{ij} + \sum_{\{i,j\} \in E} 0, 5 (1 + 1 - 2 \bar{x}_{ij}) = \sum_{\{i,j\} \notin E} \bar{x}_{ij} + \sum_{\{i,j\} \in E} (1 - \bar{x}_{ij}).
\end{aligned}$$

Para finalizar a prova, é necessário apresentar uma instância I para a qual  $\text{RL}(\mathcal{F}_3, I) > \text{RL}(\mathcal{F}_2, I)$ . Seja I a instância ilustrada na Figura 3.2 (a). A Figura 3.2 (b) apresenta uma solução viável de PL-F2 para a instância I com custo  $5/3$ . Logo,  $\text{RL}(\mathcal{F}_2, I) \leq 5/3$ . Em contrapartida,  $\text{RL}(\mathcal{F}_3, I) = 2$ , o que será estabelecido através do dual de PL-F3.

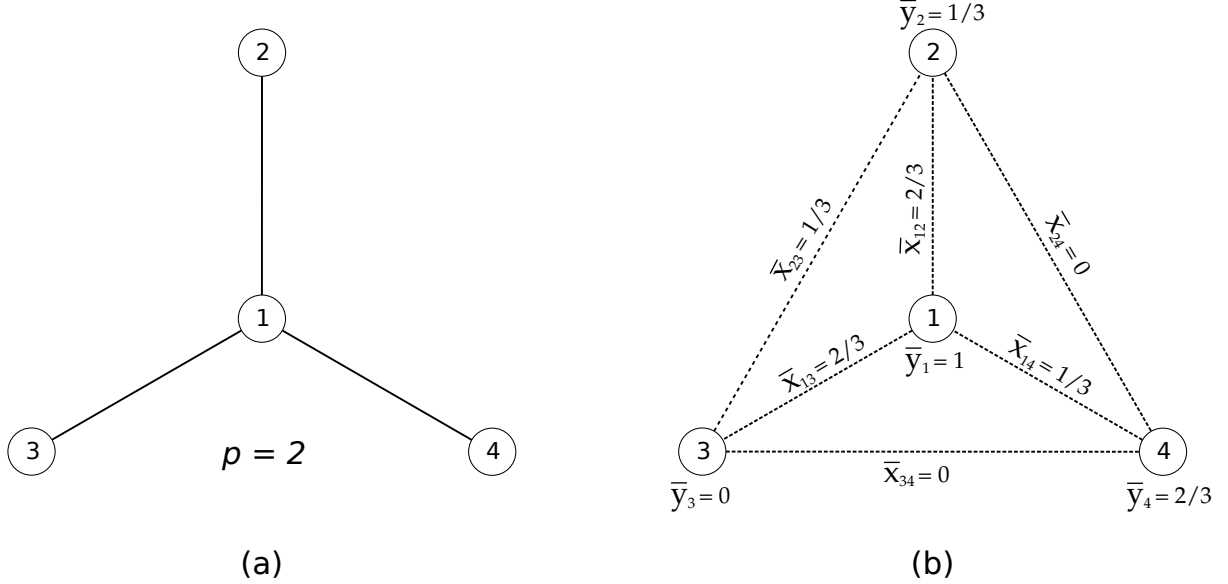


Figura 3.2: (a) Instância I para a qual  $\text{RL}(\mathcal{F}_3, I) > \text{RL}(\mathcal{F}_2, I)$ . (b) Solução viável de PL-F2 para a instância I com custo  $5/3$ .

Sejam  $\pi_j$ ,  $j \in V$ , as variáveis duais associadas às restrições (3.25) e  $\sigma$  a variável



dual associada à restrição (3.26). Portanto, o dual de PL-F3 é dado por:

$$\max \sum_{j \in V} \pi_j + p\sigma \quad (3.34)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in V} a_j^l \pi_j + \sigma \leq c_l, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{C}|\} \quad (3.35)$$

Claramente, existe uma solução inteira de PL-F3 com custo igual a 2. Portanto, para estabelecer que  $\text{RL}(\mathcal{F}_3, \text{I}) = 2$ , é suficiente mostrar que existe uma solução do dual de PL-F3 com custo igual a 2, uma vez que o custo de uma solução do dual de PL-F3 é um limite inferior para  $\text{RL}(\mathcal{F}_3, \text{I})$ . Considere a seguinte solução do dual de PL-F3, que possui custo igual a 2:

$$\bar{s}_{dual} = \begin{cases} \bar{\pi}_j = 0, 5, \forall j \in V, \\ \bar{\sigma} = 0. \end{cases}$$

Observe na Figura 3.2 (a) que, para a instância I, todo *cluster* viável  $C_l$  satisfaz  $0, 5|C_l| \leq c_l$ . Dessa forma,  $\bar{s}_{dual}$  satisfaz (3.35) e  $\text{RL}(\mathcal{F}_3, \text{I}) = 2 > \text{RL}(\mathcal{F}_2, \text{I})$ .  $\square$

### 3.2 Inequações Válidas

Nesta seção, são propostas algumas inequações válidas para as formulações do  $p$ -PEC.

#### 3.2.1 Inequações $|E|$ -bounds

As primeiras inequações são limites (*bounds*) para o número de arestas em solução do  $p$ -PEC.

**Proposição 5.** *Seja  $G' = (V', E')$  uma solução do  $p$ -PEC. Se  $G'$  tem o número máximo possível de arestas, então  $G'$  tem, no máximo, um cluster  $C$  tal que  $|C| > 1$ .*

*Demonstração.* Considere, por contradição, que  $C_i$  e  $C_j$  são dois *clusters* de  $G'$  tais que  $|C_i| > 1$  e  $|C_j| > 1$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $|C_i| \geq |C_j|$ . Ao mover um vértice de  $C_j$  para  $C_i$ ,  $|C_j| - 1$  arestas são removidas e  $|C_i|$  arestas são adicionadas a  $G'$ . Isso aumenta o número de arestas de  $G'$ , uma vez que  $|C_i| > |C_j| - 1$ . Uma contradição ao fato de  $G'$  ter o número máximo possível de arestas.  $\square$

**Corolário 1.** *O número máximo de arestas em um solução do  $p$ -PEC  $G' = (V', E')$  é  $\frac{(|V|-(p-1))(|V|-(p-1)-1)}{2}$ .*

**Proposição 6.** *Seja  $G' = (V', E')$  uma solução do  $p$ -PEC. Se  $G'$  tem o número mínimo possível de arestas, então, para quaisquer dois clusters  $C_i$  e  $C_j$  pertencentes a  $G'$ , vale que  $||C_i| - |C_j|| \leq 1$ .*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $G'$  possua dois clusters  $C_i$  e  $C_j$  tais que  $||C_i| - |C_j|| > 1$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $|C_i| > |C_j|$ . É suficiente notar que, ao mover um vértice de  $C_i$  para  $C_j$ , o número de arestas de  $G'$  diminui. De fato, ao mover tal vértice,  $|C_i| - 1$  são removidas e  $|C_j|$  arestas são adicionadas a  $G'$ . Como  $|C_i| - |C_j| > 1$ , esse movimento de vértice cria uma solução com menos arestas que  $G'$ , o que contradiz o fato de  $G'$  ter o número mínimo possível de arestas.  $\square$

**Corolário 2.** *O número mínimo de arestas em um solução do  $p$ -PEC  $G' = (V', E')$  é  $(|V| \bmod p) \frac{(q+1)q}{2} + (p - |V| \bmod p) \frac{q(q-1)}{2}$ , sendo  $q = \lfloor \frac{|V|}{p} \rfloor$ .*

À luz das proposições anteriores, pode-se escrever as seguintes inequações para  $\mathcal{F}_1$ :

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ i < j}} \sum_{t \in K} w_{ijt} \leq \frac{(|V| - (p-1))(|V| - (p-1) - 1)}{2}, \quad (3.36)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ i < j}} \sum_{t \in K} w_{ijt} \geq (|V| \bmod p) \frac{(q+1)q}{2} + (p - |V| \bmod p) \frac{q(q-1)}{2}, \quad (3.37)$$

sendo  $q = \lfloor \frac{|V|}{p} \rfloor$ .

Analogamente, pode-se escrever para  $\mathcal{F}_2$  as seguintes inequações:

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ i < j}} x_{ij} \leq \frac{(|V| - (p-1))(|V| - (p-1) - 1)}{2}, \quad (3.38)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ i < j}} x_{ij} \geq (|V| \bmod p) \frac{(q+1)q}{2} + (p - |V| \bmod p) \frac{q(q-1)}{2}, \quad (3.39)$$

sendo  $q = \lfloor \frac{|V|}{p} \rfloor$ .

Por fim, para  $\mathcal{F}_3$ , têm-se as inequações:

$$\sum_{l=1}^{|L|} e_l \lambda_l \leq \frac{(|V| - (p-1))(|V| - (p-1) - 1)}{2}, \quad (3.40)$$

$$\sum_{l=1}^{|L|} e_l \lambda_l \geq (|V| \bmod p) \frac{(q+1)q}{2} + (p - |V| \bmod p) \frac{q(q-1)}{2}, \quad (3.41)$$

sendo  $e_l$  o número de arestas existentes no *cluster* associado à variável  $\lambda_l$  e  $q = \lfloor \frac{|V|}{p} \rfloor$ .

### 3.2.2 Inequações *Tree*

Como observado por Perché (2012), o tamanho máximo de um *cluster* em uma solução do  $p$ -PEC é  $|V| - p + 1$ , caso que ocorre quando a solução possui  $p - 1$  *clusters* com apenas um vértice. Portanto, o grau de um vértice  $v \in V$  em uma solução é, no máximo,  $|V| - p$ . Isto é, para  $\mathcal{F}_2$  têm-se as seguintes inequações válidas:

$$\sum_{i < j} x_{ij} + \sum_{j < k} x_{jk} \leq |V| - p, \forall j \in V. \quad (3.42)$$

Pode-se observar que as arestas usadas em uma das inequações (3.42) induzem uma árvore. Em geral, qualquer árvore pode ser usada para produzir inequações similares a (3.42), como mostrado na seguinte proposição.

**Proposição 7.** *Seja  $T = (V_T, E_T)$  uma árvore tal que  $V_T = V$ . Então, a inequação *Tree**

$$\sum_{\{i,j\} \in E_T} x_{ij} \leq |V_T| - p$$

*é válida para  $\mathcal{F}_2$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $E = \emptyset$  e seja  $T = (V_T, E_T)$  uma árvore tal que  $V_T = V$ . Adicione iterativamente as arestas  $\{i, j\} \in T$  a  $G$ . A cada aresta  $\{i, j\} \in T$  adicionada, o número de componentes conexas de  $G$  necessariamente diminui em uma unidade, uma vez que  $T$  não possui ciclo. Portanto, se  $|E \cap E_T| = q$ , então  $G$  possui, no máximo,  $|V| - q$  componentes conexas. Dessa forma, uma solução  $G' = (V', E')$  do  $p$ -PEC possui, no máximo,  $|V'| - p$  arestas de uma árvore  $T$ .  $\square$

Claramente, é possível adaptar as inequações *Tree* às formulações  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_3$ . A Figura 3.3 mostra duas inequações *Tree* para a formulação  $\mathcal{F}_2$ .

### 3.2.3 Inequações *Kite*

Nesta seção, são apresentadas as últimas inequações propostas neste trabalho.

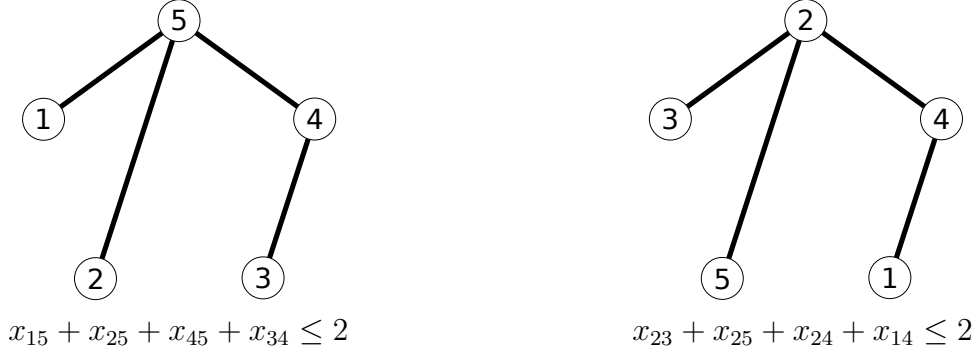


Figura 3.3: Exemplos de inequações *Tree* para  $|V| = 5$  e  $p = 3$ .

**Proposição 8.** *Sejam  $j, u, v, w \in V$  tais que  $u, v, w < j$ . Então, a inequação *Kite**

$$y_j \geq x_{uw} + x_{vw} - x_{uv} - \sum_{\substack{i < j \\ i \neq w}} x_{ij}$$

*é válida para  $\mathcal{F}_2$ .*

Antes da prova, destaca-se que, para simplificar a expressão da desigualdade *Kite*, abusa-se a notação  $x_{ij}$  (na qual  $i < j$ ) nesta proposição, uma vez que não foi feita nenhuma suposição a respeito da relação de ordem entre  $u, v$  e  $w$ .

*Demonstração.* A soma  $x_{uw} + x_{vw} - x_{uv}$  é limitada superiormente por 1 pelas inequações triangulares. Portanto, se  $\sum_{\substack{i < j \\ i \neq w}} x_{ij} \geq 1$ , a inequação é obviamente válida. Assumindo que  $\sum_{\substack{i < j \\ i \neq w}} x_{ij} = 0$ , obtém-se a inequação

$$y_j \geq x_{uw} + x_{vw} - x_{uv}$$

Se  $x_{uw} + x_{vw} - x_{uv} = 1$ , então o vértice  $w$  está conectado a pelo menos um dos vértices  $u$  e  $v$ . Porém, nem  $u$  nem  $v$  está conectado a  $j$ , uma vez que se assumiu  $\sum_{\substack{i < j \\ i \neq w}} x_{ij} = 0$ . Portanto, devido às inequações triangulares,  $j$  não está conectado a  $w$ . Em suma, se  $\sum_{\substack{i < j \\ i \neq w}} x_{ij} = 0$  e  $x_{uw} + x_{vw} - x_{uv} = 1$ , o vértice  $j$  não está conectado a nenhum vértice  $i$  tal que  $i < j$  e, por conseguinte, a variável  $y_j$  deve assumir o valor 1.  $\square$

A Figura 3.4 mostra duas inequações *Kite*.

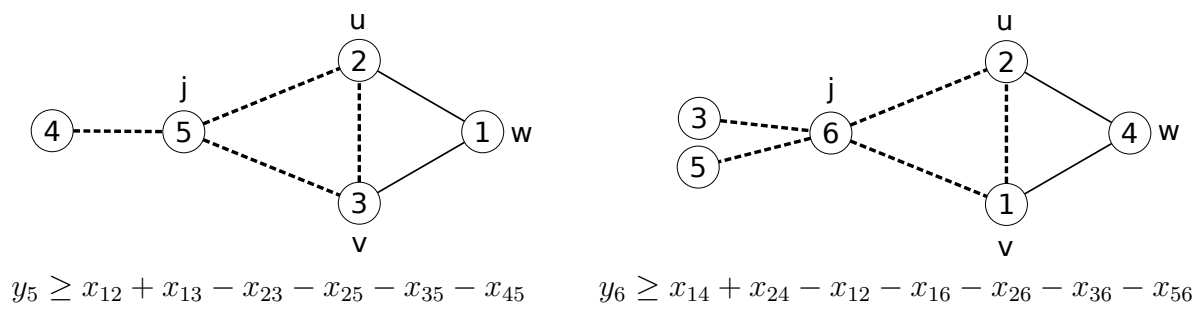


Figura 3.4: Duas inequações *Kite*.

## 4 ALGORITMOS *BRANCH-AND-CUT*

Um algoritmo *branch-and-cut* (BC) utilizando a formulação  $\mathcal{F}_2$  (BC-F2) foi implementado para resolver o  $p$ -PEC. O algoritmo é iniciado com todas as restrições de  $\mathcal{F}_2$ , com exceção das inequações triangulares, que são geradas durante a execução do algoritmo através de uma abordagem de planos de corte. Além disso, BC-F2 considera as inequações  $|E|$ -*bounds a priori*, enquanto que as inequações *Tree* e *Kite* são consideradas apenas no nó raiz.

Também foi implementado um algoritmo BC utilizando a formulação  $\mathcal{F}_1$  (BC-F1), o qual inicia com todas as restrições de  $\mathcal{F}_1$  e as inequações  $|E|$ -*bounds*. Os seguintes cortes (inequações triangulares para  $\mathcal{F}_1$ ) também foram considerados em BC-F1.

$$-\sum_{t \in K} w_{ijt} + \sum_{t \in K} w_{ikt} + \sum_{t \in K} w_{jkt} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k, \quad (4.1)$$

$$\sum_{t \in K} w_{ijt} - \sum_{t \in K} w_{ikt} + \sum_{t \in K} w_{jkt} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k, \quad (4.2)$$

$$\sum_{t \in K} w_{ijt} + \sum_{t \in K} w_{ikt} - \sum_{t \in K} w_{jkt} \leq 1, \quad \forall i, j, k \in V, i < j < k. \quad (4.3)$$

Tanto em BC-F1 quanto em BC-F2, todo o mecanismo de *branching* é gerenciado pelo pacote de otimização adotado, CPLEX 12.4. A seguir, são discutidos os principais componentes de BC-F1 e BC-F2.

### 4.1 Separação das Inequações Triangulares

Como nos trabalhos de Grötschel e Wakabayashi (1989) e de Böcker et al (2011), neste trabalho as inequações triangulares são separadas através da força bruta. Embora tal estratégia tenha complexidade  $\mathcal{O}(|V|^3)$ , o tempo despendido, na prática, é aceitável,

dados os tamanhos dos problemas considerados neste trabalho.

Em ambos os algoritmos, executa-se o procedimento de separação até o nono nível da árvore e sempre que uma solução inteira é encontrada — sendo o último caso apenas necessário em BC-F2. Para soluções fracionárias, o procedimento de separação gera as 400 inequações mais violadas, como feito por Grötschel e Wakabayashi (1989). Para soluções inteiras, o procedimento de separação gera todas as inequações violadas se  $|V| \leq 100$ . Do contrário, gera-se, no máximo,  $\alpha$  inequações por aresta violada (veja o Algoritmo 1). Uma aresta  $\{i, j\}$  é violada se ela não está presente na solução e existe um vértice  $k$  tal que  $i$ ,  $j$  e  $k$  induzem um  $P_3$ . Experimentos preliminares sugeriram  $\alpha = 3$  para  $100 < |V| \leq 150$ ,  $\alpha = 2$  para  $150 < |V| \leq 200$  e  $\alpha = 1$  para  $|V| > 200$ .

---

**Algoritmo 1** Separação das inequações triangulares em uma solução inteira  $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{y})$  quando  $|V| > 100$ .

---

```

1: Procedimento Ineq-Triangulares-Sep( $\alpha, \bar{s} = (\bar{x}, \bar{y})$ )
2:  $I \leftarrow \emptyset$ 
3: Seja  $\beta_{ij}$  o número de inequações triangulares adicionadas para a aresta  $\{i, j\}$ 
4:  $\beta_{ij} \leftarrow 0, \forall i, j \in V, i < j$ 
5: para  $i = 1, \dots, |V| - 2$  faça
6:   para  $j = i + 1, \dots, |V| - 1$  faça
7:     para  $k = j + 1, \dots, |V|$  faça
8:       se  $-\bar{x}_{ij} + \bar{x}_{ik} + \bar{x}_{jk} > 1$  e  $\beta_{ij} < \alpha$  então
9:          $I \leftarrow I \cup \{-x_{ij} + x_{ik} + x_{jk} \leq 1\}$ 
10:         $\beta_{ij} \leftarrow \beta_{ij} + 1$ 
11:       se  $\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{ik} + \bar{x}_{jk} > 1$  e  $\beta_{ik} < \alpha$  então
12:          $I \leftarrow I \cup \{x_{ij} - x_{ik} + x_{jk} \leq 1\}$ 
13:         $\beta_{ik} \leftarrow \beta_{ik} + 1$ 
14:       se  $\bar{x}_{ij} + \bar{x}_{ik} - \bar{x}_{jk} > 1$  e  $\beta_{jk} < \alpha$  então
15:          $I \leftarrow I \cup \{x_{ij} + x_{ik} - x_{jk} \leq 1\}$ 
16:         $\beta_{jk} \leftarrow \beta_{jk} + 1$ 
17: retorne  $I$ 
18: fim Ineq-Triangulares-Sep

```

---

## 4.2 Separação das Inequações *Kite*

A fim de definir uma inequação *Kite* violada para um vértice  $j$ , deve-se determinar três vértices distintos  $u$ ,  $v$  e  $w$  que não satisfaçam  $y_j \geq x_{wu} + x_{wv} - x_{uv} - \sum_{i < j, i \neq w} x_{ij}$ . Portanto, em princípio, o tempo exigido para separar as inequações *Kite* para todos os vértices é  $\mathcal{O}(|V|^4)$ . No entanto, é possível realizar essa separação em tempo  $\mathcal{O}(|V|^3)$  via programação dinâmica.

Seja  $(\bar{x}, \bar{y})$  uma solução fracionária de  $\mathcal{F}_2$  e seja  $\bar{c}(w, u, v) = \bar{x}_{wu} + \bar{x}_{wv} - \bar{x}_{uv}$ . Dado

um  $w$  fixo, a máxima violação de uma inequação *Kite* para o vértice  $j$  é obtida com os vértices  $u$  e  $v$  tais que a soma  $\bar{x}_{wu} + \bar{x}_{wv} - \bar{x}_{uv}$  é maximizada. Dessa forma, para os vértices  $j$  e  $w$  com  $j \geq 4$  e  $w < j$ , seja  $\mathcal{T}(j, w)$  o máximo valor  $\bar{c}(w, u, v)$  tal que  $u < j$  e  $v < j$ . O valor  $\mathcal{T}(j, w)$  pode ser expresso pela seguinte relação recursiva.

$$\mathcal{T}(j, w) = \begin{cases} \max\{\mathcal{T}(j-1, w), \max_u \{\bar{c}(w, j-1, u) \mid u < j-1, u \neq w\}\}, \\ \text{se } w < j-1 \text{ e } j \neq 4. \\ \\ \max_{u,v} \{\bar{c}(w, u, v) \mid u, v < j \wedge u, v \neq w \wedge u < v\}, \\ \text{se } w = j-1 \text{ ou } j = 4. \end{cases}$$

A partir da relação recursiva definida acima, pode-se desenvolver um algoritmo baseado em programação dinâmica que computa os valores  $\mathcal{T}(j, w)$  considerando valores crescentes de  $j$  para um valor fixo de  $w$ . Tais computações requerem um tempo  $\mathcal{O}(|V|^3)$ , uma vez que existem  $\mathcal{O}(|V|)$  valores  $\mathcal{T}(j, w)$  que demandam um tempo  $\mathcal{O}(|V|^2)$  para serem computados (se  $w = j-1$  ou  $j = 4$ ) e  $\mathcal{O}(|V|^2)$  valores  $\mathcal{T}(j, w)$  que demandam um tempo  $\mathcal{O}(|V|)$  para serem computados (se  $w < j-1$  e  $j \neq 4$ ). Uma vez calculados os valores  $\mathcal{T}(j, w)$ , a máxima violação de uma inequação *Kite* para um vértice  $j$  é calculada por meio da expressão a seguir.

$$\max\{0, \max_{w < j} \{\mathcal{T}(j, w) - \sum_{\substack{i < j \\ i \neq w}} \bar{x}_{ij} - \bar{y}_j\}\}.$$

Para se obter a inequação violada em si, é suficiente registrar os vértices  $u$  e  $v$  associados ao valor  $\mathcal{T}(j, w)$ , i.e., vértices  $u$  e  $v$  tais que  $\mathcal{T}(j, w) = \bar{c}(w, u, v)$ .

#### 4.3 Separação das Inequações *Tree*

As inequações *Tree*, que são exponenciais em quantidade, podem ser separadas em tempo polinomial, conforme discutido a seguir.

**Proposição 9.** *As inequações *Tree* podem ser separadas em tempo polinomial através da resolução do problema da árvore geradora de custo máximo.*

*Demonstração.* Seja  $(\bar{x}, \bar{y})$  uma solução fracionária de  $\mathcal{F}_2$ . A inequação *Tree* mais violada (se tal inequação existe) é definida pelas arestas de uma árvore  $T$  tal que a soma  $\sum_{\{i,j\} \in T} \bar{x}_{ij}$



é maximizada. Tal árvore pode ser computada em tempo polinomial pelo algoritmo de Prim (Prim, 1957) ou pelo algoritmo de Kruskal (Kruskal, 1956).  $\square$

#### 4.4 Limite Primal Inicial

A fim de melhorar o desempenhos dos métodos exatos, BC-F1 e BC-F2 são iniciados com um limite primal obtido através de uma heurística similar ao algoritmo proposto por Bastos et al (2014) para o PEC. Esse algoritmo, descrito no Capítulo 6, combina a meta-heurística GRASP com um método de refinamento baseado em Particionamento de Conjuntos (*Set Partitioning*, em inglês).

## 5 ALGORITMO *BRANCH-AND-PRICE*

Este capítulo descreve o algoritmo exato proposto para o  $p$ -PEC a partir da formulação  $\mathcal{F}_3$ . Como essa formulação possui um número exponencial de variáveis, é impraticável resolver o seu programa linear considerando simultaneamente todas as variáveis. Dessa forma, o algoritmo proposto resolve PL-F3, em cada nó da árvore do *branch-and-bound*, através da técnica de Geração de Colunas, resultando em um algoritmo *branch-and-price* (BP).

### 5.1 Geração de Colunas

A Geração de Colunas considera uma versão restrita de PL-F3, chamada de Problema Mestre Restrito (PMR). Inicialmente, o PMR contém um conjunto pequeno de colunas (variáveis) que seja suficiente para produzir uma solução viável de PL-F3 — na prática, o PMR foi iniciado com as colunas relativas à solução produzida pela heurística descrita no Capítulo 6. Novas colunas são adicionadas ao PMR através da resolução iterativa das duas seguintes etapas: (i) resolver PMR; e (ii) baseado nos novos valores das variáveis duais associadas às restrições do PMR, encontrar colunas de custo reduzido negativo e adicioná-las ao PMR. As etapas (i) e (ii) são executadas enquanto novas colunas forem adicionadas ao PMR. A etapa (ii) é conhecida como subproblema de *pricing*. Mais detalhes sobre Geração de Colunas e *branch-and-price* podem ser encontrados nos trabalhos de Barnhart et al (1996) e de Chen et al (2009).

#### 5.1.1 Subproblema de *Pricing*

Sejam  $\bar{\pi}_j$ ,  $j \in V$ , os valores das variáveis duais associadas às restrições (3.25) e  $\bar{\sigma}$  o valor da variável dual associada à restrição (3.26). Considere novamente o conjunto

de todos os *clusters* viáveis  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$  e o custo de  $C_k$  ( $k$ -ésimo *cluster* de  $\mathcal{C}$ ), denotado por  $c_k$ , conforme definidos na Seção 3.1.3. Pela Teoria da Programação Linear, o custo reduzido da coluna referente a  $C_k$ ,  $CR_k$ , é dado por:

$$CR_k = c_k - \sum_{j \in C_k} \bar{\pi}_j - \bar{\sigma} \quad (5.1)$$

O objetivo do subproblema de *pricing* (SP) é encontrar uma ou mais colunas de custo reduzido negativo ou provar que tais colunas não existem. Observe que a Equação (5.1) pode ser reescrita como:

$$CR_k = \sum_{\substack{i, j \in C_k \\ i < j}} \bar{\mu}_{ij} + \sum_{j \in C_k} \bar{\nu}_j - \bar{\sigma} \quad (5.2)$$

onde:

$$\bar{\nu}_j = \frac{1}{2}|\delta(j)| - \bar{\pi}_j$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{i, j\} \notin E \\ -1, & \text{se } \{i, j\} \in E \end{cases}$$

Isto é,  $\bar{\nu}_j$  e  $\bar{\mu}_{ij}$  são, respectivamente, os custos reduzidos associados ao vértice  $j$  e à aresta  $\{i, j\}$ . Lembre que  $\delta(j)$  denota o grau do vértice  $j$ . Para verificar que as Equações (5.1) e (5.2) são equivalentes, note que

$$c_k = \sum_{\substack{i, j \in C_k \\ i < j}} \bar{\mu}_{ij} + \sum_{j \in C_k} \frac{1}{2}|\delta(j)|$$

Dessa forma, o SP pode ser formalmente definido como segue. Dados um inteiro  $b$  e um grafo completo  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$  com pesos quaisquer nos vértices e pesos  $+1/-1$  nas arestas, encontrar a *clique* de peso mínimo (soma dos pesos dos vértices e das arestas) que possua, no máximo,  $b$  vértices. O SP é um problema NP-Difícil, uma vez que ele pode ser reduzido do Problema da *Clique* Máxima (PCM), que consiste em determinar a clique de cardinalidade máxima de um grafo (Karp, 1972). A redução é similar àquela discutida por Pisinger (2007) para mostrar que o Problema da Mochila Quadrática generaliza o PCM.

A resolução do SP em cada iteração da geração de colunas empregada possui até duas fases. A primeira fase consiste em resolver o SP através da heurística proposta

na Seção 5.1.3. O papel dessa heurística é gerar rapidamente colunas de custo reduzido negativo, sem a necessidade de encontrar a melhor coluna possível. A segunda fase só é executada se nenhuma coluna de custo reduzido negativo for encontrada na primeira fase. Nela, o SP é solucionado através de um resolvedor de programação inteira, utilizando a formulação  $\mathcal{F}_{L1}$ , que foi a formulação que apresentou os melhores resultados empíricos (ver Seção 7.3.1). O resolvedor utiliza a melhor solução encontrada na primeira fase como um limite primal inicial e é interrompido assim que uma coluna de custo reduzido negativo é encontrada.

As formulações testadas e a heurística proposta para resolver o SP serão descritas nas duas próximas seções.

### 5.1.2 Formulações para o Subproblema de *Pricing*

Esta seção apresenta as formulações matemáticas testadas para resolver o SP, a saber: uma formulação não-linear  $\mathcal{F}_{NL}$  e duas linearizações para  $\mathcal{F}_{NL}$ , denotadas por  $\mathcal{F}_{L1}$  e  $\mathcal{F}_{L2}$ . Após experimentos preliminares (ver Seção 7.3.1), adotou-se a formulação  $\mathcal{F}_{L1}$  para a resolução do SP.

#### Formulação $\mathcal{F}_{NL}$

Seja  $x_i$  uma variável binária que assume 1 se, e somente se, o vértice  $i$  for parte da solução (coluna gerada),  $\forall i \in V$ . Considere a seguinte formulação não-linear  $\mathcal{F}_{NL}$  para o SP:

$$(\mathcal{F}_{NL}) \quad \min \sum_{\substack{i,j \in V \\ i < j}} \bar{\mu}_{ij} x_i x_j + \sum_{i \in V} \bar{\nu}_i x_i - \bar{\sigma} \quad (5.3)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in V} x_i \leq |V| - p + 1, \quad (5.4)$$

$$\sum_{i \in V} x_i \geq 1, \quad (5.5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (5.6)$$

A função objetivo (5.3) minimiza o custo reduzido da coluna produzida. As restrições (5.4) e (5.5) determinam, respectivamente, os tamanhos máximo e mínimo de uma coluna (*cluster*) viável. Por fim, as restrições (5.6) dizem respeito à integralidade das variáveis.

### Formulação $\mathcal{F}_{L1}$

A primeira linearização da formulação  $\mathcal{F}_{NL}$ , denotada por  $\mathcal{F}_{L1}$ , é feita através da definição de um novo conjunto de variáveis binárias  $y_{ij}, \forall i, j \in V, i < j$ , seguindo a ideia da formulação apresentada por Sørensen (2004) para o Problema da *Clique* de Peso Máximo. Para dois vértices  $i, j \in V$  com  $i < j$ , a variável  $y_{ij}$  assume 1 caso a aresta  $\{i, j\}$  esteja presente na coluna gerada, i.e., caso tanto  $i$  quanto  $j$  façam parte da solução. Do contrário,  $y_{ij} = 0$ . Como em  $\mathcal{F}_{NL}$ , seja  $x_i$  uma variável binária que assume 1 se, e somente se, o vértice  $i$  for parte da solução,  $\forall i \in V$ . Dessa forma, a formulação  $\mathcal{F}_{L1}$  pode ser escrita como:

$$(\mathcal{F}_{L1}) \quad \min \sum_{\substack{i, j \in V \\ i < j}} \bar{\mu}_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in V} \bar{\nu}_i x_i - \bar{\sigma} \quad (5.7)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in V} x_i \leq |V| - p + 1, \quad (5.8)$$

$$\sum_{i \in V} x_i \geq 1, \quad (5.9)$$

$$y_{ij} \leq x_i, \quad \forall i, j \in V, i < j, \quad (5.10)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \quad \forall i, j \in V, i < j, \quad (5.11)$$

$$y_{ij} + 1 \geq x_i + x_j, \quad \forall i, j \in V, i < j, \quad (5.12)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, i < j, \quad (5.13)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (5.14)$$

A função objetivo (5.7) minimiza o custo reduzido da coluna produzida. As restrições (5.8) e (5.9) determinam, respectivamente, os tamanhos máximo e mínimo de uma coluna (*cluster*) viável. As restrições (5.10)-(5.12) garantem que a aresta  $\{i, j\}$  fará parte da solução se, e somente, os vértices  $i$  e  $j$  fizerem parte da solução. Por fim, as restrições (5.13) e (5.14) dizem respeito à integralidade das variáveis.

### Formulação $\mathcal{F}_{L2}$

A segunda linearização da formulação  $\mathcal{F}_{NL}$ , denotada por  $\mathcal{F}_{L2}$ , é baseada em uma formulação proposta por Billionnet e Éric Soutif (2004) para o Problema da Mochila Quadrática. Como em  $\mathcal{F}_{NL}$ , seja  $x_i$  uma variável binária que assume 1 se, e somente se, o vértice  $i$  for parte da solução,  $\forall i \in V$ . A ideia dessa formulação é definir variáveis con-

tínuas  $z_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, |V| - 1\}$ , tais que  $z_i = \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_i x_j$ . Em outras palavras, para um dado vértice  $i$ ,  $z_i$  é igual a soma dos custos reduzidos associados às arestas  $\{i, j\}$ , com  $i < j$ , presentes na solução. Mais precisamente, a formulação  $\mathcal{F}_{L2}$  pode ser escrita como:

$$(\mathcal{F}_{L2}) \quad \min \sum_{i=1}^{|V|-1} z_i + \sum_{i \in V} \bar{\nu}_i x_i - \bar{\sigma} \quad (5.15)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in V} x_i \leq |V| - p + 1, \quad (5.16)$$

$$\sum_{i \in V} x_i \geq 1, \quad (5.17)$$

$$z_i \geq M_i x_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |V| - 1\}, \quad (5.18)$$

$$z_i \geq \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j + M'_i (x_i - 1), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |V| - 1\}, \quad (5.19)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, \quad (5.20)$$

$$z_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |V| - 1\}. \quad (5.21)$$

A função objetivo (5.15) minimiza o custo reduzido da coluna produzida. As restrições (5.16) e (5.17) determinam, respectivamente, os tamanhos máximo e mínimo de uma coluna viável. As restrições (5.18) e (5.19) garantem que  $z_i = \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_i x_j$ . Para verificar que as restrições (5.18) e (5.19) estão corretas, considere um vértice  $i \in \{1, 2, \dots, |V| - 1\}$ . Se  $x_i = 0$ , então deve-se ter  $z_i = 0$ . Para  $x_i = 1$ , têm-se as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} z_i &\geq 0, \\ z_i &\geq \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j - M'_i, \end{aligned}$$

onde  $M'_i = \min(|\{j \in V \mid i < j \wedge \bar{\mu}_{ij} = 1\}|, |V| - p + 1)$  é uma constante grande o suficiente para garantir que  $\sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j - M'_i \leq 0$ . Note que  $z_i$  assumirá o menor valor possível, já que a variável  $z_i$  possui coeficiente positivo na função objetivo e o problema é de minimização. Logo, a primeira restrição estará ativa, ou seja,  $z_i$  assumirá o valor 0. Agora suponha que  $x_i = 1$ . Nesse caso, deve-se verificar que  $z_i = \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j$ . Para

$x_i = 1$ , têm-se as seguintes restrições:

$$z_i \geq M_i,$$

$$z_i \geq \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j,$$

onde  $M_i = -\min(|\{j \in V \mid i < j \wedge \bar{\mu}_{ij} = -1\}|, |V| - p + 1)$  é uma constante pequena o suficiente para garantir que  $M_i \leq \sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j$ . Sendo assim, a segunda restrição estará ativa, o que significa que  $z_i$  assumirá o valor  $\sum_{j=i+1}^{|V|} \bar{\mu}_{ij} x_j$ , como desejado.

Por fim, as restrições (5.20) e (5.21) dizem respeito aos domínios das variáveis.

### 5.1.3 Heurística para o Subproblema de *Pricing*

O Algoritmo 2 descreve a heurística proposta para o SP, a qual é composta de  $|V|+1$  iterações. Em cada iteração, uma solução é construída e submetida a um procedimento de busca local. Nas primeiras  $|V|$  iterações, utiliza-se a Heurística Construtiva 1 (HC-1), e na última iteração é utilizada a Heurística Construtiva 2 (HC-2). As duas heurísticas construtivas e a busca local empregadas serão detalhadas a seguir.

---

#### Algoritmo 2 Heurística para o SP.

---

```

1: Procedimento Heurística-SP( $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $\bar{\sigma}$ )
2:  $L \leftarrow \emptyset$ 
3: para  $j = 1, \dots, |V| + 1$  faça
4:   se  $j < |V| + 1$  então
5:      $C \leftarrow \text{HC-1}(j, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ 
6:   senão
7:      $C \leftarrow \text{HC-2}(\bar{\mu}, \bar{\nu})$ 
8:    $C' \leftarrow \text{BuscaLocal}(C)$ 
9:    $L \leftarrow L \cup \{C'\}$ 
10: retorne  $L$ 
11: fim Heurística-SP

```

---

### Heurística Construtiva 1

A heurística HC-1, descrita no Algoritmo 3, é um procedimento guloso que gera uma coluna (*cluster*)  $C$  a partir de um vértice  $j$ . Inicialmente, o vértice  $j$ , que é um parâmetro de HC-1, é adicionado à solução (linha 2). Então é calculado o valor  $\Delta_i$ , para cada  $i \notin C$ , o qual representa a variação no custo reduzido de  $C$  após a adição do vértice  $i$  (linha 3). A lista de candidatos LC (linha 4) possui os vértices que, se adicionados à  $C$ ,

acarretariam em diminuição do custo reduzido de  $C$ , i.e., vértices  $i \notin C$  tais que  $\Delta_i < 0$ . Enquanto houver vértices na LC e enquanto for possível adicionar vértices à  $C$  (laço das linhas 5-9), um vértice é escolhido de forma gulosa na LC (linha 6) e é adicionado à solução (linha 7). Em seguida, os valores  $\Delta_i, \forall i \notin C$ , e a LC são atualizados (linhas 8 e 9). Após o término desse laço, a solução construída é retornada (linha 10).

---

**Algoritmo 3** Heurística Construtiva 1 para o SP.

---

```

1: Procedimento HC-1( $j, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ )
2:  $C \leftarrow \{j\}$ 
3:  $\Delta_i = \bar{\nu}_i + \sum_{l \in C} \bar{\mu}_{li}, \forall i \notin C$ 
4:  $LC \leftarrow \{i | i \notin C \wedge \Delta_i < 0\}$ 
5: enquanto  $|LC| > 0$  e  $|C| < |V| - p + 1$  faça
6:    $k \leftarrow \underset{i \in LC}{\operatorname{argmin}} \Delta_i$ 
7:    $C \leftarrow C \cup \{k\}$ 
8:    $\Delta_i = \Delta_i + \bar{\mu}_{ki}, \forall i \notin C$ 
9:    $LC \leftarrow \{i | i \notin C \wedge \Delta_i < 0\}$ 
10: retorne  $C$ 
11: fim HC-1

```

---

## Heurística Construtiva 2

Diferente de HC-1, que iterativamente adiciona vértices à solução, a heurística HC-2, descrita no Algoritmo 4, baseia-se na remoção de vértices de uma solução  $C$  inicialmente composta por todos os vértices do conjunto  $V$  (linha 2). Primeiro, calcula-se o valor  $\Delta_i, \forall i \in C$ , o qual representa a variação no custo reduzido de  $C$  após a remoção do vértice  $i$  (linha 3). Enquanto  $C$  for inviável por possuir mais do que  $|V| - p + 1$  vértices, um vértice, escolhido de forma gulosa, é removido da solução, e os valores  $\Delta_i, \forall i \in C$ , são recalculados (linhas 4-7). Após a viabilização da solução, um vértice  $i$  só é removido de  $C$  caso tal remoção gere uma nova solução de custo reduzido estritamente menor. Essas novas remoções são realizadas de forma iterativa e gulosa, conforme descrito nas linhas 8-13. Por fim, a solução é retornada (linha 14).

## Busca Local

Seja  $C$  a solução do SP produzida por HC-1 ou HC-2 e denote o custo reduzido de  $C$  por  $cr(C)$ . A busca local consiste na aplicação do procedimento *Variable Neighborhood Descent* (VND) (Mladenović e Hansen, 1997), ilustrado no Algoritmo 5, com as seguintes estruturas de vizinhança: **Remover-Vértice**, **Adicionar-Vértice** e **Trocar-Vértices**.



---

**Algoritmo 4** Heurística Construtiva 2 para o SP.

---

```

1: Procedimento HC-2( $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\nu}$ )
2:  $C \leftarrow V$ 
3:  $\Delta_i = -\bar{\nu}_i - \sum_{\substack{l \in C \\ l \neq i}} \bar{\mu}_{li}, \forall i \in C$ 
4: enquanto  $|C| > |V| - p + 1$  faça
5:    $k \leftarrow \underset{i \in C}{\operatorname{argmin}} \Delta_i$ 
6:    $C \leftarrow C \setminus \{k\}$ 
7:    $\Delta_i = \Delta_i + \bar{\mu}_{ki}, \forall i \in C$ 
8:    $LC \leftarrow \{i | i \in C \wedge \Delta_i < 0\}$ 
9:   enquanto  $|LC| > 0$  e  $|C| > 1$  faça
10:     $k \leftarrow \underset{i \in LC}{\operatorname{argmin}} \Delta_i$ 
11:     $C \leftarrow C \setminus \{k\}$ 
12:     $\Delta_i = \Delta_i + \bar{\mu}_{ki}, \forall i \in C$ 
13:     $LC \leftarrow \{i | i \in C \wedge \Delta_i < 0\}$ 
14: retorne  $C$ 
15: fim HC-2

```

---

Para cada estrutura de vizinhança, todos os movimentos são avaliados, sendo o movimento que mais aprimora a solução corrente realizado, caso tal movimento exista.

---

**Algoritmo 5** Busca Local para o SP.

---

```

1: Procedimento VND( $C$ )
2:  $LV \leftarrow \{Remover-Vértice, Adicionar-Vértice, Trocar-Vértices\}$ 
3:  $\eta \leftarrow 1$ 
4: enquanto  $\eta \leq |LV|$  faça
5:    $N^{(\eta)} \leftarrow \eta$ -ésima vizinhança de  $LV$ 
6:    $C' \leftarrow$  melhor vizinho de  $C$  em  $N^{(\eta)}$ 
7:   se  $cr(C') < cr(C)$  então
8:      $C \leftarrow C'$ 
9:      $\eta \leftarrow 1$ 
10:  senão
11:     $\eta \leftarrow \eta + 1$ 
12: retorne  $C$ 
13: fim VND

```

---

Para acelerar a busca local, emprega-se o vetor  $R$ , definido da seguinte maneira:

$$R(j) = \begin{cases} -\bar{\nu}_j - \sum_{\substack{i \in C \\ i \neq j}} \bar{\mu}_{ij}, & \forall j \in C \\ \bar{\nu}_j + \sum_{i \in C} \bar{\mu}_{ij}, & \forall j \notin C \end{cases}$$

Ou seja, para um dado vértice  $j$ ,  $R(j)$  representa a variação no custo reduzido da solução corrente  $C$  após: (i) inserir  $j$  em  $C$ , se  $j \notin C$ ; ou (ii) remover  $j$  de  $C$ , caso  $j \in C$ . Claramente, o vetor  $R$  pode ser construído em tempo  $\mathcal{O}(|C||V|)$ . A seguir, são descritas

as estruturas de vizinhança utilizadas.

(i) **Remover-Vértice**: um vértice  $j \in C$  é removido de  $C$ . O custo reduzido da nova solução  $C'$  obtida após esse movimento pode ser computado em tempo constante pela equação:

$$cr(C') = cr(C) + R(j)$$

Dessa forma, a avaliação de todos os movimentos desta vizinhança demanda um tempo  $\mathcal{O}(|C|)$ . Após remover  $j$  de  $C$ , deve-se realizar as seguintes atualizações em  $R$ :

$$R(j) = -R(j)$$

$$R(i) = R(i) + \bar{\mu}_{ij}, \forall i \in C$$

$$R(i) = R(i) - \bar{\mu}_{ij}, \forall i \notin C, i \neq j$$

Logo, o vetor  $R$  é atualizado em tempo  $\mathcal{O}(|V|)$ . Para evitar a criação de uma solução inviável, esse movimento só é considerado se  $|C| > 1$ .

(ii) **Adicionar-Vértice**: um vértice  $j \notin C$  é adicionado à  $C$ . O custo reduzido da nova solução  $C'$  obtida após esse movimento pode ser computado em tempo constante pela equação:

$$cr(C') = cr(C) + R(j)$$

Portanto, avaliar todos os movimentos desta vizinhança demanda um tempo  $\mathcal{O}(|V| - |C|)$ . Após adicionar o novo vértice à solução, as seguintes atualizações são realizadas em  $R$ :

$$R(j) = -R(j)$$

$$R(i) = R(i) - \bar{\mu}_{ij}, \forall i \in C, i \neq j$$

$$R(i) = R(i) + \bar{\mu}_{ij}, \forall i \notin C$$

Dessa forma, a atualização de  $R$  pode ser feita em tempo  $\mathcal{O}(|V|)$ . Para evitar a criação de uma solução inviável, esse movimento não é considerado caso  $|C| = |V| - p + 1$ , ou seja, caso  $C$  possua o tamanho máximo permitido para um *cluster*.

(ii) **Trocar-Vértices**: um vértice  $i \in C$  é removido de  $C$  e um vértice  $j \notin C$  é adicionado à  $C$ . O custo reduzido da nova solução  $C'$  obtida após esse movimento pode ser computado

em tempo constante pela equação:

$$cr(C') = cr(C) + R(i) + R(j) - \bar{\mu}_{ij}$$

Portanto, avaliar todos os movimentos desta vizinhança demanda um tempo  $\mathcal{O}(|C|(|V| - |C|))$ . Após trocar os vértices  $i$  e  $j$ , as seguintes atualizações são realizadas em  $R$ :

$$R(i) = -R(i) + \bar{\mu}_{ij}$$

$$R(j) = -R(j) + \bar{\mu}_{ij}$$

$$R(k) = R(k) + \bar{\mu}_{ik} - \bar{\mu}_{jk}, \forall k \in C, k \neq j$$

$$R(k) = R(k) - \bar{\mu}_{ik} + \bar{\mu}_{jk}, \forall k \notin C, k \neq i$$

O vetor  $R$  é então atualizado em tempo  $\mathcal{O}(|V|)$ .

## 5.2 Branching

### 5.2.1 Regra de Branching

Adotou-se a clássica regra de *branching* proposta por Ryan e Foster (1981) para problemas de particionamento de conjuntos. A regra consiste em criar dois nós filhos a partir de uma aresta  $\{i, j\}$ : em um nó, a aresta é proibida; no outro, a aresta é obrigatória. A escolha da aresta é baseada na seguinte relação entre as variáveis  $x_{ij}$ ,  $\forall i, j \in V, i < j$ , e  $\lambda_l$ ,  $\forall l \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{C}|\}$ :

$$x_{ij} = \sum_{l=1}^{|\mathcal{C}|} a_l^i a_l^j \lambda_l, \quad \forall i, j \in V, i < j \quad (5.22)$$

Como observado por Ryan e Foster (1981), se alguma variável  $\lambda_l$  assumir um valor fracionário, então alguma variável  $x_{ij}$  também assumirá um valor fracionário. Dessa forma, seja  $(\bar{\lambda})$  a solução produzida pela geração de colunas e seja  $\bar{x}_{ij}$ ,  $\forall i, j \in V, i < j$ , o valor associado à variável  $x_{ij}$ , calculado conforme descrito na Equação (5.22). A aresta  $\{i, j\}$  escolhida é aquela que possui o valor  $\bar{x}_{ij}$  mais próximo de 0,5.

Na prática, não é possível adicionar diretamente as restrições do *branching*, já que PL-F3 não possui a variável  $x_{ij}$ . Logo, a imposição das restrições do *branching* é feita da seguinte maneira:

- $x_{ij} = 0$ : todas as colunas que possuem os vértices  $i$  e  $j$  simultaneamente são removidas do PMR. O SP é atualizado de modo a garantir que as colunas geradas não possuem os vértices  $i$  e  $j$  juntos.
- $x_{ij} = 1$ : todas as colunas que possuem o vértice  $i$  mas não possuem o vértice  $j$  (e vice-versa) são removidas do PMR. O SP é atualizado de modo a garantir que as colunas geradas não possuem os vértices  $i$  e  $j$  separados.

### 5.2.2 Estratégias de *Branching*

A lista de nós abertos contém todos os nós que foram criados mas ainda não foram processados. A estratégia de *branching* determina o próximo nó que será selecionado na lista de nós abertos. Foram consideradas as seguintes estratégias de *branching*:

- Busca em Profundidade (DFS - *Depth-First Search*): o último nó criado será o próximo a ser considerado. Portanto, os nós mais profundos são os primeiros a serem processados.
- Busca em Largura (BFS - *Breadth-First Search*): os nós são considerados na ordem em que foram criados. Dessa forma, a busca é feita níveis, sendo todos os nós com uma profundidade  $i$  processados antes de qualquer nó com profundidade  $i + 1$ .
- Busca pelo Melhor *Bound* (BeFS - *Best-First Search*): o próximo nó a ser processado é o que possui o melhor *bound* para a função objetivo.

Dentre as três estratégias descritas acima, adotou-se BeFS, que foi a estratégia que apresentou os melhores resultados em experimentos preliminares (ver Seção 7.3.2).

### 5.3 Limite Primal Inicial

Como feito nos algoritmos BC, o algoritmo BP proposto é iniciado com um limite primal obtido através da heurística para o  $p$ -PEC descrita no Capítulo 6.

## 6 UM LIMITE PRIMAL

Este capítulo apresenta a heurística empregada neste trabalho a fim de obter um limite primal para os métodos exatos. Essa heurística combina a meta-heurística GRASP com um método de refinamento baseado em Particionamento de Conjuntos (*Set Partitioning*, em inglês), seguindo a linha do algoritmo proposto por Bastos et al (2014) para o PEC.

### 6.1 GRASP para o $p$ -PEC

*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) é uma meta-heurística iterativa na qual cada iteração é composta por duas fases: *construção* e *busca local*. A melhor solução obtida entre todas as iterações é considerada a solução final.

Na fase de construção, um solução inicialmente vazia iterativamente inclui um novo candidato (parte da solução), até que uma solução viável seja construída. A escolha do próximo candidato a ser incluído na solução é feita de forma aleatória e adaptativa. Na segunda fase da iteração, a solução construída é refinada através de um procedimento de busca local. Mais detalhes sobre o GRASP podem ser encontrados no trabalho de Resende e Ribeiro (2010).

#### 6.1.1 Fase de Construção

A fase de construção, ilustrada no Algoritmo 6, inicia com um solução vazia  $G'$  (linha 2). Em cada iteração da fase de construção, é definida uma *lista de candidatos* LC composta pelos vértices que ainda não fazem parte da solução (linha 4). Os melhores candidatos de LC são selecionados para compor a *lista restrita de candidatos* LRC (linha 5). A definição da LRC é guiada por um parâmetro  $\alpha$  e pela função gulosa  $g(i)$ , definida

para cada vértice  $i$  como:

$$g(i) = |N(i)| - |N_2(i) \setminus N(i)| \quad (6.1)$$

em que:

- $N(i)$  é o conjunto de vizinhos do vértice  $i$ ;
- $N_2(i) = \bigcup_{j \in N(i)} N(j) \setminus \{i\}$ , ou seja,  $N_2(i)$  é o conjunto composto pelos vizinhos dos vizinhos de  $i$ , sem incluir o próprio  $i$ .

Os melhores candidatos são os que satisfazem:

$$g(i) \geq g_{min} + \alpha(g_{max} - g_{min}), \quad (6.2)$$

sendo  $g_{min} = \min\{g(i) \mid i \in LC\}$ ,  $g_{max} = \max\{g(i) \mid i \in LC\}$  e  $\alpha \in [0, 1]$  o parâmetro que determina quão gulosa é a seleção dos candidatos pertencentes a LC. Um vértice  $i$  é então aleatoriamente selecionado na LRC para que o *cluster* definido pelos vértices do conjunto  $N[i]$  seja adicionado à solução (linhas 6-8). Os vértices do novo *cluster* são removidos do grafo  $G$  (linhas 9-10). No fim da iteração, é recalculado o valor  $g(i)$  para todo vértice  $i$  que ainda não foi adicionado à solução. Novas iterações são executadas enquanto houver vértices candidatos.

---

**Algoritmo 6** GRASP para o  $p$ -PEC: fase de construção.

---

- 1: Procedimento ConstruçãoGRASP( $G = (V, E), \alpha, g(.)$ )
  - 2:  $G' \leftarrow (\emptyset, \emptyset)$
  - 3: **enquanto**  $|V| \neq \emptyset$  **faça**
  - 4:    $LC \leftarrow V$
  - 5:    $LRC \leftarrow \{i \in LC \mid g(i) \geq g_{min} + \alpha(g_{max} - g_{min})\}$
  - 6:    $i \leftarrow$  escolha aleatória em LRC
  - 7:    $C \leftarrow$  *cluster* definido pelos vértices do conjunto  $N[i]$
  - 8:    $G' \leftarrow G' \cup C$
  - 9:    $V \leftarrow V \setminus N[i]$
  - 10:    $G \leftarrow G[V]$
  - 11:   recalcule  $g(i), \forall i \in V$
  - 12: Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de *clusters* de  $G'$
  - 13: **enquanto**  $|\mathcal{C}| > p$  **faça**
  - 14:     $Unir\text{-}Clusters(G')$
  - 15: **enquanto**  $|\mathcal{C}| < p$  **faça**
  - 16:     $Dividir\text{-}Cluster(G')$
  - 17: **retorne**  $I$
  - 18: **fim** ConstruçãoGRASP
-

A Figura 6.1 ilustra uma iteração da fase de construção na qual o vértice 4 é escolhido na LRC. Como esse vértice possui três vizinhos (vértices 1, 3 e 5) e existem dois vértices que pertencem a  $N_2(4)$  mas não pertencem a  $N(4)$  (vértices 2 e 6), tem-se que  $g(4) = 3 - 2 = 1$ . O *cluster* definido a partir do vértice 4 contém os vértices pertencentes a  $N[4]$ , ou seja, vértices 1, 3, 5 e 4. Para criar esse *cluster*, é necessário adicionar a aresta  $\{3, 5\}$  e remover as arestas  $\{1, 6\}$  e  $\{1, 2\}$ .

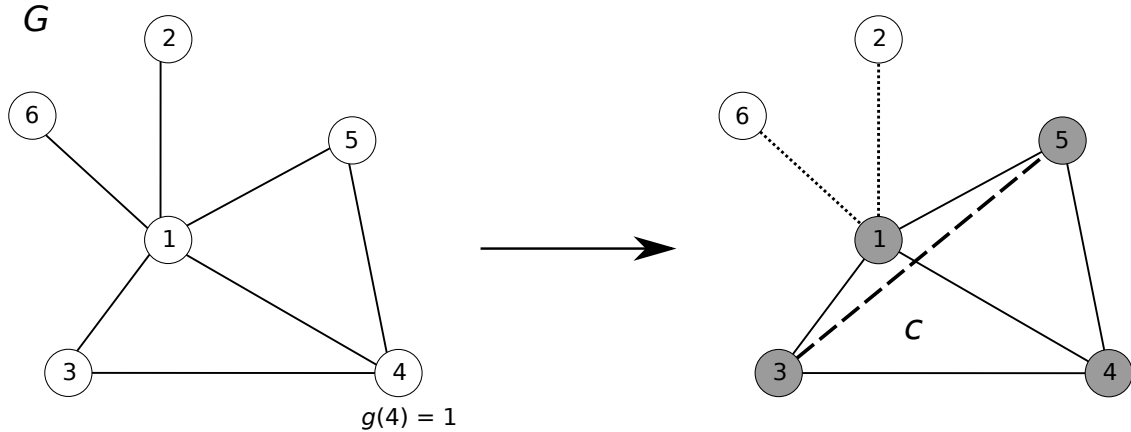


Figura 6.1: Grafo de entrada  $G$  (esquerda) e *cluster*  $C$  (vértices cinzas) criado após a escolha do vértice 4 na LRC (direita).

Ao fim do laço das linhas 3-9, nada garante que a solução construída  $G'$  possua exatamente  $p$  *clusters*. Dessa forma, a construção utiliza os operadores **Unir-Clusters** e **Dividir-Cluster** para ajustar a solução  $G'$  (linhas 12-16). Esses operadores são detalhados na próxima seção.

### 6.1.2 Fase de Busca Local

Seja  $G'$  a solução produzida na fase de construção e denote o custo de  $G'$  por  $\text{custo}(G')$ . A busca local consiste na aplicação do procedimento *Variable Neighborhood Descent* (VND) (Mladenović e Hansen, 1997), ilustrado no Algoritmo 7, com as seguintes estruturas de vizinhança: **Mover-Vértice**, **Unir-Dividir-Clusters** e **Dividir-Unir-Clusters**. Todas as estruturas de vizinhança são consideradas de forma exaustiva, i.e., todos os movimentos possíveis são analisados. A estratégia de busca local adotada foi a *melhor aprimorante*, na qual é realizado o movimento que leva a melhor solução vizinha que aprimore a solução corrente, caso tal solução exista.

A seguir, apresenta-se uma estrutura de dados auxiliar utilizada para acelerar a busca local. Logo após, são descritas as estruturas de vizinhança empregadas.

---

**Algoritmo 7** GRASP para o  $p$ -PEC: fase de busca local.

---

```

1: Procedimento VND( $G'$ )
2:  $LV \leftarrow \{Mover-Vértice, Unir-Dividir-Clusters, Dividir-Unir-Clusters\}$ 
3:  $\eta \leftarrow 1$ 
4: enquanto  $\eta \leq |LV|$  faça
5:    $N^{(\eta)} \leftarrow \eta$ -ésima vizinhança de  $LV$ 
6:    $G'' \leftarrow$  melhor vizinho de  $G'$  em  $N^{(\eta)}$ 
7:   se  $custo(G'') < custo(G')$  então
8:      $G' \leftarrow G''$ 
9:      $\eta \leftarrow 1$ 
10:  senão
11:     $\eta \leftarrow \eta + 1$ 
12: retorne  $G'$ 
13: fim VND

```

---

**Matriz de Edições**

Uma informação importante que pode ser utilizada para acelerar a avaliação das estruturas de vizinhança é a relação entre um vértice  $v$  e um *cluster*  $C$  em termos de função objetivo. Em detalhe, é útil saber a variação na função objetivo após remover  $v$  de  $C$ , se  $v \in C$ , ou após inserir  $v$  em  $C$ , se  $v \notin C$ . Essa informação é registrada na *Matriz de Edições*  $M$ . Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto dos *clusters* da solução  $G'$ . A matriz  $M$  é definida da seguinte forma:

$$M(v, C) = \begin{cases} \sum_{j \in C, j \neq v} w(v, j), & \forall C \in \mathcal{C}, \forall v \in C \\ - \sum_{j \in C} w(v, j), & \forall C \in \mathcal{C}, \forall v \notin C \end{cases}$$

onde  $w(v, j) = 1$  se a aresta  $\{v, j\}$  está presente no grafo de entrada. Do contrário,  $w(v, j) = -1$ . A Figura 6.2 mostra um exemplo de uma matriz de edições.

Para construir a matriz  $M$ , inicialmente considere todas as suas células iguais a zero. Então, para cada par de vértices  $(i, j)$ , sejam  $C_i$  e  $C_j$  os *clusters* aos quais os vértices  $i$  e  $j$  pertencem, respectivamente. Se  $C_i = C_j$ , adicione  $w(i, j)$  a  $M(i, C_i)$  e a  $M(j, C_j)$ . Do contrário, subtraia  $w(i, j)$  de  $M(i, C_i)$  e de  $M(j, C_j)$ . Dessa forma, a construção de  $M$  demanda um tempo  $\mathcal{O}(|V|^2)$ .

**Operadores**

Antes de apresentar as estruturas de vizinhança utilizadas, faz-se necessário definir os seguintes operadores, que são aplicados a solução  $G'$ :

(i) **Dividir-Cluster**( $G'$ ): para cada *cluster*  $C$  de  $G'$ , avalia a divisão de  $C$  em dois



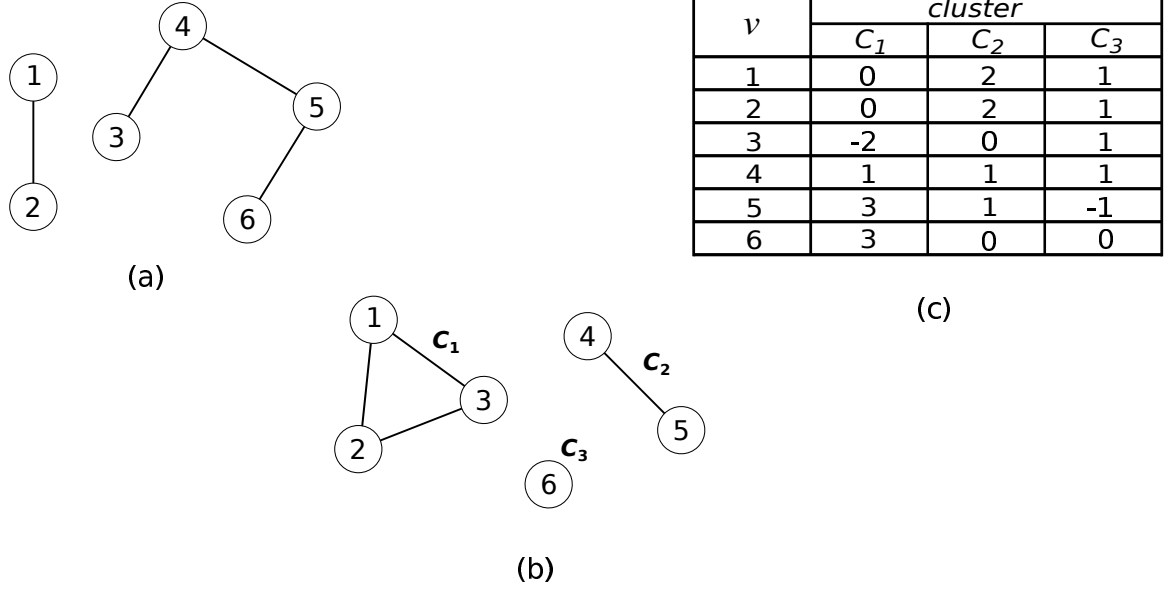


Figura 6.2: (a) Grafo de entrada  $G$ . (b) Uma solução  $G'$  para  $G$  com 3 *clusters*. (c) Matriz de edições para  $G'$ .

*clusters*:  $C'$ , que contém os vértices  $v \in C$  tais que  $M(v, C) > 0$ , e  $C''$ , que contém os demais vértices de  $C$ . Se  $C'$  for vazio, um vértice pertencente a  $C''$ , escolhido de forma gulosa, passa a ser considerado parte de  $C'$  (e vice-versa). A melhor divisão é então realizada. O custo da nova solução  $G''$  obtida após a divisão do *cluster*  $C$  pode ser computado em tempo  $\mathcal{O}(|C'| |C''|)$  pela equação:

$$\text{custo}(G'') = \text{custo}(G') + \sum_{v \in C'} \sum_{u \in C''} w(v, u)$$

Portanto, o número de operações básicas realizadas para avaliar a divisão de todos os *clusters* de  $G'$  é menor ou igual ao número de aresta de  $G'$ , o qual é  $\mathcal{O}((|V| - p)^2)$  (ver Seção 3.2.1).

A atualização da matriz  $M$  exige a remoção da coluna relativa ao antigo *cluster*  $C$  e adição de duas novas colunas referentes a  $C'$  e  $C''$ , as quais são inicialmente iguais à coluna de  $C$ . Os valores relativos a  $C'$  são então recalculados em tempo  $\mathcal{O}(|C''| |V|)$  da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
M(v, C') &= M(v, C') - \sum_{u \in C''} w(v, u), \forall v \in C' \\
M(v, C'') &= -M(v, C') + \sum_{u \in C'', u \neq v} w(v, u), \forall v \in C'' \\
M(v, C') &= M(v, C') + \sum_{u \in C''} w(v, u), \forall v \in V, v \notin C', v \notin C''
\end{aligned}$$

Da mesma forma, os valores relativos a  $C''$  são recalculados em tempo  $\mathcal{O}(|C''||V|)$ . Logo,  $M$  é atualizada em tempo  $\mathcal{O}(|C||V|) = \mathcal{O}((|V| - p)|V|)$ , já que  $C$  possui, no máximo,  $|V| - p + 1$  vértices.

(ii) **Unir-Clusters**( $G'$ ): avalia a união de todo par de *clusters* distintos  $C'$  e  $C''$ , realizando a melhor delas. O custo da nova solução  $G''$  obtida após a união dos *clusters*  $C'$  e  $C''$  é calculado em tempo  $\mathcal{O}(|C'|)$  pela equação:

$$\text{custo}(G'') = \text{custo}(G') + \sum_{j \in C'} M(j, C'')$$

ou, equivalentemente, em tempo  $\mathcal{O}(|C''|)$  pela equação:

$$\text{custo}(G'') = \text{custo}(G') + \sum_{j \in C''} M(j, C')$$

Como cada *cluster* é considerado em  $p - 1$  uniões, um limite superior para o número de operações básicas realizadas para avaliar todas as uniões possíveis é dado por:

$$\sum_{i=1}^p (p-1)|C_i| = (p-1) \sum_{i=1}^p |C_i| = (p-1)|V|,$$

onde  $C_1, C_2, \dots, C_p$  são os *clusters* da solução  $G'$ . Portanto, a avaliação de todas as uniões pode ser feita em tempo  $\mathcal{O}(p(|V|))$ .

Após a junção de  $C'$  e  $C''$ , os seguintes valores são atualizados na matriz  $M$ :

$$\begin{aligned}
M(v, C') &= M(v, C') - M(v, C''), \forall v \in C' \\
M(v, C'') &= M(v, C'') - M(v, C'), \forall v \in C'' \\
M(v, C') &= M(v, C') + M(v, C''), \forall v \in V, v \notin C', v \notin C''
\end{aligned}$$

Ou seja, todos os vértices de  $C''$  são movidos para  $C'$ . Para finalizar, basta remover de  $M$  a coluna relativa a  $C''$ . Sendo assim, a atualização é feita em tempo  $\mathcal{O}(|V|)$ .

### Estruturas de Vizinhaça

As seguintes estruturas de vizinhaça são empregadas na busca local:

(i) **Mover-Vértice**: um vértice  $v$  é movido de seu atual *cluster*  $C$  para um outro *cluster*  $C'$ . O custo da nova solução  $G''$  obtida após esse movimento pode ser computado em tempo constante pela equação:

$$\text{custo}(G'') = \text{custo}(G') + M(v, C) + M(v, C')$$

Dessa forma, a avaliação de todos os movimentos desta vizinhaça demanda um tempo  $\mathcal{O}(|V|p)$ . Após mover  $v$  de  $C$  para  $C'$ , deve-se atualizar os valores  $M(v, C)$ ,  $M(v, C')$ ,  $M(u, C)$  e  $M(u, C')$ ,  $\forall u \in V$ ,  $u \neq v$ . Os novos valores são:

$$\begin{aligned} M(v, C) &= -M(v, C) \\ M(v, C') &= -M(v, C') \\ M(u, C) &= \begin{cases} M(u, C) - w(v, u) & \text{se } u \in C \\ M(u, C) + w(v, u) & \text{se } u \notin C \end{cases} \\ M(u, C') &= \begin{cases} M(u, C') + w(v, u) & \text{se } u \in C' \\ M(u, C') - w(v, u) & \text{se } u \notin C' \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a matriz  $M$  é atualizada em tempo  $\mathcal{O}(|V|)$ . Para evitar a criação de *clusters* vazios, só são movidos vértices de *clusters* que possuem mais de um vértice.

(ii) **Unir-Dividir-Clusters**: aplicação do operador **Unir-Clusters** seguida da aplicação do operador **Dividir-Cluster**. Como as complexidades dos operadores são  $\mathcal{O}(p|V|)$  e  $\mathcal{O}(|V|(|V| - p))$ , respectivamente, esta vizinhaça demanda um tempo  $\mathcal{O}(|V|^2)$ .

(iii) **Dividir-Unir-Clusters**: similar a **Unir-Dividir-Clusters**, mas considera os operadores **Dividir-Cluster** e **Unir-Clusters** em ordem inversa.

## 6.2 Refinamento Baseado em Particionamento de Conjuntos

A solução final  $G^*$  que será utilizada como um limite primal pelos algoritmos exatos é obtida através da resolução de um problema de Particionamento de Conjuntos com os *clusters* produzidos em  $k$  iterações da meta-heurística GRASP. Dessa forma, considere  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$  o conjunto composto pelos *clusters* das  $k$  soluções produzidas pelas iterações do GRASP, sem incluir *clusters* repetidos, e denote por  $C_i$  o  $i$ -ésimo *cluster* de  $\mathcal{C}$ . Além disso, sejam  $c_i$  e  $a_i$  o custo e o vetor de incidência associados a  $C_i$ , como definidos na Seção 3.1.3. Por fim, considere a variável binária  $\lambda_i$ , que assume o valor 1 se  $C_i$  estiver presente na solução. Portanto,  $G^*$  é a solução do seguinte problema:

$$\min \sum_{i=1}^{|\mathcal{C}|} c_i \lambda_i \quad (6.3)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{|\mathcal{C}|} a_i^j \lambda_i = 1, \quad \forall j \in V, \quad (6.4)$$

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{C}|} \lambda_i = p, \quad (6.5)$$

$$\lambda_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{C}|\}. \quad (6.6)$$

A função objetivo (6.3) minimiza a soma dos custos dos *clusters* selecionados. As restrições (6.4) determinam que cada vértice pertence a exatamente um *cluster* e a restrição (6.5) garante que a solução possui  $p$  *clusters*. Por fim, as restrições (6.6) dizem respeito à integralidade das variáveis. Note que o problema (6.3)-(6.6) possui pelo menos uma solução, uma vez que cada iteração do GRASP produz uma solução viável do  $p$ -PEC.

## 7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os algoritmos foram implementados em C++ usando o pacote de programação matemática CPLEX 12.4. Todos os experimentos foram executados em uma máquina com processador Intel Core i7 (3.4 GHz) com 16 GB de memória RAM e executando o sistema operacional Ubuntu 12.04 LTS. Para obter limites primais para os algoritmos exatos, foram executadas 200 iterações da heurística descrita no Capítulo 6, utilizando  $\alpha = 0,5$ , que foi o valor que obteve os melhores resultados empíricos. O tempo limite para a execução de cada instância foi de duas horas. Apenas uma *thread* foi utilizada nos testes.

### 7.1 Instâncias

Os grafos adotados nos experimentos são os mesmos grafos usados no trabalho de Böcker et al (2011). Os vértices desses grafos representam sequências de proteínas provenientes do conjunto de dados COG (Tatusov et al, 2003) e os pesos das arestas representam a similaridade entre as proteínas. Os grafos estão disponíveis no endereço <http://bio.informatik.uni-jena.de/data/> (arquivo `biological_bielefeld.zip`) e são descritos em detalhe no trabalho de Rahmann et al (2007).

Seja  $G = (V, E)$  um dos grafos ponderados mencionados acima e seja  $w_{ij}$  o peso da aresta  $\{i, j\} \in E$ . Como pesos de arestas não são considerados neste trabalho, transforma-se  $G$  no grafo não ponderado  $G' = (V', E')$ , sendo  $V' = V$  e  $E' = \{\{i, j\} \in E \mid w_{ij} > 0\}$ . Além disso, para se evitar um número excessivo de experimentos, não são considerados todos os valores de  $p$ . Em vez disso, apenas os valores  $p \in \{2, 6, 10, \dots, 2 + 4\lceil \frac{|V|-6}{4} \rceil\}$  são considerados.

Dos 3964 grafos derivados do conjunto de dados COG, foram selecionados 27 grafos com até 211 vértices, os quais são descritos na Tabela 7.1. Nessa tabela, as colunas

**Instância** e  $|V|$  contêm o nome e a ordem do grafo, respectivamente, enquanto que a coluna **Densidade** contém a densidade do grafo. Dados os grafos da Tabela 7.1 e os valores selecionados de  $p$ , o número de total de instâncias do  $p$ -PEC utilizadas nos experimentos é 892. Para facilitar a apresentação dos resultados, as 892 instâncias foram divididas em 10 grupos de acordo com a razão  $p/|V|$ , sendo o  $i$ -ésimo grupo composto pelas instâncias em que  $p/|V| \in (\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$  (veja a Tabela 7.2).

Tabela 7.1: Instâncias selecionadas.

| Instância       | $ V $ | Densidade | Instância       | $ V $ | Densidade |
|-----------------|-------|-----------|-----------------|-------|-----------|
| nr_1059_size_55 | 55    | 0,19      | nr_369_size_60  | 60    | 0,26      |
| nr_492_size_61  | 61    | 0,61      | nr_438_size_72  | 72    | 0,26      |
| nr_238_size_78  | 78    | 0,88      | nr_522_size_85  | 85    | 0,44      |
| nr_173_size_86  | 86    | 0,19      | nr_978_size_92  | 92    | 0,76      |
| nr_317_size_95  | 95    | 0,81      | nr_630_size_102 | 102   | 0,14      |
| nr_104_size_112 | 112   | 0,81      | nr_413_size_127 | 127   | 0,45      |
| nr_57_size_129  | 129   | 0,23      | nr_606_size_130 | 130   | 0,91      |
| nr_480_size_139 | 139   | 0,42      | nr_537_size_144 | 144   | 0,68      |
| nr_116_size_152 | 152   | 0,34      | nr_593_size_157 | 157   | 0,49      |
| nr_176_size_169 | 169   | 0,89      | nr_459_size_171 | 171   | 0,11      |
| nr_9_size_178   | 178   | 0,79      | nr_200_size_179 | 179   | 0,42      |
| nr_263_size_186 | 186   | 0,33      | nr_365_size_196 | 196   | 0,14      |
| nr_232_size_206 | 206   | 0,31      | nr_279_size_209 | 209   | 0,54      |
| nr_489_size_211 | 211   | 0,67      |                 |       |           |

Tabela 7.2: Intervalo para  $p/|V|$  e tamanho de cada grupo de instâncias.

| Grupo | Intervalo para $p/ V $ | Tamanho |
|-------|------------------------|---------|
| 1     | $(0; 0, 1]$            | 88      |
| 2     | $(0, 1; 0, 2]$         | 92      |
| 3     | $(0, 2; 0, 3]$         | 89      |
| 4     | $(0, 3; 0, 4]$         | 91      |
| 5     | $(0, 4; 0, 5]$         | 89      |
| 6     | $(0, 5; 0, 6]$         | 90      |
| 7     | $(0, 6; 0, 7]$         | 90      |
| 8     | $(0, 7; 0, 8]$         | 85      |
| 9     | $(0, 8; 0, 9]$         | 89      |
| 10    | $(0, 9; 1]$            | 88      |

## 7.2 Branch-and-Cut

Esta seção reporta os experimentos realizados com os algoritmos BC-F1 e BC-F2. Como esperado pelos resultados das Proposições 1 e 3, experimentos preliminares confirmaram que o desempenho do algoritmo BC-F2 é vastamente superior ao desempenho do algoritmo BC-F1, com exceção das instâncias com  $p = 2$  e  $p = 3$ , nas quais BC-F1

supera BC-F2. Dessa forma, o foco dos experimentos reportados nesta seção é no algoritmo BC-F2. Os resultados detalhados dos algoritmos estão descritos no Apêndice A.

O resto desta seção está organizado como segue. Primeiro, estuda-se o impacto de cada inequação válida proposta na Seção 3.2 no desempenho de BC-F2. Logo após, o desempenho de BC-F2 é estudado de acordo com a densidade do grafo e com a razão entre  $p$  e o número de vértices. Por fim, são reportados os resultados obtidos por BC-F1 e BC-F2 nas instâncias com  $p = 2$  e  $p = 3$ .

### 7.2.1 Impacto das Inequações Válidas

Nesta seção, estuda-se o impacto das inequações válidas propostas, a saber: inequações  $|E|$ -*bounds*, *Kite* e *Tree*. Também é estudado o impacto do fortalecimento das inequações triangulares.

O primeiro estudo tem como objetivo mostrar que tanto as inequações propostas quanto o fortalecimento das inequações triangulares acarretam em melhoria do valor da relaxação linear de PL-F2. Para isso, foram resolvidos os programas lineares descritos na Tabela 7.3, considerando as instâncias com até 144 vértices (total de 390 instâncias). Por exemplo, PL-F2-2 considera, além de todas as restrições de PL-F2, apenas o fortalecimento das inequações triangulares. Por outro lado, PL-F2-3 possui todas as restrições de PL-F2 e as inequações  $|E|$ -*bounds*.

Tabela 7.3: Programas lineares obtidos a partir de PL-F2.

| PL      | Inequações Triangulares Fortalecidas | Inequações $ E $ - <i>bounds</i> | Inequações <i>Tree</i> | Inequações <i>Kite</i> |
|---------|--------------------------------------|----------------------------------|------------------------|------------------------|
| PL-F2-1 |                                      |                                  |                        |                        |
| PL-F2-2 | ✓                                    |                                  |                        |                        |
| PL-F2-3 |                                      | ✓                                |                        |                        |
| PL-F2-4 | ✓                                    | ✓                                |                        |                        |
| PL-F2-5 | ✓                                    | ✓                                |                        | ✓                      |
| PL-F2-6 | ✓                                    | ✓                                | ✓                      |                        |

A Tabela 7.4 apresenta o valor médio da relaxação linear fornecido por cada programa linear em cada grupo de instâncias. Fica claro que todas as inequações consideradas e o fortalecimento das inequações triangulares levam a uma melhoria do valor da relaxação linear de PL-F2, ainda que pequena em determinadas situações.

A seguir, apresenta-se o impacto prático das inequações propostas e do fortalecimento das inequações triangulares.

Tabela 7.4: Valor médio da relaxação linear fornecido por cada programa linear em cada grupo de instâncias.

| Grupo | PL-F2-1 | PL-F2-2 | PL-F2-3 | PL-F2-4 | PL-F2-5 | PL-F2-6 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1     | 518,88  | 520,08  | 671,76  | 672,01  | 672,74  | 672,03  |
| 2     | 596,17  | 621,73  | 693,47  | 696,52  | 696,83  | 696,66  |
| 3     | 758,18  | 816,05  | 952,59  | 962,31  | 962,38  | 962,65  |
| 4     | 927,94  | 1040,03 | 1289,19 | 1306,13 | 1306,13 | 1307,27 |
| 5     | 1170,81 | 1347,29 | 1725,65 | 1746,12 | 1746,12 | 1746,33 |
| 6     | 1557,30 | 1839,96 | 2385,36 | 2399,70 | 2399,70 | 2400,47 |
| 7     | 1577,54 | 1887,58 | 2374,17 | 2388,58 | 2388,58 | 2390,59 |
| 8     | 2088,75 | 2509,37 | 3072,09 | 3077,09 | 3077,09 | 3078,61 |
| 9     | 2243,35 | 2599,20 | 2998,30 | 2998,30 | 2998,30 | 2998,35 |
| 10    | 2994,24 | 3177,53 | 3370,89 | 3370,89 | 3370,89 | 3370,89 |

### Inequações Triangulares Fortalecidas e $|E|$ -bounds

A fim de avaliar o impacto, na prática, das Inequações Triangulares Fortalecidas e  $|E|$ -bounds, BC-F2 foi executado apenas no nó raiz usando quatro cenários diferentes. Esses cenários dizem respeito ao uso ou não das inequações  $|E|$ -bounds e do fortalecimento das inequações triangulares. A Tabela 7.5 apresenta os cenários considerados.

Tabela 7.5: Cenários a respeito de  $|E|$ -bounds e Inequações Triangulares Fortalecidas.

| Cenário | Inequações $ E $ -bounds | Inequações Triangulares Fortalecidas |
|---------|--------------------------|--------------------------------------|
| C1      |                          |                                      |
| C2      |                          | ✓                                    |
| C3      | ✓                        |                                      |
| C4      | ✓                        | ✓                                    |

As Figuras 7.1 e 7.2 apresentam os resultados obtidos por BC-F2 usando os quatro cenários definidos na Tabela 7.5. Nessas figuras, o eixo das abscissas contém o grupo de instâncias. Na Figura 7.1, o eixo das ordenadas contém o *gap* médio do nó raiz, enquanto que na Figura 7.2 o eixo das ordenadas representa o tempo médio (em segundos) despendido no nó raiz. Os dados ilustrados nas duas figuras mostram que tanto o fortalecimento das inequações triangulares quanto as inequações  $|E|$ -bounds melhoram significativamente o *gap* e o tempo gasto no nó raiz em quase todos os grupos. Destaca-se o impacto das inequações  $|E|$ -bounds no grupo 10, no qual todas as instâncias foram resolvidas no nó raiz após a adição dessas inequações.



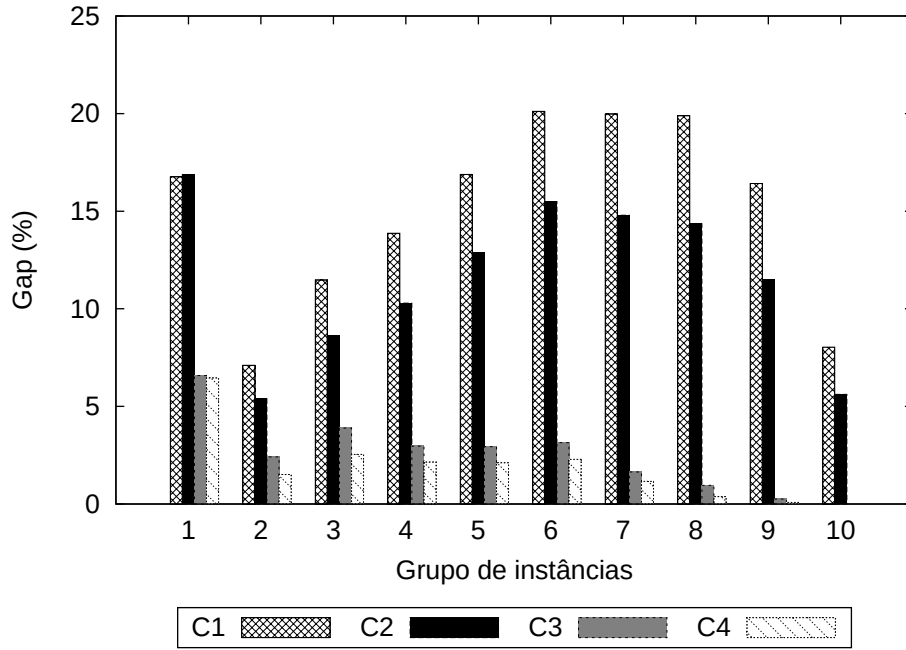


Figura 7.1: *Gap* médio do nó raiz para cada grupo de instâncias em todos os cenários.

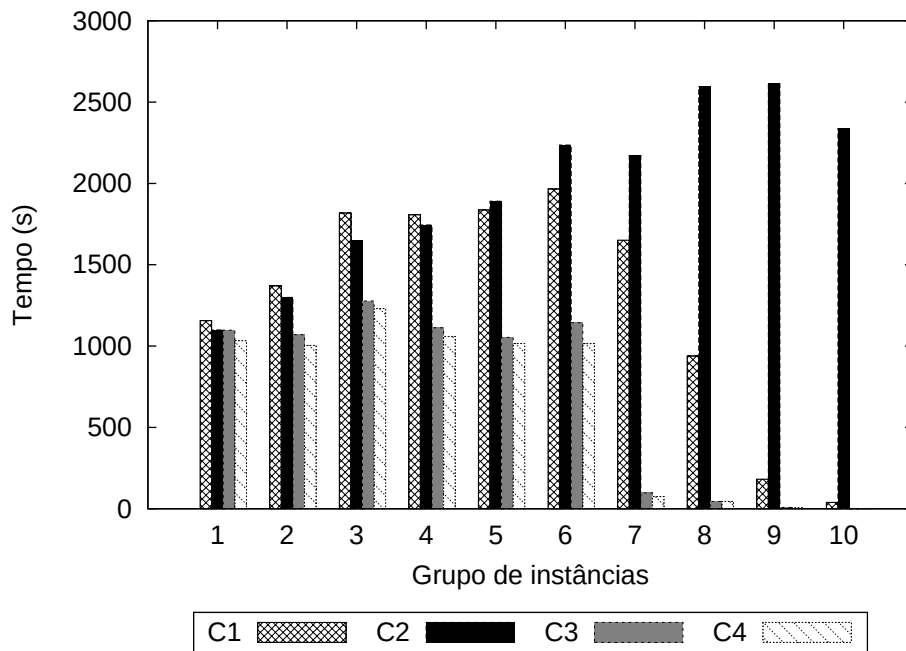


Figura 7.2: Tempo médio do nó raiz para cada grupo de instâncias em todos os cenários.

### Inequações *Kite* e *Tree*

Com o objetivo de avaliar o mérito prático das inequações *Kite* e *Tree*, BC-F2 foi executado apenas no nó raiz usando três cenários diferentes. Os cenários definidos a seguir dizem respeito ao uso ou não das inequações *Kite* e *Tree*.

- **BC-F2:** BC-F2 sem considerar as inequações *Kite* e *Tree*.
- **BC-F2 + Kite:** BC-F2 considerando as inequações *Kite* apenas no nó raiz. Em cada fase de adição de cortes, é adicionada a inequação *Kite* mais violada para cada vértice  $j$ . As inequações *Kite* são separadas usando o algoritmo baseado em programação dinâmica descrito na Seção 4.2.
- **BC-F2 + Tree:** BC-F2 considerando as inequações *Tree* apenas no nó raiz. Em cada fase de adição de cortes, é adiciona a inequação *Tree* mais violada, a qual é separada através do algoritmo de Kruskal.

A Tabela 7.6 contém os resultados obtidos com os três cenários definidos acima em cada grupo de instâncias. Nessa tabela, **Gap Raiz** representa o *gap* médio do nó raiz, **Tempo Raiz** representa o tempo médio (em segundos) despendido no nó raiz e **Tempo Separ.** corresponde ao tempo médio (em segundos) gasto separando cortes no nó raiz. Claramente, o custo de separar as inequações *Kite* torna desvantajoso considerá-las na prática. Por exemplo, quando as inequações *Kite* são consideradas, o tempo médio gasto separando cortes no grupo 1 aumenta de 126,9 para 2134,94 segundos sem nenhum ganho no *gap* médio. Além disso, embora o uso das inequações *Tree* tenha acarretado uma melhora no *gap* médio em alguns grupos, tal melhora é negligenciável quando comparada ao custo de separação das inequações. Portanto, as inequações *Kite* e *Tree* não são consideradas nos algoritmos propostos neste trabalho.

Tabela 7.6: Impacto das inequações *Tree* e *Kite* no nó raiz.

| Grupo | BC-F2    |            |              | BC-F2 + Kite |            |              | BC-F2 + Tree |            |              |
|-------|----------|------------|--------------|--------------|------------|--------------|--------------|------------|--------------|
|       | Gap Raiz | Tempo Raiz | Tempo Separ. | Gap Raiz     | Tempo Raiz | Tempo Separ. | Gap Raiz     | Tempo Raiz | Tempo Separ. |
| 1     | 6,46     | 1033,27    | 126,90       | 11,64        | 2365,20    | 2134,94      | 6,37         | 1191,83    | 467,15       |
| 2     | 1,51     | 1004,07    | 49,29        | 5,37         | 1639,94    | 1377,31      | 1,72         | 1424,34    | 498,30       |
| 3     | 2,54     | 1230,29    | 10,75        | 7,81         | 2104,47    | 1843,52      | 3,06         | 1758,21    | 433,16       |
| 4     | 2,15     | 1059,12    | 2,82         | 3,63         | 2050,49    | 1669,20      | 2,37         | 1390,88    | 158,84       |
| 5     | 2,11     | 1015,64    | 1,08         | 2,53         | 1942,76    | 1662,14      | 2,15         | 1160,50    | 32,59        |
| 6     | 2,29     | 1015,27    | 0,55         | 2,37         | 1820,56    | 1312,30      | 2,17         | 1102,10    | 4,15         |
| 7     | 1,16     | 74,68      | 0,11         | 1,25         | 522,59     | 439,75       | 1,05         | 148,10     | 0,29         |
| 8     | 0,38     | 44,87      | 0,04         | 0,38         | 227,17     | 166,42       | 0,32         | 20,99      | 0,06         |
| 9     | 0,08     | 5,77       | 0,01         | 0,08         | 49,57      | 44,63        | 0,05         | 128,24     | 0,04         |
| 10    | 0,00     | 0,19       | 0,00         | 0,00         | 0,09       | 0,00         | 0,00         | 0,13       | 0,00         |

Vale salientar que, por exemplo, o *gap* médio do cenário **BC-F2 + Kite** pode ser maior que o *gap* médio do cenário **BC-F2**, como acontece na maioria dos grupos. Não há

garantia de que todas as (potencias) restrições estarão satisfeitas ao fim da resolução do nó raiz, por dois motivos: (i) todas as execuções possuem um tempo limite (duas horas); e (ii) o resolvidor de programação inteira adotado (CPLEX 12.4) tem a liberdade de decidir quando parar de resolver o nó raiz para realizar o *branching*.

### 7.2.2 Impacto de $p/|V|$ e da Densidade do Grafo

Esta seção apresenta um estudo sobre o impacto da razão  $p/|V|$  e da densidade do grafo no desempenho do algoritmo BC-F2. Para analisar o impacto da densidade, denotada por  $d$ , foram definidas três classes: **esparso**, composta de grafos com  $d \leq 1/3$ ; **moderado**, composta de grafos com  $1/3 < d \leq 2/3$ ; e **denso**, composta de grafos com  $d > 2/3$ .

As Tabelas 7.7 e 7.8 mostram, respectivamente, os resultados detalhados obtidos por BC-F2 em cada grupo de instâncias e para cada grafo (i.e., resultados obtidos nas instâncias compostas por um mesmo grafo  $G$ , mas com diferentes valores de  $p$ ). Nessas duas tabelas, **Gap Raiz (%)** representa o *gap* médio do nó raiz, **Tempo Raiz (s)** contém o tempo médio (em segundos) despendido no nó raiz,  $\#((3.3)+(3.4)+(3.22))$  determina o número médio de inequações triangulares adicionadas, **#Nós** é o número médio de nós abertos durante a execução do algoritmo, **Tempo (s)** indica o tempo médio de execução e **Gap (%)** representa a média dos *gaps* finais obtidos.

Tabela 7.7: Resultados médios detalhados para cada grupo de instâncias.

| Grupo | Gap Raiz (%) | Tempo Raiz (s) | $\#((3.3)+(3.4)+(3.22))$ | #Nós    | Tempo (s) | Gap (%) |
|-------|--------------|----------------|--------------------------|---------|-----------|---------|
| 1     | 6,46         | 1033,23        | 35060,62                 | 2427,93 | 4311,98   | 5,47    |
| 2     | 1,51         | 1003,82        | 27891,54                 | 3504,52 | 2119,71   | 0,89    |
| 3     | 2,54         | 1230,29        | 28084,26                 | 304,15  | 2373,02   | 2,19    |
| 4     | 2,15         | 1058,78        | 26245,00                 | 3221,83 | 2629,84   | 1,72    |
| 5     | 2,11         | 1015,16        | 24938,93                 | 820,65  | 2155,21   | 1,80    |
| 6     | 2,29         | 1015,18        | 21665,22                 | 4365,94 | 2458,44   | 1,81    |
| 7     | 1,16         | 74,18          | 5153,33                  | 8836,98 | 1165,47   | 0,56    |
| 8     | 0,37         | 44,78          | 2496,07                  | 6323,60 | 579,20    | 0,13    |
| 9     | 0,08         | 5,73           | 678,91                   | 2098,21 | 243,85    | 0,04    |
| 10    | 0,00         | 0,19           | 0,00                     | 1,00    | 0,19      | 0,00    |

Tabela 7.8: Resultados médios detalhados para cada grafo.

| Grafo           | $d$  | Gap<br>Raiz (%) | Tempo<br>Raiz (s) | $\#((3.3)+$<br>$(3.4)+(3.22))$ | #Nós     | Tempo (s) | Gap (%) |
|-----------------|------|-----------------|-------------------|--------------------------------|----------|-----------|---------|
| nr_1059_size_55 | 0,19 | 2,04            | 1,69              | 2299,64                        | 15516,29 | 1030,18   | 0,92    |
| nr_369_size_60  | 0,27 | 2,46            | 3,25              | 3756,93                        | 2203,33  | 965,86    | 1,60    |
| nr_492_size_61  | 0,62 | 2,07            | 0,38              | 1467,27                        | 60,27    | 9,09      | 0,00    |
| nr_438_size_72  | 0,26 | 0,99            | 4,94              | 4651,89                        | 3301,00  | 805,55    | 0,26    |
| nr_238_size_78  | 0,88 | 0,11            | 0,12              | 1865,11                        | 1,32     | 1,26      | 0,00    |
| nr_522_size_85  | 0,44 | 1,97            | 14,38             | 11879,33                       | 6335,29  | 1176,15   | 1,23    |
| nr_173_size_86  | 0,19 | 2,40            | 7,35              | 6842,14                        | 19312,05 | 1569,67   | 1,26    |
| nr_978_size_92  | 0,76 | 0,89            | 0,42              | 4632,13                        | 344,09   | 315,52    | 0,25    |
| nr_317_size_95  | 0,82 | 0,22            | 0,40              | 4878,92                        | 72,88    | 109,44    | 0,00    |
| nr_630_size_102 | 0,15 | 1,90            | 8,43              | 5392,08                        | 14654,44 | 1217,18   | 1,17    |
| nr_104_size_112 | 0,82 | 0,07            | 139,86            | 9172,71                        | 7,75     | 390,43    | 0,05    |
| nr_413_size_127 | 0,45 | 3,54            | 53,28             | 15439,22                       | 2456,69  | 2498,90   | 2,59    |
| nr_57_size_129  | 0,24 | 1,37            | 25,70             | 9248,66                        | 5646,00  | 1399,55   | 0,85    |
| nr_606_size_130 | 0,92 | 0,11            | 0,92              | 1775,28                        | 1,75     | 4,69      | 0,00    |
| nr_480_size_139 | 0,42 | 1,41            | 39,05             | 9250,03                        | 6752,46  | 1163,67   | 1,06    |
| nr_537_size_144 | 0,68 | 0,51            | 66,01             | 12367,28                       | 309,72   | 623,47    | 0,38    |
| nr_116_size_152 | 0,35 | 1,30            | 73,49             | 13582,53                       | 172,95   | 664,22    | 1,18    |
| nr_593_size_157 | 0,49 | 1,00            | 938,44            | 27992,46                       | 77,28    | 1740,86   | 0,90    |
| nr_176_size_169 | 0,90 | 0,18            | 6,95              | 2584,95                        | 30,38    | 178,16    | 0,10    |
| nr_459_size_171 | 0,11 | 2,07            | 45,71             | 11290,02                       | 21651,72 | 2371,63   | 1,41    |
| nr_9_size_178   | 0,79 | 0,19            | 800,54            | 21232,30                       | 15,07    | 988,31    | 0,16    |
| nr_200_size_179 | 0,43 | 1,30            | 467,79            | 23250,13                       | 516,27   | 2077,94   | 1,08    |
| nr_263_size_186 | 0,34 | 7,27            | 699,19            | 30215,80                       | 329,57   | 4057,47   | 6,27    |
| nr_365_size_196 | 0,15 | 1,42            | 314,96            | 21036,12                       | 1513,76  | 2462,66   | 1,16    |
| nr_232_size_206 | 0,31 | 6,21            | 214,30            | 23357,14                       | 1163,98  | 4004,55   | 5,55    |
| nr_279_size_209 | 0,54 | 1,69            | 4257,44           | 43088,12                       | 1,02     | 4261,07   | 1,69    |
| nr_489_size_211 | 0,68 | 1,79            | 3641,74           | 48304,57                       | 1,15     | 3805,58   | 1,79    |

Com base nos resultados apresentados na Tabela 7.7, é possível concluir que o grupo 1 (para o qual  $p/|V| \leq 0.1$ ) é o mais difícil. Por exemplo, o *gap* médio obtido por BC-F2 no grupo 1 é mais do que duas vezes maior que o *gap* médio obtido no grupo 3, que é o grupo com o segundo maior *gap* médio. Por outro lado, os grupos com valores altos de  $p/|V|$  — especialmente os grupos 8, 9 e 10 — apresentaram os melhores valores para o *gap* e o tempo médio. Em particular, todas as instâncias com  $p/|V| > 0,9$  (grupo 10) foram resolvidas no nó raiz sem a adição de inequações triangulares.

A Figura 7.3 apresenta o tempo médio despendido por BC-F2 em cada classe de densidade considerando apenas as instâncias cujos ótimos foram provados (695 dentre 892 instâncias). Três fatos podem ser observados na Tabela 7.8 e na Figura 7.3: (i) grafos com densidade em torno de 0,5 (moderado) são os que demandam mais tempo para serem resolvidos na maioria dos grupos; (ii) grafos esparsos são os mais fáceis para valores pequenos de  $p/|V|$ ; e (iii) grafos densos são os mais fáceis na maioria dos grupos.

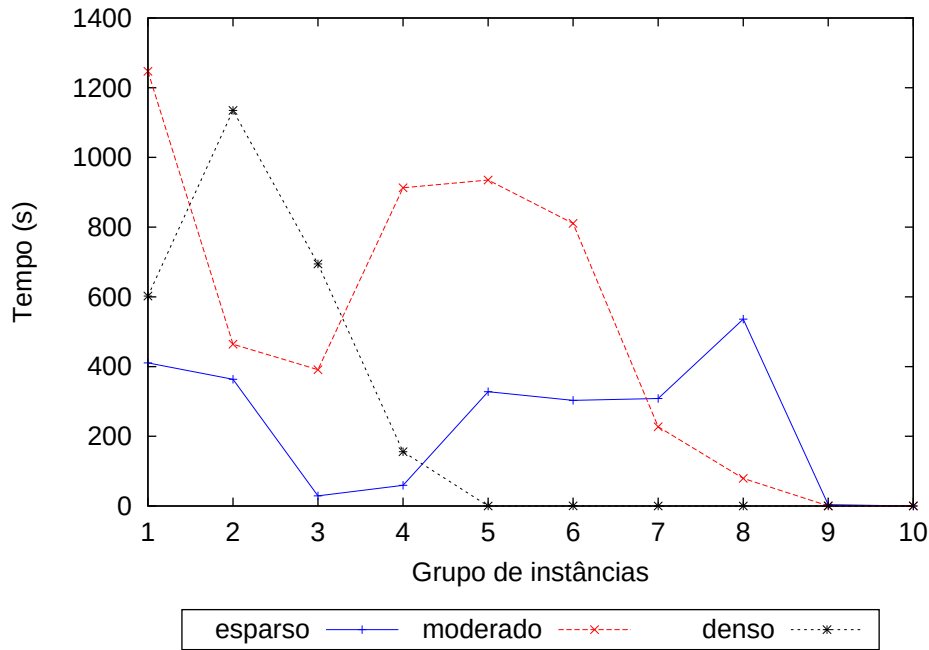


Figura 7.3: Tempo médio gasto por BC-F2 em cada classe de densidade considerando apenas as instâncias cujos ótimos foram provados.

### 7.2.3 BC-F1 para Valores Pequenos de $p$

Esta seção apresenta uma comparação entre BC-F1 e BC-F2 para valores pequenos de  $p$ . O objetivo é mostrar que, na prática, BC-F1 é superior a BC-F2 para determinados valores de  $p$ , mais precisamente para  $p = 2$  e  $p = 3$ . Para realizar tal comparação, BC-F1 e BC-F2 foram executados com todos os grafos e com  $p \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

A Tabela 7.9 mostra os resultados obtidos por BC-F1 e BC-F2 nas instâncias com  $p \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Para cada valor  $p \in \{2, 3, 4, 5\}$ , existem duas colunas na tabela: **Gap F1 (%)** e **Gap F2 (%)**, que possuem, respectivamente, os *gaps* obtidos por BC-F1 e BC-F2 para as instâncias com o valor específico de  $p$ . Nas últimas duas linhas da tabela, apresentam-se a média dos *gaps* em cada coluna (**Média**) e a média dos *gaps* considerando-se apenas as instâncias com  $|V| < 200$  (**Média ( $|V| < 200$ )**).

Fica claro na Tabela 7.9 que BC-F1 obtém um *gap* melhor que o de BC-F2 na maioria das instâncias com  $p = 2$  e  $p = 3$ . Em detalhe, BC-F1 possui um melhor *gap* em 18 dentre 27 instâncias com  $p = 2$  e em 11 dentre 27 instâncias com  $p = 3$ . Além disso, BC-F1 foi capaz de provar 11 soluções ótimas não provadas por BC-F2. Por outro lado, para  $p \geq 4$ , BC-F2 é claramente superior a BC-F1, apresentando um melhor desempenho médio em quase todos os casos.

Tabela 7.9: *Gaps* finais obtidos por BC-F1 e BC-F2 para valores pequenos de  $p$ .

| Grafo                                    | $p = 2$ |        | $p = 3$ |        | $p = 4$ |        | $p = 5$ |        |
|------------------------------------------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|
|                                          | Gap     | Gap    | Gap     | Gap    | Gap     | Gap    | Gap     | Gap    |
|                                          | F1 (%)  | F2 (%) | F1 (%)  | F2 (%) | F1 (%)  | F2 (%) | F1 (%)  | F2 (%) |
| nr_1059_size_55                          | 0,00    | 3,91   | 0,00    | 0,00   | 2,23    | 9,97   | 12,98   | 13,58  |
| nr_369_size_60                           | 0,00    | 15,03  | 20,72   | 23,89  | 24,17   | 22,01  | 19,08   | 15,23  |
| nr_492_size_61                           | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_438_size_72                           | 0,00    | 1,29   | 15,63   | 23,50  | 18,13   | 15,61  | 14,04   | 9,97   |
| nr_238_size_78                           | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_522_size_85                           | 0,00    | 25,65  | 8,63    | 10,98  | 4,88    | 3,26   | 2,24    | 0,64   |
| nr_173_size_86                           | 0,00    | 1,20   | 5,57    | 10,29  | 21,41   | 20,90  | 28,45   | 24,89  |
| nr_978_size_92                           | 0,00    | 5,74   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_317_size_95                           | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_630_size_102                          | 1,09    | 2,58   | 6,34    | 6,51   | 5,59    | 3,42   | 12,47   | 11,29  |
| nr_104_size_112                          | 0,00    | 1,35   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_413_size_127                          | 0,43    | 10,42  | 6,88    | 9,29   | 0,00    | 0,98   | 0,00    | 0,00   |
| nr_57_size_129                           | 4,32    | 5,28   | 32,65   | 33,04  | 36,85   | 35,25  | 29,82   | 27,71  |
| nr_606_size_130                          | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_480_size_139                          | 3,18    | 31,64  | 18,60   | 19,83  | 12,13   | 10,51  | 7,35    | 5,81   |
| nr_537_size_144                          | 0,00    | 13,22  | 2,35    | 3,02   | 0,99    | 0,42   | 3,27    | 0,00   |
| nr_116_size_152                          | 22,91   | 27,91  | 41,85   | 44,21  | 32,40   | 30,82  | 22,81   | 21,29  |
| nr_593_size_157                          | 0,16    | 30,50  | 14,95   | 15,97  | 13,67   | 9,11   | 22,10   | 5,23   |
| nr_176_size_169                          | 0,00    | 4,05   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   | 1,27    | 0,00   |
| nr_459_size_171                          | 0,34    | 0,19   | 1,75    | 1,68   | 1,74    | 1,51   | 7,87    | 7,80   |
| nr_9_size_178                            | 0,00    | 4,74   | 5,77    | 1,04   | 19,88   | 0,00   | 40,10   | 0,00   |
| nr_200_size_179                          | 8,60    | 14,87  | 9,69    | 8,30   | 1,92    | 0,00   | 11,27   | 0,00   |
| nr_263_size_186                          | 13,30   | 13,45  | 1,81    | 0,58   | 0,00    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_365_size_196                          | 4,48    | 3,80   | 20,81   | 19,25  | 27,06   | 21,08  | 34,54   | 22,32  |
| nr_232_size_206                          | 16,31   | 15,88  | 0,61    | 0,00   | 3,86    | 0,00   | 0,00    | 0,00   |
| nr_279_size_209                          | 29,60   | 20,27  | 43,02   | 9,77   | 56,11   | 2,10   | 67,98   | 0,74   |
| nr_489_size_211                          | 22,67   | 19,76  | 52,52   | 7,40   | 55,89   | 4,85   | 68,62   | 3,55   |
| <b>Média</b>                             | 4,71    | 10,10  | 11,48   | 9,20   | 12,55   | 7,10   | 15,04   | 6,29   |
| <b>Média (<math> V  &lt; 200</math>)</b> | 2,45    | 9,03   | 8,91    | 9,64   | 9,29    | 7,70   | 11,23   | 6,90   |

### 7.3 Branch-and-Price

Nesta seção, reportam-se os experimentos realizados com o algoritmo BP. Em detalhe, esta seção apresenta uma comparação entre as formulações propostas para o SP na Seção 5.1.2 e entre as estratégias de *branching* discutidas na Seção 5.2.2, bem como o desempenho do algoritmo de acordo com a densidade do grafo e com a razão entre  $p$  e o número de vértices. Os resultados detalhados do algoritmo estão descritos no Apêndice B.

#### 7.3.1 Comparação entre as Formulações para o Subproblema de *Pricing*

Na Seção 5.1.2, foram discutidas três formulações para o SP: uma não-linear,  $\mathcal{F}_{NL}$ , e duas linearizações de  $\mathcal{F}_{NL}$ ,  $\mathcal{F}_{L1}$  e  $\mathcal{F}_{L2}$ . Constatou-se em experimentos preliminares que

a formulação não-linear possui um desempenho inferior ao das formulações lineares. Para comparar o desempenho das formulações lineares, o algoritmo BP foi executado apenas no nó raiz em dois cenários distintos: um utilizando  $\mathcal{F}_{L1}$  e outro utilizando  $\mathcal{F}_{L2}$ . Todas as 892 instâncias foram consideradas nesse experimento.

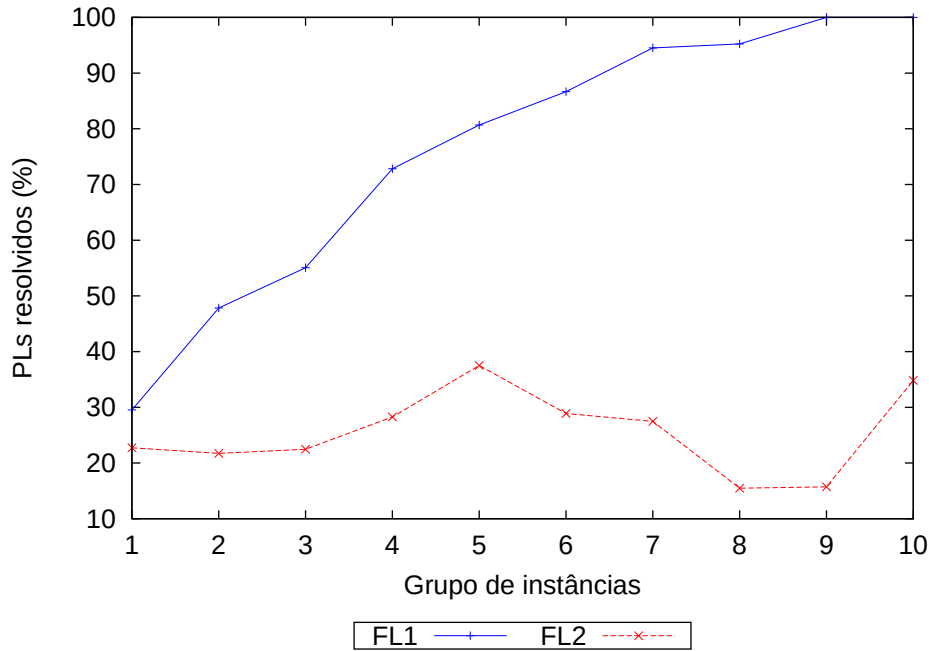


Figura 7.4: Percentual de programas lineares (PLs) resolvidos em cada grupo de instâncias utilizando as formulações  $\mathcal{F}_{L1}$  e  $\mathcal{F}_{L2}$  para resolver o SP.

A Figura 7.4 apresenta o percentual de programas lineares (PLs) resolvidos em cada grupo de instâncias nos dois cenários considerados. Essa informação é relevante, pois, como é possível observar na figura, em muitas instâncias o algoritmo BP não é capaz de sequer resolver o nó raiz dentro do tempo limite (duas horas). Dessa forma, a formulação  $\mathcal{F}_{L1}$  foi adotada nos experimentos finais com o algoritmo BP, já que ela é claramente superior à  $\mathcal{F}_{L2}$  em termos de PLs resolvidos.

### 7.3.2 Comparação entre as Estratégias de *Branching*

Das 892 instâncias utilizadas, 562 foram resolvidas no nó raiz, sem a necessidade de *branching*. Utilizando a formulação  $\mathcal{F}_{L1}$  para resolver o *pricing*, tem-se o seguinte panorama para as outras 330 instâncias: em 213 instâncias, o algoritmo BP não foi capaz de resolver o nó raiz dentro do tempo limite; nas outras 117, o nó raiz foi resolvido, mas os limites inferior e superior obtidos foram distintos. Logo, as estratégias de *branching* discutidas na Seção 5.2.2 foram testadas nessas 117 instâncias. Os resultados são apresentados

na Tabela 7.10.

Tabela 7.10: Comparação entre as estratégias de *branching*.

| Grupo | BFS     |           |              | DFS     |           |              | BeFS    |           |              |
|-------|---------|-----------|--------------|---------|-----------|--------------|---------|-----------|--------------|
|       | Gap (%) | Tempo (s) | #Nós Abertos | Gap (%) | Tempo (s) | #Nós Abertos | Gap (%) | Tempo (s) | #Nós Abertos |
| 1     | 3,19    | 5461,36   | 4,50         | 3,19    | 5461,74   | 3,50         | 3,19    | 5461,58   | 4,50         |
| 2     | 5,01    | 7200,00   | 4,60         | 5,11    | 7200,00   | 4,20         | 5,01    | 7200,00   | 4,60         |
| 3     | 7,46    | 6987,96   | 4,75         | 7,55    | 7002,72   | 4,75         | 7,46    | 6988,87   | 4,75         |
| 4     | 5,59    | 7026,83   | 13,27        | 5,70    | 7021,45   | 15,64        | 5,53    | 7027,28   | 14,09        |
| 5     | 5,76    | 6679,21   | 20,52        | 6,01    | 6653,89   | 21,57        | 5,66    | 6666,94   | 21,19        |
| 6     | 5,40    | 6252,94   | 27,80        | 5,71    | 6308,50   | 30,20        | 5,28    | 6198,88   | 27,90        |
| 7     | 4,51    | 6372,77   | 110,75       | 4,89    | 6337,98   | 99,62        | 4,30    | 6367,58   | 111,12       |
| 8     | 2,78    | 7200,00   | 53,67        | 3,27    | 7200,00   | 67,67        | 2,40    | 7200,00   | 52,00        |
| 9     | 1,41    | 7200,00   | 9,00         | 1,53    | 7200,00   | 19,00        | 1,30    | 7200,00   | 13,00        |
| 10    | -       | -         | -            | -       | -         | -            | -       | -         | -            |

Para cada estratégia e grupo de instâncias, há três valores na Tabela 7.10: **Gap (%)**, **Tempo (s)** e **#Nós Abertos**, os quais representam, respectivamente, o *gap* final médio, o tempo total médio, em segundos, e o número médio de nós abertos pelo algoritmo utilizando a estratégia e as instâncias em questão. Em nenhuma instância do grupo 10 foi necessário realizar *branching*. Por isso, a linha referente a esse grupo possui o símbolo “-” em todas as colunas. É possível observar, na tabela, que a estratégia **BeFS** apresentou os melhores resultados. Por exemplo, em nenhum grupo, o *gap* médio usando **BeFS** é maior do que o *gap* médio de qualquer outra estratégia. Além disso, **BeFS** obteve o melhor *gap* médio em 6 grupos. Portanto, adotou-se essa estratégia no algoritmo BP.

### 7.3.3 Impacto de $p/|V|$ e da Densidade do Grafo

A avaliação do impacto da densidade do grafo e da razão entre  $p$  e o número de vértices no desempenho do algoritmo BP levou em consideração dois dados, calculados para cada grupo de instâncias e classe de densidade (classes definidas na Seção 7.2.2): percentual de instâncias em que o algoritmo foi capaz de produzir um limite inferior, já que em muitas instâncias isso não ocorreu; e tempo médio despendido pelo algoritmo nas instâncias cujos ótimos foram provados. As Figuras 7.5 e 7.6 apresentam esses dados.

A Figura 7.5 mostra que a classe de densidade **moderado** é a que possui mais instâncias para as quais o algoritmo não foi capaz de produzir sequer um limite inferior, praticamente independente do grupo. Por outro lado, a classe **denso** é a que possui menos instâncias com essa característica. Na Figura 7.6, não fica claro qual classe de densidade



foi a mais difícil em termos de tempo despendido. Porém, fica evidente que as instâncias da classe **denso** demandaram, na maioria dos grupos, os menores tempos computacionais. Por fim, analisando-se ambas as figuras, pode-se concluir que, independente da densidade: (i) instâncias com valores pequenos de  $p$  são as mais difíceis; e (ii) instâncias com valores grandes de  $p$  são as mais fáceis. Ou seja, no geral, o impacto da densidade do grafo e da razão entre  $p$  e o número de vértices no desempenho do algoritmo BP é bem similar ao verificado para os algoritmos BC.

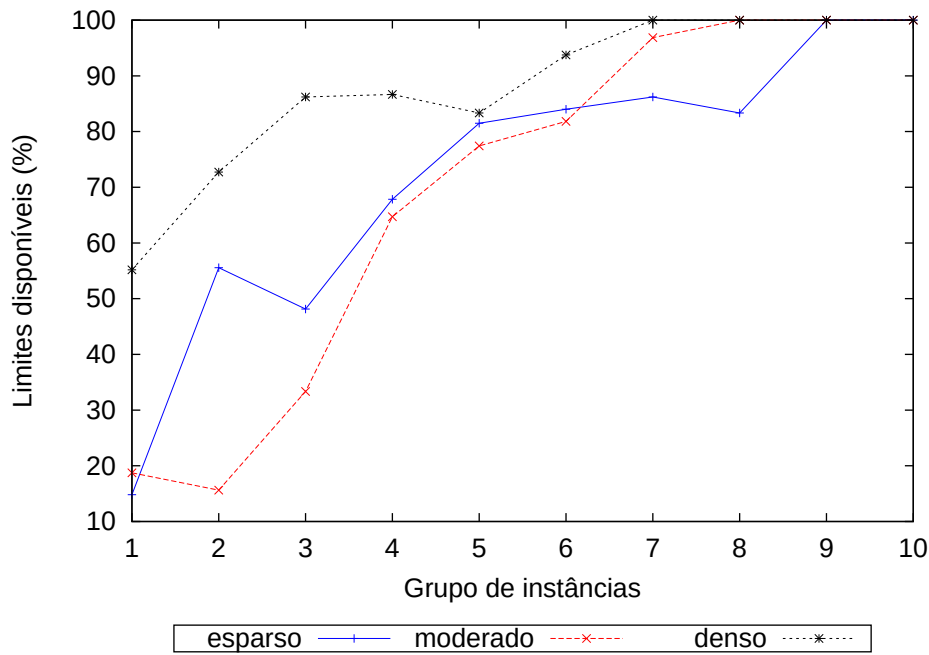


Figura 7.5: Percentual de instâncias em que o algoritmo BP obteve um limite inferior, para cada grupo de instâncias e classe de densidade.

#### 7.4 Comparação entre *Branch-and-Cut* e *Branch-and-Price*

Esta seção apresenta uma comparação entre os algoritmos BC e o algoritmo BP. A Tabela 7.11 contém uma comparação em termos de limites inferiores obtidos. Nessa tabela, as colunas possuem os seguintes significados: **Grafo** determina o nome do grafo; **#Insts** representa o número de instâncias compostas pelo grafo em questão; **BC** mostra em quantas instâncias, dentre as compostas pelo grafo específico, os algoritmos BC encontraram o melhor limite inferior — comparando-se com o limite fornecido pelo algoritmo BP e contabilizando-se os empates; por fim, **BP** possui um significado análogo ao de **BC**, porém diz respeito ao algoritmo BP. Pode-se observar que, para nenhum grafo, o algoritmo BP superou os algoritmos BC a respeito do número de melhores limites fornecidos. No

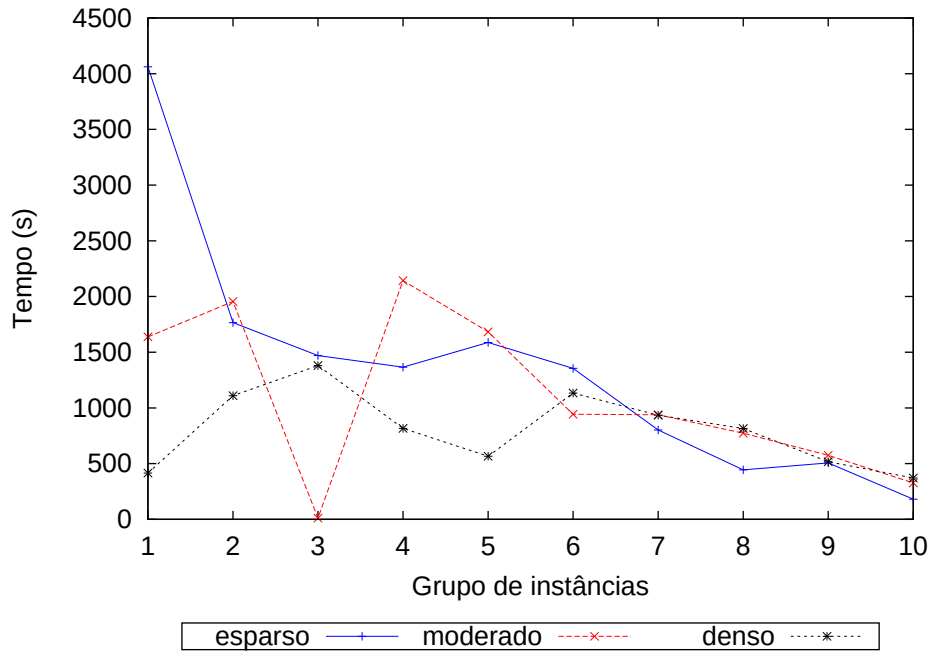


Figura 7.6: Tempo médio gasto por BP considerando apenas as instâncias cujos ótimos foram provados, para cada grupo de instâncias e classe de densidade.

total, os algoritmos BC encontraram o melhor limite em 849 instâncias, enquanto que o algoritmo BP só o fez em 601 instâncias.

Tabela 7.11: Número de instâncias em que os algoritmos encontraram o melhor limite inferior conhecido.

| Grafo           | #Insts | BC | BP | Grafo           | #Insts | BC | BP |
|-----------------|--------|----|----|-----------------|--------|----|----|
| nr_1059_size_55 | 14     | 13 | 13 | nr_369_size_60  | 15     | 14 | 14 |
| nr_492_size_61  | 15     | 15 | 12 | nr_438_size_72  | 18     | 17 | 15 |
| nr_238_size_78  | 19     | 19 | 19 | nr_522_size_85  | 21     | 21 | 13 |
| nr_173_size_86  | 21     | 20 | 16 | nr_978_size_92  | 23     | 23 | 20 |
| nr_317_size_95  | 24     | 24 | 24 | nr_630_size_102 | 25     | 24 | 19 |
| nr_104_size_112 | 28     | 28 | 28 | nr_413_size_127 | 32     | 32 | 18 |
| nr_57_size_129  | 32     | 32 | 14 | nr_606_size_130 | 32     | 32 | 32 |
| nr_480_size_139 | 35     | 35 | 22 | nr_537_size_144 | 36     | 36 | 29 |
| nr_116_size_152 | 38     | 37 | 24 | nr_593_size_157 | 39     | 37 | 27 |
| nr_176_size_169 | 42     | 42 | 42 | nr_459_size_171 | 43     | 43 | 14 |
| nr_9_size_178   | 44     | 42 | 39 | nr_200_size_179 | 45     | 40 | 29 |
| nr_263_size_186 | 46     | 36 | 27 | nr_365_size_196 | 49     | 47 | 11 |
| nr_232_size_206 | 51     | 40 | 30 | nr_279_size_209 | 52     | 49 | 23 |
| nr_489_size_211 | 53     | 51 | 27 |                 |        |    |    |

A Figura 7.7 contém uma comparação em termos de tempo computacional. Para isso, foram consideradas apenas as instâncias que foram resolvidas tanto pelos algoritmos BC quanto pelo algoritmo BP (total de 554 instâncias). Como é possível observar na figura, os algoritmos BC foram, na média, bem mais rápidos que o algoritmo BP. Na

prática, observou-se que o elevado tempo computacional do algoritmo BP advém do uso de uma formulação para a resolução do SP.

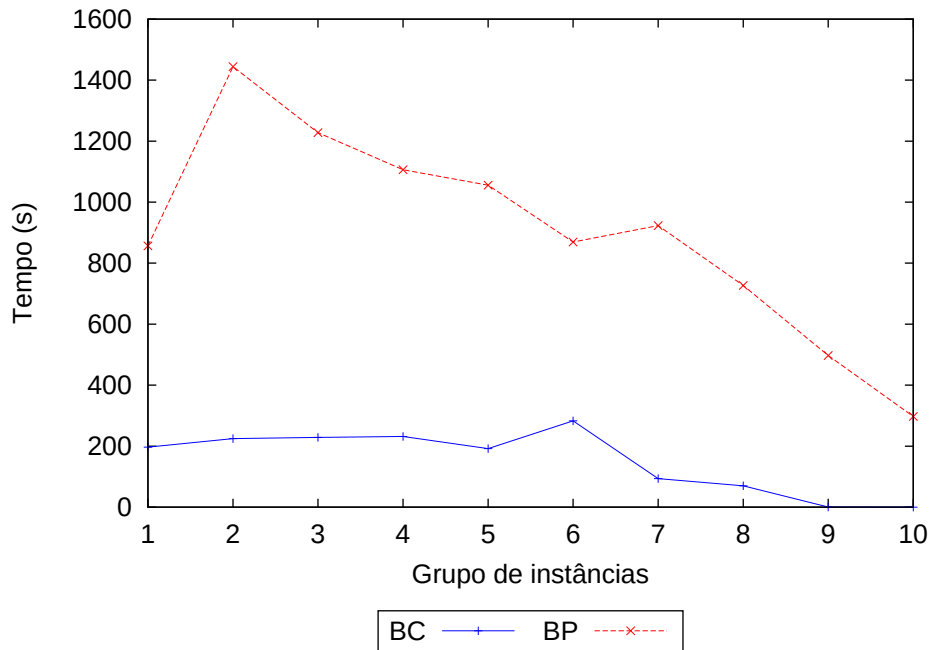


Figura 7.7: Tempo médio gasto nas instâncias resolvidas por ambos os algoritmos.

Dados os resultados descritos na Tabela 7.11 e na Figura 7.7, fica evidente que os algoritmos BC apresentaram um melhor desempenho quando comparados ao algoritmo BP. Porém, em algumas instâncias, o melhor limite dual foi fornecido pelo algoritmo BP. Essas instâncias são descritas na Tabela 7.12. Nessa tabela, **Grafo** e **p** determinam a instância, enquanto **BC** e **BP** mostram, respectivamente, o melhor limite dual fornecido pelos algoritmos BC e o limite dual fornecido pelo algoritmo BP. Os valores em negrito identificam as instâncias que foram resolvidas apenas pelo algoritmo BP (17 instâncias).

Tabela 7.12: Limites inferiores obtidos nas instâncias em que o BP superou os algoritmos BC.

| Grafo           | p   | BC      | BP             | Grafo           | p   | BC      | BP             |
|-----------------|-----|---------|----------------|-----------------|-----|---------|----------------|
| nr_1059_size_55 | 6   | 121,12  | <b>133,00</b>  | nr_369_size_60  | 6   | 256,91  | <b>282,00</b>  |
| nr_438_size_72  | 6   | 253,96  | <b>263,00</b>  | nr_173_size_86  | 10  | 265,71  | <b>276,00</b>  |
| nr_630_size_102 | 10  | 320,11  | <b>355,00</b>  | nr_116_size_152 | 10  | 898,81  | <b>919,00</b>  |
| nr_593_size_157 | 86  | 3496,57 | <b>3516,00</b> | nr_593_size_157 | 90  | 3758,00 | <b>3772,00</b> |
| nr_9_size_178   | 46  | 3695,00 | <b>3757,00</b> | nr_9_size_178   | 50  | 4217,00 | 4233,00        |
| nr_200_size_179 | 58  | 2118,66 | 2120,00        | nr_200_size_179 | 70  | 2326,09 | 2330,00        |
| nr_200_size_179 | 74  | 2399,83 | 2400,00        | nr_200_size_179 | 78  | 2469,39 | 2470,00        |
| nr_200_size_179 | 102 | 3848,59 | <b>3850,00</b> | nr_263_size_186 | 26  | 1330,91 | 1354,61        |
| nr_263_size_186 | 54  | 1959,31 | 1984,86        | nr_263_size_186 | 58  | 2048,51 | 2074,89        |
| nr_263_size_186 | 78  | 2536,82 | 2546,76        | nr_263_size_186 | 86  | 2732,41 | 2748,52        |
| nr_263_size_186 | 90  | 2834,79 | 2849,40        | nr_263_size_186 | 94  | 2938,46 | 2950,28        |
| nr_263_size_186 | 110 | 3293,00 | 3353,80        | nr_263_size_186 | 114 | 3407,00 | 3454,68        |
| nr_263_size_186 | 118 | 3537,00 | 3555,56        | nr_365_size_196 | 158 | 2112,29 | <b>2130,00</b> |
| nr_365_size_196 | 162 | 2232,00 | <b>2240,00</b> | nr_232_size_206 | 86  | 2487,34 | 2499,50        |
| nr_232_size_206 | 94  | 2743,68 | 2765,81        | nr_232_size_206 | 98  | 2896,84 | 2905,23        |
| nr_232_size_206 | 102 | 3025,29 | 3035,50        | nr_232_size_206 | 106 | 3153,00 | 3155,00        |
| nr_232_size_206 | 110 | 3290,56 | 3293,50        | nr_232_size_206 | 118 | 3548,02 | 3549,00        |
| nr_232_size_206 | 122 | 3672,15 | 3674,00        | nr_232_size_206 | 126 | 3790,54 | 3797,50        |
| nr_232_size_206 | 130 | 3920,37 | 3923,50        | nr_232_size_206 | 134 | 4046,66 | 4051,00        |
| nr_279_size_209 | 98  | 5612,00 | <b>5994,00</b> | nr_279_size_209 | 106 | 6472,00 | <b>6646,00</b> |
| nr_279_size_209 | 110 | 6878,00 | <b>6984,00</b> | nr_489_size_211 | 58  | 4602,40 | <b>4682,00</b> |
| nr_489_size_211 | 82  | 6584,00 | <b>6926,00</b> |                 |     |         |                |

## 8 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o Problema de Edição de  $p$ -Clusters, o qual é um problema NP-Difícil que consiste em editar (adicionar ou remover arestas) um grafo  $G$  de modo a transformá-lo em uma união disjunta de  $p$  cliques, sendo  $G$  e  $p$  dados de entrada. Para resolvê-lo, foram propostas duas novas formulações matemáticas e melhorias em uma formulação proveniente da literatura, bem como novas desigualdades válidas. As três formulações consideradas foram estudadas tanto teoricamente, através da comparação entre as relaxações lineares, quanto empiricamente, através do desenvolvimento de três algoritmos exatos: dois baseados em *branch-and-cut* e um baseado em *branch-and-price*. Os algoritmos foram testados em 892 instâncias com até 211 vértices.

Foram analisados os impactos da densidade do grafo e da razão entre  $p$  e o número de vértices nos desempenhos dos algoritmos. Os resultados sugerem que esses dois fatores são relevantes para todos os algoritmos. Por exemplo, grafos esparsos e densos são mais facilmente resolvidos do que grafos com densidade em torno de 0,5, como acontece no PEC (Bastos et al, 2014). Por outro lado, é possível concluir que, independente da densidade do grafo: instâncias com valores pequenos de  $p/|V|$  são as mais difíceis de serem resolvidas; e instâncias com valores grandes de  $p/|V|$  são as mais fáceis de serem resolvidas.

É interessante notar que instâncias do PEC com até 100 vértices são facilmente resolvidas (Böcker et al, 2011), ao passo que algumas instâncias pequenas do  $p$ -PEC mostraram-se bastante difíceis para os algoritmos. Por exemplo, a instância composta pelo grafo **nr\_173\_size\_86** e por  $p = 6$  não foi resolvida por nenhum algoritmo dentro do tempo limite. Para essa instância, BC-F2 obteve um *gap* final de 18,67%, enquanto que o algoritmo BP não foi capaz sequer de resolver o nó raiz. Ainda assim, os algoritmos foram capazes de resolver 81,39% de todas as instâncias e 92,61% das instâncias com  $|V| \leq 178$ .

No geral, os algoritmos BC foram superiores ao algoritmo BP. No entanto, pôde-se

observar que os limites duais fornecidos pela Geração de Colunas são muito fortes. O problema do algoritmo BP foi o tempo despendido no subproblema de *pricing*, o qual é resolvido através de um problema de programação inteira em pelo menos uma iteração da Geração de Colunas. Dessa forma, desenvolver algoritmos de *pricing* mais eficientes é um caminho promissor para a resolução de mais instâncias do  $p$ -PEC. Outros trabalhos futuros incluem estudos poliedrais a respeito das desigualdades propostas, bem como o desenvolvimento e estudo de novas desigualdades válidas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABU-KHZAM, F. The multi-parameterized cluster editing problem. WIDMAYER, P.; XU, Y.; ZHU, B. (Eds.), *Combinatorial Optimization and Applications*, volume 8287 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 284–294. Springer International Publishing, 2013.
- AILON, N.; CHARIKAR, M.; NEWMAN, A. Aggregating inconsistent information: Ranking and clustering. *J. ACM*, v. 55, n. 5, p. 23:1–23:27, 2008.
- BANSAL, N.; BLUM, A.; CHAWLA, S. Correlation clustering. *Machine Learning*, v. 56, n. 1-3, p. 89–113, 2004.
- BARNHART, C.; JOHNSON, E. L.; NEMHAUSER, G. L.; SAVELSBERGH, M. W. P.; VANCE, P. H. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations Research*, v. 46, p. 316–329, 1996.
- BASTOS, L.; OCHI, L.; PROTTI, F.; SUBRAMANIAN, A.; MARTINS, I.; PINHEIRO, R. Efficient algorithms for cluster editing. *Journal of Combinatorial Optimization*, p. 1–25, 2014.
- BILLIONNET, A.; ÉRIC SOUTIF. Using a mixed integer programming tool for solving the 0-1 quadratic knapsack problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 16, n. 2, p. 188–197, 2004.
- BÖCKER, S. A golden ratio parameterized algorithm for cluster editing. ILIOPOULOS, C.; SMYTH, W. (Eds.), *Combinatorial Algorithms*, volume 7056 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 85–95. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- BÖCKER, S.; BAUMBACH, J. Cluster editing. BONIZZONI, P.; BRATTKA, V.; LÖWE, B. (Eds.), *The Nature of Computation. Logic, Algorithms, Applications*, volume 7921 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 33–44. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

- BÖCKER, S.; BRIESEMEISTER, S.; BUI, Q.; TRUSS, A. Going weighted: Parameterized algorithms for cluster editing. YANG, B.; DU, D.-Z.; WANG, C. (Eds.), *Combinatorial Optimization and Applications*, volume 5165 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 1–12. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- BÖCKER, S.; BRIESEMEISTER, S.; KLAU, G. Exact algorithms for cluster editing: Evaluation and experiments. *Algorithmica*, v. 60, n. 2, p. 316–334, 2011.
- BÖCKER, S.; DAMASCHKE, P. Even faster parameterized cluster deletion and cluster editing. *Inf. Process. Lett.*, v. 111, n. 14, p. 717–721, 2011.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer London, London, 2008.
- CHARIKAR, M.; GURUSWAMI, V.; WIRTH, A. Clustering with qualitative information. *Journal of Computer and System Sciences*, v. 71, n. 3, p. 360 – 383, 2005.
- CHEN, D.-S.; BATSON, R. G.; DANG, Y. *Applied Integer Programming*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- CHEN, J.; MENG, J. A 2k kernel for the cluster editing problem. THAI, M.; SAHNI, S. (Eds.), *Computing and Combinatorics*, volume 6196 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 459–468. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- DEHNE, F.; LANGSTON, M. A.; LUO, X.; PITRE, S.; SHAW, P.; ZHANG, Y. The cluster editing problem: Implementations and experiments. *Lect. Notes in Comput. Sci.*, v. 4169, p. 13–24, 2006.
- DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. *Parameterized Complexity*. Springer-Verlag. 530 pp., 1999.
- FELLOWS, M.; LANGSTON, M.; ROSAMOND, F.; SHAW, P. Efficient parameterized preprocessing for cluster editing. CSUHAJ-VARJÚ, E.; ÉSIK, Z. (Eds.), *Fundamentals of Computation Theory*, volume 4639 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 312–321. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- FELLOWS, M. The lost continent of polynomial time: Preprocessing and kernelization. BODLAENDER, H.; LANGSTON, M. (Eds.), *Parameterized and Exact Computation*,



- volume 4169 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 276–277. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- FOMIN, F. V.; KRATSCH, S.; PILIPCZUK, M.; PILIPCZUK, M.; VILLANGER, Y. Tight bounds for parameterized complexity of cluster editing with a small number of clusters. *Journal of Computer and System Sciences*, v. 80, n. 7, p. 1430 – 1447, 2014.
- GIOTIS, I.; GURUSWAMI, V. Correlation clustering with a fixed number of clusters. *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm, SODA '06*, p. 1167–1176, New York, NY, USA. ACM. ISBN 0-89871-605-5, 2006.
- GRAMM, J.; GUO, J.; HÜFFNER, F.; NIEDERMEIER, R. Automated generation of search tree algorithms for hard graph modification problems. *Algorithmica*, v. 39, n. 4, p. 321–347, 2004.
- GRAMM, J.; GUO, J.; HÜFFNER, F.; NIEDERMEIER, R. Graph-modeled data clustering: Fixed-parameter algorithms for clique generation. PETRESCHI, R.; PERSIANO, G.; SILVESTRI, R. (Eds.), *Algorithms and Complexity*, volume 2653 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 108–119. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- GRÖTSCHEL, M.; WAKABAYASHI, Y. A cutting plane algorithm for a clustering problem. *Mathematical Programming*, v. 45, n. 1-3, p. 59–96, 1989.
- GUO, J. A more effective linear kernelization for cluster editing. CHEN, B.; PATERSON, M.; ZHANG, G. (Eds.), *Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies*, volume 4614 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 36–47. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- HAGEN, L.; KAHNG, A. Fast spectral methods for ratio cut partitioning and clustering. *Computer-Aided Design, 1991. ICCAD-91. Digest of Technical Papers., 1991 IEEE International Conference on*, p. 10–13, 1991.
- HARTIGAN, J. A. *Clustering Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 99th edição. ISBN 047135645X, 1975.
- HARTUV, E.; SCHMITT, A. O.; LANGE, J.; MEIER-EWERT, S.; LEHRACH, H.; SHAMIR, R. An algorithm for clustering cDNA fingerprints. *Genomics*, v. 66, n. 3, p. 249–256, 2000.

- HEARST, M. A.; PEDERSEN, J. O. Reexamining the cluster hypothesis: Scatter/gather on retrieval results. *Proceedings of the 19th Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, SIGIR '96, p. 76–84, New York, NY, USA. ACM, 1996.
- KARP, R. Reducibility among combinatorial problems. MILLER, R.; THATCHER, J.; BOHLINGER, J. (Eds.), *Complexity of Computer Computations*, The IBM Research Symposia Series, p. 85–103. Springer US, 1972.
- KAUFMAN, L.; ROUSSEEUW, P. J. *Finding Groups in Data*. John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- KOMUSIEWICZ, C.; UHLMANN, J. Cluster editing with locally bounded modifications. *Discrete Applied Mathematics*, v. 160, n. 15, p. 2259 – 2270, 2012.
- KRUSKAL, JOSEPH B., J. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 7, n. 1, p. pp. 48–50, 1956.
- MANCINI, F. *Graph modification problems related to graph classes*. PhD thesis, University of Bergen, Norway, 2008.
- MILOSAVLJEVIC, A.; STREZOSKA, Z.; ZEREMSKI, M.; GRUJIC, D.; PAUNESKU, T.; CRKVENJAKOV, R. Clone clustering by hybridization. *Genomics*, v. 27, n. 1, p. 83–89, 1995.
- MLADENOVIĆ, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. *Comput. Oper. Res.*, v. 24, n. 11, p. 1097–1100. ISSN 0305-0548, 1997.
- PERCHÉ, M. H. P. Metaheurísticas híbridadas aplicadas ao problema de edição não automática de clusters. Master's thesis, Universidade Federal Fluminense - UFF, Brasil, 2012.
- PISINGER, D. The quadratic knapsack problem — a survey. *Discrete Applied Mathematics*, v. 155, n. 5, p. 623 – 648, 2007.
- PRIM, R. C. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, v. 36, n. 6, p. 1389–1401, 1957.

- RAHMANN, S.; WITTKOP, T.; BAUMBACH, J.; MARTIN, M.; TRUSS, A.; BÖCKER, S. Exact and heuristic algorithms for weighted cluster editing. MARKSTEIN, P.; XU, Y. (Eds.), *Comput. Syst. Bioinforma.: CSB 2007 Conf. Proc.*, volume 6, p. 391–400, 57 Shelton Street, Covent Garden, London WC2H 9HE. Imp. Coll. Press, 2007.
- RESENDE, M. G.; RIBEIRO, C. C. Greedy randomized adaptive search procedures: Advances, hybridizations and applications. GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. (Eds.), *Handbook of Metaheuristics*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edição, 2010.
- RYAN, D. M.; FOSTER, B. A. An integer programming approach to scheduling. *Computer scheduling of public transport urban passenger vehicle and crew scheduling*, p. 269–280, 1981.
- SHAMIR, R.; SHARAN, R.; TSUR, D. Cluster graph modification problems. GOOS, G.; HARTMANIS, J.; VAN LEEUWEN, J.; KUČERA, L. (Eds.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, volume 2573 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 379–390. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- SØRENSEN, M. M. New facets and a branch-and-cut algorithm for the weighted clique problem. *European Journal of Operational Research*, v. 154, n. 1, p. 57 – 70, 2004.
- TATUSOV, R.; FEDOROVA, N.; JACKSON, J.; JACOBS, A.; KIRYUTIN, B.; KOONIN, E.; KRYLOV, D.; MAZUMDER, R.; MEKHEDOV, S.; NIKOLSKAYA, A.; RAO, B.; SMIRNOV, S.; SVERDLOV, A.; VASUDEVAN, S.; WOLF, Y.; YIN, J.; NATALE, D. The cog database: an updated version includes eukaryotes. *BMC Bioinformatics*, 4(1): 41, 2003.
- VAZIRANI, V. V. *Approximation Algorithms*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- WU, Z.; LEAHY, R. An optimal graph theoretic approach to data clustering: Theory and its application to image segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, v. 15, n. 11, p. 1101–1113, 1993.
- XU, R.; WUNSCH, D., I. Survey of clustering algorithms. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, v. 16, n. 3, p. 645–678, 2005.

## Apêndices

# Apêndice A

## Resultados Detalhados dos Algoritmos *Branch-and-Cut*

Este apêndice apresenta os melhores resultados obtidos pelos algoritmos *Branch-and-Cut* em todas as instâncias. Na maior parte dos casos, os melhores resultados foram obtidos pelo algoritmo BC-F2. Porém, em algumas instâncias com  $p = 2$ , o algoritmo BC-F1 apresentou um melhor desempenho. Esses casos são indicados através do símbolo  $*$ .

As colunas das Tabelas A.1-A.27 possuem os seguintes significados: **p** representa o número de *clusters*; **LB Raiz** é o limite inferior obtido no nó raiz; **Tempo Raiz (s)** determina o tempo despendido no nó raiz; **#Ineqs Triangulares** e **#Nós Abertos** representam, respectivamente, o número de inequações triangulares adicionadas e o número de nós abertos durante a otimização; **Tempo Total (s)** contém o tempo, em segundos, gasto pelo algoritmo; por fim, **LB** e **UB** determinam, respectivamente, os limites inferior e superior produzidos pelo algoritmo, enquanto que **Gap (%)** mostra a diferença percentual entre os limites, i.e., **Gap (%)**= $100(UB-LB)/UB$ .

Tabela A.1: Resultados para o grafo nr\_1059\_size\_55 ( $|V| = 55, d = 0.19$ ).

| <b>P</b> | <b>LB Raiz</b> | <b>Tempo Raiz (s)</b> | <b>#Ineqs. Triangulares</b> | <b>#Nós Abertos</b> | <b>Tempo Total (s)</b> | <b>LB</b> | <b>UB</b>  | <b>Gap (%)</b> |
|----------|----------------|-----------------------|-----------------------------|---------------------|------------------------|-----------|------------|----------------|
| 2*       | 480,14         | 8,65                  | 6342                        | 57                  | 55,54                  | 513,00    | <b>513</b> | 0,00           |
| 6        | 115,19         | 2,59                  | 10370                       | 207200              | 7200,00                | 121,12    | 133        | 8,93           |
| 10       | 112,00         | 0,61                  | 1392                        | 1                   | 0,61                   | 112,00    | <b>112</b> | 0,00           |
| 14       | 108,00         | 0,11                  | 1415                        | 1                   | 0,11                   | 108,00    | <b>108</b> | 0,00           |
| 18       | 113,00         | 0,05                  | 1418                        | 1                   | 0,05                   | 113,00    | <b>113</b> | 0,00           |
| 22       | 121,00         | 0,06                  | 1369                        | 1                   | 0,06                   | 121,00    | <b>121</b> | 0,00           |
| 26       | 135,00         | 0,17                  | 1448                        | 1                   | 0,17                   | 135,00    | <b>135</b> | 0,00           |
| 30       | 150,00         | 0,49                  | 1540                        | 20                  | 0,65                   | 153,00    | <b>153</b> | 0,00           |
| 34       | 168,16         | 2,25                  | 1564                        | 9                   | 3,46                   | 171,00    | <b>171</b> | 0,00           |
| 38       | 188,23         | 2,19                  | 1824                        | 2431                | 16,54                  | 199,00    | <b>199</b> | 0,00           |
| 42       | 209,00         | 0,22                  | 1213                        | 1                   | 0,22                   | 209,00    | <b>209</b> | 0,00           |
| 46       | 243,00         | 0,06                  | 0                           | 1                   | 0,06                   | 243,00    | <b>243</b> | 0,00           |
| 50       | 273,00         | 0,04                  | 0                           | 1                   | 0,04                   | 273,00    | <b>273</b> | 0,00           |
| 54       | 287,00         | 0,04                  | 0                           | 1                   | 0,04                   | 287,00    | <b>287</b> | 0,00           |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.2: Resultados para o grafo nr\_369\_size\_60 ( $|V| = 60, d = 0.27$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB     | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|--------|------------|---------|
| 2* | 518,23     | 17,06             | 11109                   | 5938            | 4467,20            | 614,00 | <b>614</b> | 0,00    |
| 6  | 251,58     | 5,30              | 18808                   | 27990           | 7200,00            | 256,91 | 282        | 8,90    |
| 10 | 247,51     | 4,67              | 5094                    | 54              | 18,07              | 250,00 | <b>250</b> | 0,00    |
| 14 | 247,00     | 1,52              | 4340                    | 1               | 1,52               | 247,00 | <b>247</b> | 0,00    |
| 18 | 251,00     | 1,99              | 4278                    | 1               | 1,99               | 251,00 | <b>251</b> | 0,00    |
| 22 | 257,00     | 2,06              | 4252                    | 1               | 2,06               | 257,00 | <b>257</b> | 0,00    |
| 26 | 263,22     | 3,58              | 4496                    | 3               | 3,93               | 265,00 | <b>265</b> | 0,00    |
| 30 | 273,56     | 3,74              | 4445                    | 5               | 4,60               | 275,00 | <b>275</b> | 0,00    |
| 34 | 286,00     | 8,32              | 5126                    | 57              | 34,24              | 290,00 | <b>290</b> | 0,00    |
| 38 | 301,00     | 1,26              | 3239                    | 1               | 1,26               | 301,00 | <b>301</b> | 0,00    |
| 42 | 308,92     | 1,69              | 3893                    | 94              | 20,01              | 331,00 | <b>331</b> | 0,00    |
| 46 | 369,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 369,00 | <b>369</b> | 0,00    |
| 50 | 419,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 419,00 | <b>419</b> | 0,00    |
| 54 | 453,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 453,00 | <b>453</b> | 0,00    |
| 58 | 471,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 471,00 | <b>471</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.3: Resultados para o grafo nr\_492\_size\_61 ( $|V| = 61, d = 0.62$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 91,75      | 1,88              | 17076                   | 148             | 128,80             | 112,00  | <b>112</b>  | 0,00    |
| 6  | 91,96      | 1,39              | 4267                    | 13              | 1,56               | 94,00   | <b>94</b>   | 0,00    |
| 10 | 113,48     | 1,06              | 3836                    | 670             | 4,05               | 124,00  | <b>124</b>  | 0,00    |
| 14 | 134,91     | 0,89              | 4815                    | 62              | 1,41               | 138,00  | <b>138</b>  | 0,00    |
| 18 | 196,00     | 0,18              | 4324                    | 1               | 0,18               | 196,00  | <b>196</b>  | 0,00    |
| 22 | 348,00     | 0,04              | 0                       | 1               | 0,04               | 348,00  | <b>348</b>  | 0,00    |
| 26 | 498,00     | 0,03              | 0                       | 1               | 0,03               | 498,00  | <b>498</b>  | 0,00    |
| 30 | 632,00     | 0,04              | 0                       | 1               | 0,04               | 632,00  | <b>632</b>  | 0,00    |
| 34 | 750,00     | 0,03              | 0                       | 1               | 0,03               | 750,00  | <b>750</b>  | 0,00    |
| 38 | 852,00     | 0,03              | 0                       | 1               | 0,03               | 852,00  | <b>852</b>  | 0,00    |
| 42 | 938,00     | 0,03              | 0                       | 1               | 0,03               | 938,00  | <b>938</b>  | 0,00    |
| 46 | 1008,00    | 0,03              | 0                       | 1               | 0,03               | 1008,00 | <b>1008</b> | 0,00    |
| 50 | 1062,00    | 0,03              | 0                       | 1               | 0,03               | 1062,00 | <b>1062</b> | 0,00    |
| 54 | 1100,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1100,00 | <b>1100</b> | 0,00    |
| 58 | 1122,00    | 0,04              | 0                       | 1               | 0,04               | 1122,00 | <b>1122</b> | 0,00    |

Tabela A.4: Resultados para o grafo nr\_438\_size\_72 ( $|V| = 72, d = 0.26$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB     | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|--------|------------|---------|
| 2* | 681,19     | 41,24             | 13216                   | 59              | 357,01             | 708,00 | <b>708</b> | 0,00    |
| 6  | 248,34     | 17,70             | 17743                   | 56100           | 7200,00            | 253,96 | 263        | 3,44    |
| 10 | 244,00     | 0,64              | 4436                    | 1               | 0,64               | 244,00 | <b>244</b> | 0,00    |
| 14 | 243,00     | 0,17              | 4299                    | 1               | 0,17               | 243,00 | <b>243</b> | 0,00    |
| 18 | 248,00     | 0,20              | 4277                    | 1               | 0,20               | 248,00 | <b>248</b> | 0,00    |
| 22 | 261,91     | 3,38              | 4923                    | 89              | 9,58               | 266,00 | <b>266</b> | 0,00    |
| 26 | 276,00     | 0,85              | 4415                    | 1               | 0,85               | 276,00 | <b>276</b> | 0,00    |
| 30 | 295,00     | 0,96              | 4576                    | 1               | 0,96               | 295,00 | <b>295</b> | 0,00    |
| 34 | 315,56     | 1,60              | 4788                    | 3               | 1,77               | 317,00 | <b>317</b> | 0,00    |
| 38 | 341,22     | 8,10              | 7231                    | 61              | 42,69              | 348,00 | <b>348</b> | 0,00    |
| 42 | 368,13     | 9,13              | 6563                    | 272             | 35,09              | 375,00 | <b>375</b> | 0,00    |
| 46 | 392,50     | 2,94              | 4468                    | 8               | 5,70               | 395,00 | <b>395</b> | 0,00    |
| 50 | 424,88     | 1,84              | 3347                    | 3               | 1,88               | 427,00 | <b>427</b> | 0,00    |
| 54 | 499,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 499,00 | <b>499</b> | 0,00    |
| 58 | 565,00     | 0,04              | 0                       | 1               | 0,04               | 565,00 | <b>565</b> | 0,00    |
| 62 | 615,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 615,00 | <b>615</b> | 0,00    |
| 66 | 649,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 649,00 | <b>649</b> | 0,00    |
| 70 | 667,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 667,00 | <b>667</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.5: Resultados para o grafo nr\_238\_size\_78 ( $|V| = 78, d = 0.88$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 145,00     | 0,68              | 30443                   | 7               | 22,34              | 148,00  | <b>148</b>  | 0,00    |
| 6  | 163,00     | 0,16              | 8748                    | 1               | 0,16               | 163,00  | <b>163</b>  | 0,00    |
| 10 | 323,00     | 0,42              | 12736                   | 1               | 0,42               | 323,00  | <b>323</b>  | 0,00    |
| 14 | 571,00     | 0,04              | 0                       | 1               | 0,04               | 571,00  | <b>571</b>  | 0,00    |
| 18 | 821,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 821,00  | <b>821</b>  | 0,00    |
| 22 | 1055,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 1055,00 | <b>1055</b> | 0,00    |
| 26 | 1273,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1273,00 | <b>1273</b> | 0,00    |
| 30 | 1475,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 1475,00 | <b>1475</b> | 0,00    |
| 34 | 1661,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 1661,00 | <b>1661</b> | 0,00    |
| 38 | 1831,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 1831,00 | <b>1831</b> | 0,00    |
| 42 | 1985,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 1985,00 | <b>1985</b> | 0,00    |
| 46 | 2123,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2123,00 | <b>2123</b> | 0,00    |
| 50 | 2245,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2245,00 | <b>2245</b> | 0,00    |
| 54 | 2351,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 2351,00 | <b>2351</b> | 0,00    |
| 58 | 2441,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 2441,00 | <b>2441</b> | 0,00    |
| 62 | 2515,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 2515,00 | <b>2515</b> | 0,00    |
| 66 | 2573,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 2573,00 | <b>2573</b> | 0,00    |
| 70 | 2615,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 2615,00 | <b>2615</b> | 0,00    |
| 74 | 2641,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 2641,00 | <b>2641</b> | 0,00    |

Tabela A.6: Resultados para o grafo nr\_522\_size\_85 ( $|V| = 85, d = 0.44$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2* | 909,00     | 416,64            | 12800                   | 1               | 416,64             | 909,00  | <b>909</b>  | 0,00    |
| 6  | 608,95     | 7,73              | 25741                   | 388             | 530,42             | 618,00  | <b>618</b>  | 0,00    |
| 10 | 610,59     | 5,17              | 18024                   | 7               | 16,21              | 614,00  | <b>614</b>  | 0,00    |
| 14 | 615,07     | 6,72              | 18277                   | 19              | 53,81              | 621,00  | <b>621</b>  | 0,00    |
| 18 | 624,18     | 9,77              | 18190                   | 27              | 61,80              | 630,00  | <b>630</b>  | 0,00    |
| 22 | 636,67     | 9,68              | 18445                   | 45              | 77,83              | 643,00  | <b>643</b>  | 0,00    |
| 26 | 651,89     | 13,08             | 19780                   | 2093            | 635,37             | 667,00  | <b>667</b>  | 0,00    |
| 30 | 671,17     | 9,13              | 19944                   | 2258            | 1130,22            | 687,00  | <b>687</b>  | 0,00    |
| 34 | 701,00     | 9,29              | 18222                   | 20              | 33,56              | 705,00  | <b>705</b>  | 0,00    |
| 38 | 737,00     | 8,99              | 16132                   | 1               | 8,99               | 737,00  | <b>737</b>  | 0,00    |
| 42 | 797,14     | 35,72             | 15433                   | 3               | 43,34              | 799,00  | <b>799</b>  | 0,00    |
| 46 | 875,55     | 38,32             | 15604                   | 89              | 231,59             | 883,00  | <b>883</b>  | 0,00    |
| 50 | 959,72     | 57,46             | 15824                   | 1110            | 891,42             | 977,00  | <b>977</b>  | 0,00    |
| 54 | 1085,00    | 49,15             | 13908                   | 25800           | 6584,21            | 1085,00 | <b>1085</b> | 0,00    |
| 58 | 1203,00    | 0,76              | 12181                   | 99862           | 7200,00            | 1203,00 | 1205        | 0,17    |
| 62 | 1305,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 1305,00 | <b>1305</b> | 0,00    |
| 66 | 1391,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 1391,00 | <b>1391</b> | 0,00    |
| 70 | 1461,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 1461,00 | <b>1461</b> | 0,00    |
| 74 | 1515,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 1515,00 | <b>1515</b> | 0,00    |
| 78 | 1553,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1553,00 | <b>1553</b> | 0,00    |
| 82 | 1575,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 1575,00 | <b>1575</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.7: Resultados para o grafo nr\_173\_size\_86 ( $|V| = 86, d = 0.19$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2* | 1156,07    | 74,22             | 19084                   | 151             | 839,81             | 1171,00 | <b>1171</b> | 0,00    |
| 6  | 268,82     | 31,50             | 35176                   | 22074           | 7200,00            | 271,63  | 334         | 18,67   |
| 10 | 264,89     | 12,20             | 26011                   | 51700           | 7200,00            | 265,71  | 276         | 3,73    |
| 14 | 261,00     | 0,89              | 4719                    | 1               | 0,89               | 261,00  | <b>261</b>  | 0,00    |
| 18 | 257,00     | 0,80              | 4575                    | 1               | 0,80               | 257,00  | <b>257</b>  | 0,00    |
| 22 | 255,00     | 0,24              | 4592                    | 1               | 0,24               | 255,00  | <b>255</b>  | 0,00    |
| 26 | 257,00     | 0,23              | 4478                    | 1               | 0,23               | 257,00  | <b>257</b>  | 0,00    |
| 30 | 261,00     | 0,20              | 4484                    | 1               | 0,20               | 261,00  | <b>261</b>  | 0,00    |
| 34 | 267,00     | 0,20              | 4271                    | 1               | 0,20               | 267,00  | <b>267</b>  | 0,00    |
| 38 | 282,13     | 2,00              | 4655                    | 138             | 7,14               | 287,00  | <b>287</b>  | 0,00    |
| 42 | 298,00     | 0,28              | 4507                    | 1               | 0,28               | 298,00  | <b>298</b>  | 0,00    |
| 46 | 324,33     | 1,66              | 4910                    | 3               | 1,90               | 327,00  | <b>327</b>  | 0,00    |
| 50 | 361,48     | 7,36              | 6126                    | 120             | 36,37              | 372,00  | <b>372</b>  | 0,00    |
| 54 | 398,46     | 11,43             | 8052                    | 54983           | 3844,77            | 430,00  | <b>430</b>  | 0,00    |
| 58 | 435,07     | 10,19             | 7418                    | 267860          | 7200,00            | 457,64  | 471         | 2,84    |
| 62 | 471,16     | 9,02              | 6400                    | 8472            | 259,74             | 486,00  | <b>486</b>  | 0,00    |
| 66 | 500,15     | 3,20              | 4396                    | 31              | 9,01               | 508,00  | <b>508</b>  | 0,00    |
| 70 | 568,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 568,00  | <b>568</b>  | 0,00    |
| 74 | 626,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 626,00  | <b>626</b>  | 0,00    |
| 78 | 668,00     | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 668,00  | <b>668</b>  | 0,00    |
| 82 | 694,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 694,00  | <b>694</b>  | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.8: Resultados para o grafo nr\_978\_size\_92 ( $|V| = 92, d = 0.76$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2* | 344,00     | 23,43             | 5200                    | 1               | 23,43              | 344,00  | <b>344</b>  | 0,00    |
| 6  | 312,82     | 2,12              | 20576                   | 15              | 4,10               | 318,00  | <b>318</b>  | 0,00    |
| 10 | 338,50     | 1,41              | 20838                   | 2568            | 21,14              | 356,00  | <b>356</b>  | 0,00    |
| 14 | 364,50     | 1,46              | 21951                   | 4161            | 29,64              | 378,00  | <b>378</b>  | 0,00    |
| 18 | 431,00     | 0,62              | 25718                   | 1               | 0,62               | 431,00  | <b>431</b>  | 0,00    |
| 22 | 697,00     | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 697,00  | <b>697</b>  | 0,00    |
| 26 | 971,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 971,00  | <b>971</b>  | 0,00    |
| 30 | 1229,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 1229,00 | <b>1229</b> | 0,00    |
| 34 | 1471,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 1471,00 | <b>1471</b> | 0,00    |
| 38 | 1697,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 1697,00 | <b>1697</b> | 0,00    |
| 42 | 1907,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 1907,00 | <b>1907</b> | 0,00    |
| 46 | 2101,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 2101,00 | <b>2101</b> | 0,00    |
| 50 | 2279,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 2279,00 | <b>2279</b> | 0,00    |
| 54 | 2441,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 2441,00 | <b>2441</b> | 0,00    |
| 58 | 2587,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 2587,00 | <b>2587</b> | 0,00    |
| 62 | 2717,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 2717,00 | <b>2717</b> | 0,00    |
| 66 | 2831,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 2831,00 | <b>2831</b> | 0,00    |
| 70 | 2929,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 2929,00 | <b>2929</b> | 0,00    |
| 74 | 3011,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 3011,00 | <b>3011</b> | 0,00    |
| 78 | 3077,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 3077,00 | <b>3077</b> | 0,00    |
| 82 | 3127,00    | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 3127,00 | <b>3127</b> | 0,00    |
| 86 | 3161,00    | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 3161,00 | <b>3161</b> | 0,00    |
| 90 | 3179,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 3179,00 | <b>3179</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.



Tabela A.9: Resultados para o grafo nr\_317\_size\_95 ( $|V| = 95, d = 0.82$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 319,90     | 5,07              | 63169                   | 1726            | 2622,12            | 338,00  | <b>338</b>  | 0,00    |
| 6  | 314,00     | 0,24              | 17397                   | 1               | 0,24               | 314,00  | <b>314</b>  | 0,00    |
| 10 | 332,00     | 0,65              | 17934                   | 1               | 0,65               | 332,00  | <b>332</b>  | 0,00    |
| 14 | 440,00     | 0,66              | 22153                   | 1               | 0,66               | 440,00  | <b>440</b>  | 0,00    |
| 18 | 666,00     | 1,95              | 37307                   | 1               | 1,95               | 666,00  | <b>666</b>  | 0,00    |
| 22 | 946,00     | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 946,00  | <b>946</b>  | 0,00    |
| 26 | 1232,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1232,00 | <b>1232</b> | 0,00    |
| 30 | 1502,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1502,00 | <b>1502</b> | 0,00    |
| 34 | 1756,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1756,00 | <b>1756</b> | 0,00    |
| 38 | 1994,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 1994,00 | <b>1994</b> | 0,00    |
| 42 | 2216,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2216,00 | <b>2216</b> | 0,00    |
| 46 | 2422,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2422,00 | <b>2422</b> | 0,00    |
| 50 | 2612,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2612,00 | <b>2612</b> | 0,00    |
| 54 | 2786,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2786,00 | <b>2786</b> | 0,00    |
| 58 | 2944,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 2944,00 | <b>2944</b> | 0,00    |
| 62 | 3086,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3086,00 | <b>3086</b> | 0,00    |
| 66 | 3212,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3212,00 | <b>3212</b> | 0,00    |
| 70 | 3322,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3322,00 | <b>3322</b> | 0,00    |
| 74 | 3416,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3416,00 | <b>3416</b> | 0,00    |
| 78 | 3494,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3494,00 | <b>3494</b> | 0,00    |
| 82 | 3556,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3556,00 | <b>3556</b> | 0,00    |
| 86 | 3602,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3602,00 | <b>3602</b> | 0,00    |
| 90 | 3632,00    | 0,05              | 0                       | 1               | 0,05               | 3632,00 | <b>3632</b> | 0,00    |
| 94 | 3646,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 3646,00 | <b>3646</b> | 0,00    |

Tabela A.10: Resultados para o grafo nr\_630\_size\_102 ( $|V| = 102, d = 0.15$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|------------|---------|
| 2* | 1903,64    | 684,72            | 27510                   | 248             | 7200,00            | 1940,54 | 1962       | 1,09    |
| 6  | 419,93     | 46,33             | 37721                   | 8401            | 7200,00            | 423,08  | 509        | 16,88   |
| 10 | 316,15     | 30,55             | 26094                   | 45400           | 7200,00            | 320,11  | 355        | 9,83    |
| 14 | 312,41     | 15,60             | 15960                   | 18900           | 2083,67            | 316,00  | <b>316</b> | 0,00    |
| 18 | 307,67     | 1,44              | 5368                    | 12              | 1,53               | 309,00  | <b>309</b> | 0,00    |
| 22 | 308,00     | 1,01              | 4707                    | 1               | 1,01               | 308,00  | <b>308</b> | 0,00    |
| 26 | 312,00     | 0,70              | 4587                    | 1               | 0,70               | 312,00  | <b>312</b> | 0,00    |
| 30 | 318,00     | 1,86              | 5090                    | 3               | 1,91               | 319,00  | <b>319</b> | 0,00    |
| 34 | 326,00     | 1,46              | 4788                    | 2               | 1,54               | 327,00  | <b>327</b> | 0,00    |
| 38 | 334,25     | 2,41              | 4842                    | 3               | 2,54               | 336,00  | <b>336</b> | 0,00    |
| 42 | 346,00     | 2,07              | 4805                    | 1               | 2,07               | 346,00  | <b>346</b> | 0,00    |
| 46 | 356,00     | 3,25              | 4964                    | 10              | 4,68               | 358,00  | <b>358</b> | 0,00    |
| 50 | 368,00     | 1,35              | 4766                    | 1               | 1,35               | 368,00  | <b>368</b> | 0,00    |
| 54 | 384,00     | 2,47              | 5482                    | 266             | 24,44              | 389,00  | <b>389</b> | 0,00    |
| 58 | 400,00     | 1,03              | 4653                    | 1               | 1,03               | 400,00  | <b>400</b> | 0,00    |
| 62 | 418,00     | 2,17              | 5855                    | 516             | 27,02              | 425,00  | <b>425</b> | 0,00    |
| 66 | 434,72     | 1,52              | 4462                    | 3               | 1,55               | 436,00  | <b>436</b> | 0,00    |
| 70 | 458,94     | 7,12              | 6308                    | 38              | 16,88              | 465,00  | <b>465</b> | 0,00    |
| 74 | 485,46     | 7,67              | 6933                    | 44835           | 1780,33            | 507,00  | <b>507</b> | 0,00    |
| 78 | 514,08     | 5,74              | 6730                    | 247200          | 4874,62            | 531,00  | <b>531</b> | 0,00    |
| 82 | 541,00     | 0,55              | 4283                    | 3               | 2,10               | 543,00  | <b>543</b> | 0,00    |
| 86 | 615,00     | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 615,00  | <b>615</b> | 0,00    |
| 90 | 673,00     | 0,07              | 0                       | 1               | 0,07               | 673,00  | <b>673</b> | 0,00    |
| 94 | 715,00     | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 715,00  | <b>715</b> | 0,00    |
| 98 | 741,00     | 0,06              | 0                       | 1               | 0,06               | 741,00  | <b>741</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.11: Resultados para o grafo nr\_104\_size\_112 ( $|V| = 112, d = 0.82$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 830,00     | 160,94            | 8400                    | 1               | 160,94             | 830,00  | <b>830</b>  | 0,00    |
| 6   | 812,00     | 21,55             | 15002                   | 1               | 21,55              | 812,00  | <b>812</b>  | 0,00    |
| 10  | 817,00     | 18,23             | 12578                   | 1               | 18,23              | 817,00  | <b>817</b>  | 0,00    |
| 14  | 885,00     | 29,86             | 12878                   | 1               | 29,86              | 885,00  | <b>885</b>  | 0,00    |
| 18  | 1061,00    | 86,69             | 19042                   | 1               | 86,69              | 1061,00 | <b>1061</b> | 0,00    |
| 22  | 1275,72    | 135,93            | 26076                   | 3               | 138,07             | 1277,00 | <b>1277</b> | 0,00    |
| 26  | 1523,00    | 144,42            | 27766                   | 1               | 144,42             | 1523,00 | <b>1523</b> | 0,00    |
| 30  | 1789,00    | 275,31            | 30309                   | 1               | 275,31             | 1789,00 | <b>1789</b> | 0,00    |
| 34  | 2059,00    | 763,77            | 33871                   | 1               | 763,77             | 2059,00 | <b>2059</b> | 0,00    |
| 38  | 2337,00    | 2252,33           | 40581                   | 1               | 2252,33            | 2337,00 | <b>2337</b> | 0,00    |
| 42  | 2609,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 2609,00 | <b>2609</b> | 0,00    |
| 46  | 2883,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 2883,00 | <b>2883</b> | 0,00    |
| 50  | 3141,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 3141,00 | <b>3141</b> | 0,00    |
| 54  | 3383,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3383,00 | <b>3383</b> | 0,00    |
| 58  | 3609,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3609,00 | <b>3609</b> | 0,00    |
| 62  | 3819,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 3819,00 | <b>3819</b> | 0,00    |
| 66  | 4013,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 4013,00 | <b>4013</b> | 0,00    |
| 70  | 4191,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 4191,00 | <b>4191</b> | 0,00    |
| 74  | 4353,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 4353,00 | <b>4353</b> | 0,00    |
| 78  | 4499,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 4499,00 | <b>4499</b> | 0,00    |
| 82  | 4629,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 4629,00 | <b>4629</b> | 0,00    |
| 86  | 4743,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 4743,00 | <b>4743</b> | 0,00    |
| 90  | 4841,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 4841,00 | <b>4841</b> | 0,00    |
| 94  | 4923,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 4923,00 | <b>4923</b> | 0,00    |
| 98  | 4989,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 4989,00 | <b>4989</b> | 0,00    |
| 102 | 5039,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 5039,00 | <b>5039</b> | 0,00    |
| 106 | 5073,00    | 0,09              | 0                       | 1               | 0,09               | 5073,00 | <b>5073</b> | 0,00    |
| 110 | 5091,00    | 0,08              | 0                       | 1               | 0,08               | 5091,00 | <b>5091</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.12: Resultados para o grafo nr\_413\_size\_127 ( $|V| = 127, d = 0.45$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 1535,36    | 7200,00           | 31116                   | 1               | 7200,00            | 1535,36 | 1542        | 0,43    |
| 6   | 785,00     | 1,54              | 29242                   | 1               | 1,54               | 785,00  | <b>785</b>  | 0,00    |
| 10  | 786,00     | 1,76              | 21907                   | 1               | 1,76               | 786,00  | <b>786</b>  | 0,00    |
| 14  | 804,96     | 18,20             | 26433                   | 37              | 52,74              | 812,00  | <b>812</b>  | 0,00    |
| 18  | 827,65     | 18,72             | 26109                   | 1473            | 503,15             | 840,00  | <b>840</b>  | 0,00    |
| 22  | 850,00     | 11,96             | 20318                   | 1               | 11,96              | 850,00  | <b>850</b>  | 0,00    |
| 26  | 919,78     | 162,96            | 40158                   | 3143            | 7200,00            | 954,70  | 962         | 0,76    |
| 30  | 1003,49    | 121,27            | 40867                   | 2047            | 7200,00            | 1040,26 | 1118        | 6,95    |
| 34  | 1087,20    | 131,03            | 40274                   | 2299            | 7200,00            | 1126,40 | 1252        | 10,03   |
| 38  | 1170,90    | 107,18            | 38206                   | 5512            | 7200,00            | 1211,62 | 1366        | 11,30   |
| 42  | 1254,61    | 92,92             | 43491                   | 6312            | 7200,00            | 1292,11 | 1464        | 11,74   |
| 46  | 1338,56    | 97,45             | 39348                   | 9100            | 7200,00            | 1370,42 | 1544        | 11,24   |
| 50  | 1423,34    | 90,77             | 36571                   | 12986           | 7200,00            | 1458,87 | 1606        | 9,16    |
| 54  | 1506,76    | 92,95             | 37607                   | 15600           | 7200,00            | 1535,16 | 1652        | 7,07    |
| 58  | 1590,85    | 77,25             | 36390                   | 14202           | 7200,00            | 1609,57 | 1682        | 4,31    |
| 62  | 1674,95    | 115,68            | 36026                   | 5480            | 6587,37            | 1692,00 | <b>1692</b> | 0,00    |
| 66  | 1784,00    | 107,14            | 24484                   | 1               | 107,14             | 1784,00 | <b>1784</b> | 0,00    |
| 70  | 1978,00    | 10,12             | 27072                   | 3               | 697,19             | 1980,00 | <b>1980</b> | 0,00    |
| 74  | 2200,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 2200,00 | <b>2200</b> | 0,00    |
| 78  | 2406,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 2406,00 | <b>2406</b> | 0,00    |
| 82  | 2596,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 2596,00 | <b>2596</b> | 0,00    |
| 86  | 2770,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 2770,00 | <b>2770</b> | 0,00    |
| 90  | 2928,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 2928,00 | <b>2928</b> | 0,00    |
| 94  | 3070,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 3070,00 | <b>3070</b> | 0,00    |
| 98  | 3196,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 3196,00 | <b>3196</b> | 0,00    |
| 102 | 3306,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3306,00 | <b>3306</b> | 0,00    |
| 106 | 3400,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3400,00 | <b>3400</b> | 0,00    |
| 110 | 3478,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3478,00 | <b>3478</b> | 0,00    |
| 114 | 3540,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 3540,00 | <b>3540</b> | 0,00    |
| 118 | 3586,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3586,00 | <b>3586</b> | 0,00    |
| 122 | 3616,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 3616,00 | <b>3616</b> | 0,00    |
| 126 | 3630,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 3630,00 | <b>3630</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.13: Resultados para o grafo nr\_57\_size\_129 ( $|V| = 129, d = 0.24$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 2123,84    | 566,51            | 42573                   | 152             | 7200,00            | 2145,25 | 2242        | 4,32    |
| 6   | 639,27     | 127,04            | 44948                   | 2655            | 7200,00            | 642,66  | 777         | 17,29   |
| 10  | 634,32     | 236,16            | 36587                   | 1050            | 7200,00            | 636,38  | 653         | 2,55    |
| 14  | 630,32     | 66,44             | 30291                   | 8019            | 3595,56            | 633,00  | <b>633</b>  | 0,00    |
| 18  | 627,00     | 14,34             | 9747                    | 1               | 14,34              | 627,00  | <b>627</b>  | 0,00    |
| 22  | 628,00     | 11,73             | 9567                    | 1               | 11,73              | 628,00  | <b>628</b>  | 0,00    |
| 26  | 632,00     | 8,97              | 10575                   | 1               | 8,97               | 632,00  | <b>632</b>  | 0,00    |
| 30  | 638,00     | 9,90              | 10843                   | 1               | 9,90               | 638,00  | <b>638</b>  | 0,00    |
| 34  | 647,01     | 21,78             | 12093                   | 7               | 25,41              | 649,00  | <b>649</b>  | 0,00    |
| 38  | 660,00     | 15,87             | 9398                    | 1               | 15,87              | 660,00  | <b>660</b>  | 0,00    |
| 42  | 675,43     | 16,46             | 12490                   | 69              | 37,98              | 680,00  | <b>680</b>  | 0,00    |
| 46  | 692,28     | 21,60             | 11286                   | 134             | 57,89              | 696,00  | <b>696</b>  | 0,00    |
| 50  | 714,09     | 21,75             | 14247                   | 123             | 165,26             | 724,00  | <b>724</b>  | 0,00    |
| 54  | 741,11     | 23,47             | 13413                   | 12261           | 2383,85            | 760,00  | <b>760</b>  | 0,00    |
| 58  | 767,67     | 21,98             | 13835                   | 276             | 77,03              | 774,00  | <b>774</b>  | 0,00    |
| 62  | 800,10     | 22,59             | 13287                   | 5               | 27,34              | 802,00  | <b>802</b>  | 0,00    |
| 66  | 838,26     | 19,13             | 14420                   | 7921            | 2273,98            | 868,00  | <b>868</b>  | 0,00    |
| 70  | 875,97     | 16,64             | 14491                   | 58100           | 7200,00            | 905,06  | 916         | 1,19    |
| 74  | 913,96     | 21,81             | 13968                   | 89877           | 7200,00            | 932,50  | 940         | 0,80    |
| 78  | 950,75     | 11,36             | 9481                    | 3               | 11,81              | 952,00  | <b>952</b>  | 0,00    |
| 82  | 1004,76    | 15,87             | 9160                    | 3               | 16,07              | 1006,00 | <b>1006</b> | 0,00    |
| 86  | 1078,00    | 11,27             | 10853                   | 1               | 11,27              | 1078,00 | <b>1078</b> | 0,00    |
| 90  | 1204,12    | 38,26             | 11607                   | 3               | 39,43              | 1206,00 | <b>1206</b> | 0,00    |
| 94  | 1350,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 1350,00 | <b>1350</b> | 0,00    |
| 98  | 1484,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 1484,00 | <b>1484</b> | 0,00    |
| 102 | 1602,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 1602,00 | <b>1602</b> | 0,00    |
| 106 | 1704,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 1704,00 | <b>1704</b> | 0,00    |
| 110 | 1790,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 1790,00 | <b>1790</b> | 0,00    |
| 114 | 1860,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 1860,00 | <b>1860</b> | 0,00    |
| 118 | 1914,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 1914,00 | <b>1914</b> | 0,00    |
| 122 | 1952,00    | 0,10              | 0                       | 1               | 0,10               | 1952,00 | <b>1952</b> | 0,00    |
| 126 | 1974,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 1974,00 | <b>1974</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.14: Resultados para o grafo nr\_606\_size\_130 ( $|V| = 130, d = 0.92$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | 108,00     | 17,16             | 66379                   | 25              | 137,76             | 112,00  | <b>112</b>  | 0,00    |
| 6   | 108,00     | 0,45              | 5126                    | 1               | 0,45               | 108,00  | <b>108</b>  | 0,00    |
| 10  | 443,00     | 8,26              | 13715                   | 1               | 8,26               | 443,00  | <b>443</b>  | 0,00    |
| 14  | 907,00     | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 907,00  | <b>907</b>  | 0,00    |
| 18  | 1365,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 1365,00 | <b>1365</b> | 0,00    |
| 22  | 1807,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 1807,00 | <b>1807</b> | 0,00    |
| 26  | 2233,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 2233,00 | <b>2233</b> | 0,00    |
| 30  | 2643,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 2643,00 | <b>2643</b> | 0,00    |
| 34  | 3037,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 3037,00 | <b>3037</b> | 0,00    |
| 38  | 3415,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 3415,00 | <b>3415</b> | 0,00    |
| 42  | 3777,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 3777,00 | <b>3777</b> | 0,00    |
| 46  | 4123,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 4123,00 | <b>4123</b> | 0,00    |
| 50  | 4453,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 4453,00 | <b>4453</b> | 0,00    |
| 54  | 4767,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 4767,00 | <b>4767</b> | 0,00    |
| 58  | 5065,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 5065,00 | <b>5065</b> | 0,00    |
| 62  | 5347,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 5347,00 | <b>5347</b> | 0,00    |
| 66  | 5613,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 5613,00 | <b>5613</b> | 0,00    |
| 70  | 5863,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 5863,00 | <b>5863</b> | 0,00    |
| 74  | 6097,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 6097,00 | <b>6097</b> | 0,00    |
| 78  | 6315,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 6315,00 | <b>6315</b> | 0,00    |
| 82  | 6517,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 6517,00 | <b>6517</b> | 0,00    |
| 86  | 6703,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 6703,00 | <b>6703</b> | 0,00    |
| 90  | 6873,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 6873,00 | <b>6873</b> | 0,00    |
| 94  | 7027,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 7027,00 | <b>7027</b> | 0,00    |
| 98  | 7165,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 7165,00 | <b>7165</b> | 0,00    |
| 102 | 7287,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 7287,00 | <b>7287</b> | 0,00    |
| 106 | 7393,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 7393,00 | <b>7393</b> | 0,00    |
| 110 | 7483,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 7483,00 | <b>7483</b> | 0,00    |
| 114 | 7557,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 7557,00 | <b>7557</b> | 0,00    |
| 118 | 7615,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 7615,00 | <b>7615</b> | 0,00    |
| 122 | 7657,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 7657,00 | <b>7657</b> | 0,00    |
| 126 | 7683,00    | 0,11              | 0                       | 1               | 0,11               | 7683,00 | <b>7683</b> | 0,00    |

Tabela A.15: Resultados para o grafo nr\_480\_size\_139 ( $|V| = 139, d = 0.42$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 1038,57    | 1078,97           | 37676                   | 150             | 7200,00            | 1288,69 | 1331        | 3,18    |
| 6   | 745,19     | 114,78            | 65955                   | 1295            | 7200,00            | 747,45  | 774         | 3,43    |
| 10  | 740,81     | 28,67             | 52947                   | 4493            | 5477,54            | 746,00  | <b>746</b>  | 0,00    |
| 14  | 740,00     | 14,70             | 11975                   | 1               | 14,70              | 740,00  | <b>740</b>  | 0,00    |
| 18  | 741,00     | 11,68             | 10450                   | 1               | 11,68              | 741,00  | <b>741</b>  | 0,00    |
| 22  | 746,00     | 10,39             | 11539                   | 1               | 10,39              | 746,00  | <b>746</b>  | 0,00    |
| 26  | 754,00     | 11,83             | 12017                   | 2               | 11,88              | 755,00  | <b>755</b>  | 0,00    |
| 30  | 767,00     | 11,33             | 12431                   | 1               | 11,33              | 767,00  | <b>767</b>  | 0,00    |
| 34  | 791,90     | 28,25             | 12894                   | 8               | 50,38              | 795,00  | <b>795</b>  | 0,00    |
| 38  | 820,79     | 30,16             | 15004                   | 179             | 157,20             | 837,00  | <b>837</b>  | 0,00    |
| 42  | 854,47     | 32,08             | 14636                   | 32326           | 7200,00            | 883,35  | 887         | 0,41    |
| 46  | 890,80     | 24,63             | 14974                   | 141000          | 7200,00            | 911,23  | 925         | 1,49    |
| 50  | 924,27     | 25,52             | 14411                   | 56158           | 4385,29            | 943,00  | <b>943</b>  | 0,00    |
| 54  | 967,00     | 11,60             | 9427                    | 1               | 11,60              | 967,00  | <b>967</b>  | 0,00    |
| 58  | 1063,69    | 31,18             | 14363                   | 3               | 32,35              | 1065,00 | <b>1065</b> | 0,00    |
| 62  | 1221,00    | 34,67             | 16194                   | 1               | 34,67              | 1221,00 | <b>1221</b> | 0,00    |
| 66  | 1424,36    | 73,83             | 21562                   | 3               | 78,77              | 1427,00 | <b>1427</b> | 0,00    |
| 70  | 1668,35    | 231,76            | 25227                   | 2               | 241,11             | 1669,00 | <b>1669</b> | 0,00    |
| 74  | 1915,00    | 534,72            | 27667                   | 1               | 534,72             | 1915,00 | <b>1915</b> | 0,00    |
| 78  | 2165,00    | 38,02             | 24417                   | 2               | 861,82             | 2165,00 | <b>2165</b> | 0,00    |
| 82  | 2403,00    | 0,16              | 0                       | 1               | 0,16               | 2403,00 | <b>2403</b> | 0,00    |
| 86  | 2625,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 2625,00 | <b>2625</b> | 0,00    |
| 90  | 2831,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 2831,00 | <b>2831</b> | 0,00    |
| 94  | 3021,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 3021,00 | <b>3021</b> | 0,00    |
| 98  | 3195,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 3195,00 | <b>3195</b> | 0,00    |
| 102 | 3353,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 3353,00 | <b>3353</b> | 0,00    |
| 106 | 3495,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 3495,00 | <b>3495</b> | 0,00    |
| 110 | 3621,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 3621,00 | <b>3621</b> | 0,00    |
| 114 | 3731,00    | 0,14              | 0                       | 1               | 0,14               | 3731,00 | <b>3731</b> | 0,00    |
| 118 | 3825,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 3825,00 | <b>3825</b> | 0,00    |
| 122 | 3903,00    | 0,13              | 0                       | 1               | 0,13               | 3903,00 | <b>3903</b> | 0,00    |
| 126 | 3965,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 3965,00 | <b>3965</b> | 0,00    |
| 130 | 4011,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 4011,00 | <b>4011</b> | 0,00    |
| 134 | 4041,00    | 0,12              | 0                       | 1               | 0,12               | 4041,00 | <b>4041</b> | 0,00    |
| 138 | 4055,00    | 0,30              | 0                       | 1               | 0,30               | 4055,00 | <b>4055</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.16: Resultados para o grafo nr\_537\_size\_144 ( $|V| = 144, d = 0.68$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 1517,00    | 1226,58           | 14800                   | 1               | 1226,58            | 1517,00 | <b>1517</b> | 0,00    |
| 6   | 1307,54    | 102,95            | 28856                   | 3               | 103,18             | 1309,00 | <b>1309</b> | 0,00    |
| 10  | 1312,00    | 99,82             | 26336                   | 10              | 102,09             | 1313,00 | <b>1313</b> | 0,00    |
| 14  | 1319,50    | 191,61            | 28167                   | 5               | 193,75             | 1321,00 | <b>1321</b> | 0,00    |
| 18  | 1346,23    | 118,45            | 35851                   | 1042            | 1652,75            | 1368,00 | <b>1368</b> | 0,00    |
| 22  | 1378,31    | 200,92            | 43979                   | 6641            | 7200,00            | 1400,02 | 1406        | 0,43    |
| 26  | 1410,77    | 199,59            | 48269                   | 3364            | 4616,59            | 1424,00 | <b>1424</b> | 0,00    |
| 30  | 1448,09    | 187,98            | 36757                   | 7               | 212,76             | 1450,00 | <b>1450</b> | 0,00    |
| 34  | 1506,00    | 147,00            | 30033                   | 1               | 147,00             | 1506,00 | <b>1506</b> | 0,00    |
| 38  | 1632,00    | 106,67            | 39047                   | 1               | 106,67             | 1632,00 | <b>1632</b> | 0,00    |
| 42  | 1864,00    | 192,28            | 50565                   | 1               | 192,28             | 1864,00 | <b>1864</b> | 0,00    |
| 46  | 2187,67    | 628,50            | 53629                   | 3               | 713,57             | 2190,00 | <b>2190</b> | 0,00    |
| 50  | 2560,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 2560,00 | <b>2560</b> | 0,00    |
| 54  | 2930,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 2930,00 | <b>2930</b> | 0,00    |
| 58  | 3284,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 3284,00 | <b>3284</b> | 0,00    |
| 62  | 3622,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 3622,00 | <b>3622</b> | 0,00    |
| 66  | 3944,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 3944,00 | <b>3944</b> | 0,00    |
| 70  | 4250,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 4250,00 | <b>4250</b> | 0,00    |
| 74  | 4540,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 4540,00 | <b>4540</b> | 0,00    |
| 78  | 4814,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 4814,00 | <b>4814</b> | 0,00    |
| 82  | 5072,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 5072,00 | <b>5072</b> | 0,00    |
| 86  | 5314,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 5314,00 | <b>5314</b> | 0,00    |
| 90  | 5540,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 5540,00 | <b>5540</b> | 0,00    |
| 94  | 5750,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 5750,00 | <b>5750</b> | 0,00    |
| 98  | 5944,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 5944,00 | <b>5944</b> | 0,00    |
| 102 | 6122,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 6122,00 | <b>6122</b> | 0,00    |
| 106 | 6284,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 6284,00 | <b>6284</b> | 0,00    |
| 110 | 6430,00    | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 6430,00 | <b>6430</b> | 0,00    |
| 114 | 6560,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 6560,00 | <b>6560</b> | 0,00    |
| 118 | 6674,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 6674,00 | <b>6674</b> | 0,00    |
| 122 | 6772,00    | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 6772,00 | <b>6772</b> | 0,00    |
| 126 | 6854,00    | 0,16              | 0                       | 1               | 0,16               | 6854,00 | <b>6854</b> | 0,00    |
| 130 | 6920,00    | 0,16              | 0                       | 1               | 0,16               | 6920,00 | <b>6920</b> | 0,00    |
| 134 | 6970,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 6970,00 | <b>6970</b> | 0,00    |
| 138 | 7004,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 7004,00 | <b>7004</b> | 0,00    |
| 142 | 7022,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 7022,00 | <b>7022</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.17: Resultados para o grafo nr\_116\_size\_152 ( $|V| = 152, d = 0.35$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 1883,78    | 1929,01           | 54696                   | 75              | 7200,00            | 1950,35 | 2530        | 22,91   |
| 6   | 902,69     | 270,04            | 54876                   | 700             | 7200,00            | 904,19  | 1059        | 14,62   |
| 10  | 897,16     | 425,22            | 68727                   | 1108            | 7200,00            | 898,81  | 919         | 2,20    |
| 14  | 891,91     | 71,62             | 51731                   | 127             | 430,66             | 894,00  | <b>894</b>  | 0,00    |
| 18  | 890,00     | 23,88             | 18373                   | 1               | 23,88              | 890,00  | <b>890</b>  | 0,00    |
| 22  | 894,00     | 25,58             | 17465                   | 1               | 25,58              | 894,00  | <b>894</b>  | 0,00    |
| 26  | 897,50     | 30,00             | 21301                   | 3               | 30,17              | 899,00  | <b>899</b>  | 0,00    |
| 30  | 906,00     | 32,27             | 17059                   | 1               | 32,27              | 906,00  | <b>906</b>  | 0,00    |
| 34  | 916,00     | 27,91             | 16703                   | 1               | 27,91              | 916,00  | <b>916</b>  | 0,00    |
| 38  | 930,00     | 33,22             | 16952                   | 29              | 55,68              | 933,00  | <b>933</b>  | 0,00    |
| 42  | 946,00     | 28,33             | 18500                   | 1               | 28,33              | 946,00  | <b>946</b>  | 0,00    |
| 46  | 962,00     | 40,84             | 19159                   | 893             | 435,78             | 968,00  | <b>968</b>  | 0,00    |
| 50  | 978,00     | 23,81             | 14344                   | 1               | 23,81              | 978,00  | <b>978</b>  | 0,00    |
| 54  | 996,00     | 39,62             | 17188                   | 2513            | 619,10             | 1004,00 | <b>1004</b> | 0,00    |
| 58  | 1014,00    | 29,85             | 17457                   | 1               | 29,85              | 1014,00 | <b>1014</b> | 0,00    |
| 62  | 1032,50    | 31,84             | 20568                   | 368             | 162,49             | 1040,00 | <b>1040</b> | 0,00    |
| 66  | 1052,10    | 49,34             | 23158                   | 93              | 138,12             | 1055,00 | <b>1055</b> | 0,00    |
| 70  | 1083,00    | 23,52             | 14375                   | 1               | 23,52              | 1083,00 | <b>1083</b> | 0,00    |
| 74  | 1219,00    | 44,96             | 16675                   | 1               | 44,96              | 1219,00 | <b>1219</b> | 0,00    |
| 78  | 1384,33    | 224,14            | 23336                   | 3               | 244,48             | 1385,00 | <b>1385</b> | 0,00    |
| 82  | 1576,86    | 137,86            | 26384                   | 2               | 140,15             | 1577,00 | <b>1577</b> | 0,00    |
| 86  | 1789,00    | 159,10            | 23121                   | 1               | 159,10             | 1789,00 | <b>1789</b> | 0,00    |
| 90  | 2011,76    | 949,91            | 32024                   | 3               | 961,59             | 2013,00 | <b>2013</b> | 0,00    |
| 94  | 2251,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 2251,00 | <b>2251</b> | 0,00    |
| 98  | 2477,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 2477,00 | <b>2477</b> | 0,00    |
| 102 | 2687,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 2687,00 | <b>2687</b> | 0,00    |
| 106 | 2881,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 2881,00 | <b>2881</b> | 0,00    |
| 110 | 3059,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 3059,00 | <b>3059</b> | 0,00    |
| 114 | 3221,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 3221,00 | <b>3221</b> | 0,00    |
| 118 | 3367,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 3367,00 | <b>3367</b> | 0,00    |
| 122 | 3497,00    | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 3497,00 | <b>3497</b> | 0,00    |
| 126 | 3611,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 3611,00 | <b>3611</b> | 0,00    |
| 130 | 3709,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 3709,00 | <b>3709</b> | 0,00    |
| 134 | 3791,00    | 0,16              | 0                       | 1               | 0,16               | 3791,00 | <b>3791</b> | 0,00    |
| 138 | 3857,00    | 0,18              | 0                       | 1               | 0,18               | 3857,00 | <b>3857</b> | 0,00    |
| 142 | 3907,00    | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 3907,00 | <b>3907</b> | 0,00    |
| 146 | 3941,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 3941,00 | <b>3941</b> | 0,00    |
| 150 | 3959,00    | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 3959,00 | <b>3959</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.18: Resultados para o grafo nr\_593\_size\_157 ( $|V| = 157, d = 0.49$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 2454,16    | 7200,00           | 25600                   | 1               | 7200,00            | 2454,16 | 2458        | 0,16    |
| 6   | 1694,41    | 973,02            | 76763                   | 295             | 7200,00            | 1695,96 | 1750        | 3,09    |
| 10  | 1688,88    | 773,00            | 85198                   | 1043            | 7200,00            | 1692,68 | 1698        | 0,31    |
| 14  | 1686,05    | 278,77            | 39473                   | 7               | 374,54             | 1688,00 | <b>1688</b> | 0,00    |
| 18  | 1688,00    | 186,88            | 32531                   | 1               | 186,88             | 1688,00 | <b>1688</b> | 0,00    |
| 22  | 1691,51    | 238,81            | 38356                   | 3               | 241,96             | 1693,00 | <b>1693</b> | 0,00    |
| 26  | 1700,00    | 278,99            | 35191                   | 1               | 278,99             | 1700,00 | <b>1700</b> | 0,00    |
| 30  | 1708,50    | 278,19            | 38295                   | 3               | 281,05             | 1710,00 | <b>1710</b> | 0,00    |
| 34  | 1724,00    | 347,61            | 42081                   | 44              | 720,95             | 1729,00 | <b>1729</b> | 0,00    |
| 38  | 1740,00    | 336,96            | 40479                   | 15              | 369,03             | 1742,00 | <b>1742</b> | 0,00    |
| 42  | 1759,00    | 207,77            | 36415                   | 251             | 661,17             | 1768,00 | <b>1768</b> | 0,00    |
| 46  | 1779,00    | 347,44            | 38007                   | 1185            | 2823,52            | 1786,00 | <b>1786</b> | 0,00    |
| 50  | 1812,34    | 483,71            | 37199                   | 3               | 508,36             | 1814,00 | <b>1814</b> | 0,00    |
| 54  | 1902,00    | 816,02            | 45211                   | 1               | 816,02             | 1902,00 | <b>1902</b> | 0,00    |
| 58  | 2032,00    | 1306,39           | 44969                   | 1               | 1306,39            | 2032,00 | <b>2032</b> | 0,00    |
| 62  | 2204,00    | 1944,43           | 52584                   | 1               | 1944,43            | 2204,00 | <b>2204</b> | 0,00    |
| 66  | 2392,00    | 1413,30           | 48025                   | 1               | 1413,30            | 2392,00 | <b>2392</b> | 0,00    |
| 70  | 2595,64    | 3475,86           | 59842                   | 2               | 3481,25            | 2596,00 | <b>2596</b> | 0,00    |
| 74  | 2810,00    | 1892,00           | 53519                   | 1               | 1892,00            | 2810,00 | <b>2810</b> | 0,00    |
| 78  | 3032,00    | 1979,39           | 55337                   | 1               | 1979,39            | 3032,00 | <b>3032</b> | 0,00    |
| 82  | 3264,02    | 3623,68           | 58874                   | 17              | 5410,69            | 3268,00 | <b>3268</b> | 0,00    |
| 86  | 3496,57    | 7200,00           | 65041                   | 1               | 7200,00            | 3496,57 | 3524        | 0,78    |
| 90  | 3758,00    | 7200,00           | 64032                   | 1               | 7200,00            | 3758,00 | 3778        | 0,53    |
| 94  | 4020,00    | 18,53             | 36862                   | 2               | 7200,00            | 4020,00 | 4022        | 0,05    |
| 98  | 4266,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 4266,00 | <b>4266</b> | 0,00    |
| 102 | 4496,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 4496,00 | <b>4496</b> | 0,00    |
| 106 | 4710,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 4710,00 | <b>4710</b> | 0,00    |
| 110 | 4908,00    | 0,55              | 0                       | 1               | 0,55               | 4908,00 | <b>4908</b> | 0,00    |
| 114 | 5090,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5090,00 | <b>5090</b> | 0,00    |
| 118 | 5256,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5256,00 | <b>5256</b> | 0,00    |
| 122 | 5406,00    | 0,16              | 0                       | 1               | 0,16               | 5406,00 | <b>5406</b> | 0,00    |
| 126 | 5540,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5540,00 | <b>5540</b> | 0,00    |
| 130 | 5658,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5658,00 | <b>5658</b> | 0,00    |
| 134 | 5760,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5760,00 | <b>5760</b> | 0,00    |
| 138 | 5846,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5846,00 | <b>5846</b> | 0,00    |
| 142 | 5916,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5916,00 | <b>5916</b> | 0,00    |
| 146 | 5970,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 5970,00 | <b>5970</b> | 0,00    |
| 150 | 6008,00    | 0,15              | 0                       | 1               | 0,15               | 6008,00 | <b>6008</b> | 0,00    |
| 154 | 6030,00    | 0,16              | 0                       | 1               | 0,16               | 6030,00 | <b>6030</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.



Tabela A.19: Resultados para o grafo nr\_176\_size\_169 ( $|V| = 169, d = 0.90$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2*  | 371,00     | 120,12            | 8565                    | 1               | 120,12             | 371,00   | <b>371</b>   | 0,00    |
| 6   | 339,00     | 2,08              | 13432                   | 1               | 2,08               | 339,00   | <b>339</b>   | 0,00    |
| 10  | 337,00     | 1,96              | 10791                   | 1               | 1,96               | 337,00   | <b>337</b>   | 0,00    |
| 14  | 687,00     | 9,02              | 20899                   | 1               | 9,02               | 687,00   | <b>687</b>   | 0,00    |
| 18  | 1271,00    | 261,13            | 38964                   | 1               | 261,13             | 1271,00  | <b>1271</b>  | 0,00    |
| 22  | 1867,00    | 0,58              | 0                       | 1               | 0,58               | 1867,00  | <b>1867</b>  | 0,00    |
| 26  | 2449,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 2449,00  | <b>2449</b>  | 0,00    |
| 30  | 3015,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 3015,00  | <b>3015</b>  | 0,00    |
| 34  | 3565,00    | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 3565,00  | <b>3565</b>  | 0,00    |
| 38  | 4099,00    | 0,21              | 0                       | 1               | 0,21               | 4099,00  | <b>4099</b>  | 0,00    |
| 42  | 4617,00    | 0,21              | 0                       | 1               | 0,21               | 4617,00  | <b>4617</b>  | 0,00    |
| 46  | 5119,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 5119,00  | <b>5119</b>  | 0,00    |
| 50  | 5605,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 5605,00  | <b>5605</b>  | 0,00    |
| 54  | 6075,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6075,00  | <b>6075</b>  | 0,00    |
| 58  | 6529,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6529,00  | <b>6529</b>  | 0,00    |
| 62  | 6967,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 6967,00  | <b>6967</b>  | 0,00    |
| 66  | 7389,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 7389,00  | <b>7389</b>  | 0,00    |
| 70  | 7795,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 7795,00  | <b>7795</b>  | 0,00    |
| 74  | 8185,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 8185,00  | <b>8185</b>  | 0,00    |
| 78  | 8559,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 8559,00  | <b>8559</b>  | 0,00    |
| 82  | 8917,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 8917,00  | <b>8917</b>  | 0,00    |
| 86  | 9259,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 9259,00  | <b>9259</b>  | 0,00    |
| 90  | 9585,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 9585,00  | <b>9585</b>  | 0,00    |
| 94  | 9895,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 9895,00  | <b>9895</b>  | 0,00    |
| 98  | 10189,00   | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 10189,00 | <b>10189</b> | 0,00    |
| 102 | 10467,00   | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 10467,00 | <b>10467</b> | 0,00    |
| 106 | 10729,00   | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 10729,00 | <b>10729</b> | 0,00    |
| 110 | 10975,00   | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 10975,00 | <b>10975</b> | 0,00    |
| 114 | 11205,00   | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 11205,00 | <b>11205</b> | 0,00    |
| 118 | 11419,00   | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 11419,00 | <b>11419</b> | 0,00    |
| 122 | 11617,00   | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 11617,00 | <b>11617</b> | 0,00    |
| 126 | 11799,00   | 0,21              | 0                       | 1               | 0,21               | 11799,00 | <b>11799</b> | 0,00    |
| 130 | 11965,00   | 0,21              | 0                       | 1               | 0,21               | 11965,00 | <b>11965</b> | 0,00    |
| 134 | 12115,00   | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 12115,00 | <b>12115</b> | 0,00    |
| 138 | 12249,00   | 0,20              | 0                       | 1               | 0,20               | 12249,00 | <b>12249</b> | 0,00    |
| 142 | 12367,00   | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 12367,00 | <b>12367</b> | 0,00    |
| 146 | 12469,00   | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 12469,00 | <b>12469</b> | 0,00    |
| 150 | 12555,00   | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 12555,00 | <b>12555</b> | 0,00    |
| 154 | 12625,00   | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 12625,00 | <b>12625</b> | 0,00    |
| 158 | 12679,00   | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 12679,00 | <b>12679</b> | 0,00    |
| 162 | 12717,00   | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 12717,00 | <b>12717</b> | 0,00    |
| 166 | 12739,00   | 0,17              | 0                       | 1               | 0,17               | 12739,00 | <b>12739</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.20: Resultados para o grafo nr\_459\_size\_171 ( $|V| = 171, d = 0.11$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | 5681,69    | 715,77            | 98198                   | 42              | 7200,00            | 5684,95 | 5696        | 0,19    |
| 6   | 1052,23    | 232,04            | 78441                   | 697             | 7200,00            | 1054,66 | 1210        | 12,84   |
| 10  | 549,60     | 163,09            | 52135                   | 3649            | 7200,00            | 552,44  | 694         | 20,40   |
| 14  | 545,19     | 214,45            | 56046                   | 3071            | 7200,00            | 547,53  | 596         | 8,13    |
| 18  | 540,82     | 261,57            | 54632                   | 3854            | 7200,00            | 542,60  | 560         | 3,11    |
| 22  | 537,24     | 16,95             | 50165                   | 1808            | 7200,00            | 539,00  | 543         | 0,74    |
| 26  | 533,08     | 5,53              | 13506                   | 11              | 14,53              | 535,00  | <b>535</b>  | 0,00    |
| 30  | 532,00     | 2,69              | 8618                    | 1               | 2,69               | 532,00  | <b>532</b>  | 0,00    |
| 34  | 535,00     | 3,10              | 8567                    | 1               | 3,10               | 535,00  | <b>535</b>  | 0,00    |
| 38  | 539,00     | 2,68              | 8617                    | 1               | 2,68               | 539,00  | <b>539</b>  | 0,00    |
| 42  | 543,00     | 2,17              | 8679                    | 1               | 2,17               | 543,00  | <b>543</b>  | 0,00    |
| 46  | 547,50     | 3,14              | 8940                    | 3               | 3,28               | 549,00  | <b>549</b>  | 0,00    |
| 50  | 556,00     | 3,13              | 8519                    | 1               | 3,13               | 556,00  | <b>556</b>  | 0,00    |
| 54  | 563,00     | 2,47              | 8468                    | 3               | 2,55               | 564,00  | <b>564</b>  | 0,00    |
| 58  | 571,50     | 3,20              | 7960                    | 3               | 3,30               | 573,00  | <b>573</b>  | 0,00    |
| 62  | 587,00     | 3,49              | 8506                    | 1               | 3,49               | 587,00  | <b>587</b>  | 0,00    |
| 66  | 600,00     | 2,16              | 8676                    | 1               | 2,16               | 600,00  | <b>600</b>  | 0,00    |
| 70  | 618,27     | 5,26              | 9335                    | 3               | 6,27               | 620,00  | <b>620</b>  | 0,00    |
| 74  | 641,80     | 13,36             | 10060                   | 244             | 80,87              | 649,00  | <b>649</b>  | 0,00    |
| 78  | 663,73     | 7,89              | 8995                    | 21              | 10,75              | 666,00  | <b>666</b>  | 0,00    |
| 82  | 689,00     | 6,07              | 8380                    | 1               | 6,07               | 689,00  | <b>689</b>  | 0,00    |
| 86  | 715,42     | 19,34             | 9467                    | 4               | 27,44              | 718,00  | <b>718</b>  | 0,00    |
| 90  | 744,94     | 21,63             | 12128                   | 1091            | 296,12             | 759,00  | <b>759</b>  | 0,00    |
| 94  | 773,84     | 22,41             | 12736                   | 104725          | 7200,00            | 791,56  | 810         | 2,28    |
| 98  | 806,88     | 23,95             | 12808                   | 99400           | 7200,00            | 825,53  | 836         | 1,25    |
| 102 | 840,32     | 27,41             | 10280                   | 630             | 224,30             | 851,00  | <b>851</b>  | 0,00    |
| 106 | 877,83     | 28,67             | 10969                   | 135             | 135,83             | 889,00  | <b>889</b>  | 0,00    |
| 110 | 912,99     | 19,23             | 12831                   | 75000           | 7200,00            | 929,00  | 945         | 1,69    |
| 114 | 946,32     | 18,80             | 12776                   | 166607          | 7200,00            | 961,75  | 988         | 2,66    |
| 118 | 985,67     | 16,49             | 11755                   | 69269           | 7200,00            | 1000,50 | 1004        | 0,35    |
| 122 | 1019,00    | 9,38              | 8439                    | 20              | 14,69              | 1024,00 | <b>1024</b> | 0,00    |
| 126 | 1066,21    | 19,51             | 11469                   | 258             | 242,96             | 1084,00 | <b>1084</b> | 0,00    |
| 130 | 1108,21    | 16,70             | 13839                   | 55300           | 7200,00            | 1128,91 | 1154        | 2,17    |
| 134 | 1150,98    | 13,77             | 11704                   | 168836          | 7200,00            | 1167,59 | 1202        | 2,86    |
| 138 | 1193,71    | 13,71             | 10580                   | 175838          | 7200,00            | 1205,00 | 1228        | 1,87    |
| 142 | 1226,84    | 10,61             | 8370                    | 440             | 49,47              | 1240,00 | <b>1240</b> | 0,00    |
| 146 | 1288,00    | 12,53             | 7683                    | 48              | 35,65              | 1292,00 | <b>1292</b> | 0,00    |
| 150 | 1382,00    | 0,21              | 0                       | 1               | 0,21               | 1382,00 | <b>1382</b> | 0,00    |
| 154 | 1460,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 1460,00 | <b>1460</b> | 0,00    |
| 158 | 1522,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 1522,00 | <b>1522</b> | 0,00    |
| 162 | 1568,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 1568,00 | <b>1568</b> | 0,00    |
| 166 | 1598,00    | 0,19              | 0                       | 1               | 0,19               | 1598,00 | <b>1598</b> | 0,00    |
| 170 | 1612,00    | 0,45              | 0                       | 1               | 0,45               | 1612,00 | <b>1612</b> | 0,00    |

Tabela A.21: Resultados para o grafo nr\_9\_size\_178 ( $|V| = 178, d = 0.79$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2*  | 2066,00    | 3708,91           | 20400                   | 1               | 3708,91            | 2066,00  | <b>2066</b>  | 0,00    |
| 6   | 1953,34    | 941,93            | 50729                   | 3               | 943,55             | 1955,00  | <b>1955</b>  | 0,00    |
| 10  | 1961,00    | 310,28            | 40420                   | 2               | 310,40             | 1962,00  | <b>1962</b>  | 0,00    |
| 14  | 1978,29    | 396,24            | 37837                   | 97              | 774,45             | 1986,00  | <b>1986</b>  | 0,00    |
| 18  | 1998,00    | 733,38            | 50209                   | 316             | 1908,65            | 2005,00  | <b>2005</b>  | 0,00    |
| 22  | 2023,45    | 822,61            | 47154                   | 3               | 828,31             | 2025,00  | <b>2025</b>  | 0,00    |
| 26  | 2111,00    | 958,69            | 46874                   | 1               | 958,69             | 2111,00  | <b>2111</b>  | 0,00    |
| 30  | 2293,00    | 1184,41           | 56842                   | 1               | 1184,41            | 2293,00  | <b>2293</b>  | 0,00    |
| 34  | 2565,00    | 1532,96           | 71532                   | 1               | 1532,96            | 2565,00  | <b>2565</b>  | 0,00    |
| 38  | 2913,00    | 2741,29           | 86069                   | 1               | 2741,29            | 2913,00  | <b>2913</b>  | 0,00    |
| 42  | 3321,00    | 3493,09           | 78728                   | 1               | 3493,09            | 3321,00  | <b>3321</b>  | 0,00    |
| 46  | 3695,00    | 7200,00           | 103981                  | 1               | 7200,00            | 3695,00  | 3767         | 1,91    |
| 50  | 4217,00    | 7200,00           | 116285                  | 1               | 7200,00            | 4217,00  | 4235         | 0,43    |
| 54  | 4723,00    | 7200,00           | 108796                  | 1               | 7200,00            | 4723,00  | 4725         | 0,04    |
| 58  | 5213,00    | 0,31              | 0                       | 1               | 0,31               | 5213,00  | <b>5213</b>  | 0,00    |
| 62  | 5687,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 5687,00  | <b>5687</b>  | 0,00    |
| 66  | 6145,00    | 0,31              | 0                       | 1               | 0,31               | 6145,00  | <b>6145</b>  | 0,00    |
| 70  | 6587,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 6587,00  | <b>6587</b>  | 0,00    |
| 74  | 7013,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 7013,00  | <b>7013</b>  | 0,00    |
| 78  | 7423,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 7423,00  | <b>7423</b>  | 0,00    |
| 82  | 7817,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 7817,00  | <b>7817</b>  | 0,00    |
| 86  | 8195,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 8195,00  | <b>8195</b>  | 0,00    |
| 90  | 8557,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 8557,00  | <b>8557</b>  | 0,00    |
| 94  | 8903,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 8903,00  | <b>8903</b>  | 0,00    |
| 98  | 9233,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 9233,00  | <b>9233</b>  | 0,00    |
| 102 | 9547,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 9547,00  | <b>9547</b>  | 0,00    |
| 106 | 9845,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 9845,00  | <b>9845</b>  | 0,00    |
| 110 | 10127,00   | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 10127,00 | <b>10127</b> | 0,00    |
| 114 | 10393,00   | 0,31              | 0                       | 1               | 0,31               | 10393,00 | <b>10393</b> | 0,00    |
| 118 | 10643,00   | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 10643,00 | <b>10643</b> | 0,00    |
| 122 | 10877,00   | 0,31              | 0                       | 1               | 0,31               | 10877,00 | <b>10877</b> | 0,00    |
| 126 | 11095,00   | 0,30              | 0                       | 1               | 0,30               | 11095,00 | <b>11095</b> | 0,00    |
| 130 | 11297,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 11297,00 | <b>11297</b> | 0,00    |
| 134 | 11483,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 11483,00 | <b>11483</b> | 0,00    |
| 138 | 11653,00   | 0,28              | 0                       | 1               | 0,28               | 11653,00 | <b>11653</b> | 0,00    |
| 142 | 11807,00   | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 11807,00 | <b>11807</b> | 0,00    |
| 146 | 11945,00   | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 11945,00 | <b>11945</b> | 0,00    |
| 150 | 12067,00   | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 12067,00 | <b>12067</b> | 0,00    |
| 154 | 12173,00   | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 12173,00 | <b>12173</b> | 0,00    |
| 158 | 12263,00   | 0,25              | 0                       | 1               | 0,25               | 12263,00 | <b>12263</b> | 0,00    |
| 162 | 12337,00   | 0,25              | 0                       | 1               | 0,25               | 12337,00 | <b>12337</b> | 0,00    |
| 166 | 12395,00   | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 12395,00 | <b>12395</b> | 0,00    |
| 170 | 12437,00   | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 12437,00 | <b>12437</b> | 0,00    |
| 174 | 12463,00   | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 12463,00 | <b>12463</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.22: Resultados para o grafo nr\_200\_size\_179 ( $|V| = 179, d = 0.43$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 1935,35    | 6021,64           | 42470                   | 3               | 7200,00            | 2016,22 | 2206        | 8,60    |
| 6   | 1519,00    | 113,59            | 38304                   | 1               | 113,59             | 1519,00 | <b>1519</b> | 0,00    |
| 10  | 1542,00    | 200,61            | 42490                   | 471             | 2140,70            | 1555,00 | <b>1555</b> | 0,00    |
| 14  | 1565,00    | 202,00            | 34938                   | 1               | 202,00             | 1565,00 | <b>1565</b> | 0,00    |
| 18  | 1593,00    | 240,35            | 33482                   | 1               | 240,35             | 1593,00 | <b>1593</b> | 0,00    |
| 22  | 1629,00    | 437,16            | 55821                   | 91              | 1262,79            | 1643,00 | <b>1643</b> | 0,00    |
| 26  | 1665,00    | 390,24            | 45502                   | 4076            | 7200,00            | 1685,50 | 1700        | 0,85    |
| 30  | 1701,00    | 297,53            | 42347                   | 1307            | 2639,56            | 1717,00 | <b>1717</b> | 0,00    |
| 34  | 1736,41    | 263,87            | 31347                   | 3               | 267,98             | 1738,00 | <b>1738</b> | 0,00    |
| 38  | 1780,79    | 371,77            | 35521                   | 3               | 374,62             | 1782,00 | <b>1782</b> | 0,00    |
| 42  | 1838,22    | 283,31            | 32859                   | 3               | 285,82             | 1840,00 | <b>1840</b> | 0,00    |
| 46  | 1906,28    | 347,84            | 39019                   | 25              | 942,33             | 1918,00 | <b>1918</b> | 0,00    |
| 50  | 1974,12    | 403,35            | 40939                   | 797             | 7200,00            | 2003,44 | 2034        | 1,50    |
| 54  | 2042,31    | 517,72            | 45194                   | 1274            | 7200,00            | 2065,72 | 2154        | 4,10    |
| 58  | 2107,56    | 497,72            | 44459                   | 2800            | 7200,00            | 2118,66 | 2252        | 5,92    |
| 62  | 2180,04    | 648,26            | 46463                   | 1860            | 7200,00            | 2191,23 | 2334        | 6,12    |
| 66  | 2253,76    | 766,53            | 50463                   | 1555            | 7200,00            | 2261,92 | 2400        | 5,75    |
| 70  | 2321,28    | 622,24            | 51463                   | 1984            | 7200,00            | 2326,09 | 2450        | 5,06    |
| 74  | 2392,67    | 334,74            | 40049                   | 2683            | 7200,00            | 2399,83 | 2482        | 3,31    |
| 78  | 2464,96    | 397,06            | 45725                   | 4153            | 7200,00            | 2469,39 | 2492        | 0,91    |
| 82  | 2562,15    | 368,43            | 36841                   | 3               | 375,74             | 2564,00 | <b>2564</b> | 0,00    |
| 86  | 2730,30    | 525,35            | 42630                   | 3               | 535,13             | 2732,00 | <b>2732</b> | 0,00    |
| 90  | 2973,43    | 724,20            | 43078                   | 3               | 862,92             | 2976,00 | <b>2976</b> | 0,00    |
| 94  | 3256,00    | 1023,67           | 49560                   | 1               | 1023,67            | 3256,00 | <b>3256</b> | 0,00    |
| 98  | 3549,64    | 2712,91           | 53148                   | 3               | 3034,67            | 3552,00 | <b>3552</b> | 0,00    |
| 102 | 3848,59    | 7200,00           | 65112                   | 1               | 7200,00            | 3848,59 | 3854        | 0,14    |
| 106 | 4146,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 4146,00 | <b>4146</b> | 0,00    |
| 110 | 4432,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 4432,00 | <b>4432</b> | 0,00    |
| 114 | 4702,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 4702,00 | <b>4702</b> | 0,00    |
| 118 | 4956,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 4956,00 | <b>4956</b> | 0,00    |
| 122 | 5194,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 5194,00 | <b>5194</b> | 0,00    |
| 126 | 5416,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 5416,00 | <b>5416</b> | 0,00    |
| 130 | 5622,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 5622,00 | <b>5622</b> | 0,00    |
| 134 | 5812,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 5812,00 | <b>5812</b> | 0,00    |
| 138 | 5986,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 5986,00 | <b>5986</b> | 0,00    |
| 142 | 6144,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6144,00 | <b>6144</b> | 0,00    |
| 146 | 6286,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 6286,00 | <b>6286</b> | 0,00    |
| 150 | 6412,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 6412,00 | <b>6412</b> | 0,00    |
| 154 | 6522,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6522,00 | <b>6522</b> | 0,00    |
| 158 | 6616,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 6616,00 | <b>6616</b> | 0,00    |
| 162 | 6694,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6694,00 | <b>6694</b> | 0,00    |
| 166 | 6756,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6756,00 | <b>6756</b> | 0,00    |
| 170 | 6802,00    | 0,22              | 0                       | 1               | 0,22               | 6802,00 | <b>6802</b> | 0,00    |
| 174 | 6832,00    | 0,23              | 0                       | 1               | 0,23               | 6832,00 | <b>6832</b> | 0,00    |
| 178 | 6846,00    | 0,51              | 0                       | 1               | 0,51               | 6846,00 | <b>6846</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.23: Resultados para o grafo nr\_263\_size\_186 ( $|V| = 186, d = 0.34$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2*  | 3342,99    | 7200,00           | 39824                   | 1               | 7200,00            | 3342,99 | 3856        | 13,30   |
| 6   | 979,00     | 37,28             | 37448                   | 1               | 37,28              | 979,00  | <b>979</b>  | 0,00    |
| 10  | 1019,00    | 121,50            | 38375                   | 1               | 121,50             | 1019,00 | <b>1019</b> | 0,00    |
| 14  | 1081,32    | 560,64            | 47666                   | 13              | 1159,06            | 1087,00 | <b>1087</b> | 0,00    |
| 18  | 1159,31    | 712,53            | 61058                   | 123             | 3780,03            | 1181,00 | <b>1181</b> | 0,00    |
| 22  | 1238,44    | 701,28            | 59242                   | 173             | 4473,31            | 1267,00 | <b>1267</b> | 0,00    |
| 26  | 1328,53    | 1698,11           | 66280                   | 136             | 7200,00            | 1330,91 | 1393        | 4,46    |
| 30  | 1405,45    | 835,70            | 60455                   | 300             | 7200,00            | 1427,28 | 1561        | 8,57    |
| 34  | 1500,69    | 979,27            | 55352                   | 198             | 7200,00            | 1512,14 | 1713        | 11,73   |
| 38  | 1584,56    | 2277,99           | 61268                   | 177             | 7200,00            | 1584,66 | 1858        | 14,71   |
| 42  | 1683,49    | 2366,37           | 58733                   | 53              | 7200,00            | 1683,56 | 1939        | 13,17   |
| 46  | 1770,32    | 1052,20           | 50664                   | 700             | 7200,00            | 1776,39 | 2045        | 13,13   |
| 50  | 1866,68    | 1380,55           | 50478                   | 300             | 7200,00            | 1874,45 | 2135        | 12,20   |
| 54  | 1955,99    | 1046,56           | 54554                   | 907             | 7200,00            | 1959,31 | 2209        | 11,30   |
| 58  | 2048,39    | 1205,71           | 57096                   | 166             | 7200,00            | 2048,51 | 2255        | 9,16    |
| 62  | 2144,48    | 943,16            | 49199                   | 483             | 7200,00            | 2145,23 | 2300        | 6,73    |
| 66  | 2243,67    | 669,15            | 48837                   | 900             | 7200,00            | 2247,42 | 2318        | 3,05    |
| 70  | 2336,19    | 777,43            | 43173                   | 33              | 1815,59            | 2345,00 | <b>2345</b> | 0,00    |
| 74  | 2433,06    | 697,39            | 56004                   | 541             | 7200,00            | 2454,66 | 2527        | 2,86    |
| 78  | 2534,63    | 923,21            | 55497                   | 366             | 7200,00            | 2536,82 | 2746        | 7,62    |
| 82  | 2629,00    | 1041,42           | 59688                   | 400             | 7200,00            | 2629,64 | 3097        | 15,09   |
| 86  | 2732,26    | 1273,08           | 60028                   | 50              | 7200,00            | 2732,41 | 3083        | 11,37   |
| 90  | 2834,29    | 1043,47           | 50439                   | 300             | 7200,00            | 2834,79 | 3221        | 11,99   |
| 94  | 2937,96    | 1261,91           | 58969                   | 400             | 7200,00            | 2938,46 | 3442        | 14,63   |
| 98  | 3039,59    | 1258,73           | 56847                   | 52              | 7200,00            | 3039,98 | 3680        | 17,39   |
| 102 | 3142,10    | 1235,48           | 56333                   | 137             | 7200,00            | 3143,63 | 3854        | 18,43   |
| 106 | 3242,71    | 2011,75           | 61547                   | 28              | 7200,00            | 3242,79 | 4049        | 19,91   |
| 110 | 3286,00    | 312,48            | 52756                   | 2094            | 7200,00            | 3293,00 | 4205        | 21,69   |
| 114 | 3397,50    | 240,47            | 63474                   | 3440            | 7200,00            | 3407,00 | 4303        | 20,82   |
| 118 | 3520,51    | 836,85            | 59877                   | 2570            | 7200,00            | 3537,00 | 3730        | 5,17    |
| 122 | 3737,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 3737,00 | <b>3737</b> | 0,00    |
| 126 | 3987,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 3987,00 | <b>3987</b> | 0,00    |
| 130 | 4221,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 4221,00 | <b>4221</b> | 0,00    |
| 134 | 4439,00    | 2027,01           | 48696                   | 3               | 2450,38            | 4439,00 | <b>4439</b> | 0,00    |
| 138 | 4641,00    | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 4641,00 | <b>4641</b> | 0,00    |
| 142 | 4827,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 4827,00 | <b>4827</b> | 0,00    |
| 146 | 4997,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 4997,00 | <b>4997</b> | 0,00    |
| 150 | 5151,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 5151,00 | <b>5151</b> | 0,00    |
| 154 | 5289,00    | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 5289,00 | <b>5289</b> | 0,00    |
| 158 | 5411,00    | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 5411,00 | <b>5411</b> | 0,00    |
| 162 | 5517,00    | 0,28              | 0                       | 1               | 0,28               | 5517,00 | <b>5517</b> | 0,00    |
| 166 | 5607,00    | 0,28              | 0                       | 1               | 0,28               | 5607,00 | <b>5607</b> | 0,00    |
| 170 | 5681,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 5681,00 | <b>5681</b> | 0,00    |
| 174 | 5739,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 5739,00 | <b>5739</b> | 0,00    |
| 178 | 5781,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 5781,00 | <b>5781</b> | 0,00    |
| 182 | 5807,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 5807,00 | <b>5807</b> | 0,00    |

\*Produzido por BC-F1.

Tabela A.24: Resultados para o grafo nr\_365\_size\_196 ( $|V| = 196, d = 0.15$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | 6768,96    | 1204,43           | 112166                  | 28              | 7200,00            | 6768,98 | 7036        | 3,80    |
| 6   | 1717,52    | 4520,66           | 75713                   | 21              | 7200,00            | 1717,56 | 2182        | 21,29   |
| 10  | 1251,76    | 722,82            | 52895                   | 833             | 7200,00            | 1252,63 | 1487        | 15,76   |
| 14  | 1246,43    | 844,55            | 50616                   | 1094            | 7200,00            | 1247,91 | 1300        | 4,01    |
| 18  | 1242,25    | 527,35            | 52367                   | 1847            | 7200,00            | 1243,71 | 1254        | 0,82    |
| 22  | 1237,74    | 132,12            | 23675                   | 5               | 147,00             | 1240,00 | <b>1240</b> | 0,00    |
| 26  | 1234,49    | 99,56             | 20391                   | 6               | 103,33             | 1236,00 | <b>1236</b> | 0,00    |
| 30  | 1234,11    | 89,98             | 23653                   | 3               | 94,86              | 1236,00 | <b>1236</b> | 0,00    |
| 34  | 1240,00    | 91,77             | 19889                   | 1               | 91,77              | 1240,00 | <b>1240</b> | 0,00    |
| 38  | 1246,00    | 103,63            | 20421                   | 1               | 103,63             | 1246,00 | <b>1246</b> | 0,00    |
| 42  | 1252,00    | 86,41             | 20355                   | 1               | 86,41              | 1252,00 | <b>1252</b> | 0,00    |
| 46  | 1260,00    | 99,53             | 20660                   | 1               | 99,53              | 1260,00 | <b>1260</b> | 0,00    |
| 50  | 1269,00    | 87,77             | 20263                   | 1               | 87,77              | 1269,00 | <b>1269</b> | 0,00    |
| 54  | 1279,00    | 102,25            | 20492                   | 1               | 102,25             | 1279,00 | <b>1279</b> | 0,00    |
| 58  | 1289,89    | 110,95            | 20713                   | 34              | 182,99             | 1293,00 | <b>1293</b> | 0,00    |
| 62  | 1303,30    | 112,37            | 19984                   | 5               | 121,71             | 1305,00 | <b>1305</b> | 0,00    |
| 66  | 1318,57    | 119,21            | 20185                   | 14              | 152,07             | 1321,00 | <b>1321</b> | 0,00    |
| 70  | 1335,00    | 111,62            | 24621                   | 18              | 189,68             | 1337,00 | <b>1337</b> | 0,00    |
| 74  | 1353,00    | 147,68            | 22475                   | 105             | 382,94             | 1357,00 | <b>1357</b> | 0,00    |
| 78  | 1371,38    | 158,76            | 20768                   | 3               | 168,56             | 1373,00 | <b>1373</b> | 0,00    |
| 82  | 1390,67    | 137,48            | 22493                   | 5483            | 2361,52            | 1399,00 | <b>1399</b> | 0,00    |
| 86  | 1408,71    | 133,24            | 23640                   | 3               | 143,77             | 1410,00 | <b>1410</b> | 0,00    |
| 90  | 1430,67    | 143,41            | 24197                   | 1595            | 1160,04            | 1441,00 | <b>1441</b> | 0,00    |
| 94  | 1452,24    | 120,47            | 24506                   | 826             | 582,65             | 1458,00 | <b>1458</b> | 0,00    |
| 98  | 1474,06    | 137,25            | 21866                   | 15              | 348,48             | 1478,00 | <b>1478</b> | 0,00    |
| 102 | 1496,00    | 141,73            | 25800                   | 13370           | 7200,00            | 1505,00 | 1508        | 0,20    |
| 106 | 1518,00    | 104,32            | 22021                   | 1               | 104,32             | 1518,00 | <b>1518</b> | 0,00    |
| 110 | 1550,38    | 391,32            | 28456                   | 35              | 1141,19            | 1558,00 | <b>1558</b> | 0,00    |
| 114 | 1587,48    | 350,93            | 38688                   | 2596            | 7200,00            | 1605,70 | 1617        | 0,70    |
| 118 | 1624,32    | 945,38            | 35287                   | 7578            | 7200,00            | 1634,87 | 1661        | 1,57    |
| 122 | 1660,86    | 253,41            | 27425                   | 20992           | 7200,00            | 1670,61 | 1679        | 0,50    |
| 126 | 1698,00    | 199,21            | 23607                   | 1               | 199,21             | 1698,00 | <b>1698</b> | 0,00    |
| 130 | 1743,55    | 397,51            | 28319                   | 63              | 1505,36            | 1752,00 | <b>1752</b> | 0,00    |
| 134 | 1791,39    | 408,45            | 35451                   | 1100            | 7200,00            | 1806,31 | 1831        | 1,35    |
| 138 | 1840,52    | 489,28            | 34977                   | 2017            | 7200,00            | 1848,22 | 1908        | 3,13    |
| 142 | 1891,18    | 422,68            | 35121                   | 1136            | 7200,00            | 1898,16 | 1943        | 2,31    |
| 146 | 1939,68    | 327,98            | 32813                   | 2696            | 7200,00            | 1952,26 | 1954        | 0,09    |
| 150 | 1988,19    | 231,10            | 20362                   | 18              | 300,44             | 1990,00 | <b>1990</b> | 0,00    |
| 154 | 2015,24    | 163,97            | 23518                   | 290             | 2704,02            | 2044,00 | <b>2044</b> | 0,00    |
| 158 | 2086,00    | 208,32            | 30828                   | 1197            | 7200,00            | 2112,29 | 2134        | 1,02    |
| 162 | 2232,00    | 249,53            | 21919                   | 9132            | 7200,00            | 2232,00 | 2240        | 0,36    |
| 166 | 2362,00    | 0,64              | 0                       | 1               | 0,64               | 2362,00 | <b>2362</b> | 0,00    |
| 170 | 2476,00    | 0,24              | 0                       | 1               | 0,24               | 2476,00 | <b>2476</b> | 0,00    |
| 174 | 2574,00    | 0,25              | 0                       | 1               | 0,25               | 2574,00 | <b>2574</b> | 0,00    |
| 178 | 2656,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 2656,00 | <b>2656</b> | 0,00    |
| 182 | 2722,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 2722,00 | <b>2722</b> | 0,00    |
| 186 | 2772,00    | 0,25              | 0                       | 1               | 0,25               | 2772,00 | <b>2772</b> | 0,00    |
| 190 | 2806,00    | 0,25              | 0                       | 1               | 0,25               | 2806,00 | <b>2806</b> | 0,00    |
| 194 | 2824,00    | 0,26              | 0                       | 1               | 0,26               | 2824,00 | <b>2824</b> | 0,00    |

Tabela A.25: Resultados para o grafo nr\_232\_size\_206 ( $|V| = 206, d = 0.31$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | 4153,16    | 928,92            | 85644                   | 14              | 7200,00            | 4153,61 | 4938        | 15,88   |
| 6   | 687,00     | 3,01              | 24217                   | 1               | 3,01               | 687,00  | <b>687</b>  | 0,00    |
| 10  | 713,18     | 16,20             | 34519                   | 1245            | 782,12             | 731,00  | <b>731</b>  | 0,00    |
| 14  | 739,36     | 25,35             | 25099                   | 2540            | 830,52             | 753,00  | <b>753</b>  | 0,00    |
| 18  | 768,00     | 26,92             | 19739                   | 1               | 26,92              | 768,00  | <b>768</b>  | 0,00    |
| 22  | 824,00     | 27,98             | 23931                   | 1               | 27,98              | 824,00  | <b>824</b>  | 0,00    |
| 26  | 914,05     | 171,76            | 39351                   | 119             | 953,60             | 926,00  | <b>926</b>  | 0,00    |
| 30  | 1004,87    | 201,58            | 48305                   | 1907            | 7200,00            | 1039,93 | 1096        | 5,12    |
| 34  | 1099,88    | 259,67            | 50931                   | 1374            | 7200,00            | 1138,05 | 1258        | 9,54    |
| 38  | 1196,10    | 559,21            | 52841                   | 788             | 7200,00            | 1227,59 | 1404        | 12,57   |
| 42  | 1286,94    | 237,15            | 45117                   | 1274            | 7200,00            | 1304,46 | 1534        | 14,96   |
| 46  | 1384,03    | 291,15            | 45097                   | 2000            | 7200,00            | 1406,14 | 1648        | 14,68   |
| 50  | 1476,96    | 368,44            | 46124                   | 1618            | 7200,00            | 1495,53 | 1746        | 14,35   |
| 54  | 1570,51    | 306,01            | 46731                   | 2255            | 7200,00            | 1588,47 | 1828        | 13,10   |
| 58  | 1667,51    | 373,89            | 45055                   | 2001            | 7200,00            | 1681,22 | 1894        | 11,23   |
| 62  | 1758,41    | 331,63            | 42689                   | 2001            | 7200,00            | 1764,55 | 1944        | 9,23    |
| 66  | 1850,65    | 214,84            | 45622                   | 2800            | 7200,00            | 1858,23 | 1978        | 6,05    |
| 70  | 1947,00    | 127,72            | 41737                   | 7282            | 7200,00            | 1952,86 | 1996        | 2,16    |
| 74  | 2065,00    | 241,17            | 47869                   | 1464            | 7200,00            | 2076,49 | 2123        | 2,19    |
| 78  | 2197,00    | 222,33            | 46530                   | 3156            | 7200,00            | 2233,66 | 2373        | 5,87    |
| 82  | 2329,00    | 243,76            | 51090                   | 1823            | 7200,00            | 2365,50 | 2604        | 9,16    |
| 86  | 2461,00    | 260,96            | 53455                   | 863             | 7200,00            | 2487,34 | 2818        | 11,73   |
| 90  | 2593,00    | 235,75            | 51023                   | 2700            | 7200,00            | 2642,84 | 3016        | 12,37   |
| 94  | 2725,00    | 263,68            | 54434                   | 1001            | 7200,00            | 2743,68 | 3198        | 14,21   |
| 98  | 2857,00    | 242,79            | 47590                   | 1700            | 7200,00            | 2896,84 | 3364        | 13,89   |
| 102 | 2989,00    | 242,09            | 52568                   | 1300            | 7200,00            | 3025,29 | 3514        | 13,91   |
| 106 | 3121,00    | 290,30            | 52860                   | 1100            | 7200,00            | 3153,00 | 3648        | 13,57   |
| 110 | 3253,00    | 226,98            | 46357                   | 1676            | 7200,00            | 3290,56 | 3766        | 12,62   |
| 114 | 3385,00    | 240,90            | 50404                   | 1961            | 7200,00            | 3422,59 | 3868        | 11,52   |
| 118 | 3517,00    | 233,58            | 46853                   | 3045            | 7200,00            | 3548,02 | 3954        | 10,27   |
| 122 | 3649,00    | 306,46            | 47325                   | 2604            | 7200,00            | 3672,15 | 4024        | 8,74    |
| 126 | 3781,00    | 611,97            | 49542                   | 2131            | 7200,00            | 3790,54 | 4078        | 7,05    |
| 130 | 3913,00    | 1127,48           | 56093                   | 1496            | 7200,00            | 3920,37 | 4116        | 4,75    |
| 134 | 4045,00    | 1462,64           | 53247                   | 2105            | 7200,00            | 4046,66 | 4138        | 2,21    |
| 138 | 4203,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 4203,00 | <b>4203</b> | 0,00    |
| 142 | 4469,00    | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 4469,00 | <b>4469</b> | 0,00    |
| 146 | 4719,00    | 0,28              | 0                       | 1               | 0,28               | 4719,00 | <b>4719</b> | 0,00    |
| 150 | 4953,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 4953,00 | <b>4953</b> | 0,00    |
| 154 | 5171,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 5171,00 | <b>5171</b> | 0,00    |
| 158 | 5373,00    | 0,28              | 0                       | 1               | 0,28               | 5373,00 | <b>5373</b> | 0,00    |
| 162 | 5559,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 5559,00 | <b>5559</b> | 0,00    |
| 166 | 5729,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 5729,00 | <b>5729</b> | 0,00    |
| 170 | 5883,00    | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 5883,00 | <b>5883</b> | 0,00    |
| 174 | 6021,00    | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 6021,00 | <b>6021</b> | 0,00    |
| 178 | 6143,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 6143,00 | <b>6143</b> | 0,00    |
| 182 | 6249,00    | 0,30              | 0                       | 1               | 0,30               | 6249,00 | <b>6249</b> | 0,00    |
| 186 | 6339,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 6339,00 | <b>6339</b> | 0,00    |
| 190 | 6413,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 6413,00 | <b>6413</b> | 0,00    |
| 194 | 6471,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 6471,00 | <b>6471</b> | 0,00    |
| 198 | 6513,00    | 0,27              | 0                       | 1               | 0,27               | 6513,00 | <b>6513</b> | 0,00    |
| 202 | 6539,00    | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 6539,00 | <b>6539</b> | 0,00    |

Tabela A.26: Resultados para o grafo nr\_279\_size\_209 ( $|V| = 209, d = 0.54$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2   | 3811,27    | 7200,00           | 59053                   | 1               | 7200,00            | 3811,27  | 4780         | 20,27   |
| 6   | 3775,00    | 5447,40           | 59490                   | 1               | 5447,40            | 3775,00  | <b>3775</b>  | 0,00    |
| 10  | 3751,99    | 7200,00           | 71609                   | 1               | 7200,00            | 3751,99  | 3783         | 0,82    |
| 14  | 3777,47    | 7200,00           | 71919                   | 1               | 7200,00            | 3777,47  | 3807         | 0,78    |
| 18  | 3822,90    | 7012,64           | 70959                   | 2               | 7200,00            | 3824,75  | 3839         | 0,37    |
| 22  | 3819,24    | 7200,00           | 68302                   | 1               | 7200,00            | 3819,24  | 3857         | 0,98    |
| 26  | 3811,14    | 7200,00           | 72130                   | 1               | 7200,00            | 3811,14  | 3877         | 1,70    |
| 30  | 3874,97    | 7200,00           | 59832                   | 1               | 7200,00            | 3874,97  | 3931         | 1,43    |
| 34  | 3922,09    | 7200,00           | 67147                   | 1               | 7200,00            | 3922,09  | 3966         | 1,11    |
| 38  | 3859,45    | 7200,00           | 64266                   | 1               | 7200,00            | 3859,45  | 3978         | 2,98    |
| 42  | 3925,44    | 7200,00           | 56564                   | 1               | 7200,00            | 3925,44  | 4010         | 2,11    |
| 46  | 4001,08    | 7200,00           | 58215                   | 1               | 7200,00            | 4001,08  | 4102         | 2,46    |
| 50  | 4073,74    | 7200,00           | 56559                   | 1               | 7200,00            | 4073,74  | 4196         | 2,91    |
| 54  | 4066,03    | 7200,00           | 54634                   | 1               | 7200,00            | 4066,03  | 4272         | 4,82    |
| 58  | 4148,16    | 7200,00           | 57523                   | 1               | 7200,00            | 4148,16  | 4330         | 4,20    |
| 62  | 4199,18    | 7200,00           | 59098                   | 1               | 7200,00            | 4199,18  | 4366         | 3,82    |
| 66  | 4278,88    | 7200,00           | 68350                   | 1               | 7200,00            | 4278,88  | 4384         | 2,40    |
| 70  | 4367,56    | 7200,00           | 69512                   | 1               | 7200,00            | 4367,56  | 4408         | 0,92    |
| 74  | 4492,95    | 7200,00           | 77192                   | 1               | 7200,00            | 4492,95  | 4528         | 0,77    |
| 78  | 4552,73    | 7200,00           | 78314                   | 1               | 7200,00            | 4552,73  | 4744         | 4,03    |
| 82  | 4822,87    | 7200,00           | 84076                   | 1               | 7200,00            | 4822,87  | 4946         | 2,49    |
| 86  | 5033,81    | 7200,00           | 83292                   | 1               | 7200,00            | 5033,81  | 5174         | 2,71    |
| 90  | 5238,20    | 7200,00           | 89060                   | 1               | 7200,00            | 5238,20  | 5428         | 3,50    |
| 94  | 5502,50    | 7200,00           | 85578                   | 1               | 7200,00            | 5502,50  | 5702         | 3,50    |
| 98  | 5612,00    | 7200,00           | 91557                   | 1               | 7200,00            | 5612,00  | 6012         | 6,65    |
| 102 | 6050,00    | 7200,00           | 95797                   | 1               | 7200,00            | 6050,00  | 6334         | 4,48    |
| 106 | 6472,00    | 7200,00           | 85094                   | 1               | 7200,00            | 6472,00  | 6654         | 2,74    |
| 110 | 6878,00    | 7200,00           | 85641                   | 1               | 7200,00            | 6878,00  | 6988         | 1,57    |
| 114 | 7268,00    | 7200,00           | 76321                   | 1               | 7200,00            | 7268,00  | 7324         | 0,76    |
| 118 | 7642,00    | 7200,00           | 88008                   | 1               | 7200,00            | 7642,00  | 7672         | 0,39    |
| 122 | 8000,00    | 7200,00           | 76209                   | 1               | 7200,00            | 8000,00  | 8006         | 0,07    |
| 126 | 8342,00    | 0,51              | 0                       | 1               | 0,51               | 8342,00  | <b>8342</b>  | 0,00    |
| 130 | 8668,00    | 0,50              | 0                       | 1               | 0,50               | 8668,00  | <b>8668</b>  | 0,00    |
| 134 | 8978,00    | 0,49              | 0                       | 1               | 0,49               | 8978,00  | <b>8978</b>  | 0,00    |
| 138 | 9272,00    | 0,47              | 0                       | 1               | 0,47               | 9272,00  | <b>9272</b>  | 0,00    |
| 142 | 9550,00    | 0,47              | 0                       | 1               | 0,47               | 9550,00  | <b>9550</b>  | 0,00    |
| 146 | 9812,00    | 0,47              | 0                       | 1               | 0,47               | 9812,00  | <b>9812</b>  | 0,00    |
| 150 | 10058,00   | 0,46              | 0                       | 1               | 0,46               | 10058,00 | <b>10058</b> | 0,00    |
| 154 | 10288,00   | 0,45              | 0                       | 1               | 0,45               | 10288,00 | <b>10288</b> | 0,00    |
| 158 | 10502,00   | 0,43              | 0                       | 1               | 0,43               | 10502,00 | <b>10502</b> | 0,00    |
| 162 | 10700,00   | 0,43              | 0                       | 1               | 0,43               | 10700,00 | <b>10700</b> | 0,00    |
| 166 | 10882,00   | 0,42              | 0                       | 1               | 0,42               | 10882,00 | <b>10882</b> | 0,00    |
| 170 | 11048,00   | 0,43              | 0                       | 1               | 0,43               | 11048,00 | <b>11048</b> | 0,00    |
| 174 | 11198,00   | 0,39              | 0                       | 1               | 0,39               | 11198,00 | <b>11198</b> | 0,00    |
| 178 | 11332,00   | 0,38              | 0                       | 1               | 0,38               | 11332,00 | <b>11332</b> | 0,00    |
| 182 | 11450,00   | 0,34              | 0                       | 1               | 0,34               | 11450,00 | <b>11450</b> | 0,00    |
| 186 | 11552,00   | 0,36              | 0                       | 1               | 0,36               | 11552,00 | <b>11552</b> | 0,00    |
| 190 | 11638,00   | 0,35              | 0                       | 1               | 0,35               | 11638,00 | <b>11638</b> | 0,00    |
| 194 | 11708,00   | 0,34              | 0                       | 1               | 0,34               | 11708,00 | <b>11708</b> | 0,00    |
| 198 | 11762,00   | 0,33              | 0                       | 1               | 0,33               | 11762,00 | <b>11762</b> | 0,00    |
| 202 | 11800,00   | 0,34              | 0                       | 1               | 0,34               | 11800,00 | <b>11800</b> | 0,00    |
| 206 | 11822,00   | 0,34              | 0                       | 1               | 0,34               | 11822,00 | <b>11822</b> | 0,00    |



Tabela A.27: Resultados para o grafo nr\_489\_size\_211 ( $|V| = 211, d = 0.68$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Ineqs.<br>Triangulares | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-------------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2   | 3533,60    | 7200,00           | 62283                   | 1               | 7200,00            | 3533,60  | 4404         | 19,76   |
| 6   | 3929,99    | 7200,00           | 82882                   | 1               | 7200,00            | 3929,99  | 3972         | 1,06    |
| 10  | 3934,74    | 6075,19           | 73457                   | 2               | 7200,00            | 3934,82  | 3940         | 0,13    |
| 14  | 3934,00    | 6767,53           | 74903                   | 1               | 6767,53            | 3934,00  | <b>3934</b>  | 0,00    |
| 18  | 3111,98    | 7200,00           | 51610                   | 1               | 7200,00            | 3111,98  | 3938         | 20,98   |
| 22  | 3940,18    | 7072,69           | 78735                   | 3               | 7117,23            | 3942,00  | <b>3942</b>  | 0,00    |
| 26  | 3829,07    | 7200,00           | 71706                   | 1               | 7200,00            | 3829,07  | 3948         | 3,01    |
| 30  | 3945,01    | 7200,00           | 84377                   | 1               | 7200,00            | 3945,01  | 3956         | 0,28    |
| 34  | 3957,54    | 7200,00           | 84539                   | 1               | 7200,00            | 3957,54  | 3966         | 0,21    |
| 38  | 3974,14    | 6720,23           | 78854                   | 3               | 7150,70            | 3976,00  | <b>3976</b>  | 0,00    |
| 42  | 4014,49    | 5323,14           | 65806                   | 3               | 5389,08            | 4016,00  | <b>4016</b>  | 0,00    |
| 46  | 4118,00    | 3477,32           | 59021                   | 1               | 3477,32            | 4118,00  | <b>4118</b>  | 0,00    |
| 50  | 4252,00    | 5877,36           | 77917                   | 1               | 5877,36            | 4252,00  | <b>4252</b>  | 0,00    |
| 54  | 4383,37    | 7200,00           | 77250                   | 1               | 7200,00            | 4383,37  | 4486         | 2,29    |
| 58  | 4602,40    | 7200,00           | 87780                   | 1               | 7200,00            | 4602,40  | 4758         | 3,27    |
| 62  | 4836,40    | 7200,00           | 102405                  | 1               | 7200,00            | 4836,40  | 5022         | 3,70    |
| 66  | 5206,92    | 7200,00           | 103817                  | 1               | 7200,00            | 5206,92  | 5376         | 3,15    |
| 70  | 5513,47    | 7200,00           | 106007                  | 1               | 7200,00            | 5513,47  | 5748         | 4,08    |
| 74  | 5516,00    | 7200,00           | 104539                  | 1               | 7200,00            | 5516,00  | 6138         | 10,13   |
| 78  | 6058,00    | 7200,00           | 113897                  | 1               | 7200,00            | 6058,00  | 6548         | 7,48    |
| 82  | 6584,00    | 7200,00           | 111632                  | 1               | 7200,00            | 6584,00  | 6970         | 5,54    |
| 86  | 7094,00    | 7200,00           | 114131                  | 1               | 7200,00            | 7094,00  | 7382         | 3,90    |
| 90  | 7588,00    | 7200,00           | 103908                  | 1               | 7200,00            | 7588,00  | 7788         | 2,57    |
| 94  | 8066,00    | 7200,00           | 124367                  | 1               | 7200,00            | 8066,00  | 8188         | 1,49    |
| 98  | 8528,00    | 7200,00           | 124572                  | 1               | 7200,00            | 8528,00  | 8614         | 1,00    |
| 102 | 8974,00    | 7200,00           | 96832                   | 1               | 7200,00            | 8974,00  | 9024         | 0,55    |
| 106 | 9404,00    | 7200,00           | 103373                  | 1               | 7200,00            | 9404,00  | 9434         | 0,32    |
| 110 | 9818,00    | 7200,00           | 101553                  | 1               | 7200,00            | 9818,00  | 9826         | 0,08    |
| 114 | 10216,00   | 186,74            | 46130                   | 2               | 7200,00            | 10216,00 | 10218        | 0,02    |
| 118 | 10598,00   | 0,47              | 0                       | 1               | 0,47               | 10598,00 | <b>10598</b> | 0,00    |
| 122 | 10964,00   | 0,46              | 0                       | 1               | 0,46               | 10964,00 | <b>10964</b> | 0,00    |
| 126 | 11314,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 11314,00 | <b>11314</b> | 0,00    |
| 130 | 11648,00   | 0,45              | 0                       | 1               | 0,45               | 11648,00 | <b>11648</b> | 0,00    |
| 134 | 11966,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 11966,00 | <b>11966</b> | 0,00    |
| 138 | 12268,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 12268,00 | <b>12268</b> | 0,00    |
| 142 | 12554,00   | 0,30              | 0                       | 1               | 0,30               | 12554,00 | <b>12554</b> | 0,00    |
| 146 | 12824,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 12824,00 | <b>12824</b> | 0,00    |
| 150 | 13078,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 13078,00 | <b>13078</b> | 0,00    |
| 154 | 13316,00   | 0,30              | 0                       | 1               | 0,30               | 13316,00 | <b>13316</b> | 0,00    |
| 158 | 13538,00   | 0,39              | 0                       | 1               | 0,39               | 13538,00 | <b>13538</b> | 0,00    |
| 162 | 13744,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 13744,00 | <b>13744</b> | 0,00    |
| 166 | 13934,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 13934,00 | <b>13934</b> | 0,00    |
| 170 | 14108,00   | 0,30              | 0                       | 1               | 0,30               | 14108,00 | <b>14108</b> | 0,00    |
| 174 | 14266,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14266,00 | <b>14266</b> | 0,00    |
| 178 | 14408,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14408,00 | <b>14408</b> | 0,00    |
| 182 | 14534,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14534,00 | <b>14534</b> | 0,00    |
| 186 | 14644,00   | 0,32              | 0                       | 1               | 0,32               | 14644,00 | <b>14644</b> | 0,00    |
| 190 | 14738,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14738,00 | <b>14738</b> | 0,00    |
| 194 | 14816,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14816,00 | <b>14816</b> | 0,00    |
| 198 | 14878,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14878,00 | <b>14878</b> | 0,00    |
| 202 | 14924,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14924,00 | <b>14924</b> | 0,00    |
| 206 | 14954,00   | 0,29              | 0                       | 1               | 0,29               | 14954,00 | <b>14954</b> | 0,00    |
| 210 | 14968,00   | 0,70              | 0                       | 1               | 0,70               | 14968,00 | <b>14968</b> | 0,00    |

## Apêndice B

### Resultados Detalhados do Algoritmo *Branch-and-Price*

Este apêndice apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo *Branch-and-Price* em todas as instâncias. As colunas das Tabelas B.1-B.27 possuem os seguintes significados: **p** representa o número de *clusters*; **LB Raiz** é o limite inferior obtido no nó raiz; **Tempo Raiz (s)** e **Tempo Total (s)** determinam, respectivamente, os tempos despendidos no nó raiz e na execução total do algoritmo; **#Nós Abertos** representa número de nós abertos durante a otimização; por fim, **LB** e **UB** determinam, respectivamente, os limites inferior e superior produzidos pelo algoritmo, enquanto que **Gap (%)** mostra a diferença percentual entre os limites, i.e., **Gap (%)**=100(UB-LB)/UB.

Em algumas instâncias, o algoritmo não foi capaz de produzir sequer um limite inferior dentro do tempo limite (duas horas). Nesses casos, as colunas **LB Raiz**, **LB** e **Gap (%)** possuem o símbolo -.

Tabela B.1: Resultados para o grafo nr\_1059\_size\_55 ( $|V| = 55, d = 0, 19$ ).

| <b>p</b> | <b>LB Raiz</b> | <b>Tempo Raiz (s)</b> | <b>#Nós Abertos</b> | <b>Tempo Total (s)</b> | <b>LB</b> | <b>UB</b>  | <b>Gap (%)</b> |
|----------|----------------|-----------------------|---------------------|------------------------|-----------|------------|----------------|
| 2        | -              | 7200,00               | 1                   | 7200,00                | -         | 513        | -              |
| 6        | 133,00         | 101,84                | 1                   | 101,84                 | 133,00    | <b>133</b> | 0,00           |
| 10       | 112,00         | 39,99                 | 1                   | 39,99                  | 112,00    | <b>112</b> | 0,00           |
| 14       | 108,00         | 57,36                 | 1                   | 57,36                  | 108,00    | <b>108</b> | 0,00           |
| 18       | 113,00         | 119,50                | 1                   | 119,50                 | 113,00    | <b>113</b> | 0,00           |
| 22       | 121,00         | 45,64                 | 1                   | 45,64                  | 121,00    | <b>121</b> | 0,00           |
| 26       | 134,00         | 3,97                  | 3                   | 22,91                  | 135,00    | <b>135</b> | 0,00           |
| 30       | 150,00         | 4,75                  | 21                  | 136,16                 | 153,00    | <b>153</b> | 0,00           |
| 34       | 168,10         | 6,44                  | 13                  | 57,52                  | 171,00    | <b>171</b> | 0,00           |
| 38       | 188,50         | 5,96                  | 1107                | 5012,23                | 199,00    | <b>199</b> | 0,00           |
| 42       | 208,90         | 8,93                  | 1                   | 8,93                   | 209,00    | <b>209</b> | 0,00           |
| 46       | 243,00         | 3,93                  | 1                   | 3,93                   | 243,00    | <b>243</b> | 0,00           |
| 50       | 273,00         | 2,44                  | 1                   | 2,44                   | 273,00    | <b>273</b> | 0,00           |
| 54       | 287,00         | 0,09                  | 1                   | 0,09                   | 287,00    | <b>287</b> | 0,00           |

Tabela B.2: Resultados para o grafo nr\_369\_size\_60 ( $|V| = 60, d = 0, 27$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB     | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|--------|------------|---------|
| 2  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -      | 614        | -       |
| 6  | 282,00     | 3420,41           | 1               | 3420,41            | 282,00 | <b>282</b> | 0,00    |
| 10 | 250,00     | 304,39            | 1               | 304,39             | 250,00 | <b>250</b> | 0,00    |
| 14 | 247,00     | 1246,60           | 1               | 1246,60            | 247,00 | <b>247</b> | 0,00    |
| 18 | 251,00     | 1146,47           | 1               | 1146,47            | 251,00 | <b>251</b> | 0,00    |
| 22 | 257,00     | 1112,17           | 1               | 1112,17            | 257,00 | <b>257</b> | 0,00    |
| 26 | 265,00     | 1037,99           | 1               | 1037,99            | 265,00 | <b>265</b> | 0,00    |
| 30 | 274,50     | 2073,13           | 1               | 2073,13            | 275,00 | <b>275</b> | 0,00    |
| 34 | 287,00     | 691,55            | 35              | 4042,23            | 290,00 | <b>290</b> | 0,00    |
| 38 | 301,00     | 378,25            | 1               | 378,25             | 301,00 | <b>301</b> | 0,00    |
| 42 | 331,00     | 25,75             | 1               | 25,75              | 331,00 | <b>331</b> | 0,00    |
| 46 | 369,00     | 25,64             | 1               | 25,64              | 369,00 | <b>369</b> | 0,00    |
| 50 | 419,00     | 10,72             | 1               | 10,72              | 419,00 | <b>419</b> | 0,00    |
| 54 | 453,00     | 3,86              | 1               | 3,86               | 453,00 | <b>453</b> | 0,00    |
| 58 | 471,00     | 2,15              | 1               | 2,15               | 471,00 | <b>471</b> | 0,00    |

Tabela B.3: Resultados para o grafo nr\_492\_size\_61 ( $|V| = 61, d = 0, 62$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 112,00     | 16,07             | 1               | 16,07              | 112,00  | <b>112</b>  | 0,00    |
| 6  | 89,50      | 6,12              | 7               | 7200,00            | 90,00   | 94          | 4,26    |
| 10 | 111,50     | 5,18              | 5               | 7200,00            | 111,50  | 124         | 10,08   |
| 14 | 133,50     | 8,57              | 3               | 7200,00            | 133,50  | 138         | 3,26    |
| 18 | 196,00     | 11,00             | 1               | 11,00              | 196,00  | <b>196</b>  | 0,00    |
| 22 | 348,00     | 3,83              | 1               | 3,83               | 348,00  | <b>348</b>  | 0,00    |
| 26 | 498,00     | 2,35              | 1               | 2,35               | 498,00  | <b>498</b>  | 0,00    |
| 30 | 632,00     | 5,65              | 1               | 5,65               | 632,00  | <b>632</b>  | 0,00    |
| 34 | 750,00     | 5,44              | 1               | 5,44               | 750,00  | <b>750</b>  | 0,00    |
| 38 | 852,00     | 5,09              | 1               | 5,09               | 852,00  | <b>852</b>  | 0,00    |
| 42 | 938,00     | 5,56              | 1               | 5,56               | 938,00  | <b>938</b>  | 0,00    |
| 46 | 1008,00    | 5,42              | 1               | 5,42               | 1008,00 | <b>1008</b> | 0,00    |
| 50 | 1062,00    | 9,09              | 1               | 9,09               | 1062,00 | <b>1062</b> | 0,00    |
| 54 | 1100,00    | 4,46              | 1               | 4,46               | 1100,00 | <b>1100</b> | 0,00    |
| 58 | 1122,00    | 1,35              | 1               | 1,35               | 1122,00 | <b>1122</b> | 0,00    |

Tabela B.4: Resultados para o grafo nr\_438\_size\_72 ( $|V| = 72, d = 0, 26$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB     | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|--------|------------|---------|
| 2  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -      | 708        | -       |
| 6  | 263,00     | 926,77            | 1               | 926,77             | 263,00 | <b>263</b> | 0,00    |
| 10 | 244,00     | 453,25            | 1               | 453,25             | 244,00 | <b>244</b> | 0,00    |
| 14 | 243,00     | 3518,35           | 1               | 3518,35            | 243,00 | <b>243</b> | 0,00    |
| 18 | 248,00     | 2207,25           | 1               | 2207,25            | 248,00 | <b>248</b> | 0,00    |
| 22 | 261,50     | 899,70            | 77              | 7200,00            | 265,00 | 266        | 0,38    |
| 26 | 276,00     | 912,40            | 1               | 912,40             | 276,00 | <b>276</b> | 0,00    |
| 30 | 294,40     | 1851,71           | 1               | 1851,71            | 295,00 | <b>295</b> | 0,00    |
| 34 | 316,50     | 70,75             | 1               | 70,75              | 317,00 | <b>317</b> | 0,00    |
| 38 | 342,50     | 109,58            | 25              | 1797,35            | 348,00 | <b>348</b> | 0,00    |
| 42 | 368,50     | 55,79             | 51              | 7200,00            | 373,00 | 375        | 0,53    |
| 46 | 394,50     | 218,09            | 1               | 218,09             | 395,00 | <b>395</b> | 0,00    |
| 50 | 427,00     | 52,02             | 1               | 52,02              | 427,00 | <b>427</b> | 0,00    |
| 54 | 499,00     | 11,65             | 1               | 11,65              | 499,00 | <b>499</b> | 0,00    |
| 58 | 565,00     | 15,36             | 1               | 15,36              | 565,00 | <b>565</b> | 0,00    |
| 62 | 615,00     | 30,11             | 1               | 30,11              | 615,00 | <b>615</b> | 0,00    |
| 66 | 649,00     | 10,18             | 1               | 10,18              | 649,00 | <b>649</b> | 0,00    |
| 70 | 667,00     | 2,25              | 1               | 2,25               | 667,00 | <b>667</b> | 0,00    |

Tabela B.5: Resultados para o grafo nr\_238\_size\_78 ( $|V| = 78, d = 0, 88$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 148,00     | 33,96             | 1               | 33,96              | 148,00  | <b>148</b>  | 0,00    |
| 6  | 163,00     | 55,29             | 1               | 55,29              | 163,00  | <b>163</b>  | 0,00    |
| 10 | 323,00     | 83,53             | 1               | 83,53              | 323,00  | <b>323</b>  | 0,00    |
| 14 | 571,00     | 47,24             | 1               | 47,25              | 571,00  | <b>571</b>  | 0,00    |
| 18 | 821,00     | 29,12             | 1               | 29,12              | 821,00  | <b>821</b>  | 0,00    |
| 22 | 1055,00    | 56,99             | 1               | 56,99              | 1055,00 | <b>1055</b> | 0,00    |
| 26 | 1273,00    | 32,71             | 1               | 32,71              | 1273,00 | <b>1273</b> | 0,00    |
| 30 | 1475,00    | 24,36             | 1               | 24,36              | 1475,00 | <b>1475</b> | 0,00    |
| 34 | 1661,00    | 19,63             | 1               | 19,63              | 1661,00 | <b>1661</b> | 0,00    |
| 38 | 1831,00    | 36,30             | 1               | 36,30              | 1831,00 | <b>1831</b> | 0,00    |
| 42 | 1985,00    | 27,71             | 1               | 27,71              | 1985,00 | <b>1985</b> | 0,00    |
| 46 | 2123,00    | 14,47             | 1               | 14,47              | 2123,00 | <b>2123</b> | 0,00    |
| 50 | 2245,00    | 13,57             | 1               | 13,57              | 2245,00 | <b>2245</b> | 0,00    |
| 54 | 2351,00    | 16,33             | 1               | 16,33              | 2351,00 | <b>2351</b> | 0,00    |
| 58 | 2441,00    | 15,79             | 1               | 15,79              | 2441,00 | <b>2441</b> | 0,00    |
| 62 | 2515,00    | 16,21             | 1               | 16,21              | 2515,00 | <b>2515</b> | 0,00    |
| 66 | 2573,00    | 36,62             | 1               | 36,62              | 2573,00 | <b>2573</b> | 0,00    |
| 70 | 2615,00    | 28,47             | 1               | 28,47              | 2615,00 | <b>2615</b> | 0,00    |
| 74 | 2641,00    | 4,51              | 1               | 4,51               | 2641,00 | <b>2641</b> | 0,00    |

Tabela B.6: Resultados para o grafo nr\_522\_size\_85 ( $|V| = 85, d = 0, 44$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 909         | -       |
| 6  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 618         | -       |
| 10 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 614         | -       |
| 14 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 621         | -       |
| 18 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 630         | -       |
| 22 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 643         | -       |
| 26 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 669         | -       |
| 30 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 687         | -       |
| 34 | 705,00     | 3973,53           | 1               | 3973,53            | 705,00  | <b>705</b>  | 0,00    |
| 38 | 737,00     | 133,83            | 1               | 133,83             | 737,00  | <b>737</b>  | 0,00    |
| 42 | 799,00     | 471,43            | 1               | 471,43             | 799,00  | <b>799</b>  | 0,00    |
| 46 | 883,00     | 287,40            | 1               | 287,40             | 883,00  | <b>883</b>  | 0,00    |
| 50 | 977,00     | 52,30             | 1               | 52,30              | 977,00  | <b>977</b>  | 0,00    |
| 54 | 1085,00    | 79,06             | 1               | 79,06              | 1085,00 | <b>1085</b> | 0,00    |
| 58 | 1203,00    | 19,06             | 1               | 19,06              | 1203,00 | <b>1203</b> | 0,00    |
| 62 | 1305,00    | 23,12             | 1               | 23,12              | 1305,00 | <b>1305</b> | 0,00    |
| 66 | 1391,00    | 23,80             | 1               | 23,80              | 1391,00 | <b>1391</b> | 0,00    |
| 70 | 1461,00    | 23,77             | 1               | 23,77              | 1461,00 | <b>1461</b> | 0,00    |
| 74 | 1515,00    | 17,72             | 1               | 17,72              | 1515,00 | <b>1515</b> | 0,00    |
| 78 | 1553,00    | 18,48             | 1               | 18,48              | 1553,00 | <b>1553</b> | 0,00    |
| 82 | 1575,00    | 4,68              | 1               | 4,68               | 1575,00 | <b>1575</b> | 0,00    |

Tabela B.7: Resultados para o grafo nr\_173\_size\_86 ( $|V| = 86, d = 0, 19$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB     | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|--------|------------|---------|
| 2  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -      | 1171       | -       |
| 6  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -      | 334        | -       |
| 10 | 276,00     | 120,10            | 1               | 120,10             | 276,00 | <b>276</b> | 0,00    |
| 14 | 261,00     | 191,24            | 1               | 191,24             | 261,00 | <b>261</b> | 0,00    |
| 18 | 257,00     | 139,01            | 1               | 139,01             | 257,00 | <b>257</b> | 0,00    |
| 22 | 255,00     | 130,44            | 1               | 130,44             | 255,00 | <b>255</b> | 0,00    |
| 26 | 257,00     | 375,29            | 1               | 375,29             | 257,00 | <b>257</b> | 0,00    |
| 30 | 261,00     | 523,25            | 1               | 523,25             | 261,00 | <b>261</b> | 0,00    |
| 34 | 267,00     | 497,95            | 1               | 497,95             | 267,00 | <b>267</b> | 0,00    |
| 38 | 281,86     | 123,58            | 81              | 6934,45            | 287,00 | <b>287</b> | 0,00    |
| 42 | 298,00     | 191,78            | 1               | 191,78             | 298,00 | <b>298</b> | 0,00    |
| 46 | 327,00     | 50,05             | 1               | 50,05              | 327,00 | <b>327</b> | 0,00    |
| 50 | 363,16     | 72,97             | 71              | 2797,85            | 372,00 | <b>372</b> | 0,00    |
| 54 | 399,37     | 71,33             | 215             | 7200,00            | 413,80 | 430        | 3,77    |
| 58 | 435,58     | 88,54             | 195             | 7200,00            | 449,60 | 471        | 4,54    |
| 62 | 471,79     | 114,65            | 145             | 7200,00            | 481,06 | 486        | 1,02    |
| 66 | 508,00     | 26,48             | 1               | 26,48              | 508,00 | <b>508</b> | 0,00    |
| 70 | 568,00     | 11,41             | 1               | 11,41              | 568,00 | <b>568</b> | 0,00    |
| 74 | 626,00     | 13,62             | 1               | 13,62              | 626,00 | <b>626</b> | 0,00    |
| 78 | 668,00     | 14,87             | 1               | 14,87              | 668,00 | <b>668</b> | 0,00    |
| 82 | 694,00     | 3,20              | 1               | 3,20               | 694,00 | <b>694</b> | 0,00    |

Tabela B.8: Resultados para o grafo nr\_978\_size\_92 ( $|V| = 92, d = 0, 76$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 344,00     | 219,02            | 1               | 219,02             | 344,00  | <b>344</b>  | 0,00    |
| 6  | 312,50     | 387,61            | 5               | 7200,00            | 312,50  | 318         | 1,73    |
| 10 | 338,50     | 162,31            | 7               | 7200,00            | 341,00  | 356         | 4,21    |
| 14 | 364,50     | 71,57             | 5               | 7200,00            | 364,50  | 378         | 3,57    |
| 18 | 431,00     | 27,61             | 1               | 27,61              | 431,00  | <b>431</b>  | 0,00    |
| 22 | 697,00     | 24,86             | 1               | 24,86              | 697,00  | <b>697</b>  | 0,00    |
| 26 | 971,00     | 33,68             | 1               | 33,68              | 971,00  | <b>971</b>  | 0,00    |
| 30 | 1229,00    | 27,61             | 1               | 27,61              | 1229,00 | <b>1229</b> | 0,00    |
| 34 | 1471,00    | 31,56             | 1               | 31,56              | 1471,00 | <b>1471</b> | 0,00    |
| 38 | 1697,00    | 26,77             | 1               | 26,77              | 1697,00 | <b>1697</b> | 0,00    |
| 42 | 1907,00    | 19,15             | 1               | 19,15              | 1907,00 | <b>1907</b> | 0,00    |
| 46 | 2101,00    | 39,14             | 1               | 39,14              | 2101,00 | <b>2101</b> | 0,00    |
| 50 | 2279,00    | 34,53             | 1               | 34,53              | 2279,00 | <b>2279</b> | 0,00    |
| 54 | 2441,00    | 39,08             | 1               | 39,08              | 2441,00 | <b>2441</b> | 0,00    |
| 58 | 2587,00    | 27,51             | 1               | 27,51              | 2587,00 | <b>2587</b> | 0,00    |
| 62 | 2717,00    | 25,44             | 1               | 25,44              | 2717,00 | <b>2717</b> | 0,00    |
| 66 | 2831,00    | 35,91             | 1               | 35,91              | 2831,00 | <b>2831</b> | 0,00    |
| 70 | 2929,00    | 31,19             | 1               | 31,19              | 2929,00 | <b>2929</b> | 0,00    |
| 74 | 3011,00    | 31,96             | 1               | 31,96              | 3011,00 | <b>3011</b> | 0,00    |
| 78 | 3077,00    | 26,85             | 1               | 26,85              | 3077,00 | <b>3077</b> | 0,00    |
| 82 | 3127,00    | 34,07             | 1               | 34,07              | 3127,00 | <b>3127</b> | 0,00    |
| 86 | 3161,00    | 20,17             | 1               | 20,17              | 3161,00 | <b>3161</b> | 0,00    |
| 90 | 3179,00    | 7,18              | 1               | 7,18               | 3179,00 | <b>3179</b> | 0,00    |

Tabela B.9: Resultados para o grafo nr\_317\_size\_95 ( $|V| = 95, d = 0, 82$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2  | 338,00     | 89,75             | 1               | 89,75              | 338,00  | <b>338</b>  | 0,00    |
| 6  | 314,00     | 56,55             | 1               | 56,55              | 314,00  | <b>314</b>  | 0,00    |
| 10 | 332,00     | 91,99             | 1               | 91,99              | 332,00  | <b>332</b>  | 0,00    |
| 14 | 440,00     | 92,05             | 1               | 92,05              | 440,00  | <b>440</b>  | 0,00    |
| 18 | 666,00     | 79,38             | 1               | 79,38              | 666,00  | <b>666</b>  | 0,00    |
| 22 | 946,00     | 43,33             | 1               | 43,33              | 946,00  | <b>946</b>  | 0,00    |
| 26 | 1232,00    | 31,31             | 1               | 31,31              | 1232,00 | <b>1232</b> | 0,00    |
| 30 | 1502,00    | 38,38             | 1               | 38,38              | 1502,00 | <b>1502</b> | 0,00    |
| 34 | 1756,00    | 66,42             | 1               | 66,42              | 1756,00 | <b>1756</b> | 0,00    |
| 38 | 1994,00    | 53,95             | 1               | 53,95              | 1994,00 | <b>1994</b> | 0,00    |
| 42 | 2216,00    | 41,57             | 1               | 41,57              | 2216,00 | <b>2216</b> | 0,00    |
| 46 | 2422,00    | 50,13             | 1               | 50,13              | 2422,00 | <b>2422</b> | 0,00    |
| 50 | 2612,00    | 34,56             | 1               | 34,56              | 2612,00 | <b>2612</b> | 0,00    |
| 54 | 2786,00    | 37,30             | 1               | 37,30              | 2786,00 | <b>2786</b> | 0,00    |
| 58 | 2944,00    | 41,06             | 1               | 41,06              | 2944,00 | <b>2944</b> | 0,00    |
| 62 | 3086,00    | 37,95             | 1               | 37,95              | 3086,00 | <b>3086</b> | 0,00    |
| 66 | 3212,00    | 39,28             | 1               | 39,28              | 3212,00 | <b>3212</b> | 0,00    |
| 70 | 3322,00    | 42,14             | 1               | 42,14              | 3322,00 | <b>3322</b> | 0,00    |
| 74 | 3416,00    | 54,41             | 1               | 54,41              | 3416,00 | <b>3416</b> | 0,00    |
| 78 | 3494,00    | 40,31             | 1               | 40,31              | 3494,00 | <b>3494</b> | 0,00    |
| 82 | 3556,00    | 28,65             | 1               | 28,65              | 3556,00 | <b>3556</b> | 0,00    |
| 86 | 3602,00    | 29,61             | 1               | 29,61              | 3602,00 | <b>3602</b> | 0,00    |
| 90 | 3632,00    | 21,03             | 1               | 21,03              | 3632,00 | <b>3632</b> | 0,00    |
| 94 | 3646,00    | 0,10              | 1               | 0,10               | 3646,00 | <b>3646</b> | 0,00    |

Tabela B.10: Resultados para o grafo nr\_630\_size\_102 ( $|V| = 102, d = 0, 15$ ).

| P  | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB     | UB         | Gap (%) |
|----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|--------|------------|---------|
| 2  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -      | 1962       | -       |
| 6  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -      | 509        | -       |
| 10 | 355,00     | 6009,05           | 1               | 6009,05            | 355,00 | <b>355</b> | 0,00    |
| 14 | 316,00     | 1163,38           | 1               | 1163,38            | 316,00 | <b>316</b> | 0,00    |
| 18 | 309,00     | 459,66            | 1               | 459,66             | 309,00 | <b>309</b> | 0,00    |
| 22 | 308,00     | 2485,49           | 1               | 2485,49            | 308,00 | <b>308</b> | 0,00    |
| 26 | 312,00     | 1997,47           | 1               | 1997,47            | 312,00 | <b>312</b> | 0,00    |
| 30 | 318,00     | 1137,23           | 5               | 3819,23            | 319,00 | <b>319</b> | 0,00    |
| 34 | 326,00     | 1054,55           | 5               | 3398,14            | 327,00 | <b>327</b> | 0,00    |
| 38 | 335,50     | 1168,42           | 1               | 1168,42            | 336,00 | <b>336</b> | 0,00    |
| 42 | 345,50     | 963,81            | 1               | 963,81             | 346,00 | <b>346</b> | 0,00    |
| 46 | 356,57     | 1125,12           | 3               | 3444,20            | 358,00 | <b>358</b> | 0,00    |
| 50 | 368,00     | 754,12            | 1               | 754,12             | 368,00 | <b>368</b> | 0,00    |
| 54 | 384,00     | 686,60            | 53              | 7200,00            | 388,00 | 389        | 0,26    |
| 58 | 400,00     | 375,41            | 1               | 375,41             | 400,00 | <b>400</b> | 0,00    |
| 62 | 418,00     | 525,04            | 63              | 7200,00            | 422,00 | 425        | 0,71    |
| 66 | 436,00     | 196,42            | 1               | 196,42             | 436,00 | <b>436</b> | 0,00    |
| 70 | 459,86     | 145,77            | 17              | 3210,65            | 465,00 | <b>465</b> | 0,00    |
| 74 | 487,57     | 96,21             | 75              | 7200,00            | 496,36 | 507        | 2,10    |
| 78 | 515,29     | 99,57             | 75              | 7200,00            | 522,60 | 531        | 1,58    |
| 82 | 543,00     | 106,11            | 1               | 106,11             | 543,00 | <b>543</b> | 0,00    |
| 86 | 615,00     | 33,57             | 1               | 33,57              | 615,00 | <b>615</b> | 0,00    |
| 90 | 673,00     | 34,16             | 1               | 34,16              | 673,00 | <b>673</b> | 0,00    |
| 94 | 715,00     | 28,75             | 1               | 28,75              | 715,00 | <b>715</b> | 0,00    |
| 98 | 741,00     | 9,27              | 1               | 9,27               | 741,00 | <b>741</b> | 0,00    |

Tabela B.11: Resultados para o grafo nr\_104\_size\_112 ( $|V| = 112, d = 0, 82$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | 830,00     | 1637,76           | 1               | 1637,76            | 830,00  | <b>830</b>  | 0,00    |
| 6   | 812,00     | 730,75            | 1               | 730,75             | 812,00  | <b>812</b>  | 0,00    |
| 10  | 817,00     | 735,08            | 1               | 735,08             | 817,00  | <b>817</b>  | 0,00    |
| 14  | 885,00     | 515,10            | 1               | 515,10             | 885,00  | <b>885</b>  | 0,00    |
| 18  | 1061,00    | 693,94            | 1               | 693,94             | 1061,00 | <b>1061</b> | 0,00    |
| 22  | 1277,00    | 780,25            | 1               | 780,25             | 1277,00 | <b>1277</b> | 0,00    |
| 26  | 1523,00    | 726,12            | 1               | 726,12             | 1523,00 | <b>1523</b> | 0,00    |
| 30  | 1789,00    | 264,11            | 1               | 264,11             | 1789,00 | <b>1789</b> | 0,00    |
| 34  | 2059,00    | 145,82            | 1               | 145,82             | 2059,00 | <b>2059</b> | 0,00    |
| 38  | 2337,00    | 668,41            | 1               | 668,41             | 2337,00 | <b>2337</b> | 0,00    |
| 42  | 2609,00    | 597,70            | 1               | 597,70             | 2609,00 | <b>2609</b> | 0,00    |
| 46  | 2883,00    | 184,01            | 1               | 184,01             | 2883,00 | <b>2883</b> | 0,00    |
| 50  | 3141,00    | 186,27            | 1               | 186,27             | 3141,00 | <b>3141</b> | 0,00    |
| 54  | 3383,00    | 158,24            | 1               | 158,24             | 3383,00 | <b>3383</b> | 0,00    |
| 58  | 3609,00    | 275,73            | 1               | 275,73             | 3609,00 | <b>3609</b> | 0,00    |
| 62  | 3819,00    | 145,51            | 1               | 145,51             | 3819,00 | <b>3819</b> | 0,00    |
| 66  | 4013,00    | 141,13            | 1               | 141,13             | 4013,00 | <b>4013</b> | 0,00    |
| 70  | 4191,00    | 139,01            | 1               | 139,01             | 4191,00 | <b>4191</b> | 0,00    |
| 74  | 4353,00    | 119,64            | 1               | 119,64             | 4353,00 | <b>4353</b> | 0,00    |
| 78  | 4499,00    | 102,55            | 1               | 102,55             | 4499,00 | <b>4499</b> | 0,00    |
| 82  | 4629,00    | 101,57            | 1               | 101,57             | 4629,00 | <b>4629</b> | 0,00    |
| 86  | 4743,00    | 94,90             | 1               | 94,90              | 4743,00 | <b>4743</b> | 0,00    |
| 90  | 4841,00    | 93,48             | 1               | 93,48              | 4841,00 | <b>4841</b> | 0,00    |
| 94  | 4923,00    | 79,52             | 1               | 79,52              | 4923,00 | <b>4923</b> | 0,00    |
| 98  | 4989,00    | 106,29            | 1               | 106,29             | 4989,00 | <b>4989</b> | 0,00    |
| 102 | 5039,00    | 67,77             | 1               | 67,77              | 5039,00 | <b>5039</b> | 0,00    |
| 106 | 5073,00    | 47,38             | 1               | 47,38              | 5073,00 | <b>5073</b> | 0,00    |
| 110 | 5091,00    | 10,68             | 1               | 10,68              | 5091,00 | <b>5091</b> | 0,00    |

Tabela B.12: Resultados para o grafo nr\_413\_size\_127 ( $|V| = 127, d = 0, 45$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1542        | -       |
| 6   | 785,00     | 838,55            | 1               | 838,55             | 785,00  | <b>785</b>  | 0,00    |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 786         | -       |
| 14  | 804,91     | 1011,98           | 5               | 7200,00            | 804,91  | 812         | 0,87    |
| 18  | 827,45     | 1831,17           | 3               | 7200,00            | 827,45  | 840         | 1,49    |
| 22  | 850,00     | 1954,49           | 1               | 1954,49            | 850,00  | <b>850</b>  | 0,00    |
| 26  | 919,93     | 776,88            | 3               | 7200,00            | 919,93  | 966         | 4,77    |
| 30  | 1003,83    | 1028,53           | 7               | 7200,00            | 1005,83 | 1118        | 10,03   |
| 34  | 1087,73    | 678,62            | 7               | 7200,00            | 1090,88 | 1252        | 12,87   |
| 38  | 1171,63    | 856,42            | 7               | 7200,00            | 1175,93 | 1366        | 13,91   |
| 42  | 1255,54    | 959,54            | 7               | 7200,00            | 1260,37 | 1464        | 13,91   |
| 46  | 1339,44    | 2415,36           | 13              | 7200,00            | 1346,02 | 1544        | 12,82   |
| 50  | 1423,34    | 4406,41           | 7               | 7200,00            | 1426,41 | 1606        | 11,18   |
| 54  | 1507,24    | 3384,86           | 9               | 7200,00            | 1509,44 | 1652        | 8,63    |
| 58  | 1591,15    | 1975,50           | 7               | 7200,00            | 1592,46 | 1682        | 5,32    |
| 62  | 1675,05    | 3069,46           | 7               | 7200,00            | 1675,49 | 1692        | 0,98    |
| 66  | 1784,00    | 954,55            | 1               | 954,55             | 1784,00 | <b>1784</b> | 0,00    |
| 70  | 1980,00    | 45,87             | 1               | 45,87              | 1980,00 | <b>1980</b> | 0,00    |
| 74  | 2200,00    | 95,31             | 1               | 95,31              | 2200,00 | <b>2200</b> | 0,00    |
| 78  | 2406,00    | 66,39             | 1               | 66,39              | 2406,00 | <b>2406</b> | 0,00    |
| 82  | 2596,00    | 113,49            | 1               | 113,49             | 2596,00 | <b>2596</b> | 0,00    |
| 86  | 2770,00    | 142,08            | 1               | 142,08             | 2770,00 | <b>2770</b> | 0,00    |
| 90  | 2928,00    | 229,37            | 1               | 229,37             | 2928,00 | <b>2928</b> | 0,00    |
| 94  | 3070,00    | 131,19            | 1               | 131,19             | 3070,00 | <b>3070</b> | 0,00    |
| 98  | 3196,00    | 130,13            | 1               | 130,13             | 3196,00 | <b>3196</b> | 0,00    |
| 102 | 3306,00    | 130,10            | 1               | 130,10             | 3306,00 | <b>3306</b> | 0,00    |
| 106 | 3400,00    | 125,32            | 1               | 125,32             | 3400,00 | <b>3400</b> | 0,00    |
| 110 | 3478,00    | 109,59            | 1               | 109,59             | 3478,00 | <b>3478</b> | 0,00    |
| 114 | 3540,00    | 176,16            | 1               | 176,16             | 3540,00 | <b>3540</b> | 0,00    |
| 118 | 3586,00    | 92,81             | 1               | 92,81              | 3586,00 | <b>3586</b> | 0,00    |
| 122 | 3616,00    | 163,27            | 1               | 163,27             | 3616,00 | <b>3616</b> | 0,00    |
| 126 | 3630,00    | 0,18              | 1               | 0,18               | 3630,00 | <b>3630</b> | 0,00    |

Tabela B.13: Resultados para o grafo nr\_57\_size\_129 ( $|V| = 129, d = 0, 24$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2242        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 777         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 653         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 633         | -       |
| 18  | 627,00     | 5012,90           | 1               | 5012,90            | 627,00  | <b>627</b>  | 0,00    |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 628         | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 632         | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 638         | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 649         | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 660         | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 680         | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 696         | -       |
| 50  | 714,33     | 4288,23           | 3               | 7200,00            | 714,33  | 724         | 1,34    |
| 54  | 741,00     | 6622,18           | 3               | 7200,00            | 741,00  | 760         | 2,50    |
| 58  | 767,67     | 3659,55           | 5               | 7200,00            | 767,67  | 774         | 0,82    |
| 62  | 799,50     | 254,56            | 5               | 7200,00            | 799,50  | 802         | 0,31    |
| 66  | 837,50     | 4158,65           | 3               | 7200,00            | 837,50  | 868         | 3,51    |
| 70  | 875,50     | 213,25            | 19              | 7200,00            | 884,00  | 916         | 3,49    |
| 74  | 913,50     | 254,44            | 7               | 7200,00            | 916,00  | 940         | 2,55    |
| 78  | 951,50     | 254,31            | 1               | 254,31             | 952,00  | <b>952</b>  | 0,00    |
| 82  | 1006,00    | 446,16            | 1               | 446,16             | 1006,00 | <b>1006</b> | 0,00    |
| 86  | 1078,00    | 495,70            | 1               | 495,70             | 1078,00 | <b>1078</b> | 0,00    |
| 90  | 1206,00    | 39,18             | 1               | 39,18              | 1206,00 | <b>1206</b> | 0,00    |
| 94  | 1350,00    | 82,45             | 1               | 82,45              | 1350,00 | <b>1350</b> | 0,00    |
| 98  | 1484,00    | 91,41             | 1               | 91,41              | 1484,00 | <b>1484</b> | 0,00    |
| 102 | 1602,00    | 124,11            | 1               | 124,11             | 1602,00 | <b>1602</b> | 0,00    |
| 106 | 1704,00    | 49,56             | 1               | 49,56              | 1704,00 | <b>1704</b> | 0,00    |
| 110 | 1790,00    | 70,82             | 1               | 70,82              | 1790,00 | <b>1790</b> | 0,00    |
| 114 | 1860,00    | 65,07             | 1               | 65,07              | 1860,00 | <b>1860</b> | 0,00    |
| 118 | 1914,00    | 55,86             | 1               | 55,86              | 1914,00 | <b>1914</b> | 0,00    |
| 122 | 1952,00    | 52,83             | 1               | 52,83              | 1952,00 | <b>1952</b> | 0,00    |
| 126 | 1974,00    | 19,47             | 1               | 19,47              | 1974,00 | <b>1974</b> | 0,00    |

Tabela B.14: Resultados para o grafo nr\_606\_size\_130 ( $|V| = 130, d = 0, 92$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | 112,00     | 16,83             | 1               | 16,83              | 112,00  | <b>112</b>  | 0,00    |
| 6   | 107,00     | 123,88            | 3               | 245,86             | 108,00  | <b>108</b>  | 0,00    |
| 10  | 443,00     | 141,32            | 1               | 141,32             | 443,00  | <b>443</b>  | 0,00    |
| 14  | 907,00     | 239,86            | 1               | 239,86             | 907,00  | <b>907</b>  | 0,00    |
| 18  | 1365,00    | 197,65            | 1               | 197,65             | 1365,00 | <b>1365</b> | 0,00    |
| 22  | 1807,00    | 145,49            | 1               | 145,49             | 1807,00 | <b>1807</b> | 0,00    |
| 26  | 2233,00    | 142,95            | 1               | 142,95             | 2233,00 | <b>2233</b> | 0,00    |
| 30  | 2643,00    | 104,33            | 1               | 104,33             | 2643,00 | <b>2643</b> | 0,00    |
| 34  | 3037,00    | 156,31            | 1               | 156,31             | 3037,00 | <b>3037</b> | 0,00    |
| 38  | 3415,00    | 101,56            | 1               | 101,56             | 3415,00 | <b>3415</b> | 0,00    |
| 42  | 3777,00    | 156,94            | 1               | 156,94             | 3777,00 | <b>3777</b> | 0,00    |
| 46  | 4123,00    | 114,42            | 1               | 114,42             | 4123,00 | <b>4123</b> | 0,00    |
| 50  | 4453,00    | 199,75            | 1               | 199,75             | 4453,00 | <b>4453</b> | 0,00    |
| 54  | 4767,00    | 155,47            | 1               | 155,47             | 4767,00 | <b>4767</b> | 0,00    |
| 58  | 5065,00    | 152,57            | 1               | 152,57             | 5065,00 | <b>5065</b> | 0,00    |
| 62  | 5347,00    | 160,31            | 1               | 160,31             | 5347,00 | <b>5347</b> | 0,00    |
| 66  | 5613,00    | 232,02            | 1               | 232,02             | 5613,00 | <b>5613</b> | 0,00    |
| 70  | 5863,00    | 94,26             | 1               | 94,26              | 5863,00 | <b>5863</b> | 0,00    |
| 74  | 6097,00    | 85,04             | 1               | 85,04              | 6097,00 | <b>6097</b> | 0,00    |
| 78  | 6315,00    | 108,64            | 1               | 108,64             | 6315,00 | <b>6315</b> | 0,00    |
| 82  | 6517,00    | 155,27            | 1               | 155,27             | 6517,00 | <b>6517</b> | 0,00    |
| 86  | 6703,00    | 132,79            | 1               | 132,79             | 6703,00 | <b>6703</b> | 0,00    |
| 90  | 6873,00    | 131,28            | 1               | 131,28             | 6873,00 | <b>6873</b> | 0,00    |
| 94  | 7027,00    | 113,49            | 1               | 113,49             | 7027,00 | <b>7027</b> | 0,00    |
| 98  | 7165,00    | 115,78            | 1               | 115,78             | 7165,00 | <b>7165</b> | 0,00    |
| 102 | 7287,00    | 90,37             | 1               | 90,37              | 7287,00 | <b>7287</b> | 0,00    |
| 106 | 7393,00    | 89,70             | 1               | 89,70              | 7393,00 | <b>7393</b> | 0,00    |
| 110 | 7483,00    | 54,67             | 1               | 54,67              | 7483,00 | <b>7483</b> | 0,00    |
| 114 | 7557,00    | 42,38             | 1               | 42,38              | 7557,00 | <b>7557</b> | 0,00    |
| 118 | 7615,00    | 48,22             | 1               | 48,22              | 7615,00 | <b>7615</b> | 0,00    |
| 122 | 7657,00    | 26,18             | 1               | 26,18              | 7657,00 | <b>7657</b> | 0,00    |
| 126 | 7683,00    | 7,00              | 1               | 7,00               | 7683,00 | <b>7683</b> | 0,00    |



Tabela B.15: Resultados para o grafo nr\_480\_size\_139 ( $|V| = 139, d = 0, 42$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1331        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 774         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 746         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 740         | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 741         | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 746         | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 755         | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 767         | -       |
| 34  | 793,40     | 469,60            | 7               | 7200,00            | 793,79  | 797         | 0,40    |
| 38  | 827,00     | 434,10            | 7               | 7200,00            | 828,95  | 837         | 0,96    |
| 42  | 860,60     | 779,89            | 15              | 7200,00            | 867,20  | 887         | 2,23    |
| 46  | 894,20     | 435,08            | 5               | 7200,00            | 894,20  | 925         | 3,33    |
| 50  | 927,80     | 768,85            | 7               | 7200,00            | 929,60  | 943         | 1,42    |
| 54  | 967,00     | 275,27            | 1               | 275,27             | 967,00  | <b>967</b>  | 0,00    |
| 58  | 1065,00    | 577,55            | 1               | 577,55             | 1065,00 | <b>1065</b> | 0,00    |
| 62  | 1221,00    | 508,44            | 1               | 508,44             | 1221,00 | <b>1221</b> | 0,00    |
| 66  | 1427,00    | 258,08            | 1               | 258,08             | 1427,00 | <b>1427</b> | 0,00    |
| 70  | 1669,00    | 172,34            | 1               | 172,34             | 1669,00 | <b>1669</b> | 0,00    |
| 74  | 1915,00    | 203,43            | 1               | 203,43             | 1915,00 | <b>1915</b> | 0,00    |
| 78  | 2165,00    | 176,48            | 1               | 176,48             | 2165,00 | <b>2165</b> | 0,00    |
| 82  | 2403,00    | 115,50            | 1               | 115,50             | 2403,00 | <b>2403</b> | 0,00    |
| 86  | 2625,00    | 289,63            | 1               | 289,63             | 2625,00 | <b>2625</b> | 0,00    |
| 90  | 2831,00    | 104,43            | 1               | 104,43             | 2831,00 | <b>2831</b> | 0,00    |
| 94  | 3021,00    | 187,49            | 1               | 187,49             | 3021,00 | <b>3021</b> | 0,00    |
| 98  | 3195,00    | 105,69            | 1               | 105,69             | 3195,00 | <b>3195</b> | 0,00    |
| 102 | 3353,00    | 227,25            | 1               | 227,25             | 3353,00 | <b>3353</b> | 0,00    |
| 106 | 3495,00    | 118,64            | 1               | 118,64             | 3495,00 | <b>3495</b> | 0,00    |
| 110 | 3621,00    | 137,72            | 1               | 137,72             | 3621,00 | <b>3621</b> | 0,00    |
| 114 | 3731,00    | 127,14            | 1               | 127,14             | 3731,00 | <b>3731</b> | 0,00    |
| 118 | 3825,00    | 134,15            | 1               | 134,15             | 3825,00 | <b>3825</b> | 0,00    |
| 122 | 3903,00    | 127,79            | 1               | 127,79             | 3903,00 | <b>3903</b> | 0,00    |
| 126 | 3965,00    | 164,11            | 1               | 164,11             | 3965,00 | <b>3965</b> | 0,00    |
| 130 | 4011,00    | 83,85             | 1               | 83,85              | 4011,00 | <b>4011</b> | 0,00    |
| 134 | 4041,00    | 152,07            | 1               | 152,07             | 4041,00 | <b>4041</b> | 0,00    |
| 138 | 4055,00    | 0,22              | 1               | 0,22               | 4055,00 | <b>4055</b> | 0,00    |

Tabela B.16: Resultados para o grafo nr\_537\_size\_144 ( $|V| = 144, d = 0, 68$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1517        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1309        | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1313        | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1321        | -       |
| 18  | 1346,23    | 6579,14           | 3               | 7200,00            | 1346,23 | 1368        | 1,59    |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1406        | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1424        | -       |
| 30  | 1450,00    | 4369,89           | 1               | 4369,89            | 1450,00 | <b>1450</b> | 0,00    |
| 34  | 1506,00    | 6476,51           | 1               | 6476,51            | 1506,00 | <b>1506</b> | 0,00    |
| 38  | 1632,00    | 1958,19           | 1               | 1958,19            | 1632,00 | <b>1632</b> | 0,00    |
| 42  | 1864,00    | 755,11            | 1               | 755,12             | 1864,00 | <b>1864</b> | 0,00    |
| 46  | 2190,00    | 154,53            | 1               | 154,53             | 2190,00 | <b>2190</b> | 0,00    |
| 50  | 2560,00    | 264,82            | 1               | 264,82             | 2560,00 | <b>2560</b> | 0,00    |
| 54  | 2930,00    | 434,19            | 1               | 434,19             | 2930,00 | <b>2930</b> | 0,00    |
| 58  | 3284,00    | 201,53            | 1               | 201,53             | 3284,00 | <b>3284</b> | 0,00    |
| 62  | 3622,00    | 350,04            | 1               | 350,04             | 3622,00 | <b>3622</b> | 0,00    |
| 66  | 3944,00    | 307,38            | 1               | 307,38             | 3944,00 | <b>3944</b> | 0,00    |
| 70  | 4250,00    | 233,22            | 1               | 233,22             | 4250,00 | <b>4250</b> | 0,00    |
| 74  | 4540,00    | 282,88            | 1               | 282,88             | 4540,00 | <b>4540</b> | 0,00    |
| 78  | 4814,00    | 262,64            | 1               | 262,64             | 4814,00 | <b>4814</b> | 0,00    |
| 82  | 5072,00    | 284,93            | 1               | 284,93             | 5072,00 | <b>5072</b> | 0,00    |
| 86  | 5314,00    | 329,51            | 1               | 329,51             | 5314,00 | <b>5314</b> | 0,00    |
| 90  | 5540,00    | 229,19            | 1               | 229,20             | 5540,00 | <b>5540</b> | 0,00    |
| 94  | 5750,00    | 304,35            | 1               | 304,35             | 5750,00 | <b>5750</b> | 0,00    |
| 98  | 5944,00    | 369,11            | 1               | 369,11             | 5944,00 | <b>5944</b> | 0,00    |
| 102 | 6122,00    | 470,00            | 1               | 470,00             | 6122,00 | <b>6122</b> | 0,00    |
| 106 | 6284,00    | 322,42            | 1               | 322,42             | 6284,00 | <b>6284</b> | 0,00    |
| 110 | 6430,00    | 209,50            | 1               | 209,50             | 6430,00 | <b>6430</b> | 0,00    |
| 114 | 6560,00    | 241,37            | 1               | 241,37             | 6560,00 | <b>6560</b> | 0,00    |
| 118 | 6674,00    | 238,71            | 1               | 238,71             | 6674,00 | <b>6674</b> | 0,00    |
| 122 | 6772,00    | 335,31            | 1               | 335,31             | 6772,00 | <b>6772</b> | 0,00    |
| 126 | 6854,00    | 244,44            | 1               | 244,44             | 6854,00 | <b>6854</b> | 0,00    |
| 130 | 6920,00    | 243,73            | 1               | 243,73             | 6920,00 | <b>6920</b> | 0,00    |
| 134 | 6970,00    | 141,31            | 1               | 141,31             | 6970,00 | <b>6970</b> | 0,00    |
| 138 | 7004,00    | 121,86            | 1               | 121,86             | 7004,00 | <b>7004</b> | 0,00    |
| 142 | 7022,00    | 23,39             | 1               | 23,39              | 7022,00 | <b>7022</b> | 0,00    |

Tabela B.17: Resultados para o grafo nr\_116\_size\_152 ( $|V| = 152, d = 0, 35$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2530        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1059        | -       |
| 10  | 919,00     | 2395,10           | 1               | 2395,10            | 919,00  | <b>919</b>  | 0,00    |
| 14  | 894,00     | 3298,65           | 1               | 3298,65            | 894,00  | <b>894</b>  | 0,00    |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 890         | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 894         | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 899         | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 906         | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 916         | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 933         | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 946         | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 968         | -       |
| 50  | 978,00     | 5402,42           | 1               | 5402,42            | 978,00  | <b>978</b>  | 0,00    |
| 54  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1004        | -       |
| 58  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1014        | -       |
| 62  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1040        | -       |
| 66  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1055        | -       |
| 70  | 1083,00    | 1971,23           | 1               | 1971,23            | 1083,00 | <b>1083</b> | 0,00    |
| 74  | 1219,00    | 646,88            | 1               | 646,88             | 1219,00 | <b>1219</b> | 0,00    |
| 78  | 1385,00    | 367,29            | 1               | 367,29             | 1385,00 | <b>1385</b> | 0,00    |
| 82  | 1577,00    | 248,87            | 1               | 248,87             | 1577,00 | <b>1577</b> | 0,00    |
| 86  | 1789,00    | 695,65            | 1               | 695,65             | 1789,00 | <b>1789</b> | 0,00    |
| 90  | 2013,00    | 242,55            | 1               | 242,55             | 2013,00 | <b>2013</b> | 0,00    |
| 94  | 2251,00    | 221,32            | 1               | 221,32             | 2251,00 | <b>2251</b> | 0,00    |
| 98  | 2477,00    | 371,08            | 1               | 371,08             | 2477,00 | <b>2477</b> | 0,00    |
| 102 | 2687,00    | 177,14            | 1               | 177,14             | 2687,00 | <b>2687</b> | 0,00    |
| 106 | 2881,00    | 209,75            | 1               | 209,75             | 2881,00 | <b>2881</b> | 0,00    |
| 110 | 3059,00    | 248,57            | 1               | 248,57             | 3059,00 | <b>3059</b> | 0,00    |
| 114 | 3221,00    | 260,78            | 1               | 260,78             | 3221,00 | <b>3221</b> | 0,00    |
| 118 | 3367,00    | 225,99            | 1               | 225,99             | 3367,00 | <b>3367</b> | 0,00    |
| 122 | 3497,00    | 282,03            | 1               | 282,03             | 3497,00 | <b>3497</b> | 0,00    |
| 126 | 3611,00    | 270,52            | 1               | 270,52             | 3611,00 | <b>3611</b> | 0,00    |
| 130 | 3709,00    | 170,80            | 1               | 170,80             | 3709,00 | <b>3709</b> | 0,00    |
| 134 | 3791,00    | 161,54            | 1               | 161,54             | 3791,00 | <b>3791</b> | 0,00    |
| 138 | 3857,00    | 171,11            | 1               | 171,11             | 3857,00 | <b>3857</b> | 0,00    |
| 142 | 3907,00    | 423,43            | 1               | 423,43             | 3907,00 | <b>3907</b> | 0,00    |
| 146 | 3941,00    | 84,25             | 1               | 84,25              | 3941,00 | <b>3941</b> | 0,00    |
| 150 | 3959,00    | 26,75             | 1               | 26,75              | 3959,00 | <b>3959</b> | 0,00    |

Tabela B.18: Resultados para o grafo nr\_593\_size\_157 ( $|V| = 157, d = 0, 49$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2458        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1750        | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1698        | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1688        | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1688        | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1693        | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1700        | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1710        | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1729        | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1742        | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1768        | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1786        | -       |
| 50  | 1814,00    | 1300,94           | 1               | 1300,94            | 1814,00 | <b>1814</b> | 0,00    |
| 54  | 1902,00    | 1202,05           | 1               | 1202,05            | 1902,00 | <b>1902</b> | 0,00    |
| 58  | 2032,00    | 1749,60           | 1               | 1749,60            | 2032,00 | <b>2032</b> | 0,00    |
| 62  | 2204,00    | 3122,48           | 1               | 3122,48            | 2204,00 | <b>2204</b> | 0,00    |
| 66  | 2392,00    | 2405,59           | 1               | 2405,59            | 2392,00 | <b>2392</b> | 0,00    |
| 70  | 2596,00    | 2701,65           | 1               | 2701,65            | 2596,00 | <b>2596</b> | 0,00    |
| 74  | 2810,00    | 2870,18           | 1               | 2870,18            | 2810,00 | <b>2810</b> | 0,00    |
| 78  | 3032,00    | 3492,31           | 1               | 3492,31            | 3032,00 | <b>3032</b> | 0,00    |
| 82  | 3268,00    | 860,85            | 1               | 860,85             | 3268,00 | <b>3268</b> | 0,00    |
| 86  | 3516,00    | 666,04            | 1               | 666,04             | 3516,00 | <b>3516</b> | 0,00    |
| 90  | 3772,00    | 1844,89           | 1               | 1844,89            | 3772,00 | <b>3772</b> | 0,00    |
| 94  | 4020,00    | 1213,00           | 1               | 1213,00            | 4020,00 | <b>4020</b> | 0,00    |
| 98  | 4266,00    | 265,65            | 1               | 265,65             | 4266,00 | <b>4266</b> | 0,00    |
| 102 | 4496,00    | 226,41            | 1               | 226,41             | 4496,00 | <b>4496</b> | 0,00    |
| 106 | 4710,00    | 555,29            | 1               | 555,29             | 4710,00 | <b>4710</b> | 0,00    |
| 110 | 4908,00    | 378,48            | 1               | 378,48             | 4908,00 | <b>4908</b> | 0,00    |
| 114 | 5090,00    | 444,89            | 1               | 444,89             | 5090,00 | <b>5090</b> | 0,00    |
| 118 | 5256,00    | 346,38            | 1               | 346,38             | 5256,00 | <b>5256</b> | 0,00    |
| 122 | 5406,00    | 280,89            | 1               | 280,89             | 5406,00 | <b>5406</b> | 0,00    |
| 126 | 5540,00    | 253,61            | 1               | 253,61             | 5540,00 | <b>5540</b> | 0,00    |
| 130 | 5658,00    | 304,48            | 1               | 304,48             | 5658,00 | <b>5658</b> | 0,00    |
| 134 | 5760,00    | 287,28            | 1               | 287,28             | 5760,00 | <b>5760</b> | 0,00    |
| 138 | 5846,00    | 229,53            | 1               | 229,53             | 5846,00 | <b>5846</b> | 0,00    |
| 142 | 5916,00    | 319,58            | 1               | 319,58             | 5916,00 | <b>5916</b> | 0,00    |
| 146 | 5970,00    | 188,55            | 1               | 188,55             | 5970,00 | <b>5970</b> | 0,00    |
| 150 | 6008,00    | 1283,04           | 1               | 1283,04            | 6008,00 | <b>6008</b> | 0,00    |
| 154 | 6030,00    | 113,72            | 1               | 113,72             | 6030,00 | <b>6030</b> | 0,00    |

Tabela B.19: Resultados para o grafo nr\_176\_size\_169 ( $|V| = 169, d = 0, 90$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2   | 371,00     | 329,43            | 1               | 329,43             | 371,00   | <b>371</b>   | 0,00    |
| 6   | 339,00     | 293,44            | 1               | 293,44             | 339,00   | <b>339</b>   | 0,00    |
| 10  | 337,00     | 719,74            | 1               | 719,74             | 337,00   | <b>337</b>   | 0,00    |
| 14  | 687,00     | 930,53            | 1               | 930,53             | 687,00   | <b>687</b>   | 0,00    |
| 18  | 1271,00    | 210,06            | 1               | 210,06             | 1271,00  | <b>1271</b>  | 0,00    |
| 22  | 1867,00    | 1043,97           | 1               | 1043,97            | 1867,00  | <b>1867</b>  | 0,00    |
| 26  | 2449,00    | 1153,38           | 1               | 1153,38            | 2449,00  | <b>2449</b>  | 0,00    |
| 30  | 3015,00    | 729,94            | 1               | 729,94             | 3015,00  | <b>3015</b>  | 0,00    |
| 34  | 3565,00    | 561,91            | 1               | 561,91             | 3565,00  | <b>3565</b>  | 0,00    |
| 38  | 4099,00    | 726,87            | 1               | 726,87             | 4099,00  | <b>4099</b>  | 0,00    |
| 42  | 4617,00    | 772,47            | 1               | 772,47             | 4617,00  | <b>4617</b>  | 0,00    |
| 46  | 5119,00    | 492,19            | 1               | 492,19             | 5119,00  | <b>5119</b>  | 0,00    |
| 50  | 5605,00    | 1780,09           | 1               | 1780,09            | 5605,00  | <b>5605</b>  | 0,00    |
| 54  | 6075,00    | 1103,97           | 1               | 1103,97            | 6075,00  | <b>6075</b>  | 0,00    |
| 58  | 6529,00    | 704,11            | 1               | 704,11             | 6529,00  | <b>6529</b>  | 0,00    |
| 62  | 6967,00    | 2230,85           | 1               | 2230,85            | 6967,00  | <b>6967</b>  | 0,00    |
| 66  | 7389,00    | 648,16            | 1               | 648,16             | 7389,00  | <b>7389</b>  | 0,00    |
| 70  | 7795,00    | 1004,10           | 1               | 1004,10            | 7795,00  | <b>7795</b>  | 0,00    |
| 74  | 8185,00    | 1614,10           | 1               | 1614,10            | 8185,00  | <b>8185</b>  | 0,00    |
| 78  | 8559,00    | 671,82            | 1               | 671,82             | 8559,00  | <b>8559</b>  | 0,00    |
| 82  | 8917,00    | 1411,08           | 1               | 1411,08            | 8917,00  | <b>8917</b>  | 0,00    |
| 86  | 9259,00    | 1154,38           | 1               | 1154,38            | 9259,00  | <b>9259</b>  | 0,00    |
| 90  | 9585,00    | 710,21            | 1               | 710,21             | 9585,00  | <b>9585</b>  | 0,00    |
| 94  | 9895,00    | 448,76            | 1               | 448,76             | 9895,00  | <b>9895</b>  | 0,00    |
| 98  | 10189,00   | 859,26            | 1               | 859,26             | 10189,00 | <b>10189</b> | 0,00    |
| 102 | 10467,00   | 662,25            | 1               | 662,25             | 10467,00 | <b>10467</b> | 0,00    |
| 106 | 10729,00   | 353,94            | 1               | 353,94             | 10729,00 | <b>10729</b> | 0,00    |
| 110 | 10975,00   | 485,91            | 1               | 485,91             | 10975,00 | <b>10975</b> | 0,00    |
| 114 | 11205,00   | 459,10            | 1               | 459,10             | 11205,00 | <b>11205</b> | 0,00    |
| 118 | 11419,00   | 434,75            | 1               | 434,75             | 11419,00 | <b>11419</b> | 0,00    |
| 122 | 11617,00   | 333,59            | 1               | 333,59             | 11617,00 | <b>11617</b> | 0,00    |
| 126 | 11799,00   | 394,12            | 1               | 394,12             | 11799,00 | <b>11799</b> | 0,00    |
| 130 | 11965,00   | 373,22            | 1               | 373,22             | 11965,00 | <b>11965</b> | 0,00    |
| 134 | 12115,00   | 298,48            | 1               | 298,48             | 12115,00 | <b>12115</b> | 0,00    |
| 138 | 12249,00   | 279,40            | 1               | 279,40             | 12249,00 | <b>12249</b> | 0,00    |
| 142 | 12367,00   | 466,31            | 1               | 466,31             | 12367,00 | <b>12367</b> | 0,00    |
| 146 | 12469,00   | 242,11            | 1               | 242,11             | 12469,00 | <b>12469</b> | 0,00    |
| 150 | 12555,00   | 256,48            | 1               | 256,48             | 12555,00 | <b>12555</b> | 0,00    |
| 154 | 12625,00   | 136,42            | 1               | 136,42             | 12625,00 | <b>12625</b> | 0,00    |
| 158 | 12679,00   | 131,15            | 1               | 131,15             | 12679,00 | <b>12679</b> | 0,00    |
| 162 | 12717,00   | 104,19            | 1               | 104,19             | 12717,00 | <b>12717</b> | 0,00    |
| 166 | 12739,00   | 17,55             | 1               | 17,55              | 12739,00 | <b>12739</b> | 0,00    |

Tabela B.20: Resultados para o grafo nr\_459\_size\_171 ( $|V| = 171, d = 0, 11$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 5696        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1210        | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 694         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 596         | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 560         | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 543         | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 535         | -       |
| 30  | 532,00     | 5851,67           | 1               | 5851,67            | 532,00  | <b>532</b>  | 0,00    |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 535         | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 539         | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 543         | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 549         | -       |
| 50  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 556         | -       |
| 54  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 564         | -       |
| 58  | 573,00     | 4964,82           | 1               | 4964,82            | 573,00  | <b>573</b>  | 0,00    |
| 62  | 586,00     | 3825,17           | 3               | 7200,00            | 586,00  | 587         | 0,17    |
| 66  | 600,00     | 1909,59           | 1               | 1909,59            | 600,00  | <b>600</b>  | 0,00    |
| 70  | 619,27     | 1152,30           | 1               | 1152,30            | 620,00  | <b>620</b>  | 0,00    |
| 74  | 641,82     | 982,39            | 7               | 7200,00            | 643,50  | 649         | 0,85    |
| 78  | 664,36     | 1796,17           | 5               | 7200,00            | 664,70  | 666         | 0,20    |
| 82  | 689,00     | 558,33            | 1               | 558,33             | 689,00  | <b>689</b>  | 0,00    |
| 86  | 718,00     | 283,79            | 1               | 283,79             | 718,00  | <b>718</b>  | 0,00    |
| 90  | 750,53     | 268,48            | 11              | 7200,00            | 753,00  | 759         | 0,79    |
| 94  | 783,24     | 681,74            | 13              | 7200,00            | 786,38  | 811         | 3,04    |
| 98  | 815,94     | 1014,23           | 11              | 7200,00            | 819,25  | 836         | 2,00    |
| 102 | 848,65     | 560,21            | 7               | 7200,00            | 849,75  | 851         | 0,15    |
| 106 | 882,67     | 499,32            | 7               | 7200,00            | 884,50  | 889         | 0,51    |
| 110 | 918,00     | 980,73            | 15              | 7200,00            | 924,47  | 946         | 2,28    |
| 114 | 953,33     | 576,58            | 11              | 7200,00            | 957,65  | 988         | 3,07    |
| 118 | 988,67     | 1420,31           | 9               | 7200,00            | 990,82  | 1004        | 1,31    |
| 122 | 1024,00    | 1364,66           | 1               | 1364,66            | 1024,00 | <b>1024</b> | 0,00    |
| 126 | 1066,48    | 2151,80           | 7               | 7200,00            | 1068,40 | 1086        | 1,62    |
| 130 | 1108,95    | 498,07            | 5               | 7200,00            | 1108,95 | 1154        | 3,90    |
| 134 | 1151,43    | 458,13            | 5               | 7200,00            | 1151,43 | 1202        | 4,21    |
| 138 | 1193,90    | 383,30            | 19              | 7200,00            | 1199,11 | 1228        | 2,35    |
| 142 | 1236,38    | 764,13            | 7               | 7200,00            | 1236,90 | 1240        | 0,25    |
| 146 | 1292,00    | 740,38            | 1               | 740,38             | 1292,00 | <b>1292</b> | 0,00    |
| 150 | 1382,00    | 117,74            | 1               | 117,74             | 1382,00 | <b>1382</b> | 0,00    |
| 154 | 1460,00    | 411,02            | 1               | 411,02             | 1460,00 | <b>1460</b> | 0,00    |
| 158 | 1522,00    | 259,32            | 1               | 259,32             | 1522,00 | <b>1522</b> | 0,00    |
| 162 | 1568,00    | 205,23            | 1               | 205,23             | 1568,00 | <b>1568</b> | 0,00    |
| 166 | 1598,00    | 52,96             | 1               | 52,96              | 1598,00 | <b>1598</b> | 0,00    |
| 170 | 1612,00    | 0,29              | 1               | 0,29               | 1612,00 | <b>1612</b> | 0,00    |

Tabela B.21: Resultados para o grafo nr\_9\_size\_178 ( $|V| = 178, d = 0, 79$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 2066         | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 1955         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 1962         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 1986         | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 2005         | -       |
| 22  | 2025,00    | 3678,33           | 1               | 3678,33            | 2025,00  | <b>2025</b>  | 0,00    |
| 26  | 2111,00    | 3509,11           | 1               | 3509,11            | 2111,00  | <b>2111</b>  | 0,00    |
| 30  | 2293,00    | 4471,70           | 1               | 4471,70            | 2293,00  | <b>2293</b>  | 0,00    |
| 34  | 2565,00    | 5363,42           | 1               | 5363,42            | 2565,00  | <b>2565</b>  | 0,00    |
| 38  | 2913,00    | 3893,70           | 1               | 3893,70            | 2913,00  | <b>2913</b>  | 0,00    |
| 42  | 3321,00    | 2694,25           | 1               | 2694,25            | 3321,00  | <b>3321</b>  | 0,00    |
| 46  | 3757,00    | 760,83            | 1               | 760,83             | 3757,00  | <b>3757</b>  | 0,00    |
| 50  | 4233,00    | 511,38            | 3               | 7200,00            | 4233,00  | 4235         | 0,05    |
| 54  | 4723,00    | 3844,47           | 1               | 3844,47            | 4723,00  | <b>4723</b>  | 0,00    |
| 58  | 5213,00    | 1208,00           | 1               | 1208,00            | 5213,00  | <b>5213</b>  | 0,00    |
| 62  | 5687,00    | 926,77            | 1               | 926,77             | 5687,00  | <b>5687</b>  | 0,00    |
| 66  | 6145,00    | 1877,34           | 1               | 1877,34            | 6145,00  | <b>6145</b>  | 0,00    |
| 70  | 6587,00    | 2649,60           | 1               | 2649,60            | 6587,00  | <b>6587</b>  | 0,00    |
| 74  | 7013,00    | 1063,23           | 1               | 1063,23            | 7013,00  | <b>7013</b>  | 0,00    |
| 78  | 7423,00    | 1952,39           | 1               | 1952,39            | 7423,00  | <b>7423</b>  | 0,00    |
| 82  | 7817,00    | 1629,18           | 1               | 1629,18            | 7817,00  | <b>7817</b>  | 0,00    |
| 86  | 8195,00    | 2473,49           | 1               | 2473,49            | 8195,00  | <b>8195</b>  | 0,00    |
| 90  | 8557,00    | 2252,33           | 1               | 2252,33            | 8557,00  | <b>8557</b>  | 0,00    |
| 94  | 8903,00    | 2141,47           | 1               | 2141,47            | 8903,00  | <b>8903</b>  | 0,00    |
| 98  | 9233,00    | 1702,30           | 1               | 1702,30            | 9233,00  | <b>9233</b>  | 0,00    |
| 102 | 9547,00    | 1751,33           | 1               | 1751,33            | 9547,00  | <b>9547</b>  | 0,00    |
| 106 | 9845,00    | 1360,42           | 1               | 1360,42            | 9845,00  | <b>9845</b>  | 0,00    |
| 110 | 10127,00   | 1309,78           | 1               | 1309,78            | 10127,00 | <b>10127</b> | 0,00    |
| 114 | 10393,00   | 1590,04           | 1               | 1590,04            | 10393,00 | <b>10393</b> | 0,00    |
| 118 | 10643,00   | 966,13            | 1               | 966,13             | 10643,00 | <b>10643</b> | 0,00    |
| 122 | 10877,00   | 1581,05           | 1               | 1581,05            | 10877,00 | <b>10877</b> | 0,00    |
| 126 | 11095,00   | 1155,11           | 1               | 1155,11            | 11095,00 | <b>11095</b> | 0,00    |
| 130 | 11297,00   | 2150,18           | 1               | 2150,18            | 11297,00 | <b>11297</b> | 0,00    |
| 134 | 11483,00   | 997,80            | 1               | 997,80             | 11483,00 | <b>11483</b> | 0,00    |
| 138 | 11653,00   | 1058,23           | 1               | 1058,23            | 11653,00 | <b>11653</b> | 0,00    |
| 142 | 11807,00   | 1000,91           | 1               | 1000,91            | 11807,00 | <b>11807</b> | 0,00    |
| 146 | 11945,00   | 759,69            | 1               | 759,69             | 11945,00 | <b>11945</b> | 0,00    |
| 150 | 12067,00   | 953,36            | 1               | 953,36             | 12067,00 | <b>12067</b> | 0,00    |
| 154 | 12173,00   | 685,43            | 1               | 685,44             | 12173,00 | <b>12173</b> | 0,00    |
| 158 | 12263,00   | 401,97            | 1               | 401,97             | 12263,00 | <b>12263</b> | 0,00    |
| 162 | 12337,00   | 576,82            | 1               | 576,82             | 12337,00 | <b>12337</b> | 0,00    |
| 166 | 12395,00   | 400,07            | 1               | 400,07             | 12395,00 | <b>12395</b> | 0,00    |
| 170 | 12437,00   | 319,31            | 1               | 319,31             | 12437,00 | <b>12437</b> | 0,00    |
| 174 | 12463,00   | 133,91            | 1               | 133,91             | 12463,00 | <b>12463</b> | 0,00    |

Tabela B.22: Resultados para o grafo nr\_200\_size\_179 ( $|V| = 179, d = 0, 43$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2206        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1519        | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1555        | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1565        | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1593        | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1643        | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1700        | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1717        | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1738        | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1782        | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1840        | -       |
| 46  | 1910,00    | 4237,88           | 3               | 7200,00            | 1910,00 | 1918        | 0,42    |
| 50  | 1980,00    | 1978,43           | 3               | 7200,00            | 1980,00 | 2034        | 2,65    |
| 54  | 2050,00    | 2255,45           | 3               | 7200,00            | 2050,00 | 2154        | 4,83    |
| 58  | 2120,00    | 1767,77           | 3               | 7200,00            | 2120,00 | 2252        | 5,86    |
| 62  | 2190,00    | 2481,09           | 3               | 7200,00            | 2190,00 | 2334        | 6,17    |
| 66  | 2260,00    | 3014,63           | 3               | 7200,00            | 2260,00 | 2400        | 5,83    |
| 70  | 2330,00    | 2814,11           | 3               | 7200,00            | 2330,00 | 2450        | 4,90    |
| 74  | 2400,00    | 4724,38           | 3               | 7200,00            | 2400,00 | 2482        | 3,30    |
| 78  | 2470,00    | 7095,54           | 3               | 7200,00            | 2470,00 | 2492        | 0,88    |
| 82  | 2564,00    | 3806,00           | 1               | 3806,00            | 2564,00 | <b>2564</b> | 0,00    |
| 86  | 2732,00    | 1836,69           | 1               | 1836,69            | 2732,00 | <b>2732</b> | 0,00    |
| 90  | 2976,00    | 1056,21           | 1               | 1056,21            | 2976,00 | <b>2976</b> | 0,00    |
| 94  | 3256,00    | 1833,59           | 1               | 1833,59            | 3256,00 | <b>3256</b> | 0,00    |
| 98  | 3552,00    | 333,77            | 1               | 333,77             | 3552,00 | <b>3552</b> | 0,00    |
| 102 | 3850,00    | 1202,59           | 1               | 1202,59            | 3850,00 | <b>3850</b> | 0,00    |
| 106 | 4146,00    | 1418,41           | 1               | 1418,41            | 4146,00 | <b>4146</b> | 0,00    |
| 110 | 4432,00    | 1236,04           | 1               | 1236,04            | 4432,00 | <b>4432</b> | 0,00    |
| 114 | 4702,00    | 422,92            | 1               | 422,92             | 4702,00 | <b>4702</b> | 0,00    |
| 118 | 4956,00    | 451,13            | 1               | 451,13             | 4956,00 | <b>4956</b> | 0,00    |
| 122 | 5194,00    | 543,74            | 1               | 543,74             | 5194,00 | <b>5194</b> | 0,00    |
| 126 | 5416,00    | 504,76            | 1               | 504,76             | 5416,00 | <b>5416</b> | 0,00    |
| 130 | 5622,00    | 587,71            | 1               | 587,71             | 5622,00 | <b>5622</b> | 0,00    |
| 134 | 5812,00    | 666,82            | 1               | 666,82             | 5812,00 | <b>5812</b> | 0,00    |
| 138 | 5986,00    | 719,58            | 1               | 719,58             | 5986,00 | <b>5986</b> | 0,00    |
| 142 | 6144,00    | 657,42            | 1               | 657,43             | 6144,00 | <b>6144</b> | 0,00    |
| 146 | 6286,00    | 1144,04           | 1               | 1144,04            | 6286,00 | <b>6286</b> | 0,00    |
| 150 | 6412,00    | 772,64            | 1               | 772,64             | 6412,00 | <b>6412</b> | 0,00    |
| 154 | 6522,00    | 743,05            | 1               | 743,05             | 6522,00 | <b>6522</b> | 0,00    |
| 158 | 6616,00    | 554,74            | 1               | 554,74             | 6616,00 | <b>6616</b> | 0,00    |
| 162 | 6694,00    | 583,61            | 1               | 583,61             | 6694,00 | <b>6694</b> | 0,00    |
| 166 | 6756,00    | 536,97            | 1               | 536,97             | 6756,00 | <b>6756</b> | 0,00    |
| 170 | 6802,00    | 319,14            | 1               | 319,14             | 6802,00 | <b>6802</b> | 0,00    |
| 174 | 6832,00    | 139,42            | 1               | 139,42             | 6832,00 | <b>6832</b> | 0,00    |
| 178 | 6846,00    | 0,38              | 1               | 0,38               | 6846,00 | <b>6846</b> | 0,00    |



Tabela B.23: Resultados para o grafo nr\_263\_size\_186 ( $|V| = 186, d = 0, 34$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 3856        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 979         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1061        | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1165        | -       |
| 18  | 1174,54    | 3704,17           | 3               | 7200,00            | 1174,54 | 1260        | 6,78    |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1369        | -       |
| 26  | 1354,61    | 3461,88           | 3               | 7200,00            | 1354,61 | 1414        | 4,20    |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1619        | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1718        | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1829        | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1939        | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2045        | -       |
| 50  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2135        | -       |
| 54  | 1984,86    | 3374,43           | 3               | 7200,00            | 1984,86 | 2209        | 10,15   |
| 58  | 2074,89    | 6136,37           | 3               | 7200,00            | 2074,89 | 2255        | 7,99    |
| 62  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2300        | -       |
| 66  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2318        | -       |
| 70  | 2345,00    | 2251,56           | 1               | 2251,56            | 2345,00 | <b>2345</b> | 0,00    |
| 74  | 2445,88    | 1180,99           | 3               | 7200,00            | 2445,88 | 2586        | 5,42    |
| 78  | 2546,76    | 996,18            | 3               | 7200,00            | 2546,76 | 2787        | 8,62    |
| 82  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 3040        | -       |
| 86  | 2748,52    | 3249,30           | 5               | 7200,00            | 2748,52 | 3071        | 10,50   |
| 90  | 2849,40    | 2627,93           | 3               | 7200,00            | 2849,40 | 3209        | 11,21   |
| 94  | 2950,28    | 2331,42           | 3               | 7200,00            | 2950,28 | 3366        | 12,35   |
| 98  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 3668        | -       |
| 102 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 3926        | -       |
| 106 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 4049        | -       |
| 110 | 3353,80    | 992,63            | 3               | 7200,00            | 3353,80 | 4205        | 20,24   |
| 114 | 3454,68    | 1904,43           | 3               | 7200,00            | 3454,68 | 4303        | 19,71   |
| 118 | 3555,56    | 2457,99           | 3               | 7200,00            | 3555,56 | 4385        | 18,92   |
| 122 | 3737,00    | 739,53            | 1               | 739,53             | 3737,00 | <b>3737</b> | 0,00    |
| 126 | 3987,00    | 634,97            | 1               | 634,97             | 3987,00 | <b>3987</b> | 0,00    |
| 130 | 4221,00    | 860,96            | 1               | 860,96             | 4221,00 | <b>4221</b> | 0,00    |
| 134 | 4439,00    | 368,87            | 1               | 368,87             | 4439,00 | <b>4439</b> | 0,00    |
| 138 | 4641,00    | 693,52            | 1               | 693,52             | 4641,00 | <b>4641</b> | 0,00    |
| 142 | 4827,00    | 556,57            | 1               | 556,57             | 4827,00 | <b>4827</b> | 0,00    |
| 146 | 4997,00    | 967,59            | 1               | 967,59             | 4997,00 | <b>4997</b> | 0,00    |
| 150 | 5151,00    | 920,46            | 1               | 920,46             | 5151,00 | <b>5151</b> | 0,00    |
| 154 | 5289,00    | 698,76            | 1               | 698,76             | 5289,00 | <b>5289</b> | 0,00    |
| 158 | 5411,00    | 865,01            | 1               | 865,01             | 5411,00 | <b>5411</b> | 0,00    |
| 162 | 5517,00    | 674,89            | 1               | 674,89             | 5517,00 | <b>5517</b> | 0,00    |
| 166 | 5607,00    | 1113,24           | 1               | 1113,24            | 5607,00 | <b>5607</b> | 0,00    |
| 170 | 5681,00    | 616,79            | 1               | 616,79             | 5681,00 | <b>5681</b> | 0,00    |
| 174 | 5739,00    | 549,45            | 1               | 549,45             | 5739,00 | <b>5739</b> | 0,00    |
| 178 | 5781,00    | 262,25            | 1               | 262,25             | 5781,00 | <b>5781</b> | 0,00    |
| 182 | 5807,00    | 117,51            | 1               | 117,51             | 5807,00 | <b>5807</b> | 0,00    |

Tabela B.24: Resultados para o grafo nr\_365\_size\_196 ( $|V| = 196, d = 0, 15$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 7036        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 2182        | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1487        | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1300        | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1254        | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1240        | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1236        | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1236        | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1240        | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1246        | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1252        | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1260        | -       |
| 50  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1269        | -       |
| 54  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1279        | -       |
| 58  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1293        | -       |
| 62  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1305        | -       |
| 66  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1321        | -       |
| 70  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1337        | -       |
| 74  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1357        | -       |
| 78  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1373        | -       |
| 82  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1399        | -       |
| 86  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1410        | -       |
| 90  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1441        | -       |
| 94  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1458        | -       |
| 98  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1478        | -       |
| 102 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1508        | -       |
| 106 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1518        | -       |
| 110 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1558        | -       |
| 114 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1617        | -       |
| 118 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1661        | -       |
| 122 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1679        | -       |
| 126 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1698        | -       |
| 130 | 1746,50    | 7104,66           | 3               | 7200,00            | 1746,50 | 1752        | 0,31    |
| 134 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1831        | -       |
| 138 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1908        | -       |
| 142 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1943        | -       |
| 146 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1954        | -       |
| 150 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1990        | -       |
| 154 | 2044,00    | 2192,22           | 1               | 2192,22            | 2044,00 | <b>2044</b> | 0,00    |
| 158 | 2130,00    | 2065,41           | 1               | 2065,41            | 2130,00 | <b>2130</b> | 0,00    |
| 162 | 2240,00    | 2264,10           | 1               | 2264,10            | 2240,00 | <b>2240</b> | 0,00    |
| 166 | 2362,00    | 1950,02           | 1               | 1950,02            | 2362,00 | <b>2362</b> | 0,00    |
| 170 | 2476,00    | 936,38            | 1               | 936,38             | 2476,00 | <b>2476</b> | 0,00    |
| 174 | 2574,00    | 853,83            | 1               | 853,83             | 2574,00 | <b>2574</b> | 0,00    |
| 178 | 2656,00    | 606,04            | 1               | 606,04             | 2656,00 | <b>2656</b> | 0,00    |
| 182 | 2722,00    | 494,31            | 1               | 494,31             | 2722,00 | <b>2722</b> | 0,00    |
| 186 | 2772,00    | 434,82            | 1               | 434,82             | 2772,00 | <b>2772</b> | 0,00    |
| 190 | 2806,00    | 542,14            | 1               | 542,14             | 2806,00 | <b>2806</b> | 0,00    |
| 194 | 2824,00    | 45,72             | 1               | 45,72              | 2824,00 | <b>2824</b> | 0,00    |

Tabela B.25: Resultados para o grafo nr\_232\_size\_206 ( $|V| = 206, d = 0, 31$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB      | UB          | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|---------|-------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 4938        | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 687         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 731         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 753         | -       |
| 18  | 768,00     | 5889,78           | 1               | 5889,78            | 768,00  | <b>768</b>  | 0,00    |
| 22  | 824,00     | 3974,99           | 1               | 3974,99            | 824,00  | <b>824</b>  | 0,00    |
| 26  | 916,08     | 1908,41           | 3               | 7200,00            | 916,08  | 934         | 1,92    |
| 30  | 1010,25    | 1494,32           | 7               | 7200,00            | 1013,11 | 1096        | 7,56    |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1258        | -       |
| 38  | 1198,58    | 784,62            | 5               | 7200,00            | 1198,58 | 1404        | 14,63   |
| 42  | 1292,75    | 988,92            | 5               | 7200,00            | 1292,75 | 1534        | 15,73   |
| 46  | 1386,92    | 1106,39           | 7               | 7200,00            | 1397,46 | 1648        | 15,20   |
| 50  | 1481,08    | 3050,39           | 3               | 7200,00            | 1481,08 | 1746        | 15,17   |
| 54  | 1575,25    | 1668,95           | 3               | 7200,00            | 1575,25 | 1828        | 13,83   |
| 58  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1894        | -       |
| 62  | 1763,58    | 7065,48           | 3               | 7200,00            | 1763,58 | 1944        | 9,28    |
| 66  | 1857,75    | 2089,99           | 3               | 7200,00            | 1857,75 | 1978        | 6,08    |
| 70  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -       | 1996        | -       |
| 74  | 2065,00    | 323,77            | 61              | 7200,00            | 2073,69 | 2123        | 2,32    |
| 78  | 2197,00    | 599,57            | 29              | 7200,00            | 2211,12 | 2374        | 6,86    |
| 82  | 2329,00    | 711,54            | 51              | 7200,00            | 2361,00 | 2604        | 9,33    |
| 86  | 2461,00    | 102,00            | 61              | 7200,00            | 2499,50 | 2818        | 11,30   |
| 90  | 2593,00    | 127,50            | 65              | 7200,00            | 2635,35 | 3016        | 12,62   |
| 94  | 2725,00    | 91,98             | 41              | 7200,00            | 2765,81 | 3198        | 13,51   |
| 98  | 2857,00    | 90,23             | 67              | 7200,00            | 2905,23 | 3364        | 13,64   |
| 102 | 2989,00    | 103,28            | 59              | 7200,00            | 3035,50 | 3514        | 13,62   |
| 106 | 3121,00    | 159,57            | 45              | 7200,00            | 3155,00 | 3648        | 13,51   |
| 110 | 3253,00    | 193,78            | 57              | 7200,00            | 3293,50 | 3766        | 12,55   |
| 114 | 3385,00    | 175,53            | 31              | 7200,00            | 3417,00 | 3868        | 11,66   |
| 118 | 3517,00    | 210,01            | 49              | 7200,00            | 3549,00 | 3954        | 10,24   |
| 122 | 3649,00    | 137,50            | 43              | 7200,00            | 3674,00 | 4024        | 8,70    |
| 126 | 3781,00    | 248,57            | 33              | 7200,00            | 3797,50 | 4078        | 6,88    |
| 130 | 3913,00    | 208,65            | 39              | 7200,00            | 3923,50 | 4116        | 4,68    |
| 134 | 4045,00    | 262,16            | 45              | 7200,00            | 4051,00 | 4138        | 2,10    |
| 138 | 4203,00    | 511,60            | 1               | 511,60             | 4203,00 | <b>4203</b> | 0,00    |
| 142 | 4469,00    | 323,25            | 1               | 323,26             | 4469,00 | <b>4469</b> | 0,00    |
| 146 | 4719,00    | 333,99            | 1               | 333,99             | 4719,00 | <b>4719</b> | 0,00    |
| 150 | 4953,00    | 273,18            | 1               | 273,18             | 4953,00 | <b>4953</b> | 0,00    |
| 154 | 5171,00    | 458,59            | 1               | 458,59             | 5171,00 | <b>5171</b> | 0,00    |
| 158 | 5373,00    | 457,11            | 1               | 457,11             | 5373,00 | <b>5373</b> | 0,00    |
| 162 | 5559,00    | 760,64            | 1               | 760,64             | 5559,00 | <b>5559</b> | 0,00    |
| 166 | 5729,00    | 891,58            | 1               | 891,58             | 5729,00 | <b>5729</b> | 0,00    |
| 170 | 5883,00    | 711,46            | 1               | 711,46             | 5883,00 | <b>5883</b> | 0,00    |
| 174 | 6021,00    | 580,35            | 1               | 580,35             | 6021,00 | <b>6021</b> | 0,00    |
| 178 | 6143,00    | 621,82            | 1               | 621,82             | 6143,00 | <b>6143</b> | 0,00    |
| 182 | 6249,00    | 468,14            | 1               | 468,14             | 6249,00 | <b>6249</b> | 0,00    |
| 186 | 6339,00    | 485,45            | 1               | 485,45             | 6339,00 | <b>6339</b> | 0,00    |
| 190 | 6413,00    | 450,84            | 1               | 450,84             | 6413,00 | <b>6413</b> | 0,00    |
| 194 | 6471,00    | 341,13            | 1               | 341,13             | 6471,00 | <b>6471</b> | 0,00    |
| 198 | 6513,00    | 201,46            | 1               | 201,46             | 6513,00 | <b>6513</b> | 0,00    |
| 202 | 6539,00    | 151,09            | 1               | 151,09             | 6539,00 | <b>6539</b> | 0,00    |

Tabela B.26: Resultados para o grafo nr\_279\_size\_209 ( $|V| = 209, d = 0, 54$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4780         | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3775         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3783         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3805         | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3839         | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3857         | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3877         | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3931         | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3966         | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3978         | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4010         | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4102         | -       |
| 50  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4196         | -       |
| 54  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4272         | -       |
| 58  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4330         | -       |
| 62  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4366         | -       |
| 66  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4384         | -       |
| 70  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4408         | -       |
| 74  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4528         | -       |
| 78  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4744         | -       |
| 82  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4946         | -       |
| 86  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 5174         | -       |
| 90  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 5428         | -       |
| 94  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 5710         | -       |
| 98  | 5994,00    | 5244,43           | 1               | 5244,43            | 5994,00  | <b>5994</b>  | 0,00    |
| 102 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 6334         | -       |
| 106 | 6646,00    | 3505,99           | 1               | 3505,99            | 6646,00  | <b>6646</b>  | 0,00    |
| 110 | 6984,00    | 5985,59           | 1               | 5985,59            | 6984,00  | <b>6984</b>  | 0,00    |
| 114 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 7324         | -       |
| 118 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 7672         | -       |
| 122 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 8006         | -       |
| 126 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 8342         | -       |
| 130 | 8668,00    | 3154,11           | 1               | 3154,11            | 8668,00  | <b>8668</b>  | 0,00    |
| 134 | 8978,00    | 3151,73           | 1               | 3151,73            | 8978,00  | <b>8978</b>  | 0,00    |
| 138 | 9272,00    | 6499,75           | 1               | 6499,75            | 9272,00  | <b>9272</b>  | 0,00    |
| 142 | 9550,00    | 2705,82           | 1               | 2705,82            | 9550,00  | <b>9550</b>  | 0,00    |
| 146 | 9812,00    | 3788,21           | 1               | 3788,21            | 9812,00  | <b>9812</b>  | 0,00    |
| 150 | 10058,00   | 4132,79           | 1               | 4132,80            | 10058,00 | <b>10058</b> | 0,00    |
| 154 | 10288,00   | 3436,50           | 1               | 3436,50            | 10288,00 | <b>10288</b> | 0,00    |
| 158 | 10502,00   | 2807,11           | 1               | 2807,11            | 10502,00 | <b>10502</b> | 0,00    |
| 162 | 10700,00   | 1837,02           | 1               | 1837,02            | 10700,00 | <b>10700</b> | 0,00    |
| 166 | 10882,00   | 2701,87           | 1               | 2701,87            | 10882,00 | <b>10882</b> | 0,00    |
| 170 | 11048,00   | 2363,93           | 1               | 2363,93            | 11048,00 | <b>11048</b> | 0,00    |
| 174 | 11198,00   | 1591,67           | 1               | 1591,67            | 11198,00 | <b>11198</b> | 0,00    |
| 178 | 11332,00   | 1443,29           | 1               | 1443,29            | 11332,00 | <b>11332</b> | 0,00    |
| 182 | 11450,00   | 1971,34           | 1               | 1971,34            | 11450,00 | <b>11450</b> | 0,00    |
| 186 | 11552,00   | 1169,56           | 1               | 1169,56            | 11552,00 | <b>11552</b> | 0,00    |
| 190 | 11638,00   | 1285,06           | 1               | 1285,06            | 11638,00 | <b>11638</b> | 0,00    |
| 194 | 11708,00   | 896,46            | 1               | 896,46             | 11708,00 | <b>11708</b> | 0,00    |
| 198 | 11762,00   | 1143,30           | 1               | 1143,30            | 11762,00 | <b>11762</b> | 0,00    |
| 202 | 11800,00   | 564,57            | 1               | 564,57             | 11800,00 | <b>11800</b> | 0,00    |
| 206 | 11822,00   | 144,85            | 1               | 144,85             | 11822,00 | <b>11822</b> | 0,00    |

Tabela B.27: Resultados para o grafo nr\_489\_size\_211 ( $|V| = 211, d = 0, 68$ ).

| P   | LB<br>Raiz | Tempo<br>Raiz (s) | #Nós<br>Abertos | Tempo<br>Total (s) | LB       | UB           | Gap (%) |
|-----|------------|-------------------|-----------------|--------------------|----------|--------------|---------|
| 2   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4404         | -       |
| 6   | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3972         | -       |
| 10  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3940         | -       |
| 14  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3934         | -       |
| 18  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3938         | -       |
| 22  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3942         | -       |
| 26  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3948         | -       |
| 30  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3956         | -       |
| 34  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3966         | -       |
| 38  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 3976         | -       |
| 42  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4016         | -       |
| 46  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4166         | -       |
| 50  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4326         | -       |
| 54  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 4486         | -       |
| 58  | 4682,00    | 6300,51           | 1               | 6300,51            | 4682,00  | <b>4682</b>  | 0,00    |
| 62  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 5022         | -       |
| 66  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 5386         | -       |
| 70  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 5752         | -       |
| 74  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 6138         | -       |
| 78  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 6548         | -       |
| 82  | 6926,00    | 3024,13           | 1               | 3024,13            | 6926,00  | <b>6926</b>  | 0,00    |
| 86  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 7382         | -       |
| 90  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 7788         | -       |
| 94  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 8188         | -       |
| 98  | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 8614         | -       |
| 102 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 9026         | -       |
| 106 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 9434         | -       |
| 110 | -          | 7200,00           | 1               | 7200,00            | -        | 9826         | -       |
| 114 | 10216,00   | 4832,06           | 1               | 4832,06            | 10216,00 | <b>10216</b> | 0,00    |
| 118 | 10598,00   | 4267,85           | 1               | 4267,85            | 10598,00 | <b>10598</b> | 0,00    |
| 122 | 10964,00   | 5681,05           | 1               | 5681,05            | 10964,00 | <b>10964</b> | 0,00    |
| 126 | 11314,00   | 4415,30           | 1               | 4415,30            | 11314,00 | <b>11314</b> | 0,00    |
| 130 | 11648,00   | 3693,68           | 1               | 3693,68            | 11648,00 | <b>11648</b> | 0,00    |
| 134 | 11966,00   | 3608,48           | 1               | 3608,48            | 11966,00 | <b>11966</b> | 0,00    |
| 138 | 12268,00   | 3122,70           | 1               | 3122,70            | 12268,00 | <b>12268</b> | 0,00    |
| 142 | 12554,00   | 4486,50           | 1               | 4486,50            | 12554,00 | <b>12554</b> | 0,00    |
| 146 | 12824,00   | 3408,70           | 1               | 3408,70            | 12824,00 | <b>12824</b> | 0,00    |
| 150 | 13078,00   | 2479,32           | 1               | 2479,32            | 13078,00 | <b>13078</b> | 0,00    |
| 154 | 13316,00   | 2961,30           | 1               | 2961,30            | 13316,00 | <b>13316</b> | 0,00    |
| 158 | 13538,00   | 2941,52           | 1               | 2941,52            | 13538,00 | <b>13538</b> | 0,00    |
| 162 | 13744,00   | 3127,34           | 1               | 3127,34            | 13744,00 | <b>13744</b> | 0,00    |
| 166 | 13934,00   | 2399,09           | 1               | 2399,09            | 13934,00 | <b>13934</b> | 0,00    |
| 170 | 14108,00   | 1729,38           | 1               | 1729,38            | 14108,00 | <b>14108</b> | 0,00    |
| 174 | 14266,00   | 2506,41           | 1               | 2506,41            | 14266,00 | <b>14266</b> | 0,00    |
| 178 | 14408,00   | 1638,76           | 1               | 1638,76            | 14408,00 | <b>14408</b> | 0,00    |
| 182 | 14534,00   | 1563,59           | 1               | 1563,59            | 14534,00 | <b>14534</b> | 0,00    |
| 186 | 14644,00   | 1986,57           | 1               | 1986,57            | 14644,00 | <b>14644</b> | 0,00    |
| 190 | 14738,00   | 1523,71           | 1               | 1523,71            | 14738,00 | <b>14738</b> | 0,00    |
| 194 | 14816,00   | 1267,71           | 1               | 1267,71            | 14816,00 | <b>14816</b> | 0,00    |
| 198 | 14878,00   | 977,50            | 1               | 977,50             | 14878,00 | <b>14878</b> | 0,00    |
| 202 | 14924,00   | 4009,97           | 1               | 4009,97            | 14924,00 | <b>14924</b> | 0,00    |
| 206 | 14954,00   | 727,98            | 1               | 727,98             | 14954,00 | <b>14954</b> | 0,00    |
| 210 | 14968,00   | 0,59              | 1               | 0,59               | 14968,00 | <b>14968</b> | 0,00    |