UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

Algumas consequências da Supergravidade

por

Ranieri Batista da Costa

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Julho, 2015

Ranieri Batista da Costa

Algumas consequências da Supergravidade

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Julho, 2015

C837a Costa, Ranieri Batista da.
Algumas consequências da Supergravidade / Ranieri Batista da Costa.- João Pessoa, 2015.
50f.
Orientador: Paulo Sérgio Rodrigues da Silva
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Quebra de SUSY - mediada por gravitação. 3. Gravitino. 4. Supersimetria. 5. Supergravidade. 6. Peccei-Quinn.

UFPB/BC CDU: 53(043)

Agradecimentos

À minha família pelo suporte, tolerância, confiança e incentivo.

Ao Prof. Paulo Sérgio, pela orientação, dedicação, paciência, cobrança e pelas aulas mais importantes de minha formação acadêmica.

Ao Prof. Carlos Pires, pela prontidão em resolver as tecnicalidades na UFPB.

À Profª. Maria Luiza por me apresentar ao Grupo de Física de Partículas da UFPB.

Aos membros do Jounal Club do referido grupo, pelos debates acalorados.

Aos demais colegas da graduação e da pós-graduação, especialmente à ”galera da bola”.

À Coordenação da Pós-Graduação em Física pela eficiência.

Ao programa de bolsas do CNPQ, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

A supersimetria é uma ferramenta muito útil para estender o Modelo Padrão até a escala de grande unificação, para estudar a quebra de simetria eletrofraca e prover candidatos a matéria escura. A presença dos superparceiros resolve o problema das divergências, e altera as equações do grupo de renormalização de modo a permitir a unificação dos acoplamentos de gauge. A escala de quebra de uma supersimetria global é proporcional à energia do vácuo, o que a tornaria incompatível com o baixo valor da constante cosmológica. A promoção de SUSY a uma simetria local resulta na supergravidade, que obriga a existência do campo gravitacional com spin-2, integra naturalmente a Relatividade Geral e a física de partículas, e é necessária para ajustar o potencial e obter alta escala de quebra com constante cosmológica baixa. Este trabalho de revisão aborda modelos baseados na quebra de supersimetria mediada por gravitação. Estes modelos aceitam um setor oculto mais simples que os modelos concorrentes mediados por gauge ou por anomalias. E as partículas supersimétricas mais leves, do tipo higgsino, podem ser detectadas quando um colisor elétron-pósitron como o ILC estiver pronto.

Palavras chave: quebra de SUSY mediada por gravitação, gravitino, naturalidade, GUT, supersimetria, supergravidade, Peccei-Quinn, setor oculto.

ABSTRACT

Supersymmetry is a very useful tool for extending the Standard Model up to the grand unification scale, studying electoweak symmetry breaking and providing dark matter candidates. The presence of superpartners solves the problem of divergences, and changes the renormalization group equations in a way that allows gauge coupling unification. In a global supersymmetry the breaking scale is proportional to the vacuum energy, which makes it incompatible with the low value of the cosmological constant. Promoting SUSY to a local symmetry results in supergravity, which mandates existence of a spin-2 gravitational field, naturally integrates General Relativity and particle physics, and is required to adjust the potential and obtain a high breaking scale with low cosmological constant. This review work looks into models based on gravity-mediated supersymmetry breaking. These models allow a simpler hidden sector than their gauge-mediated or anomay-mediated counterparts. And the lightest supersymmetric particles, higgsino-like, could be detected once an electron-positron collider such as ILC is ready.

Keywords: gravity-mediated SUSY breaking, gravitino, naturalness, GUT, supersymmetry, supergravity, Peccei-Quinn, hidden sector.

Conteúdo

1 Introdução

Um dos conceitos chave do Modelo Padrão são as simetrias de gauge, ou seja, transformações de simetria que atuam de forma independente em cada ponto do espaço-tempo. As simetrias contínuas do espaço-tempo em 4 dimensões incluem rotações e boosts (descritas pelo grupo de Lorentz), e as translações (geradas pelo operador energia-momento P_μ). Nos anos 60 foram feitas várias tentativas de encaixar o grupo de Poincaré como subgrupo de algum grupo maior para propósitos de Grande Unificação. Um resultado muito importante obtido em 1967 é o teorema de Coleman-Mandula[1], segundo o qual as simetrias contínuas da matriz de espalhamento S se reduzem ao produto direto do grupo de Poincaré com grupos de simetria interna (simetrias globais e de gauge). Como os geradores das simetrias internas comutam com os geradores do grupo de Poincaré, então não se consegue formar extensões não-triviais deste.

O teorema de Coleman-Mandula assume um intervalo de massa positivo, e amplitudes de espalhamento não-nulas para colisões de duas partículas. Mas também assume implicitamente que todos os geradores são bosônicos e obedecem relações de comutação de uma Álgebra de Lie. Em 1975 Haag, Łopuszański e Sohnius[2], enfraquecendo esta última condição e permitindo simetrias internas com álgebras de anticomutação, demonstraram a existência de uma extensão não-trivial da álgebra de Poincaré com cargas espinoriais com spin no máximo 1/2, chamada álgebra de super-Poincaré.

Entre as razões para se estudar modelos supersimétricos, mesmo sem confirmação experimental, destacam-se:

- o teorema de não-renormalização da SUSY [3] garante que o superpotencial não é alterado por correções de loop, e em consequência disso, as massas são renormalizadas somente por fatores logarítmicos na escala de cutoff;

- as constantes de acoplamento dos grupos SU(3), SU(2) e U(1) do SM se alteram com a energia, segundo as equações de renormalização, de um modo que sugere todas as constantes com aproximadamente os mesmos valores em uma escala de grande unificação (GUT) anterior à escala de Planck,

- em cada modelo supersimétrico, as superpartículas mais leves são candidatos naturais a matéria escura.

Em teorias supersimétricas sem quebra, existem pares de bósons e férmions com a mesma massa, o que não é compatível com os resultados observados experimentalmente. Portanto qualquer modelo realista de SUSY deve ter um mecanismo de quebra.

O modelo padrão minimamente supersimétrico (MSSM) é uma extensão que coloca cada campo do modelo padrão em um multipleto, então a cada partícula conhecida corresponde um superparceiro, muito mais pesado e ainda não detectado. Para obter a diferença de massas entre os campos do SM e os superparceiros, termos que violam a supersimetria de maneira *soft* (ou seja, preservando o cancelamento das divergências quadráticas) são incluídos explicitamente.

O MSSM é uma teoria efetiva com muitos parâmetros de quebra soft de SUSY. Deve haver algum mecanismo de quebra espontânea, com menos parâmetros livres e mais poder preditivo. Os modelos preponderantes de geração espontânea de termos que quebram a SUSY escolhem entre dois mecanismos: gerar os termos apenas em nível de loop, ou promover a SUSY a uma simetria local.

O potencial para uma teoria de SUSY global é positivo definido. Então a energia do vácuo é estritamente positiva para SUSY quebrada, e determina a escala de quebra. A energia do vácuo é associada à constante cosmológica, e deveria ser muito pequena comparada à escala de quebra de SUSY. Teorias de SUSY local contêm um termo negativo no potencial, e podem ter seus parâmetros ajustados de modo a obter uma pequena constante cosmológica, sem afetar a escala de quebra de SUSY.

Nesta dissertação veremos como a transformação de gauge da supersimetria local leva ao surgimento de um campo massivo de spin-3/2 (o gravitino) e de um campo sem massa de spin 2 (o gráviton). Como este aparece acoplado ao tensor energia-momento, ele é associado ao campo gravitacional (em nível clássico, dado que não há consenso sobre a forma correta de quantizar a gravitação). Por isso teorias de SUSY local são conhecidas como supergravidade.

As teorias de supergravidade em 4 dimensões, depois de incluir acoplamentos com campos de matéria, produzem termos não-renormalizáveis suprimidos por potências negativas da massa de Planck. Em particular, existem termos de interação de contato envolvendo 4 férmions (dimensão 6). São portanto teorias efetivas, limites em baixa energia de uma teoria mais completa (possivelmente supercordas). Na literatura as teorias supersimétricas são referidas pelo número de supercargas (N) e de dimensões do espaço-tempo (D). Existem teorias de supergravidade em no máximo 11 dimensões. Esta dissertação tratará apenas do caso N=1, D=4, mais interessante para fenomenologia.

2 Supersimetria

Supersimetria é um tipo de simetria que associa bósons e férmions. Em uma transformação supersimétrica infinitesimal, cada campo bosônico se transforma por um termo linear em campos fermiônicos e vice-versa. Geradores de transformações do espaço-tempo e de gauge obedecem uma álgebra de Lie, com relações de comutação. No caso de transformações supersimétricas, seus geradores obedecem uma álgebra graduada (de anticomutação), também chamada superálgebra.

Uma teoria supersimétrica tem o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Se existe, por exemplo, um férmion de Majorana com 4 componentes reais, deve haver quatro campos escalares reais (neutros), ou dois escalares complexos (carregados), ou um escalar e um vetor massivo neutros.

2.1 Superálgebra de Poincaré

O grupo de Poincaré contém os geradores do momento $P_\mu = i\partial_\mu$ e os geradores do grupo de Lorentz (rotações e boosts, $M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$). As relações entre estes geradores são:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \qquad (2.1.1)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu) \qquad (2.1.2)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \qquad (2.1.3)$$

A superálgebra de Poincaré acrescenta como gerador uma carga espinorial Q_a, que vamos representar como um espinor de Majorana com 4 componentes. É bastante comum na literatura a representação em 2 componentes com um espinor de Weyl Q_α de mão esquerda, e seu conjugado $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ de mão direita [4, 5, 6]. Vamos evitar a representação de

Weyl usando em seu lugar as projeções quirais do espinor de Majorana Q:

$$Q_L = P_L Q = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)Q \quad , \quad Q_R = P_R Q = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)Q,$$
$$\bar{Q}Q \equiv \bar{Q}^a Q_a = Q^\alpha Q_\alpha + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \quad = \quad \epsilon^{\alpha\beta}Q_\beta Q_\alpha + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \tag{2.1.4}$$

onde usamos índices gregos para componentes espinoriais de Weyl, e latinos para espinores de Majorana.

O gerador espinorial Q juntamente com $P_\mu, M_{\nu\rho}$ formam a superálgebra de Poincaré, com estas relações adicionais [2]:

$$\{Q_a, \bar{Q}^b\} = 2(\gamma^\mu)_a{}^b P_\mu, \tag{2.1.5}$$
$$[Q_a, P_\mu] = 0, \tag{2.1.6}$$
$$[M_{\mu\nu}, Q_a] = -\frac{i}{2}(\gamma_{\mu\nu})_a{}^b Q_b, \tag{2.1.7}$$

onde $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Note que (2.1.5) é uma relação de anticomutação.

Os geradores $P_\mu, M_{\rho\sigma}$ do grupo de Poincaré e t_A dos grupos de simetria interna produzem transformações parametrizadas por números reais (deslocamentos, ângulos, fases internas). Uma forma geral para transformações infinitesimais por estes geradores é [7]

$$\epsilon^A \delta_A \phi^i \to \left[a^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)\right]\phi^i \tag{2.1.8}$$
$$\epsilon^A \delta_A \phi^i \to -\iota^A (t_A)^i{}_j \phi^j, \tag{2.1.9}$$

onde $\epsilon^A = (a^\mu, \lambda_{\rho\sigma}, \iota^A)$ é o conjunto de parâmetros infinitesimais de transformações.

Para transformações de supersimetria, que envolvem geradores espinoriais Q_a, os parâmetros devem ser componentes de um espinor para que a combinação resulte em um escalar. Devido à natureza anticomutativa dos espinores, os parâmetros não podem ser números reais. São variáveis de Grassmann θ_a, cujo produto é anticomutativo ($\theta_a\theta_b = -\theta_b\theta_a$), como o produto exterior de 1-formas.

A condição de Majorana $\bar{\theta} = \theta^T C$ identifica o espinor conjugado $\bar{\theta}$ como possuindo componentes dependentes de θ. O produto de variáveis de Grassmann é igual a zero sempre que houver elementos repetidos. Como o espinor θ tem 4 componentes, e as componentes de $\bar{\theta}$ são combinações lineares destas, produtos com mais de 4 instâncias de um mesmo espinor de Majorana, incluindo seu conjugado, têm índices repetidos e resultam zero.

Funções envolvendo variáveis de Grassmann são da forma $f(\xi,\zeta) = a + b\xi + c\zeta + d\xi\zeta$, sua expansão em série de potência não contém potências maiores pois $(\xi)^2 = (\zeta)^2 = 0$.

Assim uma função das quatro componentes θ_a pode ser decomposta em 16 coeficientes para os distintos produtos das variáveis de Grassmann.

Podemos definir as transformações supersimétricas agrupando um conjunto de campos de diferentes spins em um multipleto, postulando uma ação e exigindo invariância desta sob transformações supersimétricas, e explicitando o efeito da transformação sobre cada um deles, mostrando que a variação de cada componente depende apenas do parâmetro espinorial e dos outros campos do multipleto.

O formalismo de supercampos fornece uma descrição compacta e elegante das transformações de SUSY, e é muito útil na construção de teorias com interações [4]. O conjunto de variáveis (x^μ, θ_a) forma a base de uma extensão do espaço-tempo, chamada de superespaço. E uma função destas, com índices espinoriais e tensoriais totalmente contraídos, de modo a formar um escalar de Lorentz, é chamada de supercampo. Vamos representar um supercampo geral usando a forma abaixo por conveniência [8]:

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(x,\theta) &= S(x) - i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\psi(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\mathcal{F}(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\mathcal{G}(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta)V^\mu(x) \\
&\quad + i(\bar{\theta}\gamma_5\theta)[\bar{\theta}(\lambda(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\not{\partial}\psi(x))] - \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2[\mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}\Box S(x)] \\
&= S + i\sqrt{2}\bar{\theta}\psi_L - i\sqrt{2}\bar{\theta}\psi_R + i\bar{\theta}\theta_L\frac{\mathcal{F} - i\mathcal{G}}{2} - i\bar{\theta}\theta_R\frac{\mathcal{F} + i\mathcal{G}}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\bar{\theta}\gamma_\mu\theta_L - \bar{\theta}\gamma_\mu\theta_R\right)V^\mu + i(\bar{\theta}\theta_R)\bar{\theta}\lambda_L - i(\bar{\theta}\theta_L)\bar{\theta}\lambda_R \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta_L)\bar{\theta}\not{\partial}\psi_L - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta_R)\bar{\theta}\not{\partial}\psi_R + (\bar{\theta}\theta_R)(\bar{\theta}\theta_L)\left(\frac{1}{2}\mathcal{D} - \frac{1}{4}\Box S\right), \qquad (2.1.10)
\end{aligned}$$

onde $S, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{D}$ são escalares, V^μ é vetor, ψ, λ são espinores e θ é um espinor de Majorana (constante em supersimetria global).

Pode-se obter a representação de uma transformação através de seu comutador com os campos em que atua. Por exemplo, para o momento, com uma translação infinitesimal de α^μ,

$$\delta\phi = \phi' - \phi = (1 - i\alpha^\mu P_\mu)\phi(1 + i\alpha^\mu P_\mu) - \phi = -i\alpha^\mu[P_\mu, \phi] \qquad (2.1.11)$$

$$\phi' = \phi(x + \alpha) = \phi(x) + \alpha^\mu\partial_\mu\phi + O(\alpha^2) \qquad (2.1.12)$$

$$[P_\mu, \phi] = i\partial_\mu\phi \qquad (2.1.13)$$

Para obter a representação de Q, usa-se o comutador de duas variações, cada uma da forma $\delta_Q(\epsilon)\phi = (\bar{\epsilon}Q)\phi = (\bar{Q}\epsilon)\phi$ [1] :

$$[\delta_1, \delta_2]\phi = [[\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{Q}\epsilon_2], \phi] = [\bar{\epsilon}_1 Q, [\bar{\epsilon}_2 Q, \phi]] - [\bar{\epsilon}_2 Q, [\bar{\epsilon}_1 Q, \phi]] \tag{2.1.14}$$

$$[\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{Q}\epsilon_2] = \bar{\epsilon}_{1a}\epsilon_{2b}\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2(\bar{\epsilon}_1{}^a (\gamma^\mu)_a{}^b \epsilon_{2b})P_\mu, \tag{2.1.15}$$

onde usamos a relação de anticomutação (2.1.5).

O anticomutador de dois números de Grassmann quaisquer é zero, então precisamos de um ingrediente a mais para criar espinores Q cujas componentes tenham anticomutadores não triviais. Utilizamos as derivadas das variáveis de Grassmann, definidas como

$$\frac{\partial\theta_a}{\partial\theta_b} \equiv \left\{\theta_a, \frac{\partial}{\partial\theta_b}\right\} \equiv \delta_a^b \equiv \frac{\partial\bar{\theta}^b}{\partial\bar{\theta}^a} \tag{2.1.16}$$

com as seguintes propriedades:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}, \theta_a\right\} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}(C_{ac}\bar{\theta}^c) = C_{ab}, \tag{2.1.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_a}(\theta_b\theta_c) = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta_a}, \theta_b\right\}\theta_c - \theta_b\frac{\partial}{\partial\theta_a}\theta_c = \delta_b^a\theta_c - \theta_b\delta_c^a, \tag{2.1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^c}(\bar{\theta}^a(C_{ab}\bar{\theta}^b)) = \theta_c - C_{ab}\theta^a\delta_c^b = 2\theta_c, \tag{2.1.19}$$

onde C_{ab} é o operador de conjugação de carga[2]. Algumas de suas propriedades são exploradas no Apêndice.

Para que o anticomutador de duas componentes de Q tenha a forma descrita em (2.1.5), podemos representá-lo, a menos de uma fase, pela seguinte expressão[8]:

$$[\bar{\epsilon}Q, \phi] = i\left(\bar{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\theta\partial_\mu\right)\phi, \tag{2.1.20}$$

e verifica-se também que o comutador de duas transformações supersimétricas atuando em campos escalares tem a forma descrita em (2.1.15).

Agora podemos atuar com esta variação sobre o supercampo escalar definido em (2.1.10) para obter a variação de suas componentes:

$$\begin{aligned}
\delta\hat{\phi} &= i[\bar{\alpha}Q, \hat{\phi}] = -\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\hat{\phi} - i\bar{\alpha}\gamma^\mu\theta\partial_\mu\hat{\phi} \\
&= \delta S(x) - i\sqrt{2}\bar{\theta}\gamma_5\delta\psi(x) - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\delta\mathcal{F}(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\delta\mathcal{G}(x) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta)\delta V^\mu(x) \\
&\quad + i(\bar{\theta}\gamma_5\theta)[\bar{\theta}(\delta\lambda(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial\!\!\!/\delta\psi(x))] - \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2[\delta\mathcal{D}(x) - \frac{1}{2}\Box\delta S(x)]
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

[1] A relação de troca de ordem na contração de índices espinoriais está descrita no Apêndice, em (a.4).

[2] Em duas componentes, o operador equivalente, $\epsilon_{\alpha\beta}$ também é conhecido como métrica espinorial.

onde

$$
\begin{aligned}
\delta S &= i\sqrt{2}\bar{\alpha}\gamma_5\psi, && (2.1.22)\\
\delta\psi &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{F}\alpha + i\mathcal{G}\gamma_5\alpha + iV^{\mu}\gamma_{\mu}\alpha + \gamma_5\gamma^{\mu}\alpha\partial_{\mu}S\right), && (2.1.23)\\
\delta\mathcal{F} &= \bar{\alpha}\left(\lambda + i\sqrt{2}\partial\!\!\!/\psi\right), && (2.1.24)\\
\delta\mathcal{G} &= i\bar{\alpha}\gamma_5\left(\lambda + i\sqrt{2}\partial\!\!\!/\psi\right), && (2.1.25)\\
\delta V_{\mu} &= -i\bar{\alpha}\gamma_{\mu}\lambda + \sqrt{2}\bar{\alpha}\partial_{\mu}\psi, && (2.1.26)\\
\delta\lambda &= -i\gamma_5\alpha D - \gamma^{\mu\nu}\partial_{\mu}V_{\nu}\alpha, && (2.1.27)\\
\delta\mathcal{D} &= \bar{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma_5\partial_{\mu}\lambda. && (2.1.28)
\end{aligned}
$$

Para obter um melhor entendimento do significado físico dos supercampos devemos buscar representações irredutíveis da superálgebra, que serão construídas na próxima seção. Nosso objetivo é construir lagrangianas supersimétricas como extensões aos modelos conhecidos, como o Modelo Padrão.

2.2 Supercampos quirais

Podemos obter representações irredutíveis do supercampo aplicando vínculos às variações de suas componentes, de modo a anular uma parte destas. Para a variação do supercampo $\hat{\phi}$, podemos verificar que

$$
\lambda = 0 \iff \mathcal{D} = 0 \iff \partial_{\mu}V_{\nu} - \partial_{\nu}V_{\mu} = 0 \qquad (2.2.29)
$$

substituindo qualquer uma destas condições nas variações (2.1.22-2.1.28) , as demais necessariamente são verdadeiras. A última condição implica que V_{μ} é um gradiente, $V_{\mu} = \partial_{\mu}\xi$.

Para criar vínculos sobre os campos restantes, $S, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{D}, \psi$, podemos explorar a redutibilidade do espinor de Dirac ψ. Vamos particionar $\psi = P_L\psi + P_R\psi = \psi_L + \psi_R$, e substituir $\psi \to \psi_R$ e (2.2.29) em (2.1.22-2.1.28) , para conseguir este resultado:

$$
\delta\psi_R = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_R(\mathcal{F} + i\mathcal{G}) - \frac{1}{\sqrt{2}}P_R\gamma^{\mu}\alpha(\partial_{\mu}S + iV_{\mu}), \qquad (2.2.30)
$$

$$\delta\left(\frac{\partial_\mu S + iV_\mu}{\sqrt{2}}\right) = 2i\bar{\alpha}_R \partial_\mu \psi_R, \tag{2.2.31}$$

$$\delta\left(\frac{\mathcal{F} + i\mathcal{G}}{\sqrt{2}}\right) = 2i\bar{\alpha}_L \not{\partial}\psi_R. \tag{2.2.32}$$

Se tomarmos como vínculo $\psi_R = 0$ (espinor de mão esquerda), automaticamente $\mathcal{G} = i\mathcal{F}$ e $V_\mu = i\partial_\mu S$. Substituindo estes valores em (2.1.10), conseguimos um supercampo irredutível, não se pode adicionar novos vínculos sem eliminar todas as variáveis livres:

$$\hat{S}_L = S + i\sqrt{2}\bar{\theta}\psi_L + i\bar{\theta}\theta_L \mathcal{F} + \frac{i}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta)\partial_\mu S - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\bar{\theta}\not{\partial}\psi_L + \frac{1}{8}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \Box S. \tag{2.2.33}$$

Este $\hat{S}_L$ é chamado de supercampo quiral. As transformações de suas componentes são:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -i\sqrt{2}\bar{\alpha} P_L \psi, \\
\delta P_L \psi &= -\sqrt{2}\mathcal{F} P_L \alpha + \sqrt{2} P_L \not{\partial} S \alpha, \\
\delta \mathcal{F} &= i\sqrt{2}\bar{\alpha}\not{\partial}\psi_L.
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Repetindo estes passos, desta vez com $\psi \to \psi_L$, temos o complexo conjugado das variações (2.2.30-2.2.32):

$$\delta\psi_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_L(\mathcal{F} - i\mathcal{G}) + \frac{1}{\sqrt{2}} P_L \gamma^\mu \alpha (\partial_\mu S - iV_\mu), \tag{2.2.35}$$

$$\delta\left(\frac{\partial_\mu S - iV_\mu}{\sqrt{2}}\right) = -2i\bar{\alpha}\partial_\mu \psi_L, \tag{2.2.36}$$

$$\delta\left(\frac{\mathcal{F} - i\mathcal{G}}{\sqrt{2}}\right) = 2i\bar{\alpha}\not{\partial} P_L \psi, \tag{2.2.37}$$

e o supercampo antiquiral

$$\hat{S}_L^\dagger = S - i\sqrt{2}\bar{\theta}\psi_R - i\bar{\theta}\theta_R \mathcal{F}^\dagger - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta)\partial_\mu S^\dagger - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\bar{\theta}\not{\partial}\psi_R + \frac{1}{8}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \Box S^\dagger. \tag{2.2.38}$$

2.3 Derivadas supercovariantes

A derivada ordinária de um tensor não é, em geral, um tensor, pois os geradores das transformações possíveis podem não comutar com os vetores da base do sistema de coordenadas. Diz-se que um campo se transforma de modo covariante quando, em transformações infinitesimais, a variação deste campo é linear nos parâmetros de gauge, e não contém derivadas destes[7]. O operador de derivada covariante é definido de forma a comutar com as transformações de gauge.

Não podemos usar a derivada de Grassmann $\frac{\partial}{\partial \theta_a}$ diretamente para construir novos supercampos pois

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}, Q\right\} \neq 0 \qquad , \qquad \delta_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\phi}\right) \neq \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\delta_\alpha \hat{\phi}\right). \tag{2.3.39}$$

Para contornar esta dificuldade, vamos definir a derivada supercovariante de forma que $D_a[i\bar{\alpha}Q, \hat{\phi}] = i[\bar{\alpha}Q, D_a\hat{\phi}]$. Para satisfazer esta condição devemos ter

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^a} - i\gamma^\mu{}_a{}^b \theta_b \partial_\mu \quad , \quad \bar{D}^a = -\frac{\partial}{\partial \theta_a} + i\bar{\theta}^b \gamma^\mu{}_b{}^a \partial_\mu. \tag{2.3.40}$$

Verificam-se estas relações:

$$\{D_a, Q_b\} = \{D_a, \bar{Q}^b\} = \{\bar{D}^a, Q_b\} = \{\bar{D}^a, \bar{Q}^b\} = 0 \tag{2.3.41}$$

$$\{D_a, \bar{D}^b\} = 2i\gamma^\mu{}_a{}^b \partial_\mu \tag{2.3.42}$$

$$\{P_L D_a, P_L \bar{D}^b\} = \{P_R D_a, P_R \bar{D}^b\} = 0. \tag{2.3.43}$$

Podemos verificar que a projeção de mão direita da derivada covariante,$P_R D$, atuando em um supercampo quiral, é zero. Em geral esta condição é usada como a definição de supercampo quiral [4]:

$$P_R D_a \hat{\phi} = 0. \tag{2.3.44}$$

Com esta definição mostra-se facilmente que o produto de dois supercampos quirais também é quiral:

$$P_R D(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) = (P_R D\hat{\phi}_1)\hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_1 (P_R D\hat{\phi}_2) = 0. \tag{2.3.45}$$

Portanto qualquer função holomórfica (expansível em série de Taylor) de supercampos (anti)quirais também é (anti)quiral.

Os anticomutadores nulos em (2.3.43) implicam que $P_L D(\bar{D} P_L D)\hat{\phi} = P_R D(\bar{D} P_R D)\hat{\phi} = 0$ para todo supercampo $\hat{\phi}$. Podemos considerar $\bar{D} P_R D$ como uma projeção quiral.

Os campos componentes $(V^\mu, \lambda, \mathcal{D})$, ignorados nesta seção, servirão adiante como base da representação real, dos supercampos de gauge. Antes, vamos explorar a construção de lagrangianas simples com os supercampos quirais.

2.4 Lagrangianas supersimétricas

Para que a ação seja invariante por qualquer transformação, é necessário que a variação da lagrangiana seja, no máximo, uma derivada total das coordenadas. O termo quadrilinear (termo-D) em θ de um supercampo geral varia somente por uma derivada total, conforme (2.1.28). O termo bilinear em θ de um campo quiral (termo-F) também, conforme (2.2.34).

A integração de variáveis de Grassmann é equivalente à derivação. Define-se

$$\int d\theta_1 = 0, \qquad \int d\theta_1\theta_1 = 1, \qquad \int d\theta_2 d\theta_1\theta_1\theta_2 = \int d\theta_2(1)\theta_2 = 1 \tag{2.4.46}$$

. Dessa forma a integral $\int d^4\theta f(\theta)$ será nula a menos que $f(\theta)$ possua um termo quadrilinear. A integral $\frac{1}{8}\int d^4\theta(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 = 1$.

Vamos expressar ações supersimétricas como integrais no superespaço. Definimos o potencial de Kähler $K(\hat{S}_i, \hat{S}_i^\dagger)$ como uma função real (componentes escalares reais, e espinores de Majorana) dos campos quirais $\hat{S}_i$ e seus conjugados. Para construir a lagrangiana precisamos apenas do termo-D, pois os demais termos serão eliminados pela forma como a ação será definida. Ainda podemos usar derivação parcial para escolher uma forma canônica para a lagrangiana. No caso simples de um único supercampo quiral $\hat{S}$, o produto $\hat{S}\hat{S}^\dagger$ tem esta forma

$$K(\hat{S}^\dagger, \hat{S}) = \hat{S}^\dagger\hat{S} = (\ldots) - \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\left(\partial_\mu S\partial^\mu S^\dagger + \frac{i}{2}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \mathcal{F}^\dagger\mathcal{F} + \partial_\mu(\ldots)\right), \tag{2.4.47}$$

onde o primeiro termo vem do produtos entre os termos quadrilinear de S ($S^\dagger$) e escalar de $S^\dagger$ (S), o segundo vem dos termos linear e trilinear, e o terceiro vem do produto dos bilineares. As derivadas de segunda ordem em S foram convertidas em primeira ordem e derivadas totais que foram omitidas, e também omitimos termos de ordem mais baixa em θ. Estes são os termos cinéticos para os campos S, ψ. E o campo $\mathcal{F}$, que não tem dinâmica, é um campo auxiliar que pode ser eliminado pelas equações de Euler-Lagrange. Faremos esta eliminação quando definirmos um potencial para a teoria.

Se eliminarmos todos os termos da função K usando a integral nas variáveis de Grassmann, exceto o termo-D, teremos um objeto cuja variação por SUSY é uma derivada total, portanto sua integral em todo o espaço-tempo é invariante de SUSY, e pode servir de protótipo para uma lagrangiana supersimétrica. Definimos a ação como

$$\int d^4x\mathcal{L}_D = -\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta K(\hat{S}, \hat{S}^\dagger). \tag{2.4.48}$$

Definimos o superpotencial $\hat{W}(\hat{S}_i)$ como uma função holomórfica dos supercampos quirais $\hat{S}_i$ tratados como variáveis complexas [6]. Como explicado em (2.3.45), $\hat{W}$ é um supercampo quiral. Mostraremos que seu termo-F pode ser adicionado a uma lagrangiana supersimétrica, com seu conjugado.

O termo escalar de $\hat{W}$ será $W(S_i)$, uma função das componentes de ordem zero dos $\hat{S}_i$. Aplicando a regra da cadeia em (2.2.34) temos que

$$\delta W(S_i) = \frac{\partial W}{\partial S_i}\delta S_i = -i\sqrt{2}\frac{\partial W}{\partial S_i}\bar{\alpha}P_L\psi_i = -i\sqrt{2}\bar{\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial S_i}P_L\psi_i\right). \tag{2.4.49}$$

Comparando com a definição de δS, que é válida para qualquer supercampo quiral, vemos que o termo espinorial de $\hat{W}$ é $\left(\frac{\partial W}{\partial S_i}P_L\psi_i\right)$. [7]. Sejam $\psi(W), F(W)$ a componente espinorial e o termo-F do supercampo $\hat{W}$, cuja componente de ordem zero é W. Calculando $\delta\psi(W)$ e isolando a variação α, obtemos o coeficiente de $-\bar{\theta}\theta_L$ como

$$-iF(W) = -i\frac{\partial W}{\partial S_i}F_i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial S_i \partial S_j}\bar{\psi}_i P_L\psi_j. \tag{2.4.50}$$

Para escrever uma ação contendo este termo na forma integral, dado que W é complexo, devemos incluir o seu conjugado também:

$$\int d^4x\mathcal{L}_F = -\frac{1}{2}\int d^4xd^2\theta_L W(S_i) - \left[\frac{1}{2}\int d^4xd^2\theta_R W^\dagger(S_i)\right]. \tag{2.4.51}$$

Juntando os resultados (2.4.47) e (2.4.50),

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F = \partial_\mu S\partial^\mu S^\dagger + \frac{i}{2}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi + \mathcal{F}^\dagger\mathcal{F} - i\frac{\partial W}{\partial S_i}F_i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial S_i\partial S_j}\bar{\psi}_i P_L\psi_j \\ + i\frac{\partial W^\dagger}{\partial S_i^\dagger}F_i^\dagger - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial S_i^\dagger \partial S_j^\dagger}\bar{\psi}_i P_R\psi_j.\end{aligned} \tag{2.4.52}$$

Derivando em relação a $\mathcal{F}^\dagger$ isolamos o campo auxiliar $\mathcal{F}$ em uma equação puramente algébrica:

$$\mathcal{F} + i\left(\frac{\partial W^\dagger}{\partial S^\dagger}\right)_{\theta=\bar{\theta}=0} = 0. \tag{2.4.53}$$

2.5 Supercampos de gauge

Para uma rotação U(1) global, sendo $\hat{S}$ um supercampo quiral, e ω parâmetros constantes, $\hat{S}' = e^{ig\omega}\hat{S}$ também é quiral. Constantes são campos quirais e antiquirais pois

$P_L D_a \omega = P_R D_a \omega = 0$.

A mesma transformação feita com parâmetros locais $\omega(x)$, contudo, não preserva a quiralidade, pois $P_R D_a \omega(x) = -i\partial\!\!\!/\omega P_L \theta \neq 0$. Mas note que $P_R \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{i}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta)\partial_\mu\omega\right) = -i\partial\!\!\!/\omega P_L \theta$. Podemos completar $\omega(x)$ com termos bilineares e quadrilineares em θ a fim de cancelar os termos gerados com a atuação de $P_R D$, criando assim um supercampo quiral. A forma completa deste supercampo quiral deve ser igual à forma (2.2.33) tomando $S = \omega$, $\psi_L = 0$ e $\mathcal{F} = 0$:

$$\Omega \equiv \omega + \frac{i}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta)\partial_\mu\omega + \frac{1}{8}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\Box\omega. \tag{2.5.54}$$

Para implementar as transformações de gauge no superespaço, vamos associar a cada gerador t_A do grupo de gauge, um supercampo Ω^A. A transformação de gauge para supercampos quirais escalares é dada por:

$$\hat{S}' = e^{igt_A\hat{\Omega}_A}\hat{S} \quad , \quad \hat{S}^{\dagger\prime} = \hat{S}^\dagger e^{-igt_A\hat{\Omega}_A^\dagger}. \tag{2.5.55}$$

A quiralidade de $\hat{S}$ é preservada, pois esta expressão se reduz a produtos de campos quirais. Mas o produto $\hat{S}^\dagger\hat{S}$ não é invariante de gauge pois $\hat{S}^{\dagger\prime}\hat{S}' = \hat{S}^\dagger\hat{S}e^{igt_A(\hat{\Omega}_A - \hat{\Omega}_A^\dagger)}$. Precisamos alterar a definição do potencial de Kähler para recuperar a invariância. Vamos definir o supercampo vetorial real $\hat{\Phi}_A$ de forma que

$$\hat{S}^{\dagger\prime}e^{-2gt_A\hat{\Phi}'_A}\hat{S}' = \hat{S}^\dagger e^{-2gt_A\hat{\Phi}_A}\hat{S} \implies e^{-2gt_A\hat{\Phi}'_A} = e^{igt_B\hat{\Omega}_B^\dagger}e^{-2gt_A\hat{\Phi}_A}e^{-igt_C\hat{\Omega}_C}. \tag{2.5.56}$$

As componentes de $\hat{\Phi}_A$ têm a forma geral descrita em (2.1.10), com a condição de que todos os campos bosônicos são reais, e os espinores são de Majorana.

A partir dos $\hat{\Phi}_A$ pode-se construir os supercampos espinoriais quirais

$$gt_A\hat{\mathcal{W}}_A = -\frac{i}{8}\bar{D}P_R D\left[e^{2gt_B\hat{\Phi}_B}De^{-2gt_C\hat{\Phi}_C}\right], \tag{2.5.57}$$

que se transformam pela representação adjunta do grupo de gauge, de forma análoga a um campo de força:

$$t_A\hat{\mathcal{W}}'_A = e^{igt_B\hat{\Omega}_B}t_A\hat{W}_A e^{-igt_C\hat{\Omega}_C}. \tag{2.5.58}$$

Para um grupo abeliano, (2.5.56) e (2.5.58) se reduzem respectivamente a

$$\hat{\Phi}' = \hat{\Phi} + \frac{i}{2}(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^\dagger) \quad , \quad \hat{\mathcal{W}} = \frac{i}{4}(\bar{D}P_R D)\left(D_L\hat{\Phi}\right), \tag{2.5.59}$$

e $\hat{\mathcal{W}}$ é um invariante de gauge.

Sempre existem parâmetros de gauge que anulam os campos $\mathcal{S},\mathcal{M},\mathcal{N},\psi$. A fixação de gauge que anula estas componentes é chamada gauge de Wess-Zumino. No caso abeliano é fácil identificar os valores necessários. Escrevendo o supercampo $\hat{\Omega}$ na forma quiral (2.2.33) com estas substituições:

$$S \to \omega = Re(\omega) + iS \quad , \quad \psi \to \xi = -2i\gamma_5\psi \quad , \quad \mathcal{F} \to \zeta = i(\mathcal{F} - i\mathcal{G}), \tag{2.5.60}$$

o supercampo vetorial fixado no gauge WZ fica:

$$\hat{\Phi} - \frac{i}{2}(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}^\dagger) = \frac{1}{2}(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta)(V^\mu - \partial^\mu Re(\omega)) + i(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\bar{\theta}\lambda - \frac{1}{4}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\mathcal{D}, \tag{2.5.61}$$

onde a parte real de ω não está vinculada por estas condições, e pode ser vista como um parâmetro de gauge usual, a ser fixado por outras restrições.

O produto $\overline{\hat{\mathcal{W}}_A^c}\hat{\mathcal{W}}_A = \hat{\mathcal{W}}_{Aa}C^{ab}\hat{\mathcal{W}}_{Ab}$ é invariante de gauge e quiral, então seu termo-F pode ser incluso na lagrangiana, junto com seu conjugado. A ação fica como

$$\int d^4x d^2\theta_L \overline{\hat{\mathcal{W}}_A^c}\hat{\mathcal{W}}_A = \int d^4x \left(\frac{i}{2}\bar{\lambda}_A \not{D}_{AC}\lambda_C - \frac{1}{4}F_{\mu\nu A}F_A^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_A\mathcal{D}_A\right), \tag{2.5.62}$$

onde as derivadas covariantes são

$$F_{\mu\nu A} = \partial_\mu V_{\nu A} - \partial_\nu V_{\mu A} - gf_{ABC}V_{\mu B}V_{\nu C}, \tag{2.5.63}$$

$$D^\mu_{AC}\lambda_C = \partial^\mu\lambda_A + igV^\mu_B(t_B)_{AC}\lambda_C. \tag{2.5.64}$$

Para um grupo abeliano, $\hat{\Phi}_p$ é invariante de gauge. Seu termo-D não é uma derivada total (ao contrário do termo-D de um supercampo quiral), então nada impede a inclusão deste termo na lagrangiana. A cada grupo $U(1)_p$ do modelo, corresponde um termo de Fayet-Iliopoulos

$$\mathcal{L} = \xi_p D_p. \tag{2.5.65}$$

Pode-se pensar neste termo como parte do potencial de Kähler, da forma $\hat{S}^\dagger\hat{\Phi}\hat{S}$, onde o supercampo quiral $\hat{S}$ é substituído por uma constante.

Estes são os fundamentos para a construção de teorias com supersimetria global, onde o parâmetro de transformação é o mesmo em todo o espaço-tempo. Uma simetria global pode ser generalizada para uma simetria local através do mecanismo de gauge. A generalização desta construção para uma supersimetria local é o assunto do próximo capítulo.

3 Supergravidade

Uma teoria de supersimetria local é equivalente à supersimetrização da teoria gravitacional. Em teorias de gauge, para criar uma simetria local a partir de uma global, acrescentamos à teoria um campo de gauge, que possui um índice vetorial e um dos geradores do grupo de gauge.

É de se esperar que o campo de gauge da supersimetria tenha índices vetorial e espinorial. Mas deve haver o mesmo número de bósons e férmions, então seremos obrigados a incluir também um novo bóson.

3.1 Espinores na relatividade geral

A formulação da Relatividade Geral em função da métrica admite representações para campos escalares, vetores e tensores. Mas não podem ser definidos espinores que se transformem sob o grupo de transformações gerais de coordenadas (GCT)[9]. Isso porque uma rotação de 2π no espaço dos espinores não é equivalente à identidade, pois leva $\psi(x)$ em $-\psi(x)$. Para generalizar as representações espinorias para o espaço-tempo curvo, define-se, em cada ponto deste, um espaço tangente com métrica plana. Os espinores são definidos nestes espaços a menos de uma transformação de Lorentz local (LLT)

$$\psi'_m(x') = (\exp\{-i\lambda_{ab}(x)\sigma^{ab}\})_{mn}\psi_n(x), \tag{3.1.1}$$

onde $\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b], \lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$, e a ação deve ser invariante por estas transformações.

Para alternar entre os índices de espaço curvo $\mu, \nu, \rho...$ e os de espaço plano tangente $a, b, c...$ usa-se a vielbein $e^a_\mu(x)$, uma transformação entre as bases de vetores globais e vetores locais do espaço tangente definido para cada ponto, e que deve obedecer a regra abaixo:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}e^a_\mu(x)e^b_\nu(x), \tag{3.1.2}$$

onde η_{ab} é a métrica de Minkowski, e $g_{\mu\nu}(x)$ é a métrica do espaço curvo.

A todo vetor $V^\mu(x)$ do espaço-tempo corresponde um vetor do espaço tangente $V^a(x) = e^a_\mu(x)V^\mu(x)$. Cada componente $V^a(x)$ se comporta como um campo escalar sob transformações de coordenadas ($V^a(x') = V^a(x)$), mas como vetor sob transformações locais ($V'^a(x) = \Lambda^{-1a}{}_b V^b(x)$).

Em particular, as matrizes de Dirac γ^a são definidas nos espaços tangentes, e usando a vielbein podemos estender sua definição para o espaço curvo:

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}, \qquad \gamma_\mu(x) \equiv e^a_\mu(x)\gamma_a, \qquad \{\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x). \tag{3.1.3}$$

Para os vetores definidos a partir da contração destas matrizes com espinores, como a corrente da QED, por exemplo,

$$A^\mu(x)J_\mu(x) = e^a_\mu(x)A^\mu(x)\left(\bar{\psi}(x)\gamma_a\psi(x)\right). \tag{3.1.4}$$

A equação (3.1.2) não especifica completamente a vielbein em função da métrica. Dada uma solução desta equação, pode-se tomar uma transformação de Lorentz local em cada ponto do espaço-tempo e obter outra solução

$$e'^a_\mu(x) = \Lambda^{-1a}{}_b(x)e^b_\mu(x). \tag{3.1.5}$$

Transformações locais de Lorentz no espaço curvo não alteram as coordenadas do espaço-tempo, apenas os ídices locais se transformam, diferente de uma transformação global de Lorentz no espaço plano. As componentes da vielbein se comportam como vetores sob transformações gerais de coordenadas:

$$e'^a_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}e^a_\nu(x). \tag{3.1.6}$$

Em geral a base de vetores locais $E_a \equiv e^\mu_a \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ não é uma base coordenada, pois seus vetores não comutam:

$$[e^\mu_a\partial_\mu, e^\nu_b\partial_\nu] = -\Omega_{ab}{}^c e^\rho_c\partial_\rho \tag{3.1.7}$$

$$\Omega_{ab}{}^c \equiv e^\mu_a e^\nu_b(\partial_\mu e^c_\nu - \partial_\nu e^c_\mu). \tag{3.1.8}$$

De forma geral, usaremos os índices de espaço plano ou curvo com muita liberdade, subentendendo as contrações apropriadas com a vielbein $e^a_\mu(x)$ ou sua inversa $e^\mu_a(x)$. Mas há exceções. Por exemplo, operadores que não comutam com a vielbein, como a derivação ∂_μ. Não definiremos nenhum operador ∂_a.

3.2 Procedimento de Noether

Para derivar uma teoria localmente supersimétrica vamos partir de uma teoria invariante por supersimetria global, promover o parâmetro espinorial constante a uma função $\alpha(x)$ e construir termos necessários para recuperar a invariância da ação. É o mesmo método que obtém a invariância de gauge quando aplicado a simetrias internas.

Ao final, seremos obrigados a criar dois campos on-shell (não-auxiliares). Um destes termos terá dois índices vetoriais e será um campo sem massa de spin-2. E estará acoplado ao tensor energia-momento, que é a corrente conservada do grupo de Poincaré. Na Relatividade Geral é a métrica $g_{\mu\nu}$ que faz esse papel, por isso supersimetria local também é chamada de supergravidade. Duas teorias até então independentes, RG e SUSY global, são unificadas. A versão quantizada deste campo, chamada de gráviton, não será abordada nesta dissertação. O outro campo será massivo, de spin-3/2, e parceiro supersimétrico do gráviton, portanto é chamado de gravitino. Este será o campo de gauge da supersimetria.

Começando com a lagrangiana de Wess-Zumino para campos livres sem massa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{2}\bar{\chi}\partial\!\!\!/\chi, \tag{3.2.9}$$

invariante por transformações da forma

$$\begin{aligned} \delta(\alpha)A &= i\bar{\alpha}\gamma_5\chi, && (3.2.10)\\ \delta(\alpha)B &= -i\bar{\alpha}\chi, && (3.2.11)\\ \delta(\alpha)\chi &= i\partial_\mu B\gamma^\mu\alpha + \partial_\mu A\gamma^\mu\gamma_5\alpha. && (3.2.12) \end{aligned}$$

Fazendo o parâmetro $\alpha \to \alpha(x)$ e aplicando a transformação à Lagrangiana, além da derivada total usual, o termo espinorial ganha uma nova contribuição,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu(-\bar{\alpha}\gamma^\mu\partial\!\!\!/ B\chi + i\bar{\alpha}\gamma^\mu\partial\!\!\!/ A\gamma_5\chi) + (\partial_\mu\alpha)(-B\!\!\!/\partial\gamma^\mu\chi + i\partial\!\!\!/ A\gamma^\mu\gamma_5\chi). \tag{3.2.13}$$

Precisamos acrescentar novos termos à lagrangiana para cancelar o termo em $\partial_\mu\alpha$ e tornar a teoria invariante por transformações supersimétricas locais. Primeiro definimos um espinor de spin-3/2 ψ_μ que se transforma com a derivada do parâmetro, isto é, $\delta(\alpha)\psi_\mu = \frac{1}{\kappa}\partial_\mu\alpha$ (como um campo de gauge), e um termo extra para a Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_1 = -\kappa\bar{\psi}_\mu(-\partial\!\!\!/ B\gamma^\mu\chi + i\partial\!\!\!/ A\gamma^\mu\gamma_5\chi). \tag{3.2.14}$$

O fator de escala $\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{8\pi}{G}} = M_P$ é a massa de Planck, e ψ_μ tem dimensão 3/2. Calculando a variação para $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1$ os termos dependentes de $\partial_\mu\alpha$ se cancelam, mas aparecem novos termos lineares em α:

$$\delta(\mathcal{L}+\mathcal{L}_1) = -i\kappa(\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu + \bar{\psi}_\nu\gamma_\mu)T^{\mu\nu}\alpha + \ldots \tag{3.2.15}$$

Mostramos apenas os termos que não se reduzem a derivadas totais. O termo que sobra é proporcional ao tensor momento-energia desta teoria,

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu A)(\partial^\nu A) + (\partial^\mu B)(\partial^\nu B) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}[(\partial^\rho A)^2 + (\partial^\rho B)^2] + \frac{i}{2}\bar{\chi}\gamma^\mu\partial^\nu\chi. \tag{3.2.16}$$

Se definirmos uma vielbein e_μ^a que se transforma de forma covariante, como

$$\delta e_\mu^a = -i\kappa\bar{\alpha}\gamma^a\psi_\mu, \tag{3.2.17}$$

então a variação da métrica associada é $\delta g_{\mu\nu} = -i\kappa\bar{\alpha}(\gamma_\mu\psi_\nu + \gamma_\nu\psi_\mu)$ e podemos adicionar o seguinte termo à Lagrangiana para cancelar a variação:

$$\mathcal{L}_2 = -g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = -\eta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b T^{\mu\nu}. \tag{3.2.18}$$

Finalmente, como não se pode determinar completamente os novos campos, eles devem ser dinâmicos. Acrescentamos os termos cinéticos correspondentes para completar a Lagrangiana, o termo de Einstein-Hilbert para a métrica e o termo de Rarita-Schwinger para ψ_μ:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{\mathbf{e}}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\bar{\psi}_\lambda\gamma_5\gamma_\mu D_\nu\psi_\rho, \tag{3.2.19}$$

onde $\mathbf{e} = \det(e_\mu^a)$, $R = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, e $D_\nu\psi_\rho$ é a derivada covariante do gravitino[1].

Para este modelo simples com campos livres e sem massa estes são os acoplamentos da matéria com a gravitação:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M = \;& \frac{\mathbf{e}}{2}g_{\mu\nu}(\partial^\mu A\partial^\nu A + \partial^\mu B\partial^\nu B) + \frac{i\mathbf{e}}{2}\bar{\chi}\not{D}\chi - \frac{\kappa}{2}\mathbf{e}\bar{\psi}_\mu\partial_\nu(-B + i\gamma_5 A)\gamma^\nu\gamma^\mu\chi \\ & -\frac{\kappa^2}{16}\mathbf{e}(\bar{\chi}\gamma_5\gamma_\mu\chi)(\bar{\chi}\gamma_5\gamma^\mu\chi) - i\frac{\kappa^2}{8}(B\overleftrightarrow{\partial}_\sigma A)[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\rho - i\mathbf{e}\bar{\chi}\gamma_5\gamma^\sigma\chi] \\ & +\frac{\kappa^2}{16}\bar{\chi}\gamma_5\gamma_\sigma\chi[i\epsilon\mu\nu\rho\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\rho + \mathbf{e}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^\sigma\psi^\mu].\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

As transformações de SUSY local deste modelo são

$$\delta A = i\bar{\alpha}\gamma_5\chi, \tag{3.2.21}$$

$$\delta B = -\bar{\alpha}\chi, \tag{3.2.22}$$

[1] Ver definição da conexão de spin em (3.4.38) e da derivada covariante em (3.4.49)

$$\begin{aligned}
\delta\chi &= \left(i\partial_\mu B + \frac{i\kappa}{2}(\bar{\psi}_\mu\chi)\right)\gamma^\mu\alpha + \left(\partial_\mu A + i\frac{\kappa}{2}(\bar{\psi}_\mu\gamma_5\chi)\right)\gamma^\mu\gamma_5\alpha \\
&\quad + \frac{\kappa^2}{4}\left(\bar{\alpha}(-B+i\gamma_5 A)\gamma_5\chi\right)\gamma_5\chi, && (3.2.23) \\
\delta e^a_\mu &= -i\kappa\bar{\alpha}\gamma^a\psi_\mu, && (3.2.24) \\
\delta\psi_\mu &= \frac{2}{\kappa}D_\mu\alpha + \frac{i\kappa}{2}(B\overleftrightarrow{\partial_\mu}A)\gamma_5\alpha - \frac{\kappa^2}{4}(\bar{\alpha}(-B+i\gamma_5 A)\gamma_5\chi)\gamma_5\psi_\mu. && (3.2.25)
\end{aligned}$$

A presença de termos não-renormalizáveis, com potências positivas de κ (negativas em M_P) indica que a supergravidade em $D=4$ dimensões é uma teoria efetiva, um limite em baixas energias para alguma teoria fundamental localmente supersimétrica.

3.3 Construção da Lagrangiana

Como a renormalizabilidade foi perdida, algumas restrições à forma da Lagrangiana perdem a razão de existir. O potencial de Kähler e o superpotencial podem incluir termos de ordem superior. Como ponto de partida tomamos esta forma para a lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\int d^4\theta K(\hat{S}^\dagger,\hat{\Phi},\hat{S}) - \frac{1}{4}\int d^2\theta_L f_{AB}(\hat{S})\overline{\mathcal{W}^c_A}\mathcal{W}_B - \left[\frac{1}{2}\int d^2\theta_L W(\hat{S}) + \text{h.c.}\right]. \quad (3.3.26)$$

Incluímos na lagrangiana cinética de gauge um função holomórfica $f_{AB}(\hat{S})$ dos supercampos escalares quirais, e tomamos $\kappa = 1$. A expansão completa dos termos da lagrangiana com supersimetria local foi obtida em [10].

O potencial contém termos dependentes de K, que não é invariante por transformações de Kähler (somar com um supercampo quiral h e com seu conjugado antiquiral $h^\dagger$). Corrigimos este problema atribuindo a seguinte lei de transformação para W e K:

$$K'(S^\dagger,S) = K(S^\dagger,S) - h(S) - h^\dagger(S^\dagger) \quad , \quad W'(S) = e^{h(S)}W(S) \quad (3.3.27)$$

Eliminamos o termo W escolhendo $h = -\log W \implies W' = 1$, então o potencial depende apenas da combinação invariante [11]

$$G \equiv K + \log|W|^2, \quad (3.3.28)$$

e pode ser expresso na forma

$$V = e^G(G_i(G^{-1})^{i\bar{j}}G_{\bar{j}} - 3) \text{ , onde } G_i \equiv \frac{\partial G}{\partial S^i} \text{ , } G_{\bar{j}} \equiv \frac{\partial G}{\partial S^{\dagger j}} \text{ , } G_{i\bar{j}} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial S^i \partial S^{\dagger j}}. \quad (3.3.29)$$

Note que o potencial para uma supersimetria local não é positivo definido. Isso será útil nas aplicações do próximo capítulo.

Estas são as leis de transformação para os campos componentes:

$$\begin{aligned}
\delta S_i &= -i\sqrt{2}\bar{\alpha}\psi_L, &(3.3.30)\\
\delta\psi_{iL} &= \sqrt{2}(D_\mu S)P_L\gamma^\mu\alpha + i\sqrt{2}e^{G/2}(G^{-1})^{i\bar{j}}G_{\bar{j}}\alpha_L \\
&\quad -\frac{i}{2\sqrt{2}}(G^{-1})^{i\bar{j}}\frac{\partial f^*_{AB}}{\partial S^{\dagger j}}\bar{\lambda}_A P_R\lambda_B\alpha_L + (\ldots), &(3.3.31)\\
\delta e^a_\mu &= -i\bar{\alpha}\gamma^a\psi_\mu, &(3.3.32)\\
\delta\psi_\mu &= 2D_\mu\alpha + ie^{G/2}\gamma_\mu\alpha + (\ldots), &(3.3.33)\\
\delta V^\mu_A &= -i\bar{\alpha}\gamma^\mu\lambda_A, &(3.3.34)\\
\delta\lambda_{AR} &= -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}F_{A\mu\nu}\alpha_R - ig\,\mathrm{Re}(f^{-1}_{AB})G_i(t_B)^i{}_j S^j\alpha_R + (\ldots). &(3.3.35)
\end{aligned}$$

3.4 Equações de estrutura para torção e curvatura

A partir da vielbein pode-se definir a 1-forma $e^a \equiv e^a_\mu dx^\mu$, e sua derivada exterior é uma 2-forma construída com o produto exterior antisimétrico ($\wedge$):

$$de^a = \partial_\mu(e^a_\nu)dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2!}(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu)dx^\mu \wedge dx^\nu = (\partial_{[\mu}e^a_{\nu]})dx^\mu \wedge dx^\nu. \qquad (3.4.36)$$

As componentes $(\partial_{[\mu}e^a_{\nu]})$ são tensores de segunda ordem por transformações de coordenadas, mas não são vetores por transformações de Lorentz locais.

$$de'^a = \Lambda^{-1a}{}_b de^b + d\Lambda^{-1a}{}_b \wedge e^b. \qquad (3.4.37)$$

Para corrigir esse problema definimos a conexão de spin $\omega^{ab} = \omega_\mu{}^{ab}dx^\mu$, com $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$, e a torção $T^a = T_{\mu\nu}{}^a dx^\mu \wedge dx^\nu$, com $T_{\mu\nu}{}^a = -T_{\nu\mu}{}^a$, que obedecem à primeira equação de estrutura de Cartan:

$$de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \equiv T^a. \qquad (3.4.38)$$

Para que T^a seja um vetor no espaço tangente, as componentes $\omega_\mu{}^a{}_b$ devem se transformar como um potencial de gauge para o grupo de Lorentz:

$$\omega'_\mu{}^a{}_b = \Lambda^{-1a}{}_c\partial_\mu\Lambda^c{}_b + \Lambda^{-1a}{}_c = \omega_\mu{}^c{}_d\Lambda^d{}_b. \qquad (3.4.39)$$

Definimos derivadas covariantes para tensores do espaço tangente (sem atuar nos índices de espaço de coordenadas) e espinores, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_\mu V^a{}_b &= \partial_\mu V^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c V^c{}_b - \omega_\mu{}^d{}_b V^a{}_d \\ &= \partial_\mu V^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c V^c{}_b + \omega_{\mu b}{}^d V^a{}_d, \end{aligned} \tag{3.4.40}$$

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\psi. \tag{3.4.41}$$

No formalismo mais comum em relatividade geral, a torção é nula e a conexão depende apenas da vielbein. Por isso vamos separar a conexão de spin em uma parte dependente da vielbein, e outra apenas da torção. Para deixar as antissimetrizações explícitas todos os índices devem ser convertidos para o mesmo tipo (global ou local, covariante ou contravariante). Vamos tomar todos os índices como locais e covariantes, e usaremos os coeficientes de não-holonomia Ω_{abc} definidos em (3.1.8):

$$\omega_{abc} = \omega_{abc}(e) + K_{abc}, \tag{3.4.42}$$

$$\omega_{abc}(e) = \frac{1}{2}\left(\Omega_{abc} - \Omega_{acb} - \Omega_{bca}\right), \tag{3.4.43}$$

$$K_{abc} = -\frac{1}{2}\left(T_{abc} - T_{acb} - T_{bca}\right). \tag{3.4.44}$$

A conexão $\omega_\mu{}^{ab}(e)$ é livre de torção e aplicada no formalismo de segunda ordem da relatividade geral. O tensor K_{abc}, construído a partir da torção e antissimétrico nos dois últimos índices, é chamado de contorção.

As derivadas covariantes de um vetor no espaço de coordenadas e no espaço tangente podem ser relacionadas desta forma:

$$\nabla_\mu V^\rho = e^\rho_a D_\mu (e^a_\nu V^\nu), \tag{3.4.45}$$

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} V^\nu, \tag{3.4.46}$$

$$\begin{aligned} e^\rho_a D_\mu (e^a_\nu V^\nu) &= e^\rho_a (\partial_\mu e^a_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu) V^\nu + e^\rho_a e^a_\nu \partial_\mu V^\nu \\ &= \partial_\mu V^\rho + e^\rho_a (\partial_\mu e^a_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu) V^\nu. \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

Assim encontramos a conexão afim $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ a partir da vielbein e da conexão de spin. Esta relação é válida independentemente da existencia de torção. A relação entre estas grandezas, enunciada na forma abaixo, é conhecida como postulado da vielbein:

$$\nabla_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho = 0. \tag{3.4.48}$$

Isto significa que a vielbein comuta com a derivada covariante do espaço de bases coordenadas. Para a métrica, obtém-se o postulado da métrica $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} = 0$.

A derivada covariante local e a global são iguais para um espinor sem índices vetoriais. Para o gravitino, elas têm a forma:

$$D_\mu \psi_\rho = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{rs}\gamma_{rs}\right)\psi_\rho, \qquad \nabla_\nu \psi_\rho = \partial_\nu \psi_\rho + \frac{1}{4}\omega_\nu{}^{rs}\gamma_{rs}\psi_\rho - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\psi_\sigma. \tag{3.4.49}$$

É comum escrever a ação livre do gravitino covariantizada apenas no espaço tangente (D_μ), pois na ação sobra apenas a parte antissimétrica da conexão afim. Após separar a conexão de spin na forma (3.4.42), e minimizar a ação em termos da vielbein, da conexão de spin e dos férmions, a torção pode ser expressa em termos bilineares em cada férmion, suprimidos por um fator M_P^{-2}.

A curvatura, definida como $R_{\mu\nu ab} = \partial_\mu \omega_{\nu ab} + \omega_{\mu ac}\omega_\nu{}^c{}_b - (\mu \leftrightarrow \nu)$,pode ser interpretada como o campo de força da conexão de spin. Usando a 2-forma $\rho_{ab} \equiv \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}dx^\mu \wedge dx^\nu$, pode-se escrever esta definição na forma conhecida como segunda equação de estrutura de Cartan:

$$d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} = \rho^{ab}. \tag{3.4.50}$$

Atuando com a derivada exterior nas equações de estrutura (3.4.38) e (3.4.50), obtemos

$$dT^a = \quad d^2e^a + d\omega^{ab}\wedge e_b - \omega^{ab}\wedge de_b \quad = \rho^{ab}\wedge e_b - \omega^{ab}\wedge T_b, \tag{3.4.51}$$

$$d\rho^{ab} = \quad d^2\omega^{ab} + d\omega^{ac}\wedge \omega_c{}^b - \omega^a{}_c \wedge d\omega^{cb} \quad = \rho^{ac}\wedge \omega_c{}^b - \omega^a{}_c \wedge \rho^{cb}. \tag{3.4.52}$$

Explicitando as componentes das 3-formas, com todas as permutações, e usando a antissimetria da torção e da curvatura para manter apenas as permutações cíclicas, chegamos às identidades de Bianchi

$$R_{\mu\nu\rho}{}^a + D_\mu T_{\nu\rho}{}^a + R_{\nu\rho\mu}{}^a + D_\nu T_{\rho\mu}{}^a + R_{\rho\mu\nu}{}^a + D_\rho T_{\mu\nu}{}^a = 0, \tag{3.4.53}$$

$$D_\mu R_{\nu\rho}{}^{ab} + D_\nu R_{\rho\mu}{}^{ab} + D_\rho R_{\mu\nu}{}^{ab} = 0. \tag{3.4.54}$$

Podemos obter a forma mais usual da curvatura como

$$R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma = R_{\mu\nu ab}e^{a\rho}e^b_\sigma = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\tau}\Gamma^\tau_{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{3.4.55}$$

As formas explícitas da conexão de spin, torção e curvatura são relevantes para a escolha de campos auxiliares off-shell, para construir um multipleto supergravitacional. Os mais conhecidos conjuntos de campos auxiliares são o *old-minimal*[12] e o *new-minimal*[13]. Como a ação *on-shell* é equivalente nos dois modelos, a quebra de supersimetria mediada por gravitação, assunto do próximo capítulo, não varia com esta escolha.

4 Quebra espontânea de SUSY mediada por gravidade

A quebra espontânea de supersimetria implica que o gerador Q não aniquila o vácuo. Então deve existir um operador $\mathcal{O}$ cuja variação seja não-nula no estado de vácuo. Como $\delta\mathcal{O} = i[\bar{\alpha}Q, \mathcal{O}]$, então

$$\langle 0|\delta\mathcal{O}|0\rangle = i\bar{\alpha}\langle 0|\,[Q, \mathcal{O}\}\,|0\rangle. \tag{4.0.1}$$

Para que $(Q\mathcal{O})$ possa adquirir valor esperado de vácuo não-nulo sem termos violação da simetria de Lorentz, $(Q\mathcal{O})$ deve ser escalar, portanto $\mathcal{O}$ deve ser um espinor.

Os termos escalares contidos nas variações das componentes espinoriais (2.1.23,2.1.27) de um supercampo geral, o termo-F e o termo-D, são os candidatos a adquirir valor esperado de vácuo (VEV). O potencial escalar de uma teoria supersimétrica, que deve ser mínimo no estado de vácuo, tem a estrutura geral[7]

$$V = (\delta_s\text{fermion})(\text{métrica})(\delta_s\text{fermion}), \tag{4.0.2}$$

onde $(\delta_s\text{fermion})$ são os escalares que surgem nas variações dos férmions.

Para a quebra de supersimetria local, examinando os termos correspondentes em (3.3.31, 3.3.35), temos as seguintes condições de quebra, envolvendo apenas campos escalares:

$$\langle 0|e^{(G/2)}(G^{-1})^{i\bar{j}}G_{\bar{j}}|0\rangle \neq 0, \text{ ou} \tag{4.0.3}$$

$$\langle 0|\mathrm{Re}(f^{-1}_{AB})G_i(t_B)^i{}_jS^j|0\rangle \neq 0 \tag{4.0.4}$$

Vamos trabalhar com um caso simples, mantendo as mesmas restrições que na supersimetria global para K e W, ou seja, $K = \delta_{ij}S^{\dagger i}S^j e^{2gt_A\Phi_A}$ e $W(S^i)$ um polinômio de ordem 3, e $f_{AB} = \delta_{AB}$. Então

$$G_i = \frac{\partial K}{\partial S^i} + \frac{\partial \ln W}{\partial S^i} = S^{\dagger i} + \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial S^i} \quad , \quad G_{i\bar{j}} = \delta^j_i, \tag{4.0.5}$$

e a condição para quebra espontânea é

$$(G^{-1})^{i\bar{j}}G_{\bar{j}}|0\rangle \neq 0 \implies S^{\dagger i} + \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial S^i} \neq 0 \tag{4.0.6}$$

Reintroduzindo κ de acordo com a dimensão dos campos,

$$\kappa^2 S^{\dagger i} W + \frac{\partial W}{\partial S^i} \neq 0. \tag{4.0.7}$$

No limite $\kappa \to 0$, resta apenas o termo-F obtido em (2.4.53), ou seja, a quebra de SUSY global é o limite de baixas energias deste modelo simples de quebra local.

4.1 Mecanismo super-Higgs

A quebra espontânea de uma simetria global contínua produz bósons de Goldstone. Se existirem bósons de gauge associados às simetrias quebradas, estes adquirem massa após a quebra, e existe uma fixação de gauge que elimina os bósons de Goldstone da teoria. Este é basicamente o mecanismo de Higgs[14]. Para a quebra espontânea de supersimetria local existe um processo similar, conhecido como efeito super-Higgs[15], que elimina o goldstino e dá massa ao gravitino.

O termo de interação bilinear do gravitino contém o campo G, que adquire VEV G_0:

$$-\frac{M_P}{2} e^{G_0/2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu. \tag{4.1.8}$$

Comparando com a equação de Rarita-Schinger, interpretamos como a massa do gravitino

$$m_{3/2} = e^{G_0/2} M_P. \tag{4.1.9}$$

O supertraço é modificado no cenário de supersimetria local. Um cálculo detalhado está disponível em [16]. Para o caso mínimo que estamos tratando,

$$\begin{aligned} \mathrm{SuperTr}\mathcal{M}^2 &= \sum_J (-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 = tr\mathcal{M}_0^2 - 2tr\mathcal{M}_{1/2}^2 + 3tr\mathcal{M}_1^2 - 4tr\mathcal{M}_{3/2}^2 \\ &= 2\sum_A \mathcal{D}_A tr(gt_A) + (N-1)\left(2m_{3/2}^2 - \frac{1}{M_P^2}\mathcal{D}_A\mathcal{D}_A\right), \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

onde N é o numero de supercampos quirais. Graças ao último termo deste supertraço, podemos inferir que as massas dos escalares são aproximadamente da ordem da massa do gravitino, e as massas dos férmions permanecem pequenas.

4.2 Modelo de Polónyi

O mais simples modelo de quebra de SUSY mediada por gravitação (*gravity-mediated*), desenvolvido por Polónyi [17], tem um único supercampo quiral e nenhum supercampo de gauge. O superpotencial tem esta expressão:

$$W = \mu M_P(S+\beta), \tag{4.2.11}$$

onde os parâmetros reais μ e β são da ordem de 1 TeV e M_P, respectivamente. Este modelo puramente acadêmico serve apenas para mostrar algumas características marcantes da quebra de SUSY local.

O potencial escalar para este modelo é dado por

$$V_h = \mu^2 e^{S^\dagger S}\left(|1+S^\dagger(S+\beta)|^2 - 3|S+\beta|^2\right), \tag{4.2.12}$$

e o gradiente no espaço de Kähler, que deve se anular no vácuo, é

$$\frac{\partial}{\partial S^\dagger}V_h = SV + \mu^2 e^{S^\dagger S}\{(S+\beta)[-2+S(S^\dagger+\beta)] + S[1+S^\dagger(S+\beta)]\}. \tag{4.2.13}$$

Vamos supor que o potencial também seja zero no vácuo, dado que a constante cosmológica é muito menor que a escala de quebra de SUSY:

$$V_h = 0 \implies S_0^2 + S_0\beta + 1 = \sqrt{3}(S_0+\beta). \tag{4.2.14}$$

Substituindo isto no gradiente do potencial, temos

$$(S+\beta)[-2+S(S^\dagger+\beta)] + S[1+S^\dagger(S+\beta)] = (S_0+\beta)(2\sqrt{3}S_0 + \sqrt{3}\beta - 3) = 0. \tag{4.2.15}$$

A solução para esta equação é $S_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\beta)$, desde que $\beta = \pm 2 - \sqrt{3}$, o que implica que o parâmetro β precisa de um ajuste fino para permitir a energia do vácuo próxima de zero.

Agora vamos investigar a existência de soluções para as condições de vácuo com potencial $V_h(S_0) < 0$ e que não violam SUSY. Aplicando (4.2.11) em (4.0.6) temos como condição para preservar SUSY

$$\mu[1+S^\dagger S + S^\dagger \beta] = 0. \tag{4.2.16}$$

Como β é real, as soluções também precisam ser reais, e da forma

$$S_{\text{susy}} = \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4}\right)/2. \tag{4.2.17}$$

Se estas soluções forem números complexos, ou seja, se $|\beta| > 2$, então não existe um vácuo supersimétrico. Dos valores de β que conseguimos anteriormente, devemos selecionar apenas $\beta = 2 - \sqrt{3}$. Nestas condições, temos a quebra espontânea de SUSY local, com os seguintes resultados:

$$S_0 = (\sqrt{3} - 1) M_P, \qquad \langle W \rangle = \mu M_P^2, \qquad \left\langle \frac{\partial W}{\partial S} \right\rangle = \mu M_P, \tag{4.2.18}$$

$$m_{3/2} = \frac{\langle W_h \rangle}{M_P^2} e^{|S_0|^2/2M_P^2} = \mu e^{2-\sqrt{3}} \tag{4.2.19}$$

4.3 Modelos sem escala

Os modelos sem escala foram desenvolvidos para evitar a necessidade de ajuste fino para quase cancelar a constante cosmológica. Eles encontram muitas aplicações em modelos de inflação[18]. O potencial clássico nestes modelos, considerando apenas a contribuição do termo-F ao superpotencial, é identicamente zero. A supersimetria é quebrada em toda a variedade de Kähler. O valor de $m_{3/2}$ depende do vácuo da teoria, então ele só pode ser determinado depois de aplicar correções quânticas. Somente o termo-D contribui para o potencial.

A condição de valor nulo para o potencial clássico obtido em (3.3.29) implica que $G^{i\bar{j}} G_i G_{\bar{j}} = 3$. Para o caso em que existe apenas um campo quiral z^1, a solução é[19]

$$G = -3 \ln(f(z^1) + \bar{f}(\bar{z}^{\bar{1}})), \tag{4.3.20}$$

e a curvatura da variedade de Kähler é

$$R_{1\bar{1}} = -\frac{2}{3} G_{1\bar{1}}. \tag{4.3.21}$$

O termo cinético para o campo z^1 pode ser expresso como[20]

$$-\frac{3}{(f+\bar{f})^2} f_1 (\partial_\mu z^1) \bar{f}_{\bar{1}} (\partial^\mu \bar{z}^{\bar{1}}) = -\frac{3(\partial_\mu f)(\partial^\mu \bar{f})}{(f+\bar{f})^2}, \tag{4.3.22}$$

o que significa que o campo quiral z^1 aparece apenas sob a forma $f(z^1)$. Então todas as teorias deste tipo são equivalentes a menos de uma redefinição $f(z^1) \to z^1$.

Vamos incluir mais campos quirais na teoria. Dada uma função real $h(z^i, \bar{z}^{\bar{i}}), i = 2, ..., n$, um exemplo de potencial que dá valor nulo para a constante cosmológica é

$$G = -3 \ln(z^1 + \bar{z}^{\bar{1}} - h(z^i, \bar{z}^{\bar{i}})), \tag{4.3.23}$$

e a métrica de Kähler pode ser escrita como[7]

$$G_{i\bar{j}} = 3e^{2G/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h_i & -h_{i\bar{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-G/3}h^{\bar{k}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -h_{\bar{j}} \\ 0 & -h_{l\bar{j}} \end{pmatrix}, \tag{4.3.24}$$

onde $h_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$ e $h_{i\bar{j}}h^{\bar{j}k} = \delta_i^k$.

Olhando para o termo de massa do gravitino e o goldstino escritos em termos de G,

$$\mathcal{L}_{3/2} = \frac{M_P}{2} e^{G/2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu, \qquad P_L \upsilon = -\frac{M_P^3}{\sqrt{2}} e^{G/2} \partial_i G \chi^i, \tag{4.3.25}$$

para que ocorra a quebra basta que $\partial_i G \neq 0$ no vácuo.

4.4 Setor oculto de quebra espontânea de SUSY

A maior parte dos modelos realistas de quebra espontânea de SUSY exige, além dos supercampos observáveis C_n do MSSM, um setor oculto h_M, cujos componentes são singletos sob todos os grupos de gauge do setor observável. O termo-F e o termo-D dos supercampos quirais e de gauge do setor visível não podem adquirir vácuo. Surgiriam spartículas mais leves que as partículas visíveis do Modelo Padrão.

Quaisquer campos de gauge interagindo com o setor oculto não interagem com o setor visível. O superpotencial e o potencial de Kähler devem ser separáveis,

$$W = W_o(C_n) + W_h(h_M), \tag{4.4.26}$$
$$K = C_i^\dagger C_i + h_m^\dagger h_m. \tag{4.4.27}$$

Vamos supor que o setor oculto contenha um único campo quiral h, com um superpotencial $\tilde{W}(h) + W(z^i)$ (onde W gera o modelo padrão e $\tilde{W}$ tem forma arbitrária), e métrica de Kähler plana,

$$K = h\bar{h} + z^i \bar{z}_i, \qquad K_{\bar{i}} = \bar{z}_i \equiv \bar{z}^{\bar{i}} = (z^i)^*. \tag{4.4.28}$$

O potencial toma esta forma:

$$V = M_P^4 e^G (G_i G^{i\bar{j}} G_{\bar{j}} - 3) = e^{K/M_P^2} \left(\left| \tilde{W}_h + \frac{\bar{h}\tilde{W}}{M_P^2} \right|^2 + \left| W_i + \frac{\bar{z}^{\bar{i}} W}{M_P^2} \right|^2 - \frac{3|W|^2}{M_P^2} \right), \tag{4.4.29}$$

onde $\tilde{W}_h \equiv \frac{\partial \tilde{W}}{\partial h}, W_i \equiv \frac{\partial W}{\partial z^i}$. Vamos assumir que o termo-F e a componente física h do supercampo $\hat{h}$ desenvolvem VEVs da ordem de m^2 e M_P, respectivamente. Definimos parâmetros adimensionais a, b tais que

$$\langle h\rangle = aM_P, \qquad \langle \tilde{W}\rangle = bm^2 M_P, \qquad \langle \tilde{W}_h\rangle = m^2. \tag{4.4.30}$$

Em termos destes parâmetros, a massa do gravitino é

$$m_{3/2} = \frac{bm^2}{M_P} e^{a^2/2}. \tag{4.4.31}$$

Para obter o potencial efetivo em uma escala de energia $\ll M_P$, vamos substituir os campos ocultos por seus VEVs e tomar o limite $M_P \to \infty$:

$$\begin{aligned} V_{eff} &= m^4 e^{a^2}[(1+ab)^2 - 3b^2] + e^{a^2}|W_i|^2 \\ &\quad + m_{3/2}^2 \left[1 + \frac{(1+ab)^2 - 3b^2}{b^2}\right] z^i \bar{z}_i + m_{3/2} e^{a^2/2}\left[W_i z^i + AW + \text{h.c.}\right], \end{aligned} \tag{4.4.32}$$

com $A = a(1/b + a) - 3$.

O primeiro termo em (4.4.32) é a constante cosmológica. No modelo de Polónyi temos $a = \sqrt{3} - 1, b = 1$, então $(1+ab)^2 - 3b^2 = 0$, conforme foi projetado o modelo. Os termos da segunda linha são de quebra *soft*. As massas dos escalares do setor visível são dadas pelos termos em $m_{3/2}^2$. Os demais termos são bilineares e trilineares do MSSM.

No MSSM os termos de quebra *soft* de SUSY são adicionados à mão. Uma lista de todos os termos possíveis se encontra em [21]. Os termos escalares cúbicos são todos holomórficos em z^i, ou seus conjugados. Que é o mesmo que se obtém de uma quebra mediada por gravitação.

5 Aplicações da supergravidade em fenomenologia

O modelo base para quase todos os modelos *gravity-mediated* atuais, desenvolvido por Chamseddine, Arnowitt e Nath[22], é conhecido como mSUGRA. Apenas quatro parâmetros e um sinal são necessários:

$$m_0, \quad ,m_{1/2}, \quad A_0, \quad \tan\beta, \quad \mathrm{sign}(\mu), \tag{5.0.1}$$

onde m_0, $m_{1/2}$ e A_0 são respectivamente a massa universal dos escalares, a massa universal dos gauginos e o acoplamento trilinear universal, na escala de grande unificação (GUT). O parâmetro $\tan\beta = \langle H_u \rangle / \langle H_d \rangle$ é a razão entre os vácuos dos campos de Higgs do MSSM, e $|\mu|$ é determinado pela quebra radiativa de simetria eletrofraca, restando apenas o sinal como parâmetro livre. Os valores distintos de massas e acoplamentos na escala eletrofraca são resultado da evolução das equações do grupo de renormalização, e a quebra da simetria eletrofraca ocorre porque a massa de H_u se torna negativa.

5.1 Solução para o problema do parâmetro μ

Na construção do MSSM, um termo permitido no superpotencial é o termo de mistura dos escalares de Higgs, $W_{MSSM} \ni \mu H_u H_d$. Este termo não quebra SUSY, então era de se esperar que tivesse um valor $\mu \sim M_P$. Mas para quebrar a simetria eletrofraca, com um VEV naturalmente produzido nesta escala, é necessário um parâmetro μ desta mesma ordem: $\mu \sim M_Z$.

Para resolver o problema do parâmetro μ, deve-se impor alguma simetria que impeça a inserção direta deste termo no superpotencial. E depois adicionar novos campos escalares que se acoplem aos Higgs, e estes campos adquirem VEV. Um exemplo de tal esquema é o modelo padrão supersimétrico *next-to-minimal* (NMSSM)[23], com um novo singleto S no setor visível acoplado ao superpotencial $W_{NMSSM} \ni \lambda S H_u H_d$, adquirindo VEV na escala eletrofraca.

Soluções mais interessantes foram desenvolvidas reutilizando a simetria de Peccei-Quinn, que é uma solução proposta para o problema de CP forte[24]. Basta assumir que os escalares de Higgs tenham a mesma carga PQ não-nula. Por exemplo, o mecanismo de Giudice-Masiero [25] adiciona campos a um setor oculto, que se acoplam aos Higgs em um termo não-renormalizável no potencial de Kähler:

$$K \ni \lambda h^\dagger H_u H_d / M_P, \tag{5.1.2}$$

e o termo-F do supercampo h ganha um VEV da ordem de m_{hid}^2, o que leva a um parâmetro $\mu \sim \lambda m_{hid}^2 / M_P$.

Outra possibilidade é a extensão supersimétrica do áxion DFSZ (Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnitsky[26, 27]) desenvolvida em [28], que inclui no superpotencial um termo $W_{DFSZ} \ni \lambda S^2 H_u H_d / M_P$ e produz um parâmetro $\mu \sim \lambda f_a^2 / M_P$, onde f_a é a constante de decaimento do áxion. Em ambos os casos, para $f_a \sim m_{hid} \sim 10^{11}$ GeV, consegue-se obter a escala adequada $\mu \sim m_Z$.

5.2 Geração da escala de quebra da simetria Peccei-Quinn

Um modelo compatível com a discordância entre estas escalas é o de Murayama-Suzuki-Yanagida (MSY)[29]. Ocorre quebra radiativa da simetria PQ em virtude da quebra de SUSY. Como a escala de quebra de PQ está relacionada a μ, a obtenção experimental das massas dos higgsinos seria essencial para estimar a massa do áxion. Este modelo também gera uma grande massa de Majorana para neutrinos de mão-direita, necessários ao mecanismo see-saw.

O superpotencial do modelo MSY pode ser escrito como

$$\hat{W}_{MSY} = \frac{1}{2} h_{ij} \hat{X} \hat{N}_i^c \hat{N}_j^c + \frac{f}{M_P} \hat{X}^3 \hat{Y} + \frac{g}{M_P} \hat{X} \hat{Y} \hat{H}_u \hat{H}_d, \tag{5.2.3}$$

onde $\hat{N}^c$ contém um neutrino de mão direita, que também é adicionado ao superpotencial do MSSM. As cargas PQ dos campos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ são tomadas como -1 e +3, e os campos de Higgs e de matéria têm carga -1 e +1/2. Os índices i, j são das famílias do Modelo Padrão. Assumimos $h_{ij} = h\delta_{ij}$ para simplificar, ou seja, mesmo acoplamento para todos os neutrinos.

Os termos de quebra *soft* do potencial escalar são[30]

$$
\begin{aligned}
V_{soft} &= m_X^2|\phi_X|^2 + m_Y^2|\phi_Y|^2 + m_{N_i^c}^2|\phi_{N_i^c}|^2 \\
&\quad + \left(\frac{h_i}{2}A_i\phi_{N_i^c}^2\phi_X + \frac{f}{M_P}A_f\phi_X^3\phi_Y + \frac{g}{M_P}A_gH_uH_d\phi_X\phi_Y + \text{h.c.}\right). \qquad (5.2.4)
\end{aligned}
$$

Os parâmetros devem ser escolhidos para que a evolução das equações do grupo de renormalização da escala M_P até ν_{PQ} (escala de quebra da simetria PQ) traga m_X radiativamente a valores negativos, da mesma forma que ocorre com o Higgs mais leve nos modelos com quebra radiativa de simetria eletrofraca. Nas fórmulas a seguir, $m_X^2 < 0$.

Tomando do termo-F do potencial escalar apenas os termos vindos de $\hat{X}$ e $\hat{Y}$,

$$
V \ni \frac{|f|^2}{M_P^2}|\phi_X^3|^2 + \frac{9|f|^2}{M_P^2}|\phi_X^2\phi_Y|^2 + V_{soft}, \qquad (5.2.5)
$$

as equações para o vácuo de X e Y são

$$
\begin{aligned}
\frac{9|f|^2}{M_P^2}|\nu_X|^2\nu_Y + \frac{f^*A_f^*}{M_P}\nu_X^{*3} + m_Y^2\nu_Y &= 0 \qquad (5.2.6) \\
\frac{3|f|^2}{M_P^2}|\nu_X^2|^2\nu_X + \frac{18|f|^2}{M_P^2}|\nu_X|^2|\nu_Y|^2\nu_X + \frac{3f^*A_f^*}{M_P}\nu_X^{*2}\nu_Y^* + m_X^2\nu_X &= 0. \qquad (5.2.7)
\end{aligned}
$$

A massa para o neutrino de Majorana e o parâmetro μ são, respectivamente,

$$
M_{N_i^c} = \nu_X h_i, \qquad \mu = \frac{g\nu_X\nu_Y}{M_P}. \qquad (5.2.8)
$$

O parâmetro h_i não pode ser pequeno, senão m_X^2 não se torna negativo. Para $\nu_{PQ} = \sqrt{\nu_X^2 + \nu_Y^2} \sim 10^{10}$ GeV, é necessário escolher $h_i \gtrsim 1.73$. Com isso $M_{N_i^c} \sim 10^{10}$ GeV. O produto $gm_{3/2} \sim 2.5$ TeV para gerar um valor natural para μ, da ordem de ~ 150 GeV. Ou seja, são desejáveis valores de $m_{3/2} \gtrsim 2.5$ TeV. A distância entre as escalas de $m_{3/2}$ e de μ é resultado da distância entre as escalas de quebra de SUSY $\sim 10^{11}$ GeV e de PQ $\sim 10^{10}$ GeV.

5.3 Naturalidade em teorias de supergravidade

Teorias de SUGRA são elegantes, mas vêm recebendo muitas críticas recentes por causa de uma suposta falta de naturalidade, com a escala de energia das spartículas ficando cada vez mais distante da escala eletrofraca. Isto é conhecido como o problema da pequena hierarquia (LHP)[31, 32].

Um argumento em contrário a estas críticas é desenvolvido em [33]. O princípio é que julgamentos sobre ajuste fino devem ser feitos somente sobre quantidades independentes. Existem três grandezas propostas para estimar de forma grosseira a naturalidade:

- A medida eletrofraca Δ_{EW}[34] compara as contribuições ao valor de m_Z obtido a partir do potencial eletrofraco:

$$\frac{m_Z^2}{2} = \frac{(m_{H_d}^2 + \Sigma_d^d) - (m_{H_u}^2 + \Sigma_u^u)\tan^2\beta}{(\tan^2\beta - 1)} - \mu^2 \simeq -m_{H_u}^2 - \mu^2 - \Sigma_u^u, \tag{5.3.9}$$

  onde $m_{H_u}^2$ e $m_{H_d}^2$ são as massas dos Higgs na escala eletrofraca, Σ_u^u e Σ_d^d são correções de loop. Define-se Δ_{EW} como a razão entre o maior valor em módulo do lado direito de (5.3.9) e o lado esquerdo, $m_Z^2/2$. Se esta razão não for grande demais, ou seja, se os três termos $\mu^2, m_{H_u}^2, \Sigma_u^u \sim m_Z^2$ então não se precisa de ajustes finos não-naturais para obter a massa correta do Z. A exigência de que $|\mu| \sim m_Z$ é a fonte do problema do parâmetro μ, e traz como consequência adicional um espectro de higgsinos $(\tilde{Z}_{1,2}, \tilde{W}_1^{\pm})$ com massa $\sim \mu$, e o mais leve $(\tilde{Z}_1)$ é candidato a matéria escura. Para realizar a quebra de simetria eletrofraca, o valor de $m_{H_u}^2$ deve ser trazido pelas equações do grupo de renormalização até um valor negativo mas pequeno. Ainda, para que as correções Σ_u^u não sejam muito elevadas, os stops precisam estar na escala de TeV, e com grande mistura devido a um forte e negativo acoplamento trilinear[35].

- A medida de ajuste da massa do Higgs Δ_{HS} compara a massa física do Higgs do modelo padrão m_h^2 e a correção de loop ao termo soft $\delta m_{H_u}^2$, relacionados por

$$m_h^2 \simeq \mu^2 + m_{H_u}^2(\Lambda) + \delta m_{H_u}^2. \tag{5.3.10}$$

  A escala de cutoff é geralmente tomada como $\Lambda \simeq m_{GUT} \sim 2 \times 10^{16}$ GeV em modelos *gravity-mediated*. Resolvendo a equação do grupo de renormalização em $m_{H_u}^2$ obtém-se como resultado[33]

$$\delta m_{H_u}^2 \sim -\frac{3 f_t^2}{8\pi^2}\left(m_{Q_3}^2 + m_{U_3}^2 + A_t^2\right)\ln\frac{\Lambda^2}{m_{SUSY}^2}. \tag{5.3.11}$$

  Ao impor a condição $\delta m_{H_u}^2 \lesssim m_h^2$ os squarks da terceira geração teriam massa menor que 600 GeV. No entanto, os termos $m_{H_u}^2$ e $\delta m_{H_u}^2(\Lambda)$ não são independentes. Portanto as quantidades independentes no lado direito de (5.3.10) são μ^2 e o termo único $(m_{H_u}^2(\Lambda) + \delta m_{H_u}^2(\Lambda))$ (que é o valor de $m_{H_u}^2$ na escala eletrofraca). Assim os squarks da terceira família podem assumir valores acima de TeV sem comprometer a naturalidade dos modelos.

- A medida de Barbieri-Giudice[36, 37] investiga a sensibilidade de m_Z^2 a variações dos parâmetros fundamentais em escala de altas energias, geralmente GUT. Define-se

$$\Delta_{BG} \equiv \max_i \left| \frac{\partial \ln m_Z^2}{\partial \ln p_i} \right|, \tag{5.3.12}$$

onde a expressão de m_Z^2 é obtida evoluindo (5.3.9) até a escala de altas energias, supondo que μ e m_Z recebam correções pequenas devido ao teorema de não-renormalização do superpotencial. Os parâmetros p_i desta escala mais alta são muito dependentes dos detalhes do modelo considerado. Geralmente aparecem grandes termos positivos e negativos na expressão de m_Z^2, então uma variação fracional no maior destes parâmetros causa grande oscilação em m_Z^2. Porém, em modelos de quebra *gravity-mediated* os termos de quebra *soft* em altas energias são todos dependentes de $m_{3/2}$, portanto todos esses termos devem ser agregados. Após combinar os termos de quebra *soft* a expressão aproximada para a massa do Z é

$$m_Z^2 \simeq -2\mu^2(\Lambda) - a m_{3/2}^2, \tag{5.3.13}$$

onde a depende do espectro de massa do modelo. Como já assumimos que $\mu^2 \sim m_Z^2$, então $a m_{3/2}^2 \sim m_Z^2$. Mesmo com $m_{3/2}$ na escala de TeV, basta que $a \sim 0.1$ para gerar modelos naturais.

A medida Δ_{EW} é independente de modelo e preditiva, mas poderia ser pouco sensível a variações em parâmetros da escala de alta energia, por depender apenas de parâmetros na escala eletrofraca. As medidas Δ_{HS} e Δ_{BG} obtém grandes variações em modelos de SUGRA somente quando são cometidos erros de avaliação sobre quais parâmetros são independentes. Corrigido isto, ambas dão resultados similares a Δ_{EW}.

5.4 Prospectos de detecção de SUSY

Modelos de SUSY radiativamente natural (RNS)[34] tentam minimizar o parâmetro de naturalidade Δ_{EW}, mantendo a unificação dos acoplamentos de gauge e a quebra de simetria eletrofraca. Um baixo valor para Δ_{EW} é obtido exigindo: $\mu \simeq 100 - 300$ GeV; $m_{H_u}^2$ levado pelas equações de renormalização a valores negativos na escala eletrofraca; grande mistura no setor dos stops. A mistura elevada reduz as correções radiativas $\Sigma_u^u(\tilde{t}_1)$ e $\Sigma_u^u(\tilde{t}_2)$ e levanta a massa do Higgs aos 125 GeV.

É muito difícil detectar modelos RNS com o LHC. A terceira geração de escalares está além de 1 TeV. Enquanto os charginos e neutralinos leves tipo-higgsino são produzidos em abundância, a energia de seus decaimentos é muito baixa e não se sobressai ao background, aparecendo como energia transversa faltante. Ainda que não ocorra detecção direta de SUSY no LHC13, um colisor linear e^+e^- com energia $\sqrt{s} \sim 1$ TeV como o ILC, planejado para produzir o Higgs e fornecer medidas mais precisas, pode atuar também como uma fábrica de higgsinos[33].

Os modelos de SUSY com RNS contém higgsinos leves $\tilde{Z}_{1,2}, \tilde{W}_1^{\pm}$ com massas da ordem de $|\mu| \sim 100-200$ GeV. Os decaimentos para o higgsino mais leve devem liberar energia da ordem de $10-20$ GeV, muito pouco para ser perceptível ao LHC, mas bem visível no espectro limpo de um colisor de léptons. Desde que a energia de colisão $\sqrt{s}$ seja superior ao dobro da massa dos higgsinos.

A assinatura do RNS no LHC é a produção de dois bósons de mesma carga advinda da produção de pares de winos:

$$pp \to \bar{\chi}_2^{\pm}\chi_4^0 \to (W^{\pm}\chi_2^0) + (W^{\pm}\chi_1^{\mp}). \tag{5.4.14}$$

O modelo RNS pode ser realizado dentro da estrutura do modelo de dois parâmetros com massa do Higgs não-universal (NUHM2):

$$m_0, \qquad m_{1/2}, \qquad A_0, \qquad \tan\beta, \qquad \mu, \qquad m_A, \tag{5.4.15}$$

onde as massas dos Higgs m_{H_u} e m_{H_d} são livres, e m_0 unifica apenas as massas dos quarks e léptons. Então μ e m_A (massa do pseudo-escalar de Higgs) podem ser escolhidas como parâmetros livres[38].

O canal de produção mais lucrativo para spartículas acima de 1 TeV é a produção de pares de gluinos e squarks, devido à grande liberação de energia dos decaimentos em cascata[39], se as spartículas forem leves o bastante para produzir um sinal detectável.

Mesmo sem a detecção direta de supersimetria no LHC8, o resultado ainda pode ser considerado positivo. A descoberta de um escalar leve de Higgs com massa $m_h \simeq 125$GeV indiretamente oferece suporte à SUSY. O modelo padrão é compatível com um intervalo muito amplo de valores para m_h, podendo alcançar até $\sim$ 800 GeV. Já as extensões supersimétricas mais simples do SM exigem $m_h \lesssim 135$ GeV. Para ser compatível com a massa do Higgs leve ~ 125 GeV, as massas dos squarks top devem ser maiores que ~ 1 TeV, e deve haver uma forte mistura neste setor. Para o cenário de SUSY atual, um espectro de massas acima da escala de TeV parece ser mais consistente do que massas abaixo de TeV. Além disso, vários modelos restritos polulares como CMSSM, mAMSB, e mGMSB são desfavorecidos em medidas de naturalidade de SUSY pela massa de 125 GeV para o Higgs[40]. Considerando o MSSM, modelos de quebra de SUSY mediada por gravitação acomodam naturalmente a elevada mistura no setor dos stops necessária para levantar a massa do Higgs.

5.5 Modelos concorrentes

Existem outros modelos para quebra de SUSY além do *gravity-mediated*. Por exemplo, na classe de modelos GMSB (*gauge-mediated SUSY breaking*), o setor oculto onde ocorre a quebra se acopla a um setor mensageiro através do superpotencial, e este comunica a quebra ao setor visível por meio de interações de gauge. Os termos de quebra soft de SUSY no setor visível são produzidos em diagramas de loop. Nestes modelos o gravitino é a partícula supersimétrica mais leve (LSP), sua massa ainda é $m_{3/2} \sim \langle F \rangle / M_P$. A massa das spartículas é da ordem de $\frac{g^2}{16\pi^2} \langle F \rangle / M_{mes}$, onde g é qualquer acoplamento de gauge do MSSM, e para a massa do setor mensageiro, $M_{mes} \ll M_P$. Modelos simples de GMSB são fenomenologicamente desfavorecidos pois têm dificuldade em levantar a massa do Higgs até ~ 125 GeV, porque os termos trilineares são suprimidos.

Em modelos do tipo AMSB (*anomaly-mediated SUSY breaking*)[41, 42], as contribuições para a quebra soft vindas da anomalia de super-Weyl são dominantes. Estas contribuições são irrelevantes em cenários GMSB ou *gravity-mediated*, pois são suprimidas por um fator $m_{3/2}/M_P$. No entanto, em modelos com o setores visível e oculto separados espacialmente por dimensões extras, os termos de massa gerados pelos mecanismos anteriores podem ser desprezíveis. Em modelos AMSB, o neutralino tipo-wino aparece como a LSP, enquanto que $m_{3/2} \sim 25 - 50$ TeV. Modelos mínimos baseados em AMSB também não geram acoplamentos trilineares grandes o suficiente.

5.6 Momento magnético anômalo do muon

A existência de spartículas na escala eletrofraca poderia explicar o desvio de 3σ no momento magnético anômalo do múon, detectado em Brookhaven[43], em relação ao valor previsto pelo Modelo Padrão[44]. Se as spartículas mais leves fossem da ordem de TeV, outro mecanismo seria necessário para explicar este desvio.

A correção experimental ao $a_\mu = \frac{1}{2}(g_\mu - 2)$ em relação ao que se obtém do Modelo Padrão é[45] $\delta a_\mu = (287 \pm 80) \times 10^{-11}$. A contribuição supersimétrica devida aos loops

$\chi^{\pm} - \tilde{\nu}_{\mu}$ e $\chi^0 - \tilde{\mu}$ é aproximadamente

$$\delta a_{\mu} \simeq \mathrm{sgn}(\mu m_{H_d})(130 \times 10^{-11}) \left(\frac{100\mathrm{GeV}}{m_{SUSY}} \right)^2 \tan\beta, \tag{5.6.16}$$

então para que a correção inteira venha destes processos,precisamos que $m_{SUSY} \sim 100$ GeV. Em modelos com RNS, os gauginos mais leves estão nesta faixa. Os sléptons devem ter em média massa menor que os squarks, por não receberem correções de massa dos gluinos. O desvio medido pode ser explicado com $m_{SUSY} \sim 200$ GeV e $\tan\beta \sim 10$, ou $m_{SUSY} \sim 500$ GeV e $\tan\beta \sim 50$[38].

6 Conclusão

Este trabalho de revisão mostrou a supersimetria local, conhecida como supergravidade por se reduzir à Relatividade Geral no limite de baixas energias. Se a supersimetria é quebrada espontaneamente, a supergravidade necessariamente deve ser inclusa, para separar a escala de quebra de SUSY e a constante cosmológica. Nenhum supercampo do setor visível pode adquirir vácuo sem criar spartículas mais leves que as do Modelo Padrão. O setor oculto é indispensável aos mecanismos de quebra de SUSY, mas é quase impraticável averiguar o seu conteúdo. Quanto menos suposições fizermos sobre este setor, melhor. Os primeiros modelos de quebra de SUSY têm um único escalar no setor oculto, que interage apenas gravitacionalmente com o setor visível. Em modelos com quebra *gauge-mediated* e *anomaly-mediated*, este mecanismo *gravity-mediated* está sempre presente, tornando-se apenas de menor importância.

Entre os modelos de quebra espontânea de SUSY conhecidos, o conjunto de modelos *gravity-mediated* é o que menos exige do setor oculto, comparado com modelos *gauge-mediated* e *anomaly-mediated*. Além disso o alto valor da massa do Higgs restringe severamente os parâmetros destes dois cenários, e a reativação do LHC com energia de centro de massa até 13 TeV poderá restringir ainda mais o espaço de parâmetros para modelos supersimétricos.

Quanto ao cenário *gravity-mediated*, os modelos com quebra radiativa da simetria eletrofraca ainda podem escapar ao LHC13 sem perder naturalidade. Sua principal característica, higgsinos da ordem da escala eletrofraca, é muito difícil de testar no LHC. Futuros aceleradores lineares de léptons são planejados como uma ferramenta fundamental para procurar física além do Modelo Padrão, com medições precisas dos parâmetros do bóson de Higgs em busca de desvios. O *background* mais limpo destes aceleradores permite buscar detecção direta de higgsinos leves, se tiverem energia suficiente para produzi-los.

Embora os modelos discutidos aqui sejam não-renormalizáveis, com *cutoff* na escala de Planck (um problema comum em teorias que abrangem a gravitação), isto não é suficiente para desconsiderar a quebra mediada por gravitação. A escala de grande unificação onde os efeitos da supersimetria se tornam mais importantes está três ordens de grandeza abaixo da escala de Planck. Mesmo que soluções teóricas mais completas seja formuladas, provavelmente todas terão os mesmos efeitos até a escala GUT, sendo indistinguíveis experimentalmente. A supergravidade ainda servirá à construção de modelos efetivos por muito tempo.

APÊNDICE A

A.1 Convenções

A matriz de conjugação de carga é unitária, escolhemos fixar a fase de forma que

$$C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C \tag{a.1}$$

Usamos as convenções abaixo para levantar e abaixar índices espinoriais. As contrações são de cima para baixo, exceto entre um espinor e a conjugação de carga.

$$\bar{\theta} \equiv \theta^T C, \qquad \theta^T = \bar{\theta} C^{-1}, \qquad \theta = C^{-1T} \bar{\theta}^T = C \bar{\theta}^T \tag{a.2}$$

$$C_{ac}(\theta_b C^{bc}) = C_{ac} \bar{\theta}^c = \theta_a, \qquad C_{ac} C^{bc} = \delta^a_b \tag{a.3}$$

$$\bar{\chi}\psi = \bar{\chi}^a \psi_a = (\chi_b C^{ba})(C_{ac} \bar{\psi}^c) = -\bar{\psi}^c \chi_b C^{ba}(-C_{ca}) = \bar{\psi}^c \chi_b \delta^b_c = \bar{\psi}\chi \tag{a.4}$$

Definimos para qualquer matriz formada a partir de um produto das matrizes gama, $(\Gamma^A)_a{}^b$, a versão com índices abaixados como seu produto com C.

$$\Gamma_{ab} \equiv \Gamma_a{}^c C_{cb} = \Gamma^{dc} C_{cb} C_{da} \tag{a.5}$$

$$\Gamma^{ab} = C^{ac} C^{bd} \Gamma_{cd} \tag{a.6}$$

A utilidade desse procedimento é que as matrizes $\mathtt{1}, \gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_{\mu\nu\rho}, \gamma_5$, após tomar o produto com C para nivelar os índices espinoriais, se tornam simétricas ou antissimétricas, independentemente da representação.

$$(C)^T = -C \quad \Longrightarrow \quad \bar{\chi}\psi = \bar{\psi}\chi \tag{a.7}$$

$$(\gamma_5 C)^T = -\gamma_5 C \quad \Longrightarrow \quad \bar{\chi}\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma_5\chi \tag{a.8}$$

$$(\gamma_\mu C)^T = \gamma_\mu C \quad \Longrightarrow \quad \bar{\chi}\gamma_\mu\psi = -\bar{\psi}\gamma_\mu\chi \tag{a.9}$$

$$(\gamma_{\mu\nu} C)^T = \gamma_{\mu\nu} C \quad \Longrightarrow \quad \bar{\chi}\gamma_{\mu\nu}\psi = -\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu}\chi \tag{a.10}$$

$$(\gamma_\mu\gamma_5 C)^T = -\gamma_\mu\gamma_5 C \quad \Longrightarrow \quad \bar{\chi}\gamma_\mu\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\chi \tag{a.11}$$

Para os anticomutadores das supercargas, temos:

$$\{Q_a, Q_b\} = \{Q_a, C_{bc}\bar{Q}^c\} = 2(\gamma^\mu)_a{}^c(-C_{cb})P_\mu = -2(\gamma^\mu)_{ab}P_\mu \tag{a.12}$$

$$\{\bar{Q}^a, \bar{Q}^b\} = \{Q_c C^{ca}, \bar{Q}^b\} = 2(C^{-1})^{ac}(\gamma^\mu)_c{}^b P_\mu = -2(\gamma^\mu)^{ab}P_\mu \tag{a.13}$$

Bibliografia

[1] COLEMAN, S. R.; MANDULA, J. All Possible Symmetries of the S Matrix. *Phys.Rev.*, v. 159, p. 1251–1256, 1967.

[2] HAAG, R.; LOPUSZANSKI, J. T.; SOHNIUS, M. All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix. *Nucl.Phys.*, B88, p. 257, 1975.

[3] GRISARU, M. T.; SIEGEL, W.; ROCEK, M. Improved Methods for Supergraphs. *Nucl.Phys.*, B159, p. 429, 1979.

[4] WESS, J.; BAGGER, J. Supersymmetry and supergravity. 1992.

[5] MULLER-KIRSTEN, H.; WIEDEMANN, A. SUPERSYMMETRY: AN INTRODUCTION WITH CONCEPTUAL AND CALCULATIONAL DETAILS. 1986.

[6] MARTIN, S. P. A Supersymmetry primer. *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.*, v. 21, p. 1–153, 2010.

[7] FREEDMAN, D. Z.; PROEYEN, A. V. Supergravity. Cambridge, 2012.

[8] BAER, H.; TATA, X. *Weak-scale Supersymmetry.* [S.l.]: Westview, 2004.

[9] WALD, R. M. *General Relativity.* [S.l.: s.n.], 1984.

[10] CREMMER, E. et al. Yang-Mills Theories with Local Supersymmetry: Lagrangian, Transformation Laws and SuperHiggs Effect. *Nucl.Phys.*, B212, p. 413, 1983.

[11] THEIS, U. *A Beginner's Guide to Supergravity.* 2006.

[12] FERRARA, S.; NIEUWENHUIZEN, P. van. The Auxiliary Fields of Supergravity. *Phys. Lett.*, B74, p. 333, 1978.

[13] SOHNIUS, M. F.; WEST, P. C. An Alternative Minimal Off-Shell Version of N=1 Supergravity. *Phys. Lett.*, B105, p. 353, 1981.

[14] HIGGS, P. W. Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons. *Phys.Rev.*, v. 145, p. 1156–1163, 1966.

[15] CREMMER, E. et al. Super-higgs effect in supergravity with general scalar interactions. *Phys.Lett.*, B79, p. 231, 1978.

[16] GRISARU, M. T.; ROCEK, M.; KARLHEDE, A. The Superhiggs Effect in Superspace. *Phys.Lett.*, B120, p. 110, 1983.

[17] POLONYI, J. Generalization of the Massive Scalar Multiplet Coupling to the Supergravity. 1977.

[18] ELLIS, J. et al. Phenomenological Aspects of No-Scale Inflation Models. 2015.

[19] CREMMER, E. et al. Naturally Vanishing Cosmological Constant in N=1 Supergravity. *Phys.Lett.*, B133, p. 61, 1983.

[20] LAHANAS, A.; NANOPOULOS, D. V. The Road to No Scale Supergravity. *Phys.Rept.*, v. 145, p. 1, 1987.

[21] GIRARDELLO, L.; GRISARU, M. T. Soft Breaking of Supersymmetry. *Nucl.Phys.*, B194, p. 65, 1982.

[22] CHAMSEDDINE, A. H.; ARNOWITT, R. L.; NATH, P. Locally Supersymmetric Grand Unification. *Phys.Rev.Lett.*, v. 49, p. 970, 1982.

[23] ELLWANGER, U.; HUGONIE, C.; TEIXEIRA, A. M. The Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model. *Phys.Rept.*, v. 496, p. 1–77, 2010.

[24] PECCEI, R. The Strong CP problem and axions. *Lect.Notes Phys.*, v. 741, p. 3–17, 2008.

[25] GIUDICE, G.; MASIERO, A. A Natural Solution to the mu Problem in Supergravity Theories. *Phys.Lett.*, B206, p. 480–484, 1988.

[26] ZHITNITSKY, A. On Possible Suppression of the Axion Hadron Interactions. (In Russian). *Sov.J.Nucl.Phys.*, v. 31, p. 260, 1980.

[27] DINE, M.; FISCHLER, W.; SREDNICKI, M. A Simple Solution to the Strong CP Problem with a Harmless Axion. *Phys.Lett.*, B104, p. 199, 1981.

[28] KIM, J. E.; NILLES, H. P. The mu Problem and the Strong CP Problem. *Phys.Lett.*, B138, p. 150, 1984.

[29] MURAYAMA, H.; SUZUKI, H.; YANAGIDA, T. Radiative breaking of Peccei-Quinn symmetry at the intermediate mass scale. *Phys.Lett.*, B291, p. 418–425, 1992.

[30] BAE, K. J.; BAER, H.; SERCE, H. Natural little hierarchy for SUSY from radiative breaking of the Peccei-Quinn symmetry. *Phys.Rev.*, D91, n. 1, p. 015003, 2015.

[31] YOUNKIN, J. E.; MARTIN, S. P. Non-universal gaugino masses, the supersymmetric little hierarchy problem, and dark matter. *Phys.Rev.*, D85, p. 055028, 2012.

[32] BARBIERI, R.; STRUMIA, A. About the fine tuning price of LEP. *Phys.Lett.*, B433, p. 63–66, 1998.

[33] BAER, H.; BARGER, V.; SAVOY, M. Supergravity gauge theories strike back: There is no crisis for SUSY but a new collider may be required for discovery. *Phys.Scripta*, v. 90, n. 6, p. 068003, 2015.

[34] BAER, H. et al. Radiative natural supersymmetry: Reconciling electroweak fine-tuning and the Higgs boson mass. *Phys.Rev.*, D87, n. 11, p. 115028, 2013.

[35] BAER, H. et al. Radiative natural SUSY with a 125 GeV Higgs boson. *Phys.Rev.Lett.*, v. 109, p. 161802, 2012.

[36] ELLIS, J. R. et al. Observables in Low-Energy Superstring Models. *Mod.Phys.Lett.*, A1, p. 57, 1986.

[37] BARBIERI, R.; GIUDICE, G. Upper bounds on supersymmetric particle masses. *Nuclear Physics B*, v. 306, n. 1, p. 63 – 76, 1988. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138890171X>.

[38] MOORTGAT-PICKA, G. et al. Physics at the e^+e^- Linear Collider. 2015.

[39] GAMBERINI, G. Heavy Gluino and Squark Decays at $P\bar{P}$ Collider. *Z.Phys.*, C30, p. 605–613, 1986.

[40] BAER, H.; LIST, J. Post LHC8 SUSY benchmark points for ILC physics. *Phys.Rev.*, D88, p. 055004, 2013.

[41] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Out of this world supersymmetry breaking. *Nuclear Physics B*, v. 557, n. 1–2, p. 79 – 118, 1999. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321399003594>.

[42] GIUDICE, G. F. et al. Gaugino mass without singlets. *JHEP*, v. 9812, p. 027, 1998.

[43] BENNETT, G. W. et al. Final report of the e821 muon anomalous magnetic moment measurement at bnl. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 73, p. 072003, Apr 2006. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.072003>.

[44] DAVIER, M. et al. Reevaluation of the Hadronic Contributions to the Muon g-2 and to alpha(MZ). *Eur.Phys.J.*, C71, p. 1515, 2011.

[45] NATH, P. Supersymmetry after the Higgs. *Annalen Phys.*, 2015.