

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física



Tese de Doutorado

**Quantização de Landau e Efeitos Associados  
para Átomos Ultrafrios do Tipo Tripod  
na Presença de um Campo Magnético Artificial**

Bruno Farias da Silva

João Pessoa, Fevereiro de 2015

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física



Tese de Doutorado

**Quantização de Landau e Efeitos Associados  
para Átomos Ultrafrios do Tipo Tripod  
na Presença de um Campo Magnético Artificial**

Bruno Farias da Silva

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, Fevereiro de 2015

S586q Silva, Bruno Farias da.  
Quantização de Landau e efeitos associados para átomos  
ultrafrios do tipo tripod na presença de uma campo magnético  
artificial / Bruno Farias da Silva.- João Pessoa, 2015.  
106f.  
Orientador: Cláudio Benedito da Silva Furtado  
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN  
1. Física. 2. Quantização de Landau. 3. Gás atômico ultrafrio  
bidimensional. 4. Campos de calibre Abelianos  $U(1) \times U(1)$ .  
5. Configuração tripod.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO  
Doutorado

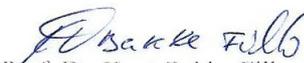
A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 27 de fevereiro de 2015, Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Bruno Farias da Silva** na defesa de sua tese intitulada "*Quantização de Landau e Efeitos Associados para Átomos Ultrafrios do Tipo Tripod na Presença de um Campo Magnético Artificial*".

João Pessoa, 27 de fevereiro de 2015

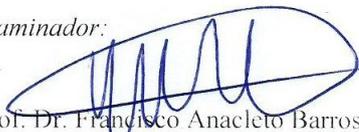
Orientador:

  
Prof. Dr. Cláudio Furtado  
(UFPB)

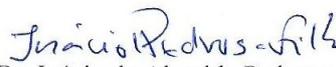
1º Examinador:

  
Prof. Dr. Knut Bakke Filho  
(UFPB)

2º Examinador:

  
Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros  
Fidelis de Moura  
(UFAL)

3º Examinador:

  
Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa  
(UFPB)

4º Examinador:

  
Prof. Dr. Jorge Mario Malbouisson  
(UFBA)

Aos meus pais João e Maria.  
À minha irmã Bruna.

# Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo ao meu orientador, professor Cláudio Furtado, pelo seu apoio e orientação ao longo deste doutorado.

Agradeço aos meus colegas professores e técnicos administrativos da Universidade Federal de Campina Grande (campi de Cajazeiras e Pombal) pelo suporte e compreensão que me foram devotados durante a execução deste trabalho, o que foi essencial para conclusão do mesmo. Tal tarefa, se tornou extremamente árdua devido a carga de trabalho adicional com a ministração aulas na UFCG, bem como devido às longas viagens semanais.

Agradeço a Jilvan por sua amizade, presteza e substanciais contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a Aliliane (Lilika) pelas calorosas conversas e boas gargalhadas que me proporcionou. Agradeço também, aos meus colegas de sala Júlio, Elias, Tiago I e II pela troca de conhecimento e pelo excelente ambiente de trabalho.

Agradeço ao professor Fernando Moraes pelas produtivas discussões a respeito de questões relacionadas a minha tese, como também aos professores Albert Petrov e Heliane Ferreira pela revisão de língua inglesa em meus artigos.

Agradeço aos meus amigos, representados por Thalyta, Hantony, Mazé, Monique, Wilson, Wilka, Teddy e Carlos Sérgio, pelo companherismo e inúmeros momentos de alegria.

Agradeço ao meu tio Washington Farias pela revisão de língua portuguesa em minha tese.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante o doutorado.

Agradeço aos meus pais, por todo amor e cuidado, o que sempre me permite ir além dos meus limites. Agradeço a minha irmã, pelo apoio incontinente em todos os momentos de dificuldade, bem como a Raony por todo suporte e incentivo.

Por fim, agradeço ao Ser que criou o universo com tanta diversidade e riqueza de detalhes, o que resulta em uma fonte inesgotável de conhecimento a ser explorada.

# Resumo

Nesta tese, propomos um arranjo experimental para o estudo da quantização de Landau e efeitos associados em um gás atômico ultrafrio bidimensional. Campos de calibre podem surgir na equação de movimento para átomos ultrafrios óticamente vestidos. Para que isto ocorra, estados escuros espacialmente dependentes são necessários a partir dos estados internos dos átomos. Átomos numa configuração de níveis de energia do tipo tripod produzem dois estados escuros degenerados, que podem levar a campos de calibre Abelianos  $U(1) \times U(1)$  ou não-Abelianos  $SU(2)$ . Utilizando uma configuração adequada de lasers, mostramos que é possível se produzir um campo magnético sintético uniforme  $U(1) \times U(1)$  que atua nos átomos neutros fazendo-os se organizarem em níveis de Landau. A intensidade do campo efetivo depende da intensidade relativa dos feixes de luz na nuvem atômica. Estimamos a degenerescência dos níveis de energia para um gás atômico formado por átomos de  $^{87}\text{Rb}$  e estabelecemos as condições experimentais para que seja atingido o regime em que todos os átomos populam unicamente o nível de Landau menos energético. Considerando o limite de temperatura nula, verificamos o surgimento de oscilações magnéticas na energia e em sua derivada como uma função do inverso do campo magnético efetivo (efeito de Haas van Alphen). O período da oscilação magnética nos permite determinar a área do círculo de Fermi para o gás atômico através de uma expressão similar a de Onsager para sistemas eletrônicos. Mostramos também que desintonizando um dos lasers em relação à ressonância de dois fótons geramos um potencial escalar parabólico que faz com os átomos sejam lateralmente confinados. Isto resulta na remoção da degenerescência dos níveis de Landau, uma vez que a energia depende explicitamente do momento atômico transversal. Demonstramos que, aplicando condições periódicas de contorno ao sistema, temos o surgimento de uma degenerescência residual. A degenerescência remanescente ocorre quando diferentes níveis de energia se superpõem. Mapeamos os pontos de degenerescência como uma função do campo magnético efetivo. Por fim, apresentamos um esquema experimental para a observação do efeito spin Hall para átomos ultrafrios em uma configuração tripod.

**Palavras Chaves:** Quantização de Landau; gás atômico ultrafrio bidimensional; campos de calibre Abelianos  $U(1) \times U(1)$  ; configuração tripod; átomos de  $^{87}\text{Rb}$ ; efeito de Haas van Alphen; degenerescência residual, efeito spin Hall.

# Abstract

In this thesis, we propose an experimental setup for the study of Landau quantization and associated effects in a two-dimensional ultracold atomic gas. Gauge fields can emerge in the equation of motion for the optically addressed ultracold atoms. To this end, spatially dependent dark states are necessary for the internal states of the atoms. A tripod level scheme yields two degenerate dark states which can lead to either an Abelian  $U(1) \times U(1)$  gauge field or a non-Abelian  $SU(2)$  gauge field. Using a suitable laser configuration, we obtain a uniform  $U(1) \times U(1)$  magnetic field which causes the atoms to organize themselves in Landau levels. The strength of the effective magnetic field depends on the relative intensity of the laser beams at the atomic cloud. We estimate the degeneracy of the energy levels for an atomic gas formed by atoms of  $^{87}\text{Rb}$ . In addition, we establish the experimental conditions to reach the lowest Landau level regime. In the zero-temperature limit, we realize the emergence of magnetic oscillations in the atomic energy and its derivative as a function of the inverse of the effective magnetic field (de Haas van Alphen effect). The period of the de Haas van Alphen oscillation allows us to determine the area of the Fermi circle for the atomic gas via an Onsager-like relation. We also show that detuning a laser from the two-photon resonance generates a parabolic scalar potential that laterally confines the atoms. As a consequence, the Landau level degeneracy is removed, since the energy spectrum depends explicitly on the transverse atomic momentum. We show that the Landau levels present a reminiscent degeneracy when the boundary conditions are considered. The residual degeneracy occurs when different energy levels overlap. We map the residual degeneracy points as a function of the effective magnetic field. Finally, we present an experimental scheme for observing the spin Hall effect for ultracold atoms in a tripod configuration.

**Keywords:** Landau quantization; two-dimensional ultracold atomic gas; Abelian  $U(1) \times U(1)$  gauge field ; tripod configuration; atoms of  $^{87}\text{Rb}$ ; de Haas van Alphen effect; residual degeneracy, spin Hall effect.

# Prefácio

Desde da realização do condensado de Bose-Einstein, gases atômicos ultrafrios são um dos tópicos de maior interesse em Física teórica e experimental. Tem contribuído para isso, o rápido desenvolvimento das técnicas experimentais e os avanços teóricos envolvendo vapores atômicos obtidos nos últimos anos. Atualmente, pode-se projetar experimentos com grande grau de controle sobre densidades, temperaturas, polarização, comprimento de interação, forma do potencial externo, como também criar campos magnéticos sintéticos atuando sobre os átomos. Tudo isto faz dos gases atômicos ultrafrios bons candidatos para simuladores quânticos. Na realidade, eles já tem sido usados para simular e testar modelos de matéria condensada difíceis de estudar em outros sistemas. Sistemas bidimensionais e aproximadamente bidimensionais de átomos em campos de calibre artificiais (tanto Abelianos como não-Abelianos) são de particular interesse. Campos de calibre podem surgir a partir do movimento adiabático de átomos multiníveis em campos de luz laser que geram estados escuros degenerados. Em particular, átomos em uma configuração de níveis de energia do tipo tripod produzem dois estados escuros degenerados, os quais levam a campos de calibre Abelianos  $U(1) \times U(1)$  ou a campos de calibre não-Abelianos  $SU(2)$ . No caso específico dos potenciais de calibre Abelianos  $U(1) \times U(1)$ , temos a possibilidade de simular uma vasta gama de efeitos eletrônicos bidimensionais em átomos ultrafrios utilizando potenciais dependentes do spin.

Nesta tese estudamos o surgimento dos campos de calibre óticamente induzidos em átomos ultrafrios do tipo tripod. Neste contexto, apresentamos um arranjo experimental para a obtenção do calibre de Landau e investigamos efeitos associados à quantização de Landau em um gás ultrafrio bidimensional de átomos de  $^{87}\text{Rb}$ . O texto é organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, discutimos o significado da temperatura ultrafria e sua relação com o regime atômico quântico. Com fins ilustrativos, apresentamos uma derivação semiclássica das forças óticas que uma onda monocromática exerce sobre um átomo de dois níveis. No intuito de se compreender o princípio de funcionamento de uma armadilha magneto-ótica, é feita uma breve síntese dos mecanismos de resfriamento e aprisionamento de gases atômicos e apresentada a estrutura hiperfina do átomo de Rubídio. O capítulo 1 termina com a descrição da metodologia e do aparato experimental empregados na obtenção de um gás ultrafrio bidimensional para átomos de  $^{87}\text{Rb}$ . No futuro, tal aparato pode ser

construído por nosso grupo de pesquisa.

No capítulo 2, temos uma revisão sobre os campos de calibre efetivos que são gerados oticamente como uma fase de Berry. Tais campos efetivos são os ingredientes básicos desta tese. Inicialmente, discutimos a respeito de um modelo ilustrativo, no qual a transição atômica que é acoplada à luz laser é representada por um simples sistema de dois níveis. Este modelo nos permite identificar os elementos essenciais para o surgimento de potenciais de calibre artificiais. Em seguida, apresentamos o formalismo geral para a obtenção de campos de calibre geométricos para átomos com mais de dois níveis. Este formalismo é válido para o caso em que consideramos o átomo possuindo um único estado excitado e vários estados fundamentais (quase)degenerados. Nesta configuração, os estados vestidos utilizados na geração dos campos de calibre são combinações lineares dos estados eletrônicos fundamentais, com uma contribuição insignificante do estado excitado. O formalismo geral torna possível o estudo do magnetismo artificial para diversas classes de átomos, incluindo os átomos alcalinos, que são os mais utilizados. Finalizamos o capítulo com o estudo dos campos de calibre gerados a partir da interação entre três feixes de laser e átomos em um configuração de níveis de energia do tipo tripod.

O capítulo 3 se destina ao estudo da quantização de Landau e do efeito de Haas van Alphen para um gás de elétrons bidimensional na presença de um campo magnético uniforme e ortogonal. Nossa intenção é que a leitura deste capítulo facilite a compreensão dos conteúdos abordados no capítulo 4.

No capítulo 4, apresentamos o arranjo experimental que leva ao surgimento de níveis de Landau em um gás atômico ultrafrio bidimensional de  $^{87}\text{Rb}$ . Realizamos a derivação dos potenciais de calibre geométricos para este sistema. Com base em parâmetros experimentais típicos, estimamos a degenerescência dos níveis de Landau e apresentamos as condições para se possa atingir o regime em que todos os átomos populam o nível de Landau menos energético. Variando a intensidade do campo magnético efetivo, observamos o surgimento de oscilações na energia atômica e na sua derivada, o que é denominado de efeito de Haas van Alphen. Como uma consequência, estimamos a área do círculo de Fermi para o gás atômico. Pela modificação da frequência de um dos lasers que interagem com as transições atômicas, se viabilizou a indução de um potencial escalar parabólico, o qual confina o átomo lateralmente e remove a degenerescência dos níveis de Landau. Mostramos que quando se leva em conta condições periódicas de contorno os níveis de energia apresentam uma degenerescência remanescente. Esta degenerescência foi mapeada em função do campo magnético efetivo. Finalizamos o capítulo propondo um esquema experimental para a observação do efeito spin Hall em gás ultrafrio bidimensional com os átomos em configuração tripod.

O desenvolvimento desta tese resultou nos seguintes trabalhos:

1. B. Farias, J. Lemos de Melo and C. Furtado, *Spin-Dependent Landau Levels for  $\Lambda$ -type Ultracold Atoms in a Optically Induced Gauge Field*, anais da 13th Frontiers of

Quantum and Mesoscopic Thermodynamics Conference, Praga, República Tcheca, 2013.

2. B. Farias, J. Lemos de Melo and C. Furtado, *Degenerate Landau levels for tripod-type cold atoms in a Abelian gauge field*, Eur. Phys. J. D **68**, 77 (2014).
3. B. Farias and C. Furtado, *De Haas-van Alphen Effect of a Two-Dimensional Ultracold Atomic Gas*, aceito para publicação no Physica B.
4. B. Farias, J. Lemos de Melo and C. Furtado, *Residual Degeneracy from Non-Degenerate Landau Levels of Ultracold Atomic Gas in an Abelian Gauge Field*, submetido para publicação no Ann. Phys.
5. B. Farias and C. Furtado, *Spin Hall Effect for an tripod-type Ultracold Gas in a Abelian Light-Induced Gauge Potential*, preprint.

Por fim, com o intuito de alicerçar melhor meus conhecimentos em física atômica, participamos de escolas que trataram de temas relacionados com a referida área, tais como: Summer School on Quantum Many-Body Physics of ultra-Cold Atoms and Molecules no The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Itália, 2012; e Minischool on Few-Body Physics no ICTP-SAIFR, São Paulo, Brasil, 2014.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Prefácio</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Átomos Ultrafrios</b>	<b>2</b>
1.1 Resfriamento e Aprisionamento de Átomos Neutros com Laser . . . . .	4
1.1.1 Um breve Histórico . . . . .	4
1.1.2 Forças Radiativas e Manipulação Ótica de Átomos . . . . .	6
1.1.3 Resfriamento Laser e Melaço Ótico . . . . .	8
1.1.4 Armadilha Magneto-Ótica . . . . .	11
1.2 Gases Atômicos Ultrafrios . . . . .	17
1.2.1 Armadilha Magnética QUIC . . . . .	18
1.2.2 Resfriamento Evaporativo . . . . .	20
1.2.3 Condensação de Bose-Einstein . . . . .	22
1.2.4 Gases Atômicos Ultrafrios Bidimensionais . . . . .	23
<b>2 Campos de Calibre Oticamente Induzidos para Átomos Ultrafrios</b>	<b>27</b>
2.1 Fase Geométrica e Magnetismo Artificial . . . . .	28
2.2 Modelo Ilustrativo para a Produção de Campos de Calibre Artificiais: Átomo de Dois Níveis em um Feixe de Luz . . . . .	29
2.2.1 Movimento Adiabático de um Estado Vestido . . . . .	30
2.2.2 Interpretação Física dos Potenciais Geométricos . . . . .	32
2.3 Formalismo Geral para o Movimento Adiabático de Átomos Neutros em Campos de Luz . . . . .	33
2.4 Campos de Calibre Oticamente Induzidos para Átomos Ultrafrios Tipo- Tripod . . . . .	36

2.5	Geração de um Monopolo Magnético . . . . .	39
2.6	Primeira Observação Experimental de um Campo de Calibre Geométrico Oticamente Induzido . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Níveis de Landau e o Efeito de Haas van Alphen para um Gás de Elétrons Bidimensional</b>	<b>44</b>
3.1	Níveis de Landau . . . . .	46
3.1.1	Quantização Semiclássica das Órbitas em um Campo Magnético . .	48
3.2	O efeito de Haas van Alphen para um Gás de Elétrons Bidimensional . . .	51
<b>4</b>	<b>Níveis de Landau e Efeitos Associados para um Gás Atômico Ultrafrio Bidimensional</b>	<b>59</b>
4.1	Níveis de Landau Degenerados para Átomos Ultrafrios Tipo-Tripod na Pre- sença de um Campo de Calibre Abelian $U(1) \times U(1)$ . . . . .	60
4.2	O Efeito de Haas van Alphen para um Gás Atômico Bidimensional . . . .	66
4.3	Degenerescência Remanescente para um Gás Atômico Ultrafrio Bidimensi- onal Lateralmente Confinado . . . . .	69
4.4	Efeito Spin Hall para Átomos Ultrafrios de Tipo-Tripod na Presença de um Campo de Calibre Oticamente Induzido . . . . .	77
	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>80</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>Interação Átomo-Radiação</b>	<b>82</b>
A.1	Forças Ópticas e Armadilhas Atômicas . . . . .	82
A.2	Processos Básicos de Transferência de Energia entre o Átomo e a radiação	86
<b>B</b>	<b>Notação Espectroscópica e Propriedades do <math>^{87}\text{Rb}</math></b>	<b>88</b>
B.1	Notação Espectroscópica . . . . .	88
B.2	Propriedades do $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	88
<b>C</b>	<b>Resfriamento Sub-Doppler e Evaporativo</b>	<b>90</b>
C.1	Resfriamento Sub-Doppler . . . . .	90
C.2	Resfriamento Evaporativo . . . . .	94
<b>D</b>	<b>O teorema adiabático e a fase de Berry</b>	<b>98</b>
D.1	O Teorema Adiabático . . . . .	98
D.2	Dedução da Fase de Berry . . . . .	99
D.3	A Fase de Berry como um Campo de Calibre . . . . .	100
D.4	Um exemplo da Fase de Berry: partícula de spin-1/2 em um campo magnético	102
D.5	Potencial de Calibre Wilczek-Zee . . . . .	104



# Lista de Figuras

1.1	a) Comprimento de onda de de Broglie para objetos com massas diferentes. b) Comprimento de onda de de Broglie como função da temperatura [1]. . . . .	3
1.2	A intensidade da pressão de radiação $F_{esp}$ em função da frequência da luz $\omega$ , no caso em que $v = 0$ e somente a emissão espontânea é responsável pelo alargamento de linha. . . . .	7
1.3	Com o laser sintonizado abaixo do pico de ressonância atômica, o átomo de movendo-se na direção oposta à do feixe de laser irá experimentar uma pressão de radiação que diminuirá sua velocidade. . . . .	8
1.4	O processo de resfriamento Doppler visto (a) do referencial do laboratório e (b) no referencial próprio de um átomo com velocidade $\mathbf{v}$ . . . . .	9
1.5	Pressão de radiação de dois feixes de luz laser sobre um átomo neutro. . . . .	10
1.6	Melaço ótico tridimensional. . . . .	10
1.7	Esquema do processo de aprisionamento sobre a transição de frequência $\omega_0$ . Os feixes de resfriamento $+\mathbf{k}$ e $-\mathbf{k}$ possuem polarização circular $\sigma_+$ e $\sigma_-$ , de modo que exercem também uma força de aprisionamento. O campo magnético é de gradiente $B_0$ constante e orientado na direção $z$ . . . . .	12
1.8	Conservação do momento angular na absorção de fótons com diferentes polarizações. . . . .	12
1.9	Esquema de um MOT. Feixes de luz lasers incidem a partir de todas as seis direções e possuem momento angular como mostrado. Duas bobinas com correntes opostas produzem um campo magnético, que é zero no centro e varia linearmente ao longo das três direções. . . . .	14
1.10	Diagrama do níveis do $^{87}\text{Rb}$ mostrando as transições eletrônicas envolvidas no processo de aprisionamento. Essencialmente todo aprisionamento e resfriamento é feito por um laser, o qual é ligeiramente dessintonizado (1-3 larguras de linha) para o lado de baixa frequência de $5^2S_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 3)$ . Em adição, aplicamos um laser de bombeio à transição $5^2S_{1/2}(F = 1) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F' = 2)$ (ver texto). . . . .	15

1.11	Imagem de uma nuvem de átomos de $^{87}\text{Rb}$ ( $^{87}\text{Rb}$ cloud) aprisionados. Para pressões do gás na célula da ordem de $10^{-8}$ Torr, o número total de átomos aprisionados pode passar de $10^8$ em uma nuvem de $\sim 5$ mm de diâmetro, atingindo assim densidades da ordem de $10^9$ átomos/cm <sup>3</sup> . A temperatura do gás é de $120 \mu\text{K}$ . . . . .	16
1.12	Densidade e temperatura atômica obtidos com as técnicas de resfriamento laser e evaporativo [1]. . . . .	17
1.13	Arranjo experimental para produção de um gás atômico ultrafrio [34]. . . .	18
1.14	A armadilha magnética do tipo QUIC (configuração quadrupolo-Ioffe) foi primeiro desenvolvida por Hänsch [38]) e é uma combinação de três bobinas: em par de bobinas anti-Helmholtz sobre o mesmo eixo produzindo um campo quadrupolar e uma pequena bobina chamada de bobina Ioffe em um eixo perpendicular [34]. Esta última bobina, é responsável pela presença de um mínimo local não-nulo do campo magnético, localizado onde os gradientes criados pelas 3 bobinas, ao longo do eixo da bobina Ioffe, se cancelam. . . . .	19
1.15	Transições do $^{87}\text{Rb}$ e frequências dos feixes de laser usados nesse etapa do processo de resfriamento [35]. . . . .	19
1.16	Resfriamento evaporativo pela redução da magnitude do potencial confinante [36]. . . . .	20
1.17	Energia dos sub-níveis Zeeman dos estados $F = 2$ do $^{87}\text{Rb}$ em uma armadilha QUIC e levando a gravidade em conta, em função da coordenada vertical $z$ . A nuvem é aprisionada no estado superior $m_F = +2$ . O campo evaporativo oscilante tem uma pulsação $\omega_{ev}$ maior do que $\omega_0$ . Os átomos aprisionados com uma energia maior do que $U_t = 2(\omega_{ev} - \omega_0)$ , podem visitar a região onde o campo RF em $\omega_{ev}$ é ressonante com a diferença de energia entre dois consecutivos sub-níveis, e serem transferidos para estados Zeeman não aprisionáveis. . . . .	21
1.18	Efeito do resfriamento evaporativo sobre a nuvem atômica [36]. Podemos ver que o tamanho (i.e. a temperatura) da nuvem diminui, e a sua densidade aumenta, quando se varia a frequência RF. . . . .	21

1.19	Critério para a condensação de Bose-Einstein [37]. Em temperaturas altas, um gás interagindo fracamente pode ser tratado como um sistema de "bolas de bilhar". Em temperaturas baixas o bastante, podemos usar uma descrição quântica, na qual as partículas podem ser consideradas como pacotes de onda com uma extensão $\lambda_{dB}$ . Na temperatura de transição do CBE, $\lambda_{dB}$ se torna comparável à distância $d$ entre as partículas, e um condensado de Bose-Einstein se forma. Na medida que a temperatura se aproxima de zero, a nuvem atômica desaparece levando a um condensado de Bose puro. . . . .	22
1.20	Observação do condensado de Bose-Einstein [36]. A partir do painel da esquerda (frequência RF de 200 kHz), podemos observar a transição para o CBE. Embora não esteja muito nítido na figura, o CBE tem uma forma espacial aproximadamente elíptica. . . . .	23
1.21	Diagrama, ao longo do eixo z, dos cinco sub-níveis Zeeman do $^{87}\text{Rb}$ , $F = 2$ , em um campo magnético QUIC [34]. O átomo é submetido a um campo RF apresentando uma frequência $\omega_{rf}$ e uma frequência rabi $\Omega_{rf}$ . Os níveis são representados no formalismo de estados vestidos, (a) na ausência de acoplamento e (b) para um acoplamento RF forte. . . . .	24
1.22	Átomos vestidos aprisionados [34]. . . . .	24
1.23	(a) Corte das superfícies iso-B na armadilha QUIC no plano vertical $xz$ [34]. Duas sucessivas linhas iso-B são separadas por $0,5 G$ . A linha grossa representa esquematicamente a distribuição atômica dos átomos na armadilha vestida na presença de gravidade. (b) O regime de 3D da superfície iso-B dentro do qual os átomos (linha vermelha grossa) são aprisionados. . . . .	25
1.24	Imagens experimentais de uma nuvem atômica com $10^6$ átomos aprisionados, a $5 \mu K$ , dentro de a) uma armadilha QUIC "nua", b) uma armadilha 2D com $\omega_{rf} = 2\pi \times 3 MHz$ (deslocamento vertical $ z_0  = 130 \mu m$ ), uma armadilha 2D com $\omega_{rf} = 2\pi \times 8 MHz$ (deslocamento vertical $ z_0  = 450 \mu m$ ) [41]. As dimensões das figuras são $4,5 \times 1,2 mm$ . . . . .	26
2.1	Ilustração esquemática da interação átomo-laser. Na configuração Multipod, um estado atômico $ e\rangle$ é acoplado a $N - 1$ diferentes estados atômicos $ g_j\rangle$ por $N - 1$ campos de luz laser ressonantes. . . . .	33
2.2	A configuração tripod. . . . .	36
2.3	Conjunto de estados escuros provenientes da diagonalização do Hamiltoniano de interação $\hat{H}_0$ . . . . .	37

2.4	Resumo do experimento para a observação de campos magnéticos sintéticos [9]. a) O condensado de Bose-Einstein está em uma armadilha de dipolo em um campo magnético $\mathbf{B} = (B_0 - b'y)\hat{j}$ . Dois feixes Raman propagando-se ao longo de $\hat{i} \mp \hat{j}$ ( polarizados linearmente ao longo de $\hat{i} \pm \hat{j}$ possuem frequências $\omega_L$ e $\omega_L + \Delta\omega_L$ . b) Esquema atômico usado por Lin <i>et al.</i> . Átomos de $^{87}\text{Rb}$ com um estado fundamental de spin $F = 1$ são colocados em um campo magnético externo que desloca os sub-níveis $ m_F \pm 1\rangle$ (linhas tracejadas) em relação a $ m_F = 0\rangle$ . Os átomos são iluminados por dois feixes laser com vetores de onda $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ que induzem um acoplamento ressonante entre os sub-níveis Zeeman, satisfazendo $\Delta m_F = \pm 1$ . Um gradiente espacial de campo magnético externo induz um deslocamento adicional de $ m_F \pm 1\rangle$ (linhas cheias). Isto cria uma dessintonia de dois fótons $\delta$ que varia espacialmente, a qual permite gerar um potencial de calibre artificial. Note que a figura está fora de escala em relação a frequência (na prática $\Delta \gg \delta$ ).	42
2.5	A formação de vórtices no experimento realizado por Lin <i>et al.</i> [9]. Na figura à esquerda, o gradiente de dessintonização é zero e não existem vórtices. Na figura da direita, o gradiente de dessintonização não é nulo. Os vórtices revelam que o campo magnético efetivo foi gerado.	43
3.1	Ilustração do movimento clássico de partículas carregadas em um plano e submetidas a um campo magnético perpendicular.	45
3.2	Ilustração do movimento quântico de partículas carregadas em um plano e submetidas a um campo magnético perpendicular.	45
3.3	O movimento orbital do elétron na presença de um campo magnético $\mathbf{B}$ ( $\mathbf{B}$ é direcionado para fora da página) no espaço dos $\mathbf{k}$ é similar ao do espaço dos $\mathbf{r}$ , mas escalonado pelo fator $\eta$ e com uma diferença de fase $-\frac{\pi}{2}$ . Note que assumimos $\mathbf{r}_0 = 0$ .	49
3.4	Explicação do efeito dHvA para um gás bidimensional de elétrons livres na presença de um campo magnético [74]. Os orbitais ocupados do mar de Fermi na ausência de um campo magnético são sombreadas em <i>a</i> e <i>d</i> . Os níveis de energia em um campo magnético são mostrados em <i>b</i> , <i>c</i> e <i>e</i> . Em <i>b</i> , o campo tem um valor $B_1$ , tal que a energia total dos elétrons é a mesma que na ausência de um campo magnético: assim como, vários elétrons têm sua energia elevada, outros têm sua energia diminuída pela quantização orbital no campo magnético $B_1$ . Quando aumentamos a intensidade do campo para $B_2$ , a energia eletrônica total é elevada porque os elétrons superiores têm sua energia aumentada. Em <i>e</i> para o campo $B_3$ a energia é novamente igual à do campo $B = 0$ . A energia total é mínima em pontos tais como $B_1, B_3, B_5\dots$ e é máxima em pontos tais como $B_2, B_4\dots$	52

3.5	Orbitais eletrônicos permitidos em duas dimensões na ausência de um campo magnético [74]. . . . .	53
3.6	Em um campo magnético os pontos que representam os orbitais de elétrons livres podem ser vistos como restritos a círculos no plano $k_x k_y$ [74]. Os sucessivos círculos correspondem aos sucessivos valores do número quântico $n$ na energia $\hbar\omega_c (n - \frac{1}{2})$ . Note que consideramos que $n$ começa a ser contado a partir de 1 e não de zero. A área entre os círculos sucessivos é $\pi\Delta(k^2) = 2\pi k(\Delta k) = (\frac{2\pi m}{\hbar^2})\Delta E = \frac{2\pi m\omega_c}{\hbar} = \frac{2\pi qB}{\hbar}$ . A posição angular dos pontos não tem nenhum significado. O número de orbitais em um círculo é constante e igual a área entre círculos sucessivos vezes o número de orbitais por área em figura (3.5), ou $(\frac{2\pi qB}{\hbar}) (\frac{L}{2\pi})^2 = \frac{L^2 qB}{2\pi\hbar}$ , negligenciando o spin do elétron. . . . .	53
3.7	A linha cheia indica o número de partículas em níveis que são completamente ocupados em um campo magnético $B$ , para um sistema bidimensional com $N = 50$ e $\rho = 0,5$ [74]. A área sombreada indica o número de partículas em níveis parcialmente ocupados. O valor de $s$ denota o número quântico do nível de Landau mais energético que é completamente preenchido. Por exemplo, em $B = 40$ nós temos $s = 2$ . Os níveis $n = 1$ e $n = 2$ estão preenchidos e existem 10 partículas no nível $n = 3$ . Para $B = 50$ o nível $n = 3$ está vazio. . . . .	54
3.8	A periodicidade em $\frac{1}{B}$ é evidente quando os mesmos pontos da figura (3.7) são plotados em função $\frac{1}{B}$ [74]. . . . .	54
3.9	A curva superior é a energia eletrônica total em função de $1/B$ [74]. As oscilações na energia $E$ podem ser detectadas através de medidas do momento magnético, dado por $-\frac{\partial E}{\partial B}$ . As propriedades térmicas e de transporte do metal também oscilam quando níveis orbitais sucessivos cortam o nível de Fermi a medida que a intensidade do campo aumenta. A região sombreada na figura dá a contribuição para a energia dos níveis que estão apenas parcialmente ocupados. Os parâmetros para a figura são os mesmos da figura (3.8). . . . .	56
3.10	À temperatura de zero absoluto a magnetização (ou momento magnético "magnetic moment") é dado por $-\frac{\partial E}{\partial B}$ [74]. A energia plotada na figura (3.9) leva a oscilações na magnetização como função de $1/B$ . Em amostras com impurezas as oscilações são borradas, em parte porque os níveis de energia não são mais bem definidos. . . . .	56

3.11	Os círculos sólidos são as órbitas semi-clássicas dos elétrons livres em 2D na presença de um campo magnético. Cada círculo corresponde a um nível de Landau. Os elétrons seguem órbitas em torno desses círculos com período $T = 2\pi/\omega_c$ , onde $\omega_c$ é a frequência cyclotron. Quando a intensidade do campo é aumentada o raio das órbitas cresce e as mesmas "saltam para fora" do círculo de Fermi, denotado pela linha tracejada. Isto leva ao comportamento oscilatório da energia e magnetização. . . . .	57
4.1	Ilustração esquemática do esquema tripod e da configuração de lasers para observação dos níveis de Landau. . . . .	61
4.2	Degenerescência de Landau em função de $B$ (em unidades efetivas de $\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ ). . . . .	65
4.3	Variação do número de átomos nos $s$ primeiros níveis de Landau completamente ocupados em função de $\frac{1}{B}$ (em unidades de $10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$ ). . . . .	67
4.4	Número de átomos no nível de Landau parcialmente ocupado ( $s + 1$ ) como uma função do inverso do campo magnético (em unidades de $10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$ ). O número de átomos no ( $s + 1$ ) nível de Landau diminui com $\frac{1}{B}$ por causa do crescimento da degenerescência. . . . .	68
4.5	Comportamento oscilatório da energia (em unidades de $10^{-3} \frac{(\hbar\kappa_{\text{Rb}})^2}{m_{\text{Rb}}}$ ) do nível de Landau ( $s + 1$ ) com relação a $\frac{1}{B}$ . O campo magnético recíproco varia na faixa $10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1} \leq \frac{1}{B} \leq 10^5 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$ . Utilizamos os valores experimentais típicos $A \sim 1 \text{ mm}^2$ , $\kappa_{\text{Rb}} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ , $m_{\text{Rb}} = 1.443 \times 10^{-25} \text{ kg}$ . . . . .	68
4.6	Magnetização Efetiva (em unidades de $10^2 \frac{\hbar}{m_{\text{Rb}}}$ ) como uma função do inverso do campo magnético. . . . .	69
4.7	Ilustração esquemática para a observação de uma degenerescência residual na energia de átomos ultrafrios lateralmente confinados. (a) Átomo de quatro níveis tipo tripod acoplado a campos de laser. (b) Configuração laser. . . . .	70
4.8	Primeiros três (a) níveis de Landau ordinários e (b) bandas de Landau. . . . .	74
4.9	(a) Degenerescência remanescente em função de $B$ (in units of $\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ ). Contamos o número de interseções entre os sub-níveis $ n, n_x\rangle$ e $ n', n_{x'}\rangle$ quando $B$ varrido (de acordo com a equação (4.36)). Levamos em conta as onze mais baixas bandas, i.e. $n'$ e $n$ variando de 0 até 10. $n'_x$ e $n_x$ obedecem à relação $n_{x_{max}} = \frac{BL^2}{\hbar\pi}$ . Por exemplo, quando $B_{max} = 10^{-4} \hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ ( $\alpha_{max} = 10^3 \text{ m}^{-1}$ ), então $n_{x_{max}} = 3183$ . (b) A degenerescência para os níveis de Landau ordinários é $\frac{AB}{2\pi\hbar}$ . Nos cálculos, usamos um conjunto de parâmetros experimentais típicos com $m_{\text{Rb}} = 1.443 \times 10^{-25} \text{ kg}$ e $\kappa_{\text{Rb}} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Consideramos uma armadilha 2D com área efetiva $A \sim 1 \text{ mm}^2$ . Para tais parâmetros, o limite da equação (4.28) toma a forma de $\alpha \gg 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ com $B \gg 10^{-14} \hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ . . . . .	76

4.10	Representação esquemática da interação luz-átomo para geração do efeito spin Hall para átomos ultrafrios com estrutura de quatro níveis tripod. . . .	78
4.11	Ilustração das trajetórias dependentes do spin para um único átomo. . . .	79
A.1	O átomo é descrito como um sistema de dois níveis com diferença de energia $\hbar\omega$ entre os estados $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ , e a frequência relativa ao laser definida como $\omega$ . . . . .	83
A.2	Processos de transição do elétron entre níveis de energia atômica. . . . .	87
B.1	Propriedades do $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	89
C.1	Ilustração do bombeio ótico para a transição $J_f = \frac{1}{2} \leftrightarrow J_e = \frac{1}{2}$ . . . . .	91
C.2	Ilustração dos deslocamentos luminosos. Para a transição $J_g = \frac{1}{2} \leftrightarrow J_e = \frac{1}{2}$ (a), a luz não ressonante polarizada $\sigma^+$ desloca apenas o subnível $g = -\frac{1}{2}$ (parte direita de (b)), enquanto que a excitação polarizada $\sigma^-$ desloca o subnível $g = +\frac{1}{2}$ (parte esquerda de (b)). A dessintonia $\delta$ é positiva e muito grande comparada a quebra Zeeman em $e$ e em $g$ [137]. . . . .	92
C.3	Princípio do resfriamento Sísifo [137]. Ver texto. . . . .	93
C.4	Estados hiperfinos do átomo de hidrogênio na presença de um campo magnético. . . . .	95
C.5	(a) Distribuição de Maxwell-Boltzman para um gás a temperatura $T_1$ ; (b) partículas com velocidade $v > v_e$ são removidas da distribuição produzindo um sistema fora do equilíbrio; (c) retermalizando, as componentes de alta velocidade são repopuladas e a nova temperatura do sistema é $T_2 < T_1$ [35].	96
C.6	Esquema da técnica da evaporação para átomos magneticamente aprisionados [35]. . . . .	97
D.1	Partícula de spin-1/2 em um campo magnético descrito pela equação (D.3).	102
D.2	Espaço dos parâmetros para o campo magnético descrito pela equação (D.3). . . . .	103

# Capítulo 1

## Átomos Ultrafrios

À primeira vista o mundo é clássico, como descrito por Galileo e Newton. O que observamos e experimentamos na vida cotidiana, o que molda nossa intuição são fenômenos clássicos. Nós temos que olhar com muito mais cuidado e em escalas muito menores para perceber que esta visão intuitiva não é exata. Mesmo um gás de partículas tão pequenas quanto os átomos, em condições usuais, como temperatura ambiente, segue a descrição clássica de bolas rígidas colidindo elasticamente umas com as outras. Como indicado pela primeira vez por de Broglie, cada objeto pode ser visto como uma partícula e também como uma onda de matéria com comprimento de onda  $\lambda_{dB}$ . O fato deste caráter ondulatório ser de difícil observação para a maioria dos objetos macroscópicos é devido ao valor extremamente pequeno da constante de Planck  $h \approx 6.6 \times 10^{-34} [\frac{J}{s}]$  presente na fórmula:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad (1.1)$$

onde  $m$  é a massa,  $k_B \approx 1.4 \times 10^{-23} [\frac{m^2 kg}{s^2 K}]$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. A partir da expressão acima, se torna claro que quanto mais massivo for o objeto e quanto maior for sua temperatura, menor é seu comprimento de onda [figura (1.1)] e também a escala na qual os efeitos quânticos são importantes. Para gases atômicos, o limite quântico pode ser atingido quando o espaçamento entre as partículas é comparável a  $\lambda_{dB}$ . É fácil ver que para partículas tão massivas quanto os átomos esse limite corresponde a temperaturas ultrafrias ou densidades muito elevadas:

$$T_{dB} = \frac{h^2}{2\pi m k_B} n^{2/3}, \quad (1.2)$$

onde  $n$  é a densidade. Tomando valores típicos de densidade ( $10^{18} - 10^{21}$  átomos por  $m^3$ ) e massa para átomos, chegamos a temperaturas abaixo de  $1 \mu K$ . Entretanto, para tais densidades o gás atômico é instável, pois as colisões de três corpos são frequentes



acessível para projetar no experimento. Some-se a isto, a recente comprovação experimental [9] de que é possível criar campos magnéticos sintéticos ópticamente induzidos em gases atômicos ultrafrios.

Neste capítulo, descrevemos os mecanismos e o aparato experimental para se produzir um gás ultrafrio bidimensional de átomos de  $^{87}\text{Rb}$ . Um aparato semelhante pode ser montado por nosso grupo de pesquisa no futuro. O processo se inicia com o aprisionamento e pré-resfriamento dos átomos em uma armadilha magneto-ótica. Em seguida, os átomos frios são transferidos para uma armadilha magnética de configuração quadrupolo-Ioffe (quadrupole-Ioffe configuration (QUIC)), na qual é realizado o resfriamento evaporativo da nuvem atômica. Nesta etapa, a temperatura do gás é gradativamente diminuída até que se atinja a condensação de Bose-Einstein. Por fim, o potencial confinante da armadilha QUIC é deformado por um campo magnético oscilante de radio-frequência (RF), o que resulta numa nuvem atômica ultrafria com geometria bidimensional. O objetivo deste capítulo é possibilitar ao leitor uma compreensão básica de como são obtidos experimentalmente os gases atômicos ultrafrios, que são a plataforma de produção e investigação do magnetismo artificial.

## 1.1 Resfriamento e Aprisionamento de Átomos Neutros com Laser

Os processos de resfriamento e aprisionamento com laser, em geral, usam a pressão da radiação de um feixe de luz coerente para manipular os graus de liberdade externos dos átomos em uma armadilha magneto-ótica, confinando-os a uma pequena região do espaço, em uma temperatura extremamente baixa. Nesta seção, apresentamos os princípios do resfriamento e aprisionamento de átomos neutros utilizando luz laser e descrevemos o arranjo experimental de uma armadilha magneto-ótica.

### 1.1.1 Um breve Histórico

A idéia de usar a luz para manipular um conjunto de átomos (ou mesmo um único átomo) existe a muito tempo. Da teoria do eletromagnetismo de Maxwell (1873), se tornou claro que a luz transporta momento que pode ser transferido para as partículas [10]. Classicamente, um feixe de luz induzirá forças em um dipolo. Estas forças dependem da forma do feixe de luz (da intensidade e da fase). Com o advento do laser, na década de 1960, se tornou possível abordar de uma forma sem precedentes as forças mecânicas sobre átomos, de onde a estrutura interna dos níveis de energia foi explorada. Isto abriu caminho para o resfriamento <sup>1</sup> e o aprisionamento a laser dos átomos, onde, em particular,

---

<sup>1</sup>Resfriamento laser é a redução da velocidade atômica de propagação através da ação de forças radiativas.

a natureza quântica destes necessita ser levada em conta [11–13]. Em 1975, foi dado grande passo, por Hansch e Shawlow [14] e por Wineland e Dehmelt [15], no sentido de se controlar óticamente o movimento atômico através da aplicação de um feixe de luz contrapropagante aos íons em movimento, com o intuito de desacelerá-los. Ainda no final da década de 70, Dehmelt e colaboradores [16] e Wineland e colaboradores [17], independentemente, conseguiram demonstrar o efeito mecânico da luz no movimento de átomos carregados.

Entretanto, só em 1982 W. Phillips e colaboradores [18] conseguiram verificar a desaceleração de um feixe de átomos neutros, aplicando um feixe de luz contrapropagante a átomos em movimento. Em 1985, S. Chu e colaboradores [19] desenvolveram um meio viscoso para átomos de sódio. Este processo, que recebeu o nome de *melaço ótico*, se demonstrou muito eficiente para resfriar átomos neutros em três dimensões, permitindo alcançar temperaturas muito menores que as previstas na teoria Doppler. Este resultado inesperado, provocou um grande esforço teórico para entender melhor o processo de resfriamento, dando origem a uma nova teoria, denominada de sub-Doppler [20]. Esta leva em conta a natureza multiníveis dos átomos e o gradiente de polarização, gerado pela superposição dos feixes contrapropagantes do laser de aprisionamento, na região de interação com os átomos.

Ainda em 1985, foi demonstrada a primeira armadilha magnética de átomos neutros, realizada por Migdall e colaboradores [21]. Esta armadilha usava a força que um gradiente de campo magnético exerce sobre o momento de dipolo magnético dos átomos, fazendo com que estes fiquem aprisionados em um mínimo de campo magnético. Paralelamente ao desenvolvimento das armadilhas magnéticas, surgiram as primeiras armadilhas ópticas, que eram inicialmente baseadas na força de dipolo elétrico. O problema destas armadilhas era a profundidade do potencial de confinamento, pois a interação entre os dipolos induzidos com os campos externos é pequena, muito menor, por exemplo, que no caso dos íons.

A primeira proposta de uma armadilha para átomos neutros baseada na emissão espontânea (e não na força de dipolo) foi feita em 1986 por Pritchard e colaboradores [22]. Nesta proposta a armadilha conjuga feixes de luz laser e campos magnéticos para contornar o chamado teorema ótico de Earnshaw, formulado por Ashkin e Gordon [23], que afirmava não ser possível construir uma armadilha baseada puramente na força advinda da emissão espontânea. Essa armadilha ficou conhecida como armadilha magneto-ótica (MOT - Magneto-Optical Trap) e foi demonstrada com sucesso em 1987 por Raab e colaboradores [24].

Embora a armadilha magneto-ótica fosse bem mais eficiente que as anteriores, ela ainda dependia de um primeiro estágio de desaceleração, o que complicava consideravelmente o sistema experimental. O passo final para obtenção de um sistema realmente prático foi dado por C. Monroe e colaboradores [25], com a criação de uma armadilha onde

os átomos são capturados diretamente a partir do vapor de uma célula de Cs, em estado metálico (sem a necessidade de um pré-desaceleramento). Isto simplificou muito o aparato experimental necessário no aprisionamento de átomos neutros e permitiu uma rápida evolução dos estudos na área de física atômica.

### 1.1.2 Forças Radiativas e Manipulação Ótica de Átomos

Existem dois mecanismos pelos quais a radiação é capaz de exercer força sobre o átomo. O primeiro relacionado à transferência de momento através da absorção e emissão de fótons pelo átomo. Este processo recebe o nome de força espontânea (ou pressão de radiação) e tem um caráter dissipativo. O outro mecanismo surge da interação do dipolo elétrico induzido pela luz incidente com o gradiente de intensidade da radiação. Este tipo de força recebe o nome de força de dipolo e é conservativa. Nesta seção, descreveremos os passos principais para se chegar às expressões para as forças radiativas <sup>2</sup>. Por simplificação, adotamos uma formulação semi-clássica, onde o átomo é quantizado e o campo eletromagnético é clássico.

A interação do campo com o átomo pode ser descrita pelo potencial  $U = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$  [26], onde  $\mathbf{d}$  representa o dipolo elétrico do átomo e  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico da radiação. A força será então o negativo do gradiente deste potencial, e a força média, correspondendo a um período de oscilação do campo, pode ser escrita como:

$$\mathbf{F} = -\langle \nabla U \rangle = \langle \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} \rangle \nabla E(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

O valor médio do dipolo induzido pode ser calculado através do formalismo da matriz densidade [27], sendo a força de radiação encontrada após todos os passos do cálculo dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4} \nabla\theta - \frac{\hbar\delta}{2} \frac{\Omega}{\delta^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4} \nabla\Omega, \quad (1.4)$$

onde  $\Omega = \frac{dE}{2\hbar}$  é a frequência de Rabi,  $\theta$  é o fator de fase dependente do espaço,  $\Gamma$  é largura natural da transição e  $\delta = \omega - \omega_0$  é a dessintonia entre a frequência do laser ( $\omega$ ) e a frequência da transição atômica ( $\omega_0$ ). Na equação (1.4) o termo proporcional ao gradiente de fase do campo elétrico  $\nabla\theta$  corresponde à força espontânea, enquanto que o termo proporcional ao gradiente de intensidade  $\nabla\Omega$  <sup>3</sup> representa a força de dipolo.

No caso da armadilha magneto-ótica, a força de interesse é a pressão da radiação, pois os feixes utilizados em seu arranjo experimental são todos colimados e possuem um perfil de intensidade homogêneo, de tal forma que  $\theta(r) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  e  $\nabla\Omega(r) = 0$ . Deste modo, o segundo termo na equação (1.4) pode ser desprezado e a força sobre o átomo pode ser escrita como:

<sup>2</sup>Um cálculo detalhado é apresentado no Apêndice A.

<sup>3</sup>Lembrando que  $\Omega^2 \propto E^2 \propto$  intensidade.

$$\mathbf{F}_{esp} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}, \quad (1.5)$$

que é simplesmente o momento de um fóton  $\hbar \mathbf{k}$  multiplicado pelo número médio de fótons absorvidos pelo átomo por unidade de tempo.

Na realidade, a força que o campo exerce sobre um átomo em movimento é um pouco mais complexa que a apresentada na equação (1.4), visto que a frequência da radiação no referencial deste átomo será deslocada pelo efeito Doppler, de acordo com a magnitude da componente de sua velocidade  $\mathbf{v}$  ao longo de  $\mathbf{k}$ . A transformação de Lorentz do quadrivetor de propagação da onda para o referencial do átomo fornece, em primeira ordem

$$\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.6)$$

de modo que neste referencial, a força espontânea (1.7) se torna:

$$\mathbf{F}_{esp} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega^2/2}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}. \quad (1.7)$$

Esta força tem uma dependência Lorentziana com a frequência  $\omega$  da luz que incide sobre o átomo, como mostra a figura (1.2), e sua intensidade máxima ocorre na ressonância  $\omega_0 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ . No caso mais geral, a largura característica desta Lorentziana é determinada pela taxa  $\Gamma$  de decaimento espontâneo da transição atômica, pela intensidade do feixe, por processos colisionais, alargamento Doppler e outros fatores de alargamento inhomogêneo. Para se ter uma idéia de como a força espontânea pode ser utilizada para

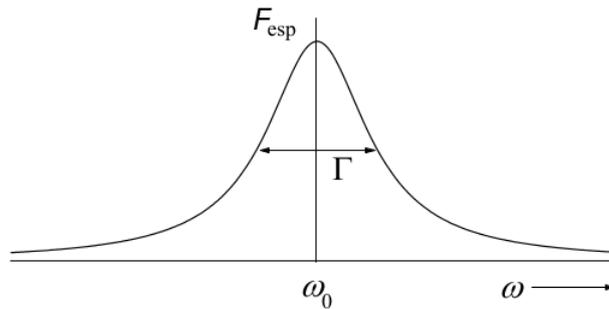


Figura 1.2: A intensidade da pressão de radiação  $F_{esp}$  em função da frequência da luz  $\omega$ , no caso em que  $v = 0$  e somente a emissão espontânea é responsável pelo alargamento de linha.

diminuir a velocidade de um átomo que se propaga contra um feixe de luz ressonante, vamos considerar o processo de transferência de momento da luz para o átomo [figura (1.3)]. Quando um átomo absorve um fóton de frequência  $\omega$ , ele absorve uma energia de magnitude  $h\omega$ , bem como um momento linear de  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ , onde  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda da onda eletromagnética. A velocidade do átomo é então modificada de uma quantidade  $\Delta \mathbf{v} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m}$ , onde  $m$  é a massa do átomo, ou seja,  $\mathbf{v}$  se torna  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ . Se, em seguida, o

átomo reemite um fóton por emissão estimulada, ele perderá energia  $h\omega$  e um momento linear  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Sua velocidade será modificada de uma quantidade  $-\Delta\mathbf{v}$  e ela voltará ao seu valor inicial  $\mathbf{v}$ . Desta forma, a velocidade do átomo não será modificada por uma sucessão de ciclos de absorção e de emissão estimulada. Entretanto, um átomo excitado pode também se desexcitar por emissão espontânea, emitindo um fóton em qualquer direção do ângulo sólido  $4\pi$  centrado no átomo. A velocidade do átomo é modificada de uma quantidade  $\Delta\mathbf{v}$ , porém diferentemente da emissão estimulada, com uma direção aleatória. Assim, após  $n$  ciclos de absorção e de emissão espontânea, o átomo adquire, por absorção, um momento linear  $n\hbar\vec{k}$ , mas perde, por emissão, um momento linear nulo em média. Em suma, o átomo adquire um momento linear  $n\hbar\mathbf{k}$  e sua velocidade  $\mathbf{v}$  é modificada de

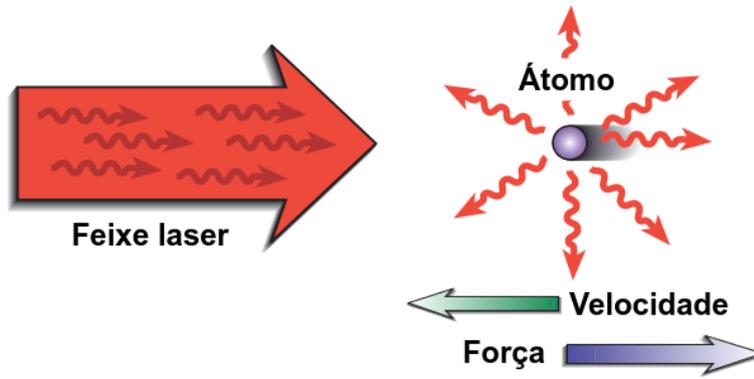


Figura 1.3: Com o laser sintonizado abaixo do pico de ressonância atômica, o átomo de movendo-se na direção oposta à do feixe de laser irá experimentar uma pressão de radiação que diminuirá sua velocidade.

uma quantidade  $n\Delta\mathbf{v} = n\frac{\hbar\mathbf{k}}{m}$ . Esta transferência de momento linear da radiação eletromagnética para os átomos é equivalente a uma pressão exercida sobre o gás de átomos pela radiação eletromagnética: daí o nome de pressão de radiação.

### 1.1.3 Resfriamento Laser e Melaço Ótico

No processo de resfriamento unidimensional, um átomo livre (como o de um gás rarefeito) é iluminado por duas ondas planas e monocromáticas que se propagam em sentidos contrários  $+\mathbf{k}$  e  $-\mathbf{k}$ , de intensidades e frequências iguais, e sintonizadas abaixo da frequência natural da transição ( $\omega < \omega_0$ ), de modo que  $\delta$  é da ordem de  $-\Gamma$ .

Se a emissão estimulada é desprezível, a força total sobre o átomo  $\mathbf{F}_{esp}$  é a soma das pressões das radiações (1.7) exercidas pelas duas ondas luminosas:

$$\mathbf{F}_{esp} = \hbar\mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega^2/2}{(\delta - kv)^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4} - \hbar\mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega^2/2}{(\delta + kv)^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4}. \quad (1.8)$$

Para um átomo em repouso, as duas pressões de radiação têm intensidades iguais e se compensam, de maneira que  $\mathbf{F}_{esp}$  é nula. Entretanto, para um átomo em movimento

ao longo da direção  $\mathbf{k}$  as frequências aparentes das ondas serão deslocadas pelo efeito Doppler, conforme o sentido de sua velocidade  $\mathbf{v}$ , desigualando as pressões das radiações. Um átomo com uma pequena velocidade  $v > 0$  irá absorver mais energia da onda  $-\mathbf{k}$  oposta à sua velocidade, pois o efeito Doppler aumenta a frequência aparente desta onda, tornando-a mais próxima da ressonância, enquanto que a frequência aparente da onda  $+\mathbf{k}$  diminui e se afasta da ressonância, conforme ilustra a figura (1.4). Neste caso, a pressão de radiação da onda  $-\mathbf{k}$  é maior que a pressão da onda  $+\mathbf{k}$ . Se por outro lado  $v < 0$ , a mesma discussão mostra que a pressão da onda  $+\mathbf{k}$  é maior que a pressão da onda  $-\mathbf{k}$ , de modo que o átomo sente uma força que é sempre oposta à sua velocidade. É óbvio que, no caso desta velocidade ser muito grande, o átomo não sentirá força alguma, pois o efeito Doppler será suficiente para afastar ambas as ondas da ressonância. Supondo que

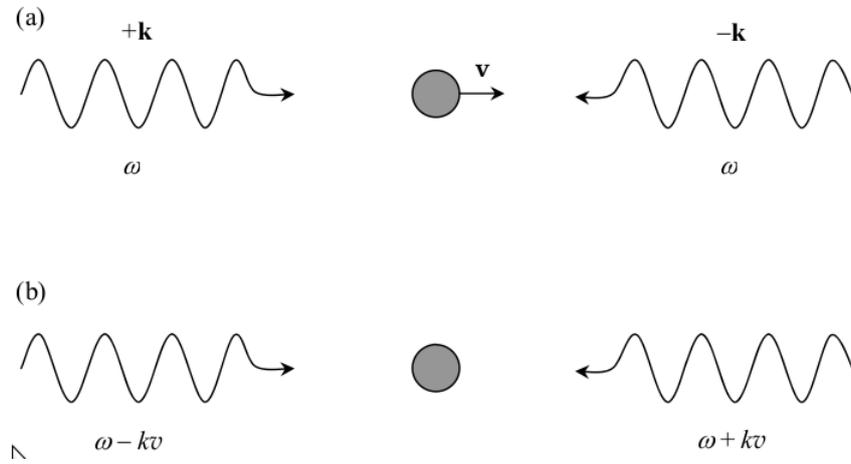


Figura 1.4: O processo de resfriamento Doppler visto (a) do referencial do laboratório e (b) no referencial próprio de um átomo com velocidade  $\mathbf{v}$

a condição  $|kv| \ll |\delta|$  seja satisfeita, se torna possível aproximar a força de resfriamento pela primeira ordem na expansão de (1.8) em  $kv$ , assim:

$$\mathbf{F}_{esp} = -\alpha_D \mathbf{v}, \quad (1.9)$$

onde

$$\alpha_D = -\hbar k^2 \frac{\Omega^2 \delta \Gamma}{(\delta^2 + \Omega^2/2 + \Gamma^2/4)^2}, \quad (1.10)$$

é o coeficiente de fricção da força de resfriamento, que depende do perfil de absorção do átomo e das características espectrais da luz. É importante notar que a força  $\mathbf{F}_{esp}$  é uma força de resfriamento somente quando  $\alpha_D > 0$ , ou seja,  $\delta < 0$ . A semelhança da expressão (1.9) com uma força de atrito viscoso [figura (1.5)] levou seus descobridores a denominarem a região (a intersecção dos feixes  $+\mathbf{k}$  e  $-\mathbf{k}$ ) onde esta se aplica de melaço ótico. Para compor um melaço ótico em três dimensões [figura (1.6)], basta aplicar o arranjo de resfriamento unidimensional a cada um dos eixos coordenados, de modo que um átomo localizado próximo à origem destes eixos irá experimentar uma força (1.9) oposta à

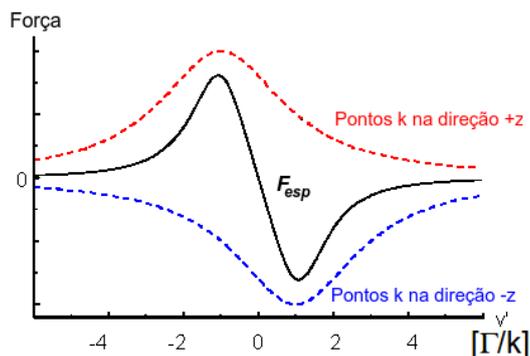


Figura 1.5: Pressão de radiação de dois feixes de luz laser sobre um átomo neutro.

sua velocidade, qualquer que seja a direção da velocidade. O melaço ótico constitui uma

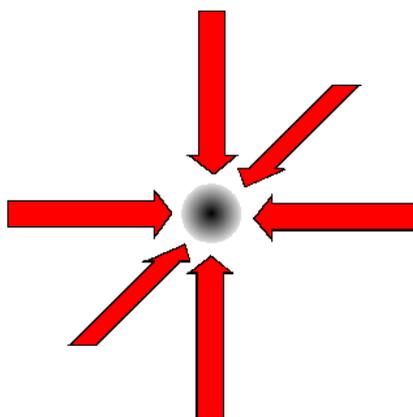


Figura 1.6: Melaço ótico tridimensional.

etapa importante dentro do processo de resfriamento de átomos pela luz. Tal mecanismo permite a obtenção de temperaturas da ordem do microKelvin <sup>4</sup>. A obtenção de temperaturas nesta ordem de grandeza é resultado de uma engenhosa utilização das forças radiativas. O objetivo não é comunicar uma velocidade de conjunto aos átomos, mas agir de maneira seletiva com uma força fortemente dependente da velocidade elementar de cada átomo. Os melaços óticos funcionam corretamente para os átomos com velocidade inicial relativamente fraca. No caso da transição  $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$  <sup>5</sup> do  $^{87}\text{Rb}$ , a velocidade inicial dos átomos deve ser da ordem de 20 m/s.

<sup>4</sup>Na verdade, a teoria Doppler para o resfriamento previa que a temperatura mais baixa alcançada no melaço era  $T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2}$ . No caso do Rubídio,  $T_D = 139 \mu\text{K}$ . Porém, medidas mais precisas indicaram que as temperaturas atingidas são muito mais baixas que esse limite devido a mecanismos de resfriamento sub-Doppler, os quais são abordados no Apêndice C.

<sup>5</sup>Para o leitor ter um claro entendimento da notação utilizada para denotar as transições atômicas, recomendamos a leitura do Apêndice B.

## 1.1.4 Armadilha Magneto-Ótica

### O Princípio de Funcionamento da Armadilha Magneto-Ótica

Vamos analisar agora o funcionamento da mais versátil armadilha para átomos neutros, a armadilha magneto-óptica. A primeira demonstração experimental de confinamento espacial com esta técnica ocorreu em 1987 com átomos de sódio [28].

Na absorção de um fóton ocorre a conservação da energia (salto do estado fundamental para o excitado), conservação do momento linear (responsável pelo recuo) e conservação do momento angular total. No processo de aprisionamento unidimensional é o momento angular da luz polarizada circularmente que é utilizado para manipular os graus de liberdade externos do átomo e confiná-lo a uma determinada região do espaço. O nível excitado deve apresentar uma certa estrutura magnética, como por exemplo o  $5^2P_{3/2}$ , para que um campo magnético externo  $\mathbf{B}$  e não-homogêneo possa através do efeito Zeeman produzir uma quebra de degenerescência neste nível. Como consequência, se desloca a energia de seus sub-níveis e se cria uma regra de seleção para a transição que depende da posição do átomo. À configuração de resfriamento unidimensional apresentada na seção anterior, adicionamos um campo magnético estático proporcional à coordenada  $z$ ,  $B(z) = B_0z$ , na direção de  $+\mathbf{k}$ . Além disso, dotamos de polarizações circulares  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  os feixes  $+\mathbf{k}$  e  $-\mathbf{k}$ , como mostra a figura (1.7).

O deslocamento Zeeman na energia de um nível que tem momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  é dado pelo termo de interação escalar  $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(z)$ , que também pode ser escrito em termos do momento angular total  $\mathbf{F}$  deste estado através da razão giromagnética,

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(z) = \mu_B g \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}(z), \quad (1.11)$$

onde  $\mu_B = e/2mc$  é o magneton de Bohr e  $g$  é o fator de Landé, que caracteriza a estrutura magnética do estado excitado. Como a projeção do momento  $\mathbf{F}$  ao longo do eixo de quantização só pode assumir valores discretos  $m_F \hbar$ , onde  $m_F \hbar$  é um número inteiro entre  $+F$  e  $-F$ , uma transição que parte de um nível com momento angular nulo para o nível com momento  $\mu$  terá sua frequência de ressonância alterada da seguinte forma:

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 + m_F \mu_B g B_0 z. \quad (1.12)$$

Consideremos, por simplicidade, o caso em que o estado fundamental do átomo é desprovido de momento angular e o estado excitado é composto por três sub-níveis magnéticos, ou seja, que a transição tem uma variação de momento angular total do tipo  $F_g = 0 \rightarrow F_e = 1$ . Desta maneira, as frequências das transições  $\Delta m_F = +1$  e  $-1$  serão deslocadas em função da posição  $z$  do átomo de  $\omega_0$  para  $\omega_0 + \mu_B g B_0 z$  e  $\omega_0 - \mu_B g B_0 z$ , respectivamente. Para um átomo localizado no centro da armadilha,  $z = 0$  e  $B = 0$ , a absorção de um fóton independe do momento angular intrínseco,  $+\hbar$  ou  $-\hbar$ , que este

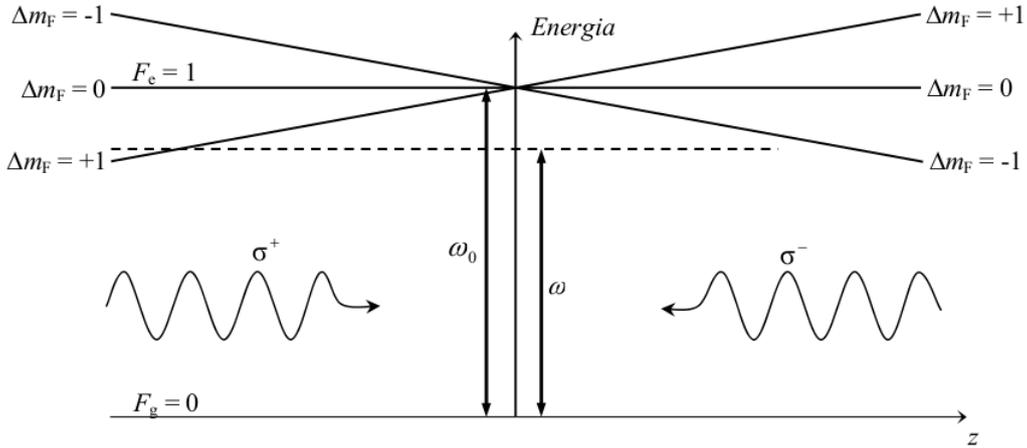


Figura 1.7: Esquema do processo de aprisionamento sobre a transição de frequência  $\omega_0$ . Os feixes de resfriamento  $+\mathbf{k}$  e  $-\mathbf{k}$  possuem polarização circular  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , de modo que exercem também uma força de aprisionamento. O campo magnético é de gradiente  $B_0$  constante e orientado na direção  $z$ .

carrega, fazendo com que a força total seja simplesmente a força de resfriamento. Por outro lado, no caso de um átomo em  $z \neq 0$ , a absorção da luz obedece a uma regra de seleção que depende de  $z$ . A conservação do momento angular implica que um átomo inicialmente no estado fundamental eletrônico  $F_g = 0$ ,  $m_F = 0$ , ao absorver um fóton com polarização circular à direita ( $\sigma_+$ ), salta para o nível  $F_e = 1$ ,  $m_F = +1$ . No caso da luz ser polarizada circularmente à esquerda ( $\sigma_-$ ), o estado final do átomo será  $F_e = 1$ ,  $m_F = -1$ , veja a figura (1.8). Portanto, um fóton de momento angular  $+\hbar$  pode promover apenas

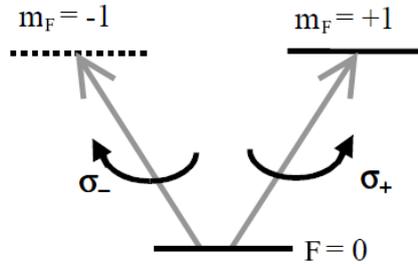


Figura 1.8: Conservação do momento angular na absorção de fótons com diferentes polarizações.

transições com variação do número magnético  $\Delta m_F = +1$ , e um fóton de momento  $-\hbar$  pode promover apenas transições com  $\Delta m_F = -1$ . Desta forma, um átomo localizado em  $z > 0$  irá absorver mais fótons da onda  $-\mathbf{k}$  (momento intrínseco  $-\hbar$ ) do que da onda  $+\mathbf{k}$  (momento intrínseco  $+\hbar$ ), pois o efeito Zeeman provocado pelo campo  $\mathbf{B}$  nesta região diminui a frequência da transição  $\Delta m_F = -1$ , aproximando-a da ressonância com a luz. Enquanto que a transição  $\Delta m_F = +1$  tem sua frequência aumentada e é afastada da ressonância. Neste caso, a pressão de radiação da onda  $-\mathbf{k}$  é maior que a da onda  $+\mathbf{k}$ . Se por outro lado  $z < 0$ , os mesmos argumentos mostram que a pressão de radiação da onda

$+\mathbf{k}$  é maior que a da onda  $-\mathbf{k}$ , de modo que o átomo sente uma força restauradora sempre em direção à origem. É claro que no caso do átomo se afastar muito do centro do melão ótico ele não estará sujeito a força alguma de aprisionamento, já que o campo magnético será intenso o suficiente para afastar ambas as transições  $\Delta m_F = \pm 1$  da ressonância com a luz.

Para se obter a expressão exata da força de aprisionamento, é necessário considerar, a princípio, o termo de interação do campo magnético com o dipolo atômico no Hamiltoniano de interação. Contudo, como o nosso objetivo é apenas ilustrar os mecanismos de interesse, podemos obter a expressão para a força de aprisionamento aplicando a transformação (1.12) à equação (1.7). Nesta operação, desprezamos os termos das forças que agem sobre as transições mais distantes da frequência do laser, isto é, desprezamos  $\Delta m_F = +1$  para  $z > 0$  e  $\Delta m_F = -1$  para  $z < 0$ . Analogamente ao procedimento utilizado para a obtenção da expressão (1.9), podemos nos limitar à primeira ordem de uma expansão com  $\mu_B g B_0 z \ll \delta$  e escrever a força total na forma de uma força harmônica:

$$\mathbf{F}_{MOT} = -\alpha_D \mathbf{v} - K_D \hat{z}, \quad (1.13)$$

onde

$$K_D = \alpha_D \frac{\mu_B g B_0}{k} \quad (1.14)$$

é a constante de mola, que depende do coeficiente de fricção  $\alpha_D$ , do momento de dipolo do estado excitado e do gradiente do campo externo  $\mathbf{B}$ . Esta configuração é conhecida como armadilha magneto-ótica (em uma dimensão).

A relação entre a força viscosa e a força restauradora indica o tipo de movimento a que o átomo estará sujeito dentro da região da armadilha. Para otimizar o processo de aprisionamento, a equação de movimento do átomo obtida de (1.13) deve ter solução criticamente amortecida, de modo que o gradiente de intensidade do campo magnético ao longo do eixo  $z$ , deve satisfazer a  $\alpha_D^2/m^2 = 4K_D/m$ . Para as condições  $\Omega \sim \Gamma$ ,  $\delta \sim \Gamma$ , e utilizando  $\mu_B g = 1,41 \text{ MHz/G}$  [29], este gradiente deve ser  $B_0 \sim 22 \text{ G/cm}$ .

Este esquema unidimensional <sup>6</sup> permite gerar uma força do tipo oscilador harmônico amortecido capaz de resfriar e aprisionar átomos neutros. A figura (1.9) apresenta um esquema da armadilha utilizada neste trabalho mostrando os lasers e o par de bobinas (na configuração anti-Helmoltz) que geram o campo magnético necessário ao confinamento.

## O Átomo de Rubídio

Na seção anterior, explicamos o princípio de funcionamento do MOT, onde utilizamos um modelo simplificado de dois níveis para o átomo. O problema, entretanto, é que não existe na natureza um átomo deste tipo. Na realidade, o átomo é bem mais complicado

---

<sup>6</sup>Este esquema é facilmente estendido para um arranjo tridimensional composto por três pares de feixes contra-propagantes, com polarizações e frequências apropriadas.

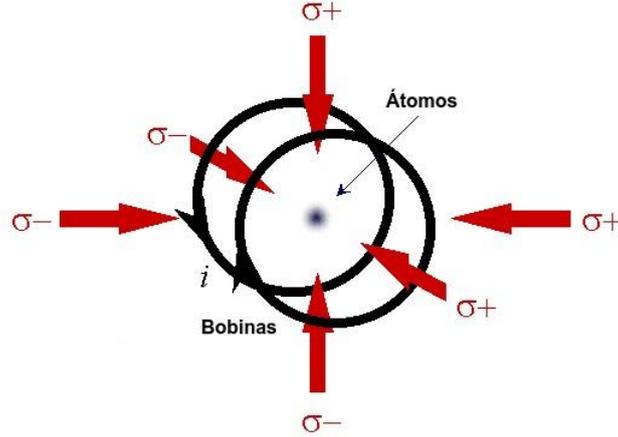


Figura 1.9: Esquema de um MOT. Feixes de luz lasers incidem a partir de todas as seis direções e possuem momento angular como mostrado. Duas bobinas com correntes opostas produzem um campo magnético, que é zero no centro e varia linearmente ao longo das três direções.

que isto, possuindo vários níveis e subníveis de energia. A figura (1.10) mostra um esquema com alguns dos níveis do átomo de  $^{87}\text{Rb}$ . Em particular, mostramos a estrutura fina e hiperfina da camada 5, onde temos as transições mais importantes para o processo de aprisionamento. Para aplicar o processo de aprisionamento ao átomo de Rubídio de maneira eficiente é necessário um estudo mais aprimorado da estrutura de níveis deste átomo, de modo que nesta seção apresentamos uma breve análise dos termos espectroscópicos e regras de seleção da transição  $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ , também conhecida como linha  $D_2$  [30].

A teoria quântica de adição de momento angular fornece tanto a estrutura dos níveis hiperfinos como as transições permitidas entre dois estados. No caso do Rubídio, devemos considerar a existência do isótopo  $^{87}\text{Rb}$  que tem momento de spin nuclear  $I = 3/2$  e cuja abundância natural é de respectivamente de 28 %. Para o estado fundamental da transição ( $5^2S_{1/2}$ ) temos  $L_g = 0$  e  $S_g = 1/2$ , e as possibilidades de adição para o momento total ( $F = J + I$ ) são  $F_g = 1$  ou  $2$ . O estado excitado ( $5^2S_{3/2}$ ) possui mais possibilidades de soma, pois  $L_e = 1$  e  $S_e = 1/2$ , o que implica em  $F_e = 0, 1, 2$  ou  $3$ .

De acordo com as regras de transição para o elemento de dipolo elétrico do átomo [31], as únicas transições permitidas são aquelas que satisfazem as condições  $\Delta F = 0, \pm 1$  e  $\Delta m_F = 0, \pm 1$ . Apesar da estrutura de níveis magnéticos do Rubídio ser na realidade mais complexa do que aquela utilizada como exemplo para descrever o efeito de aprisionamento, esse efeito ainda é aplicável para uma determinada classe de átomos no gás [32]. Uma característica importante do sistema real é que a estrutura hiperfina destes estados dá origem a vários processos importantes, que não são abordados no modelo de dois níveis. Isto cria alguns efeitos que complicam um pouco, tanto o sistema experimental, como a análise dos dados. O principal destes problemas, é o decaimento radiativo entre os

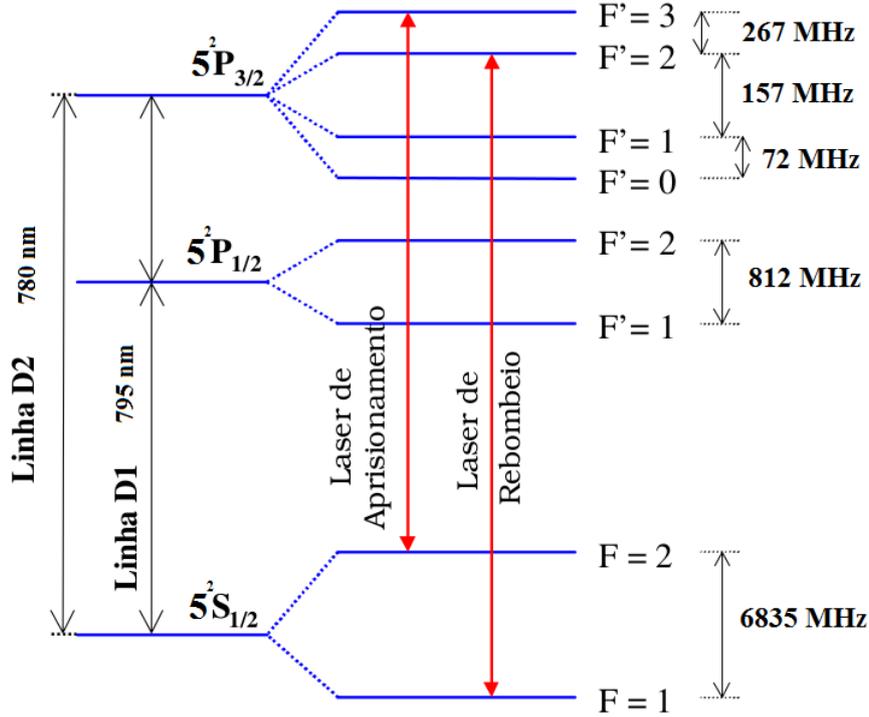


Figura 1.10: Diagrama dos níveis do  $^{87}\text{Rb}$  mostrando as transições eletrônicas envolvidas no processo de aprisionamento. Essencialmente todo aprisionamento e resfriamento é feito por um laser, o qual é ligeiramente dessintonizado (1-3 larguras de linha) para o lado de baixa frequência de  $5^2S_{1/2}(F=2) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F'=3)$ . Em adição, aplicamos um laser de bombeio à transição  $5^2S_{1/2}(F=1) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F'=2)$  (ver texto).

níveis  $5^2P_{3/2}(F'=2) \rightarrow 5^2S_{1/2}(F=1)$ , que ocorre pela existência de uma probabilidade do átomo que estava inicialmente no estado  $5^2S_{1/2}(F=2)$  seja excitado para o estado  $5^2P_{3/2}(F'=2)$ , e não para  $F'=3$  como seria desejado. De lá o átomo pode decair para  $5^2S_{1/2}(F=1)$ . Tal processo recebe o nome de bombeamento óptico [Apêndice B] e mesmo tendo uma probabilidade de ocorrência muito pequena, faz com que os átomos deixem de interagir com o laser de aprisionamento (que só é capaz de realizar transições de  $F=2$  para  $F'=3$ ). Isto ocorre porque o tempo de vida do estado excitado é muito curto ( $\sim 10^{-9}$  s) e permite um grande número de ciclos de absorção-emissão por unidade de tempo. Nestes casos, o estado fundamental de  $F=1$  é chamado de um "estado escuro", pois os átomos que lá se encontram não interagem com o laser. Para fazer com que o átomo continue a interagir com os feixes laser de aprisionamento, é necessário introduzir uma outra frequência que realize a transição  $5^2S_{1/2}(F=1) \rightarrow 5^2P_{3/2}(F'=2)$ , de forma que o átomo sempre "veja" alguma luz em ressonância com ele.

## A Armadilha com Célula de Vapor

As armadilhas magneto-óptica são construídas utilizando uma simples célula contendo um gás resfriado à pressão muito baixa [33]. A velocidade de captura  $v_{capt}$  de uma arma-

dilha magneto-ótica convencional é da ordem da dezena de metros por segundo. Para um vapor atômico contido em uma célula de temperatura próxima da ambiente, existe uma pequena fração, porém notável, de átomos cujo o módulo da velocidade é inferior à  $v_{capt}$ . Estes átomos são então susceptíveis de serem capturados pela armadilha se o intervalo de tempo entre duas colisões é muito mais longo que o tempo de amortecimento da posição de um átomo pela armadilha (tipicamente  $10$   $m/s$ ). Este fato, exige então que se trabalhe com pressões muito fracas ( $10^{-8}$  à  $10^{-9}$  Torr). Tal regime de pressão é obtido facilmente através de um material ultra-vácuo e de simples bombas iônicas de baixa potência (2 à 25 litros/s) bombeando uma célula de algumas dezenas de  $cm^3$ . Os tempos entre colisões estão compreendidos entre 1 e 10 segundos, isto é mais que suficiente para várias aplicações. Para se ter idéia da eficiência

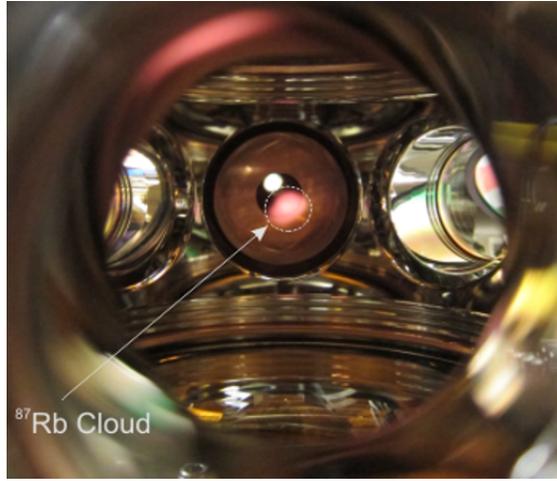


Figura 1.11: Imagem de uma nuvem de átomos de  $^{87}\text{Rb}$  ( $^{87}\text{Rb}$  cloud) aprisionados. Para pressões do gás na célula da ordem de  $10^{-8}$  Torr, o número total de átomos aprisionados pode passar de  $10^8$  em uma nuvem de  $\sim 5$  mm de diâmetro, atingindo assim densidades da ordem de  $10^9$  átomos/ $cm^3$ . A temperatura do gás é de  $120 \mu\text{K}$

deste tipo de armadilha vamos analisar as ordens de grandeza dos principais parâmetros que caracterizam o resfriamento e armadilhamento de átomos. Começamos por avaliar, simplesmente, o número de átomos presos em regime estacionário. Este regime é obtido se escrevendo a igualdade entre dois fluxos, o fluxo entrante de átomos capturados pela armadilha e o fluxo dissipante devido a colisões atômicas:  $\frac{dN}{dt} = \text{preenchimento} - \text{perdas por colisões}$ . Se o termo de colisões envolve um átomo armadilhado e um átomo térmico, e se suposermos ser uma boa aproximação que toda colisão faz sair um átomo da armadilha, encontramos a expressão para o número de átomos na armadilha, a saber;

$$N = \frac{S}{\sigma} \left( \frac{v_{cap}}{v} \right)^4, \quad (1.15)$$

onde  $S$  é a superfície da zona definida pela intersecção dos três feixes laser,  $\sigma$  a secção eficaz de colisão,  $v_{capt}$  a velocidade de captura e  $v$  a velocidade térmica dentro da célula

(300 à 1000 metros por segundo dependendo dos átomos). Encontramos tipicamente para os feixes de diâmetro de 1 cm e uma potência laser de saída de 100 mW, um número  $N$  de átomos de  $10^8$  e um fluxo entrante  $\frac{dN}{dt}$  de  $10^7$  à  $10^9$  átomos por segundo e  $T \geq 150 \mu\text{K}$ . Na figura (1.11) mostramos uma nuvem atômica fria de átomos de  $^{87}\text{Rb}$ .

## 1.2 Gases Atômicos Ultrafrios

Átomos ultrafrios são átomos mantidos a temperaturas próximas do 0 kelvin (zero absoluto), tipicamente temperaturas abaixo de ( $10 \mu\text{K}$ ). Nesta faixa de temperatura, propriedades quânticas do átomo se tornam importantes. Para se atingir tais temperaturas, uma combinação de várias técnicas tem de ser usada [figura (1.12)]. Primeiro os átomos são presos e pré-resfriados via o resfriamento com laser em uma armadilha magneto-óptica. Em seguida, para se alcançar o regime de temperaturas ultrafrias, um processo adicional de resfriamento é realizado através da técnica de resfriamento por evaporação em uma armadilha magnética ou ótica. Se temperaturas suficientemente baixas

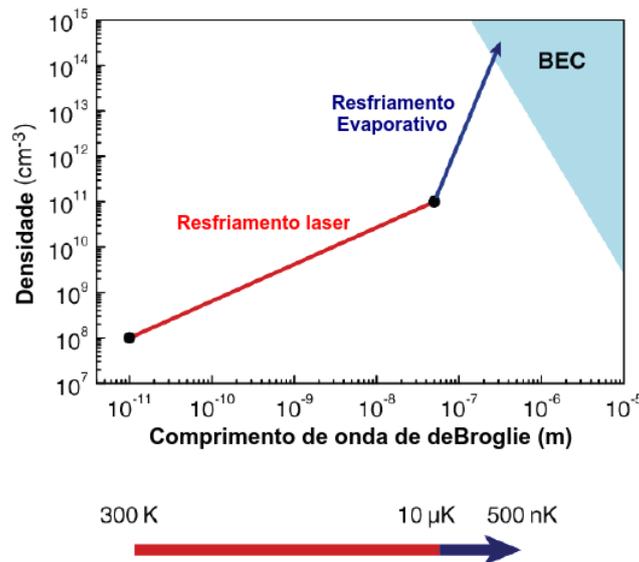


Figura 1.12: Densidade e temperatura atômica obtidos com as técnicas de resfriamento laser e evaporativo [1].

são atingidas, os átomos formam um novo estado da matéria que é regido pela mecânica quântica. Para os átomos bosônicos, este estado é o condensado de Bose-Einstein. A condensação de Bose-Einstein só acontece a temperaturas muito baixas: cerca de 170 nanokelvins para átomos de rubídio.

Nas próximas seções, vamos fazer uma breve exposição a respeito dos princípios físicos e o do aparato experimental para a produção de gás atômico ultrafrio, que poderá estar em estado condensado ou confinado em 2D. Inicialmente, apresentaremos a segunda armadilha necessária no processo de obtenção de temperaturas ultrafrias, denominada de

armadilha QUIC. Depois, discutiremos sobre o resfriamento evaporativo. Nas últimas seções, abordaremos a condensação de Bose-Einstein e a formação de um gás ultrafrio bidimensional.

### 1.2.1 Armadilha Magnética QUIC

No processo para a obtenção de um gás atômico ultrafrio, um primeiro MOT, descrito na seção anterior, funciona como uma fonte de átomos frios que iram carregar em um segundo MOT. Neste caso, o arranjo experimental consiste de duas câmaras de ultra vácuo (ultra-high vacuum-UHV) separadas por um tubo de 6 mm de diâmetro, com um diferencial de vácuo [figura (1.13)]. Os átomos de  $^{87}\text{Rb}$  são coletados inicialmente na câmara superior (pressão  $10^{-9}$  Torr), em uma célula de vapor (de um MOT) por três feixes retro-refletidos de 25 mm de diâmetro cada. Este MOT atua como um reservatório para um segundo MOT na célula inferior onde a pressão é muito menor ( $10^{-11}$  Torr). Os átomos são transferidos continuamente para a segunda célula por um feixe de impulso dessintonizado de 2,5 GHz para o vermelho da transição MOT. Esta grande dessintonização é escolhida para fazer o feixe atuar também como um guia para os átomos graças à força de dipolo. Após 30 s de carregamento, se liga a armadilha magnética QUIC [figura (1.14)] e se inicia o resfriamento evaporativo. Os seis feixes de laser do segundo MOT são independentes e possuem 10 mm de diâmetro cada. O primeiro par de feixe é quase vertical, os outros dois são horizontais, um ao longo do eixo de simetria  $y$  do campo quadripolar e o outro ao longo do eixo de simetria  $x$  da bobina Ioffe [34]. A armadilha magnética QUIC

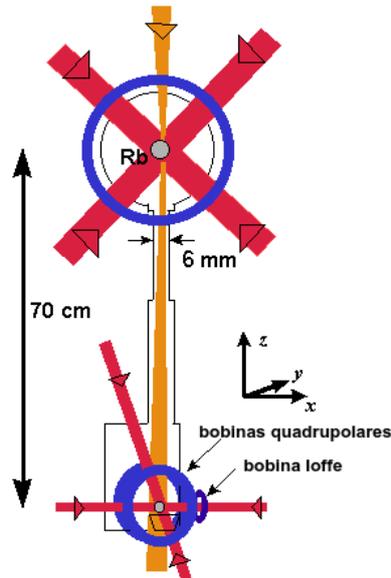


Figura 1.13: Arranjo experimental para produção de um gás atômico ultrafrio [34].

é projetada de tal forma que aprisiona mais fortemente átomos que ocupam o sub-nível  $5S_{1/2}(F=2)m_F=2$ , cujo momento magnético é paralelo ao campo magnético. Porém, os

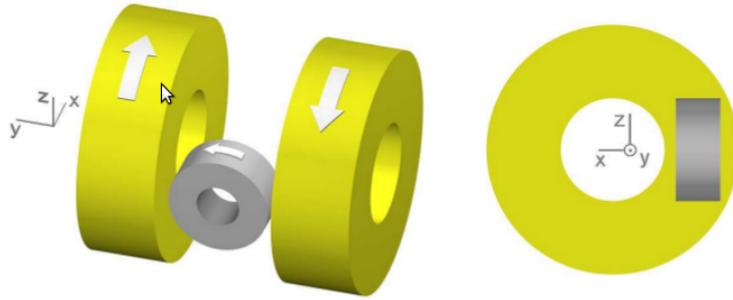


Figura 1.14: A armadilha magnética do tipo QUIC (configuração quadrupolo-Ioffe) foi primeiro desenvolvida por Hänsch [38]) e é uma combinação de três bobinas: em par de bobinas anti-Helmholtz sobre o mesmo eixo produzindo um campo quadrupolar e uma pequena bobina chamada de bobina Ioffe em um eixo perpendicular [34]. Esta última bobina, é responsável pela presença de um mínimo local não-nulo do campo magnético, localizado onde os gradientes criados pelas 3 bobinas, ao longo do eixo da bobina Ioffe, se cancelam.

átomos que foram transferidos para a armadilha se distribuem igualmente entre os cinco sub-níveis magnéticos do estado  $F = 2$ . Então, para se bombear todos os átomos para sub-nível  $m_F = 2$  se aplica um pulso de bombeio ótico de  $100 \mu s$ , o que aumenta por um fator de 5, o número de átomos que se pode aprisionar. As transições atômicas e lasers usados na presente etapa do processo de resfriamento são mostradas na figura (1.15) [35].

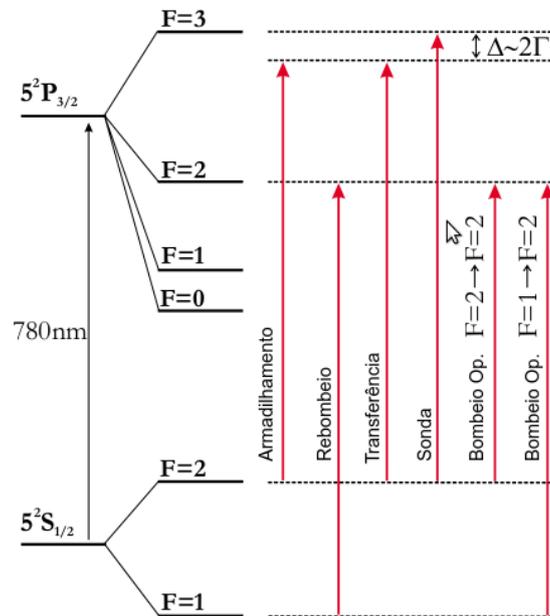


Figura 1.15: Transições do  $^{87}\text{Rb}$  e frequências dos feixes de laser usados nesse etapa do processo de resfriamento [35].

## 1.2.2 Resfriamento Evaporativo

Após os átomos de  $^{87}\text{Rb}$  serem carregados em uma armadilha QUIC e preparados no seu estado polarizado de spin  $|F = 2, m_F = 2\rangle$ , o resfriamento evaporativo forçado do Rubídio é executado sobre as transições hiperfinas do estado fundamental entre  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  e  $|F = 2, m_F = -2\rangle$ . A física do resfriamento evaporativo [39] é a mesma física que resfria uma xícara de café quente. No café, as moléculas mais enérgicas escapam do copo e saem como vapor. Como a energia que se perde com a saída destas partículas é maior que a energia térmica média do café, os átomos que permanecem na xícara irão termalizar por meio de colisões elásticas á uma temperatura mais baixa, de forma que o café vai sendo resfriado.

No caso de um gás de átomos neutro, os átomos são aprisionados pelo potencial magnético QUIC, como mostrado na figura (1.16). De maneira análoga ao caso da xícara de café, os átomos mais enérgicos (ou seja, mais rápidos, mais quentes) no curso de seu movimento no interior da armadilha podem ir muito além das paredes do potencial. Desta forma, se baixarmos as paredes do potencial da armadilha os átomos mais enérgicos escapam do poço de potencial de forma irreversível. Os átomos restantes irão colidir uns com os outros trocando momento e atingindo um novo e mais baixo equilíbrio de temperatura; isto é chamado de retermalização. Depois que os átomos se retermalizam, baixamos novamente as paredes do potencial da armadilha e fazemos com que os átomos se retermatizem novamente, resfriando ainda mais o gás atômico. Este procedimento, é repetido até que a temperatura crítica de um BEC seja atingida <sup>7</sup>.

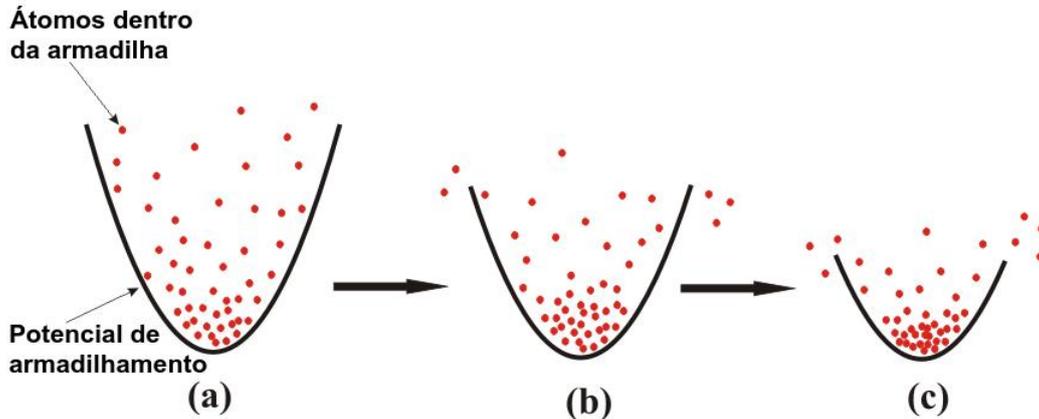


Figura 1.16: Resfriamento evaporativo pela redução da magnitude do potencial confinante [36].

Na prática, a amplitude do potencial de aprisionamento magnético varia em função de um sinal de rádio frequência (RF). O sinal de RF realiza um acoplamento entre o estado aprisionável  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  e o estado não aprisionável  $|F = 2, m_F = -2\rangle$  [figura (1.18)]. Como resultado deste acoplamento, a altura da parte superior do potencial confinante se

<sup>7</sup>Uma discussão mais detalhada a respeito do resfriamento evaporativo é apresentada no Apêndice C.

torna uma função da frequência RF. Quanto maior a frequência, maior são as paredes da armadilha magnética. A profundidade do potencial é determinada pela expressão  $U_t = 2\hbar(\omega_{ev} - \omega_0)$ , onde  $\omega_{ev}$  é a frequência do campo de rádiofrequência (criado por uma bobina colocada na vizinhança dos átomos) e  $\omega_0$  é uma frequência associada à diferença de energia mínima entre dois sub-níveis sucessivos Zeeman  $U_0 = \hbar\omega_0 = g_F\mu_B B_0$  [figura (1.17)]. A partir do seu valor máximo, é fácil reduzir gradualmente  $U_t$  varrendo  $\omega_{ev}$  em um tempo característico  $\tau_{ev}$ , preservando a forma global da armadilha e seu poder de confinamento. Isto é feito, enviando-se um sinal RF de 8 MHz para os átomos na armadilha QUIC. Em 10 s, a frequência RF é diminuída linearmente para diferentes valores como indicado em painel da figura (1.18).

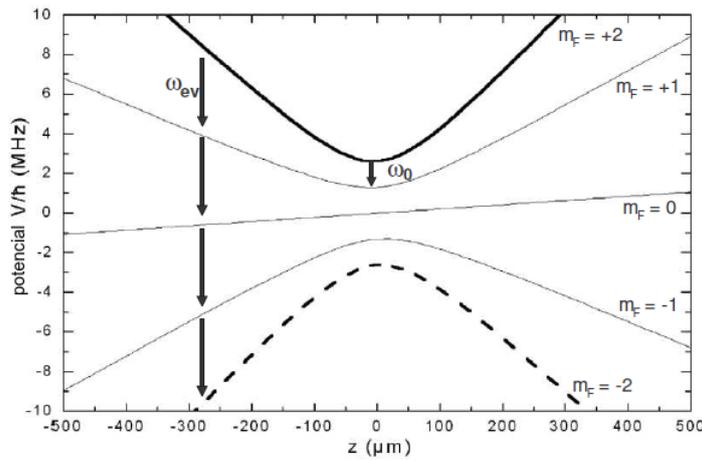


Figura 1.17: Energia dos sub-níveis Zeeman dos estados  $F = 2$  do  $^{87}\text{Rb}$  em uma armadilha QUIC e levando a gravidade em conta, em função da coordenada vertical  $z$ . A nuvem é aprisionada no estado superior  $m_F = +2$ . O campo evaporativo oscilante tem uma pulsação  $\omega_{ev}$  maior do que  $\omega_0$ . Os átomos aprisionados com uma energia maior do que  $U_t = 2(\omega_{ev} - \omega_0)$ , podem visitar a região onde o campo RF em  $\omega_{ev}$  é ressonante com a diferença de energia entre dois consecutivos sub-níveis, e serem transferidos para estados Zeeman não aprisionáveis.

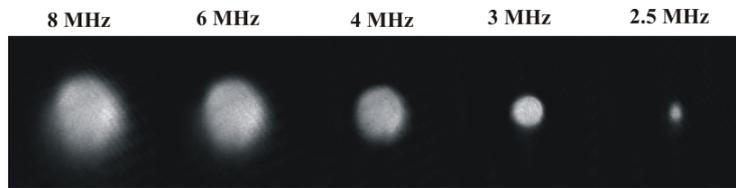


Figura 1.18: Efeito do resfriamento evaporativo sobre a nuvem atômica [36]. Podemos ver que o tamanho (i.e. a temperatura) da nuvem diminui, e a sua densidade aumenta, quando se varia a frequência RF.

### 1.2.3 Condensação de Bose-Einstein

A condensação de Bose-Einstein (CBE) consiste de um número macroscópico de partículas, que estão todas no estado fundamental do sistema. CBE é uma transição de fase, a qual não depende das interações específicas entre as partículas. Ela é baseada na indistinguibilidade e natureza das partículas, que são o coração da mecânica quântica. A condensação de Bose-Einstein pode ser descrita intuitivamente da seguinte forma: quando as funções de onda das partículas bosônicas se "superpõem" espacialmente, então as ondas de matéria começam a escilar em conjunto - uma onda de matéria coerente se forma, a qual comprime todas as partículas em um estado fundamental do sistema [ver figura (1.19)]. Esta transição de "desordenado" para ondas de matéria coerente pode ser comparado com a transição de uma luz incoerente para luz laser.

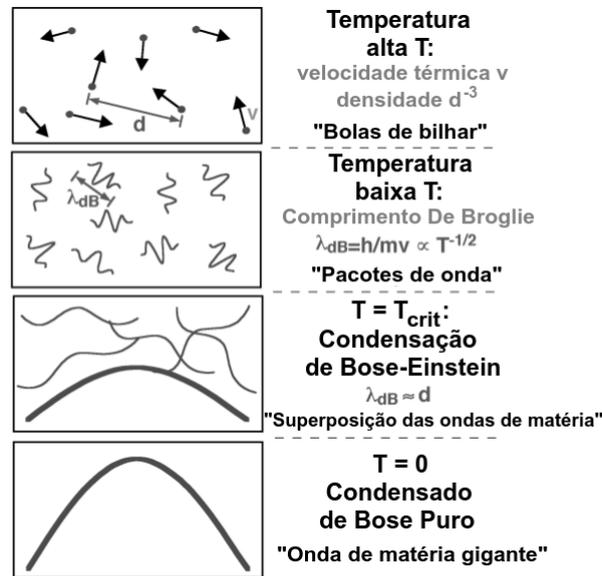


Figura 1.19: Critério para a condensação de Bose-Einstein [37]. Em temperaturas altas, um gás interagindo fracamente pode ser tratado como um sistema de "bolas de bilhar". Em temperaturas baixas o bastante, podemos usar uma descrição quântica, na qual as partículas podem ser consideradas como pacotes de onda com uma extensão  $\lambda_{dB}$ . Na temperatura de transição do CBE,  $\lambda_{dB}$  se torna comparável à distância  $d$  entre as partículas, e um condensado de Bose-Einstein se forma. Na medida que a temperatura se aproxima de zero, a nuvem atômica desaparece levando a um condensado de Bose puro.

A figura (1.20) mostra uma sequência de perfis espaciais em três etapas do processo de evaporação de átomo de  $Rb$ . O aparecimento do pico central representa a ocorrência do CBE. A sequência mostra a obtenção de um condensado quase puro ao final do processo.

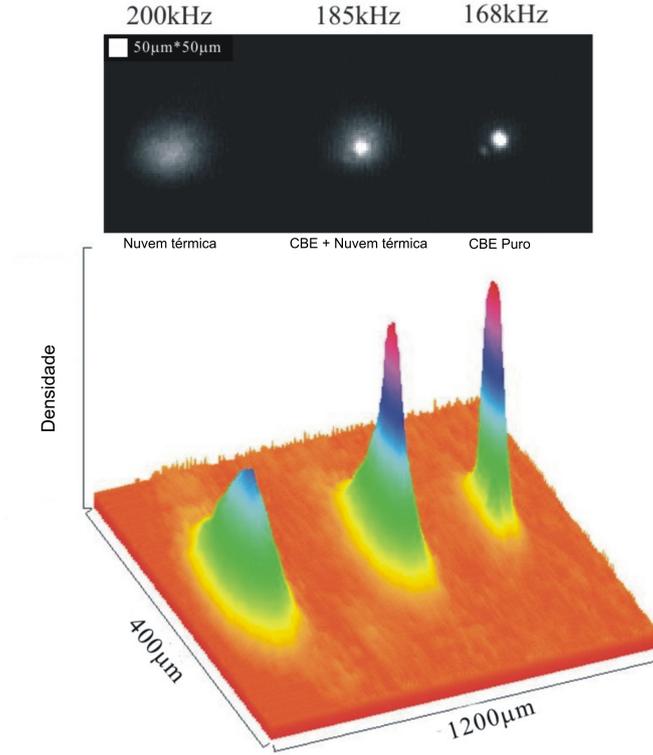


Figura 1.20: Observação do condensado de Bose-Einstein [36]. A partir do painel da esquerda (frequência RF de 200 kHz), podemos observar a transição para o CBE. Embora não esteja muito nítido na figura, o CBE tem uma forma espacial aproximadamente elíptica.

### 1.2.4 Gases Atômicos Ultrafrios Bidimensionais

Um gás atômico bidimensional é obtido através de um forte confinamento dos átomos ao longo de uma direção. O aprisionamento de átomos ultrafrios em uma armadilha anisotrópica bidimensional utilizando potenciais adiabáticos induzidos por RF (níveis de energia magnéticos vestidos pelo campo RF), foi proposto por O. Zobay e BM Garraway [40] em 2001 e experimentalmente realizado por Y. Colombe et al. [41], em 2003.

A descrição do resfriamento evaporativo realizado na seção anterior é válida para campos RF fracos. Neste caso, os níveis de energia magnéticos da figura (1.17) são denominados de potenciais diabáticos [figura (1.21a)]. Entretanto, se os campos RF aplicados na armadilha QUIC são intensos, o resfriamento evaporativo deve ser descrito por um formalismo de átomo vestido. Neste contexto, o campo magnético estático de aprisionamento (que apresenta um mínimo local) é usado em conjunto, com um campo magnético oscilante RF na forma de  $B_1 \cos(\omega_{rf}t)$ , com frequência de Rabi de  $\Omega = g\mu_B B_1/2$ . Isto resulta, nos sub-níveis Zeeman vestidos que são denominados potenciais adiabáticos [figura (1.21b)]. Levando em conta a gravidade, o potencial total para o estado vestido  $m'_F$

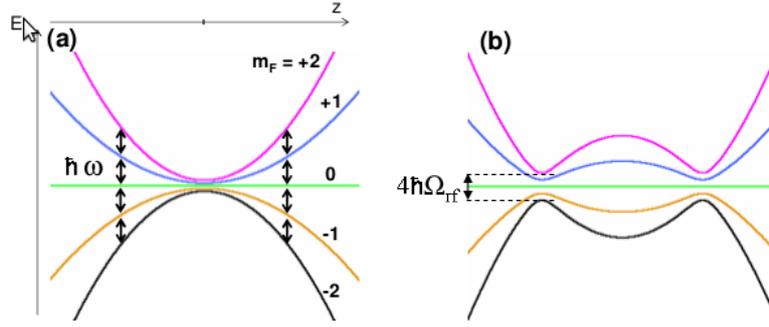


Figura 1.21: Diagrama, ao longo do eixo  $z$ , dos cinco sub-níveis Zeeman do  $^{87}\text{Rb}$ ,  $F = 2$ , em um campo magnético QUIC [34]. O átomo é submetido a um campo RF apresentando uma frequência  $\omega_{rf}$  e uma frequência rabi  $\Omega_{rf}$ . Os níveis são representados no formalismo de estados vestidos, (a) na ausência de acoplamento e (b) para um acoplamento RF forte.

é dado por:

$$U_{m'_F} = m'_F \sqrt{\hbar\omega - g_F\mu_B B(\mathbf{r})} + \Omega^2 + mgz. \quad (1.16)$$

Para se obter um gás atômico bidimensional, o nível vestido mais alto  $m'_F = 2$  deve ser usado. Para os átomos neste estado vestido, o potencial apresenta um mínimo nos pontos onde:

$$\hbar\omega = g_F\mu_B B(\mathbf{r}), \quad (1.17)$$

ou seja, em pontos onde o campo RF é ressonante com a quebra Zeeman ("avoided crossings") [figura (1.22)]. O lugar geométrico destes pontos é a superfície onde a norma do

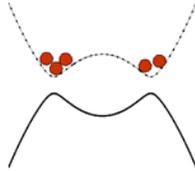


Figura 1.22: Átomos vestidos aprisionados [34].

campo magnético tem um valor fixo, ou seja, uma superfície iso-B de equação:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\omega}{g_F\mu_B}. \quad (1.18)$$

No caso da armadilha QUIC, como o potencial de confinamento é harmônico as superfícies iso-B são elipsóides. Assim, os átomos são forçados a se moverem ao longo dessa superfície dentro de uma espessura muito pequena (uma "casca de ovo"), e se acumulam no fundo da superfície devido a gravidade [figura (1.23)]. À medida que o raio típico da casca aumenta, a nuvem atômica se torna essencialmente bidimensional. Os átomos condensados na armadilha QUIC se organizam em uma geometria bidimensional pela deformação do potencial QUIC. Isto é feito modificando a frequência do campo magnético de RF. Na armadilha QUIC, os átomos estão confinados no nível mais elevado de energia  $m_F = 2$ .

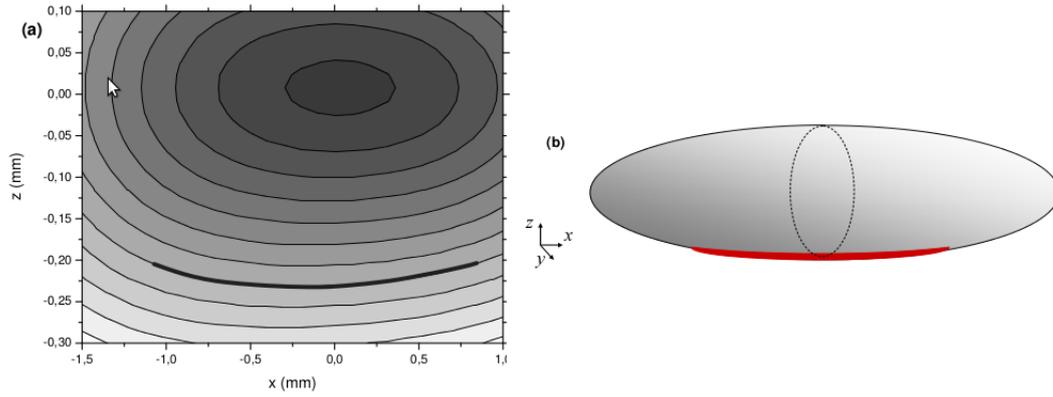


Figura 1.23: (a) Corte das superfícies iso-B na armadilha QUIC no plano vertical  $xz$  [34]. Duas sucessivas linhas iso-B são separadas por  $0,5 G$ . A linha grossa representa esquematicamente a distribuição atômica dos átomos na armadilha vestida na presença de gravidade. (b) O regime de 3D da superfície iso-B dentro do qual os átomos (linha vermelha grossa) são aprisionados.

À medida que a frequência de RF aumenta, a ressonância atravessa e os átomos seguem adiabaticamente o estado vestido de maior energia  $m'_F = 2$ . A figura (1.24) mostra os átomos dentro da armadilha 2D, com a nuvem sendo observada lateralmente. Na primeira imagem, temos a nuvem atômica para a armadilha QUIC "nua". Nas outras duas, vemos claramente que a nuvem é simultaneamente deslocada ao longo do eixo  $z$  e deformada na medida em que  $\omega_{rf}$  cresce: Ela é comprimida na direção  $z$  enquanto é relaxada ao longo de  $x$  e  $y$ . Esta nuvem atômica bidimensional é a plataforma experimental para produção dos campos magnéticos artificiais que abordaremos nesta tese.

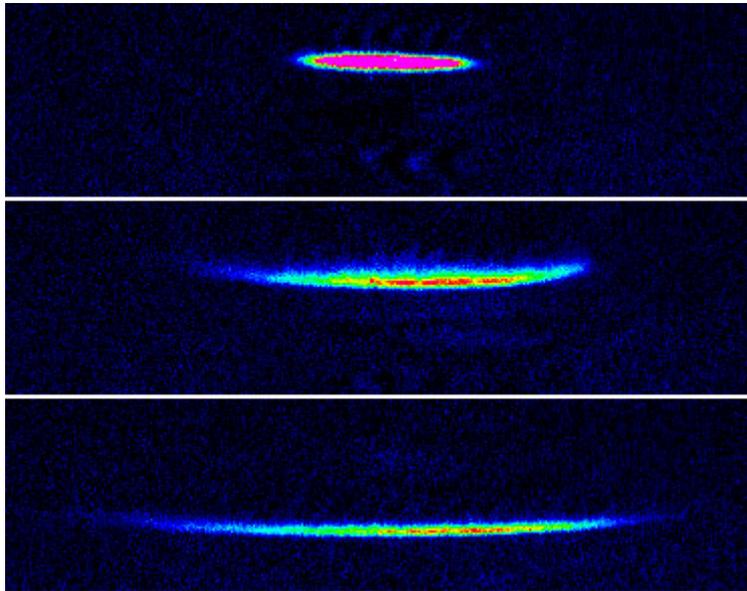


Figura 1.24: Imagens experimentais de uma nuvem atômica com  $10^6$  átomos aprisionados, a  $5 \mu K$ , dentro de a) uma armadilha QUIC "nua", b) uma armadilha 2D com  $\omega_{rf} = 2\pi \times 3 MHz$  (deslocamento vertical  $|z_0| = 130 \mu m$ ), uma armadilha 2D com  $\omega_{rf} = 2\pi \times 8 MHz$  (deslocamento vertical  $|z_0| = 450 \mu m$ ) [41]. As dimensões das figuras são  $4,5 \times 1,2 mm$ .

# Capítulo 2

## Campos de Calibre Ópticamente Induzidos para Átomos Ultrafrios

Em 1982, Feynman introduziu o conceito de um emulador quântico como uma possibilidade de contornar a dificuldade de se simular a física quântica com computadores clássicos [42]. A idéia dele, baseada na universalidade da mecânica quântica, era usar um dispositivo controlável para simular outros sistemas de interesse. Atualmente, a intuição de Feynman está sendo implantada em diversas configurações, sendo às associadas aos gases frios de átomos neutros as que desempenham maior destaque [43, 44]. Estes gases constituem plataformas extremamente flexíveis. Eles podem ser formados de bosóns, férmions, ou misturas de ambos. O ambiente deles pode ser controlado usando o potencial criado pela luz laser com perfis harmônicos, periódicos, quasi-periódicos, ou desordenados. As interações entre as partículas podem ser ajustadas usando ressonâncias "scattering". À primeira vista, o único ingrediente que faltava para implementar a idéia de Feynman em gases atômicos é o equivalente do magnetismo orbital, o qual nos permitiria simular fenômenos bem conhecidos em física da matéria condensada. Neste capítulo, vamos apresentar uma proposta que surgiu recentemente para preencher este item faltante, através do uso da interação átomo-luz para gerar potenciais de calibre artificiais que atuam em matéria neutra. Nas discussões que se seguem, consideramos os átomos neutros como já aprisionados e resfriados.

Quando um átomo neutro se move em um campo laser de configuração adequada o seu movimento de centro de massa pode imitar a dinâmica de uma partícula carregada em um campo magnético, através do surgimento de uma força similar a de Lorentz. Neste capítulo, os princípios físicos que formam a base deste magnetismo artificial (sintético) são apresentados. Em particular, nos concentramos na criação dos campos de calibre artificiais para átomos neutros do tipo tripod, os quais podem ser obtidos experimentalmente utilizando a transição  $5^2S_{1/2}(F = 1) \leftrightarrow 5^2P_{3/2}(F = 0)$  do  $^{87}\text{Rb}$ . O capítulo é organizado da seguinte forma: A seção 2.1 se destina a uma breve discussão a respeito da relação

entre a fase de geométrica, que surge quando o átomo segue adiabaticamente um dos estados vestidos da interação átomo-laser, e o surgimento do magnetismo artificial. Na seção 2.2, apresentamos um modelo ilustrativo onde a transição atômica que é acoplada à luz laser é representada por um simples sistema de dois níveis. Isto nos permitirá identificar os elementos importantes para a criação dos potenciais: gradientes de fase do feixe luminoso e de sua intensidade (ou dessintonia em relação à ressonância atômica). Em adição, fornecemos uma interpretação física para os potenciais geométricos de calibre ópticamente induzidos. Na seção 2.3, introduzimos a teoria geral da dinâmica adiabática para o movimento do centro de massa de átomos interagindo com a radiação laser. A partir desta teoria, obtemos as expressões para os potenciais de calibre geométricos para o átomo com uma estrutura multi-nível. A seção 2.4 é dedicada ao surgimento dos campos calibre para átomos com uma configuração tripod de níveis energia. Na seção 2.5, como um exemplo da aplicação dos campos de calibre artificiais, apresentamos um arranjo laser específico que leva à criação de um campo de monopolo magnético efetivo. Na última seção 2.6, comentaremos a respeito do experimento realizado por Lin, Compton, Jiménez-García *et al.* [9], que possibilitou a primeira observação experimental de um campo magnético geométrico em gás atômico ultrafrio.

## 2.1 Fase Geométrica e Magnetismo Artificial

Do ponto de vista da mecânica quântica, o magnetismo orbital de uma partícula com carga  $e$  pode ser considerado como uma consequência da fase Aharonov-Bohm adquirida pela partícula quando ela se desloca ao longo de um contorno fechado  $\mathcal{C}$  [45]. Esta fase tem uma origem geométrica e não depende da duração requerida para se completar a trajetória. Ela é escrita como  $\gamma = 2\pi\Phi/\Phi_0$ , onde  $\Phi$  é o fluxo de campo magnético através do contorno  $\mathcal{C}$  e  $\Phi_0 = h/e$  é o quanta de fluxo. Portanto, o magnetismo artificial é gerado em situações em que uma partícula neutra adquire uma fase geométrica quando segue o contorno (caminho fechado)  $\mathcal{C}$ . Um dos exemplos mais simples de fase geométrica, a chamada fase de Berry, desempenha um papel central no presente capítulo <sup>1</sup>. Ela surge, por exemplo, quando uma partícula neutra com momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  se move em um campo magnético (real) não homogêneo  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  [46]. Se a partícula é preparada em um ponto  $\mathbf{r}_0$  em um dos autoestados locais  $|m(\mathbf{r}_0)\rangle$  do Hamiltoniano  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  e se move lentamente o suficiente, ela segue adiabaticamente o autoestado  $|m(\mathbf{r}_t)\rangle$ . Uma vez que a trajetória ao longo de  $\mathcal{C}$  é concluída, a partícula retorna ao estado interno  $|m(\mathbf{r}_0)\rangle$ , adquirindo um fator de fase contendo uma componente geométrica. A Fase de Berry também está presente em interações do tipo átomo-luz [47]. O papel dos estados magnéticos  $|m(\mathbf{r})\rangle$  é agora desempenhado pelos estados vestidos, ou seja, pelos autoestados do acoplamento átomo-luz. Os estados vestidos podem variar numa escala espacial curta (tipicamente o

---

<sup>1</sup>Uma discussão detalhada sobre a fase de Berry é realizada no Apêndice D.

comprimento de onda da luz) e assim os campos de calibre artificiais produzidos podem ser bastante intensos, no sentido de que a fase geométrica é grande em comparação com  $2\pi$  para um contorno que rodeia um gás atômico de tamanho realista.

O uso de fases geométricas não é o único caminho para se alcançar um Hamiltoniano com um potencial de calibre artificial para partículas neutras. Girando-se um gás atômico ultrafrio em uma frequência angular  $\Omega$  e em torno de um dado eixo (por exemplo,  $z$ ) também se leva ao magnetismo artificial no referencial girante, com  $B_z \propto \Omega$ . Esta técnica tem sido amplamente utilizada no contexto de gases quânticos [ver Cooper [48] e Fetter [49]] e é bem adequada quando o potencial confinante é invariante rotacionalmente em torno do eixo  $z$ . O Hamiltoniano é então, independente do tempo no referencial girante e o formalismo padrão da física estatística de equilíbrio é aplicável. No entanto, se o potencial confinante apresenta uma anisotropia no referencial do laboratório, o Hamiltoniano é dependente do tempo em qualquer referencial e o sistema se torna difícil de trabalhar de um ponto de vista teórico. Diferentemente, os métodos baseados em fases geométricas não impõem qualquer restrição sobre as propriedades de simetria do Hamiltoniano inicial e os campos de calibre artificiais são produzidos no referencial do laboratório. Além disso, os métodos geométricos possibilitam a oportunidade de se produzir também potenciais não-abelianos e isto representa uma vantagem significativa.

## 2.2 Modelo Ilustrativo para a Produção de Campos de Calibre Artificiais: Átomo de Dois Níveis em um Feixe de Luz

A fim de apresentar os ingredientes básicos da física de campos de calibre geométricos, discutimos nesta seção o esquema atômico mais simples para o qual se pode gerar o magnetismo artificial. Consideramos uma única partícula quântica com uma estrutura interna de dois níveis e mostramos como o seguimento adiabático de um estado interno particular pode fornecer os campos de calibre desejados. Neste contexto, apresentamos com uma álgebra mínima os conceitos físicos importantes, os quais serão generalizados subsequentemente para esquemas mais complexos.

Denotamos  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  como uma base do espaço de Hilbert bidimensional associada com o grau de liberdade interno da partícula. Mais tarde, estes estados representarão, respectivamente, os estados eletrônicos fundamental e excitado de um átomo. Assumimos que a partícula evolui em um espaço dependente de campos externos que acoplam  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ . Nesta seção, não especificamos a origem física destes campos. Na prática, eles podem ser os campos de luz laser, campos de microondas, e/ou campos elétricos ou magnéticos estáticos que atuam sobre o momento de dipolo elétrico ou magnético da partícula. A

forma geral para o Hamiltoniano da partícula de massa  $m$  é:

$$\hat{H} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r}) \right) \hat{1} + \hat{H}_0(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

onde  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  é o operador momento e  $\hat{1}$  é o operador identidade no espaço de Hilbert interno. O operador  $\hat{H}_0(\mathbf{r})$  pode ser escrito na forma matricial como:

$$\hat{H}_0(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\text{sen}\theta \\ e^{i\phi}\text{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

A dinâmica da partícula é determinada por quatro quantidades reais, as quais podem depender do vetor posição  $\mathbf{r}$ : O potencial  $\hat{V}(\mathbf{r})$  atua sobre a partícula de maneira tal que é independente do estado interno da mesma, enquanto que a frequência de Rabi generalizada  $\Omega$  caracteriza a intensidade do acoplamento que levanta a degenerescência entre  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ . As duas quantidades restantes são o ângulo de mistura  $\theta$  e o ângulo de fase  $\phi$ . Para um átomo de dois níveis em um campo laser monocromático,  $\Omega \cos\theta$  representa a dessintonia entre a frequência do laser e a ressonância atômica,  $\Omega \text{sen}\theta$  é a magnitude do acoplamento átomo-laser, e  $\phi$  é a fase do laser.

### 2.2.1 Movimento Adiabático de um Estado Vestido

No ponto  $\mathbf{r}$  os autoestados da matriz  $\hat{H}_0(\mathbf{r})$  são

$$|\chi_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\text{sen}(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$|\chi_2\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\text{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

com autovalores  $\hbar\Omega/2$  e  $-\hbar\Omega/2$ , respectivamente. Chamamos estes autoestados de estados vestidos, antecipando as discussões seguintes, nas quais eles corresponderão aos autoestados locais do Hamiltoniano que descrevem o acoplamento entre um átomo e um campo de luz. Uma vez que os estados  $\{|\chi_j\rangle\}$  formam uma base ortogonal e normalizada, a quantidade  $i\langle\chi_j|\nabla\chi_j\rangle$  é um número real e a relação  $\langle\nabla\chi_2|\chi_1\rangle = -\langle\chi_1|\nabla\chi_2\rangle$  vigora, onde definimos  $|\nabla\chi_j\rangle \equiv \nabla(|\chi_j\rangle)$ .

Usando a base  $\{|\chi_j\rangle\}$  para o espaço interno de Hilbert podemos escrever o vetor de estado total da partícula como:

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum_{j=1,2} \psi_j(\mathbf{r}, t) |\chi_j(\mathbf{r}, t)\rangle. \quad (2.2)$$

Suponha agora que em um instante inicial a partícula é preparada em um estado ves-

tido interno particular, a saber  $|\chi_1\rangle$ . Se a distribuição de velocidade da partícula envolve apenas componentes suficiente pequenas, o estado interno da partícula se manterá proporcional a  $|\chi_1\rangle$  para todos os instantes de tempo. Isto é equivalente à aproximação de Born-Oppenheimer em física molecular: A posição  $\mathbf{r}$  da partícula e seu grau de liberdade interno desempenham o papel das coordenadas nuclear e da dinâmica dos elétrons, respectivamente.

A partir de agora derivaremos a equação de movimento para  $\psi_1$  no caso onde  $\psi_2$  se mantém negligenciável para todo o tempo. Primeiro consideramos a ação do operador momento  $\hat{\mathbf{p}}$  sobre o vetor de estado quântico total  $|\Psi\rangle$ . Empregando  $\nabla[\psi_j|\chi_j\rangle] = [\nabla\psi_j]|\chi_j\rangle + \psi_j|\nabla\chi_j\rangle$  e a relação de completeza, temos:

$$\hat{\mathbf{p}}|\Psi\rangle = \sum_{j,l=1}^2 [(\delta_{j,l}\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{A}}_{jl}\psi_l)|\chi_j\rangle], \quad (2.3)$$

com  $\hat{\mathbf{A}}_{jl}(\vec{r}) = \langle\chi_j|\nabla\chi_l\rangle$ . Assumindo que  $\psi_2 = 0$ , projetamos a equação de Schrödinger  $i\hbar|\dot{\Psi}\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$  sobre o estado vestido interno  $|\chi_1\rangle$ , onde  $\hat{H}$  é o Hamiltoniano total da equação (2.1). Isto leva a uma equação fechada para a amplitude de probabilidade  $\psi_1$  de encontrar o átomo no primeiro estado vestido [50–54]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \left[ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{A}})^2}{2m} + \hat{V} + \frac{\hbar\Omega}{2} + \hat{\Phi} \right] \psi_1. \quad (2.4)$$

Em adição aos termos  $\hat{V}$  e  $\frac{\hbar\Omega}{2}$ , que já foram explícitos no Hamiltoniano inicial da equação (2.1), dois potenciais geométricos  $\hat{\mathbf{A}}$  e  $\hat{\Phi}$  surgem na eliminação adiabática do estado  $|\chi_2\rangle$ , devido à dependência espacial dos estados vestidos internos. O primeiro deles é o potencial vetor:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = i\hbar\langle\chi_1|\nabla\chi_1\rangle = \frac{\hbar}{2}(\cos\theta - 1)\nabla\phi. \quad (2.5)$$

O campo magnético efetivo associado com  $\hat{\mathbf{A}}$  é:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hbar}{2}\nabla(\cos\theta) \times \nabla\phi. \quad (2.6)$$

Quando este campo magnético artificial é diferente de zero, o potencial vetor  $\hat{\mathbf{A}}$  não pode ser eliminado na equação (2.4) por uma transformação de calibre. A partícula adquire uma carga efetiva (que vamos definir igual a 1 por convenção) e seu movimento exhibe as características usuais associadas com o magnetismo orbital. Um valor diferente de zero de  $\hat{\mathbf{B}}$  ocorre apenas se ambos o ângulo de mistura  $\theta$  e o ângulo de fase  $\phi$  variam no espaço com gradientes não-colineares. O segundo potencial geométrico aparecendo na equação

(2.4) é o termo escalar positivo:

$$\hat{\Phi} = \frac{\hbar^2}{2m} |\langle \chi_2 | \nabla \chi_1 \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{8m} [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \phi)^2]. \quad (2.7)$$

A razão pela qual  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\Phi}$  são chamados de "geométricos" é clara a partir das equações (2.5) e (2.7), as quais dependem apenas da variação espacial dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , i.e., da geometria do acoplamento entre  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , porém não da intensidade  $\Omega$  deste acoplamento. Note que, se considerarmos o movimento adiabático de  $|\chi_2\rangle$ , ao invés de  $|\chi_1\rangle$ , a equação de movimento para  $\psi_2$  contém o mesmo potencial escalar  $\hat{\Phi}$  e o potencial vetor oposto  $-\hat{\mathbf{A}}$ .

## 2.2.2 Interpretação Física dos Potenciais Geométricos

Passamos agora para a interpretação física dos campos de calibre geométricos. Concentramos a discussão sobre o sistema de dois níveis abordado anteriormente, embora as interpretações físicas que se seguem podem ser generalizadas para outros esquemas que serão analisados nas próximas seções.

O potencial escalar  $\hat{\Phi}$  pode ser interpretado como a energia cinética associada com o micro movimento rápido da partícula. Isto foi explicado pela primeira vez para um grau de liberdade interno clássico contínuo por Aharonov e Stern [55]. Aqui, destacamos o raciocínio de Cheneau et al. [56] que trata o caso de um grau de liberdade interno quantizado. Considere-se uma partícula preparada no estado interno  $|\chi_1\rangle$ , com um estado de centro de massa que consiste de um pacote de ondas localizadas em torno de um determinado ponto  $\mathbf{r}$  com uma pequena extensão em comparação com a escala de variação de  $\theta$  e  $\phi$ . Introduzimos o operador força  $\mathbf{F} = \nabla \hat{H}_0(\mathbf{r})$ , notando que os autoestados  $|\chi_j\rangle$  do acoplamento  $U$  não são auto-estados de  $\mathbf{F}$ . Desta forma, a força que atua na partícula apresenta flutuações quânticas  $\langle F^2 \rangle \neq \langle F \rangle^2$  que são caracterizadas na representação de Heisenberg pela função de correlação simetrizada:

$$C(\tau) = \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{F}(0) \cdot \delta \mathbf{F}(\tau) + \delta \mathbf{F}(\tau) \cdot \delta \mathbf{F}(0) \rangle = \hbar^2 \Omega^2 |\langle \chi_2 | \nabla \chi_1 \rangle|^2 \cos(\Omega \tau), \quad (2.8)$$

com  $\delta \mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}(\tau) - \langle \mathbf{F} \rangle$ .

Vamos agora recordar que na mecânica clássica uma partícula submetida a uma força rapidamente oscilante  $\delta \mathbf{F}$  sofre um micromovimento com uma energia cinética média :

$$E_K = \int \frac{\tilde{C}(\omega)}{2m\omega^2} d\omega, \quad (2.9)$$

onde  $\tilde{C}(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $C(\tau)$ . Inserindo o valor de  $C(\tau)$  da equação (2.8) na equação (2.10), encontramos que  $E_K$  coincide com potencial geométrico escalar

dado pela equação (2.7). O potencial vetor  $\mathbf{A}$  dado na equação (2.5) está relacionado com a fase de Berry que aparece quando um sistema quântico, aqui o sistema de dois estados associados com o grau de liberdade interno da partícula, é transportado lentamente em torno de um contorno  $\mathcal{C}$ , se mantendo em um autoestado  $|\chi\rangle$  de seu Hamiltoniano [46]:

$$\gamma(\mathcal{C}) = i \oint \langle \chi | \nabla \chi \rangle \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.10)$$

onde a segunda igualdade vale para o sistema de dois níveis considerado acima quando ele é preparado no estado  $|\chi\rangle$ .

## 2.3 Formalismo Geral para o Movimento Adiabático de Átomos Neutros em Campos de Luz

A idéia do formalismo geral para obtenção de potenciais de calibre geométricos é baseada nos trabalhos de Wilczek e Zee [57, 58], que generalizam o teorema adiabático para o caso onde o Hamiltoniano do sistema de interesse possui um grupo de autoestados que permanecem degenerados (ou quasi degenerados) e bem isolados de outros níveis no decurso da evolução no tempo. Nesta seção, vamos apresentar a teoria geral da dinâmica adiabática para o movimento do centro de massa de átomos em campos de luz laser estacionários. Consideramos átomos com múltiplos estados internos, como ilustrado na figura (2.1). O Hamiltoniano atômico total é:

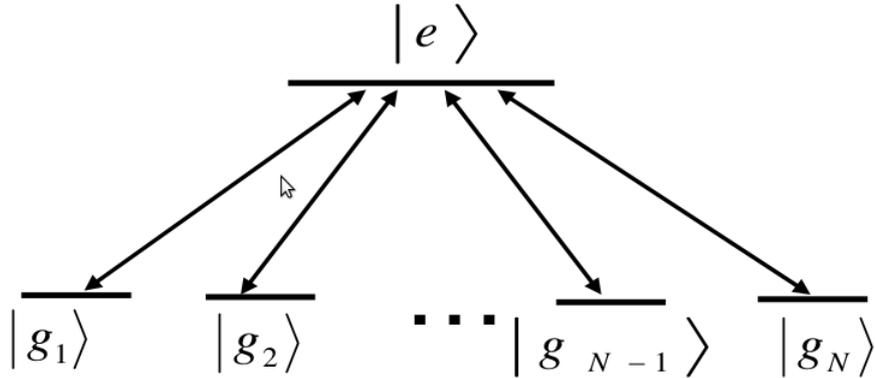


Figura 2.1: Ilustração esquemática da interação átomo-laser. Na configuração Multipod, um estado atômico  $|e\rangle$  é acoplado a  $N - 1$  diferentes estados atômicos  $|g_j\rangle$  por  $N - 1$  campos de luz laser ressonantes.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r}) + \hat{H}_0(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

onde  $\hat{\mathbf{p}} \equiv i\hbar\nabla$  é o operador momento para um átomo posicionado em  $\mathbf{r}$ , e  $m$  é a massa atômica. O Hamiltoniano  $\hat{H}_0(\mathbf{r})$  descreve os graus de liberdade eletrônicos do átomo.  $\hat{V}(\mathbf{r})$

representa um potencial de aprisionamento externo. Note que o Hamiltoniano atômico  $\hat{H}_0(\mathbf{r})$ , acomoda efeitos devido aos campos de luz externos em adição a dinâmica interna.

Para uma posição fixa  $\mathbf{r}$ , o Hamiltoniano atômico  $\hat{H}_0(\mathbf{r})$  pode ser diagonalizado para fornecer um conjunto de  $N$  estados vestidos  $|\chi(\mathbf{r})\rangle$  do átomo acoplado com os campos de luz. Os estados vestidos são caracterizados pelos autovalores  $\varepsilon_n(\mathbf{r})$ , com  $n = 1, 2, \dots, N$ . O estado quântico total do átomo descrevendo ambos graus de liberdade internos e de movimento podem então ser expandidos em termos dos estados vestidos como

$$|\Psi(\mathbf{r})\rangle = \sum_{j=1}^n \psi_n(\mathbf{r}) |\chi_n(\mathbf{r})\rangle, \quad (2.12)$$

onde  $\psi_n(\mathbf{r}) \equiv \psi_n$  é a função de onda para o movimento de centro de massa do átomo no estado interno  $n$ . Substituindo a equação (2.12) na equação de Schrödinger  $i\hbar\partial_t|\Psi(\mathbf{r})\rangle = \hat{H}|\Psi(\mathbf{r})\rangle$ , obtemos um conjunto de equações acopladas para as componentes  $\psi_n$ . Introduzindo o vetor coluna  $N$ -dimensional  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)^T$ , podemos convenientemente representar estas equações em uma forma matricial:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} + U \right] \psi \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $U$  são matrizes  $N \times N$  com os seguintes elementos

$$\mathbf{A}_{n,m} = i\hbar\langle\chi_n(\mathbf{r})|\nabla\chi_m(\mathbf{r})\rangle, \quad (2.14)$$

$$U_{n,m} = \varepsilon_n(\mathbf{r})\delta_{n,m} + \langle\chi_n(\mathbf{r})|\hat{V}(\mathbf{r})|\chi_m(\mathbf{r})\rangle. \quad (2.15)$$

A última matriz  $U$  inclui contribuições a partir de ambas energias: atômicas internas e também do potencial externo de aprisionamento. A matriz  $\mathbf{A}$  é o potencial de calibre que aparece devido a dependência espacial dos estados atômicos vestidos. Se os elementos fora da diagonal das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $U$  são menor do que a diferença entre as energias atômicas  $U_{nn} - U_{mm}$ , a aproximação adiabática pode ser aplicada pela negligência das contribuições fora da diagonal. Isto leva a uma separação da dinâmica em diferentes estados vestidos. Átomos em qualquer um dos estados vestidos evoluem de acordo com um Hamiltoniano separado, no qual o potencial de calibre  $\mathbf{A}$  se reduz a uma matriz  $1 \times 1$ , i.e., o potencial de calibre se torna Abelian. A aproximação adiabática falha se existem estados vestidos degenerados (ou aproximadamente degenerados), por isto, os acoplamentos (não-adiabáticos) fora da diagonal entre os estados vestidos degenerados não podem ser ignorados. Neste caso, os potenciais de calibre não podem ser reduzidos a matrizes  $1 \times 1$ . Eles são potenciais não-Abelianos devido ao fato de suas componentes Cartesianas não comutarem.

Vamos assumir que os primeiros  $q$  estados vestidos são degenerados (ou aproxima-

damente degenerados) e que estes níveis são bem separados a partir dos  $N - q$  níveis restantes. Negligenciando transições para os estados restantes, podemos projetar o Hamiltoniano total neste subespaço. Como resultado, chegamos a equação de Schrödinger fechada para o vetor coluna reduzido  $\tilde{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q)^T$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = \left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} + U + \Phi \right] \tilde{\psi}, \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $U$  são as matrizes truncadas  $q \times q$ . A projeção do termo  $\mathbf{A}^2$  para o subespaço  $q$ -dimensional não pode ser inteiramente expressa em termos da matriz truncada  $\mathbf{A}$ . Por isto, surge um potencial escalar geométrico  $\Phi$ , o qual também é uma matriz  $q \times q$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m} &= \frac{1}{2m} \sum_{l=q+1}^N \mathbf{A}_{n,l} \cdot \mathbf{A}_{m,l} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \langle \nabla \chi_n | \nabla \chi_m \rangle + \sum_{k=1}^q \langle \chi_n | \nabla \chi_k \rangle \langle \chi_k | \nabla \chi_m \rangle \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

com  $n, m \in (1, \dots, q)$ . A matriz  $\mathbf{A}$  reduzida  $q \times q$  é a conexão Mead-Berry [46, 54], também conhecida como o potencial vetor efetivo.

Devido ao fato dos estados adiabáticos  $|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_q\rangle$  serem degenerados, qualquer base gerada por uma transformação unitária local  $U(\mathbf{r})$  é equivalente dentro do sub-espaço. A correspondente mudança de base local:

$$\tilde{\psi} \rightarrow U(\vec{r}) \tilde{\psi}, \quad (2.18)$$

leva à transformação dos potenciais de acordo com

$$\mathbf{A} \rightarrow U(\mathbf{r}) \mathbf{A} U^\dagger(\mathbf{r}) - i\hbar \nabla U(\mathbf{r}) U^\dagger(\mathbf{r}), \quad (2.19)$$

$$\Phi \rightarrow U(\mathbf{r}) \Phi U^\dagger(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

Estas regras de transformação mostram o caráter de calibre dos potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\Phi$ .

A conexão de Berry ou potencial vetor  $\mathbf{A}$  é relacionado à curvatura (um campo magnético efetivo)  $\mathbf{B}$  por:

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} F_{kl}, \quad (2.21)$$

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k - \frac{i}{\hbar} [A_k, A_l] \quad (2.22)$$

Note que o termo  $\epsilon_{ikl} [A_k, A_l] = (\mathbf{A} \times \mathbf{A})_i$  não desaparece, em geral, porque as componentes do vetor  $\mathbf{A}$  necessariamente não comutam. De fato, este termo reflete o caráter não-Abeliano dos campos de calibre.

Na próxima seção, consideraremos uma situação onde três feixes laser são acoplados

aos átomos em uma configuração conhecida como *configuração tripod*.

## 2.4 Campos de Calibre Oticamente Induzidos para Átomos Ultrafrios Tipo-Tripod

Vamos considerar um conjunto de átomos ultrafrios de quatro níveis em um configuração tripod [59,60], com três estados fundamentais  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  e um estado eletronicamente excitado  $|0\rangle$ , como mostrado na figura (2.2). Os estados  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  podem ser diferentes estados fundamentais hiperfinos de um átomo. Na prática, podemos obter a configuração tripod usando a transição  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_0$  do  $^4\text{He}^*$  ou a  $5S_{1/2}(F=1) \leftrightarrow 5P_{3/2}(F=0)$  do  $^{87}\text{Rb}$ . Os átomos interagem com três feixes de laser ressonantes. O primeiro feixe laser possui uma frequência de  $\omega_1$  e um vetor de onda  $\mathbf{k}_1$ , e induz a transição atômica  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  com uma frequência de Rabi  $\Omega_1 \equiv \frac{\mu_{01}E_1}{2}$ , onde  $E_1$  é a intensidade do campo elétrico e  $\mu_{01}$  é o momento de dipolo para a transição do estado fundamental  $|1\rangle$  para o estado excitado  $|0\rangle$ . O segundo feixe é caracterizado pela frequência  $\omega_2$  e vetor de onda  $\mathbf{k}_2$ , e acopla a transição  $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$  com uma frequência de Rabi  $\Omega_2 \equiv \frac{\mu_{02}E_2}{2}$ . O último feixe possui frequência  $\omega_3$  e vetor de onda  $\mathbf{k}_3$  e provoca a transição  $|3\rangle \rightarrow |0\rangle$  com uma frequência de Rabi  $\Omega_3 \equiv \frac{\mu_{03}E_3}{2}$ . Segundo as regras de seleção para transições elétricas di-

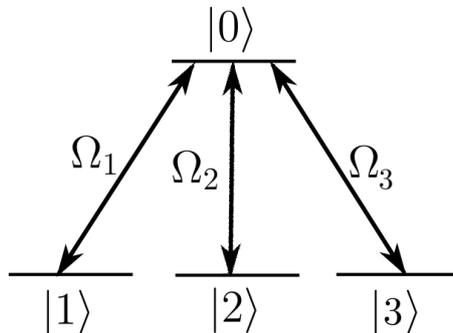


Figura 2.2: A configuração tripod.

polares entre os subníveis Zeeman do átomo, temos que: para luz polarizada linearmente são permitidas transições apenas para  $\Delta m_F = 0$ ; para luz polarizada circularmente são permitidas transições para  $\Delta m_F = \pm 1$ . No caso das duas transições atômicas propostas  $5^2S_{1/2}(F=1) \leftrightarrow 5^2P_{3/2}(F=0)$  do  $^{87}\text{Rb}$  ou  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_0$  do  $^4\text{He}^*$ , os três estados fundamentais  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  correspondem, respectivamente, a  $m_F = -1, 0$  e  $1$ , e o estado excitado  $|0\rangle$  a  $m_F = 0$ . O feixe de luz laser ressonante a transição  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  deve possuir uma polarização  $\sigma^+$ , já o feixe que induz a transição  $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$  deve ser polarizado linearmente  $\pi$  e o feixe acoplado á transição  $|3\rangle \rightarrow |0\rangle$  deve possuir polarização  $\sigma^-$ .

Adotando a aproximação das ondas girantes e assumindo ressonâncias exatas de um e dois fótons, o Hamiltoniano para os graus de liberdade eletrônicos de um átomo intera-

gindo com três feixes se torna:

$$\hat{H}_0 = -\hbar [\Omega_1|0\rangle\langle 1| + \Omega_2|0\rangle\langle 2| + \Omega_3|0\rangle\langle 3|] + H.c.. \quad (2.23)$$

Podemos escrever também o Hamiltoniano de interação da seguinte forma:

$$\hat{H}_0 = -\hbar\Omega|B\rangle\langle 0| + H.c., \quad (2.24)$$

onde  $|B\rangle = (|1\rangle\Omega_1^* + |2\rangle\Omega_2^* + |3\rangle\Omega_3^*)/\Omega$ . Para uma posição fixa  $\mathbf{r}$ , o Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  pode ser diagonalizado para fornecer um conjunto composto por quatro estados vestidos: dois estados escuros degenerados de energia nula  $|D_1\rangle = \text{sen}\phi e^{iS_{31}}|1\rangle - \text{cos}\phi e^{iS_{32}}|2\rangle$ ,  $|D_2\rangle = \text{cos}\theta(\text{cos}\phi e^{iS_{31}}|1\rangle + \text{sen}\phi e^{iS_{32}}|2\rangle) - \text{sen}\theta|3\rangle$  e dois estados brilhantes não-degenerados  $|\pm\rangle = (|B\rangle \pm |0\rangle)/\sqrt{2}$  que são separados em energia dos estados escuros por  $\pm\hbar\Omega$  [figura (2.3)]. A aproximação adiabática é justificada se  $\Omega$  for suficientemente grande em comparação com a dessintonização de dois fótons devido ao "laser mismatch" e/ou ao deslocamento Doppler. Neste caso, o estado interno de um átomo evolui apenas em função dos estados escuros. Parametrizamos as frequências de Rabi  $\Omega_\mu$  com variáveis de ângulos e fases de

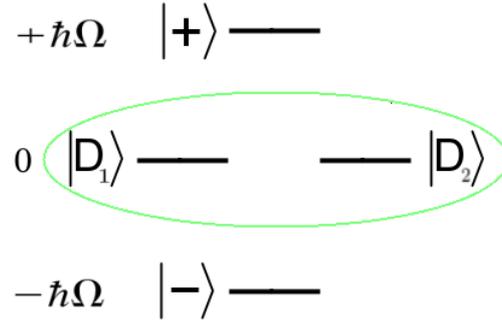


Figura 2.3: Conjunto de estados escuros provenientes da diagonalização do Hamiltoniano de interação  $\hat{H}_0$ .

acordo com:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega \text{sen}\theta \text{cos}\phi e^{iS_1}, \\ \Omega_2 &= \Omega \text{sen}\theta \text{sen}\phi e^{iS_2}, \\ \Omega_3 &= \Omega \text{cos}\theta e^{iS_3}, \end{aligned}$$

onde  $\Omega = \sqrt{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + |\Omega_3|^2}$ . Os estados adiabáticos escuros são expressos como:

$$|D_1\rangle = \text{sen}\phi e^{iS_{31}}|1\rangle - \text{cos}\phi e^{iS_{32}}|2\rangle, \quad (2.25)$$

$$|D_2\rangle = \text{cos}\theta(\text{cos}\phi e^{iS_{31}}|1\rangle + \text{sen}\phi e^{iS_{32}}|2\rangle) - \text{sen}\theta|3\rangle, \quad (2.26)$$

com  $S_{ij} = S_i - S_j$  sendo as fases relativas. Os estados escuros são auto-estados do Ha-

miltoniano  $\hat{H}_0$  com auto-energia nula:  $\hat{H}_0|D_j\rangle = 0$ . Estes estados dependem da posição atômica através da dependência espacial das frequências de Rabi  $\Omega_j$ . Isto leva ao surgimento dos potenciais de calibre  $\mathbf{A}$  e  $\Phi$  mostrados acima.

Estamos interessados na situação onde os átomos são mantidos em seus estados escuros. Isto pode ser feito negligenciando transições dos estados escuros para o estado brilhante  $|B\rangle \sim \Omega_1^*|1\rangle + \Omega_2^*|2\rangle + \Omega_2^*|3\rangle$ . O estado brilhante é acoplado ao estado excitado  $|0\rangle$  com uma frequência de Rabi  $\Omega$ , por isto, os dois estados  $|B\rangle$  e  $|0\rangle$  formam um dubleto separado dos estados escuros pelas energias  $\pm\hbar\Omega$ . A aproximação adiabática é justificada se  $\Omega$  é suficientemente grande comparada à dessintonização de dois fótons devida ao dissonância laser (laser mismatch) e/ou ao deslocamento Doppler. Neste caso, o estado interno do átomo realmente evolui dentro dos múltiplos estados escuros. O vetor estado atômico  $|\Psi(\mathbf{r})\rangle$  pode ser expandido em termos dos estados escuros de acordo com  $|\Psi(\mathbf{r})\rangle = \sum_{j=1}^2 \psi_j(\mathbf{r})|D_j(\mathbf{r})\rangle$ , onde  $\psi_j(\mathbf{r})$  é a função de onda para o movimento do centro de massa do átomo no  $j$ -ésimo estado escuro. Adaptando o formalismo geral para campos de calibre óticamente induzidos em átomos ultrafrios, apresentado na seção anterior, temos que o movimento do centro de massa atômico é descrito pela função de onda com duas componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

a qual obedece a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2m} + V + \Phi \right] \psi, \quad (2.28)$$

onde os potenciais  $\mathbf{A}$ ,  $\hat{\Phi}$ , e  $\hat{V}$  são matrizes  $2 \times 2$ . As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\hat{\Phi}$  são potenciais de calibre óticamente induzidos que surgem devido à dependência espacial dos estados atômicos escuros [59]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \hbar (\cos^2 \phi \nabla S_{23} + \sin^2 \phi \nabla S_{13}), \\ \mathbf{A}_{12} &= \hbar \cos \theta \left( \frac{1}{2} \sin(2\phi) \nabla S_{12} - i \nabla \phi \right), \\ \mathbf{A}_{22} &= \hbar \cos^2 \theta (\cos^2 \phi \nabla S_{13} + \sin^2 \phi \nabla S_{23}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \frac{\hbar^2}{2m} \text{sen}^2 \theta \left( \frac{1}{4} \text{sen}^2(2\phi) (\nabla S_{12})^2 + (\nabla \phi)^2 \right), \\
\Phi_{12} &= \frac{\hbar^2}{2m} \text{sen} \theta \left( \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi) \nabla S_{12} - i \nabla \phi \right) \\
&\quad \times \left( \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) (\cos^2 \phi \nabla S_{13} + \text{sen}^2 \phi \nabla S_{23}) - i \nabla \theta \right), \\
\Phi_{22} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{4} \text{sen}^2(2\theta) (\cos^2 \phi \nabla S_{13} + \text{sen}^2 \phi \nabla S_{23})^2 + (\nabla \theta)^2 \right).
\end{aligned}$$

Uma vez que o esquema de níveis tripod [figura (2.2)] corresponde a um esquema de átomos alcalinos, onde  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ , e  $|3\rangle$  são componentes Zeeman dos níveis hiperfinos, é natural assumir que o potencial de aprisionamento externo é diagonal nestes estados e tem a forma  $V(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r})|1\rangle\langle 1| + V_2(\mathbf{r})|2\rangle\langle 2| + V_3(\mathbf{r})|3\rangle\langle 3|$ . Tal suposição, ainda leva em conta o fato de forças magnéticas, magneto-ópticas, ou de dipolo ótico poderem ser diferentes para os vários estados Zeeman. De acordo com a equação (2.15), o potencial externo na base adiabática é então dado por uma matriz  $2 \times 2$  com elementos  $V_{jk} = \langle D_j | \hat{V}(\mathbf{r}) | D_k \rangle$ . Usando as expressões para os estados escuros 2.25 obtemos os seguintes elementos de matriz do potencial externo de aprisionamento [59]:

$$\begin{aligned}
V_{11} &= (V_2 \cos^2 \phi + V_1 \text{sen}^2 \phi), \\
V_{12} &= \frac{1}{2} (V_1 - V_2) \cos \theta \text{sen}(2\phi), \\
V_{22} &= (V_1 \cos^2 \phi + V_2 \text{sen}^2 \phi) \cos^2 \theta + V_3 \text{sen}^2 \theta.
\end{aligned}$$

É importante lembrar que os campos de calibre também podem ser oticamente induzidos se considerando outras configurações de níveis de energia para o átomo, como por exemplo, a configuração  $\Lambda$ . Em particular, o que motivou a focar nossa pesquisa em átomos em um esquema tripod foi a possibilidade de se produzir tanto potenciais Abelianos  $U(1) \times U(1)$  quanto potenciais não-Abelianos  $SU(2)$ . Enquanto que os potenciais Abelianos  $U(1) \times U(1)$  permitem explorar efeitos dependentes de spin, os potenciais não-Abelianos  $SU(2)$  permitem a investigação de uma nova física sobre as propriedades espectrais e de transporte de sistemas atômicos ultrafrios associada aos efeitos não-Abelianos.

## 2.5 Geração de um Monopolo Magnético

Uma vasta gama de efeitos físicos, tais como o efeito Aharonov-Bohm não-Abeliano [62], a dinâmica quasi-relativística para átomos frios (similar à física dos elétrons no grafeno) [63], o acoplamento spin-órbita para átomos ultrafrios [64], dentre outros [65], tem sido simulada e investigada usando os potenciais geométricos obtidos na seção anterior.

Nesta seção, como um exemplo de aplicação dos potenciais geométricos, vamos apresentar uma configuração laser para a qual é possível a geração de um monopolo magnético. Mais adiante no capítulo 4, apresentaremos nossa contribuição para esta área de pesquisa que é o estudo de vários efeitos associados a um potencial de calibre de Landau  $U(1) \times U(1)$  oticamente induzido em um gás atômico de  $^{87}\text{Rb}$ .

Uma das propriedades interessantes de potenciais não-Abelianos é a possibilidade de gerar monopolos magnéticos, como primeiro apontado por Moody, Shapere e Wilczek [61]. Com este intuito, vamos assumir uma arranjo ótico no qual os campos de luz laser que acoplam os níveis  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  são copropagantes e têm a mesma frequência e o mesmo momento angular orbital (se houver). Neste caso, a fase relativa entre esses campos é nula  $S_{12} = 0$ . Isto leva a  $S_{13} = S_{23} \equiv S$  e as expressões para o potencial vetor se simplificam a:

$$\mathbf{A} = \hbar \begin{pmatrix} \nabla S & -i \cos \theta \nabla \phi \\ i \cos \theta \nabla \phi & \cos^2 \theta \nabla S \end{pmatrix}.$$

As componentes da matriz  $2 \times 2$  do campo magnético efetivo podem ser facilmente calculadas e assumem a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11} &= 0, \\ \mathbf{B}_{12} &= i\hbar \text{sen} \theta e^{-iS} \nabla \theta \times \nabla \phi - i\hbar \cos \theta e^{-iS} \nabla S \times \nabla \phi (1 + \cos^2 \theta), \\ \mathbf{B}_{22} &= -2\hbar \cos \theta \text{sen} \theta \nabla \theta \times \nabla s. \end{aligned}$$

Agora vamos apresentar uma configuração específica de campos que leva a um monopolo magnético. Para isto, vamos considerar dois campos copropagantes e circularmente polarizados  $\Omega_{1,2}$  com momento angular orbital oposto  $\pm\hbar$  ao longo do eixo de propagação  $z$ , enquanto o terceiro campo  $\Omega_3$  se propaga na direção  $x$  e é polarizado linearmente ao longo do eixo  $y$  [59]. Mais precisamente, os dois primeiros feixes são preparados nos modos Laguerre-Gauss com momento angular orbital  $l = \pm 1$ , e o terceiro feixe é preparado na primeira ordem do modo Hermite-Gauss, de forma que:

$$\Omega_{1,2} = \Omega_0 \frac{\rho}{R} e^{i(kz \mp \phi)}, \quad (2.30)$$

$$\Omega_3 = \Omega_0 \frac{z}{R} e^{ik'x}. \quad (2.31)$$

Aqui  $\rho$  é o raio cilíndrico, e  $\phi$  é o ângulo azimutal. A intensidade total dos campos de luz laser (2.30) desaparece na origem que é um ponto singular.

O potencial vetor associado aos campos laser pode ser calculado usando a equação (2.29):

$$\mathbf{A} = -\hbar \frac{\cos \vartheta}{r \text{sen} \vartheta} \hat{e}_\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} (k \hat{e}_z - k' \hat{e}_x) \left[ (1 + \cos^2 \vartheta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos^2 \vartheta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right],$$

onde  $r$ ,  $\vartheta$  e  $\phi$  são coordenadas esféricas.

O primeiro termo proporcional a  $\sigma_x$  corresponde a um monopolo magnético de intensidade unitária na origem ( $r = 0$ ). Isto pode ser facilmente visto calculando o campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\hbar}{r^2} \hat{e}_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Os pontos indicam contribuições não-monopolares para o campo, as quais são proporcionais às matrizes de Pauli  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$ , e à matriz unitária.

## 2.6 Primeira Observação Experimental de um Campo de Calibre Geométrico Oticamente Induzido

A primeira observação experimental de um campo magnético geométrico por Lin, Compton, Jiménez-García *et al.* [9] foi na realidade baseada em um gradiente de dessintonização para transições óticas Raman ocorrendo entre vários sub-níveis fundamentais. Nesta seção, apresentamos as principais características deste experimento e as conectaremos com o formalismo geral discutido na seção 2.3.

O experimento de Lin, Compton, Jiménez-García *et al.* foi realizado com átomos de  $^{87}\text{Rb}$  no nível hiperfino  $F = 1$ . No processo, todos os três sub-níveis Zeeman  $|m_F\rangle$  com  $m_F = 0, \pm 1$  adquirem uma população considerável. Os átomos são iluminados por dois feixes com vetores de onda  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$ , os quais criam um acoplamento quase-ressonante Raman entre os sub-níveis Zeeman com  $\delta m_F = \pm 1$  [ver figura (2.4)]. O acoplamento ocorre via a absorção de um fóton em um feixe e a emissão estimulada de um fóton no outro feixe, acompanhado de uma mudança do momentum de  $\pm \mathbf{k}_d$ , onde a diferença de vetores de onda  $\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = k_d \hat{i}$  é escolhida ao longo do eixo  $x$ . Um ingrediente importante é a aplicação de um campo magnético real em adição aos feixes laser. O deslocamento Zeeman criado pelo campo magnético levanta a degenerescência dos sub-níveis  $m_F = 0, \pm 1$ . Isto possibilita um controle sobre a dessintonia de dois fótons  $\delta$ . Lin usou um campo magnético real inhomogêneo, fazendo a dessintonização de dois fótons adquirir uma dependência linear com a posição  $\delta = \delta'(y - y_0)$ , onde  $\delta' > 0$  é o gradiente de dessintonização. Este experimento pode ser analisado usando o formalismo geral adiabático apresentado na seção 2.3. Assumimos que os lasers de acoplamento podem ser considerados como ondas planas na escala de dimensão da nuvem atômica, assim o problema é translacionalmente invariante ao longo do eixo  $x$ . Portanto, o acoplamento de dois fótons  $\kappa$  induzido pelo par de lasers pode ser escrito como  $\kappa = \kappa^{(0)} e^{i\phi}$ , com  $\phi = \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} = k_d x$  sendo a fase do acoplamento Raman. A dessintonização de um único fóton  $\Delta$  com relação ao estado excitado da transição envolvida é muito maior do que as frequências de Rabi. Podemos então executar uma eliminação adiabática dos estados excitados para obter um Hamiltoniano

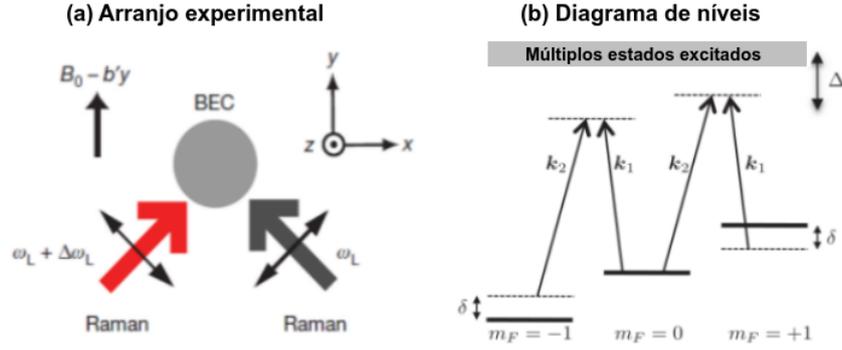


Figura 2.4: Resumo do experimento para a observação de campos magnéticos sintéticos [9]. a) O condensado de Bose-Einstein está em uma armadilha de dipolo em um campo magnético  $\mathbf{B} = (B_0 - b'y)\hat{j}$ . Dois feixes Raman propagando-se ao longo de  $\hat{i} \mp \hat{j}$  (polarizados linearmente ao longo de  $\hat{i} \pm \hat{j}$  possuem frequências  $\omega_L$  e  $\omega_L + \Delta\omega_L$ ). b) Esquema atômico usado por Lin *et al.*. Átomos de  $^{87}\text{Rb}$  com um estado fundamental de spin  $F = 1$  são colocados em um campo magnético externo que desloca os sub-níveis  $|m_F \pm 1\rangle$  (linhas tracejadas) em relação a  $|m_F = 0\rangle$ . Os átomos são iluminados por dois feixes laser com vetores de onda  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  que induzem um acoplamento ressonante entre os sub-níveis Zeeman, satisfazendo  $\Delta m_F = \pm 1$ . Um gradiente espacial de campo magnético externo induz um deslocamento adicional de  $|m_F \pm 1\rangle$  (linhas cheias). Isto cria uma dessintonia de dois fótons  $\delta$  que varia espacialmente, a qual permite gerar um potencial de calibre artificial. Note que a figura está fora de escala em relação a frequência (na prática  $\Delta \gg \delta$ ).

efetivo atuando sobre o conjunto de estados fundamentais. Mantendo apenas os termos relevantes, o Hamiltoniano de acoplamento  $H_0$  entre a luz e o átomo, escrito na base  $\{|m_F\rangle = -1, |m_F\rangle = 0, |m_F\rangle = +1\}$ , tem a seguinte forma:

$$H_0 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -2\delta & \kappa_1^* & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_2^* & 2\delta \end{pmatrix},$$

com  $\kappa_2 = \kappa_1^* = \kappa$ .

Nos concentramos no autoestado de  $H_0$  associado com o menor autovalor  $-\hbar[\delta^2 + (\kappa^{(0)})^2/2]^{1/2}$ :

$$|\chi\rangle = e^{i\phi} \cos^2 \frac{\theta}{2} |-1\rangle - \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{-i\phi} \frac{\text{sen}^2\theta}{2} |+1\rangle, \quad (2.32)$$

onde tomamos  $\text{tg}\theta = \kappa^{(0)}/\sqrt{2}\delta$ . O potencial vetor é agora dado por  $\mathbf{A} = \langle\chi|\nabla\chi\rangle = -\hbar\vec{k}_d \cos\theta$ . Assim, o campo magnético pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{B} = B_0 \mathcal{L}^{3/2}(y - y_0), \quad (2.33)$$

onde o comprimento característico contido na função Lorentziana  $\mathcal{L}$  é  $\ell_\kappa = \kappa^{(0)}/\sqrt{2}\delta'$ , e onde o valor de pico do campo magnético artificial é  $B_0 = \hbar k_d/\ell_\kappa$ . O potencial escalar toma a forma  $\Phi(y) \approx (\frac{\hbar^2 k_d^2}{4m}) \mathcal{L}(y - y_0)$ , onde assumimos  $k_d \ell_\kappa \gg 1$ .

De fato os átomos neutros sentem a presença de um campo magnético efetivo. Isto pode ser visto através da formação de vórtices [ver figura (2.5)] no caso em que um gradiente de dessintonização esteve presente no experimento acima discutido.

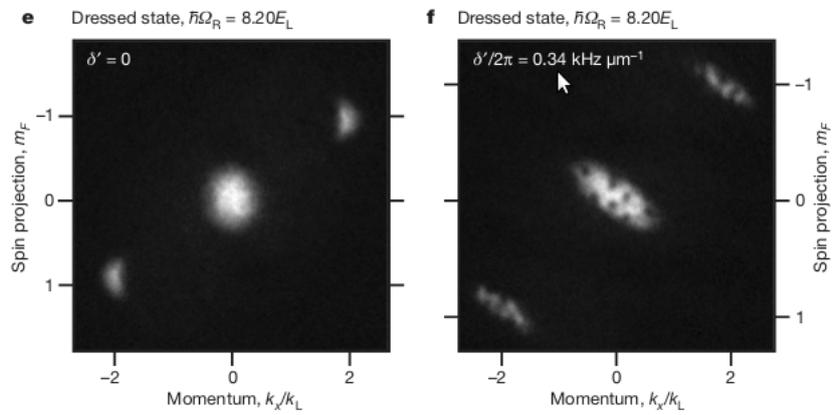


Figura 2.5: A formação de vórtices no experimento realizado por Lin *et al.* [9]. Na figura à esquerda, o gradiente de dessintonização é zero e não existem vórtices. Na figura da direita, o gradiente de dessintonização não é nulo. Os vórtices revelam que o campo magnético efetivo foi gerado.

## Capítulo 3

# Níveis de Landau e o Efeito de Haas van Alphen para um Gás de Elétrons Bidimensional

Física da matéria condensada é um dos ramos mais ativos e versáteis da física moderna que se desenvolveu na esteira da descoberta da mecânica quântica. Aborda problemas relativos às propriedades de materiais e, mais geralmente, sistemas com muitos graus de liberdade que vão de questões fundamentais até aplicações tecnológicas. Esta riqueza de temas, transformou a física da matéria condensada no maior subcampo da física. Neste contexto, o movimento de partículas carregadas em um plano e na presença de um campo magnético uniforme e perpendicular é de grande importância. Classicamente, a força magnética dá origem a uma aceleração perpendicular ao campo aplicado. Com isto, na ausência de colisões, as partículas percorrem órbitas circulares sobre o plano perpendicular ao campo magnético, com frequência angular  $\omega_c = qB/mc$ , conhecida como frequência de ciclotron [figura (3.1)]. Uma descrição quântica para este sistema foi formulada em 1930 pelo físico soviético Lev Landau [66]. Landau propôs que o movimento das partículas no plano perpendicular ao campo magnético é quantizado [figura (3.2)], o que resulta na quantização da energia eletrônica em níveis de Landau [67]. Os níveis de energia são fortemente degenerados no número quântico que corresponde ao centro do círculo de Larmor na mecânica clássica. O número de estados por unidade de área pertencente a um dado nível de Landau é igual à razão  $B/\phi_0$  entre a intensidade do campo magnético e o quanta de fluxo magnético  $\phi_0 = h/2e$ . Em outras palavras, cada estado carrega um quanta de fluxo magnético. A energia do movimento transversal de um elétron no  $n$ -ésimo nível Landau é igual a  $E_n = \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2})$ .

A quantização de Landau é responsável por um grande número de efeitos em física da matéria condensada, dentre os quais podemos citar o efeito de Haas van Alphen

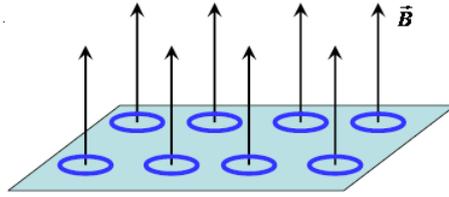


Figura 3.1: Ilustração do movimento clássico de partículas carregadas em um plano e submetidas a um campo magnético perpendicular.

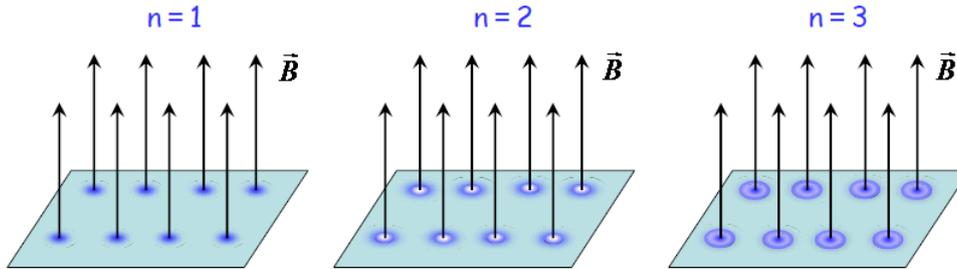


Figura 3.2: Ilustração do movimento quântico de partículas carregadas em um plano e submetidas a um campo magnético perpendicular.

(dHvA) [68], o efeito Shubnikov-de Haas [69] e o efeito Hall quântico [70]. Os dois primeiros efeitos citados anteriormente são decorrentes, respectivamente, de oscilações quânticas na magnetização e na resistividade de materiais metálicos em função do campo magnético aplicado. Estas oscilações, são observadas em metais cristalinos muito limpos submetidos a campos magnéticos intensos e em um regime de baixas temperaturas. Oscilações quânticas na magnetização foram previstas por Landau [66] e experimentalmente observadas pela primeira vez por de Haas e van Alphen [68] em 1930. Como demonstrado por Onsager em 1952, o período de uma oscilação dHvA está relacionado à seção transversal da superfície de Fermi normal à direção do campo aplicado [71]. Como uma consequência, os experimentos com oscilações dHvA se tornaram uma técnica extremamente precisa para mapear a superfície de Fermi através de medidas dos períodos de oscilação para várias direções do campo aplicado [72–74]. Além disso, oscilações magnéticas permitem extrair informações a respeito das massas e do percurso livre médio de quasipartículas, bem como do grau de correlações eletrônicas em vários sistemas eletrônicos fortemente correlacionados [75].

Este capítulo se destina ao estudo dos níveis de Landau e do efeito dHvA em sistemas eletrônicos bidimensionais. Iniciamos, com a derivação dos níveis de Landau. Em seguida, abordamos a descrição semi-clássica das órbitas dos elétrons na presença de um campo magnético uniforme. Por fim, descrevemos de maneira detalhada o efeito dHvA.

### 3.1 Níveis de Landau

Para obtermos os níveis de Landau basta considerarmos o movimento de partículas não interagentes com carga  $q$  confinadas no plano  $xy$  e sujeitas a um campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$  ao longo do eixo  $z$ . O Hamiltoniano deste sistema é:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}} \right)^2, \quad (3.1)$$

onde  $\hat{\mathbf{p}}$  é operador momento canônico e  $\hat{\mathbf{A}}$  é o potencial vetor eletromagnético, o qual está relacionado com o campo magnético através da expressão usual (derivada da teoria eletromagnética):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}. \quad (3.2)$$

Existe uma liberdade na escolha do potencial vetor para um dado campo magnético. O Hamiltoniano é invariante de calibre, o que significa que adicionando um gradiente de um campo escalar à  $\hat{\mathbf{A}}$  se muda a fase global da função de onda por uma quantidade correspondente a um campo escalar. Desta forma, as propriedades físicas não são influenciadas por uma escolha específica do calibre. Em geral, para simplificação dos cálculos, se escolhe o calibre de Landau que é dado por:

$$\hat{\mathbf{A}} = Bx\hat{y}, \quad (3.3)$$

onde  $B = |\mathbf{B}|$  e  $\hat{y}$  é a componente  $y$  do operador posição. Neste calibre, o Hamiltoniano toma a forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2m} (\hat{p}_y - qBx\hat{y})^2. \quad (3.4)$$

A equação de Schrödinger correspondente pode ser expressa como:

$$\hat{H}\psi(x, y) = \left[ \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2m} (\hat{p}_y^2 - 2qBx\hat{p}_y + (qBx)^2) \right] \psi(x, y) = E\psi(x, y). \quad (3.5)$$

O operador  $\hat{p}_y$  comuta com o Hamiltoniano  $\hat{H}$ , o que nos permite escrever todas as autofunções de  $\hat{H}$  como autofunções de  $\hat{p}_y$ :

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x). \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) na equação (4.22), ficamos com:

$$\hat{H}\psi(x) = \left[ \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 + \frac{1}{2m} (qB)^2 \left( x - \frac{c\hbar k_y}{qB} \right)^2 \right] \psi(x). \quad (3.7)$$

A equação de Schrödinger pode ser escrita em uma forma ainda mais familiar se tomarmos  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ , que é a frequência cyclotron, e  $x_0 = \frac{\hbar k_y}{qB}$ , produzindo:

$$\hat{H}\psi(x) = \left[ \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 + \frac{m\omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 \right]. \quad (3.8)$$

Esta é exatamente a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico quântico, com o mínimo do potencial deslocado na coordenada espacial  $x$  por  $x_0 = \frac{\hbar k_y}{qB}$ . Note que uma translação do potencial do oscilador hârmônico não afeta as energias. Assim, as energias deste sistema são idênticas àquelas do oscilador hârmônico quântico padrão, a saber:

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.9)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Com relação as funções de onda, elas são formadas pelo produto de autoestados do momento na direção  $y$  por autoestados do oscilador harmônico  $|\phi_n\rangle$  deslocados por uma quantidade de  $x_0$  na direção  $x$ , logo:

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} \phi_n(x - x_0). \quad (3.10)$$

Em resumo, o estado de um elétron é caracterizado pelos números quânticos  $n$  e  $k_y$ . Cada conjunto de funções de onda com o mesmo valor de  $n$  é chamado de um nível de Landau. Efeitos da quantização de Landau são observados apenas quando a energia térmica é menor do que a energia de separação entre os níveis energia,  $kT \ll \hbar\omega_c$ , o que significa baixas temperaturas e campos magnéticos intensos.

Como o espectro de energia não depende explicitamente do número quântico  $k_y$ , os níveis de Landau são fortemente degenerados. Por exemplo, se considerarmos elétrons confinados em um retângulo de área  $L_x L_y$ , condições periódicas de contorno devem ser levadas em conta, e desta forma  $k_y$  assume os seguintes valores:

$$k_y = \frac{2\pi n}{L_y}, \quad (3.11)$$

onde  $n$  é um inteiro. Os valores permitidos de  $n$  são adicionalmente restritos pela condição de que o centro do oscilador,  $x_0$ , deve estar fisicamente dentro do sistema, ou seja,  $0 \leq x_0 \leq L_x$ . Isto resulta em uma faixa limitada para  $n$  dada por:

$$0 \leq n \leq \frac{m\omega_c L_x L_y}{2\pi\hbar}. \quad (3.12)$$

Então o número máximo de estados em um nível de Landau, que é denominado de dege-

nerescência ( $D$ ) é dado por:

$$D = \frac{BA}{h/q} = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad (3.13)$$

onde  $\phi = BA$  é o fluxo magnético através do sistema (de área  $A = L_x L_y$ ) e  $\phi_0 = h/q$  é o quanta de fluxo magnético.

Podemos escrever também a degenerescência dos níveis de Landau em função do comprimento magnético  $l_B = \sqrt{\hbar/qB}$ , na forma:

$$D = \frac{A}{2\pi l_B^2}. \quad (3.14)$$

### 3.1.1 Quantização Semiclássica das Órbitas em um Campo Magnético

Efeitos quânticos se tornam importantes quando a distância entre os níveis de energia se torna comparável à energia térmica. Em campos magnéticos de  $B \sim 1$  T, a diferença de energia  $\hbar\omega_c$  é da ordem de  $10^{-4}$  eV, o que corresponde a uma energia térmica em 1 kelvin. Portanto, a natureza quantizada da energia precisa ser levada em conta em temperaturas baixas para tais valores dos campos. Uma vez que o espectro em campo magnético não pode ser determinado exatamente para uma relação de dispersão geral, aproximações adicionais são necessárias. É útil ter em mente que em metais a energia de Fermi é da ordem de 1 eV,  $\hbar\omega_c/\epsilon_F \sim 10^{-4}$ , e o número de níveis de Landau de interesse é alto, da ordem de  $10^4$ . De acordo com a proposição de Onsager [71], em tais circunstâncias a quantização semiclássica de Bohr-Sommerfeld pode ser usada para calcular os níveis de Landau de elétrons se movendo em um potencial periódico de um metal cristalino. No restante desta seção, vamos apresentar a abordagem utilizada por Onsager para quantização das órbitas de elétrons que se movem em um campo magnético. A compreensão desta quantização é essencial para descrição do efeito dHvA.

O momento linear de uma partícula em um campo magnético é a soma de duas partes, o momento cinético  $\mathbf{p}_{cin} = m\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}$  e o momento do campo  $\mathbf{p}_{cam} = q\mathbf{A}$ , onde  $q$  é a carga. Como já mencionado, o potencial vetor é relacionado com o campo magnético via a expressão  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . O momento total é:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{cin} + \mathbf{p}_{cam} = \hbar\mathbf{k} + q\mathbf{A}. \quad (3.15)$$

Seguindo a abordagem semiclássica de Onsager, assumimos que as órbitas em um campo magnético são quantizadas pela relação de Bohr-Sommerfeld:

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma)2\pi\hbar, \quad (3.16)$$

onde  $n$  é um inteiro e  $\gamma$  é um fator de correção de fase, que para o elétrons livres tem o

valor de  $\frac{1}{2}$ .

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.16), ficamos com:

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} + q \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma)2\pi\hbar. \quad (3.17)$$

A equação para o movimento de uma partícula de carga  $q$  em um campo magnético é:

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (3.18)$$

Isto significa que a carga no vetor  $\mathbf{k}$  é normal a direção do campo e também é normal a  $\mathbf{v}$  (normal a superfície de energia) [figura (3.3)]. Assim,  $\mathbf{k}$  deve ser confinado à órbita definida pela interseção da superfície de Fermi com a normal a  $\mathbf{B}$ . Integrando a equação

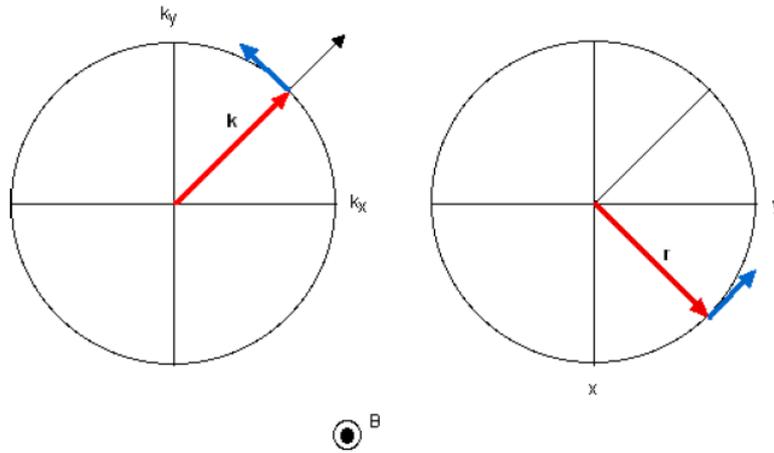


Figura 3.3: O movimento orbital do elétron na presença de um campo magnético  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}$  é direcionado para fora da página) no espaço dos  $\mathbf{k}$  é similar ao do espaço dos  $\mathbf{r}$ , mas escalonado pelo fator  $\eta$  e com uma diferença de fase  $-\frac{\pi}{2}$ . Note que assumimos  $\mathbf{r}_0 = 0$ .

(3.18) com relação ao tempo, temos:

$$\hbar \mathbf{k} = q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{B} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$  é o vetor posição do centro da órbita, com

$$x - x_0 = \frac{\hbar}{qB} k_y, y - y_0 = -\frac{\hbar}{qB} k_x. \quad (3.20)$$

No plano complexo nós temos a relação:

$$(x - x_0) + i(y - y_0) = \frac{\hbar}{qB} e^{-\frac{i\pi}{2}} (k_x + ik_y). \quad (3.21)$$

Desta forma, a magnitude do vetor posição  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$  do elétron se relaciona com o vetor de onda  $\mathbf{k} = (k_x, ik_y)$  através de um fator de escala  $\eta = l_B^2 = \frac{\hbar}{qB}$ . A fase do

vetor posição é diferente da fase do vetor de onda por  $-\frac{\pi}{2}$  para o elétron na superfície de Fermi.  $l_B$  é o comprimento magnético.

Tomando  $\mathbf{r}_0 = 0$  na equação (3.19), temos que a primeira integral de linha na equação (3.17) é

$$\oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = q \oint \mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = -q\mathbf{B} \cdot \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = -2q\Phi, \quad (3.22)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo magnético contido na órbita no espaço real. É importante explicitar que usamos a relação:

$$\oint (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = 2A, \quad (3.23)$$

com  $A$  sendo a área contida pela órbita. A outra integral de linha na equação (3.17) é:

$$q \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = q \oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = q \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = q\Phi, \quad (3.24)$$

pelo teorema de Stokes. Aqui,  $d\mathbf{a}$  é o elemento de área no espaço real. A integral de linha do momento na equação (3.17) toma a seguinte forma:

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = q\Phi - 2q\Phi = -q\Phi = (n + \gamma)2\pi\hbar. \quad (3.25)$$

A partir da equação (3.25) se conclui que a órbita de um elétron é quantizada de tal forma que o fluxo através dela é:

$$\Phi_n = (n + \gamma) \frac{2\pi\hbar}{q} = 2\Phi_0(n + \gamma), \quad (3.26)$$

onde  $\Phi_0$  é o quanta de fluxo magnético.

Para o estudo do efeito de Haas van Alphen, que será realizado na próxima seção, é necessário que determinemos a área da órbita no espaço dos  $\mathbf{k}$ 's. Na equação (3.26) obtemos o fluxo através da órbita no espaço real. A partir da equação (3.18), sabemos que o elemento de linha  $\Delta r$  no plano normal à  $\mathbf{B}$  está relacionado com  $\Delta k$  através de  $\Delta r = \hbar/qB\Delta k$ , assim, a área  $S_n$  no espaço  $\mathbf{k}$  está relacionada com a área da órbita no espaço  $\mathbf{r}$  por:

$$A(\mathbf{r}) = \left( \frac{\hbar}{qB} \right)^2 S_n(\mathbf{k}). \quad (3.27)$$

O fluxo quantizado pode ser escrito como:

$$\Phi_n = \left( \frac{\hbar}{q} \right)^2 \frac{1}{B} S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi\hbar}{q} = 2\Phi_0(n + \gamma). \quad (3.28)$$

Desta forma, a área de uma órbita no espaço  $\mathbf{k}$  satisfará a equação

$$S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi q}{\hbar} B. \quad (3.29)$$

Em experimentos com superfície de Fermi estamos interessados no incremento  $\Delta B$  para o qual duas órbitas sucessivas,  $n$  e  $n+1$ , tem a mesma área no espaço dos  $\mathbf{k}'$ s na superfície de Fermi. A partir da equação (3.29), as áreas são iguais quando:

$$S\left(\frac{1}{B_n} - \frac{1}{B_{n+1}}\right) = \frac{2\pi q}{\hbar} \quad (3.30)$$

Finalmente, chegamos ao resultado importante de que incrementos iguais de  $\frac{1}{B}$  reproduzem órbitas similares. Esta periodicidade em  $\frac{1}{B}$  é a característica marcante dos efeitos oscilatórios magnéticos em metais a baixas temperaturas: magnetização, resistividade e calor específico.

A população das órbitas próximo ou na superfície de Fermi oscila quando  $B$  é alterado, causando uma grande variedade de efeitos. O resultado da equação (3.29) é independente do calibre do potencial vetor usado na expressão (3.15) para o momento, isto é,  $\mathbf{p}$  não é um invariante de calibre, porém  $S_n$  é.

## 3.2 O efeito de Haas van Alphen para um Gás de Elétons Bidimensional

Em física do estado sólido, o efeito de Haas-van Alphen (dHvA) ocorre em sistemas metálicos muito limpos expostos a campos magnéticos intensos, geralmente em temperaturas muito baixas. Neste regime, a energia eletrônica no metal é quantizada em níveis de Landau, o que resulta em um comportamento oscilatório da magnetização em função da intensidade do campo magnético. As oscilações dHvA são ferramentas poderosas para a observação da superfície de Fermi em condutores. Se por um lado, a teoria de Lifshitz-Kosevich (LK) do efeito dHvA [76] para metais tridimensionais (3D) tem sido bem verificada pelos experimentos, por outro lado, não existe uma teoria unanimemente reconhecida e usada para o efeito dHvA em materiais bidimensionais (2D) ou quasi 2D. A teoria LK não pode ser aplicada a sistemas eletrônicos bidimensionais porque ela é construída levando em conta a existência de uma dispersão 3D para os elétrons de condução. A primeira teoria sobre o efeito dHvA em sistemas 2D foi proposta por Peierls [77] em um regime de  $T = 0$ . Schoenberg [78] introduziu uma expressão para as oscilações magnéticas em metais 2D, a qual incluiu o efeito de temperatura finita e do espalhamento por impurezas (diferentes formas de alargamento do nível de Landau). A partir dos estudos de Schoenberg e outros autores [79, 80], foi largamente aceito que existem duas características fundamentais do efeito dHvA em 2D que o diferem do caso tridimensional: (i) o perfil (aproximadamente) dente de serra das oscilações magnéticas em (temperaturas suficientemente baixas)  $T = 0$  e (ii) a forte dependência do potencial químico em relação ao campo magnético.

Nesta seção, faremos uma descrição do efeito dHvA para um sistema eletrônico bidimensional em um regime de  $T = 0$  e negligenciando o spin do elétron [figura (3.4)]. A análise que se segue tem como objetivo facilitar a compreensão do análogo atômico do efeito dHvA em 2D, que será proposto no próximo capítulo desta tese. Da seção anterior,

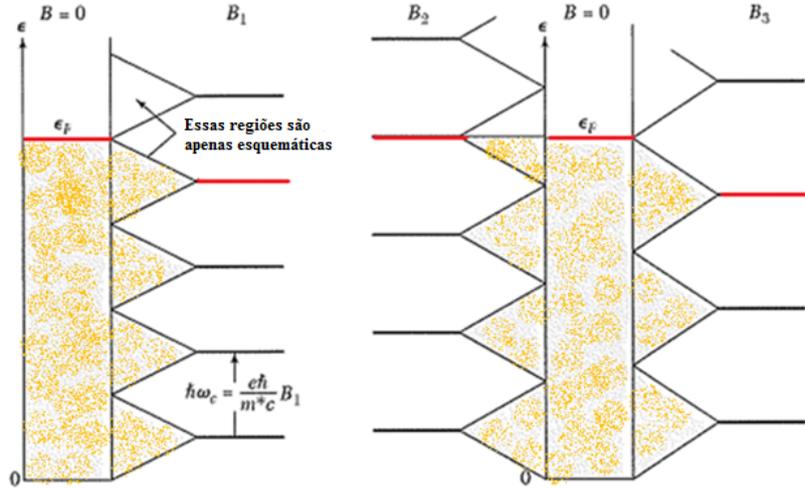


Figura 3.4: Explicação do efeito dHvA para um gás bidimensional de elétrons livres na presença de um campo magnético [74]. Os orbitais ocupados do mar de Fermi na ausência de um campo magnético são sombreados em  $a$  e  $d$ . Os níveis de energia em um campo magnético são mostrados em  $b$ ,  $c$  e  $e$ . Em  $b$ , o campo tem um valor  $B_1$ , tal que a energia total dos elétrons é a mesma que na ausência de um campo magnético: assim como, vários elétrons têm sua energia elevada, outros têm sua energia diminuída pela quantização orbital no campo magnético  $B_1$ . Quando aumentamos a intensidade do campo para  $B_2$ , a energia eletrônica total é elevada porque os elétrons superiores têm sua energia aumentada. Em  $e$  para o campo  $B_3$  a energia é novamente igual à do campo  $B = 0$ . A energia total é mínima em pontos tais como  $B_1, B_3, B_5\dots$  e é máxima em pontos tais como  $B_2, B_4\dots$

sabemos que a área de uma órbita no espaço  $k_x, k_y$  é quantizada como na equação (3.29). A área entre sucessivas órbitas é:

$$\Delta S = S_n - S_{n-1} = \frac{2\pi qB}{\hbar}. \quad (3.31)$$

A área no espaço dos  $k$ 's ocupado por um único orbital é  $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ , negligenciando o spin, para um espécime quadrado do lado  $L$ . Usando a equação (3.31) encontramos que o número de orbitais de elétrons livres que se fundem em um único nível magnético é:

$$D(B) = \left(\frac{2\pi qB}{\hbar}\right) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2, \quad (3.32)$$

onde  $\rho = \left(\frac{qL^2}{2\pi\hbar}\right)$ , como nas figuras (3.5) e (3.6). Como já mencionado, tal nível magnético é chamada de nível de Landau. A dependência do nível de Fermi em relação a  $B$  é

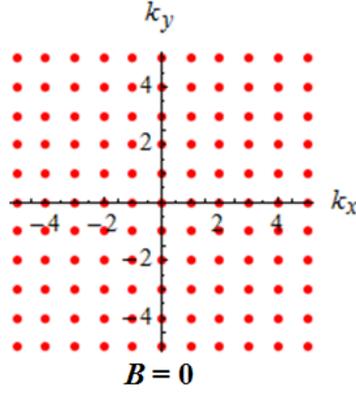


Figura 3.5: Orbitais eletrônicos permitidos em duas dimensões na ausência de um campo magnético [74].

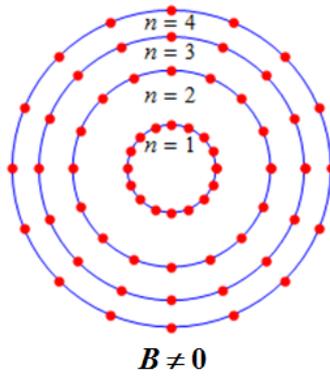


Figura 3.6: Em um campo magnético os pontos que representam os orbitais de elétrons livres podem ser vistos como restritos a círculos no plano  $k_x k_y$  [74]. Os sucessivos círculos correspondem aos sucessivos valores do número quântico  $n$  na energia  $\hbar\omega_c (n - \frac{1}{2})$ . Note que consideramos que  $n$  começa a ser contado a partir de 1 e não de zero. A área entre os círculos sucessivos é  $\pi\Delta(k^2) = 2\pi k(\Delta k) = (\frac{2\pi m}{\hbar^2})\Delta E = \frac{2\pi m\omega_c}{\hbar} = \frac{2\pi qB}{\hbar}$ . A posição angular dos pontos não tem nenhum significado. O número de orbitais em um círculo é constante e igual a área entre círculos sucessivos vezes o número de orbitais por área em figura (3.5), ou  $(\frac{2\pi qB}{\hbar}) (\frac{L}{2\pi})^2 = \frac{L^2 qB}{2\pi\hbar}$ , negligenciando o spin do elétron.

dramática. Para um sistema de  $N$  elétrons, à temperatura de zero absoluto, os níveis de Landau são completamente preenchidos até um número quântico magnético que nós identificamos por  $s$ , onde  $s$  é um inteiro positivo. Orbitais no próximo nível mais elevado  $s + 1$  serão parcialmente preenchido por alguns elétrons. O nível de Fermi está no nível de Landau  $s + 1$  se existem elétrons neste nível. Quando se aumenta a intensidade do campo magnético os elétrons se movem para níveis menos energéticos. Quando o nível  $s + 1$  fica vazio, o nível de Fermi se move abruptamente para o próximo nível de Landau menos energético  $s$ .

A transferência de elétrons para os níveis de Landau menos energéticos ocorre porque a degenerescência dos níveis  $D$  aumenta quando  $B$  cresce, como mostrado na figura (3.7). Quando  $B$  é várrido existem valores de  $B$  em que o número quântico do nível superior

cheio diminui abruptamente por uma unidade. Nos campos magnéticos críticos rotulados por  $B_s$  nenhum nível de Landau está parcialmente ocupado no zero absoluto, de forma que:

$$s\rho B_s = N. \quad (3.33)$$

O número de níveis ocupados vezes a degenerescência em  $B_s$  deve ser igual ao número de elétrons  $N$ .

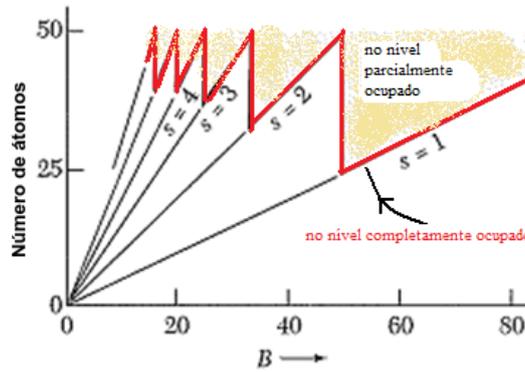


Figura 3.7: A linha cheia indica o número de partículas em níveis que são completamente ocupados em um campo magnético  $B$ , para um sistema bidimensional com  $N = 50$  e  $\rho = 0,5$  [74]. A área sombreada indica o número de partículas em níveis parcialmente ocupados. O valor de  $s$  denota o número quântico do nível de Landau mais energético que é completamente preenchido. Por exemplo, em  $B = 40$  nós temos  $s = 2$ . Os níveis  $n = 1$  e  $n = 2$  estão preenchidos e existem 10 partículas no nível  $n = 3$ . Para  $B = 50$  o nível  $n = 3$  está vazio.

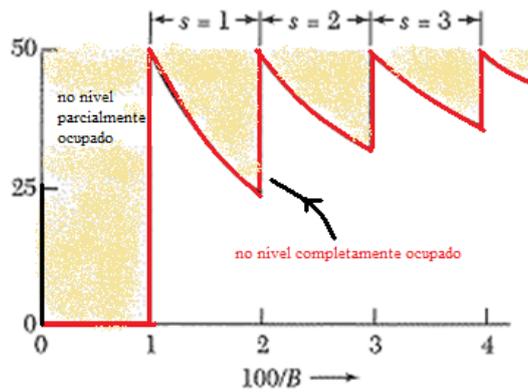


Figura 3.8: A periodicidade em  $\frac{1}{B}$  é evidente quando os mesmos pontos da figura (3.7) são plotados em função  $\frac{1}{B}$  [74].

Para mostrar a periodicidade da energia em função de  $B$  usamos o resultado de que a energia do nível de Landau com número quântico magnético  $n$  é  $E_n = \hbar\omega_c \left(n - \frac{1}{2}\right)$  (nesse caso, por conveniência contamos o número quântico a partir de  $n = 1$  ao invés de  $n = 0$ ), onde  $\omega_c = qB/m$  é a frequência ciclotron.

A energia total dos elétrons nos níveis de Landau que são completamente ocupados é:

$$E_{cc} = \sum_{n=1}^s \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c D = D \hbar \omega_c \left[ \frac{1}{2} s(s+1) - \frac{1}{2} s \right] = \frac{1}{2} D \hbar \omega_c s^2, \quad (3.34)$$

onde  $D$  é o número de elétrons em cada nível. Lembrando que nesse caso  $N = sD$ , temos:

$$E_{cc} = \frac{1}{2} D \hbar \omega_c \left[ \frac{N}{D} \right]^2. \quad (3.35)$$

A energia total dos elétrons no nível parcialmente ocupado  $s+1$  é:

$$E_{pc} = (N - sD) \hbar \omega_c \left(s + \frac{1}{2}\right), \quad (3.36)$$

onde  $sD$  é o número de elétrons nos níveis inferiores cheios. A energia total dos  $N$  elétrons é a soma das equações (3.35) e (3.36), assim:

$$E_T = E_{cc} + E_{pc} = \frac{1}{2} D \hbar \omega_c s^2 + (N - sD) \hbar \omega_c \left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \hbar \omega_c [N(2s+1) - Ds(s+1)];$$

$$E_T = \frac{1}{2} \hbar \omega_c \frac{N^2}{D} \left[ \frac{D}{N} (2s+1) - \left(\frac{D}{N}\right)^2 s(s+1) \right] = \frac{q \hbar N^2}{2m c \rho} \left[ \frac{D}{N} (2s+1) - \left(\frac{D}{N}\right)^2 s(s+1) \right];$$

$$E_T = \frac{q \hbar N^2}{2m c \rho} \left[ \frac{B}{B_s} + \frac{B}{B_{s+1}} - \frac{B}{B_s} \frac{B}{B_{s+1}} \right] = \frac{q \hbar N^2}{2m c \rho} \left[ 1 - \left(1 - \frac{B}{B_s}\right) \left(1 - \frac{B}{B_{s+1}}\right) \right], \quad (3.37)$$

para  $\frac{1}{B_s} \leq \frac{1}{B} \leq \frac{1}{B_{s+1}}$ , onde  $\frac{D}{N} = \frac{\rho B}{\rho s B_s} = \frac{B}{s B_s} = \frac{B}{(s+1) B_{s+1}}$  e  $\frac{B}{B_s} = \frac{s}{(N/\rho B)}$ . Como ilustrado na figura (3.9), a energia total possui uma dependência quadrática com o inverso do campo magnético em cada período de oscilação dHvA. A magnetização de um sistema à temperatura de zero absoluto é dada por  $M(B) = -\frac{\partial E}{\partial B}$ , então temos que:

$$M = -\frac{q \hbar N^2}{2m c \rho} \left[ \left(1 - \frac{B}{B_s}\right) \frac{1}{B_{s+1}} + \left(1 - \frac{B}{B_{s+1}}\right) \frac{1}{B_s} \right], \quad (3.38)$$

e ainda que

$$M = -\frac{q \hbar N^2}{2m c \rho} \left[ \frac{1}{B_s} + \frac{1}{B_{s+1}} - \frac{2B}{B_s B_{s+1}} \right], \quad (3.39)$$

para  $\frac{1}{B_s} \leq \frac{1}{B} \leq \frac{1}{B_{s+1}}$ . Conforme mostrado na figura (3.10), a magnetização é uma função oscilatória de  $\frac{1}{B}$ . Esta magnetização oscilatória do gás de Fermi à baixas temperaturas é o efeito de Haas van Alphen. A magnetização possui um perfil dente de serra, sendo sempre linear em  $B$ , exceto nos pontos onde um número inteiro de níveis de Landau estão ocupados e o nível de Landau superior começa a ser preenchido fazendo com que  $s$  salte

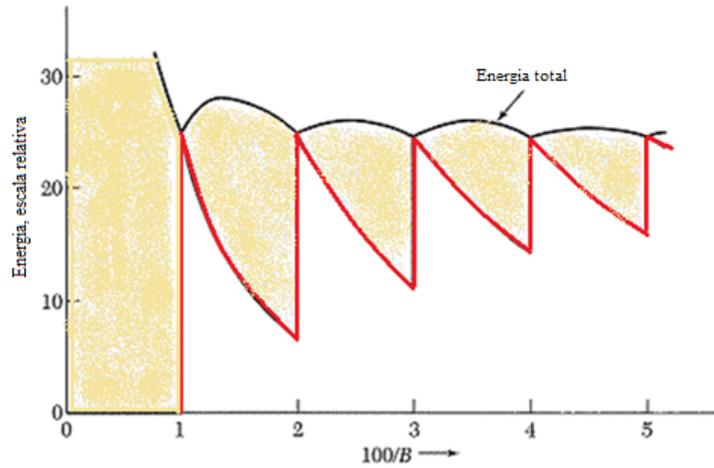


Figura 3.9: A curva superior é a energia eletrônica total em função de  $1/B$  [74]. As oscilações na energia  $E$  podem ser detectadas através de medidas do momento magnético, dado por  $-\frac{\partial E}{\partial B}$ . As propriedades térmicas e de transporte do metal também oscilam quando níveis orbitais sucessivos cortam o nível de Fermi a medida que a intensidade do campo aumenta. A região sombreada na figura dá a contribuição para a energia dos níveis que estão apenas parcialmente ocupados. Os parâmetros para a figura são os mesmos da figura (3.8).

de uma unidade. A magnetização nesses pontos salta por  $\approx E_F/\phi_0$ .

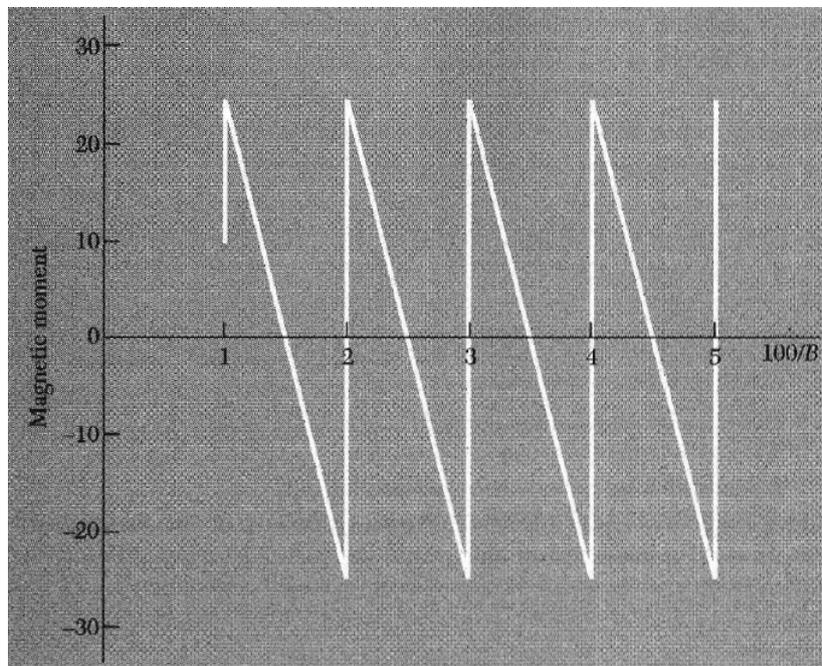


Figura 3.10: À temperatura de zero absoluto a magnetização (ou momento magnético "magnetic moment") é dado por  $-\frac{\partial E}{\partial B}$  [74]. A energia plotada na figura (3.9) leva a oscilações na magnetização como função de  $1/B$ . Em amostras com impurezas as oscilações são borradas, em parte porque os níveis de energia não são mais bem definidos.

A partir da equação (3.30), vemos que as oscilações ocorrem em intervalos iguais de

$\frac{1}{B}$ , tal que:

$$\Delta \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi q}{\hbar c S}, \quad (3.40)$$

onde  $S$  é a área mais externa da superfície de Fermi normal à direção de  $B$ .

A partir de medidas de  $\Delta \left( \frac{1}{B} \right)$ , deduzimos as correspondentes áreas mais externas  $S$  para diferentes direções do campo  $B$ , assim muito por ser inferido sobre a forma e o tamanho da superfície de Fermi. Para um sistema bidimensional, a superfície de Fermi tem obviamente a forma de um círculo de Fermi, conforme apresentado na figura (3.11). É evidente que o modelo que usamos para descrever o efeito dHvA é simplificado,

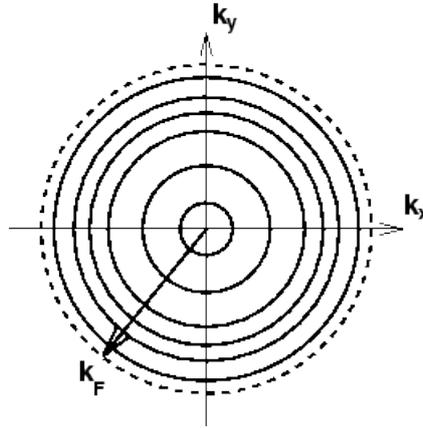


Figura 3.11: Os círculos sólidos são as órbitas semi-clássicas dos elétrons livres em 2D na presença de um campo magnético. Cada círculo corresponde a um nível de Landau. Os elétrons seguem órbitas em torno desses círculos com período  $T = 2\pi/\omega_c$ , onde  $\omega_c$  é a frequência cyclotron. Quando a intensidade do campo é aumentada o raio das órbitas cresce e as mesmas "saltam para fora" do círculo de Fermi, denotado pela linha tracejada. Isto leva ao comportamento oscilatório da energia e magnetização.

pois para descrever experimentos reais temos que levar em conta a temperatura finita, o alargamento dos níveis de Landau, a quebra da degenerescência de spin, e provavelmente outros fatores. No caso de uma descrição tridimensional, teríamos apenas que multiplicar a função de onda 2D por ondas planas  $e^{ik_z z}$ , onde o campo magnético é paralelo ao eixo  $z$ . Em temperaturas finitas, as oscilações na energia serão fortemente distorcidas se  $k_B T \gg \hbar \omega_c$ , devido ao fato de que vários níveis de Landau serão parcialmente ocupados. Assim, a fim de observarmos as oscilações dHvA é necessário que:

$$\hbar \omega_c = \frac{e\hbar}{mc} H \gg k_B T, \quad (3.41)$$

o que exige campos intensos e temperatura muito baixas, da ordem de alguns  $K$ .

É importante comentar também que se existirem impurezas no sistema metálico, os estados eletrônicos terão um tempo de vida finito,  $\tau$ , o que alargará os níveis de um montante  $\hbar/\tau$ . No caso do alargamento dos níveis ser maior do que a separação entre eles, haverá uma forte distorção nas oscilações dHvA. Portanto, para que as oscilações

sejam observadas é necessário também que se obedeça a uma segunda condição

$$\omega_c \tau = \frac{eH}{mc} \tau \gg 1, \quad (3.42)$$

o que exige amostras muito limpas.

## Capítulo 4

# Níveis de Landau e Efeitos Associados para um Gás Atômico Ultrafrio Bidimensional

Átomos ultrafrios transformaram-se em uma poderosa plataforma experimental para estudar uma ampla gama de fenômenos oriundos da física da matéria condensada, incluindo, por exemplo, níveis de Landau e efeito Hall quântico [81]. A este respeito, a formação de níveis de Landau exige a geração de um campo magnético efetivo. Estes campos sintéticos podem ser implementado para átomos neutros em armadilhas girantes [82] ou usando métodos óticamente induzidos [83–85]. Em armadilhas girantes bidimensionais, quando a frequência de rotação se aproxima da frequência de aprisionamento, ou seja, no limite de rápida rotação, os átomos neutros se comportam como partículas carregadas que se movem em um campo magnético uniforme Abeliano. Por lado outro, nos métodos por indução ótica, potenciais de calibre Abelianos e/ou não-Abelianos podem ser criados através da ação de campos lasers em átomos com estrutura eletrônica do tipo  $\Lambda$  [87] ou *tripod* [59, 60].

Uma plethora de efeitos para átomos frios sujeitos a campos de calibre sintéticos têm sido alvo de recentes investigações [88–94]. Em particular, os níveis Landau têm atraído um crescente interesse [95–101]. No caso de um campo de calibre Abeliano, o espectro de energia da partícula organiza-se em níveis de Landau análogos ao caso eletrônico. Por exemplo, níveis de Landau degenerados foram propostos para átomos do tipo  $\Lambda$  interagindo com dois feixes de luz contendo momentum angular orbital [95, 96].

Por outro lado, se um termo não-Abeliano é adicionado a um campo de campo de calibre Abeliano, o acoplamento entre os graus de liberdade internos quebra a degenerescência dos níveis de Landau [97]. Um estudo feito por A. Jacob e colaboradores [98], mostrou como efeitos puramente não-Abelianos levam à eventual destruição da degeneres-

cência dos níveis de Landau e a fortes distorções no efeito de Haas van Alphen. Os níveis de Landau também têm sido recentemente investigados para átomos de frios contidos de uma cavidade Fabry-Perot [102].

Neste capítulo, apresentamos o arranjo experimental que leva ao surgimento de níveis de Landau em um gás ultrafrio bidimensional de  $^{87}\text{Rb}$ . Utilizamos a configuração de níveis de energia do tipo tripod. Apresentamos o análogo atômico do efeito de Haas van Alphen para um sistema eletrônico bidimensional. Isto é, o surgimento de oscilações da energia e de sua derivada como função da intensidade do campo magnético efetivo. Mostramos, que para uma configuração apropriada de feixes de luz laser, podemos criar um potencial de confinamento lateral, em adição ao potencial de Landau, o que resulta na quebra de degenerescência dos níveis de energia. Isto ocorre devido à dependência explícita do espectro de energia com relação ao momento atômico. Mostramos também que, quando consideramos condições periódicas de contorno sobre a nuvem atômica, o momento é quantizado e surge uma degenerescência residual no sistema. Finalizando o capítulo, propomos um arranjo experimental para a observação de efeito spin Hall em um gás quântico bidimensional formado por átomos do tipo tripod.

## 4.1 Níveis de Landau Degenerados para Átomos Ultrafrios Tipo-Tripod na Presença de um Campo de Calibre Abelianano $U(1) \times U(1)$

Nesta seção, propomos um arranjo experimental para geração de níveis de Landau degenerados em gás bidimensional de átomos de  $^{87}\text{Rb}$  ultrafrios do tipo tripod em campo de calibre  $U(1) \times U(1)$  [103]. Mostramos que o espectro de energia deste sistema atômico possui uma estrutura similar ao do sistema eletrônico ordinário. Estimamos a degenerescência dos níveis de energia em função do campo magnético efetivo. A determinação desta degenerescência é essencial para o estudo dos vários efeitos dependentes da quantização de Landau. Além disso, discutimos a respeito das condições experimentais para se atingir o regime em que todos átomos populam apenas o nível de menor energia.

Como ponto de partida, consideramos um gás atômico bidimensional (no plano  $x - y$ ) [40, 41], com cada átomo possuindo uma estrutura tripod [59, 60] e interagindo com três feixes de luz laser, como ilustrado na figura (4.1). Para a obtenção dos níveis de Landau degenerados, escolhemos uma configuração específica dos campos laser caracterizados pelas fases  $S_1 = \kappa x/2$ ,  $S_2 = -3\kappa x/2$ ,  $S_3 = -\kappa x/2$  [conforme mostrado na figura (4.1)] e pelos ângulos  $\phi = \pi/4$ ,  $\theta = \arccos(\alpha y) \in [0, \pi]$ , com  $\alpha$  sendo um parâmetro do sistema que está associado com a intensidade relativa dos feixes laser na nuvem atômica. As

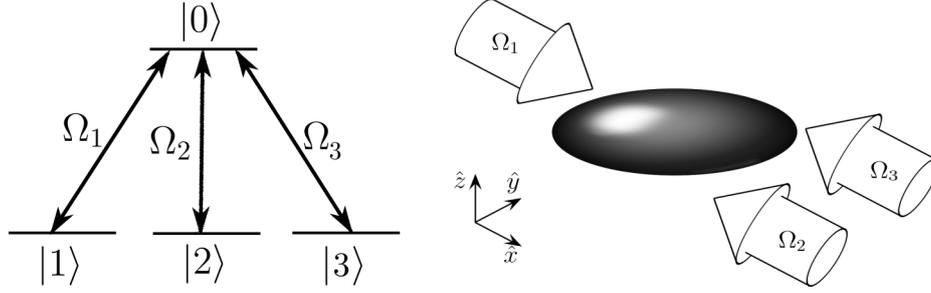


Figura 4.1: Ilustração esquemática do esquema tripod e da configuração de lasers para observação dos níveis de Landau.

frequências de Rabi são então dadas por:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega \text{sen}\theta e^{i\kappa x/2}, \\ \Omega_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega \text{sen}\theta e^{-i3\kappa x/2}, \\ \Omega_3 &= \Omega \cos\theta e^{-i\kappa x/2}.\end{aligned}$$

Os correspondentes estados escuros são:

$$\begin{aligned}|D_1\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-i\kappa x}|1\rangle - e^{i\kappa x}|2\rangle), \\ |D_2\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta(e^{-i\kappa x}|1\rangle + e^{i\kappa x}|2\rangle) - \text{sen}\theta|3\rangle.\end{aligned}$$

Sob esta configuração laser, o potencial vetor  $\mathbf{A}$  toma a forma de um potencial de Landau Abelian  $U(1) \times U(1)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & By\hat{i} \\ By\hat{i} & 0 \end{pmatrix} = By\sigma_x\hat{i}, \quad (4.1)$$

onde  $B = \hbar\kappa\alpha$ . Note que a estrutura  $U(1) \times U(1)$  do potencial de calibre representa a separação da dinâmica da partícula em diferentes estados escuros. Isto corresponde a duas espécies de pseudospin decopladas e sujeitas à diferentes campos magnéticos [104]. Em outras palavras, temos um sistema efetivo de spin-1/2.

De acordo com as referências [41], apresentadas no capítulo 1, consideramos que a dimensão da nuvem atômica longo do eixo  $y$  é da ordem de 1 mm. Assim, como  $0 \leq |\cos\theta| = |\alpha y| \leq 1$ , temos então que:

$$\alpha \leq 10^3 \text{ m}^{-1}. \quad (4.2)$$

O potencial vetor efetivo leva a um campo magnético efetivo Abelian direcionado ao

longo do eixo  $z$ , a saber:

$$\mathbf{B} = -B\sigma_x \hat{k}. \quad (4.3)$$

Note que a intensidade do campo magnético sintético é uma função do parâmetro  $\alpha$ .

O potencial escalar geométrico fica expresso na forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

E ainda, podemos escrever o potencial de aprisionamento externo como:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \cos^2 \theta + V_3 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Tomando o potencial de aprisionamento para as primeiras duas componentes Zeeman dos estados hiperfinos  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ , como sendo  $V_1 = V_2 = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \cos^2 \theta$  e considerando  $V_3 - V_1 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ , obtemos um potencial de aprisionamento global igual a:

$$\hat{\Phi} + \hat{V}_T = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \hat{I},$$

com  $\hat{I}$  sendo a matriz identidade  $2 \times 2$ . O Hamiltoniano efetivo do sistema atômico submetido à presente configuração laser toma a forma:

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2m} \left( \hat{p}_x \hat{I} - B_0 y \sigma_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}.$$

Uma vez que  $|D_1\rangle$  and  $|D_2\rangle$  são degenerados, a base "escura" pode ser modificada por uma transformação unitária  $U(\mathbf{r})$ . Usando a transformação unitária  $U = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y}$  dentro do subespaço gerado por  $\{|D_1\rangle, |D_2\rangle\}$  obtemos uma base equivalente  $\{|D'_i\rangle\}$  ( $i = 1, 2$ ), para a qual os campos transformados são  $\mathbf{A}' = By\sigma_z \hat{i}$  and  $\mathbf{B}' = -B\sigma_z \hat{k}$ . Além disso, a nova função de onda pode ser escrita em função da original através da expressão  $\psi' = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \psi$ . Esta transformação, torna o Hamiltoniano uma matriz diagonal. Utilizando a notação de spin, denotamos  $|D'_1\rangle \equiv |\uparrow\rangle$  (pseudospin up) e  $|D'_2\rangle \equiv |\downarrow\rangle$  (pseudospin down), e ainda  $\psi' = (\psi'_\uparrow, \psi'_\downarrow)^{Tr}$ . Nesta notação, o Hamiltoniano efetivo tem a seguinte forma:

$$\hat{H}'_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \hat{H}'_\uparrow & 0 \\ 0 & \hat{H}'_\downarrow \end{pmatrix},$$

onde  $\hat{H}'_\sigma = \frac{1}{2m} \left( \hat{p}_x - \vec{A}'_\sigma \right)^2 + \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ , ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) e  $\vec{A}'_\uparrow = -\vec{A}'_\downarrow = By$ .

Neste contexto, a equação transformada de Schrödinger  $i\hbar \partial_t \psi' = \hat{H}'_{\text{eff}} \psi'$  para o movi-

---

<sup>1</sup>Isto pode ser obtido através da dessintonização do terceiro laser em relação à ressonância de dois fótons pela frequência  $\Delta\omega_3 = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ .

mento atômico produz duas equações desacopladas:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \left( \frac{B^2}{2m} \right) y^2 \\ -\eta_\sigma \frac{B\hbar k_x}{m} y \\ + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 - \kappa^2) \end{array} \right] \psi'_\sigma = E \psi'_\sigma, \quad (4.4)$$

onde  $\eta_\uparrow = -\eta_\downarrow = 1$ .

Como o potencial vetor efetivo depende apenas da componente  $y$  da posição, o operador Hamiltoniano é invariante sob translação na direção  $x$  (o momento transversal  $p_x = \hbar k_x$  é uma grandeza conservada), e assim podemos então usar soluções do tipo onda plana:

$$\psi'_\sigma(x, y) = e^{ik_x x} \psi'_\sigma(y); \quad \psi'_\sigma(y) = \begin{pmatrix} \psi'_\uparrow(y) \\ \psi'_\downarrow(y) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Depois de alguma algébra, as equações (4.4) passam a ser escritas na forma de dois osciladores harmônicos unidimensionais, centrados em  $y_0^\sigma = \frac{\eta_\sigma \hbar k_x}{B}$ :

$$\left[ \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{B^2}{2m} (y - y_0^\sigma)^2 \right] \psi'_\sigma(y) = \left[ E - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \right] \psi'_\sigma(y). \quad (4.6)$$

Note que temos dois osciladores harmônicos dependentes do spin, pois  $y_0^\sigma$  depende de  $\eta_\sigma$ .

A partir daqui, introduzimos a nova variável  $y_\sigma = y - y_0^\sigma$ , o que resulta nas equações (4.6) serem expressas como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi'_\sigma(y)}{dy_\sigma^2} + \frac{m\Lambda^2}{2} y_\sigma^2 \psi'_\sigma(y) = \epsilon \psi'_\sigma(y), \quad (4.7)$$

onde  $\Lambda = \frac{B}{m}$  e

$$\epsilon = E - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}. \quad (4.8)$$

Como sabemos a solução analítica da equação (4.24) é calculada com base no comportamento assintótico da variável adimensional  $\sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}} y_\sigma$ . Entretanto, diferentemente do problema padrão de Landau para elétrons livres em um campo magnético homogêneo, no presente sistema, não é possível tomar o limite assintótico da variável  $y_\sigma$ , pois o gás atômico é confinado. Para levar em conta a condição física de confinamento dos átomos, na resolução da equação (4.24) assumimos o seguinte limite [95, 96]:

$$\sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}} \gg 1. \quad (4.9)$$

Note que ambos lados da Equação (4.27) possuem dimensão do inverso de comprimento. O limite expresso na equação (4.27) restringe o valor do parâmetro  $\alpha$  e consequentemente

do campo magnético efetivo, a saber:

$$\sqrt{\kappa\alpha} \gg 1 \text{ and } \sqrt{\frac{B}{\hbar}} \gg 1. \quad (4.10)$$

As soluções de equação (4.24) [105] são  $\psi'_{\sigma,n}(y_\sigma) = C_n e^{-\frac{m\Lambda}{2\hbar} y_\sigma^2} H_n \left( \sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}} y_\sigma \right)$ , onde  $H_n$  são os polinômios de Hermite e  $C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\Lambda}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$ . A partir da equação de Hermite satisfeita por  $H_n \left( \sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}} y_\sigma \right)$ , obtemos a condição de quantização obedecida por  $\epsilon$ , dada por:

$$\epsilon_n = \hbar\Lambda \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.11)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Comparando as equações (4.8) e (4.11), concluímos que o espectro de energia do nosso sistema é descrito pela expressão:

$$E_{n,\uparrow} = E_{n,\downarrow} = E_n = \hbar\Lambda \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m},$$

onde os estados com índices  $n$  constituem o  $n$ -ésimo nível de Landau. Como as duas componentes de spin tem o mesmo espectro de energia, a degenerescência de spin é preservada. Estes níveis de Landau possuem uma estrutura similar aos níveis de Landau do caso eletrônico ordinário, com um termo adicional associado com o momento  $p_L = \hbar\kappa$  dos campos laser aplicados. O efeito do termo da energia de recuo  $\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$  é de apenas deslocar o espectro para valores mais altos de energia, uma vez que o número de onda  $\kappa$  é uma constante. Cada nível de energia é degenerado e contém  $N_s = \frac{A}{2\pi l^2}$  estados, onde  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{B}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa\alpha}}$  é o comprimento magnético e  $A$  é a área da armadilha. O espaçamento entre os níveis de energia é  $\hbar\Lambda$ .

Como esperado, de acordo com a expressão  $N_s = \frac{AB}{\hbar 2\pi}$  (ou  $N_s = \frac{A\kappa\alpha}{2\pi}$ ), a degenerescência dos níveis de energia tem uma dependência linear com a intensidade do campo magnético  $B$  (ou com o parâmetro  $\alpha$ ). Com o intuito de estimar o valor desta degenerescência em função de um conjunto de parâmetros experimentais típicos do átomo de  $^{87}\text{Rb}$  consideramos a transição atômica:

$$5^2S_{1/2}(F=1) \leftrightarrow 5^2P_{3/2}(F=0), \quad (4.12)$$

para o esquema tripod. Neste contexto, tomamos o número de onda como  $\kappa_{\text{Rb}} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ , o qual leva o limite expresso na equação (4.10) ter a seguinte forma:

$$\alpha \gg 10^{-7} \text{ m}^{-1}. \quad (4.13)$$

Então, a partir das condições 4.2 e 4.13 podemos escrever:

$$10^{-14} \hbar\kappa_{\text{Rb}}^2 \ll B \leq 10^{-4} \hbar\kappa_{\text{Rb}}^2. \quad (4.14)$$

Assumindo uma armadilha 2D com uma área efetiva  $A \sim 1 \text{ mm}^2$ , construímos a figura (4.2), que mostra como varia a degenerescência em função do campo magnético efetivo. Note que para o valor máximo  $B_{max} = 10^{-4} \hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$  ( $\alpha_{max} = 10^3 \text{ m}^{-1}$ ) a degenerescência atinge seu valor máximo  $N_s^{max} \approx 1.6 \times 10^3$ .

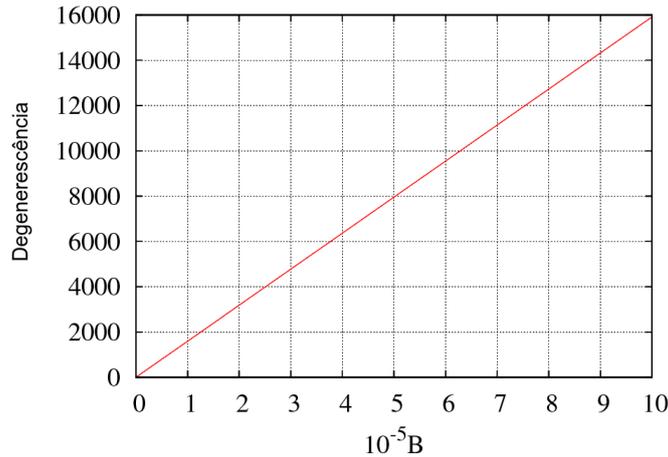


Figura 4.2: Degenerescência de Landau em função de  $B$  (em unidades efetivas de  $\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ ).

O número de átomos requeridos para que apenas o menor nível de Landau seja preenchido é dado pela condição  $N = N_s^{max}$ . Neste regime, o campo magnético é intenso o que, em princípio, resulta no surgimento do efeito Hall quântico. Em adição, se inicialmente prepararmos o sistema em um regime de menor nível de Landau, na medida em que diminuirmos o valor de  $B$  ( $\alpha$ ) os níveis de Landau mais elevados se tornam populados. Assim, a população do nível de Landau superior sempre irá variar de completamente preenchido a inteiramente vazio, o que levará a formação de oscilações quânticas, como as oscilações de Haas-van Alphen e as oscilações de Shubnikov-de Haas.

Uma diferença interessante entre nosso sistema comparado com o do arranjo  $\Lambda$  [95,96] (que também gera um potencial de calibre Abelian, porém com uma componente), é que com o sistema tripod podemos explorar a dependência de spin do campo magnético efetivo. Em outras palavras, como o campo magnético efetivo tem a forma  $\vec{B} = -B_0 \sigma_z \hat{k}$ , as partículas com spins opostos experimentam forças de Lorentz opostas. Se aplicarmos um campo elétrico efetivo a nuvem atômica, podemos estudar a Física do efeito spin-Hall [88,106,107] no contexto dos átomos ultrafrios tipo-tripod.

## 4.2 O Efeito de Haas van Alphen para um Gás Atômico Bidimensional

O estudo do efeito dHvA em sistemas atômicos ainda é escasso, principalmente quando se trata de sistemas em duas dimensões. G. Juzeliūnas [95] mostrou como o efeito dHvA pode ser obtido em um gás de Fermi 3D interagindo com luz "lenta" transportando momento angular orbital. Na referência [108] foi explorada a possibilidade de observar oscilações tipo dHvA no momento angular de um gás de Fermi não interagente sujeito à rotação como uma função do número de partículas ou do potencial químico. Neste sistema atômico, no limite de rápida rotação para um sistema 2D, os saltos periódicos pronunciados na magnetização por elétron foram substituídos por singularidades "cusplike" (mais suaves) do momento angular em função do número de átomos. Oscilações pronunciadas foram previstas apenas no limite oposto de lenta rotação e se considerando o sistema em 3D.

Nesta seção, demonstramos que é possível gerar o análogo atômico do efeito dHvA para sistemas eletrônicos bidimensionais [109] através do acoplamento dos estados internos de átomos tipo tripod com uma configuração de campos de laser espacialmente variantes, a qual foi apresentada na seção (4.1). Por questões de simplificação, apresentamos o comportamento periódico da energia atômica total como uma função de  $\frac{1}{B}$ , para os átomos que ocupam o nível parcialmente. Além disso, verificamos que a derivada da energia com relação a  $B$  (que é definida como uma magnetização efetiva) apresenta um perfil dente de serra quando  $\frac{1}{B}$  é varrido. A partir do período das oscilações magnéticas e usando uma equação semelhante a de Onsager (para sistemas eletrônicos), estimamos a área do círculo de Fermi para o gás atômico.

Na explanação do efeito dHvA para o presente sistema atômico, utilizamos um simples modelo para o qual o sistema está em  $T = 0$  e contém um número fixo  $N$  de átomos. Assumimos que os primeiros  $s$  níveis de Landau estão completamente preenchidos (com  $sD$  átomos) e o nível mais energético ( $s + 1$ ) está parcialmente ocupado (com  $N - sD$  átomos). De forma análoga ao sistema eletrônico da seção (3.2), temos que a energia total dos  $N$  átomos é:

$$E = \sum_{n=0}^{s-1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \Lambda D + (N - sD) \hbar \Lambda \left(s + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad (4.15)$$

podendo ser escrita em uma forma dependente explicitamente do campo magnético como:

$$E(B) = -\mu_B \rho \left( B^2 s(s+1) - \frac{N}{\rho} B(2s+1) \right) + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}, \quad (4.16)$$

onde  $\mu_B = \frac{\hbar}{2m}$  é um magneton de Bohr efetivo.

Por simplicidade, apresentamos o comportamento oscilatório das propriedades físicas do gás atômico considerando apenas a energia total dos átomos no nível de Landau parcialmente ocupado ( $s + 1$ ) que é dada por:

$$E'(B) = \mu_B \rho \left[ -B^2 s(s + 1) + \frac{N}{\rho} B(2s + 1) - \frac{N^2}{\rho^2} \right]. \quad (4.17)$$

É bem conhecido que se a intensidade do campo magnético é modificada, o número de níveis de Landau ocupados mudará uma vez que o número de átomos é fixo, porém a degenerescência de cada nível de Landau varia com  $B$  [figura (4.3)]. Em outras palavras,

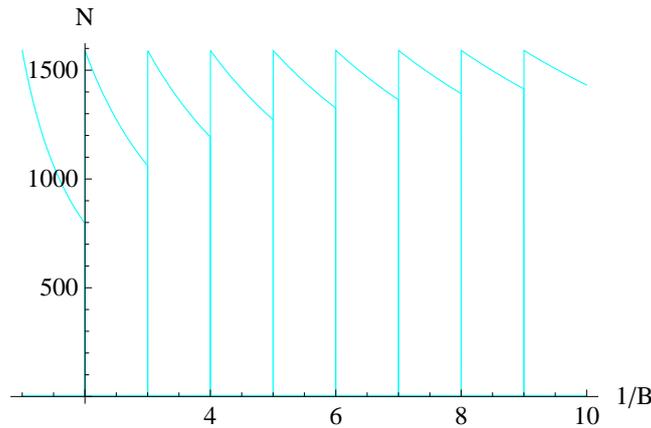


Figura 4.3: Variação do número de átomos nos  $s$  primeiros níveis de Landau completamente ocupados em função de  $\frac{1}{B}$  (em unidades de  $10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$ ).

a população atômica do nível de Landau mais energético ( $s + 1$ ) mudará de completamente cheia para inteiramente vazia como uma função de  $B$  ou equivalentemente de  $\frac{1}{B}$ , como mostrado na figura (4.4). Na figura (4.4), assumimos que o sistema está inicialmente em um regime em que apenas o nível de Landau menos energético  $s = 0$  está populado com  $\approx 1600$  átomos, para  $\frac{1}{B} = 10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$  ( $B = 10^{-4} \hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ ), e o nível mais elevado ( $s + 1$ ) = 1 vazio. Quando  $\frac{1}{B}$  ( $B$ ) é aumentado (diminuído) o nível  $s = 1$  passa a acomodar átomos até ser completamente ocupado. Simultaneamente, um novo nível superior ( $s + 1$ ) = 2 se torna populado e assim por diante. Isto resulta em comportamento oscilatório da energia como uma função de  $\frac{1}{B}$  [ver figura (4.30)]. Note que quando  $\frac{1}{B_s} = \frac{s\rho}{N}$  ou  $\frac{1}{B_{s+1}} = \frac{(s+1)\rho}{N}$  não existe nenhum nível de Landau parcialmente ocupado e a equação (4.17) é nula. Por outro lado, para  $\frac{1}{B} = \frac{\rho}{N} \frac{s(s+1)}{s+\frac{1}{2}}$  a equação (4.17) apresenta um máximo local que diminui suavemente quando  $\frac{1}{B}$  varia. As oscilações na energia possuem um período dado por  $\Delta(\frac{1}{B}) = \frac{\rho}{N}$ . A magnetização efetiva  $M$  é obtida tomando a derivada da energia Eq. (4.17) com relação a  $B$ , assim temos

$$M = \mu_B \rho \left[ 2Bs(s + 1) - \frac{N}{\rho}(2s + 1) \right],$$

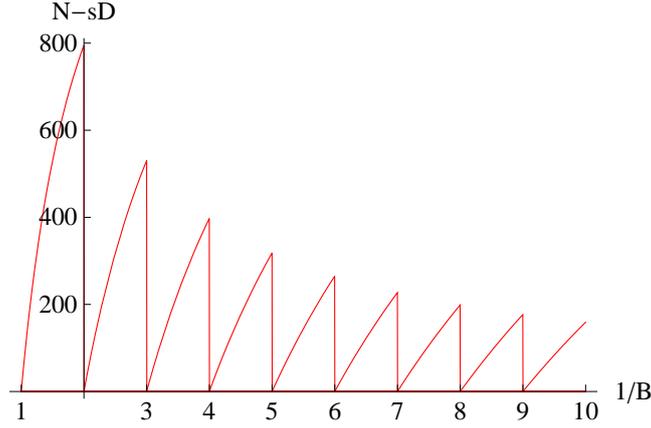


Figura 4.4: Número de átomos no nível de Landau parcialmente ocupado ( $s + 1$ ) como uma função do inverso do campo magnético (em unidades de  $10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$ ). O número de átomos no ( $s + 1$ ) nível de Landau diminui com  $\frac{1}{B}$  por causa do crescimento da degenerescência.

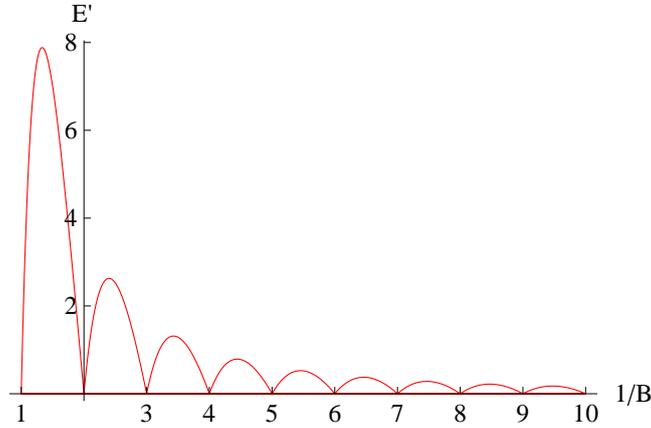


Figura 4.5: Comportamento oscilatório da energia (em unidades de  $10^{-3} \frac{(\hbar\kappa_{\text{Rb}})^2}{m_{\text{Rb}}}$ ) do nível de Landau ( $s + 1$ ) com relação a  $\frac{1}{B}$ . O campo magnético recíproco varia na faixa  $10^4 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1} \leq \frac{1}{B} \leq 10^5 (\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2)^{-1}$ . Utilizamos os valores experimentais típicos  $A \sim 1 \text{ mm}^2$ ,  $\kappa_{\text{Rb}} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,  $m_{\text{Rb}} = 1.443 \times 10^{-25} \text{ kg}$ .

onde  $sD < N \leq (s + 1)D$ .

A figura (4.6) mostra o usual efeito dHvA agora ocorrendo em um gás atômico 2D. Como esperado as oscilações magnéticas possuem um perfil dente de serra. A magnetização é linear em  $\frac{1}{B}$  exceto em pontos para os quais um novo nível de Landau começa a ser preenchido. Nestes pontos, o nível de Fermi faz um salto abrupto entre dois níveis de Landau fazendo com que a magnetização salte de uma quantidade  $2N\mu_B \approx 1.6 \times 10^3 \frac{\hbar}{m_{\text{Rb}}}$ . Quando somente os primeiros níveis de Landau  $s$  são ocupados, a magnetização é  $M = -N\mu_B$  (diamagnetismo de Landau). Ela salta para  $M = +N\mu_B$  quando o nível ( $s + 1$ )th começa a ser populado e retorna suavemente para  $M = -N\mu_B$  quando este novo nível é completamente ocupado. O período de uma oscilação dHvA é uma medida direta da área extrema da superfície de Fermi normal à direção de  $B$ , através

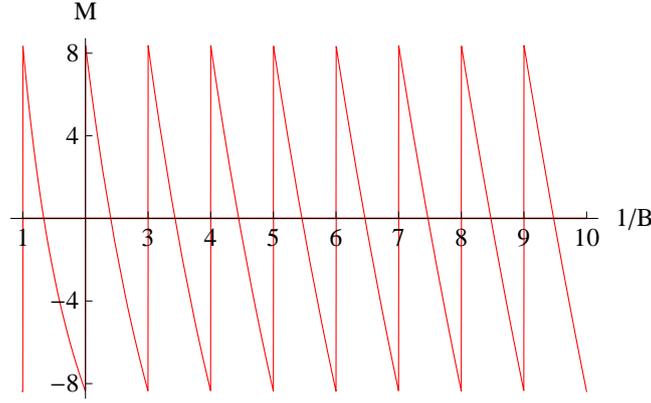


Figura 4.6: Magnetização Efetiva (em unidades de  $10^2 \frac{\hbar}{m_{\text{Rb}}}$ ) como uma função do inverso do campo magnético.

de uma expressão semelhante à relação de Onsager:

$$S = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta\left(\frac{1}{B}\right), \quad (4.18)$$

onde  $\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{\rho}{N}$ . Substituindo os parâmetros experimentais apresentados na seção anterior na equação (4.18), estimamos a área do círculo de Fermi em  $S = \frac{4\pi^2 N}{A} \approx 6.28 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$ .

### 4.3 Degenerescência Remanescente para um Gás Atômico Ultrafrio Bidimensional Lateralmente Confinado

Como vimos nas seções anteriores, a geração de potenciais de calibre artificiais em gases atômicos ultrafrios tem permitido a investigação do problema da quantização de Landau nesses sistemas atômicos [81, 103]. Tais potenciais, podem apresentar uma estrutura Abelianas e/ou não-Abelianas [85]. Para sistemas contínuos (i.e. sem a presença de grades óticas), tem sido observado que átomos ultrafrios na presença de um potencial de Landau Abelianas apresentam um comportamento similar a de partículas carregadas em um campo magnético uniforme [95, 96]. Como uma consequência, temos o surgimento de níveis de Landau degenerados. No entanto, quando um termo não-Abelianas é adicionado a um potencial Abelianas que exibe níveis de Landau, o acoplamento entre os graus de liberdade internos torna os níveis de Landau não-degenerados [97–101]. Por exemplo, em [100], a parte não-Abelianas do potencial vetor levanta a degenerescência dos níveis de Landau. Em pontos onde existe uma degenerescência residual aparecem estados Hall quânticos não-Abelianos. Em outro sistema [98], mostrou-se que exclusivamente devido ao caráter

não-Abeliano do campo de calibre, a usual estrutura dos níveis de Landau é severamente distorcida e até eventualmente destruída.

É fato bem conhecido que a degenerescência de Landau também pode ser quebrada para partículas na presença de um potencial vetor Abeliano, porém com um potencial de confinamento residual em uma direção específica, uma vez que o potencial de confinamento lateral produz uma dependência explícita do espectro de energia com relação ao momento transversal [110–112]. (e.g. esta é a origem da velocidade de grupo não-nulo nos estados de bordas em semicondutores). Isto é uma característica padrão que também pode aparecer em qualquer dos modelos atômicos descritos em [85]. Nesta seção, apresentamos um arranjo óptico para o estudo de níveis de Landau não degenerados para átomos ultrafrios tipo tripod submetidos a um potencial de calibre Abeliano  $U(1) \times U(1)$  e a um potencial de confinamento lateral parabólico [86]. Este último potencial emerge do potencial de aprisionamento global. A dependência explícita da energia em função do momento atômico transversal remove a degenerescência de Landau. Entretanto, quando levamos em conta o fato da nuvem atômica possuir um tamanho finito, o momento transversal se torna quantizado e como consequência cada nível de Landau abre em um conjunto de sub-níveis de energia. Neste regime, mostramos que sob apropriadas condições alguns sub-níveis se superpõem levando a uma degenerescência remanescente. Em adição, mapeamos os pontos de degenerescências como uma função do campo magnético efetivo. Finalmente, no intuito de enriquecer a discussão física do nosso sistema, discutimos um pouco a respeito das propriedades de transporte do mesmo.

Analogamente à seção (4.2), consideramos uma nuvem atômica 2D com átomos tripod interagindo com feixes laser, conforme a figura (4.7a). A transição  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  é acoplada

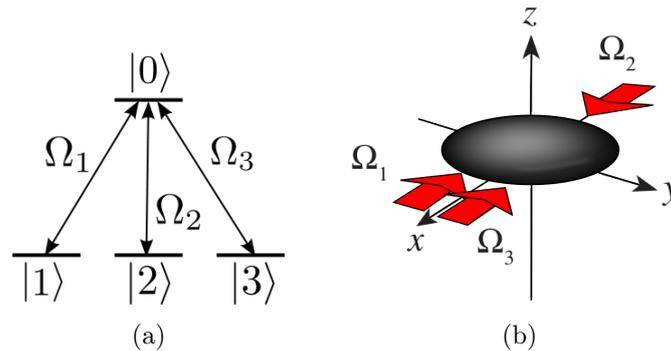


Figura 4.7: Ilustração esquemática para a observação de uma degenerescência residual na energia de átomos ultrafrios lateralmente confinados. (a) Átomo de quatro níveis tipo tripod acoplado a campos de laser. (b) Configuração laser.

ao campo de laser com frequência de Rabi  $\Omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega\sin\theta e^{i\kappa x/2}$ , enquanto que a transição  $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$  interage com o campo laser com  $\Omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega\sin\theta e^{-i3\kappa x/2}$ , e ainda, temos que a transição  $|3\rangle \rightarrow |0\rangle$  é ressonante com o outro campo laser  $\Omega_3 = \Omega\cos\theta e^{-i\kappa x/2}$  [ver figura (4.7b)], onde  $\Omega = \sqrt{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + |\Omega_3|^2}$ .

Para a configuração laser supracitada, os potenciais  $\vec{A}$ ,  $\Phi$  e  $\tilde{V}$  são expressos como:

$$\vec{A} = \hbar\kappa \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta\hat{i} \\ \cos\theta\hat{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \frac{\hbar^2}{2m} \begin{pmatrix} \kappa^2\text{sen}^2\theta & -i\kappa\text{sen}\theta(\hat{i} \cdot \vec{\nabla}\theta) \\ i\kappa\text{sen}\theta(\hat{i} \cdot \vec{\nabla}\theta) & (\vec{\nabla}\theta)^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{(V_1+V_2)}{2} & \frac{(V_1-V_2)}{2}\cos\theta \\ \frac{(V_1-V_2)}{2}\cos\theta & \frac{(V_1+V_2)}{2}\cos^2\theta + V_3\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

Tomando novamente  $\theta = \arccos(\alpha y) \in [0, \pi]$ , onde  $\alpha$  está associado com a intensidade relativa dos lasers, obtemos que:

$$\vec{A} = By\sigma_x\hat{i}, \quad (4.19)$$

onde  $B = \hbar\kappa\alpha$ . Levando em contas as dimensões da nuvem atômica ( $y \approx 1$  mm) e que  $0 \leq |\cos\theta| = |\alpha y| \leq 1$  é válido assumir que  $\alpha \leq 10^3 \text{ m}^{-1}$  e conseqüentemente que:

$$B \leq 10^3 \hbar\kappa \quad (4.20)$$

Com a nossa escolha  $\theta$ , o potencial escalar assume a seguinte forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

De agora em diante, assumimos que o potencial de aprisionamento para os átomos nos estados eletrônicos  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  é  $V_1 = V_2 = \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} - \frac{\hbar^2\kappa^2}{m}\text{sen}^2\theta$ . Tomando a dessintonização do terceiro laser em relação à ressonância de dois fótons como sendo  $\Delta\omega_3 = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\frac{1}{\text{sen}^4\theta} + \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$  obtemos que  $V_3 = V_1 - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\frac{1}{\text{sen}^4\theta} + \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$ , de maneira que podemos escrever simplificada-mente o potencial de aprisionamento global como um potencial parabólico:

$$\Phi + \tilde{V} = \left( \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}\cos^2\theta \right) \mathbb{I}.$$

Uma vez que  $|D_1\rangle$  e  $|D_2\rangle$  são degenerados, aplicamos a transformação unitária  $U = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y}$  dentro do subespaço gerado por  $\{|D_1\rangle, |D_2\rangle\}$  e obtemos uma base equivalente  $\{|D'_i\rangle\}$  ( $i = 1, 2$ ), para a qual os campos transformados são:

$$\vec{A}' = By\sigma_z\hat{i},$$

$$\Phi' + \tilde{V}' = \Phi + \tilde{V},$$

Além disso, temos uma nova função de onde é dada por  $\psi' = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y}\psi$ . Usando a linguagem de spin denotamos  $|D'_1\rangle \equiv |\uparrow\rangle$  e  $|D'_2\rangle \equiv |\downarrow\rangle$ , e ainda  $\psi' = (\psi'_\uparrow, \psi'_\downarrow)^{Tr}$ .

A equação de Schrödinger deste sistema efetivo de dois níveis na base  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  leva à duas equações desacopladas:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'_\sigma = \left[ \frac{1}{2m} (p_x - By\eta_\sigma)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \cos^2 \theta \right] \psi'_\sigma. \quad (4.21)$$

onde  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  and  $\eta_\uparrow = -\eta_\downarrow = 1$ .

Como o potencial vetor efetivo depende apenas da componente  $y$  da posição, o operador Hamiltoniano é invariante sob translação na direção  $x$  (o momentum  $p_x = \hbar k_x$  é uma grandeza conservada), e assim podemos então usar soluções do tipo onda plana;

$$\psi'_\sigma(x, y) = e^{ik_x x} \psi'_\sigma(y); \quad \psi'_\sigma(y) = \begin{pmatrix} \psi'_\uparrow(y) \\ \psi'_\downarrow(y) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Depois de alguns cálculos, vemos que a equação (4.21) podem ser escritas na forma de dois osciladores harmônicos unidimensionais com seus poços centrados  $y_0^\sigma = \frac{\eta_\sigma \hbar k_x}{B}$

$$\left[ \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{B^2}{m} \left( y - \frac{\eta_\sigma \hbar k_x}{2B} \right)^2 \right] \psi'_\sigma(y) = \left[ E - \frac{\hbar^2 k_x^2}{4m} \right] \psi'_\sigma(y). \quad (4.23)$$

Introduzindo a nova variável  $y_\sigma = y - y_0^\sigma$ , com  $y_0^\sigma = \frac{\eta_\sigma \hbar k_x}{2B}$  as equações (4.23) tomam a forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi'_\sigma(y)}{dy_\sigma^2} + \frac{m\Lambda^2}{2} y_\sigma^2 \psi'_\sigma(y) = \epsilon \psi'_\sigma(y), \quad (4.24)$$

onde  $\Lambda = \sqrt{2} \frac{B}{m}$  e

$$\epsilon = E - \frac{\hbar^2 k_x^2}{4m}. \quad (4.25)$$

Se, além disso, trabalharmos com a variável adimensional  $\xi_\sigma = \sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}} y_\sigma$  temos que:

$$\frac{d^2 \psi_\sigma}{d\xi_\sigma^2} = \left( \xi_\sigma^2 - \frac{2\epsilon}{\hbar\Lambda} \right) \psi_\sigma \quad (4.26)$$

Levando em conta o fato de que os átomos estão confinados dentro da nuvem atômica, soluções analíticas da equação (4.26) são obtidos no limite em que :

$$\sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}} \gg 1. \quad (4.27)$$

Como consequência disto:

$$\sqrt{\kappa\alpha} \gg 1 \text{ and } \sqrt{\frac{B}{\hbar}} \gg 1. \quad (4.28)$$

As soluções da equação (4.26) são  $\psi_n(\xi_\sigma) = C_n e^{-\frac{m\Lambda}{2\hbar}\xi_\sigma^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}}\xi_\sigma\right)$ , onde  $H_n$  são os polinômios de Hermite com  $C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\Lambda}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$ . A partir da equação de Hermite satisfeita por  $H_n\left(\sqrt{\frac{m\Lambda}{\hbar}}\xi_\sigma\right)$ , obtemos a condição obedecida por  $\epsilon$ , dada por

$$\epsilon_n = \hbar\Lambda \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (4.29)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$

Igualando as equações (4.25) e (4.29), chegamos à expressão para a energia do nosso sistema:

$$E_{n,k_x,\uparrow} = E_{n,k_x,\downarrow} = \hbar\Lambda \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_x^2}{4m}. \quad (4.30)$$

Os estados com índice  $n$  compõem o  $n$ -ésimo nível de Landau. Como as duas componentes de spin possuem a mesma energia, temos uma degenerescência de spin. O termo proporcional à componente  $x$  do momentum atômico  $\hbar k_x$  quebra a degenerescência dos níveis de Landau. O segundo número quântico  $k_x$  é quantizado quando levamos em conta o confinamento das partículas. Por simplicidade, consideramos uma caixa 2D de lado  $L$  com condições periódicas de contorno (i.e. topologia de um torus). Pela imposição destas condições em relação à direção  $x$  temos que os valores permitidos para  $k_x$  são  $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$ , onde  $n_x$  é um número inteiro. Feito isto, podemos expressar a energia do sistema da seguinte forma:

$$E_{n,n_x,\uparrow} = E_{n,n_x,\downarrow} = \hbar\Lambda \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_x^2}{mL^2}. \quad (4.31)$$

Note que cada  $n$ -ésimo nível de Landau é quebrado em um conjunto de sub-níveis (rotulados por  $n_x$ ) [figura (4.3)] que denotamos como uma banda de Landau. O espaçamento variável entre dois sub-níveis  $n_x$  é dado por:

$$\Delta E_{n_x} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \times [2n_x + 1]. \quad (4.32)$$

O número máximo de sub-níveis em uma banda é determinado pela condição física para o centro do oscilador  $0 \leq y_0 = \frac{\hbar k_x}{2B} \leq L$ , assim podemos escrever:

$$n_{x_{\max}} = \frac{BL^2}{\hbar\pi}. \quad (4.33)$$

Curiosamente, dependendo da intensidade do campo magnético efetivo as bandas de Landau podem se cruzar. Vamos considerar duas bandas  $n$  e  $n'$ , com  $n' > n$ . A diferença

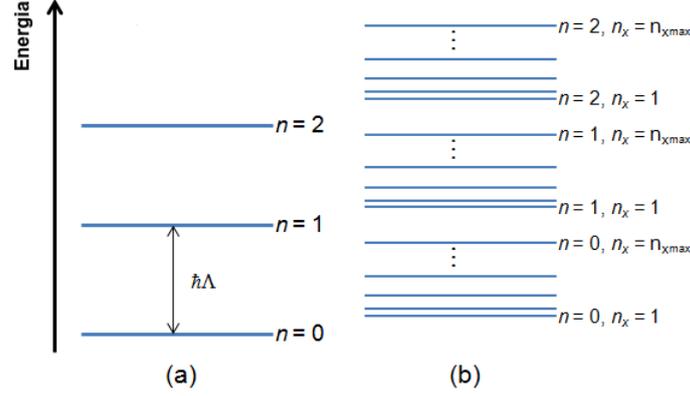


Figura 4.8: Primeiros três (a) níveis de Landau ordinários e (b) bandas de Landau.

de energia entre os estados  $|n, n_x\rangle$  e  $|n', n'_x\rangle$  é:

$$\begin{aligned} \Delta E(n', n'_x, n, n_x) &= E_{n', n'_x} - E_{n, n_x} \\ &= \hbar\Lambda(n' - n) + \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}(n'^2_x - n_x^2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

O limiar de campo magnético ( $B_{\text{thres}}$ ) para o cruzamento destas bandas é atingido quando o estado mais alto da banda  $n$  e o mais baixo da banda  $n'$ , respectivamente,  $|n, n_x = n_{x_{\text{max}}}\rangle$  e  $|n', n'_x = 0\rangle$ , se superpõem. Por exemplo, tomando duas bandas subsequentes  $n' = n + 1$  e  $n$  com  $n_{x'} = 0$  e  $n_x = n_{x_{\text{max}}}$ , temos a condição:

$$\Delta E(n', 0, n, n_{x_{\text{max}}}) = \sqrt{2}\hbar \frac{B_{\text{thres}}^{(n, n+1)}}{m} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} (0 - n_{x_{\text{max}}}^2) = 0, \quad (4.35)$$

que leva a

$$B_{\text{thres}}^{(n, n+1)} = \frac{\hbar \pi^2}{\sqrt{2}L^2} n_{x_{\text{max}}}^2,$$

e ainda, empregando a equação (4.33), temos que:

$$B_{\text{thres}}^{(n, n+1)} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{L^2}.$$

No caso mais geral, se levarmos em conta dois bandas de Landau  $n' = n + i$  e  $n$  com  $i = 1, 2, 3, \dots$ , o  $B_{\text{thres}}$  é determinado pela expressão:

$$B_{\text{thres}}^{(n, n+i)} = i \frac{\sqrt{2}\hbar}{L^2}. \quad (4.36)$$

A partir das equações (4.36) e (4.20), obtemos que o cruzamento das bandas de Landau

ocorrem na seguinte faixa de campo magnético:

$$\frac{\sqrt{2}\hbar}{L^2} \leq B \leq 10^3 \hbar \kappa. \quad (4.37)$$

Para uma armadilha 2D com área efetiva  $A \sim 1 \text{ mm}^2$  e considerando a transição atômica  $5S_{1/2}(F=1) \leftrightarrow 5P_{3/2}(F=0)$  of  $^{87}\text{Rb}$  podemos escrever:

$$1.4 \times 10^{-8} \hbar \kappa_{\text{Rb}}^2 \leq B \leq 10^{-4} \hbar \kappa_{\text{Rb}}^2, \quad (4.38)$$

onde  $\kappa_{\text{Rb}} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Note que quanto maior for a intensidade do campo magnético, maior será o número de bandas que se cruzam.

A superposição das bandas de Landau leva ao surgimento da degenerescência residual. Esta degenerescência ocorre sempre que um par de estados da energia  $|n, n_x\rangle$  e  $|n', n_{x'}\rangle$  obedecem a relação:

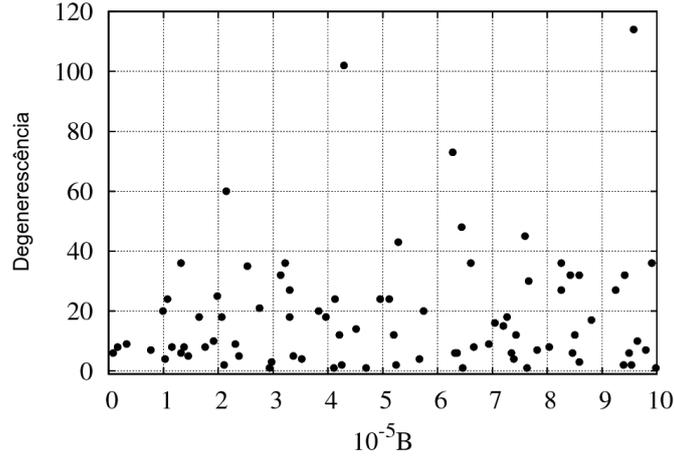
$$\begin{aligned} E_{n', n'_x} - E_{n, n_x} &= \\ &= \hbar \Lambda (n' - n) + \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L^2} (n_x'^2 - n_x^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

A partir da equação (4.39) encontramos que a degenerescência remanescente existe apenas para alguns valores permitidos do campo magnético dados por:

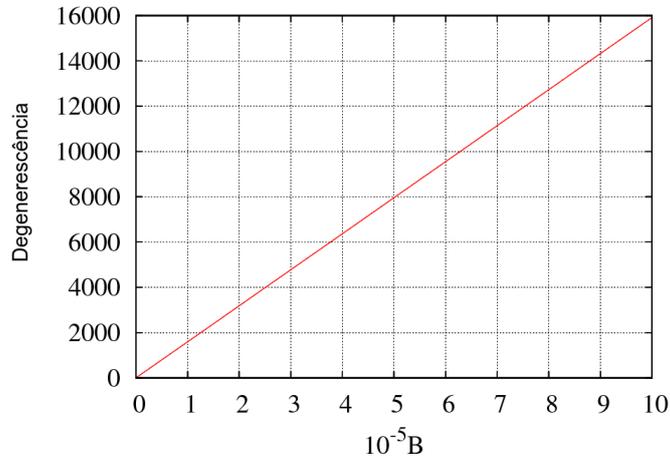
$$B = \frac{\hbar \pi^2}{\sqrt{2} L^2} \frac{(n_x^2 - n_x'^2)}{(n' - n)}. \quad (4.40)$$

Na figura (4.9a) mostramos o número de cruzamentos dos sub-níveis de energia entre as bandas  $n$  e  $n'$ , i.e. a degenerescência residual, como função da intensidade do campo magnético efetivo. Por exemplo, quando  $B = 1 \times 10^{-4} \hbar \kappa_{\text{Rb}}^2$  temos que 20 pares de sub-níveis  $|n, n_x\rangle$  and  $|n', n_{x'}\rangle$  se superpõem. Na faixa de campo magnético  $0 < B \leq 1.4 \times 10^{-8} \hbar \kappa_{\text{Rb}}^2$  as bandas de Landau são espectralmente separadas e assim não existe degenerescência remanescente. Por outro lado, a degenerescência residual surge quando  $1.4 \times 10^{-8} \hbar \kappa_{\text{Rb}}^2 < B \leq 10^{-4} \hbar \kappa_{\text{Rb}}^2$ . Como podemos ver, esta degenerescência apresenta um perfil muito diferente daquele associado ao sistema eletrônico ordinário (figura (4.9b)). A forma da distribuição de pontos de degenerescência a figura (4.9a) é decorrente pelo espaçamento não uniforme entre os sub-níveis de energia. De acordo com a equação (4.32) o perfil de degenerescência residual possui dependência com a área da nuvem atômica. A dependência explícita do espectro de energia com  $k_x$  na equação (4.25), não apenas remove a degenerescência ordinária de Landau, como também faz surgir uma velocidade de grupo para os átomos na nuvem. Tal velocidade é dada por:

$$v_n(k_x) = \langle n, k_x | v | n, k_x \rangle = \frac{dE_n(k_x)}{\hbar dk_x},$$



(a)



(b)

Figura 4.9: (a) Degenerescência remanescente em função de  $B$  (in units of  $\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ ). Contamos o número de interseções entre os sub-níveis  $|n, n_x\rangle$  e  $|n', n_{x'}\rangle$  quando  $B$  varrido (de acordo com a equação (4.36)). Levamos em conta as onze mais baixas bandas, i.e.  $n'$  e  $n$  variando de 0 até 10.  $n'_x$  e  $n_x$  obedecem à relação  $n_{x_{max}} = \frac{BL^2}{\hbar\pi}$ . Por exemplo, quando  $B_{max} = 10^{-4}\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$  ( $\alpha_{max} = 10^3 \text{ m}^{-1}$ ), então  $n_{x_{max}} = 3183$ . (b) A degenerescência para os níveis de Landau ordinários é  $\frac{AB}{2\pi\hbar}$ . Nos cálculos, usamos um conjunto de parâmetros experimentais típicos com  $m_{\text{Rb}} = 1.443 \times 10^{-25} \text{ kg}$  e  $\kappa_{\text{Rb}} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Consideramos uma armadilha  $2D$  com área efetiva  $A \sim 1 \text{ mm}^2$ . Para tais parâmetros, o limite da equação (4.28) toma a forma de  $\alpha \gg 10^{-7} \text{ m}^{-1}$  com  $B \gg 10^{-14}\hbar\kappa_{\text{Rb}}^2$ .

Quando consideramos as dimensão finitas da nuvem atômica na direção  $x$  a expressão acima se torna:

$$v_n(k_x) = \frac{L}{2\pi\hbar} \frac{\Delta E_{n,n_x}}{\Delta n_x}.$$

Um fato interessante a se notar, é que o espectro de energia da equação (4.25) é análogo ao do espectro para um canal condutor em um gás de elétrons bidimensional GEB (um "guia de onda eletrônico"). Este sistema eletrônico é definido por um potencial de con-

finamento lateral parabólico na presença de um campo perpendicular ao plano contém as partículas [110, 111]. Neste contexto, nosso sistema ótico pode ser considerado como um guia atômico oticamente induzido, pois o potencial lateral parabólico é produzido por feixes de luz. Portanto, temos uma interessante plataforma para o estudo de propriedades de transporte de átomos ultrafrios na presença de um campo magnético efetivo. Por exemplo, é possível se obter quantidades físicas, tais como corrente, condutividade, magnetoresistividade, e se investigar a trajetória das partículas dentro do canal atômico. Sob condições experimentais apropriadas esperamos observar o surgimento de oscilações na magnetoresistividade (as oscilações Shubnikov-de Haas) como função de  $B$ .

## 4.4 Efeito Spin Hall para Átomos Ultrafrios de Tipo-Tripod na Presença de um Campo de Calibre Oticamente Induzido

O efeito spin Hall tem atraído um grande interesse em física da matéria condensada devido a sua conexão com a física associada ao efeito Hall quântico [113, 114] e suas potenciais aplicações em spintrônica [115–121]. Em analogia com o efeito de Hall convencional relacionado a correntes de carga, o efeito spin Hall refere-se à geração de uma corrente de spin transversal a um campo elétrico aplicado. A ocorrência deste efeito tem sido proposta para certos sistemas de estado sólido [115]. Uma condição essencial para a observação do efeito spin Hall é a produção de campo de calibre efetivo dependente do spin ou no espaço real [120] ou no espaço do momentum [117–119]

Já é do nosso conhecimento que gases atômicos ultrafrios fornecem uma plataforma ideal para a investigação experimental de alguns fenômenos fundamentais originariamente conectados com sistemas de matéria condensada. Nesta seção, propomos um esquema experimental para a observação do efeito spin Hall em um gás bidimensional frio para átomos do tipo tripod [122]. Mostramos seção 4.1, que átomos em uma configuração de quatro níveis do tipo tripod pode se mover submetido a um campo magnético uniforme dependente do spin. Sob a ação de um campo "elétrico" efetivo, que pode ser gerado pela gravidade por exemplo, os átomos seguirão uma trajetória dependente do spin. Isto resulta, em uma corrente líquida de spin na direção perpendicular ao campo "elétrico" e ao campo de calibre, enquanto que corrente de massa é zero. Para a observação do efeito de spin Hall, consideramos a gravidade como campo elétrico efetivo  $\mathbf{E}$ , a qual impulsiona os átomos em uma direção [123]. Assim uma corrente de spin pode ser observada em uma direção perpendicular tanto ao campo elétrico como ao campo de calibre  $\mathbf{B}_\sigma$ . Por simplicidade, assumimos o que estado interno dos átomos está em superposição das componentes de spin  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . O arranjo experimental é apresentado na figura (4.10) A armadilha atômica externa é desligada em um instante  $t = 0$ , e os átomos de caem devido à gravidade com

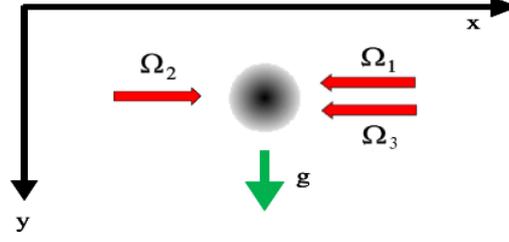


Figura 4.10: Representação esquemática da interação luz-átomo para geração do efeito spin Hall para átomos ultrafrios com estrutura de quatro níveis tripod.

uma aceleração  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  (ao longo do eixo  $y$ ). Sob essas condições o Hamiltoniano efetivo do sistema toma a forma

$$\hat{H}'_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \hat{H}'_{\uparrow} & 0 \\ 0 & \hat{H}'_{\downarrow} \end{pmatrix},$$

onde  $\hat{H}'_{\sigma} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x - \mathbf{A}'_{\sigma})^2 + \frac{1}{2m} \hat{p}_y^2 + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} - mgy$ , ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) e  $\mathbf{A}'_{\uparrow} = -\mathbf{A}'_{\downarrow} = By\hat{i}$ .

Para se ter uma idéia intuitiva, do caminho percorrido pelos átomos, consideramos trajetórias clássicas típicas dos átomos sob a campo de magnético  $\mathbf{B}_{\sigma}$ , para isso usamos as equações Hamilton para o movimento

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (4.41)$$

$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (4.42)$$

Aplicando ao nosso sistema ficamos com

$$\dot{x}_{\sigma} = \frac{(p_{\sigma}^x - By_{\sigma}\eta_{\sigma})}{m}, \quad (4.43)$$

$$\dot{p}_{\sigma}^x = 0, \quad (4.44)$$

$$\dot{y}_{\sigma} = \frac{p_{\sigma}^y}{m}, \quad (4.45)$$

$$\dot{p}_{\sigma}^y = -B\eta_{\sigma} \frac{(p_{\sigma}^x - By_{\sigma}\eta_{\sigma})}{m} + mg, \quad (4.46)$$

onde  $\eta_{\uparrow} = -\eta_{\downarrow} = 1$ . Lembrando que  $p_x = \hbar k_x$  e realizando algumas substituições temos

que a descrição clássica do movimento atômico depende de duas equações diferenciais:

$$\dot{x}_\sigma = \frac{1}{m} (\hbar k_x - \eta_\sigma B) \quad (4.47)$$

e

$$\ddot{y}_\sigma - \frac{B}{m} y = g - \frac{\eta_\sigma \hbar k_x B}{m^2}, \quad (4.48)$$

Fazendo o cálculo das equações diferenciais para as coordenadas  $x_\sigma$  e  $y_\sigma$  temos como resultado a Fig.(4.11). Podemos ver claramente que a trajetória do átomo depende do seu estado de spin, e tal dependência resulta na corrente de spin na direção horizontal. Note-se também que a trajetória possui um perfil parabólico. Para analisar o movimento

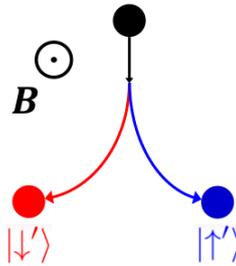


Figura 4.11: Ilustração das trajetórias dependentes do spin para um único átomo.

de um conjunto de átomos não-interagentes podemos utilizar a distribuição de densidade do gás.

# Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, estudamos a manipulação de átomos ultrafrios por campos de luz. No capítulo 1, apresentamos uma revisão dos mecanismos de resfriamento e aprisionamento de um conjunto de átomos ultrafrios. Vimos que, a armadilha magnéto-ótica que se constitui como a principal ferramenta para manipular os átomos frios utiliza a pressão da radiação de um feixe de luz coerente para manipular os graus de liberdade externos dos átomos, confinando-os a uma pequena região do espaço, em uma temperatura extremamente baixa. Realizamos uma breve análise dos termos espectroscópicos e regras de seleção da transição  $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$  (também conhecida como linha  $D_2$ ) do átomo de  $^{87}\text{Rb}$ . Apresentamos o processo de resfriamento evaporativo, o qual é essencial para a produção dos gases atômicos ultrafrios. Fizemos uma sucinta descrição da condensação de Bose-Einstein. Descrevemos a metodologia e o aparato experimental empregados para a produção de gás ultrafrio bidimensional de átomos de  $^{87}\text{Rb}$ .

No capítulo 2, introduzimos um formalismo geral para produção de campos de magnéticos artificiais, baseado no movimento adiabático de átomos ultrafrios interagindo com um arranjo apropriado de feixes de luz laser. Iniciamos o capítulo, discutindo a respeito da relação entre a fase geométrica, gerado no movimento atômico, e o magnetismo artificial. Em seguida, apresentamos os ingredientes básicos da física de campos de calibre geométricos utilizando o esquema atômico mais simples para o qual se pode gerar o magnetismo artificial - átomo de dois níveis em um feixe de luz. Fizemos a interpretação física dos campos de calibre geométricos. Fizemos uma descrição detalhada do formalismo geral para o movimento adiabático de átomos neutros em campos de luz. Vimos que, os potenciais induzidos têm uma natureza geométrica e dependem exclusivamente da intensidade relativa e da fase relativa dos feixes laser envolvidos no processo de produção de tais potenciais. Mostramos que o modelo se baseia na capacidade de preparar os átomos em sobreposições de estados de energia internas do átomo e que o mesmo fornece uma maneira de produzir oticamente um campo magnético efetivo que atua sobre átomos eletricamente neutros. Trabalhamos também com um sistema formado por um conjunto de átomos ultrafrios de quatro níveis em um configuração tripod, com três estados fundamentais e um estado eletronicamente excitado, interagindo com três feixes de luz laser. Como um exemplo da aplicação dos potenciais geométricos, apresentamos uma configuração laser para a qual é

possível a geração de um monopolo magnético. Finalizando, apresentamos as principais características do experimento que permitiu a primeira observação experimental de um campo magnético geométrico.

Já no capítulo 3, estudamos quantização de Landau e o efeito dHvA em sistemas eletrônicos bidimensionais. Iniciamos, com a derivação dos níveis de Landau. Em seguida, abordamos a descrição semi-clássica das órbitas dos elétrons na presença de um campo magnético uniforme. Finalmente, descrevemos detalhadamente o efeito dHvA.

No capítulo 4, apresentamos o arranjo experimental para a observação de níveis de Landau degenerados em um gás ultrafrio bidimensional de  $^{87}\text{Rb}$ , formado por átomos em configuração de níveis de energia do tipo tripod. Mostramos que neste mesmo sistema, podemos produzir o análogo atômico do efeito de Haas van Alphen para um sistema eletrônico bidimensional. Isto é, podemos gerar oscilações na energia e na sua derivada como função da intensidade do campo magnético efetivo. Mostramos também que para uma configuração apropriada de feixes de luz laser, podemos criar um potencial de confinamento lateral, em adição ao potencial de Landau, o que resulta na quebra de degenerescência dos níveis de energia. Esta remoção da degenerescência ordinária de Landau é decorrente da dependência explícita do espectro de energia com relação ao momento atômico. Vimos que, quando consideramos condições periódicas de contorno sobre a nuvem atômica, o momento é quantizado e surge uma degenerescência residual no sistema. Discutimos a respeito das propriedades de transporte do gás atômico. Finalizamos o capítulo, propondo um arranjo experimental para a observação de efeito spin Hall em um gás quântico bidimensional formado por átomos do tipo tripod. Neste sistema, vimos que além do campo magnético efetivo, os átomos devem estar sob efeito de um campo elétrico efetivo, que tomamos como o campo gravitacional.

Devido ao grande potencial de aplicações do magnetismo artificial as perspectivas para desenvolvimento de novos trabalhos são muitas. Por exemplo, através do confinamento lateral dos átomos, gerado pelo potencial escalar parabólico [126], podemos transformar uma nuvem atômica (alongada em um dos eixos) em guia de onda atômico de maneira semelhante aos semicondutores nanoestruturas. Desta forma, temos a possibilidade de estudarmos o transporte quântico dentro da nuvem atômica. Por outro lado, devido a quantização de Landau, temos a possibilidade de aprofundar o estudos a respeito das oscilações quânticas, abordando por exemplo o efeito Shubnikov-de Haas. Também podemos simular o efeito Hall quântico em nosso sistema. Como temos um sistema de spin-1/2, podemos investigar a influência da dependência de spin sobre os efeitos supracitados. Através de um arranjo experimental adequado, podemos simular também a equação relativística de Dirac-Weyl com campo magnético e estudar os níveis de Landau relativísticos em um sistema atômico ultrafrio. E ainda, trabalhados com átomos em uma configuração tipo  $\Lambda$  é possível se estudar quantização de Landau na presença de defeitos topologicamente induzidos.

# Apêndice A

## Interação Átomo-Radiação

### A.1 Forças Ópticas e Armadilhas Atômicas

Tornou-se conhecido desde a época de Maxwell que a luz exerce uma força sobre dipolos clássicos. A força óptica resultante é dependente do gradiente da amplitude e da fase da luz [127]:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{d} \cdot (\nabla \mathbf{E}) = \mathbf{d} \cdot (\nabla \xi + \xi \nabla \theta) e^{i(\omega t + \theta)}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $m$  é a massa do dipolo,  $\mathbf{d}$  é o momento de dipolo, e  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \xi(\mathbf{R}) e^{i(\omega t + \theta(\mathbf{R}))}$  é o campo elétrico, com sua correspondente amplitude  $\xi$ , polarização  $\epsilon$ , fase  $\theta$ , e frequência  $\omega$ .

Um átomo pode ser considerado como um protótipo de dipolo. Neste contexto, vamos nos restringir a um sistema de dois níveis de energia, como mostrado na figura (A.1). Nosso objetivo é descrever o átomo quanticamente considerando o campo de luz como clássico. O Hamiltoniano para o átomo é, então:

$$H = \frac{\mathbf{P}}{2m} + \hat{H}_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t), \quad (\text{A.2})$$

onde  $\frac{\mathbf{P}}{2m}$  é a energia cinética associada ao movimento do centro de massa do átomo,  $\hat{H}_0$  é o Hamiltoniano para o movimento interno sem perturbação, e  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$  é a interação entre o átomo e o campo de luz, a qual é baseada na aproximação de dipolo elétrico. A partir do Hamiltoniano da equação (A.2) e do teorema de Ehrenfest, obtemos a expressão para a força:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \langle \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \rangle = \langle (\mathbf{d} \cdot \epsilon) \rangle \nabla \xi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.3})$$

onde  $\mathbf{r} = \langle \mathbf{R} \rangle$  e  $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) e^{i(\omega t + \theta(\mathbf{r}))}$ . No lado direito da equação acima, assumimos

que a força é uniforme através do pacote de onda atômico. Para uma discussão mais aprofundada, indicamos as referências [127–130].

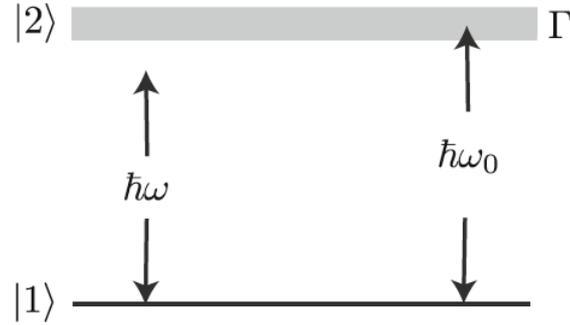


Figura A.1: O átomo é descrito como um sistema de dois níveis com diferença de energia  $\hbar\omega$  entre os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , e a frequência relativa ao laser definida como  $\omega$ .

O átomo de dois níveis interagindo com luz laser tem sido intensivamente estudado [127, 128, 131, 132]. No intuito de se obter uma expressão para a força que atua sobre o átomo, calculamos a resposta do átomo à luz, i.e., a susceptibilidade ou a polarização,  $\langle \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \rangle$ . Para isto, assumimos um campo monocromático da forma

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}E(\mathbf{r})e^{i(\omega t + \theta(\mathbf{r}))}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $E(\mathbf{r})$  é a amplitude,  $\omega$  é a frequência laser, e  $\theta$  é o fator de fase que varia espacialmente. A partir da equação de Schrödinger, obtemos duas equações para as amplitudes de probabilidade  $C_1$  e  $C_2$  do átomo estar no estado  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , respectivamente. Pela escolha de um referencial girante de acordo com

$$C_1 = D_1 e^{\frac{i}{2}(\delta t + \theta)}, \quad (\text{A.5})$$

$$C_2 = D_2 e^{-\frac{i}{2}(\delta t + \theta)}, \quad (\text{A.6})$$

obtemos as equações [128]:

$$i\dot{D}_1 = \frac{1}{2}(\delta + \dot{\theta})D_1 - \frac{\Omega}{2}D_2, \quad (\text{A.7})$$

$$i\dot{D}_2 = -\frac{1}{2}(\delta + \dot{\theta})D_2 - \frac{\Omega}{2}D_1. \quad (\text{A.8})$$

Na determinação das equações para  $D_1$  e  $D_2$ , introduzimos a dessintonia  $\delta = \omega - \omega_0$  e usamos a aproximação de onda girante, na qual os termos que oscilam rapidamente são desprezados [132]. A aproximação de onda girante é uma aproximação utilizada em ótica atômica e ressonância magnética. Esta é uma aproximação válida quando a radiação electromagnética aplicada está próxima da ressonância com uma transição atômica,

e a intensidade é baixa. Explicitamente, termos no Hamiltoniano que oscilam rapidamente com frequência  $\omega_L + \omega_0$  são negligenciadas, enquanto que termos que oscilam com frequências  $\omega_L - \omega_0$  são mantidos, onde  $\omega_L$  é a frequência da luz e  $\omega_0$  é uma frequência da transição atômica. O momento de dipolo  $d$  para a transição entre os estados é dado por  $\langle 1|\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|2\rangle$ , e a frequência de Rabi é definida por:

$$\Omega = \frac{dE(t)}{\hbar}. \quad (\text{A.9})$$

Neste estágio é conveniente se introduzir a matriz densidade, a qual é definida como  $\rho_{nm} = C_n C_m^*$  ou  $\sigma_{nm} = D_n D_m^*$  com

$$\rho_{11} = \sigma_{11}, \quad (\text{A.10})$$

$$\rho_{22} = \sigma_{22}, \quad (\text{A.11})$$

$$\rho_{12} = \sigma_{12} e^{i(\theta + \omega t)}, \quad (\text{A.12})$$

$$\rho_{21} = \sigma_{21} e^{-i(\theta + \omega t)}. \quad (\text{A.13})$$

A partir das equações (A.7) e (A.8), vemos que os elementos de matriz da densidade obedecem:

$$\dot{\sigma}_{11} = -\frac{i}{2}\Omega(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + \Gamma\sigma_{22}, \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\sigma}_{22} = \frac{i}{2}\Omega(\sigma_{12} - \sigma_{21}) - \Gamma\sigma_{22}, \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\sigma}_{12} = -i(\delta + \dot{\theta})\sigma_{12} + \frac{i}{2}\Omega(\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{1}{2}\Gamma\sigma_{12}, \quad (\text{A.16})$$

onde introduzimos a taxa de emissão espontânea  $\Gamma$  para incorporar os processos de decaimento [132].

A matriz densidade agora nos permite calcular o valor esperado para o momento de dipolo, que é dado por:

$$\langle \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \rangle = d(\rho_{12} + \rho_{21})\sigma_{12} = d(\sigma_{12} e^{i(\theta + \omega t)} + \sigma_{21} e^{-i(\theta + \omega t)}). \quad (\text{A.17})$$

Com esta expressão e utilizando novamente a aproximação de onda girante, temos a partir das equações (A.3) e (A.4) a força

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{d}}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21} - i(\sigma_{12} - \sigma_{21})) = \frac{\hbar}{2} (U\nabla\Omega + V\Omega\nabla\theta), \quad (\text{A.18})$$

onde introduzimos a notação  $U = \sigma_{12} + \sigma_{21}$  e  $V = i(\sigma_{12} - \sigma_{21})$ , e usamos o fato que  $\dot{\theta} = \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$ . Se o movimento atômico for lento, tal que a fase do estado atômico  $\dot{\theta}$  não mude muito durante o tempo de vida  $1/\Gamma$  do estado excitado, podemos nos limitar à solução de estado estacionário da matriz densidade e considerar as derivadas em relação ao tempo do lado esquerdo iguais a zero nas equações (A.14)-(A.16). Desta forma, as soluções para  $U$  e  $V$  são então:

$$U = \frac{\delta}{\Omega} \frac{s}{s+1}, \quad (\text{A.19})$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\Omega} \frac{s}{s+1}, \quad (\text{A.20})$$

onde  $s$  é o parâmetro de saturação

$$s = \frac{\Omega^2/2}{(\delta + \dot{\theta})^2 + \Gamma^2/4}. \quad (\text{A.21})$$

A força atuando sobre o átomo agora consiste de duas partes - a força de dipolo e a força de radiação, respectivamente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{dip} + \mathbf{F}_{pr}, \quad (\text{A.22})$$

com

$$\mathbf{F}_{dip} = -\frac{\hbar(\delta + \dot{\theta})}{2} \frac{\nabla s}{s+1}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{F}_{pr} = -\frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{s}{s+1} \nabla\theta. \quad (\text{A.24})$$

A soma das duas equações acima fornece a equação (1.4) apresentada no Capítulo 1.

No caso de ondas planas, a força de radiação  $\mathbf{F}_{pr}$  é proporcional ao vetor de onda  $\mathbf{k} = \nabla\theta$ . A força  $\mathbf{F}_{dip}$  é determinada pela intensidade do campo laser. Se  $s \ll 1$  e  $|\delta| \gg \Gamma, \Omega$ , obtemos o potencial correspondente usando a expressão  $\mathbf{F}_{dip} = \nabla W$ , assim temos que:

$$W = \frac{\hbar\Omega^2}{4\delta} = \frac{d^2 E^2}{4\delta\hbar}. \quad (\text{A.25})$$

A partir da expressão acima, vemos que se a intensidade da luz é inhomogênea, obtemos uma força não nula cuja direção depende do sinal da dessintonia. Para um feixe de Gauss focalizado, isto significa que os átomos são atraídos para a região de alta intensidade se o laser é dessintonizado para o vermelho ( $\delta < 0$ ). Por outro lado, se o laser é dessintonizado para o azul ( $\delta > 0$ ), os átomos buscam a região de baixa intensidade da luz e são repelidos do centro do feixe.

Nas situações em que as aproximações semiclássicas descritas acima não são aplicáveis, a interação se torna muito mais complexa e revela interessantes efeitos de emaranhamento dos estados do átomo e do campo como, por exemplo, efeitos de refração e difração do pacote de onda atômico [133]. Um tratamento totalmente quântico do problema pode ser encontrado na referência [134].

## A.2 Processos Básicos de Transferência de Energia entre o Átomo e a radiação

Para fundamentar um bom entendimento a respeito da força de pressão de radiação é interessante relembrarmos os processos de transição do elétron os entre níveis de energia do átomo.

Átomos possuem energia interna. O valor desta energia interna é restrito para específicos valores discretos, ou níveis de energia. Cada elétron que compõe o átomo sempre será encontrado em um desses estados de energia permitidos. A transição de um elétron entre estes níveis de energia pode ser realizada através da absorção ou emissão de luz. A luz é absorvida ou emitida em unidades individuais chamadas fótons. Cada fóton é uma onda eletromagnética que possui um comprimento de onda específico e viaja em uma determinada direção.

Considerando dois níveis de energia do átomo  $E_1$  (menor energia) e  $E_2$  (maior energia), a transição entre estes níveis pode ser realizada do nível  $E_1$  para  $E_2$ , pela absorção de um fóton, ou do nível  $E_2$  para  $E_1$ , pela emissão de um fóton. Em ambos os casos a energia do fóton absorvido ou emitido deve corresponder exatamente a diferença de energia entre os dois níveis de energia, ou seja:

$$E_f = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = E_2 - E_1. \quad (\text{A.26})$$

Existem três tipos de processos de transição do elétron entre níveis de energia. O primeiro processo ocorre quando um fóton de luz com comprimento de onda  $\lambda$ , atinge um átomo que tem um elétron no nível de energia  $E_1$ . O fóton será absorvido, e o elétron passará para o nível de energia  $E_2$ . Este fenômeno é chamado absorção induzida [figura (A.2a)]. O segundo processo ocorre quando o elétron que se encontra no nível de energia  $E_2$ , emite um fóton com comprimento de onda dado pela equação (A.26). Este fenômeno é chamado emissão espontânea [figura (A.2b)]. Neste tipo de processo a luz emitida é emitida em todas as direções aleatoriamente.

O terceiro processo ocorre quando um fóton com comprimento de onda  $\lambda$  interage com um átomo que tem um elétron no nível de energia  $E_2$ . O átomo será estimulado a emitir um segundo fóton com o mesmo comprimento de onda, a mesma fase, e viajando na mesma direção que a do fóton incidente, deixando o elétron o nível de energia  $E_1$ . Este

fenômeno é chamado de emissão estimulada [figura (A.2c)].

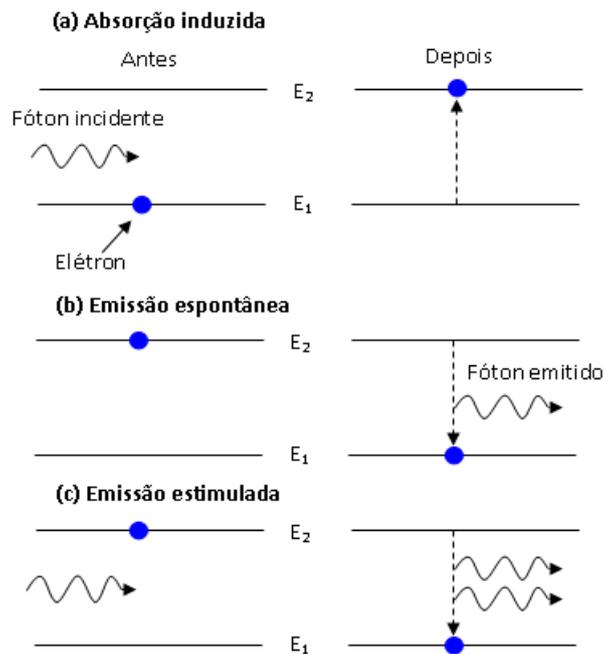


Figura A.2: Processos de transição do elétron entre níveis de energia atômica.

Estes três processos de transferência de energia foram propostos pela primeira vez por Einstein em 1917 em um artigo clássico, onde ele descreveu relações conectando as taxas de emissão espontânea, emissão estimulada, e absorção da radiação de um sistema atômico no espaço livre (considerou-se um sistema fechado de dois níveis) [135].

# Apêndice B

## Notação Espectroscópica e Propriedades do $^{87}\text{Rb}$

### B.1 Notação Espectroscópica

Uma maneira comum de nomear estados quânticos em Física Atômica é usar a notação espectroscópica. Esta é essencialmente uma forma padrão para escrever os números quânticos de momento angular de um dado estado. A forma geral é:

$$N^{2s+1}L_j, \tag{B.1}$$

onde  $N$  é o número quântico principal (que é frequentemente omitido),  $s$  é número quântico de spin total ( $(2s + 1)$  é o número de estados de spin),  $L$  se refere ao número quântico de momentum angular orbital  $\ell$  (mas é escrito como  $S, P, D, F, \dots$  para  $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) e  $j$  é o número quântico que representa o valor do momentum angular total  $J$ . Assim, o termo  $5^2S_{1/2}$  indica um nível com  $N = 5, L = 0, s = 1/2, j = 1/2$ .

Em algumas aplicações é importante lembrar da existência da estrutura hiperfina do espectro atômico. Esta estrutura é causada pela interação magnética entre o momento angular do núcleo  $I$  e o momento angular eletrônico do átomo  $J$ , sendo expressa por  $F = I + J$ . Desta forma, o termo  $5^2S_{1/2}(F = 2)$  indica que o átomo está em um nível com  $N = 5, L = 0, s = 1/2, j = 1/2$  e no estado hiperfino 2.

### B.2 Propriedades do $^{87}\text{Rb}$

Property	symbol	Value
cooling transition		$5S_{1/2}, F=2 \rightarrow 5P_{3/2}, F=3$
nuclear spin		$3/2$
wavelength in vacuum	$\lambda$	780.23 nm
mass	$m$	$1.44 \times 10^{-25} \text{kg}$
lifetime of upper state	$\tau_n$	27 ns
natural linewidth	$\Gamma$	5.9 MHz
saturation intensity(stretched transition)	$I_s$	$1.6 \text{ mW/cm}^2$
recoil temperature	$T_{rec}$	180 nK
recoil velocity	$v_{rec}$	0.59 cm/s
ground hyperfine splitting	$\omega_{hf}$	6834.68261090434(3) MHz
$ 1, -1\rangle$ s-wave scattering length	$a_{11}$	100.44 $a_0$
$ 1, -1\rangle/ 2, 1\rangle$ s-wave scattering length	$a_{12}$	98.09 $a_0$
$ 2, 1\rangle$ s-wave scattering length	$a_{22}$	95.47 $a_0$

Figura B.1: Propriedades do  $^{87}\text{Rb}$ .

# Apêndice C

## Resfriamento Sub-Doppler e Evaporativo

### C.1 Resfriamento Sub-Doppler

O meio viscoso para resfriamento de átomos neutros denominado melão ótico, apresentado na seção 1.3, foi inicialmente descrito pela teoria Doppler. Nesta teoria é previsto uma temperatura limite para o resfriamento dos átomos dentro do melão. Devido ao caráter randômico da emissão espontânea, são geradas flutuações em torno do valor médio da força radiativa, que por sua vez provoca um aquecimento dos átomos no melão. Por exemplo, cada emissão espontânea se faz em uma direção aleatória, e transfere então um recuo aleatório de módulo  $\hbar k$  ao átomo. Como para o movimento Browniano [136], podemos caracterizar este aquecimento por um coeficiente de difusão em impulsão  $D_p$  e mostrar que a competição **resfriamento-aquecimento** conduz a uma distribuição térmica para os átomos do melão. A temperatura mínima de equilíbrio é obtida para uma dessintonia laser igual a meia largura natural da transição atômica  $\frac{\Gamma}{2}$  sendo dada por:

$$k_B T_{Dop} = \frac{D_p \tau_v}{m} = \frac{\hbar \Gamma}{2}, \quad (\text{C.1})$$

para  $\delta = -\frac{\Gamma}{2}$ .

Este limite Doppler, que é válido para melões em uma e três dimensões, conduz a temperaturas da ordem da centena de  $\mu K$ . De fato, as primeiras medidas da temperatura da nuvem atômica no melão ótico (realizadas em 1985) estavam em concordância com a predição teórica que apontava para a existência deste limite Doppler. Entretanto, em 1988, W. Philips refez estas medidas sistematicamente através de uma técnica de tempo de voo dos átomos da nuvem e observou uma temperatura da nuvem atômica no melão inferior à estabelecida pelo limite Doppler, da ordem de poucos  $\mu K$ . As medidas de W.

Philips foram em seguida ratificadas por outros grupos. Para interpretar tal resfriamento dos átomos no melaço ótico abaixo do limite Doppler, C. Cohen-Tannoudji e S. Chu propuseram (independentemente) a existência de novos mecanismos de resfriamento, até então desconhecidos, e criaram as bases da teoria do resfriamento sub-Doppler. Em essência, o que está por trás desses novos mecanismos é o fato dos átomos estudados experimentalmente não serem simples sistemas de dois níveis, mas possuírem um estado fundamental composto por vários subníveis Zeeman. Estes novos mecanismos surgem de uma combinação de bombeamento ótico, deslocamentos luminosos e gradientes de polarização da luz laser. Neste apêndice, discutimos sobre o mais eficaz dos mecanismos de resfriamento sub-Doppler, que é denominado de resfriamento Sísifo.

## Bombeamento Ótico

Bombeamento ótico foi um dos primeiros exemplos de manipulação de átomos por luz [137]. Ele usa excitação ressonante de átomos por luz circularmente polarizada para transferir para os átomos parte de momento angular transportado pela luz. Ele é baseado sobre a existência das regras de seleção para transição (associada a absorção e emissão de fótons) entre os subníveis Zeeman do átomo, a saber: para luz polarizada linearmente são permitidas transições apenas para  $\Delta m_j = 0$ ; para luz circularmente polarizada  $\Delta m_j = \pm 1$ . Por exemplo [figura (C.1)], para a transição  $J_f = \frac{1}{2} \leftrightarrow J_e = \frac{1}{2}$  apenas átomos no subnível  $m_f = -\frac{1}{2}$  podem absorver luz polarizada  $\sigma^+$ . Os elétrons no subnível  $m_f = -\frac{1}{2}$  são excitados para o subnível  $m_e = +\frac{1}{2}$  e a partir deste subnível podem decair novamente no subnível  $m_f = -\frac{1}{2}$  (por um fóton circularmente polarizado) ou para o subnível  $m_f = +\frac{1}{2}$  por emissão espontânea de um fóton linearmente polarizado  $\pi$ . Os elétrons no estado  $m_f = +\frac{1}{2}$  são aprisionados neste estado porque não podem mais serem excitado por luz  $\sigma^+$ , ou seja, ouve um bombeamento ótico de elétrons do subnível  $m_f = -\frac{1}{2}$  para o subnível  $m_f = +\frac{1}{2}$ .

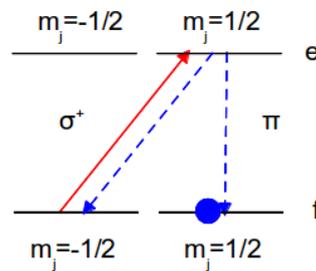


Figura C.1: Ilustração do bombeio ótico para a transição  $J_f = \frac{1}{2} \leftrightarrow J_e = \frac{1}{2}$ .

## Deslocamento Luminosos

Excitação ótica não ressonante produz deslocamentos luminosos dos subníveis Zeeman do estado fundamental [138]. Por causa das regras de seleção para polarização da luz

(apresentadas na seção 2.4.1) os deslocamentos luminosos dependem da polarização da luz de excitação e variam em geral de um subnível Zeeman para outro. Considere por exemplo a transição  $J_g = \frac{1}{2} \leftrightarrow J_e = \frac{1}{2}$  [figura (C.2a)]. A luz polarizada  $\sigma^+$  desloca apenas o subnível Zeeman  $m_g = -\frac{1}{2}$ , enquanto que a excitação polarizada  $\sigma^-$  desloca apenas o subnível  $m_g = +\frac{1}{2}$  [figura (C.2b)]. Estes deslocamentos luminosos podem ser interpretados como uma correção radiativa devido a uma interação do átomo com o campo incidente.

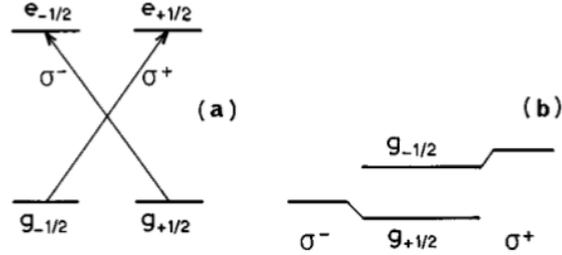


Figura C.2: Ilustração dos deslocamentos luminosos. Para a transição  $J_g = \frac{1}{2} \leftrightarrow J_e = \frac{1}{2}$  (a), a luz não ressonante polarizada  $\sigma^+$  desloca apenas o subnível  $g = -\frac{1}{2}$  (parte direita de (b)), enquanto que a excitação polarizada  $\sigma^-$  desloca o subnível  $g = +\frac{1}{2}$  (parte esquerda de (b)). A dessintonia  $\delta$  é positiva e muito grande comparada a quebra Zeeman em  $e$  e em  $g$  [137].

## O resfriamento Sísifo

Muitos átomos, em particular os alcalinos, possuem uma estrutura Zeeman no estado fundamental. Uma vez que a dessintonização usada no resfriamento por laser não é bastante grande comparado à  $\Gamma$  (largura de linha natural transição atômica), ambos os deslocamentos luminosos e o bombeamento ótico existem para vários subníveis Zeeman do estado fundamental. Entretanto, nos experimentos para resfriamento, a polarização da luz varia no espaço fazendo com que as taxas de deslocamento luminoso e de bombeamento ótico dependam da posição. Mostramos nesta seção, com um simples exemplo unidimensional, como a combinação destes vários efeitos (deslocamento luminoso, bombeamento ótico, gradientes de polarização) pode levar a um eficiente mecanismo de resfriamento [139].

Consideramos a configuração laser da figura (C.3a), que consiste em duas ondas planas contrapropagantes ao longo do eixo  $z$ , com polarizações lineares ortogonais e com mesma frequência e a mesma intensidade. Como o deslocamento de fase entre as duas ondas cresce linearmente com  $z$ , a polarização do campo total varia de  $\sigma^+$  para  $\sigma^-$  e vice-versa a cada  $\frac{\lambda}{4}$ . No meio, é elíptica ou linear.

Consideramos agora o caso simples, onde o estado fundamental atômico tem um momento angular  $J_g = \frac{1}{2}$ . Como já discutido, os dois subníveis Zeeman  $M_g = \pm\frac{1}{2}$  sofrem diferentes deslocamentos luminosos dependendo da polarização laser, de modo que a degenerescência Zeeman é removida para o campo magnético nulo. Isto resulta no diagrama

de energia da figura (C.3b) mostrando as modulações espaciais da quebra Zeeman dos dois subníveis do estado fundamental com um período de  $\frac{\lambda}{2}$ .

Se a dessintonização  $\delta$  não é muito grande comparada com  $\Gamma$ , há também absorções reais de fótons pelo o átomo seguidas de emissão espontânea que dão origem ao bombeamento ótico entre os sub-níveis, cujo sentido depende da polarização:  $M_g = -\frac{1}{2} \leftrightarrow M_g = +\frac{1}{2}$  para a polarização  $\sigma^+$ ,  $M_g = +\frac{1}{2} \leftrightarrow M_g = -\frac{1}{2}$  para a polarização  $\sigma^-$ . Aqui também, a modulação espacial da polarização laser resulta em uma modulação espacial das taxas de bombeamento ótico com um período  $\frac{\lambda}{2}$  [setas verticais da figura (C.3b)].

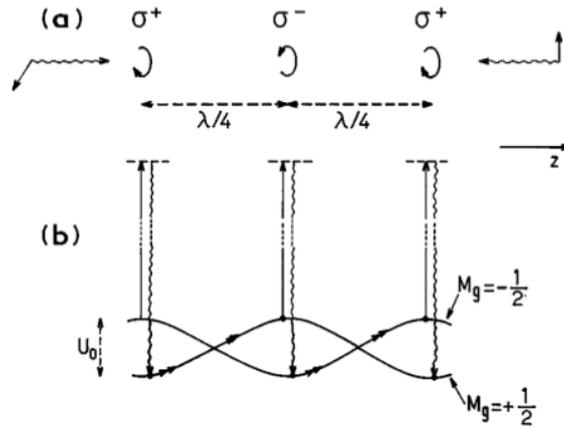


Figura C.3: Princípio do resfriamento Sísifo [137]. Ver texto.

As duas modulações espaciais dos deslocamentos luminosos e das taxas de bombeamento ótico são naturalmente correlacionadas porque elas são produzidas devido à mesma causa, a modulação espacial da polarização da luz. Estas correlações aparecem claramente na figura (C.3b). Com o sinal apropriado da dessintonização, o bombeamento ótico sempre transfere átomos do maior subnível Zeeman para o menor.

Suponhamos agora que o átomo está se movendo para a direita, a partir do fundo de um vale, por exemplo no estado  $M_g = +\frac{1}{2}$  num ponto onde a polarização da luz é  $\sigma^+$ . Devido ao valor finito do tempo de bombeamento ótico, há um intervalo de tempo entre as variáveis internas e externas e o átomo pode subir a curva de potencial antes absorver um fóton e chegar ao topo da curva. Onde ele tem a máxima probabilidade de ser óticamente bombeado para o outro sub-nível, ou seja, no fundo de um vale, e assim por diante [setas duplas da figura (C.3b)]. Como Sísifo na mitologia grega, que estava sempre rolando uma pedra da encosta, o átomo está sempre subindo a curva de potencial. Quando ele sobe uma curva de potencial, sua energia cinética é transformada em energia potencial. Ocorre então dissipação de energia pela luz, uma vez que o fóton emitido espontaneamente tem uma energia maior do que o fóton absorvido. Depois de cada ciclo Sísifo, a energia total  $E$  do átomo diminui de uma quantidade  $U_0$ , onde  $U_0$  é a profundidade dos poços de potencial ótico da figura (C.3b), até  $E$  se tornar menor de que  $U_0$ , caso em que o átomo permanece preso nos poços potenciais.

A discussão anterior mostra que Sísifo resfriamento leva a temperaturas  $T_{Sis}$  tal que  $k_B T_{Sis} \simeq U_0$ . O deslocamento luminoso  $U_0$  é proporcional a  $\hbar\Omega^2/\delta$  quando  $4|\delta| > \Gamma$ . Tal dependência de  $T_{Sis}$  com a frequência Rabi  $\Omega$  e sobre a dessintonia  $\delta$  foi verificada experimentalmente com átomos de césio. No regime de intensidade baixa, o deslocamento luminoso  $U_0 \propto \hbar\Omega^2/\delta$  é muito menor do que  $\hbar\Gamma$ . Isso explica porque o resfriamento Sísifo leva a temperaturas muito mais baixas do que as realizáveis com resfriamento Doppler. Não podemos, no entanto, diminuir a intensidade do laser indefinidamente. A discussão anterior ignora o récuo devido aos fótons emitidos espontaneamente, o que aumenta a energia cinética do átomo por uma quantidade na ordem de  $E_R$ , onde:

$$E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (\text{C.2})$$

é a energia de recuo de um átomo absorvendo ou emitindo um único fóton. Quando  $U_0$  se torna na ordem de ou menor do que  $E_R$ , o resfriamento devido ao efeito Sísifo se torna mais fraco do que o aquecimento devido ao recuo, e assim o resfriamento Sísifo não funciona mais. Isto mostra que as temperaturas mais baixas que podem ser alcançadas com um tal esquema são da ordem de alguns  $E_R/k_B$ . Este resultado é confirmado por uma teoria quântica completa do resfriamento Sísifo e está em boa concordância com os resultados experimentais. A temperatura mínima é da ordem de  $10E_R/k_B$ .

## C.2 Resfriamento Evaporativo

Vamos começar descrevendo a forma mais importante de confinarmos átomos frios previamente ao resfriamento evaporativo: o aprisionamento magnético. Para entendermos o princípio do aprisionamento magnético, vamos considerar os estados eletrônicos de um átomo de hidrogênio na presença de um campo magnético estático [figura (C.4)]. A combinação do spin eletrônico com o spin nuclear gera dois possíveis estados para o estado fundamental do átomo de hidrogênio:  $F = 1$  ou  $F = 0$ , onde  $F$  representa o spin total do átomo resultante dessa combinação [140]. Esta distribuição de níveis constitui a chamada estrutura hiperfina do hidrogênio. Na presença de um campo magnético estes níveis se abrem em subníveis de acordo com a projeção do spin total na direção do campo. Como função do campo magnético aplicado, há um grupo de estados com energia crescente com o campo magnético e um outro com energia decrescente com o campo magnético. Átomos nos estados cuja energia cresce com o campo magnético podem ser naturalmente aprisionados num mínimo de campo. O princípio de minimização da energia implica na existência de uma força empurrando o átomo na direção do mínimo, transformando este mínimo num ponto de equilíbrio estável. É desta forma que átomos nestes estados ficam aprisionados no mínimo do campo magnético. Átomos nos estados cuja energia decresce com o campo seriam aprisionados em máximos de campo magnético. No entanto, as

equações de Maxwell permitem produzir mínimos de campo e não máximos num espaço livre de corrente, de modo que os estados cuja energia aumenta com o campo são aqueles aprisionáveis e, conseqüentemente, aqueles com os quais faremos nossa explanação.

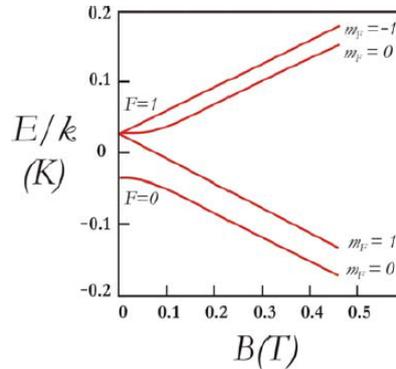


Figura C.4: Estados hiperfinos do átomo de hidrogênio na presença de um campo magnético.

A primeira demonstração de aprisionamento atômico em campos magnéticos foi feita se utilizando átomos de sódio, [140] (que é um átomo essencialmente hidrogenóide), onde o mínimo de campo era produzido através de duas bobinas alinhadas carregando correntes opostas. O campo é zero no centro geométrico do sistema e cresce linearmente em todas as direções, tornando este ponto um mínimo absoluto, aprisionando átomos [142]. Esta configuração é chamada de armadilha de quadrupolo e ainda hoje é largamente utilizada no aprisionamento magnético de átomos neutros. Estas armadilhas magnéticas são usualmente bastante rasas, podendo aprisionar somente átomos com baixas velocidades sendo, portanto, essencial a existência de um método de resfriamento atômico prévio (melaço ótico).

Átomos aprisionados em armadilhas magnéto-ótica podem ser resfriados utilizando o processo de resfriamento evaporativo. Este processo se baseia no fato de que se removermos as partículas mais energéticas de um sistema em equilíbrio, o restabelecimento do equilíbrio resfria o sistema como um todo. Imagine um gas contido num recipiente obedecendo a uma distribuição de velocidades do tipo Maxwell-Boltzmann [figura ( C.5a)], [143]. Por meio de um mecanismo apropriado vamos remover os átomos com velocidade acima de  $v_e$ , produzindo uma distribuição truncadaca como mostrado na figura ( C.5b). Esta distribuição truncada vai retornar a uma distribuição de Maxwell-Boltzmann através da retermalização de seus constituintes. Para que isto ocorra, a parte da distribuição que ficou deverá repor as classes de velocidade faltantes. Isto ocorre às custas de todo sistema resfriar um pouco, de modo que a nova distribuição não somente tenha um número menor de partículas mas também uma temperatura mais baixa [figura ( C.5c)]. O processo de resfriamento evaporativo é importante porque permite atingir temperaturas extremamente baixas com o custo da perda de certa fração das partículas.

A forma prática de implementar este processo em armadilhas magnéticas está devi-

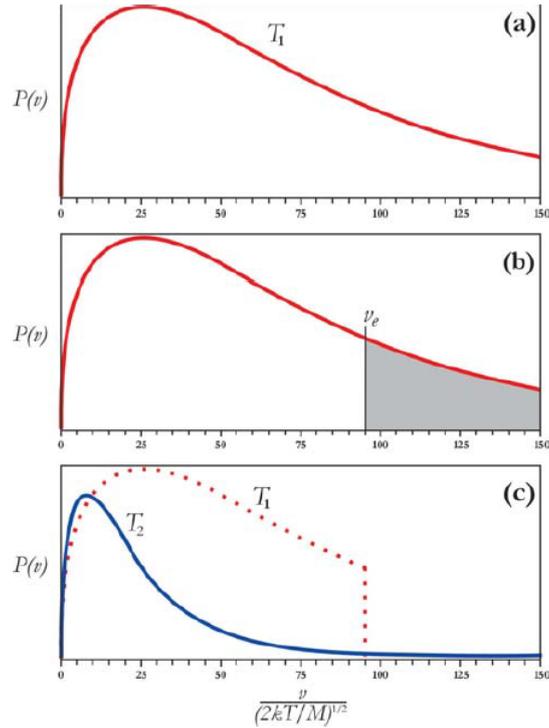


Figura C.5: (a) Distribuição de Maxwell-Boltzmann para um gás a temperatura  $T_1$ ; (b) partículas com velocidade  $v > v_e$  são removidas da distribuição produzindo um sistema fora do equilíbrio; (c) rethermalizando, as componentes de alta velocidade são repopuladas e a nova temperatura do sistema é  $T_2 < T_1$  [35].

damente esquematizada na figura (C.6). Devido a existência de estados eletrônicos cuja energia aumenta com a amplitude do campo magnético e outros cuja energia diminui com o aumento da amplitude do campo, a mesma configuração espacial de campo magnético pode ser vista por um átomo como confinante ou repulsiva, de acordo com seu estado eletrônico. Assim, os átomos que estão em um estado que sente um potencial confinante, são ditos estar em um "estado aprisionável". Por outro lado, átomos no estado cuja energia diminui com o aumento do campo, sentem um potencial invertido com relação ao anterior, de modo que não podem ser aprisionados na armadilha, sendo repelidos da região do mínimo de campo. A energia de separação entre estes dois estados depende do valor do campo magnético e, portanto, será espacialmente dependente. Utilizando fótons de radiofrequência (RF) (A porção do espectro eletromagnético de RF possui frequências que variam de cerca de 3 KHz até 300 GHz, comprimento de onda de 1 mm até 100 km, energia do fóton 0,01 neV a 1,24 meV), somos capazes de levar o átomo de um estado aprisionável para outro não aprisionável. Assim, se escolhermos a energia dos fótons de RF tal que átomos em campos elevados são os que podem fazer a transição de um estado para outro, estaremos removendo da armadilha os átomos mais energéticos, como mostrado na figura (C.6). Os átomos que ficam na armadilha vão rethermalizando, resfriando toda a amostra. Uma vez que a maioria dos átomos que atingirem o valor do campo escolhido

forem removidos, se pode baixar o valor da energia da RF, removendo mais átomos e tornando a amostra mais e mais fria. Este procedimento continua produzindo amostras em temperaturas cada vez mais baixas.

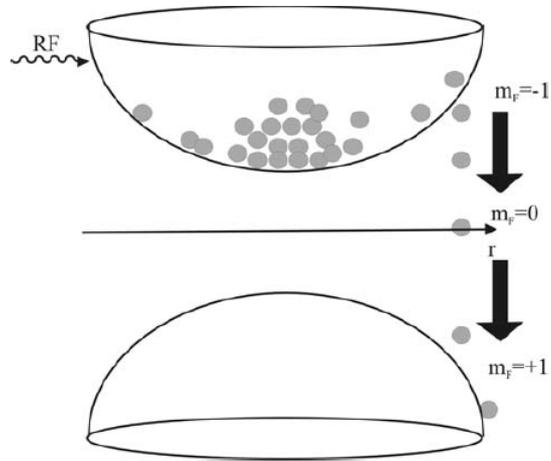


Figura C.6: Esquema da técnica da evaporação para átomos magneticamente aprisionados [35].

# Apêndice D

## O teorema adiabático e a fase de Berry

Em 1984, Berry fez uma descoberta surpreendente de que um sistema quântico transportado adiabaticamente em torno de um caminho fechado  $\mathcal{C}$  no espaço dos parâmetros externos, adquire, além da bem conhecida fase dinâmica, uma fase não-integrável que depende apenas da geometria do circuito  $\mathcal{C}$  [46], denominada fase de Berry. Esta fase, que foi negligenciada por mais de 60 anos desde o desenvolvimento da mecânica quântica, nos oferece uma visão muito profunda sobre a estrutura geométrica da mecânica quântica e dá origem a vários efeitos observáveis. O conceito de Berry se tornou um conceito central e unificador em mecânica quântica, com aplicações em áreas que vão desde a química à física da matéria condensada [144,145]. O objetivo do presente apêndice é apresentar uma introdução elementar à fase de Berry, e aplicá-la a um sistema físico simples.

### D.1 O Teorema Adiabático

A aproximação adiabática, que se aplica quando a escala de time na qual varia um Hamiltoniano (dependente do tempo) é longa comparada com os períodos de oscilação quânticos típicos. Afirma que se um sistema se encontra inicialmente em um autoestado  $|\psi_n(\vec{r}, t)\rangle$  em um instante  $t_i$ , então, em qualquer instante posterior ele permanecerá neste mesmo autoestado, porém desenvolve um simples fator de fase dinâmico:

$$e^{-i \int_{t_i}^{t_f} E_n(t) dt},$$

onde  $E_n(t)$  e  $|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle$  são os autovalores, autofunções "instantâneas" do Hamiltoniano dependente do tempo  $H(t)$ , satisfazendo:

$$H(t)|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle = E_n(t)|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle.$$

É observado frequentemente na dedução do teorema adiabático que temos a liberdade de ajustarmos a fase dos autoestados instantâneos arbitrariamente. Contudo, isto nem sempre é o caso. Especificamente, em circunstâncias onde no tempo  $t = t_f$  o Hamiltoniano  $H(t)$  do sistema retorna depois de uma evolução adiabática para sua forma em  $t = t_i$ , pode surgir um fator de fase topológico adicional:

$$e^{i\gamma_n(t)},$$

onde

$$\gamma_n(t) = i \oint \langle \psi_n(\mathbf{R}_i) | \nabla_{\mathbf{R}_i} \psi_n(\mathbf{R}_i) \rangle \cdot d\mathbf{R}_i.$$

Aqui,  $\mathbf{R}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) denota um conjunto de parâmetros dependentes do tempo dos quais o Hamiltoniano depende. Como a presença de tal fator topológico foi percebido por Berry, a fase  $\gamma_n(t)$  é denominada de fase de Berry.

## D.2 Dedução da Fase de Berry

Considere um Hamiltoniano

$$H(\mathbf{R}_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

que depende de um conjunto de parâmetros dependentes do tempo  $\mathbf{R}_i(t)$ . Um exemplo seria a dependência em relação a um campo vetorial dependente do tempo. Neste caso,  $k = 3$  e os parâmetros são as três componentes independentes do campo vetorial. Contudo, nesta seção trataremos do caso geral.

Supomos que a taxa de variação dos parâmetros  $\mathbf{R}_i(t)$  é muito mais lenta do que uma frequência orbital típica  $\Delta E_n(t)$ , de maneira que a condição adiabática é atingida. Assim, o teorema adiabático garante que um sistema que encontra inicialmente em um autoestado  $|\psi_n(\mathbf{r}, t_i)\rangle$ , em um tempo  $t_i$ , evoluirá quase completamente no autoestado  $|\psi_n(\mathbf{r}, t_f)\rangle$  no tempo  $t_f$ . Aqui, nos concentraremos no fator de fase que acompanha  $|\psi_n(\mathbf{r}, t_f)\rangle$ . Escrevendo a solução geral para a equação de Schrödinger como  $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$  com:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = H(\mathbf{R}_i(t)) |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad (\text{D.1})$$

definimos

$$|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle \equiv |\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle e^{\int_{t_i}^t E_n(t') dt'} e^{i\gamma_n(t)},$$

e encontramos

$$\gamma_n(t) = i \int \langle \psi_n(\mathbf{r}, t) | \dot{\psi}_n(\mathbf{r}, t) \rangle d\mathbf{r}.$$

Uma vez que  $|\psi_n\rangle$  depende do tempo através dos parâmetros  $\mathbf{R}_i(t)$  (i.e.,  $|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle$  seria

independente do tempo se  $R_i(t) = \text{constante}$ ), podemos escrever:

$$|\psi_n(\mathbf{r}, t)\rangle \equiv |\psi_n(\mathbf{r}, R_i(t))\rangle,$$

e

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \int \sum_i \langle \psi_n(\mathbf{r}, R_i(t)) | \nabla_{R_i} | \psi_n(\mathbf{r}, R_i(t)) \rangle \dot{R}_i(t) d\mathbf{r}.$$

Com

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_k(t) \end{pmatrix},$$

como um vetor coluna com  $k$  componentes podemos expressar o resultado em uma notação simplificada:

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle n, \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t).$$

Até aqui, não existe nada de novo e a existência deste fator de fase  $\gamma_n(t)$  em adição ao fator de fase dinâmico

$$e^{-i \int_{t_i}^t E_n(R_i(t)) dt'}$$

já era conhecido a um longo tempo. Foi por muito tempo assumido que  $\gamma_n(t)$  poderia ser eliminado pela redefinição da fase do autoestado  $|n, \mathbf{R}(t)\rangle$ . Berry, contudo, percebeu que tal fase é observável quando a evolução temporal traz o vetor parâmetro  $\mathbf{R}(t)$  de volta para seu ponto inicial (i.e.,  $\mathbf{R}(t_f) = \mathbf{R}(t_i)$ ), pelo que o vetor estado  $|n, \mathbf{R}(t_f)\rangle$  pode interferir com  $|n, \mathbf{R}(t_i)\rangle$ . Esta quantidade, que pode ser escrita como:

$$\gamma_n(t) = i \int_{t_i}^{t_f} \langle n, \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) dt,$$

ou ainda como:

$$\gamma_n(t) = i \oint \langle n, \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle \cdot d\mathbf{R},$$

é denominada fase de Berry e é um observável.

### D.3 A Fase de Berry como um Campo de Calibre

Que  $\gamma_n(t)$  é um parâmetro físico pode ser enfatizado expressando o resultado da seção anterior em uma notação sugestiva

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = \langle n, \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle \cdot d\mathbf{R},$$

de forma que

$$\gamma_n(t) = \oint \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} \quad (\text{D.2})$$

pode ser escrita em termos de uma quantidade semelhante a um potencial vetor. Se redefinirmos a fase do autoestado por uma fase arbitrária  $\phi(\mathbf{R})$ :

$$|n, \mathbf{R}(t)\rangle \rightarrow e^{i\phi(\mathbf{R})}|n, \mathbf{R}(t)\rangle,$$

então

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \nabla_R \phi(\mathbf{R}),$$

o que é análogo a uma transformação de calibre. Obviamente, um observável não pode depender de uma escolha de calibre e é claro que a fase de Berry obedece esta propriedade, uma vez que pelo teorema de Stokes (convenientemente generalizado se  $k \neq 3$ ) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= \oint \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \int \nabla_R \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S} \\ &\rightarrow \int \nabla_R \times [\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \nabla_R \phi(\mathbf{R})] \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int \nabla_R \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Assim,  $\gamma_n(t)$  é um invariante de calibre e não é possível removê-la por uma escolha específica da base de estados do Hamiltoniano.

Um significado físico pode ser atribuído para este potencial vetor se os parâmetros  $R_i(t)$  são quantizados. Isto é, supomos que o Hamiltoniano para um dado sistema é:

$$H' = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{R}, \mathbf{r}),$$

onde

$$H(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\mathbf{R}, \mathbf{r}),$$

é o Hamiltoniano dependente do tempo da equação (D.1). Então, escrevendo a função de onda total como:

$$|\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})\rangle = |n, \mathbf{R}(t)\rangle \chi(\mathbf{R}(t)),$$

encontramos

$$\begin{aligned} H'|\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})\rangle &= E_n(\mathbf{R})|\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})\rangle + |n, \mathbf{R}(t)\rangle \frac{\mathbf{P}^2}{2M} \chi(\mathbf{R}(t)) - i\nabla_R |n, \mathbf{R}(t)\rangle \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{M}\right) \chi(\mathbf{R}(t)) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2M}\right) \nabla_R^2 |n, \mathbf{R}(t)\rangle \chi(\mathbf{R}(t)). \end{aligned}$$

Finalmente, projetando os estados  $|n, \mathbf{R}(t)\rangle$  e negligenciando os elementos de matriz fora

da diagonal ( $\langle n', \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}} | n, \mathbf{R}(t) \rangle \approx 0$ ) encontramos que  $\chi(\mathbf{R}(t))$  obedece a equação de Schrödinger com o Hamiltoniano efetivo:

$$H_{eff} = \frac{1}{2M}(\mathbf{P} - \mathbf{A})^2 + U(\mathbf{R}),$$

onde

$$U(\mathbf{R}) = E_n(\mathbf{R}) - \frac{1}{2M}[\langle n, \mathbf{R}(t) | \nabla_{\mathbf{R}}^2 | n, \mathbf{R}(t) \rangle + \mathbf{A}_n^2(\mathbf{R}(t))].$$

Esta com certeza é simplesmente a abordagem de Born-Oppenheimer para um sistema contendo ambos rápido ( $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ ) e lento ( $\mathbf{R}, \mathbf{P}$ ) graus de liberdade. Observamos que o sistema rápido afeta a dinâmica do seu homólogo lento através da energia potencial  $U(\mathbf{R})$  e de um potencial vetor  $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ . De acordo com a equação (D.2), a fase de Berry é simplesmente a integral de linha deste potencial vetor e pode ser reescrita, pelo teorema de Stokes, em termos de uma integral:

$$\gamma_n(t) = \int \mathbf{B}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S}$$

sobre a superfície limitada pela curva  $\oint d\mathbf{R}$ . Aqui,  $\mathbf{B}_n(\mathbf{R})$  é uma espécie de campo efetivo

$$\mathbf{B}_n(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}),$$

e a fase de Berry se torna o fluxo deste campo através da superfície.

## D.4 Um exemplo da Fase de Berry: partícula de spin-1/2 em um campo magnético

Agora vamos aplicar o formalismo desenvolvido por Berry ao sistema composto por um elétron em repouso na origem, na presença de um campo magnético de magnitude constante  $B_0$ , esfericamente simétrico e que gira adiabaticamente fazendo um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $z$ , com uma velocidade angular constante  $\omega$  (figura(D.1)). O campo

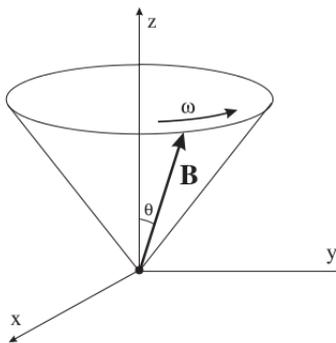


Figura D.1: Partícula de spin-1/2 em um campo magnético descrito pela equação (D.3).

magnético é dado por:

$$\mathbf{B}(t) = B_0[\text{sen}\theta \cos(\omega t)\hat{i} + \text{sen}\theta \text{sen}(\omega t)\hat{j} + \cos\theta\hat{k}]. \quad (\text{D.3})$$

O Hamiltoniano de interação  $H(t)$  para este sistema no referencial em repouso é dado por:

$$H(t) = \mu\mathbf{B}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mu B_0[\text{sen}\theta \cos(\omega t)\sigma_x + \text{sen}\theta \text{sen}(\omega t)\sigma_y + \cos\theta\sigma_z], \quad (\text{D.4})$$

com a constante  $\mu = -\frac{\gamma\hbar}{2}$ , onde  $\gamma$  é o fator giramagnético da partícula. Neste caso, o campo magnético será o parâmetro externo dependente do tempo discutido na seção D.2, ou seja,  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{R}(t)$ . Os autoestados normalizados de  $H(t)$  são:

$$|n_+, \mathbf{R}(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\omega t} \text{sen}(\theta/2) \end{pmatrix},$$

e

$$|n_-, \mathbf{R}(t)\rangle = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta/2) \\ -e^{i\omega t} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Podemos interpretar os autoestados como spin-up  $|n_+, \mathbf{R}(t)\rangle \equiv |\uparrow\rangle$  e spin-down  $|n_-, \mathbf{R}(t)\rangle \equiv |\downarrow\rangle$  ao longo da respectiva direção de  $\mathbf{B}(t)$ . Os autovalores correspondentes são:

$$E_{\pm} = \pm\mu B_0. \quad (\text{D.5})$$

O Hamiltoniano depende de  $\mathbf{B}(t)$  é descrito em função de  $\theta$ ,  $\phi(t) = \omega t$  e  $r = B_0$ . Isto significa que o espaço dos parâmetros é idêntico aos parâmetros valores permitidos de  $\mathbf{B}(t)$  em uma  $S^2$ . Em nossa configuração atual,  $\mathbf{B}(t)$  traça uma curva  $C$  como é mostrado na figura (D.2).

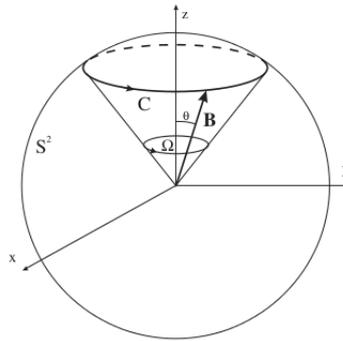


Figura D.2: Espaço dos parâmetros para o campo magnético descrito pela equação (D.3).

O gradiente do autoestado  $|n_{\pm}, \mathbf{R}(t)\rangle$  no espaço do parâmetro  $\mathbf{B}(t)$  é dado pela seguinte expressão:

$$\nabla_R |n_{\pm}, \mathbf{R}(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial r} |n_{\pm}, \mathbf{R}(t)\rangle \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} |n_{\pm}, \mathbf{R}(t)\rangle \hat{\theta} + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} |n_{\pm}, \mathbf{R}(t)\rangle \hat{\phi}.$$

Isto resulta nos autoestados:

$$\begin{aligned}\nabla_R|n_+, \mathbf{R}(t)\rangle &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\text{sen}(\theta/2) \\ \frac{1}{2}e^{i\omega t} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r\text{sen}\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\omega t}\text{sen}(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\phi}, \\ \nabla_R|n_-, \mathbf{R}(t)\rangle &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(\theta/2) \\ -\frac{1}{2}e^{i\omega t}\text{sen}(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\theta} + \frac{1}{r\text{sen}\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ ie^{i\omega t}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \hat{\phi}.\end{aligned}$$

Tomando o produto escalar dos autoestados acima com os correspondentes  $\langle n, \mathbf{R}(t) |$  temos:

$$\begin{aligned}\langle n_+, \mathbf{R}(t) | \nabla_R | n_+, \mathbf{R}(t) \rangle &= \frac{i\text{sen}^2(\theta/2)}{r\text{sen}\theta} \hat{\phi}, \\ \langle n_-, \mathbf{R}(t) | \nabla_R | n_-, \mathbf{R}(t) \rangle &= \frac{i\cos^2(\theta/2)}{r\text{sen}\theta} \hat{\phi}.\end{aligned}$$

Integrando ao longo da curva  $\mathcal{C}$ :  $r = \text{constante}$ ,  $\theta = \text{constante}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  obtemos a seguinte fase de Berry:

$$\gamma_{\pm}(\mathcal{C}) = i \oint \langle n_{\pm}, \mathbf{R}(t) | \nabla_R | n_{\pm}, \mathbf{R}(t) \rangle \cdot (r\text{sen}\theta d\phi) \hat{\phi} = \pm\pi(1 - \cos\theta).$$

A fase acima pode ser expressa em termos do ângulo sólido  $\Omega = \int_0^{\theta} \text{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi(1 - \cos\theta)$ , varrido no caminho fechado  $\mathcal{C}$ , da seguinte forma:

$$\gamma_{\pm}(\mathcal{C}) = \pm\frac{1}{2}\Omega.$$

A fase dinâmica para uma rotação dentro de um período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é dada por:

$$\theta_{\pm}(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_{\pm}(t) dt = \mp \frac{\mu}{\hbar} B_0 T.$$

O estado total depois de uma rotação onde  $\mathbf{B}(T) = \vec{B}(0)$  é dado por

$$|n_{\pm}, \mathbf{R}(T)\rangle = e^{\mp \frac{\mu}{\hbar} B_0 T} e^{\pm\pi(1-\cos\theta)} |n_{\pm}, \mathbf{R}(0)\rangle$$

Percebemos que a fase dinâmica depende do período  $T$  da rotação, porém a fase geométrica depende apenas da geometria do problema. Neste caso, do ângulo  $\theta$  do cone traçado pelo campo magnético.

## D.5 Potencial de Calibre Wilczek-Zee

Na seção D.2 consideramos apenas Hamiltonianos não degenerados. Em 1984, Wilczek e Zee [57] generalizaram a fórmula de Berry para Hamiltonianos degenerados. Este formalismo leva à campos de calibre não abelianos.

O espaço de Hilbert é a soma direta de todos autoespaços  $V_n$  associados com o correspondente autovalor  $E_n$ :

$$H = \oplus_n V_n.$$

No caso não degenerado esses autoespaços são todos unidimensionais. Por outro lado, se houver uma degenerescência de ordem  $k$ , por exemplo, no  $n$ -ésimo autovalor, então o autoespaço correspondente  $V_n$  é  $k$ -dimensional. O autoespaço evolui no tempo e depende dos parâmetros externos  $R$  através de uma equação de autovalores. Uma evolução é chamada cíclica, com um período  $T$ , quando para  $R(0) = R(T)$  os autoespaços também coincidem  $V_n(0) = V_n(T)$ . Podemos obter uma base ortonormal  $\{|\psi_a(t)\rangle, a = 1, \dots, n\}$  para  $V_n(t)$  dada por:

$$H(R(t))|\psi_a(t)\rangle = E_n(R(t))|\psi_a(t)\rangle. \quad (\text{D.6})$$

Exigimos que esta base seja única para cada  $a$ :

$$|\psi_a(T)\rangle = |\psi_a(0)\rangle.$$

Cada vetor de estado  $|\Psi_n(t)\rangle$  que está situado no  $n$ -ésimo autoestado é descrito pela equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle = H(t) |\Psi_n(t)\rangle, \quad (\text{D.7})$$

com a condição inicial

$$|\Psi_n(0)\rangle = |\psi_a(0)\rangle,$$

onde  $|\psi_a(0)\rangle \in V_n$ . Podemos decompor o vetor de estado em uma combinação linear de vetores da base  $|\psi_a(t)\rangle$  como expresso abaixo:

$$|\Psi_n(t)\rangle = \sum_a U_{na}(t) |\psi_a(t)\rangle, \quad (\text{D.8})$$

onde  $U_{na}$  denota uma matriz unitária de mistura\*, que iremos determinar posteriormente. Neste decomposição, já usamos o limite adiabático, pois estamos em um autoespaço de energia sem transições para outros autoespaços.

Se inserimos a equação D.8 na equação de Schrödinger dependente do tempo D.7 e multiplicarmos por  $\langle \Psi_n(t) |$  (a qual nós assumimos ser normalizada) obtemos com a ajuda da equação D.6 os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle &= \frac{E_n}{i\hbar}, \\ \langle \Psi_n(t) | \frac{\partial}{\partial t} U_{nb} |\psi_b(t)\rangle + \langle \Psi_n(t) | U_{nb} \frac{\partial}{\partial t} |\psi_b(t)\rangle &= \frac{E_n}{i\hbar}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_a(t) | U_{na}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} U_{nb} | \psi_b(t) \rangle + \langle \psi_a(t) | U_{na}^{-1} U_{nb} \frac{\partial}{\partial t} | \psi_b(t) \rangle &= \frac{E_n}{i\hbar}, \\ \langle \psi_a(t) | U_{na}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} U_{nb} | \psi_b(t) \rangle + \langle \psi_a(t) | \delta_{n;ab} \frac{\partial}{\partial t} | \psi_b(t) \rangle &= \frac{E_n}{i\hbar},\end{aligned}$$

onde usamos a relação  $U_{na}^{-1} U_{nb} = \delta_{n;ab}$ , que denota a componente ab da matriz unitária  $k$ -dimensional do  $n$ -ésimo autoespaço. Podemos adicionalmente introduzir a matriz anti-hermitiana  $A$  que faz o papel de um potencial de calibre. Esta matriz é definida por:

$$A_{n;ab} = (U^{-1} \frac{\partial}{\partial t} U)_{n;ab} = (\frac{E_n}{i\hbar} - \frac{\partial}{\partial t}) \delta_{n;ab}.$$

Isto resulta em uma equação diferencial para  $U_n$  que é resolvida através de uma integral de caminho:

$$U_n(t) = \mathcal{P} e^{\int_0^t A_n(t') dt'}, \quad (\text{D.9})$$

onde  $\mathcal{P}$  denota o caminho e  $A_n = \langle \psi_a(t) | A_{n;ab} | \psi_b(t) \rangle$ . O potencial de calibre  $A_n$  pode ser decomposto em uma parte dinâmica e uma parte geométrica, sendo a última interpretada como a generalização não Abelianiana da fase de Berry:

$$A_n = \frac{kE_n}{i\hbar} - \langle \psi_a(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_b(t) \rangle,$$

$$A_n = \theta_n - \gamma_n.$$

O fator de fase  $U_n$  (que inclui também uma parte dinâmica) representa a generalização da fase de Berry para o grupo geral  $U(k)$ . Este fator também é um objeto geométrico puro e, por conseguinte, depende apenas da geometria do espaço degenerado. Sob uma transformação unitária dos vetores base:

$$|\psi'_b(t)\rangle = \Omega(t)_{n;ba} |\psi_a(t)\rangle,$$

onde  $\Omega(t)_{n;ba}$  é uma matriz unitária, o potencial de calibre transforma-se da seguinte forma:

$$A'_n(t) = \Omega_n^{-1} A_n \Omega_n + \Omega_n^{-1} \dot{\Omega}_n.$$

Esta é exatamente a lei de transformação para uma transformação de calibre não Abelianiana. Podemos reescrever a equação D.9 em termos do parâmetro  $R$  e em um caminho fechado no espaço dos parâmetros  $C$  na seguinte forma:

$$U(t) = \mathcal{P} e^{\oint_C A^{(R)} dR}.$$

Esta integral é também chamada de laço de Wilson.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bloch, Immanuel et al., *Introduction to Ultracold Quantum Gases*, Instituto Max-Planck para Ótica Quântica, Garching, Palestra.
- [2] D. J. Wineland and W. M. Itano, *Phys. Today* **40**, 34 (1987).
- [3] C. Wieman and S. Chu, Eds., *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2020 (1989).
- [4] C. Cohen-Tannoudji, and W. D. Phillips, *Phys. Today* **43**, 33 (1990).
- [5] A. E. Leanhardt, T. A. Pasquini, M. Saba, A. Schirotzek, Y. Shin, D. Kielpinski, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Science* **301** 5639 (2003).
- [6] A. Einstein, *Quantum theory of monatomic ideal gases*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Physikalisch-Mathematische Klasse* **261** (1924).
- [7] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269** (1995).
- [8] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [9] Y. J. Lin *et al.*, *Nature* **462**, 628 (2009).
- [10] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, (1998).
- [11] P. Meystre, *Atom Optics*, American Institute of Physics, (2001).
- [12] C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2001).
- [13] L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford, (2003).
- [14] T. W. Hansch and A. L. Schawlow, *Opt. Comm.* **13**, 68, (1975).
- [15] D. Wineland and H. Demelt *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637, (1975).

- [16] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toscheck and H. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **41**, 233, (1978).
- [17] D. Wineland, R. Drullinger and F. Walls, Phys. Rev. Lett. **40**, 1639, (1978).
- [18] W. Phillips and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **48**, 596, (1982); J. Prodan, W. Phillips and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **49**, 1149, (1982); J. Prodan, A. Migdall, W. Phillips, I. So, H. Metcalf and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **54**, 992, (1985).
- [19] S. Chu, L. Holberg, J. Bjorkman, A. Cable and A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **55**, 48, (1985).
- [20] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. Opt. Soc. Am. B, **2023**, (1989).
- [21] A. Migdall, J. Prodan, W. Phillips, T. Bergeman and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **54**, 2596, (1985).
- [22] D. Pritchard, E. Raab, V. Bagnato, C. Wieman and R. Watts, Phys. Rev. Lett. **57**, 310, (1986).
- [23] A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **40**, 729, (1978).
- [24] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable and S. Chu, E. Prichard, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631, (1987).
- [25] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson and C. Wieman, Phys. Rev. Lett. **65**, 1571, (1990).
- [26] D. Pritchard, E. Raab, V. Bagnato, C. Wieman and R. Watts, Phys. Rev. Lett. **57**, 310, (1986).
- [27] R. J. Cook, Phys. Rev. A **20**, 224, (1979); R. J. Cook, Phys. Rev. Lett. **40**, 729, (1978).
- [28] L. Allen and J. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover, New York, (1987).
- [29] P. A. Nussenzveig, *Tese de Doutorado*, Universidade de Paris 6.
- [30] G. K. Woodgate, *Elementary Atomic Structure*, McGraw-Hill, New York, (1970); H. G. Kuhn, *Atomic Spectra* Longmans, London, (1971).
- [31] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Mécanique Quantique*, Vols. 1 e 2, Hermann, Paris, (1973).
- [32] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987).

- [33] A. Cable, M. Prentiss and N. P. Bigelow, *Opt. Lett.* **15**, 507 (1990).
- [34] Olivier Morizot, *Tese de doutorado*, Universidade Paris XIII.
- [35] E. A. L. Henn et al., *Brazilian Journal of Physics* **38**, 278 (2008).
- [36] G. Raithel, *Bose-Einstein Condensation*, <http://cold-atoms.physics.lsa.umich.edu/projects/bec/index.html> (Acesso em 12/2014).
- [37] W. Ketterle, *"Encyclopedic definition" of Bose-Einstein condensation*, McGraw-Hill Encyclopedia of Science & Technology, 9th Edition, in print.
- [38] T. Esslinger, I. Bloch and T.W. Hänsch, *Phys. Rev. A* **58**(4) 2664, 1998.
- [39] W. Ketterle and M.J. van Druten, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **37**, 181 (1996).
- [40] O. Zobay and B.M. Garraway, *Phys. Rev. Lett.* **86** 1195, (2001).
- [41] Y. Colombe, E. Knyazchyan, O. Morizot, B. Mercier, V. Lorent, and H. Perrin, *Europhys. Lett.* **67** 593, (2004).
- [42] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467, (1982).
- [43] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885, (2008).
- [44] I. Buluta and F. Nori, *Science* **326**, 108, (2009).
- [45] Aharonov, Y. and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [46] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. A* **392**, 45 (1984).
- [47] R. Dum, and M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1788 (1996).
- [48] N. R. Cooper, *Adv. Phys.* **57**, 539 (2008).
- [49] A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
- [50] C. A. Mead and D. G. Truhlar, *J. Chem. Phys.* **70**, 2284 (1979).
- [51] R. Jackiw, *Comments At. Mol. Phys.* **21**, 71 (1988).
- [52] M. V. Berry, *In Geometric Phases in Physics*, edited by A.vShapere and F. Wilczek (World Scientific, Singapore), p. 7 (1989).
- [53] J. Moody, A. Shapere and F. Wilczek, *In Geometric Phases in Physics*, edited by A. Shapere and F. Wilczek, World Scientific, Singapore, p. 160 (1989).
- [54] C. A. Mead, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 51 (1992).

- [55] Y. Aharonov and A. Stern, Phys. Rev. Lett. **69**, 3593 (1992).
- [56] M. Cheneau, S. P. Rath, T. Yefsah, K. J. Gunter, G. Juzeliūnas and J. Dalibard, Europhys. Lett. **83**, 60 001 (2008).
- [57] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **52** 2111 (1984).
- [58] J. Moody, A. Shapere and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **56** 893 (1986).
- [59] J. Ruseckas, G. Juzeliūnas, P. Öhberg, and M. Fleischhauer, Phys. Rev. Lett. **95**, 010404 (2005).
- [60] R.G. Unanyan, M. Fleischhauer, B.W. Shore, K. Bergmann, Opt. Commun. **155** 144 (1998).
- [61] J. Moody, A. Shapere and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **56**, 893 (1986).
- [62] K. Osterloh, M. Baig, L. Santos, P. Zoller and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **95**, 010403 (2005); A. Jacob, P. Öhberg, G. Juzeliūnas and L. Santos, Appl. Phys. B **89**, 439 (2007).
- [63] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, M. Lindberg, L. Santos and P. Öhberg, Phys. Rev. A **77**, 011802(R) (2008).
- [64] J. Larson and E. Sjöqvist, 2009, Phys. Rev. A **79**, 043627.
- [65] I. I. Satija, D. C. Dakin and C. W. Clark, Phys. Rev. Lett. **97**, 216401 (2006); A. Jacob, P. Öhberg, G. Juzeliūnas and L. Santos, New J. Phys. **10**, 045022 (2008); G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, A. Jacob, L. Santos and P. Öhberg, Phys. Rev. Lett. **100**, 200405 (2008); M. Burrello and A. Trombettoni, Phys. Rev. Lett. **105**, 125304 (2010); M. Burrello and A. Trombettoni, Phys. Rev. A **84**, 043625 (2011).
- [66] L. Landau, Z. Phys **64**, 629 (1930).
- [67] L. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **7**, 627 (1937); L. Landau, Phys. Z. Sowjetunion **11**, 545 (1937).
- [68] W. de Haas and P. van Alphen, Comm. Phys. Lab. Leiden **212a** (1930).
- [69] W. Shubnikov and W. de Haas, Proc. Acad. Sci., Amt. **33**, 418 (1930); W. de Haas and W. Shubnikov, Leid. Commun. **207**, 210 (1930).
- [70] K. von Klitzing, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986). D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [71] L. Onsager, Phil. Mag. **43**, 1006 (1952).

- [72] A. Abrikosov, *Introduction to the Theory of Normal Metals*, Solid State Physics: Supplement, Academic Press, New York, (1972).
- [73] N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College, Philadelphia, (1976).
- [74] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Sixth edition, John Wiley and Sons Inc., New York, (1986).
- [75] Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 3503-3517 (2010).
- [76] I. M. Lifshits and A. M. Kosevich, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **29**, 730 (1955). [Sov. Phys. JETP **2**, 636 (1956)].
- [77] R. Peierls, Z. Phys. **81**, 186 (1933).
- [78] D. Shoenberg and J. Low Temp. Phys. **56**, 417 (1984); D. Shoenberg, *Magnetic oscillations in metals*, Cambridge University Press, London, (1984).
- [79] K. Jauregui, V. I. Marchenko and I. D. Vagner, Phys. Rev. B **41**, Rapid Comm., 12922 (1990).
- [80] T. Champel and V. P. Mineev, Philos. Mag. B **81**, 55 (2001).
- [81] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen De and U. Sen, Adv.Phys. **56**, 243 (2007).
- [82] A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
- [83] K. Osterloh, M. Baig, L. Santos, P. Zoller and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **95**, 010403 (2005).
- [84] X. -J. Liu, M. F. Borunda, X. Liu and J. Sinova, Phys. Rev. Lett. **102**, 046402 (2009).
- [85] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas and P. Öhberg, Rev. Mod. Phys. **83**, 1523 (2011).
- [86] B. Farias, J. Lemos de Melo and C. Furtado, *Residual Degeneracy from Non-Degenerate Landau Levels of Ultracold Atomic Gas in an Abelian Gauge Field*, submetido para publicação no Ann. Phys.
- [87] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, A. Jacob, L. Santos and P. Öhberg, Phys. Rev. Lett. **100**, 200405 (2008).
- [88] Shi-Liang Zhu, Hao Fu, C. -J. Wu, S.-C. Zhang and L.-M. Duan, Phys. Rev. Lett. **97**, 240401 (2006).

- [89] A. Jacob, P. Öhberg, G. Juzeliūnas and L. Santos, *Appl. Phys. B* **89**, 439-445 (2007).
- [90] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, A. Jacob, L. Santos and P. Öhberg, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 200405 (2008).
- [91] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, M. Lindberg, L. Santos and P. Öhberg, *Phys. Rev. A* **77**, 011802(R) (2008).
- [92] N. Goldman, A. Kubasiak, A. Bermudez, P. Gaspard, M. Lewenstein and M. A. Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 035301 (2009).
- [93] M. Mehl, G. Juzeliūnas and P. Öhberg, *Eur. Phys. J. D*, **59**, 257-267 (2010).
- [94] Victor Galitski and Ian B. Spielman, *Nature (London)* **494**, 49 (2013).
- [95] G. Juzeliūnas and P. Öhberg, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 033602 (2004).
- [96] P. Öhberg, G. Juzeliūnas, J. Ruseckas and M. Fleischhauer, *Phys. Rev. A* **72**, 053632 (2005).
- [97] Indubala I. Satija, Daniel C. Dakin, J. Y. Vaishnav and Charles W. Clark, *Phys. Rev. A* **77**, 043410 (2008).
- [98] A. Jacob, P. Öhberg, G. Juzeliūnas and L. Santos, *New J. Phys.* **10**, 045022 (2008).
- [99] B. Estienne, S. Haaker and K. Schoutens, *New J. Phys.* **13**, 045012 (2011).
- [100] M. Burrello and A. Trombettoni, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 125304 (2010).
- [101] M. Burrello and A. Trombettoni, *Phys. Rev. A* **84**, 043625 (2011).
- [102] Bikash Padhi and Sankalpa Ghosh, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 043603 (2013).
- [103] B. Farias, J. Lemos de Melo and C. Furtado, *Eur. Phys. J. D* **68**, 77 (2014).
- [104] Lowell S. Brown and William I. Weisberger, *Nucl. Phys. B* **157**, 285-326 (1979).
- [105] Landau, L. D., E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, (1977).
- [106] B. Andrei Bernevig and Shou-Cheng Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 106802 (2006).
- [107] M. C. Beeler, R. A. Williams, K. Jimenez-Garcia, L. J. LeBlanc, A. R. Perry and I. B. Spielman, *Nature (London)* **498**, 201 (2013).
- [108] Ch. Grenier, C. Kollath and A. Georges, *Phys. Rev. A* **87**, 033603 (2013).
- [109] B. Farias and C. Furtado, *De Haas-van Alphen Effect of a Two-Dimensional Ultra-cold Atomic Gas*, aceito para publicação no *Physica B*.

- [110] C. W. J. Beenakker and H. van Houten, *Solid State Physics* **44**, 1-228 (1991).
- [111] H. S. Nalwa, *Handbook of Nanostructured Materials and Nanotechnology*, 5-Volume Set (Academic Press, SanDiego, USA, 1999).
- [112] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632(R) (1981).
- [113] K. v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [114] D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
- [115] Y. K. Kato et al., *Science* **306**, 1910 (2004); J. Wunderlich et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 047204 (2005).
- [116] J. E. Hirsch, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1834 (1999).
- [117] S. Murakami, N. Nagaosa and S. Zhang, *Science* **301**, 1348 (2003).
- [118] J. Sinova et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 126603 (2004).
- [119] C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005); L. Sheng et al., *ibid.* **95**, 136602 (2005).
- [120] B. A. Bernevig and S. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 106802 (2006).
- [121] B. G. Wang et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 086608 (2005); L. Hu et al., *Phys. Rev. B* **70**, 235323 (2004).
- [122] B. Farias and C. Furtado, *Spin Hall Effect for an tripod-type Ultracold Gas in a Abelian Light-Induced Gauge Potential*, preprint.
- [123] Shi-Liang Zhu, Hao Fu, C. -J. Wu, S.-C. Zhang and L.-M. Duan, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 240401 (2006).
- [124] M. Fleischhauer, A. Imamoglu and J.P. Maragos, *Rev. Mod. Phys.* **77** 633 (2005).
- [125] G. Juzeliūnas and P. Öhberg, *Opt. Spectroscopy* **99** 357 (2005).
- [126] C. W. J. Beenakker and H. van Houten, *Solid State Physics* **44**, 1-228 (1991).
- [127] S. Stenholm, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 699 (1986).
- [128] R.J. Cook, *Phys. Rev. A* **20**, 224 (1979).
- [129] P. Meystre, *Atom Optics*, American Institute of Physics, (2001).
- [130] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions*, Wiley, New York, (1998).

- [131] S.M. Barnett and P.M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Clarendon Press, Oxford, (1997).
- [132] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Univ. Press, (1979).
- [133] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett and R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75** 1687 (1995).
- [134] Jessen and Deutsch, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **37**, 95, (1996).
- [135] J. Dalibard and C. Salomon, Seminários da École Polytechnique (Paris), *Le refroidissement laser d'atomes neutres. Applications et perspectives*, março de 1992.
- [136] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge ,Cambridge, (1995).
- [137] A. Kastler, J. Phys. Radium **11**, 255 (1950).
- [138] C. Cohen-Tannoudji, C. R. Acad. Sci. **252**, 394 (1961).
- [139] C. Salomon, J. Dalibard, W. Phillips, A. Clairon and S. Guellati, Europhys. Lett. **12**, 683 (1990).
- [140] Hermann Haken and Hans C. Wolf, *The Physics of Atoms and Quanta: Introduction to Experiments and Theory*, , Springer, Berlin, (2005), 7th ed.
- [141] V.S. Bagnato, G.P. Lafyatis, A.G. Martin, E.L. Raab, R.N. Ahmad-Bitar and D.E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **58**, 2194 (1987).
- [142] T. Bergeman, G. Erez and H.J. Metcalf, Phys. Rev. A **35**, 1535 (1987).
- [143] Sílvio R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, (1999), 2a ed.
- [144] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [145] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, and J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Verlag, Berlin, (2003).