

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Consequências da violação da simetria de
Lorentz no Efeito Casimir

Icaro Joshua Morales Ullion

João Pessoa - PB
Fevereiro - 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Consequências da violação da simetria de Lorentz no Efeito Casimir

(Dissertação de Mestrado)

Icaro Joshua Morales Ullion
Orientador: Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Física do Centro
de Ciências Exatas e da Natureza da
Universidade Federal da Paraíba
como requisito para a conclusão
do Curso de Mestrado em Física.

João Pessoa - PB
Fevereiro - 2015

ICARO JOSHUA MORALES ULLION

CONSEQUÊNCIAS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE
LORENTZ NO EFEITO CASIMIR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a conclusão do Curso de Mestrado em Física.

Aprovada em 20 de Fevereiro de 2015

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Universidade Federal da Paraíba
Orientador

Prof. Dr. Albert Petrov
Universidade Federal da Paraíba
Examinador Interno

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador Externo

"The more success the quantum theory has, the sillier it looks "

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai Miguel (*em memória*) e minha mãe Mauricia pelo cuidado, que continua até hoje, e pela educação que me deram, me tornando quem sou hoje. À minha irmã Priscilla por tudo que fez e ainda continua fazendo por todos nós. Ao meu cunhado Marcelino, pela pessoa que é e por sempre estar disposto a ajudar, seja o que for. Ao meu irmão Lothar, pelos momentos descontraídos que sempre temos quando estamos juntos. Ao ao meu irmão Miguel Jr., por todo apoio e conversas que me proporcionou durante o período de mestrado, sempre me motivando a buscar o que realmente eu quero. À minha cunhada Muriel, por junto de meu irmão terem me recebidos em João Pessoa da melhor maneira possível.

Agradeço a minha namorada Ketlin por seu apoio sempre que precisei, pela amizade que temos, pelo tempo que passamos em frente ao computador para nos vermos diariamente e pelo seu amor.

Agradeço ao professor Eugenio Ramos Bezerra de Mello por ter aceitado a me orientar, mesmo restando pouco tempo, e ter me guiado de maneira extremamente clara e eficaz, possibilitando assim, a conclusão dessa Dissertação no curto período que tivemos.

Agradeço ao professor Paulo Sergio Rodrigues da Siva pelo aprendizado que tive com ele durante o tempo em que estive sob sua orientação.

Agradeço aos meus companheiros da "Galera da Bola", estes que estiveram presentes em quase todos momentos de descontração que tive durante o período do mestrado.

Agradeço a meus amigos da "Alatte", uma amizade criada durante o período da graduação, que mesmo após cada um ir para uma cidade, continuamos a "jogar conversa fora"diariamente.

Resumo

Nessa Dissertação consideraremos uma teoria de campo escalar onde a quebra da simetria de Lorentz está presente. Basicamente adotaremos a teoria de Hořava-Lifshitz. Estudaremos as modificações que uma anisotropia no espaço-tempo produzem no efeito Casimir. Vamos tratar um campo escalar real sem massa em duas situações distintas: entre placas paralelas e no interior de uma caixa bidimensional retangular. Nos dois casos adotaremos condições de contorno específicas sobre o campo. Como veremos, a energia e a força de Casimir dependem fortemente do parâmetro associado a quebra da simetria de Lorentz.

Palavras-Chaves: Efeito Casimir; Fórmula de Abel-Plana; Quebra de Simetria de Lorentz

Abstract

In this Dissertation we'll consider a scalar field theory where the breaking of Lorentz symmetry is present. Basically we will adopt the Hořava-Lifshitz theory. We'll study the modifications that an anisotropy in space-time produces in the Casimir effect. Let's deal with a massless real scalar field in two distinct situations: between parallel plates and inside a two-dimensional rectangular box. In both cases we will adopt specific boundary conditions on the field. As we shall see, the Casimir energy and force strongly depends on the parameter associated with the breaking of Lorentz symmetry.

Keywords: Casimir effect; Abel-Plana formula; Lorentz Symmetry breaking.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Equação de Klein-Gordon com Quebra de Simetria de Lorentz	4
2.1	Conceito de Grupos	4
2.2	Grupo de Lie	5
2.3	Grupo de Lorentz	6
2.4	Campo de Klein-Gordon	8
2.5	Quebra da invariância de Lorentz	11
2.6	Equação de Klein-Gordon modificada	12
3	Efeito Casimir	14
3.1	Introdução	14
3.2	Força de Casimir para um campo escalar	17
3.3	Fórmula de soma de Abel-Plana	23
4	Efeito da quebra da simetria de Lorentz no Efeito Casimir	30
4.1	Duas placas paralelas	30
4.2	Efeito Casimir em uma caixa bidimensional retangular	40
5	Conclusão	55
A	Contribuições infinitas na energia do vácuo	57
B	Funções de Bessel Modificadas	60
C	Deduções	62

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A teoria quântica de campos (TQC) é a mais bem sucedida teoria que funde em uma mesma estrutura conceitual a mecânica quântica e a relatividade restrita. Ela é largamente empregada em diversas áreas da física das altas energias, da mecânica estatística, da matéria condensada, etc. A base desta teoria está no princípio de superposição dos estados quânticos, com a interpretação probabilística dos valores esperados. Na interpretação usual dessa teoria, as partículas elementares da natureza são excitações do vácuo quântico. A TQC é uma teoria de muitas partículas. Um campo é um sistema com infinitos graus de liberdade, que pode ser tratado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos fictícios não acoplados, cada um tendo uma frequência própria de oscilação, a chamada frequência normal. A TQC é, então, um sistema de infinitos osciladores harmônicos simples quânticos, sendo suas excitações fundamentais interpretadas como as partículas associadas. Desta forma, o vácuo na TQC é o estado no qual os infinitos osciladores quânticos se encontram, todos eles, no estado fundamental. Mas, como bem sabemos, a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico quântico não é nula. Sendo a energia do vácuo a soma das energias dos estados fundamentais desses infinitos osciladores, a energia do vácuo quântico é infinita. O vácuo quântico pode interagir com os campos, e essa interação pode produzir alterações em grandezas mensuráveis, como por exemplo: a massa, a carga e a constante de acoplamento. Infelizmente, essas alterações em geral são também infinitas. Esses infinitos constituem um dos principais problemas da TQC. O saneamento desse problema é realizado pelo processo chamado renormalização. Esse processo consiste em isolarmos as divergências através de um método qualquer de regularização e absorvê-las na redefinição dos parâmetros mensuráveis da teoria. A TQC oferece vários exemplos que mostram que esse vácuo exerce um papel fundamental não somente na física de fenômenos microscópicos, mas também na física de fenômenos

macroscópicos, sendo um desses fenômenos o Efeito Casimir.

O efeito Casimir é uma das consequências mais notáveis das flutuações quânticas do vácuo. O efeito Casimir, em seu aspecto mais geral, é uma consequência das alterações causadas na energia do vácuo devido à presença de fronteiras impostas aos campos. O efeito foi primeiramente predito teoricamente pelo físico holandês H. B. Casimir em 1948 [21], e dez anos depois confirmado experimentalmente por M. J. Sparnaay [22]. Já na década de 90, experimentos realizados confirmaram o efeito Casimir com alto grau de precisão [23]. Em seu trabalho original Casimir previu que devido às flutuações quânticas do campo eletromagnético, duas placas planas, paralelas, condutoras neutras (aterrada) se atrairiam com uma força dada por:

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}, \quad (1.1)$$

onde A é a área das placas e “ a ” a distância entre elas. Tradicionalmente o efeito Casimir é estudado trocando-se os efeitos idealizados das fronteiras por condições de contorno.

Uma vez que a teoria da relatividade restrita é a base para TQC, a simetria de Lorentz é uma simetria totalmente conservada nesta teoria. Contudo, outras teorias abrangem modelos em que a simetria de Lorentz não é conservada. Na área da gravitação quântica, a teoria de Hořava-Lifshitz é uma teoria onde ocorre a quebra da simetria de Lorentz. A anisotropia no espaço-tempo, gerada pela quebra da simetria de Lorentz, ocorre devido a diferentes propriedades de escalas em que as coordenadas espaço e tempo são definidas. A anisotropia no espaço-tempo num dado modelo de teoria de campos certamente deve modificar o espectro do operador Hamiltoniano, uma vez que teoria física deve possuir um mínimo, esse mínimo deve sofrer uma modificação em sua estrutura. O que pretendemos analisar nessa Dissertação é como a estrutura desse mínimo, o vácuo, modifica-se devido a quebra da simetria de Lorentz. Para tal análise, vamos estudar a influência da quebra da simetria de Lorentz no efeito Casimir, considerando campos escalares não massivo.

A Dissertação procede dividida da seguinte maneira: No Capítulo 2 faremos uma breve revisão sobre teoria de grupos e suas relações com transformações de simetrias. Após isso faremos a quantização do campo de Klein-Gordon, e por fim veremos como a quebra da simetria de Lorentz modifica a equação de Klein-Gordon. No Capítulo 3 será revisado o efeito Casimir. Faremos uma breve introdução histórica e obteremos a energia e a força de Casimir para um campo escalar real sem massa. No Capítulo 4, que corresponde a nossa contribuição pessoal, será obtida a força de Casimir para um modelo de teoria de campos onde ocorre a quebra da simetria de Lorentz. Estudaremos duas situações distintas. Consideraremos campos quântico entre duas placas paralelas, e também no interior de uma caixa retangular bidimensional. Nessas duas situações assumiremos que os campos obedecem condições de fronteiras específicas, que são as de Dirichlet, de Neumann e

finalmente a condição mista¹ Por fim, no Capítulo 5 serão apresentadas as conclusões sobre os resultados obtidos.

No apêndice A, apresentaremos as denotações de fórmulas relevantes mencionadas nessa Dissertação. O apêndice B, conterà algumas informações relevantes sobre a função de Bessel modificada, pois esta surge como soluções em alguns casos tratado. O apêndice C contem algumas deduções que foram omitidas no trabalho para facilitar a leitura.

Ao longo dessa Dissertação a notação utilizada para o tensor métrico do espaço de Minkowski é $\eta = \text{diag}(+1, -1 - 1 - 1)$. Utilizaremos também as unidades naturais, que são aquelas onde se admite $\hbar = c = 1$, onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e c a velocidade da luz no vácuo.

¹As condições de Dirichlet, corresponde a fornecer um valor específico ao campo na fronteira. A condição de Neumann corresponde a fornecer um valor específico para a derivada do campo na fronteira. A condição mista é uma combinação das condições de Dirichlet e Neuman juntas.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON COM QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ

O conceito de Grupos é de grande importância na Física devido à sua relação com transformações de simetria [1]. Transformações de simetria é definida como transformações que leva um sistema físico a um outro sistema físico possível que satisfaz as mesmas leis e princípios do estado anterior. Transformações no espaço-tempo, de boosts¹ e de rotações de um sistema físico, são exemplos já muito conhecidos de transformações de simetria, as chamadas Transformações de Lorentz.

2.1 Conceito de Grupos

Um grupo G é definido como um conjunto de elementos, denominados elementos de G , que podem ser combinados por operações de multiplicação, denotado por “.”, que satisfaz as seguintes propriedades [2]:

1. Se a e $b \in G$, então $a \cdot b \in G$.
2. Para qualquer a, b e $c \in G$, tem-se que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Existe um único elemento neutro (identidade) em G , definido por I , tal que, $a \cdot I = I \cdot a = a$ para todo elemento a em G .
4. Para cada elemento a de G existe um outro único elemento a^{-1} , denominado inverso, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = I$.

¹Boosts são transformações de Lorentz puras.

Se o produto $a.b = b.a$ para todo a e $b \in G$, esse grupo é denominado **Abeliano**, e é dito **Não-Abeliano** quando essa propriedade não é observada, i.e. , $a \cdot b \neq b \cdot a$.

2.2 Grupo de Lie

Um grupo de Lie G é um grupo em que os elementos são rotulados por um conjunto de parâmetros contínuos com uma lei de multiplicação que envolve funções analíticas dos parâmetros[3]. A maioria dos grupos de Lie de interesse na física são compactos, o que significa que os parâmetros formam uma variedade compacta² (o grupo de Lorentz é uma notável exceção). Um grupo de Lie e sua lei de multiplicação podem ser definidos, a partir de elementos próximos à identidade (transformações infinitesimais), em termos de sua álgebra de Lie associado, que consiste em N geradores (operadores) $T^i, i = 1, 2, \dots, N$, e as suas regras de comutação,

$$[T^i, T^j] = i c_{ijk} T^k, \quad (2.1)$$

onde a somatória em k está implícita. Os coeficientes c_{ijk} são denominados de **constante de estrutura** de G [4]. Uma vez que o comutador da equação (2.1) é anti-simétrico, o mesmo acontece com as constantes de estruturas,

$$c_{ijk} = -c_{jik}. \quad (2.2)$$

Os geradores T^i do grupo de Lie também satisfazem a **identidade de Jacobi**:

$$[[T^i, T^j], T^k] + [[T^j, T^k], T^i] + [[T^k, T^i], T^j] = 0, \quad (2.3)$$

que pode ser facilmente verificado apenas expandindo os comutadores. Substituindo duas vezes a Eqs.(2.1) na Eqs.(2.3), é obtido uma outra restrição às constantes de estruturas,

$$c_{ijm} c_{mkn} T^n + c_{jkm} c_{min} T^n + c_{kim} c_{mjn} T^n = 0, \quad (2.4)$$

uma vez que os geradores T^n são linearmente independentes, obtemos

$$c_{ijm} c_{mkn} + c_{jkm} c_{min} + c_{kim} c_{mjn} = 0. \quad (2.5)$$

As relações (2.1), (2.2) e (2.5) formam a base das álgebras de Lie pelas quais os elementos finitos do grupo de Lie próximos à sua unidade podem ser expandidos.

²O termo compacto indicam que os parâmetros variam ao longo de um intervalo finito.

Um elemento de G pode ser representado em termos dos geradores do grupo pelos operadores unitários,

$$U_G(\vec{\beta}) = \exp\left[-i \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i T^i\right] \equiv e^{-i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\vec{\beta}\cdot\vec{T})^k}{k!}, \quad (2.6)$$

onde $\beta^1 \dots \beta^N$ são N parâmetros reais contínuos e T^i são operadores hermitianos³. Em particular, o elemento identidade é $U_G(0) = I$, e a inversa de $U_G(\vec{\beta})$ é definido por:

$$U_G(\vec{\beta})^{-1} = U_G(-\vec{\beta}) = e^{i\vec{\beta}\cdot\vec{T}} = U_G(\vec{\beta})^\dagger. \quad (2.7)$$

Para $|\vec{\beta}|$ pequeno é necessário manter apenas os termos lineares em (2.6),

$$U_G(\vec{\beta}) \simeq I - i\vec{\beta}\cdot\vec{T} + O(\beta_i\beta_j), \quad (2.8)$$

isto é, os geradores de álgebra de Lie descrevem os elementos do grupo próximo da identidade.

2.3 Grupo de Lorentz

A relatividade especial exige que as leis da Física sejam covariantes sob 3 tipos de transformações:

- Translações no espaço e no tempo;
- Rotações no espaço real, tridimensional;
- Transformações de Lorentz.

Todas essas três transformações juntas formam o grupo não-homogêneo de Lorentz (Grupo de Poincaré), quando as translações no espaço-tempo são excluídas, as rotações no espaço e as transformações de Lorentz juntas formam o grupo homogêneo de Lorentz [2]. Tais transformações ocorrem no espaço de Minkowski, \mathbf{M}_4 , que é um espaço pseudo-euclidiano quadridimensional de representação (1,3). As coordenadas que observadores inerciais distintos adotam para um mesmo ponto de \mathbf{M}_4 , estão relacionadas por transformações lineares que preservam o intervalo espaço-temporal,

$$s^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 x^i x^i. \quad (2.9)$$

³Um operador A é dito hermitianos quando ele é igual ao seu adjunto, $A = A^\dagger$

Em termos da métrica que define o espaço, η , o intervalo é escrito como,

$$s^2 = \mathbf{x}^T \eta \mathbf{x} = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.10)$$

onde $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ é o quadrivetor contravariante e \mathbf{x} é o vetor coordenadas representado por:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

A relação entre as coordenadas é expressa por transformações lineares

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} \quad (2.12)$$

ou, em termos das componentes

$$x'^\mu = \sum_{\nu=1}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.13)$$

onde os elementos da matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ são reais e adotamos a notação de Einstein, onde os índices repetidos indicam uma soma sobre esse índice. A invariância do intervalo nos mostra que Λ também preserva a métrica η , uma vez que $s^2 = \mathbf{x}^T \eta \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \eta \mathbf{x}'$ temos

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.14)$$

ou seja, o grupo de Lorentz representa o grupo $O(1,3)$.

Da eq. (2.13) pode-se verificar que o determinante da matriz Λ só pode assumir dois valores

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1, \quad (2.15)$$

onde as transformações de Lorentz são ditas:

- **Próprias**, se $\det(\Lambda) = +1$,
- **Imprópria**, se $\det(\Lambda) = -1$.

Pode-se ainda extrair outra relação da eq.(2.13),

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = g_{00} \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0 = 1. \quad (2.16)$$

Assim, temos que $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$, de onde tira-se mais duas condições. Se $\Lambda^0_0 \geq 1$, as transformações são ditas **ortócronas**, e se $\Lambda^0_0 \leq -1$ as transformações são ditas **não-ortócronas**.

Ou seja, o grupo de Lorentz é constituído por quatro sub-grupos disjuntos entre si, onde são caracterizados pelos sinais de $\det(\Lambda)$ e de Λ^0_0 . Destas, apenas a parte relacionada contendo a identidade forma um subgrupo invariante, chamado **subgrupo próprio ortócrono**, e é denotado por L_+^\uparrow .

2.4 Campo de Klein-Gordon

Sabemos da mecânica quântica que a equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \phi(\vec{x}, t), \quad (2.17)$$

corresponde a energia não-relativística com o operador na forma:

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x}), \quad (2.18)$$

onde $\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\hat{p} = -i\vec{\nabla}$.

Para se obter uma equação de onda relativística, considera-se a relação

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2, \quad (2.19)$$

onde $p^\mu = (E, \vec{p})$ é o quadrivetor momento. Como foi feito para a obtenção da equação de Schrödinger, o quadrimomento p^μ agora torna-se um operador

$$\hat{p}^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right). \quad (2.20)$$

Com isso é obtido a equação de Klein-Gordon

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \phi(x) = m^2 \phi(x). \quad (2.21)$$

Usando a eq.(2.20) a equação de Klein-Gordon (KG) é expressa por:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.22)$$

onde $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano.

A invariância de Lorentz da equação de KG é verificada automaticamente, uma vez

que $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ é um invariante de Lorentz [5]. A equação de KG descreve o movimento quântico de partículas de spin-0. É o exemplo mais simples de uma teoria de campos relativística.

Quantização do Campo de KG

Vamos agora tratar da quantização de um campo escalar real, $\phi(\mathbf{x})$, satisfazendo a equação de KG. Tal campo corresponde a partículas eletricamente neutras [6].

Sabe-se que a equação de KG também pode ser derivada a partir da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial^\mu \phi(x))(\partial_\mu \phi(x)) - m^2 \phi(x)^2], \quad (2.23)$$

onde o momento conjugado é:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x). \quad (2.24)$$

A partir de (2.23) e com o uso da equação de Euler-Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right)$, é obtida a equação de KG,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.25)$$

Realizar a quantização do campo é promover o campo $\phi(x)$ a um operador hermitiano, $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$, satisfazendo as relações de comutação,

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{x}', t)] &= [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A fim de se estabelecer uma relação com as partículas, expande-se o campo $\phi(x)$ em um conjunto orto-normalizado das soluções da equação de KG:

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}^+ + \hat{\phi}^-, \quad (2.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^+ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \\ \hat{\phi}^- &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

sendo os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$ os operadores de aniquilação e criação respectivamente, ou seja, $a(\mathbf{k})$ aniquila uma partícula com momento \mathbf{k} e $a^\dagger(\mathbf{k})$ cria uma partícula de mo-

mento \mathbf{k} . O momento \mathbf{k} é definido por

$$k_n = \frac{2\pi}{L}n, \quad n = \{n_x, n_y, n_z\}; \quad n_i = 1, 2, 3, \dots$$

onde foi obtido resolvendo a equação de Klein-Gordon no interior de uma caixa cúbica de aresta L , de modo que, ao confinar o campo, os momentos permitidos passam a serem discretos.

Assim o operador de campo é escrito como

$$\hat{\phi} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}], \quad (2.29)$$

onde $k = (k_0, \mathbf{k})$, $x = (t, \vec{x})$ e $\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2}$ é a constante de normalização para a solução da equação de Klein-Gordon obtida em uma caixa cúbica de volume V .

Utilizando (2.29) em (2.25) é obtida a relação de dispersão da energia

$$k_0 = \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (2.30)$$

Utilizando as relações de comutações (2.26) e escrevendo os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$ em termos do operador de campo e seu momento conjugado,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\vec{x} e^{ikx} [\omega_{\mathbf{k}}\phi(x) + i\dot{\phi}(x)], \\ a^\dagger(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\vec{x} e^{-ikx} [\omega_{\mathbf{k}}\phi(x) - i\dot{\phi}(x)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

são obtidas as relações de comutações para os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pode-se ainda obter os operadores Hamiltoniano (\hat{H}) e momento (\hat{P}) em termos dos operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$ [6], temos que:

$$\begin{aligned} P^0 = H &= \int d^3\vec{x} [\pi_\alpha(x)\dot{\phi}_\alpha(x) - \mathcal{L}] = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2], \\ P^j &= \int d^3\vec{x} \pi_\alpha(x) \frac{\partial\phi_\alpha(x)}{\partial x_j} = - \int d^3\vec{x} \dot{\phi} \nabla\phi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Assim, utilizando (2.29) é obtido \hat{H} e \hat{P} como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + 1/2), \\ \hat{P} &= \sum_{\mathbf{k}} \vec{k}(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + 1/2).\end{aligned}\tag{2.34}$$

O hamiltoniano \hat{H} pode ser interpretado, sendo que em cada estado de momento \vec{k} é ocupado por partículas, onde o número de ocupação pode ser determinado pelo operador número $\hat{N} = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$. Cada uma contribui com um quanta de energia $\omega_{\mathbf{k}}$ para a energia total. Além disso, existe ainda um ponto-zero de energia, que é independente do número de ocupação [7]. Essa energia do ponto zero, denominada energia do vácuo, é dada por $\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle$, assim temos,

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}},\tag{2.35}$$

onde o vácuo é o estado onde a ocupação de partícula é nula, representado por $|0\rangle$, no qual $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$

O campo quântico livre corresponde a um sistema de infinitos osciladores harmônicos, onde cada termo da expressão de \hat{H} em (2.34) descreve um modo normal. Com isso vemos que a energia do vácuo (2.35) é fortemente divergente. Do ponto de vista físico, esse infinito que surge pode ser facilmente contornado. Uma vez que observações físicas envolvem apenas diferenças de energias, e não o valor absoluto da energia, pode-se remover a constante do ponto-zero E_0 redefinindo a hamiltoniana \hat{H}

$$\hat{H}^R = \hat{H} - E_0 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}),\tag{2.36}$$

obtendo assim, um valor finito.

2.5 Quebra da invariância de Lorentz

A questão da quebra de simetria de Lorentz contraria frontalmente um dos pilares da teoria mais bem sucedida da física atual, a Relatividade Restrita. Partindo do pressuposto de que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética deve ser a mesma independente do sistema de referência que se adote, Einstein conseguiu dar uma interpretação revolucionária às transformações de Lorentz, provocando mudanças dos conceitos de espaço e de tempo, recolocando-os sob um novo pano de fundo onde a física se desenvolve: o espaço-tempo.

Porém a invariância da simetria de Lorentz tem sofrido alguns questionamentos nas

últimas décadas, tanto em termos teóricos quanto experimental. Em 1989 A. V. Kostelecký e S. Samuel [8] descobriram um mecanismo dentro da teoria de cordas que permite a violação da simetria de Lorentz na escala de energia de Planck⁴. Este mecanismo trata-se de uma quebra espontânea da simetria de Lorentz, realizada através de tensores que adquirem valores esperados no vácuo diferentes de zero, que causam uma anisotropia no espaço-tempo. Isto é chamado de "condensação" dos tensores no vácuo. Tal quebra aconteceu na escala de energia de Planck em uma teoria mais fundamental, e os efeitos desta quebra para outros níveis de energia, por exemplo o do Modelo-Padrão das Interações Fundamentais, não foram até o presente momento detectados, porque tais efeitos são suprimidos por potências da massa de Planck. Kostelecký e Samuel avaliaram também que essa ideia da quebra da simetria de Lorentz devesse ser incorporada ao Modelo Padrão (MP), dando origem assim ao Modelo Padrão Estendido (MPE). A proposta de quebra de simetria de Lorentz, não tem apenas questionamentos teóricos. Observações astronômicas no espectro de estrelas, mostram evidências de que a constante de estrutura fina ($\alpha = \frac{e^2}{hc}$), que é uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons e elétrons, esteja lentamente variando [9].

Quebrar a simetria de Lorentz desta forma, espontaneamente, não significa deixar de usar a álgebra de Lorentz. Quebrar a simetria de forma espontânea significa construir uma ação que é invariante frente a esta simetria, enquanto o vácuo da teoria não o é. Estudos posteriores indicaram outros mecanismos que também têm como efeito (direto ou indireto) a quebra da simetria de Lorentz, dentre eles teoria de campos não-comutativas [10], variação das constantes de acoplamento [11] e também em teorias da gravitação quântica [12].

2.6 Equação de Klein-Gordon modificada

Como mencionado no fim da seção anterior, uma teoria que também envolve quebra da simetria de Lorentz são teorias de gravitação quântica. A anisotropia no espaço-tempo que será tratada nessa Dissertação se dá devido uma dessas teoria, a teoria de Hořava-Lifshitz (HL) [13].

A teoria de HL tem recebido bastante atenção, uma vez que esta teoria pode dar origem à existência de uma formulação renormalizável da gravidade quântica. A proposta de Hořava consiste em atribuir diferentes propriedades de escala para as coordenadas espaço e tempo: $x^i \rightarrow bx^i$, $t \rightarrow b^\xi t$, onde ξ é um expoente crítico que caracteriza o comportamento ultravioleta da teoria⁵. Contagem de potência garante a renormalizabilidade da gravidade

⁴É a unidade de energia no sistema de unidades naturais, é da ordem de 10^{19} GeV.

⁵Normalmente na literatura, a notação utilizada para o expoente crítico da teoria de HL é z , porém para não haver confusão com a variável da componente ao longo do eixo "z" adotamos a variável ξ .

quântica em quatro dimensões para $\xi = 3$ [16].

Assumindo a teoria de HL vamos investigar, no Capítulo 4, como a violação da simetria de Lorentz interfere na estrutura do vácuo de uma teoria de campo escalar. Para tal, vamos analisar como fica um resultado já muito conhecido da literatura, o efeito Casimir⁶. Antes disso, necessitamos primeiro ver como a teoria de HL modifica a equação de Klein-Gordon.

Iremos trabalhar com uma teoria onde as coordenadas espaciais e temporais já não possuem o mesmo "peso", como no caso onde há a simetria de Lorentz. Nesse cenário, consideramos a teoria de um campo escalar real sem massa, que é o caso mais simples. A ação associada a esse sistema toma a forma [14, 15]:

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^d x (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - l^{2(\xi-1)} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi) \quad (2.37)$$

Com o intuito de obter a equação de movimento para essa ação, fizemos três casos particulares, tomando os valores $\xi = 1$, $\xi = 2$ e $\xi = 3$, para ver o comportamento dos resultados e assim obter o caso geral (ξ qualquer), ver Apêndice C. Em (3+1)D a equação de movimento obtida é:

$$[\partial_0^2 + l^{2(\xi-1)} (-1)^\xi \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi}] \phi = 0. \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é a equação de Klein-Gordon modificada no cenário onde é incorporada a teoria de HL, ela será usada no Cap. 4, onde estudaremos a modificação que a quebra da simetria de Lorentz implica no efeito Casimir.

⁶É a força que atua em duas placas paralelas, eletricamente neutras, causada pelas flutuações do vácuo.

CAPÍTULO 3

EFEITO CASIMIR

3.1 Introdução

Conceito de vácuo

Os conceitos primitivos do vácuo clássico dividem-se basicamente em duas vertentes antigas de pensamento: a primeira defendida por vários filósofos da antiguidade, dentre os quais se encontravam: Demócrito (460-370 a.C.), Lucrecio (94-55 a.C.), Epicuro (341-270 a.C.) e Platão (428-347 a.C.), afirmava que o vácuo e o espaço vazio eram sinônimos e a segunda vertente defendida por: Parmênides de Eléia (515-450 a.C.), Melissos de Samos (350 a.C.), Zenon de Eléia (490a.C.) e por Aristóteles (384-322 a.C.) afirmava que o vácuo não é o mesmo que o espaço vazio, e mais, que o vácuo era uma espécie de meio, um éter ou um "ar sutil". Opondo-se à interpretação platônica, Aristóteles atribui propriedades dinâmicas ao vácuo, pois em sua visão, a velocidade de um corpo é inversamente proporcional à densidade do meio em que o corpo se move. Se a densidade do meio for nula (como no caso defendido por Platão), a velocidade do corpo é infinita, o que é repudiado pela razão humana. As noções aristotélicas sobre o vácuo foram objeto de discussões e discordâncias de muitos pensadores a partir de então [17, 20].

Já no século XVII, houve uma explosão de experimentos físicos na tentativa de refutar a doutrina aristotélica que afirmava ser a existência do vácuo (como sinônimo do nada), uma impossibilidade física.

Em 1644, Evangelista Torricelli (1608-1647) inventou o barômetro de mercúrio. Torricelli preencheu com mercúrio um tubo de vidro que tinha uma das suas extremidades fechadas e depois, invertendo o tubo, mergulhou a extremidade aberta em um recipiente que também continha mercúrio. A coluna de mercúrio desceu deixando um espaço entre a

superfície do líquido e a extremidade fechada do tubo. Torricelli sugeriu que este espaço, certamente destituído de matéria visível, também estava livre da presença de gases e que portanto um vácuo havia sido criado. Por volta do ano de 1657, Otto Von Guericke (1602-1686), natural e burgomestre (prefeito) de Magdeburgo (cidade alemã), demonstrou ser o vácuo uma região sem matéria. Através de um experimento ele puxou, usando duas parselhas de cavalos, dois hemisférios ocios de cobre, acoplados um ao outro. A ausência de ar no interior permitia que a pressão atmosférica externa mantivesse os hemisférios fortemente unidos, a ponto das parselhas de cavalos não conseguirem separá-los, concluindo ele assim, a incoerência da concepção medieval aristotélica sobre a definição de vácuo.

No plano teórico viu-se nascer o conceito newtoniano de espaço absoluto, que desvincula a existência do espaço da existência da matéria. O conceito de Newton (1643-1727) do espaço inclui a existência de uma aceleração absoluta, em relação ao próprio espaço isto é: mesmo na ausência de matéria haveria o efeito de forças inerciais ou "fictícias". Já para Einstein (1879-1955), com uma influência do pensamento de Ernest Mach (1838-1916), espaço e matéria estão intimamente vinculados, com a distribuição de matéria determinando a geometria do espaço e a geometria determinando como a matéria deve se mover. Por outro lado, para os físicos do século XIX, a natureza ondulatória da luz exigia a existência de um meio sutil com propriedades elásticas fora do comum, que permitisse a produção e propagação de oscilações transversais. E deste modo vemos um renascimento da antiga noção de um meio sutil pervadindo todo o universo. O famoso experimento de Michelson-Morley mostrou que a hipótese de um tal meio sutil era, muito provavelmente, desnecessária para explicar a propagação das ondas eletromagnéticas. Nesse elenco de opiniões ao longo da história vemos alternarem-se as concepções do vácuo como mero vazio e como um meio dotado de propriedades características.

O conceito de vácuo sofreu uma radical mudança a partir dos estudos de Max Planck (1858-1947) sobre a radiação de um corpo negro, um problema teórico que desencadeou os estudos sobre mecânica quântica. Com a mecânica quântica surgiu o conceito de energia de ponto zero, uma energia decorrente das flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico. Esta ideia está baseada no princípio da incerteza de Heisenberg, que diz que não é possível medir com precisão absoluta tempo e energia simultaneamente. O limite de precisão é fornecido por:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.1)$$

Assim, essa energia permanece mesmo em uma região do espaço na qual nenhuma forma de matéria ou radiação pode ser observada. O Efeito Casimir é uma consequência do valor não nulo dessa energia do ponto zero.

O Efeito Casimir

Considerando duas placas quadradas com um centímetro de lado, metálicas, perfeitamente condutoras, eletricamente neutras (aterradas), paralelas entre si e separadas por uma distância da ordem de micrômetros, onde a força gravitacional é desprezível; o conjunto montado em uma câmara selada na qual um vácuo foi estabelecido, havendo disponível um medidor hipersensível de forças diminutas entre as placas. Nestas condições, espera-se que o ponteiro do medidor de forças não se mova, contudo, observa-se uma força atrativa entre as placas. Quando a separação entre elas é de meio micrômetro a força equivale ao peso de uma massa de dois décimos de um miligrama.

Este é o Efeito Casimir [21], previsto teoricamente em 1948 pelo físico holandês Hendrik Brugt Gerhard Casimir e comprovado experimentalmente dez anos depois pelo, também físico holandês, Marcus Sparnaay [22]. Mais recentemente, outros experimentos realizados por Lamoureaux, Mohideen e Roy confirmaram o Efeito Casimir com um alto grau de precisão [23].

A intrigante interrogação é: como duas placas eletricamente neutras podem exercer algum tipo de influência uma na outra?

Em meados de 1947, Casimir e seu colega Dirk Polder reconsideraram as chamadas interações dispersivas de Van der Waals e chegaram à conclusão de que em virtude da velocidade finita de propagação do campo eletromagnético, a energia de interação interatômica diminui com o inverso da sexta potência da distância entre os átomos quando estes estavam bem próximos (ordem de 10^{-6}) e com o inverso da sétima potência quando estão a grandes distâncias (ordem de 10^{-7}).

Ao conversar com Niels Bohr sobre suas ideias, Casimir recebeu a sugestão de considerar a energia de ponto zero do vácuo. Assim, de posse dessa informação, ele refez os cálculos recorrendo às flutuações quânticas do vácuo eletromagnético, onde obteve os mesmos resultados encontrados com seu colega Dirk Polder, apresentando esse trabalho em um colóquio na cidade de Paris em Abril de 1948. Um mês depois, Casimir publicou o artigo onde a força encontrada era atrativa e de intensidade

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}, \quad (3.2)$$

sendo “ A ” a área de cada placa, “ a ” a separação entre elas, “ \hbar ” a constante de Planck dividida por 2π e “ c ” a velocidade da luz no vácuo.

O mais notável no trabalho de Casimir, não é o fato de ele ter obtido uma força atrativa entre dois objetos condutores e neutros, pois isso já era conhecido entre os que estudavam as forças de Van der Waals dispersivas, mas o fato de ele atribuir essa atração às flutuações de vácuo quântico.

3.2 Força de Casimir para um campo escalar

Como já mencionamos, no Cap. 4 será tratado o efeito Casimir associado a um campo escalar real sem massa, quando ocorre a quebra de simetria de Lorentz. Vejamos então, primeiramente, como fica a força de Casimir para o caso de um campo escalar real sem massa na teoria de Kaluza-Klein usual, i.e., a simetria de Lorentz é preservada. A densidade de lagrangiana de um campo escalar real não-massivo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) \quad (3.3)$$

de acordo com a eq.de Euler-Lagrange, essa lagrangiana leva a equação de movimento

$$\square \phi(x) = 0, \quad (3.4)$$

O efeito Casimir resulta na alteração do espectro de energia do campo $\phi(x)$, devido a imposição de condições de contorno, por exemplo, pela presença de fronteiras, tal como de placas metálicas. Devido a existência da energia do ponto zero, prevista pela mecânica quântica, esta alteração manifesta-se quando as condições de contorno são impostas aos campos quânticos. Assim, para determinar a energia de Casimir, devemos primeiramente resolver a equação (3.4) impondo condições de contorno matemáticas sobre elas, posteriormente quantizar o campo $\phi(x)$ e obter sua Hamiltoniana para assim tomar a energia do vácuo $E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle$. Com isso podemos obter a força de Casimir.

Vamos resolver (3.4) no interior de duas placas de lado L , paralelas entre si e separadas por uma distância $d \ll L$ (Fig. 3.1). Consideramos também as superfícies das placas perpendiculares ao eixo Z . Vamos primeiramente resolver a eq. impondo as condições de Dirichlet, ou seja, a solução de (3.4) deve satisfazer

$$\phi(t, x, y, 0) = \phi(t, x, y, d) = 0. \quad (3.5)$$

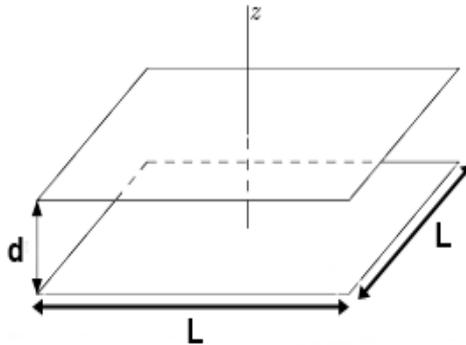


Figura 3.1: Duas placas paralelas de área L^2 separadas por uma distancia $d \ll L$

Usando o método de separação de variáveis, e uma vez que já estamos interessados em soluções do tipo de ondas planas e primeiro para soluções de frequência positiva, resolvemos (3.4) supondo uma solução que possa ser escrita como

$$\phi(x) = X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}. \quad (3.6)$$

Assim a equação (3.4) fica

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}] - \nabla^2[X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}] = 0. \quad (3.7)$$

Dividindo toda equação por $X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}$, chegamos a

$$-\omega^2 + \frac{1}{X} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (3.8)$$

Como ω é uma constante, e cada um dos três primeiros termos depende de uma variável independente, para que essa solução seja válida para todo x , y e z , cada termo deve ser uma constante. Assim, ficamos com três equações diferenciais ordinárias independentes:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2 \quad (3.10)$$

e

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_z^2, \quad (3.11)$$

com isso temos a relação: $\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

A condição de contorno (3.5) restringe apenas a solução da EDO referente a z . Assim, as soluções de $X(x)$ e $Y(y)$ são dadas por,

$$X(x) = C_{1x} e^{ik_x x} \quad (3.12)$$

e

$$Y(y) = C_{1y} e^{ik_y y}. \quad (3.13)$$

A condição de contorno imposta na direção z indica uma solução periódica, assim sendo, temos

$$Z(z) = C_{1z} \text{sen}(k_z z) + C_{2z} \text{cos}(k_z z). \quad (3.14)$$

Impondo a primeira condição $Z(0) = 0$, vemos que o coeficiente C_{2z} é nulo, o que

resulta em

$$Z(z) = C_{1z} \text{Sin}(k_z z). \quad (3.15)$$

Usando agora a outra condição $Z(d) = 0$, vemos que a constante k_z tem uma restrição, não podendo assumir qualquer valor, sendo dada por:

$$k_z = k_n = \frac{n\pi}{d}, \quad (3.16)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$, de modo que a solução de $Z(z)$ é dada por:

$$Z(z) = C_z \text{sen} \left(\frac{n\pi}{d} z \right). \quad (3.17)$$

Assim a solução da onda é dada por

$$\phi(t, \vec{x}) = C \text{sen} \left(\frac{n\pi}{d} z \right) e^{-i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (3.18)$$

onde as constantes C_{1x} , C_{1y} e C_z foram agrupadas em uma única constante C . A constante C pode ser determinada impondo a condição de normalização¹

$$i \int d^3 \vec{x} [\phi'^* \partial_t \phi - \partial_t \phi'^* \phi] = \delta_{n,n'} \delta(k_x - k_{x'}) \delta(k_y - k_{y'}), \quad (3.19)$$

onde tomamos a normalização do tipo delta de Dirac para as variáveis contínuas (k_x, k_y) e delta de kronecker para variável discreta, k_z . De modo que a condição de normalização resulta em uma constante dada por

$$C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} d}}. \quad (3.20)$$

Assim, a solução geral para a (3.4) considerando a parte de frequência positiva e negativa, impondo as condições de Dirichlet é dada por

$$\phi(x) = \int dk_x dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} d}} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{d} z \right) [e^{-i(\omega_{\mathbf{k},n} t - k_x x - k_y y)} + e^{i(\omega_{\mathbf{k},n} t - k_x x - k_y y)}], \quad (3.21)$$

onde $\omega_{\mathbf{k},n}$ obedece a relação de dispersão $\omega_{\mathbf{k},n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$.

¹Na condição de normalização, as integrais são feitas na região onde o campo $\phi(x)$ esta confinado, assim os limites de integração são $x:(-\infty, \infty)$, $y:(-\infty, \infty)$ e $z:[0, d]$

Operador \hat{H}

Uma vez que já temos a solução do campo de Klein-Gordon no interior das placas, devemos agora promover o campo a um operador de campo e assim obter a hamiltoniana associada a ele. Como já vimos na seção 2.4, promovendo $\phi(x)$ para um operador temos

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k},n} d}} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{d} z \right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}] \quad (3.22)$$

onde o produto kx é dado por $kx = \omega_{\mathbf{k},n}t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, sendo $\vec{k} \cdot \vec{x} = k_x x + k_y y$ e $a_{\mathbf{k},n}$ e $a_{\mathbf{k},n}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, que obedecem as relações de comutação (2.32)

A Hamiltoniana associada a esse campo é dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2], \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) na expressão da Hamiltoniana acima e após algumas manipulações algébricas, obtemos a forma de \hat{H}

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} [a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^\dagger + a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n}]. \quad (3.24)$$

Usando agora as relação de comutações (2.32) temos que

$$a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^\dagger + a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} = 2a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \delta^2(0) \quad (3.25)$$

da definição da função delta de Dirac $\delta^2(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{r} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}}$ temos que

$$\delta^2(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{r}. \quad (3.26)$$

Uma vez que nosso espaço de integração é no interior das placas, a integral $\int d^2\vec{r}$ nos dá a área das placas em questão. Assim sendo, temos

$$a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^\dagger + a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} = 2a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2}. \quad (3.27)$$

Assim, o operador \hat{H} fica dado por:

$$\hat{H} = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \right], \quad (3.28)$$

onde $\omega_{\mathbf{k},n}$ obedece a relação de dispersão: $\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$.

Agora que já temos o operador \hat{H} , podemos calcular a energia do vácuo E_0 . Lembrando que o vácuo é definido a partir dos operadores $a_{\mathbf{k},n}$ e $a_{\mathbf{k}^\dagger,n}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k},n} |0\rangle &= 0 \\ \langle 0| a_{\mathbf{k},n}^\dagger &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Temos

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0| \hat{H} |0\rangle \\ &= \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[\langle 0| a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} |0\rangle + \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \langle 0|0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim temos a expressão da energia do vácuo na presença de duas placas paralelas, dada por

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.31)$$

O resultado acima é divergente, como no caso onde temos ausência das placas. Mas como já mencionamos no Cap. 2 podemos fazer uma renormalização, conseguindo assim, uma quantidade mensurável. O processo de renormalização trata-se em subtrair uma quantidade infinita de uma medida, através de uma regularização, podendo assim obter uma quantidade mensurável, onde o termo infinito não possui um significado físico.

Outras Cond. de Contorno

Podemos também impor outras condições de contorno que o campo $\phi(x)$ deva satisfazer na superfície das placas. Vamos aqui citar outras duas condições que podem ser impostas: Neumann e Mista

- Cod. de Neumann

Nesse caso, a solução de (3.4) deve satisfazer as condições

$$\left. \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=d} = 0. \quad (3.32)$$

Resolvendo igualmente feito no caso de Dirichlet por método de separação de variáveis, obtemos o operador campo dado por

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{z}d\right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}], \quad (3.33)$$

onde

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^2\omega_{\mathbf{k},n}d}} & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\omega_{\mathbf{k},n}d}} & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

O operador Hamiltoniana \hat{H} para esse caso, fica sendo

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \omega_{\mathbf{k},n}^2 (2\pi)^2 d \left[a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \right]. \quad (3.35)$$

Assim a energia do vácuo é dada por

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle \\ &= \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} = \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k},0} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}$$

e

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$$

- Cond. Mista

Nesse caso temos duas formas:

$$i) \phi(z=0) = \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0$$

ou

$$ii) \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} \Big|_{z=0} = \phi(z=d) = 0.$$

(3.37)

Resolvendo a equação (3.4) para esses casos, o operador campo obtido no caso $i)$ é

$$\hat{\phi}_i(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\omega_{\mathbf{k},n}d}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}z\right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}], \quad (3.38)$$

enquanto para o caso $ii)$ é,

$$\hat{\phi}_{ii}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\omega_{\mathbf{k},n}d}} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}z\right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}]. \quad (3.39)$$

Ambos os casos de condição mista (\underline{i} e \underline{ii}), resultam no mesmo operador Hamiltoniano

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \left[a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \right]. \quad (3.40)$$

onde aqui o espectro de energia é dado por: $\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + [(n + 1/2)\frac{\pi}{d}]^2$

Assim a energia do vácuo nesses casos, é dada por

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n} \quad (3.41)$$

Como podemos ver, nos três casos mencionados aqui, Dirichlet, Neumann e Mista, a energia do vácuo é uma soma infinita. Podemos tratar essa soma de diferentes maneiras. A maneira que será adotada nessa Dissertação é utilizando a fórmula de Abel-Plana.

3.3 Fórmula de soma de Abel-Plana

Como já vimos, somas discretas e integrais com respeito a variáveis contínuas, tais como aquelas em (3.31), (3.36) e (3.41), são frequentes nos cálculos do efeito Casimir. Em alguns casos, essas expressões podem ser simplificadas com o uso da fórmula de Abel-Plana [24, 25]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt + i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (3.42)$$

Esta fórmula foi obtida, independentemente, pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1823) e também pelo astrônomo e matemático italiano Giovanni Antonio Amedeo Plana (1920). O primeiro a usar essa fórmula para o efeito Casimir foi Mamayev em 1976.

Vamos agora aplicar a fórmula da soma de Abel-Plana para a energia do vácuo dos três casos obtidos na seção anterior.

Dirichlet

Nessa condição de contorno, vimos que a energia do vácuo obtida foi

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.43)$$

podemos trabalhar com as coordenadas polares no plano $k_x k_y$, assim teremos:

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty k dk d\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.44)$$

resolvendo a integral em θ obtemos

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \sum_{n=1}^{\infty} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.45)$$

Vamos agora tratar dessa soma divergente em n . A partir da fórmula de Abel-Plana (3.42) podemos escrever a soma iniciando em $n = 1$, pois como

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n), \quad (3.46)$$

teremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^\infty F(t) dt + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (3.47)$$

Substituindo (3.47) em (3.45), ficamos com

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left\{ -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^\infty F(t) dt + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)] \right\}, \quad (3.48)$$

onde

$$F(n) = \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Os dois primeiros termos de (3.48) representam a energia do vácuo na presença de apenas uma placa e a energia do vácuo livre, respectivamente, ver demonstração no (Apêndice A). Ao realizar o processo de renormalização para a energia de Casimir, esses dois termos são desconsiderados, restando apenas o termo que contribui para energia do vácuo na presença de duas placas. Assim, a energia de Casimir é

$$E_0^C = i \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty dt \frac{[k^2 + (\frac{it\pi}{d})^2]^{1/2} - [k^2 + (\frac{-it\pi}{d})^2]^{1/2}}{e^{2\pi t} - 1}, \quad (3.49)$$

fazendo uma mudança de variável: $\frac{t\pi}{d} = u \rightarrow dt = \frac{d}{\pi} du$, ficamos com

$$E_0^C = i \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{1/2}}{e^{2du} - 1}. \quad (3.50)$$

A integral em relação a variável u contida na última expressão deve ser analisada com cuidado. Uma vez que temos os termos $\sqrt{k^2 + (\pm iu)^2}$, podemos ter uma raiz de um número negativo, ou um número positivo, isso dependerá se u for maior ou menor que k . Assim, vamos dividir a integral em duas partes:

$$E_0^C = i \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \left[\int_0^k du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{1/2}}{e^{2du} - 1} + \int_k^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{1/2}}{e^{2du} - 1} \right], \quad (3.51)$$

onde os termos contidos no integrando podem ser reescrito como:

- Para $k > u$:

Nesse caso teremos

$$[k^2 + (\pm iu)^2]^{1/2} = [k^2 - u^2]^{1/2}. \quad (3.52)$$

- Para $k < u$:

Nesse caso teremos

$$\begin{aligned} [k^2 + (\pm iu)^2]^{1/2} &= [k^2 + (e^{\pm i\frac{\pi}{2}} u)^2]^{1/2} = [k^2 + e^{\pm i\pi} u^2]^{1/2} \\ &= e^{\pm i\frac{\pi}{2}} [u^2 + e^{\mp i\pi} k^2]^{1/2} \\ &= \pm i [u^2 - k^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

De (3.52) temos que a integral no intervalo $u:[0,k]$ na eq. (3.51) se anula. Assim, substituindo (3.53) ficamos com

$$\begin{aligned} E_0^C &= i \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_k^\infty du \frac{i[u^2 - k^2]^{1/2} - (-i)[u^2 - k^2]^{1/2}}{e^{2du} - 1} \\ &= -\frac{L^2 d}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_k^\infty du \frac{[u^2 - k^2]^{1/2}}{e^{2du} - 1}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Definindo uma nova variável t , onde $u = kt \rightarrow du = k dt$, o limite de integração de t fica $t:[1,\infty)$. Assim podemos reescrever a energia de Casimir como

$$E_0^C = -\frac{L^2 d}{2\pi^2} \int_1^\infty dt [t^2 - 1]^{1/2} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{e^{2dtk} - 1}. \quad (3.55)$$

A integral em dk pode ser obtida a partir do resultado da tabela [26], onde temos que

$$\int_0^\infty dk \frac{k^3}{e^{2dtk} - 1} = \frac{\pi^4}{240 d^4 t^4}. \quad (3.56)$$

Assim ficamos com

$$E_0^C = -\frac{L^2 \pi^2}{480 d^3} \int_1^\infty dt \frac{[t^2 - 1]^{1/2}}{t^4}. \quad (3.57)$$

A integral em t é dada por

$$\int_1^\infty dt \frac{[t^2 - 1]^{1/2}}{t^4} = \frac{1}{3}, \quad (3.58)$$

com isso temos:

$$\frac{E_0^C}{L^2} = -\frac{\pi^2}{1440 d^3}. \quad (3.59)$$

A equação (3.59) é a energia de Casimir por área que atua entre as placas envolvidas no efeito. A partir dela, podemos determinar qual a força que cada placa sofre. Sabemos que $F = -\nabla E$, assim obtemos

$$\frac{F_C}{L^2} = -\frac{\pi^2}{480 d^4}. \quad (3.60)$$

Essa expressão nos fornece a força de Casimir por unidade de área que atua em cada placa. A condição de contorno imposta ao campo $\phi(x)$ resulta em uma força atrativa. Isso pode variar de acordo com as condições impostas sobre o campo. Esse resultado nos permite afirmar que a força de Casimir é uma manifestação macroscópica de propriedades microscópicas do vácuo quântico.

Neumann

Nessa condição de contorno a expressão obtida para a energia do vácuo foi

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^\infty \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.61)$$

Introduzindo as coordenadas polares no plano $k_x k_y$, teremos,

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty k dk d\theta \sum_{n=0}^\infty \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.62)$$

e resolvendo a integral em θ ficamos com

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \sum_{n=0}^\infty \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.63)$$

Usando (3.42) e (3.47), temos que:

$$\sum_{n=0}^\infty F(n) = \frac{1}{2}F(0) + \sum_1^\infty F(n) = \int_0^\infty F(t)dt + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (3.64)$$

Substituindo esta expressão na energia E_0 teremos

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left\{ \int_0^\infty F(t)dt + i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)] \right\}. \quad (3.65)$$

Assim como já mencionamos no caso de Dirichlet, o primeiro termo de (3.65) refere-se a energia do vácuo livre, sendo desprezada no processo de renormalização. Assim, a energia de Casimir é dada por:

$$E_0^C = i \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty dt \frac{[k^2 + (it\pi/d)^2]^{1/2} - [k^2 + (-it\pi/d)^2]^{1/2}}{e^{2\pi t} - 1}. \quad (3.66)$$

Essa expressão é a mesma obtida para o caso de Dirichlet (3.49). Resolvendo da mesma maneira como foi feito anteriormente, chega-se aos mesmos resultados, onde a energia de Casimir é dada por:

$$\frac{E_0^C}{L^2} = -\frac{\pi^2}{1440 d^3}, \quad (3.67)$$

e a força de Casimir por unidade de área:

$$\frac{F_C}{L^2} = -\frac{\pi^2}{480 d^4}. \quad (3.68)$$

Cond. Mista

Nessa condição, a expressão para energia do vácuo obtida foi:

$$E_0 = \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty d^2\vec{k} \sum_{n=0}^\infty \left[k_x^2 + k_y^2 + \left((n + 1/2)\frac{\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.69)$$

Mudando as coordenadas do plano (k_x, k_y) para coordenadas polares, e resolvendo a

parte em θ ficamos com

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \sum_{n=0}^\infty \left[k^2 + \left((n + 1/2) \frac{\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.70)$$

A soma divergente em n novamente é desenvolvida com a fórmula de Abel-Plana, porém agora temos que usar a expressão pra funções de números semi-inteiros [24]

$$\sum_{n=0}^\infty F(n + 1/2) = \int_0^\infty F(t) dt - i \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (3.71)$$

Novamente, o primeiro termo da soma é desconsiderado no processo de renormalização, pois refere-se a energia do vácuo livre. Assim substituindo a soma em (3.70) ficamos com:

$$E_0^C = -i \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{1/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{1/2}}{e^{2du} + 1}, \quad (3.72)$$

onde também foi realizado uma mudança de variável: $\frac{t\pi}{d} = u \rightarrow dt = \frac{d}{\pi} du$. O numerador do integrando em du é o mesmo que aparece no caso de Dirichlet e Neumann, o que difere aqui é o denominador, onde no lugar de $(e^{2du} - 1)$ temos $(e^{2du} + 1)$. No entanto a análise que deve ser feita para o intervalo da integral em u é o mesmo que nos casos anteriores, eqs. (3.52) e (3.53). Como já foi mostrado, a integral no intervalo $u : [0, k]$ se anula, restando apenas a integral no intervalo $u : [k, \infty)$, assim a energia de Casimir é expressa por:

$$E_0^C = \frac{L^2 d}{2\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_k^\infty du \frac{[u^2 - k^2]^{1/2}}{e^{2du} + 1}. \quad (3.73)$$

Essa integral é resolvida definindo uma nova variável t onde $u = kt$. Com isso podemos usar o resultado (3.411-3) de [26] e obtemos

$$\frac{E_0^C}{L^2} = \frac{7}{11520} \frac{\pi^2}{d^3}, \quad (3.74)$$

assim usando $F = -\nabla E$, obtemos:

$$\frac{F_C}{L^2} = \frac{7}{3840} \frac{\pi^2}{d^4}. \quad (3.75)$$

Essa é a força de Casimir por unidade de área que atua em cada placa. Como podemos notar, a condição de contorno imposta nesse caso modificou não apenas a magnitude da força, mas também alterou a direção em que ela atua. Nesse caso temos uma força **repulsiva**, que difere dos casos anteriores onde vimos que a força de Casimir era uma força **atrativa**.

Analisamos esses três casos distintos para podermos comprar os resultados quando

empregamos uma quebra de simetria de Lorentz, que será feito no próximo Capítulo.

CAPÍTULO 4

EFEITO DA QUEBRA DA SIMETRIA DE LORENTZ NO EFEITO CASIMIR

Nesse capítulo abordamos o principal tema dessa Dissertação. Vamos analisar aqui como a anisotropia no espaço-tempo, gerada pela teoria de HL, modifica os resultados do efeito Casimir para um campo escalar sem massa. O desenvolvimento teórico nesse capítulo é realizado como já foi feito no Cap. 3, porém aqui a equação que o campo $\phi(x)$ deve satisfazer não é mais (3.4) e sim a eq. (C.13), a equação de KG modificada.

Vamos analisar o efeito Casimir em dois casos distintos. No primeiro vamos analisar esse efeito no interior de duas placas paralelas e no segundo vamos analisar no interior de uma caixa retangular bidimensional. Em ambos os casos vamos tratar de três tipos de condição de contorno:

4.1 Duas placas paralelas

Vamos considerar um campo escalar sem massa no interior de duas placas paralelas (Fig 3.1). Como já vimos na seção 2.6, a equação que um campo escalar real sem massa deve satisfazer na teoria de HL é dada por:

$$[\partial_0^2 + l^{2(\xi-1)}(-1)^\xi \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi}] \phi(x) = 0. \quad (4.1)$$

Devemos primeiramente obter a solução do campo impondo as condições de contornos desejadas, e assim obter o operador \hat{H} , com isso podemos determinar a energia de Casimir e conseqüentemente obter a força de Casimir. Antes de resolver (4.1) para cada caso, vamos determinar como fica a forma de $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi}$ no caso de (3+1)D. Para isso,

tomamos os valores $\xi = 1, 2$ e 3 e vimos como fica a forma da expressão (ver Apêndice C), de modo que a forma geral em 3D (espaciais) é expressa por:

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^\xi, \quad (4.2)$$

assim a equação que devemos resolver para $\phi(x)$ é:

$$[\partial_0^2 + l^{2(\xi-1)}(-1)^\xi(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^\xi] \phi(x) = 0. \quad (4.3)$$

Vamos em seguida resolver a eq. (4.3) impondo condições de contorno específicas aos campos nas superfícies das placas paralelas.

Cond. de Dirichlet

Resolvendo a (4.3) impondo as condições de contorno de Dirichlet, ou seja, a solução deve satisfazer

$$\phi(x)_{z=0} = \phi(x)_{z=d} = 0, \quad (4.4)$$

o conjunto completo de soluções ortonormais que satisfaça essas condições é dada por:

$$\phi(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2\pi)^2 d k_0]^{1/2}} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{d} z \right) e^{-ikx}, \quad (4.5)$$

onde $kx \equiv k_0 x_0 - k_x x - k_y y$,

$$k_0 = l^{\xi-1} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi, \quad (4.6)$$

e $\omega_{\mathbf{k},n}$ obedece a relação de dispersão:

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2. \quad (4.7)$$

Para obter o operador \hat{H} devemos promover o campo, $\phi(x)$, a um operador de campo. Assim, tomando tanto a parte da solução de frequências positivas e negativas, o operador campo é dado por:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2\pi)^2 d k_0]^{1/2}} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{d} z \right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}], \quad (4.8)$$

onde os operadores $a_{\mathbf{k},n}$ e $a_{\mathbf{k},n}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, que devem satisfazer as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[a_{\mathbf{k},n}, a_{\mathbf{k}',n'}^\dagger] &= \delta_{n,n'} \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\
[a_{\mathbf{k},n}, a_{\mathbf{k}',n'}] &= [a_{\mathbf{k},n}^\dagger, a_{\mathbf{k}',n'}^\dagger] = 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Vamos agora, definir o operador \hat{H} para esse campo. Da ação (2.37) temos que a densidade lagrangiana para esse caso é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_0 \phi(x) \partial_0 \phi(x) - l^{2(\xi-1)} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi(x) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi(x)]. \tag{4.10}$$

O operador \hat{H} é dado por:

$$\hat{H} = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}, \tag{4.11}$$

onde $\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$, e $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$. Com isso, obtemos o operador \hat{H} , dado por:

$$\hat{H} = \int d^3 \mathbf{x} \left[\dot{\phi}^2 + l^{2(\xi-1)} (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi)^2 \right]. \tag{4.12}$$

Substituindo (4.8) em (4.12), obtemos a expressão de \hat{H} :

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \int d^2 \mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi [a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^\dagger + a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n}], \tag{4.13}$$

e usando as relações de comutação (4.9), temos que

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^\dagger + a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} &= 2a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \delta^{(2)}(0), \\
&= 2a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde usamos a expressão da delta $\delta^2(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\vec{r} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}}$. Assim o Hamiltoniano é reescrito como

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \int d^2 \mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi \left[2a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right], \tag{4.15}$$

e a energia do ponto zero é dada por:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{l^{\xi-1} L^2}{8\pi^2} \int d^2 \mathbf{k} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi. \tag{4.16}$$

¹Para o caso em que estamos tratando, a integral no plano (x,y) se estende apenas na área das placas.

Para trabalhar com a soma em n usamos novamente a fórmula de Abel-Plana (3.42), antes disso mudamos as coordenadas do plano $k_x k_y$ para o plano polar, onde $k_x = k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta$ e $d^2 \mathbf{k} = k dk d\theta$, assim após integrar sobre a variável θ ficamos com:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \sum_{n=1}^\infty \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}. \quad (4.17)$$

Substituindo a soma pela fórmula de Abel-Plana, ficamos com:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \left[-\frac{1}{2} F(0) + \int_0^\infty F(t) dt + i \int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \right], \quad (4.18)$$

onde

$$F(n) = \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}. \quad (4.19)$$

Como já dito no Cap. 3, os dois primeiros termos da soma em E_0 referem-se a energia do vácuo na presença de apenas uma placa, e a energia do vácuo livre. Assim a energia de Casimir, que é a energia do vácuo na presença de duas placas é dada por:

$$E_C = i \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \int_0^\infty dt \frac{[k^2 + (\frac{it\pi}{d})^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-\frac{it\pi}{d})^2]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} - 1}. \quad (4.20)$$

Realizando uma mudança de variável, onde $\frac{t\pi}{d} = u$, ficamos com

$$E_C = i \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_0^\infty du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2}}{e^{2du} - 1}. \quad (4.21)$$

A integral sobre a variável u deve ser analisada em dois intervalos, pois para $k > u$ e $k < u$. Assim o integrando assumem dois valores diferentes:

- Para $k > u$:

Nesse intervalo temos que

$$[k^2 + (\pm iu)^2]^{\xi/2} = [k^2 - u^2]^{\xi/2}. \quad (4.22)$$

- Para $k < u$:

Nesse intervalo temos que

$$\begin{aligned} [k^2 + (\pm iu)^2]^{\xi/2} &= [k^2 + (e^{\pm i\frac{\pi}{2}} u)^2]^{\xi/2} = [k^2 + e^{\pm i\pi} u^2]^{\xi/2} \\ &= e^{\pm i\xi\frac{\pi}{2}} [u^2 + e^{\mp i\pi} k^2]^{\xi/2} \\ &= e^{\pm i\xi\frac{\pi}{2}} [u^2 - k^2]^{\xi/2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da eq. (4.22) temos que a integral em u no intervalo $[0, k]$ na expressão de E_C é nula, assim substituindo (4.23) em E_C ficamos com:

$$\begin{aligned} E_C &= i \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_k^\infty du \frac{(u^2 - k^2)^{\xi/2}}{e^{2du} - 1} (e^{i\xi \frac{\pi}{2}} - e^{-i\xi \frac{\pi}{2}}), \\ &= -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_k^\infty du \frac{(u^2 - k^2)^{\xi/2}}{e^{2du} - 1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Para resolver a integral em u introduzimos uma nova variável t , onde $u = kt \rightarrow du = kdt$, assim

$$E_C = -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\xi/2} dt \int_0^\infty dk \frac{k^{\xi+2}}{e^{2dkt} - 1}. \quad (4.25)$$

Usando o resultado 3.411-1 de [26], onde:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^{\mu x} - 1} = \frac{1}{\mu^\nu} \Gamma(\nu) \zeta(\nu),$$

onde $\Gamma(z)$ e $\zeta(z)$ referem-se as funções gamma (ou fatorial) e a função zeta de Riemann, respectivamente. Desse modo ficamos com

$$E_C = -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \frac{\Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3)}{(2d)^{\xi+3}} \int_1^\infty dt \frac{(t^2 - 1)^{\xi/2}}{t^{\xi+3}}. \quad (4.26)$$

A integral em t é dada por:

$$\int_1^\infty dt \frac{(t^2 - 1)^{\xi/2}}{t^{\xi+3}} = \frac{1}{\xi + 2}.$$

Assim E_C é dado por:

$$E_C = -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \frac{\Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3)}{(2d)^{\xi+3}} \frac{1}{\xi + 2}. \quad (4.27)$$

Usando a definição da função gama, $\Gamma(n) = (n-1)!$, temos que $\frac{\Gamma(\xi+3)}{\xi+2} = \Gamma(\xi+2)$, logo a energia de Casimir por unidade de área é expressa por:

$$\frac{E_C}{L^2} = -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} \Gamma(\xi+2) \zeta(\xi+3)}{2^{\xi+4} \pi^2 d^{(\xi+2)}}. \quad (4.28)$$

Com isso podemos obter a força de Casimir, $F_C = -\frac{\partial E_C}{\partial d}$:

$$\frac{F_C}{L^2} = -\text{sen}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \frac{l^{\xi-1}\Gamma(\xi+3)\zeta(\xi+3)}{2^{\xi+4}\pi^2d^{(\xi+3)}}. \quad (4.29)$$

Esse resultado tem dois pontos a se destacar. O primeiro é que como a força de Casimir, nesse caso, depende do termo $\text{sen}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)$, temos que para ξ par a mesma é nula. Já para ξ ímpar a força de Casimir alterna o sinal, hora pode ser uma força atrativa, hora pode ser uma força repulsiva. O resultado está de acordo com [16], onde a força de Casimir possui a mesma característica dependendo do parâmetro da quebra de simetria, com a diferença sendo que em [16] o resultado foi obtido em termos dos números de Bernoulli.

Também para constar, podemos notar que para $\xi=1$, essa força de Casimir de fato reproduz o caso usual

$$\frac{F_C^{\xi=1}}{L^2} = -\frac{\pi^2}{480d^4}, \quad (4.30)$$

que é o mesmo resultado de (3.60)

Cond. de Neumann

Agora estamos interessados nas soluções de (4.3) que satisfaçam as condições de Neumann, ou seja, $\phi(x)$ deve satisfazer

$$\left.\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z}\right|_{z=d} = 0. \quad (4.31)$$

O conjunto completo de soluções ortonormais que satisfaz essa condição é dada por:

$$\phi(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{d}z\right) e^{-i\mathbf{k}x}, \quad (4.32)$$

onde

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^2dk_0}} & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2dk_0}} & \text{se } n \geq 1, \end{cases} \quad (4.33)$$

e $k_0 = l^{\xi-1}\omega_{\mathbf{k},n}^{\xi}$. Aqui $\omega_{\mathbf{k},n}$ obedece a mesma relação de dispersão que no caso anterior

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2. \quad (4.34)$$

Promovendo o campo $\phi(x)$ a um operador de campo, a fim de obtermos \hat{H} , temos que:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{d}z\right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}]. \quad (4.35)$$

Substituindo o operador campo na eq. (4.12), encontramos o Hamiltoniano correspondente:

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi [a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^\dagger + a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n}], \quad (4.36)$$

onde

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n). \quad (4.37)$$

Usando as relações de comutação (4.9) dos operadores $a_{\mathbf{k},n}$ e $a_{\mathbf{k},n}^\dagger$, ficamos com

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi \left[2a_{\mathbf{k},n}^\dagger a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.38)$$

Assim a energia do ponto zero é dada por:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{l^{\xi-1} L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi. \quad (4.39)$$

Mudando as coordenadas do plano $(k_x k_y)$ para coordenadas polares e integrando sobre a variável angular, ficamos com:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi. \quad (4.40)$$

Utilizando a fórmula de Abel-Plana, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^\infty F(t) dt + i \int_0^\infty dt \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} \quad (4.41)$$

e substituindo essa soma em (4.40), ficamos com:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \left[\int_0^\infty F(t) dt + i \int_0^\infty dt \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} \right], \quad (4.42)$$

onde aqui

$$F(n) = \omega_{\mathbf{k},n}^\xi = [k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2]^{\xi/2}.$$

Assim como nos casos anteriores, o termo que representa a energia de Casimir é apenas o segundo termo do lado direito de (4.42), assim ficamos com

$$E_C = i \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^\infty dk k \int_0^\infty dt \frac{[k^2 + (\frac{i\pi}{d})^2]^{\xi/2} - [k^2 + (-\frac{i\pi}{d})^2]^{\xi/2}}{e^{2du} - 1}. \quad (4.43)$$

Essa expressão é a obtida para o caso de Dirichlet (4.20). Resolvendo da mesma maneira como foi feito anteriormente, chega-se aos mesmos resultados, onde a energia de Casimir é dada por:

$$\frac{E_C}{L^2} = -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} \Gamma(\xi+2) \zeta(\xi+3)}{2^{\xi+4} \pi^2 d^{(\xi+2)}} \quad (4.44)$$

e a força de Casimir por unidade de área é:

$$\frac{F_C}{L^2} = -\text{sen} \left(\frac{\pi\xi}{2} \right) \frac{l^{\xi-1} \Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3)}{2^{\xi+4} \pi^2 d^{(\xi+3)}}. \quad (4.45)$$

Assim como no caso anterior, a força de Casimir é nula para ξ par e alterna entre uma força atrativa e repulsiva para ξ ímpar.

Cond. Mista

Temos dois tipos de condições mistas:

$$\begin{aligned} i) \quad \phi(z=0) &= \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0 \\ ii) \quad \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \phi(z=d) = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Resolvendo a eq. (4.3) impondo essas condições, os operadores de campo obtidos são:

$$\hat{\phi}_i(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 dk_0}} \text{sen} \left((n+1/2) \frac{\pi}{d} z \right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}], \quad (4.47)$$

e

$$\hat{\phi}_{ii}(x) = \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 dk_0}} \cos \left((n+1/2) \frac{\pi}{d} z \right) [a_{\mathbf{k},n} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},n}^\dagger e^{ikx}], \quad (4.48)$$

onde $k_0 = l^{\xi-1} \omega_{\mathbf{k},n}^\xi$ e $\omega_{\mathbf{k},n}$ satisfaz a relação de dispersão

$$\omega_{\mathbf{k},n}^2 = k_x^2 + k_y^2 + \left[(n+1/2) \frac{\pi}{d} \right]^2$$

Ambos os operadores de campo ($\hat{\phi}_i(x)$ e $\hat{\phi}_{ii}(x)$) resultam no mesmo operador Hamiltoniano,

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^{\xi} [a_{\mathbf{k},n} a_{\mathbf{k},n}^{\dagger} + a_{\mathbf{k},n}^{\dagger} a_{\mathbf{k},n}]. \quad (4.49)$$

Usando as relações de comutação (4.9), ficamos com

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^{\xi} \left[2a_{\mathbf{k},n}^{\dagger} a_{\mathbf{k},n} + \frac{L^2}{(2\pi)^2} \right]. \quad (4.50)$$

Assim a energia do ponto zero é dada por:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{l^{\xi-1} L^2}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^{\xi}. \quad (4.51)$$

Mudando as coordenadas do plano (k_x, k_y) para coordenadas polares, ficamos com:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} dk k \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\mathbf{k},n}^{\xi}. \quad (4.52)$$

Substituindo a soma pela fórmula de Abel-Plana para função de números semi-inteiros (3.71), teremos:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} dk k \left\{ \int_0^{\infty} F(t) dt - i \int_0^{\infty} dt \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} + 1} \right\}. \quad (4.53)$$

Novamente, a energia de Casimir é representada apenas pelo segundo termo da expressão acima. O primeiro termo refere-se a energia do vácuo livre. Logo a energia de Casimir é dada por:

$$E_C = -i \frac{l^{\xi-1} L^2}{4\pi} \int_0^{\infty} dk k \int_0^{\infty} dt \frac{[k^2 + (\frac{i\pi}{d})^2]^{\xi/2} + [k^2 + (\frac{-i\pi}{d})^2]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} + 1}. \quad (4.54)$$

Realizando uma mudança de variável, $\frac{t\pi}{d} = u$, encontramos,

$$E_C = -i \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dk k \int_0^{\infty} du \frac{[k^2 + (iu)^2]^{\xi/2} + [k^2 + (-iu)^2]^{\xi/2}}{e^{2au} + 1}. \quad (4.55)$$

Novamente, devemos analisar a integral sobre a variável u em dois intervalos ($u < k$ e $u > k$). Da eq. (4.22) temos que a integral no intervalo $u: [0, k]$ se anula, assim substituindo (4.23) em E_C ficamos com:

$$\begin{aligned}
E_C &= -i \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_k^\infty du \frac{(u^2 - k^2)^{\xi/2}}{e^{2du} + 1} (e^{i\xi\frac{\pi}{2}} - e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}), \\
&= \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_k^\infty du \frac{(u^2 - k^2)^{\xi/2}}{e^{2du} + 1}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Introduzindo uma nova variável t , onde $u = kt$, ficamos com

$$E_C = \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\xi/2} \int_0^\infty dk \frac{k^{\xi+2}}{e^{2dkt} + 1}. \tag{4.57}$$

Usando o resultado 3.411-3 de [26], onde:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^{\mu x} + 1} = \frac{1}{\mu^\nu} (1 - 2^{1-\nu}) \Gamma(\nu) \zeta(\nu),$$

ficamos com

$$E_C = \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \frac{l^{\xi-1} L^2 d}{2\pi^2} \frac{\Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3)}{(2a)^{\xi+3}} \int_1^\infty dt \frac{(t^2 - 1)^{\xi/2}}{t^{\xi+3}}. \tag{4.58}$$

A integral em t é dada por:

$$\int_1^\infty dt \frac{(t^2 - 1)^{\xi/2}}{t^{\xi+3}} = \frac{1}{\xi + 2}. \tag{4.59}$$

Utilizando esse resultado, e ainda que $\frac{\Gamma(\xi+3)}{\xi+2} = \Gamma(\xi+2)$, a energia de Casimir é dada por

$$\frac{E_C}{L^2} = \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) (1 - 2^{-(\xi+2)}) \frac{l^{\xi-1} \Gamma(\xi+2) \zeta(\xi+3)}{2^{\xi+4} \pi^2 d^{\xi+2}}, \tag{4.60}$$

e a força de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{F_C}{L^2} = (1 - 2^{-(\xi+2)}) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \frac{l^{\xi-1} \Gamma(\xi+3) \zeta(\xi+3)}{2^{\xi+4} \pi^2 d^{\xi+3}}. \tag{4.61}$$

Temos novamente as mesmas características, para ξ par a força de Casimir se anula, já para ξ ímpar a força de Casimir alterna entre uma força atrativa e repulsiva. Podemos também verificar que para $\xi = 1$ essa força de fato recupera a força de Casimir usual,

$$\frac{F_C^{\xi=1}}{L^2} = \frac{7}{3840} \frac{\pi^2}{d^4}, \tag{4.62}$$

o mesmo resultado obtido em (3.75).

4.2 Efeito Casimir em uma caixa bidimensional retangular

Nessa seção vamos considerar um campo escalar sem massa, $\phi(x)$, no interior de uma caixa bidimensional retangular definida por $0 \leq x \leq d$, $0 \leq y \leq b$ (Fig.4.1). Vamos tratar do campo $\phi(t, x, y)$, desconsiderando a variável ao longo do eixo z , pois esse não sofre nenhuma alteração devido ao contorno. Assim, a equação que o campo $\phi(x)$ deve satisfazer é,

$$[\partial_0^2 + l^{2(\xi-1)}(-1)^\xi(\partial_x^2 + \partial_y^2)^\xi]\phi(x) = 0. \quad (4.63)$$

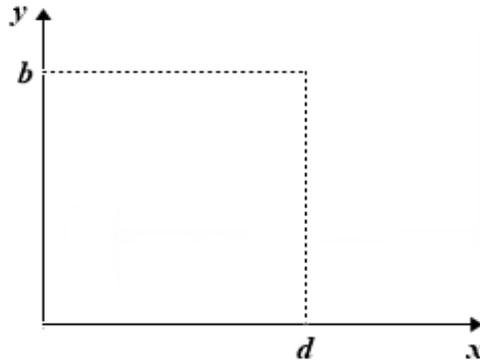


Figura 4.1: Caixa bidimensional retangular, de arestas b e d .

Novamente, vamos obter a força de Casimir impondo três condições de contorno distintas ao campo.

Dirichlet

Nesse caso a solução da eq. (4.63) deve satisfazer as condições abaixo:

$$\begin{cases} \phi(t, 0, y) = \phi(t, d, y) = 0, \\ \phi(t, x, 0) = \phi(t, x, b) = 0. \end{cases} \quad (4.64)$$

O operador campo obtido para $\phi(x)$ impondo essas condições de contorno é dado por:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{dbk_0}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) [a_{n,m}e^{-ik_0t} + a_{n,m}^\dagger e^{ik_0t}], \quad (4.65)$$

onde $k_0 = l^{\xi-1}\omega_{n,m}^\xi$ e $\omega_{n,m}$ obedece a relação de dispersão:

$$\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

e $a_{n,m}$ e $a_{n,m}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [a_{n,m}, a_{n',m'}^\dagger] &= \delta_{n,n'}\delta_{m,m'}, \\ [a_{n,m}, a_{n',m'}] &= [a_{n,m}^\dagger, a_{n',m'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Assim o operador Hamiltoniano, que é dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} [\dot{\phi}^2 + l^{2(\xi-1)}(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\phi)^2],$$

é obtido utilizando (4.68). Ficamos com,

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{n,m}^\xi [a_{n,m}a_{n,m}^\dagger + a_{n,m}^\dagger a_{n,m}] \quad (4.67)$$

e usando as relação (4.66) temos:

$$\hat{H} = l^{\xi-1} \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{n,m}^\xi [a_{n,m}^\dagger a_{n,m} + 1/2]. \quad (4.68)$$

Com isso temos que a energia do ponto zero é dada por:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{l^{\xi-1}}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{n,m}^\xi. \quad (4.69)$$

Para desenvolver as somas em n e m vamos novamente usar a fórmula de Abel-Plana. Temos de (3.42) que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(t)dt + i \int_0^{\infty} dt \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1}, \quad (4.70)$$

assim, efetuando primeiro a soma em \underline{m} , onde $F(m) = [(\frac{n\pi}{d})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2]^{\xi/2}$, ficamos com:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{d} \right)^{\xi} + \int_0^{\infty} dt \left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2} + \right. \\ \left. i \int_0^{\infty} dt \frac{\left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{it\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2} - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{-it\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} - 1} \right]. \quad (4.71)$$

A última integral deve ser dividida em duas partes, pois temos que:

- Para $\frac{t}{b} < \frac{n}{d}$ temos que:

$$\left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 + \left(\pm i \frac{t\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2} = \left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \left(\frac{t\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2}. \quad (4.72)$$

- Para $\frac{t}{b} > \frac{n}{d}$ temos que:

$$\left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 + \left(\pm i \frac{t\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2} = e^{\pm i \xi \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{t\pi}{b} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}. \quad (4.73)$$

Assim, de (4.72) e (4.73) temos

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{d} \right)^{\xi}}_I + \underbrace{\int_0^{\infty} dt \left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2}}_{II} - \right. \\ \left. \underbrace{2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \int_{nb/d}^{\infty} dt \frac{\left[\left(\frac{t\pi}{b} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} - 1}}_{III} \right]. \quad (4.74)$$

Vamos agora efetuar a soma em n . Para uma melhor visualização vamos fazer cada termo separadamente. Vamos efetuar a soma para o termo I de E_0 . Usando (4.70), temos,

$$I = -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} dv \left(\frac{v\pi}{d} \right)^{\xi} + i \int_0^{\infty} dv \frac{\left(\frac{iv\pi}{d} \right)^{\xi} - \left(\frac{-iv\pi}{d} \right)^{\xi}}{e^{2\pi v} - 1} \right\} \\ = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dv \left(\frac{v\pi}{d} \right)^{\xi} + \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{d} \right)^{\xi} \int_0^{\infty} dv \frac{v^{\xi}}{e^{2\pi v} - 1}. \quad (4.75)$$

A integral do segundo termo na última equação é obtida de [26]. Assim, o termo I de E_0 é dado por:

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{d}\right)^{\xi} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dv \left(\frac{v\pi}{d}\right)^{\xi} + \operatorname{sen}\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\pi}{d}\right)^{\xi} \frac{\Gamma(\xi+1)\zeta(\xi+1)}{(2\pi)^{\xi+1}}. \quad (4.76)$$

Efetuando a soma para o termo II de (4.74), temos:

$$II = \int_0^{\infty} dt \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t\pi}{b}\right)^{\xi} + \int_0^{\infty} dv \left[\left(\frac{v\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2} - \right. \\ \left. i \int_0^{\infty} dv \frac{\left[\left(\frac{iv\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2} - \left[\left(\frac{-iv\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi v} - 1} \right\}. \quad (4.77)$$

O último termo dessa equação também deve ser dividido em duas partes, para $v < \frac{ta}{b}$ e para $v > \frac{ta}{b}$, igualmente feito em (4.71), assim ficamos com:

$$II = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\xi} \int_0^{\infty} t^{\xi} dt + \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dv \left[\left(\frac{v\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2} \\ - 2\operatorname{sen}\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_{td/b}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{v\pi}{d}\right)^2 - \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi x} - 1}, \quad (4.78)$$

A integral do último termo de II pode ser resolvida através das eqs. (3.411-1 e 8.380-1) de [26], de modo que II fica dado por:

$$II = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\xi} \int_0^{\infty} t^{\xi} dt + \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dv \left[\left(\frac{v\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2} \\ - \operatorname{sen}\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \frac{d}{b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\xi} \frac{\Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2)\operatorname{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\xi}{2} + 1\right)}{(2\pi d/b)^{\xi+2}}, \quad (4.79)$$

onde $\operatorname{B}(x, y)$ é a função beta [2].

Vamos agora ver o termo III de E_0 , temos que:

$$III = -2\operatorname{sen}\left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{nb/d}^{\infty} dt \frac{\left[\left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} - 1}. \quad (4.80)$$

Usando que $\sum_{m=1}^{\infty} e^{-nm} = \frac{1}{e^n - 1}$, podemos reescrever III como:

$$III = -2\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{nb/d}^{\infty} dt \left[\left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \right]^{\xi/2} e^{-2\pi tm}. \quad (4.81)$$

Definindo uma nova variável u onde $\frac{t\pi}{b} = u\frac{n\pi}{d}$, III é reescrito como:

$$III = -2\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\pi}{d}\right)^{\xi} \left(\frac{b}{d}\right)^{\xi+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\xi+1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_1^{\infty} du [u^2 - 1]^{\xi/2} e^{-2\pi unmb/d}, \quad (4.82)$$

e usando a representação integral da função de Bessel modificada [26]

$$K_{\nu}(x) = \frac{(\frac{x}{2})^{\nu}\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^{\infty} dt (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-xt},$$

o termo III é dado por

$$III = -2\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\pi}{d}\right)^{\xi} \frac{\Gamma(\frac{\xi}{2} + 1)}{\pi^{\frac{\xi+2}{2}}} \left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{1-\xi}{2}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\xi+1}{2}} K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi nmb/d). \quad (4.83)$$

Assim, substituindo os termos I , II e III em (4.74), teremos:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{2} \left\{ -\frac{\pi^{\xi}}{2} \left(\frac{1}{d^{\xi}} + \frac{1}{b^{\xi}}\right) \int_0^{\infty} dv x^{\xi} + \text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\pi}{d}\right)^{\xi} \frac{\Gamma(\xi+1)\zeta(\xi+1)}{(2\pi)^{\xi+1}} + \right. \\ \left. \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dv \left[\left(\frac{v\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2 \right]^{\xi/2} - \text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \frac{d}{b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\xi} \frac{\Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2)\text{B}(\frac{1}{2}, \frac{\xi}{2} + 1)}{(2\pi d/b)^{\xi+2}} \right. \\ \left. - 2\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\pi}{d}\right)^{\xi} \frac{\Gamma(\frac{\xi}{2} + 1)}{\pi^{\frac{\xi+2}{2}}} \left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{1-\xi}{2}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\xi+1}{2}} K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi nmb/d). \right\} \quad (4.84)$$

A primeira integral em (4.84) é referente a energia do vácuo no perímetro de lado $(b^{\xi} + d^{\xi})$, para o caso em que $\xi = 1$ é mais fácil visualizar que essa energia refere-se a energia no caso onde temos apenas duas arestas do retângulo bd . A terceira integral em (4.84) refere-se a energia do vácuo livre na área delimitada pelo retângulo bd . Ambas as integrais são subtraídas no processo de renormalização, pois nesse caso estamos interessado na energia de vácuo devido a imposição de condições de contorno em todos os lados do

retângulo bd . Assim a energia de Casimir para esse caso, é dada por:

$$E_C = \frac{l^{\xi-1}\pi^\xi}{2} \operatorname{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \left\{ \frac{\Gamma(\xi+1)\zeta(\xi+1)}{d^\xi(2\pi)^{\xi+1}} + \frac{b}{d^{\xi+1}(2\pi)^{\xi+2}} \Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2) \operatorname{B}\left(1/2, \frac{\xi}{2} + 1\right) - 2 \frac{\Gamma(\frac{\xi}{2}+1)}{d^{\frac{\xi+1}{2}} b^{\frac{\xi-1}{2}} \pi^{\frac{\xi}{2}+1}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\xi+1}{2}} K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi nmb/d) \right\}. \quad (4.85)$$

Como podemos ver, para ξ par a energia de Casimir é nula. Nos casos particulares $\xi = 1$ e $\xi = 3$ temos:

- Para $\xi = 1$

$$E_C^{\xi=1} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{24d} - \frac{b}{8\pi^2 d^2} \zeta(3) - \frac{1}{d\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} K_1(2\pi nmb/d) \right\}. \quad (4.86)$$

- Para $\xi = 3$

$$E_C^{\xi=3} = -\frac{l^2\pi^3}{2} \left\{ \frac{1}{240d^3} - \frac{9b}{32\pi^4 d^4} \zeta(5) - \frac{3}{2bd^2\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} K_2(2\pi nmb/d) \right\}. \quad (4.87)$$

Assim, de (4.86), temos que (4.85) de fato recupera o caso usual para $\xi = 1$ [24].

Podemos agora obter a força de Casimir, nas duas arestas, para esses dois casos:

- Para $\xi = 1$:

$$F_d^1 = -\frac{\partial E_C^{\xi=1}}{\partial d} = -\frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{24d^2} + \frac{b}{4\pi^2 d^3} \zeta(3) + \frac{1}{\pi d^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} K_1(2\pi nmb/d) - \frac{1}{\pi d} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \frac{\partial K_1(2\pi nmb/d)}{\partial d} \right\}, \quad (4.88)$$

essa é a força que atua nas arestas em $x = 0$ e $x = d$, e

$$F_b^1 = -\frac{\partial E_C^{\xi=1}}{\partial b} = -\frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{\zeta(3)}{8\pi^2 d^2} - \frac{1}{\pi d} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \frac{\partial K_1(2\pi nmb/d)}{\partial b} \right\}, \quad (4.89)$$

é a força que atua nas arestas em $y = 0$ e $y = b$, onde

$$\frac{\partial K_1(F(x))}{\partial x} = -\frac{1}{2} [K_0(F(x)) + K_2(F(x))] \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (4.90)$$

- Para $\xi = 3$, temos:

$$F_d^3 = -\frac{\partial E_C^{\xi=3}}{\partial d} = \frac{l^2 \pi^3}{2} \left\{ -\frac{1}{80d^4} + \frac{9b\zeta(5)}{8d^5 \pi^4} + \frac{3}{b\pi^2 d^3} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} K_2(2\pi nmb/d) - \frac{3}{2bd^2 \pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} \frac{\partial K_2(2\pi nmb/d)}{\partial d} \right\}, \quad (4.91)$$

atuando nas arestas $x = 0$ e $x = d$, e

$$F_b^3 = -\frac{\partial E_C^{\xi=3}}{\partial b} = \frac{l^2 \pi^3}{2} \left\{ -\frac{9\zeta(5)}{32d^4 \pi^4} + \frac{3}{2b^2 \pi^2 d^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} K_2(2\pi nmb/d) - \frac{3}{2bd^2 \pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} \frac{\partial K_2(2\pi nmb/d)}{\partial b} \right\}, \quad (4.92)$$

atuando nas arestas $y = 0$ e $y = b$, onde

$$\frac{\partial K_2(F(x))}{\partial x} = -\frac{1}{2} [K_1(F(x)) + K_3(F(x))] \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (4.93)$$

Neumann

Nesse caso vamos resolver (4.63) impondo as condições:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=d} = 0, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=b} = 0. \end{cases} \quad (4.94)$$

O operador campo obtido para $\phi(x)$ que satisfaz essas condições é dado por:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} \cos\left(\frac{n\pi}{d}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) [a_{n,m} e^{-ik_0 t} + a_{n,m}^\dagger e^{ik_0 t}], \quad (4.95)$$

onde

$$C_{n,m} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2dbk_0}} & \text{p/ } m = n = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{dbk_0}} & \text{p/ } m \text{ ou } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{dbk_0}} & \text{p/ } m \text{ e } n \geq 1. \end{cases} \quad (4.96)$$

também nesse caso, temos que, $k_0 = l^{\xi-1} \omega_{n,m}^\xi$ e $\omega_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$.

O operador Hamiltoniano para esse campo, é dado por:

$$\hat{H} = \frac{bd}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m}^2 k_0^2 (a_{n,m}^\dagger a_{n,m} + 1/2), \quad (4.97)$$

de modo que a energia do ponto zero é dada por:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{bd}{2} \frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m}^2 k_0^2 \\ &= \frac{bd}{2} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_{0,m}^2 l^{2(\xi-1)} \omega_{0,m}^\xi + \frac{bd}{2} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,0}^2 l^{2(\xi-1)} \omega_{n,0}^\xi \\ &\quad + \frac{bd}{2} \frac{1}{2} \sum_{m,m=1}^{\infty} C_{n,m}^2 l^{2(\xi-1)} \omega_{n,m}^\xi + \frac{1}{2} C_{0,0}^2 \frac{bd}{2} l^{\xi-1} \omega_{0,0}^\xi. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Substituindo os respectivos coeficientes, dado por (4.96), e usando a relação de dispersão para $\omega_{n,m}$ temos:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{4} \left(\frac{\pi}{d}\right)^\xi \sum_{n=1}^{\infty} n^\xi + \frac{l^{\xi-1}}{4} \left(\frac{\pi}{b}\right)^\xi \sum_{m=1}^{\infty} m^\xi + \frac{l^{\xi-1}}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \omega_{n,m}^\xi. \quad (4.99)$$

O último termo de (4.99) é a energia do ponto zero para o caso de Dirichlet (4.69), assim precisamos calcular apenas os dois primeiros termos. Utilizando a fórmula de Abel-Plana para a soma e resultados de [26], temos que:

$$\frac{l^{\xi-1}}{4} \left(\frac{\pi}{d}\right)^\xi \sum_{n=1}^{\infty} n^\xi = \frac{l^{\xi-1}}{4} \left(\frac{\pi}{d}\right)^\xi \left\{ \int_0^\infty t^\xi dt - 2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(\xi+1) \zeta(\xi+1)}{(2\pi)^{\xi+1}} \right\} \quad (4.100)$$

e

$$\frac{l^{\xi-1}}{4} \left(\frac{\pi}{b}\right)^\xi \sum_{m=1}^{\infty} m^\xi = \frac{l^{\xi-1}}{4} \left(\frac{\pi}{b}\right)^\xi \left\{ \int_0^\infty t^\xi dt - 2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(\xi+1) \zeta(\xi+1)}{(2\pi)^{\xi+1}} \right\}. \quad (4.101)$$

Assim, substituindo (4.100), (4.101) e (4.84) em (4.99) temos:

$$\begin{aligned}
E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{2} & \left\{ \int_0^\infty dt \int_0^\infty dv \left[\left(\frac{v\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2} - \text{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^\xi \frac{\Gamma(\xi+1)\zeta(\xi+1)}{(2\pi)^{\xi+1}} \right. \\
& - \text{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \frac{d}{b} \left(\frac{\pi}{b} \right)^\xi \frac{\Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2)\text{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\xi}{2} + 1\right)}{(2\pi d/b)^{\xi+2}} \\
& \left. - 2\text{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{d} \right)^\xi \frac{\Gamma\left(\frac{\xi}{2} + 1\right)}{\pi^{\frac{\xi+2}{2}}} \left(\frac{b}{d} \right)^{\frac{1-\xi}{2}} \sum_{n,m=1}^\infty \binom{n}{m}^{\frac{\xi+1}{2}} K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi nmb/d) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

A primeira integral acima refere-se a energia do vácuo livre, como já foi dita. Ela é subtraída no processo de renormalização. Assim a energia de Casimir para esse caso é dado por:

$$\begin{aligned}
E_C = \frac{l^{\xi-1}\pi^\xi}{2} \text{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) & \left\{ - \frac{\Gamma(\xi+1)\zeta(\xi+1)}{b^\xi(2\pi)^{\xi+1}} + \frac{b}{d^{\xi+1}(2\pi)^{\xi+2}} \Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2)\text{B}\left(1/2, \frac{\xi}{2} + 1\right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\xi}{2} + 1\right)}{d^{\frac{\xi+1}{2}} b^{\frac{\xi-1}{2}} \pi^{\frac{\xi}{2}+1}} \sum_{n,m=1}^\infty \binom{n}{m}^{\frac{\xi+1}{2}} K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi nmb/d) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Novamente, temos que para ξ par a força de Casimir é nula. Vejamos os dois casos particulares $\xi = 1$ e $\xi = 3$:

- $\xi = 1$

$$E_C^{\xi=1} = \frac{\pi}{2} \left\{ - \frac{1}{24b} - \frac{b}{8\pi^2 d^2} \zeta(3) - \frac{1}{d\pi} \sum_{n,m=1}^\infty \frac{n}{m} K_1(2\pi nmb/d) \right\}. \tag{4.104}$$

- $\xi = 3$

$$E_C^{\xi=3} = - \frac{l^2 \pi^3}{2} \left\{ - \frac{1}{240b^3} - \frac{9b}{32\pi^4 d^4} \zeta(5) - \frac{3b}{2d^2 \pi^2} \sum_{n,m=1}^\infty \frac{n^2}{m^2} K_2(2\pi nmb/d) \right\}. \tag{4.105}$$

Podemos agora obter a força de Casimir para esses dois casos:

- Para $\xi = 1$:

$$F_d^1 = -\frac{\partial E_C^{\xi=1}}{\partial d} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{b}{4\pi^2 d^3} \zeta(3) + \frac{1}{\pi d^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} K_1(2\pi nmb/d) - \frac{1}{\pi d} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \frac{\partial K_1(2\pi nmb/d)}{\partial d} \right\}, \quad (4.106)$$

e

$$F_b^1 = -\frac{\partial E_C^{\xi=1}}{\partial b} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{24b} - \frac{\zeta(3)}{8\pi^2 d^2} - \frac{1}{\pi d} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{m} \frac{\partial K_1(2\pi nmb/d)}{\partial b} \right\}, \quad (4.107)$$

sendo F_a^1 é a força que atua nas arestas $x = 0$, $x = d$ e F_b^1 é a força que atuam nas arestas $y = 0$, $y = b$, onde

$$\frac{\partial K_1(F(x))}{\partial x} = -\frac{1}{2} [K_0(F(x)) + K_2(F(x))] \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (4.108)$$

- Para $\xi = 3$, temos:

$$F_d^3 = -\frac{\partial E_C^{\xi=3}}{\partial d} = \frac{l^2 \pi^3}{2} \left\{ \frac{9b\zeta(5)}{8d^5 \pi^4} + \frac{3b}{\pi^2 d^3} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} K_2(2\pi nmb/d) - \frac{3b}{2d^2 \pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} \frac{\partial K_2(2\pi nmb/d)}{\partial d} \right\}, \quad (4.109)$$

atuando nas arestas $x = 0$, $x = d$, e

$$F_b^3 = -\frac{\partial E_C^{\xi=3}}{\partial b} = \frac{l^2 \pi^3}{2} \left\{ \frac{1}{80b^4} - \frac{9\zeta(5)}{32d^4 \pi^4} - \frac{3}{2\pi^2 d^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} K_2(2\pi nmb/d) - \frac{3b}{2d^2 \pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n^2}{m^2} \frac{\partial K_2(2\pi nmb/d)}{\partial b} \right\}, \quad (4.110)$$

atuando nas arestas $y = 0$, $y = b$, onde

$$\frac{\partial K_2(F(x))}{\partial x} = -\frac{1}{2} [K_1(F(x)) + K_3(F(x))] \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (4.111)$$

Cond. Mista

Impondo condições de contorno mista para resolver (4.63), ou seja, $\phi(x)$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} i) & \begin{cases} \phi(x=0) = \frac{\partial\phi}{\partial x}|_{x=d} = 0 \\ \phi(y=0) = \frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y=b} = 0 \end{cases} \\ ii) & \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}|_{x=0} = \phi(x=d) = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y=0} = \phi(y=b) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.112)$$

O operador campo obtido para $\phi(x)$ que satisfaz essas condições de contorno são dados por:

$$\hat{\phi}_i(x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{dbk_0}} \text{sen} \left[(n+1/2) \frac{\pi}{d} x \right] \text{Sen} \left[(m+1/2) \frac{\pi}{b} y \right] [a_{n,m} e^{-ik_0 t} + a_{n,m}^\dagger e^{ik_0 t}] \quad (4.113)$$

e

$$\hat{\phi}_{ii}(x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{dbk_0}} \text{cos} \left[(n+1/2) \frac{\pi}{d} x \right] \text{Cos} \left[(m+1/2) \frac{\pi}{b} y \right] [a_{n,m} e^{-ik_0 t} + a_{n,m}^\dagger e^{ik_0 t}], \quad (4.114)$$

onde $\omega_{n,m} = \sqrt{\left[(n+1/2) \frac{\pi}{d} \right]^2 + \left[(m+1/2) \frac{\pi}{b} \right]^2}$.

O operador Hamiltoniano obtido para esses dois campos são os mesmos:

$$\hat{H} = \frac{l^{\xi-1}}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \omega_{n,m}^\xi [2a_{n,m}^\dagger a_{n,m} + 1]. \quad (4.115)$$

Assim a energia do ponto zero é dada por:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{2} \pi^\xi \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1/2}{d} \right)^2 + \left(\frac{m+1/2}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2}. \quad (4.116)$$

Utilizando a fórmula de Abel-Plana e analisando o intervalo de integração no segundo termo da soma, como já foi feito algumas vezes durante essa Dissertação, obtemos:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}}{2} \pi^\xi \sum_0^\infty \left\{ \underbrace{\int_0^\infty dt \left[\left(\frac{t}{b} \right)^2 + \left(\frac{n+1/2}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}}_I + \right. \\ \left. \underbrace{2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \int_{(n+1/2)b/d}^\infty dt \frac{\left[\left(\frac{t}{b} \right)^2 - \left(\frac{n+1/2}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} + 1}}_{II} \right\}. \quad (4.117)$$

Usando a fórmula de Abel-Plana para efetuar a soma em n para o termo I de E_0 , temos:

$$I = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dv \left[\left(\frac{t}{b} \right)^2 + \left(\frac{v}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2} + 2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \int_0^\infty dt \int_{td/b}^\infty dv \frac{\left[\left(\frac{v}{d} \right)^2 - \left(\frac{t}{b} \right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} + 1}. \quad (4.118)$$

A integral do segundo termo de I é obtida de [26], resultando em:

$$I = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dv \left[\left(\frac{t}{b} \right)^2 + \left(\frac{v}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2} + \\ (1 - 2^{-(\xi-1)}) \frac{b}{d^{\xi+1}} \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \frac{B \left(1/2, \frac{\xi}{2} + 1 \right) \Gamma(\xi + 2) \zeta(\xi + 2)}{(2\pi)^{\xi+2}}. \quad (4.119)$$

O termo II de E_0 é dado por:

$$II = 2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \sum_{n=0}^\infty \int_{(n+1/2)b/d}^\infty dt \frac{\left[\left(\frac{t}{b} \right)^2 - \left(\frac{n+1/2}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2}}{e^{2\pi t} + 1}. \quad (4.120)$$

Usando:

$$\frac{1}{e^m + 1} = - \sum_{l=1}^\infty (-1)^l e^{-nl},$$

podemos reescrever II como:

$$II = -2 \operatorname{sen} \left(\xi \frac{\pi}{2} \right) \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \int_{(n+1/2)b/d}^\infty dt \left[\left(\frac{t}{b} \right)^2 - \left(\frac{n+1/2}{d} \right)^2 \right]^{\xi/2} e^{-2\pi tm}. \quad (4.121)$$

Finalmente usando a eq. (8.432-3) de [26] temos:

$$II = -2\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right)\frac{b^{\frac{1-\xi}{2}}}{d^{\frac{\xi+1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{\xi}{2}+1)}{\pi^{\frac{\xi}{2}+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{n+1/2}{m}\right)^{\frac{\xi+1}{2}}\times K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi(n+1/2)mb/d). \quad (4.122)$$

Substituindo os resultado de I e II em (4.117), temos:

$$E_0 = \frac{l^{\xi-1}\pi^\xi}{2}\left\{\int_0^\infty dt\int_0^\infty dv\left[\left(\frac{t}{b}\right)^2 + \left(\frac{v}{d}\right)^2\right]^{\xi/2} + (1-2^{-(\xi-1)})\frac{b}{d^{\xi+1}}\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right)\frac{B\left(1/2, \frac{\xi}{2}+1\right)\Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2)}{(2\pi)^{\xi+2}} + -2\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right)\frac{b^{\frac{1-\xi}{2}}}{d^{\frac{\xi+1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{\xi}{2}+1)}{\pi^{\frac{\xi}{2}+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{n+1/2}{m}\right)^{\frac{\xi+1}{2}}\times K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi(n+1/2)mb/d)\right\}. \quad (4.123)$$

Novamente, a primeira integral refere-se a energia do vácuo livre em uma área delimitada pelo retângulo ab , porém sem os contornos, assim este termo é subtraído no processo de renormalização. Conseqüentemente, a energia de Casimir para essa condição de contorno é dada por:

$$E_C = \frac{l^{\xi-1}\pi^\xi}{2}\text{sen}\left(\xi\frac{\pi}{2}\right)\left\{(1-2^{-(\xi-1)})\frac{b}{d^{\xi+1}}\frac{B\left(1/2, \frac{\xi}{2}+1\right)\Gamma(\xi+2)\zeta(\xi+2)}{(2\pi)^{\xi+2}} - 2\frac{b^{\frac{1-\xi}{2}}}{d^{\frac{\xi+1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{\xi}{2}+1)}{\pi^{\frac{\xi}{2}+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{n+1/2}{m}\right)^{\frac{\xi+1}{2}}K_{\frac{\xi+1}{2}}(2\pi(n+1/2)mb/d)\right\}. \quad (4.124)$$

Como podemos ver, novamente, para ξ par a energia de Casimir é nula. Além disso, vejamos os dois casos particulares $\xi = 1$ e $\xi = 3$

- $\xi = 1$

$$E_C^{\xi=1} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{3}{32}\frac{b\zeta(3)}{d^2\pi^2} - \frac{1}{d\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{n+1/2}{m}\right)K_1(2\pi(n+1/2)mb/d)\right\}. \quad (4.125)$$

- $\xi = 3$

$$E_C^{\xi=3} = -\frac{l^2\pi^3}{2} \left\{ \frac{135}{512} \frac{b\zeta(5)}{d^4\pi^4} - \frac{3}{2bd^2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right)^2 K_2(2\pi(n+1/2)mb/d) \right\}. \quad (4.126)$$

Podemos agora obter as forças de Casimir:

- Para $\xi = 1$ temos:

$$F_d^1 = -\frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{3}{16} \frac{b\zeta(3)}{d^3\pi^2} + \frac{1}{d^2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right) K_1(2\pi(n+1/2)mb/d) \right. \\ \left. - \frac{1}{d\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right) \frac{\partial K_1(2\pi(n+1/2)mb/d)}{\partial d} \right\}, \quad (4.127)$$

atuando nas arestas $x = 0$, $x = d$, e

$$F_b^1 = -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{3}{32} \frac{\zeta(3)}{d^2\pi^2} - \frac{1}{d\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right) \frac{\partial K_1(2\pi(n+1/2)mb/d)}{\partial b} \right\}, \quad (4.128)$$

atuando nas arestas $y = 0$, $y = b$, onde

$$\frac{\partial K_1(F(x))}{\partial x} = -\frac{1}{2} [K_0(F(x)) + K_2(F(x))] \frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

- Para $\xi = 3$ temos:

$$F_d^3 = \frac{l^2\pi^3}{2} \left\{ -\frac{135}{128} \frac{b\zeta(5)}{d^5\pi^4} + \frac{3}{bd^3\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right)^2 K_2(2\pi(n+1/2)mb/d) \right. \\ \left. - \frac{3}{2bd^2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right)^2 \frac{\partial K_2(2\pi(n+1/2)mb/d)}{\partial d} \right\}, \quad (4.129)$$

e

$$F_b^3 = \frac{l^2\pi^3}{2} \left\{ \frac{135}{512} \frac{\zeta(5)}{d^4\pi^4} + \frac{3}{2b^2d^2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right)^2 K_2(2\pi(n+1/2)mb/d) \right. \\ \left. - \frac{3}{2bd^2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n+1/2}{m} \right)^2 \frac{\partial K_2(2\pi(n+1/2)mb/d)}{\partial b} \right\}, \quad (4.130)$$

onde

$$\frac{\partial K_2(F(x))}{\partial x} = -\frac{1}{2}[K_1(F(x)) + K_3(F(x))]\frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

Vimos então que a quebra de simetria de Lorentz, empregada pela teoria de HL, modifica a estrutura do vácuo, fazendo com que resulte em uma modificação nos resultados do efeito Casimir. O parâmetro ξ da teoria de HL é quem dita qual o resultado do efeito. Vimos que para ξ par, a força de Casimir é sempre nula, já para ξ ímpar a força de Casimir alterna entre uma força atrativa e uma força repulsiva.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

O objetivo central dessa Dissertação foi estudar as consequências da quebra de simetria de Lorentz no efeito Casimir para um campo escalar real sem massa. Mencionamos que existem diversas teorias que incorporam essa quebra de simetria, e a utilizada nessa Dissertação foi a teoria de gravitação quântica de Hořava-Lifshitz. O primeiro resultado que obtivemos foi como a equação de Klein-Gordon se modifica devido a uma anisotropia no espaço-tempo, a qual é gerada na teoria de HL devido a atribuição de diferentes propriedades de escala para as coordenadas espaço e tempo. Uma vez que obtivemos a equação de KG modificada, pudemos utiliza-la para estudar o efeito Casimir com a teoria de HL.

Primeiramente estudamos o efeito Casimir para duas placas paralelas de área L^2 separadas por uma distância d . Para esse caso, impusemos três diferentes tipos de condições de contorno ao campo $\phi(x)$ nas fronteiras: condições de Dirichlet, Neumann e Mista. Para cada caso obtivemos a energia de Casimir, e vimos que, em todos os casos, ela é dada por uma soma divergente. Tratamos essa soma utilizando as fórmulas de soma de Abel-Plana. Considerando as condições de Dirichlet e Neumann, vimos que essa soma tem a contribuição de três termos: a contribuição da energia do vácuo livre (sem fronteiras), a contribuição da energia do vácuo na presença de apenas uma placa, e por fim a contribuição da energia do vácuo na presença de duas placas. Já para as condições mistas, vimos que a soma tem a contribuição de apenas dois termos: a contribuição da energia do vácuo na presença de apenas uma placa e a contribuição da energia do vácuo na presença de duas placas. Ambas as contribuições da energia do vácuo livre e da energia do vácuo na presença de apenas uma placa são termos infinitos, porém vimos que esses termos podem ser subtraídos pelo processo de renormalização, assim obtivemos a energia de Casimir finita. Após isso calculamos a força de Casimir. Assim como no caso usual,

onde a simetria de Lorentz é preservada, a força de Casimir para as condições de Dirichlet e Neumann são iguais e diferem da força para a condição mista. Nos três casos vimos que a força de Casimir depende do parâmetro ξ da teoria de HL. Para $\xi = 1$ constatamos que recuperamos o caso usual, onde a simetria de Lorentz é preservada, para ξ par vimos que a força de Casimir é sempre nula, já para ξ ímpar a força de Casimir alterna o sinal, hora podendo ser atrativa, hora repulsiva.

Estudamos também o efeito Casimir em uma caixa bidimensional retangular de arestas “ b ” e “ d ”. Novamente impomos três diferentes tipos de condições de contorno ao campo $\phi(x)$: Dirichlet, Neumann e Mistas. Verificamos que as energias de Casimir, para os três casos, são uma soma infinita. Utilizando a fórmula de Abel-Plana para desenvolver essas somas, vimos que a energia de Casimir novamente é dada por três contribuições: a energia do vácuo livre, a energia do vácuo da presença de apenas duas arestas do retângulo e a energia do vácuo na presença do retângulo. Vimos que as energias do vácuo livre e na presença de apenas duas arestas do retângulo são termos infinitos, e estes são subtraídos no processo de renormalização, de modo que obtivemos a energia de Casimir finita. Com isso pudemos calcular a força de Casimir e ver que essa depende do parâmetro ξ da teoria de HL, onde para ξ par temos uma força nula e para ξ ímpar, temos uma força que alterna o sinal, podendo ser uma força atrativa ou repulsiva dependendo do valor de ξ .

De modo geral, podemos afirmar que a quebra da simetria de Lorentz modifica a equação de movimento que um campo deva satisfazer em uma teoria, essa modificação gera uma mudança em um efeito de grande conhecimento na literatura, o efeito Casimir. Onde antes a força de Casimir dependia apenas do tipo de condição imposta ao campo, temos que nesse contexto a força de Casimir depende também de um parâmetro da teoria em questão.

Como possíveis estudos, podemos vir a estudar esse mesmo cenário utilizando campos tensoriais e vetoriais.

APÊNDICE A

CONTRIBUIÇÕES INFINITAS NA ENERGIA DO VÁCUO

Nesse apêndice mostraremos de forma explícita que, na avaliação da energia do vácuo usando a fórmula de soma de Abel-Plana, surgem contribuições que estão associadas a energia do vácuo livre, i.e., sem presença de fronteiras, e também a energia do vácuo na presença de apenas uma placa. Essas contribuições são divergentes, e são subtraídas da energia total no processo de renormalização.

Consideremos inicialmente a eq. (3.48):

$$E_0 = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2}F(0)}_{E_I} + \underbrace{\int_0^\infty F(t)dt}_{E_{II}} + i \underbrace{\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)]}_{E_{III}} \right\}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$F(n) = \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{A.2})$$

Como mostramos na Dissertação, o termo E_{III} é o que contribui para a energia de Casimir, assim, os termos desconsiderados no cálculo da energia de Casimir foram E_I e E_{II} . Vejamos com que eles estão associados:

- E_I

Temos que:

$$E_I = -\frac{L^2}{8\pi} \int_0^\infty k dk F(0), \quad (\text{A.3})$$

substituindo (5.2) na equação acima, obtemos:

$$\frac{E_I}{L^2} = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dk k^2. \quad (\text{A.4})$$

A equação (5.4) nos dá a energia por unidade de área. Como podemos ver, essa energia não tem nenhuma dependência com a distância d que separa as placas, assim podemos concluir que essa energia por unidade de área refere-se a energia do vácuo na presença de apenas uma placa.

- E_{II}

Temos que:

$$E_{II} = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty F(t) dt. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (5.2) ficamos com,

$$E_{II} = \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \left[k^2 + \left(\frac{t\pi}{d} \right)^2 \right]^{1/2} dt, \quad (\text{A.6})$$

definindo uma nova variável u , onde $\frac{t\pi}{d} = u$, ficamos com

$$E_{II} = \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty [k^2 + u^2]^{1/2} du. \quad (\text{A.7})$$

Podemos mudar as coordenadas k e u para as coordenadas polares, onde $k = K \sin\theta$ e $u = K \cos\theta$, com isso encontramos:

$$E_{II} = \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^\infty K^3 dK. \quad (\text{A.8})$$

Resolvendo as integrais em θ e K , obtemos:

$$E_{II} = \frac{L^2 d}{4\pi^2} \int_0^\infty K^3 dK. \quad (\text{A.9})$$

Como L^2 é a área das placas e d a separação entre elas, temos que $L^2 d = V$ é o volume da região delimitada pelas placas. Assim, nesse caso temos:

$$\frac{E_{II}}{V} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty K^3 dK, \quad (\text{A.10})$$

sendo essa a energia do vácuo livre (ausência de placas), a energia de todo volume contido no interior das placa. A seguir, mostraremos que (5.10) realmente representa a energia do vácuo livre. Sabemos que a Hamiltoniana do campo escalar é dada por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}], \quad (\text{A.11})$$

porém nesse caso não temos nenhum momento discretizado, uma vez que o campo não esta confinado, de modo que a relação de comutação para $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ é:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{A.12})$$

Utilizando (5,12) a Hamiltoniana fica dada por:

$$\hat{H} = \int_V d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \right], \quad (\text{A.13})$$

de modo que a energia do vácuo é dada por:

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int_V d^3\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}. \quad (\text{A.14})$$

Mudando as coordenadas dos planos (k_x, k_y, k_z) para coordenadas esféricas, onde: $d^3\mathbf{k} = K^2 \sin\phi dK d\theta d\phi$ e $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \rightarrow \omega = K$, ficamos com:

$$E_0 = \frac{V}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty K^3 dK \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\phi d\phi, \quad (\text{A.15})$$

resultando em,

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty K^3 dK. \quad (\text{A.16})$$

Temos então que, de fato, a energia dada por (5.10) representa a energia do vácuo livre.

As dedução realizadas acima foram feita para o caso de Dirichlet. Para os casos de condições de Neumann e Mistas, a expressão para E_0 não contem o termo E_I . A demonstração do termo E_{II} para esses casos é igual a que foi feita para o caso de condição de Dirichlet.

APÊNDICE B

FUNÇÕES DE BESSEL MODIFICADAS

Nesse apêndice apresentaremos, de forma breve, a equação diferencial de Bessel modificada e suas soluções com respectivas propriedades.

A equação de Helmholtz,

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad (\text{B.1})$$

quando separada em termo das coordenadas cilíndricas circulares, leva a equação de Bessel:

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Z_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Z_\nu(k\rho) + (k^2\rho^2 - \nu^2) Z_\nu(k\rho) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Esta tem como solução a função de Bessel $J_\nu(k\rho)$. A equação de Helmholtz (5.11) descreve a parte espacial da equação de onda. No entanto, se tivermos uma equação de difusão, a equação de Helmholtz é dada por,

$$\nabla^2\psi - k^2\psi = 0. \quad (\text{B.3})$$

Esta quando separada em termos das coordenadas cilíndricas circulares, leva a:

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Y_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Y_\nu(k\rho) - (k^2\rho^2 + \nu^2) Y_\nu(k\rho) = 0. \quad (\text{B.4})$$

A equação (5.14) pode ser obtida através de (5.12) pela transformação $k \rightarrow ik$, de modo que:

$$Y_\nu(k\rho) = Z_\nu(ik\rho). \quad (\text{B.5})$$

As soluções da eq. (5.14) são funções de Bessel de argumento imaginário. Escrevendo

a variável $k\rho$ como x , por simplicidade, é conveniente escolher uma normalização de modo que:

$$Y_\nu(x) = I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad (\text{B.6})$$

onde a normalização $i^{-\nu}$ transforma $I_\nu(x)$ em real. A eq. (5.16) é muitas vezes escrita como,

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2}x). \quad (\text{B.7})$$

Existe também, uma segunda solução independente de (5.14), dada em termo das funções de Bessel e Neumannn,

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(ix) + iN_\nu(ix)]. \quad (\text{B.8})$$

Essa solução pode ainda ser expressa por:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\text{sen}(\nu\pi)}. \quad (\text{B.9})$$

As funções $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ são as funções de Bessel modificadas. A função de Bessel modifica $K_\nu(x)$ tem ainda uma representação integral (esta que é utilizada na Dissertação), dada por:

$$K_\nu(x) = \frac{(\frac{x}{2})^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-xt}. \quad (\text{B.10})$$

Podemos ainda, expandir $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$ em termos de seus argumentos.

- Para argumentos pequenos, temos:

$$I_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} \quad (\text{B.11})$$

e

$$K_\nu(x) \approx \begin{cases} \nu = 0, & -\ln(x) + O(1) \\ \nu > 0, & \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

- Para argumentos grandes, temos:

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^\nu + O\left(\frac{e^x}{x}\right); \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} e^{-\nu} + O\left(\frac{e^{-\nu}}{x}\right). \quad (\text{B.13})$$

APÊNDICE C

DEDUÇÕES

Nesse apêndice apresentaremos, de forma detalhada, como foi obtida a equação de Klein-Gordon modificada e o termo de divergente.

A ação associada ao sistema que foi tratado é:

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^d x (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - l^{2(\xi-1)} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\xi} \phi). \quad (\text{C.1})$$

Para obter a equação de movimento fizemos 3 casos particulares, onde $\xi = 1$, $\xi = 2$ e $\xi = 3$, com isso podemos ver o comportamento da equação e assim obter uma forma generalizada. Tratando o caso em (3+1)D temos:

- $\xi = 1$

Temos a ação já conhecida expressa por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3 x (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_{i_1} \phi \partial_{i_1} \phi), \quad (\text{C.2})$$

que leva a equação de Klein-Gordon no caso usual

$$[\partial_0^2 - \partial_i^2] \phi = 0. \quad (\text{C.3})$$

- $\xi = 2$.

Nesse caso a ação é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3 x (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - l^2 \delta_{ij} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \phi \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi) \quad (\text{C.4})$$

Realizando duas integrações por partes, a ação pode ser reescrita como,

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \left[\partial_0(\phi \partial_0 \phi) - \phi \partial_0^2 \phi - l^2 \delta_{ij} [\partial_{i_1} \partial_{i_2} (\phi \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi) + (-1) \partial_{i_1} (\phi \partial_{i_2} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi) \right. \\ \left. + (-1) \partial_{i_2} (\phi \partial_{i_1} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi) + (-1)^2 \phi (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi) \right] \quad (\text{C.5})$$

Os termos de derivada total se anulam na integral, uma vez que o campo ϕ se anula no infinito, assim a ação é expressa por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x [-\phi \partial_0^2 \phi - (-1)^2 l^2 \delta_{ij} \phi \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \phi] \quad (\text{C.6})$$

Como a ação é expressa por $S = \int x^4 \mathcal{L}$, usando a equação de Euler-Lagrange obtemos a equação de movimento no caso de $\xi = 2$.

$$[\partial_0^2 + (-1)^2 l^2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_1} \partial_{i_2}] \phi = 0 \quad (\text{C.7})$$

- $\xi = 3$

Nesse caso temos a ação dada por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - l^4 \delta_{ij} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \phi \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi) \quad (\text{C.8})$$

realizando três integrações por partes, de forma similar ao que foi feito no item anterior, podemos reescrever os termos da integral acima por

$$\partial_0 \phi \partial_0 \phi = \partial_0(\phi \partial_0 \phi) - \underline{\phi \partial_0^2 \phi} \quad (\text{C.9})$$

e

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \phi \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi = \partial_{i_1} (\partial_{i_2} \partial_{i_3} \phi \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi) + (-1) \partial_{i_2} (\partial_{i_3} \phi \partial_{i_1} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi) \\ + (-1)^2 \partial_{i_3} (\phi \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi) + \underline{(-1)^3 \phi (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi)} \quad (\text{C.10})$$

Com exceção dos dois termos sublinhados em (C.9) e (C.10), todos os outros termos se anulam na integral da ação devido ao divergente total do campo, pois como já mencionado anteriormente, o campo ϕ se anula no infinito. Assim a ação (C.8) é reescrita por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x (-\phi \partial_0^2 \phi - l^4 \delta_{ij} (-1)^3 \phi (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \phi)). \quad (\text{C.11})$$

Novamente, usando a equação de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento

no caso de $\xi = 3$

$$[\partial_0^2 + (-1)^3 l^4 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3}] \phi = 0. \quad (\text{C.12})$$

Podemos notar então que as eqs. (C.3), (C.7) e (C.12) seguem um padrão. Assim podemos fazer uma generalização para equação de movimento para o caso geral de um ξ qualquer, sendo ela expressa por

$$[\partial_0^2 + l^{2(\xi-1)} (-1)^\xi \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi}] \phi = 0. \quad (\text{C.13})$$

A eq. (C.13) é a equação de Klein-Gordon modificada no cenário onde é incorporada a teoria de HL.

Vamos agora obter como fica o termo $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi}$ em (3+1)D. Para isso, vamos tomar os valores $\xi = 1$, $\xi = 2$ e $\xi = 3$ e ver como fica a forma geral. Temos:

- $\xi = 1$

Nesse caso temos:

$$\partial_i \partial_i = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (\text{C.14})$$

- $\xi = 2$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_1} \partial_{i_2} &= \partial_x^4 + \partial_y^4 + \partial_z^4 + 2\partial_x^2 \partial_y^2 + 2\partial_x^2 \partial_z^2 + 2\partial_y^2 \partial_z^2 \\ &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

- $\xi = 3$

Nesse caso temos:

$$\begin{aligned} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} &= \partial_x^6 + \partial_y^6 + \partial_z^6 + 3\partial_x^2 \partial_y^4 + 3\partial_x^2 \partial_z^4 + 3\partial_x^4 \partial_y^2 + \\ &\quad 3\partial_x^4 \partial_z^2 + 3\partial_y^4 \partial_z^2 + 3\partial_y^2 \partial_z^4 + 6\partial_x^2 \partial_y^2 \partial_z^2 \\ &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^3. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Assim, podemos ver que a forma generalizada para $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi}$ em 3D (espaciais) é dada por:

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\xi} = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^\xi. \quad (\text{C.17})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. C. A. Barata, Curso de Física-Matemática, Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 27 de julho de 2014.
- [2] G. B. Arfken, H. J. Webber, Mathematical Methods for Physicists, 6th ed., 2005, Elsevier .
- [3] H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics. Frontiers in Physics, v. 54
- [4] P. Langacker, The standard model and beyond, Series in high energy physics, cosmology, and gravitation.
- [5] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations, 3rd ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- [6] F. Mandl, S. Shaw, Quantum Field Theory, 2nd ed., Wiley
- [7] W. Greiner, J. Reinhardt. Field Quantization, Springer
- [8] V.A. Kostelecký e S. Samuel. Phys. Rev. D 39, 683685 (1989).
- [9] A. Songaila e L.L. Cowie, Nature 398, 667 (1999);
P.C.W. Davies, T.M. Davies e C.H. Lineweaver Nature 418, 602 (2002);
A. Songaila e L.L. Cowie, Nature 428, 132 (2004).
- [10] S.M. Carroll et al., Phys. Rev. Lett. 87, 141601 (2001); A. Anisimov et al., Phys. Rev. D 65, 085032 (2002); C.E. Carlson et al., Phys. Lett. B 518, 201 (2001); J. L. Hewett, F.J. Petriello, T. G. Rizzo, Phys. Rev. D 64, 075012 (2001); O. Bertolami and L. Guisado, JHEP 0312 (2003) 013.

- [11] V.A. Kostelecky, R. Lehnert, M. Perry, Phys. Rev. D 68, 123511 (2003); O. Bertolami, R. Lehnert, R. Potting, A. Ribeiro, Phys. Rev. D 68, 083513 (2004); O. Bertolami, Class.Quant.Grav.14, 2785 (1997).
- [12] J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl, L.F.Urrutia, Phys. Rev. Lett. 84, 2318 (2000); J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl, L.F.Urrutia, Phys. Rev. D 65, 103509 (2002).
- [13] P. Hořava, Phys. Rev. D 79, 084008 (2009).
- [14] D. Anselmi, Ann. Phys. 324, 874 (2009).
- [15] D. Anselmi, Ann. Phys. 324, 1058 (2009).
- [16] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov e A. J. da Silva, Mod. Phys. Lett. A 28, 1350052 (2013)
- [17] A. E. Taylor, Aristotle; Dover Publications Inc., New York, 1955.
- [18] B. Jarrosson, Invitation à la philosophie des sciences; Editions du Seuil, Paris, 1992.
- [19] B. Maitre, La Lumière; Editions du Seuil, Paris, 1985.
- [20] Aristotle; Physics, a new translation by Rolain Water-field; Oxford University Press, Oxford , 1996.
- [21] H. G. B. Casimir; Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948).
- [22] M. J. Sparnaay; Physica 24, 751 (1958).
- [23] S. K. Lamoureux; Phys. Rev. Lett. 28, 5 (1997).
U. Mohideen e A. Roy; Phys. Rev. Lett. 81, 21 (1998).
- [24] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko; Advances in the Casimir Effect; Oxford Science Publications (2009).
- [25] L. H. Ford; Phys. Rev. D 21, 933 (1980)
- [26] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik; Table of Integrals, Series, and Products; Elsevier, 7th ed., 2007.