Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Estudo de algumas soluções obtidas em teorias $f(R)$

Dissertação de Mestrado

Aluno: João Paulo Morais Graça

Orientador: Prof.Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa, Fevereiro de 2012

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Valdir B. Bezerra, pela paciência e compreenssão durante estes dois anos de trabalho.

Aos coordenadores da pós-graduação, Fernando Morais e Sérgio Azevedo, sempre prontos a auxilar os alunos, pela ajuda e por todo o empenho em melhorar o nível desta instituição.

Ao professor Jorge Albuquerque Vieira, ainda por ter colaborado para expandir o *umwelt* pessoal de cada de um de nós. Uma grande complexidade e um grande coração. Toadas para um verdadeiro mestre.

Aos amigos da pós-graduação, especialmente Paulo, Felipe, Lilika, Luís, Herondy, Gislaine, Artur, Thiago, Ítalo e Jilvan.

Para Andrei, pela ajuda nos momentos difíceis, e pela companhia nos momentos fáceis.

Para Deise. *There´s no place like home.*

Para meus pais, por não tentarem convencer-me a cursar direito ou fazer concurso para a Petrobrás.

E finalmente para todos aqueles que percebem a inquietude que há por trás destas águas.

Resumo

O fato de que o universo está se expandindo de modo acelerado e de que apenas 5% de sua composição é de matéria bariônica conhecida sugerem, em princípio, a possibilidade de alternativas à gravitação de Einstein, conforme foram propostas nos últimos anos. Dentre as quais, receberam maior atenção as chamadas teorias $f(R)$. Nesta dissertação iremos apresentar estas teorias em suas duas principais formulações e estudar algumas de suas soluções, em especial as soluções esfericamente e axialmente simétricas. Nosso objetivo é mostrar que tais teorias $f(R)$ não satisfazem os principais vínculos observacionais relativos ao sistema solar, e em consequência disso não são boas candidatas para substituir a teoria da gravitação de Einstein, ainda que seus resultados sejam importantes para aumentar nosso atual conhecimento acerca das teorias alternativas à gravitação. Iremos considerar também a solução que corresponde ao monopolo global em $f(R)$, e aplicar o método de Newman-Janis para construir a solução correspondente, com rotação.

Abstract

The fact that the universe is expanding with acceleration and that only 5% of its content of matter is baryonic suggests, in principle, the possibility of new alternatives to Einstein's theory of gravity, as proposed throught the last years. Among them, the so called $f(R)$ theories received a great deal of attention. In this dissertation, we will present these theories in two main formulations and study some solutions, specially, the spherical and axially symmetrical ones. Our aim is to show that such $f(R)$ theories do not satisfy the observational constraints related to the solar system, and as a consequence of this, are not good candidates to substitute Einstein's theory of gravity. Their results, however, are important to increase our knowledge related to alternative gravitational theories. We will also consider a solution which corresponds to a global monopole in $f(R)$, and apply a method due to Newman and Janis to construct the corresponding solution, with rotation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Apesar de seu grande sucesso na descrição de fenômenos físicos não explicados pela gravitação Newtoniana, a relatividade geral como formulada por Albert Einstein tem sido objeto de tentativas de reformulações, desde a sua introdução. Em 1919, portanto, há apenas poucos anos anos de sua criação, Weyl apresentou uma formulação alternativa para a teoria, sendo seguido por Eddington em 1923. Tais tentativas iniciais de alterar a relatividade geral se deram mais a nível de experiência teórica do que devido a falhas na mesma, cujos resultados naquela época estavam em acordo com as observações, concordâncias estas que se manteriam no decorrer do século xx.

Foi apenas a partir da década de 60 do século passado que as primerias alterações na relatividade geral passaram a ser consideradas mais seriamente. Com a descoberta de novas forças físicas e o posterior desenvolvimento do modelo padrão de partículas elementares, a gravitação passou a ser a única força física cuja formlação quântica não pôde ser desenvolvida, apresentando sempre problemas de não-renormalizibilidade e não-unitariedade. A inclusão de novos termos em sua ação, no entanto, levou a melhores resultados no aspecto quântico, levando muitos cientistas a acreditarem que a ação original de Einstein-Hilbert deveria manter-se apenas a baixas energias, sendo substituída por uma teoria mais completa, com termos relevantes em ordens superiores.

Também neste cenário, o desenvolvimento de uma teoria quântica de campos em espaços curvos, teoria esta onde as partículas são quantizadas em um ambiente clássico, levava a uma extensão natural do modelo de Einstein com a adição de contra-termos. Ainda que também importantes apenas em altas energias e sem implicações cosmológicas, a quantização da gravitação indicava que ela precisava ser revista e, possivelmente, estendida.

Ainda na década de 60, uma outra teoria alternativa da gravitação foi formulada por Carl Brans e Robert Dicke [1], onde dois campos seriam responsáveis pela mediação gravitacional, e não apenas um. O tradicional campo de spin 2, a métrica $g_{\mu\nu}$, juntamente com um campo escalar de longo alcance, cuja natureza física deveria ser a de simular uma constante gravitacional variante no espaço e no tempo, aproveitando uma proposta apresentada pelo fílosofo Ernst Mach no final do século XIX. Apesar da teoria de Brans-Dicke ter se mostrado falha quando comparados seus resultados teóricos com dados relativos às medições do sistema solar, a ideia da presença de um campo escalar acoplado não-minimamente com a métrica voltou a tona recentemente com o advento das teorias de cordas.

Porém, nenhuma destas tentativas de estender a gravitação gerou grande aceitação dentro da comunidade científica, ao menos até o final do século passado. Foi apenas com a descoberta de que o universo está se expandindo de forma acelerada e de que mais de 70% de sua constituição apresenta-se em uma forma de energia fria de origem desconhecida, que novas propostas para explicar tais fenômenos, estendendo a teoria gravitacional proposta por Einstein [2] [3], começaram a ser levadas a sério, e suas consequências amplamente estudadas.

A teoria extendida da gravitação mais estudada nos últimos anos são as chamadas teorias $f(R)$, onde o escalar de Ricci é substituído por uma função do mesmo na ação de Einstein-Hilbert. A partir dela é possível explicar porque o universo está se expandindo de forma acelerada, assim como sua constitução material. Juntando-se a isso, as teorias $f(R)$ são também capazes de explicar um outro problema surgido na cosmologia na década de 80, onde uma expansão acelerada do universo primitivo teve de ser incorporada no modelo padrão da cosmologia para resolver problemas fundamentais dentro do mesmo, além de ser hoje, esta expansão acelerada do universo primitivo, apontada como a principal responsável pela formação das estruturas em larga-escala de universo observável. Na formulação $f(R)$ da gravidade, tal expansão é gerada naturalmente, sem a necesssidade de ingredientes adicionais.

Mas se as teorias $f(R)$ conseguem explicar todos os problemas observacionais dentro de um novo modelo padrão da cosmologia que incorpora as recentes observações, por que ele não é hoje considerado como o modelo correto para a gravitação, em detrimento da proposta original de Einstein? Apresentar a resposta para esta pergunta é uma das motivação para esta dissertação. Veremos que, apesar de seus sucessos, as teorias $f(R)$ também apresentam falhas, tanto teóricas quanto observacionais, impedindo que teorias $f(R)$ possam ser consideradas seriamente como substitutas da gravitação Einsteniana. Ao menos na forma como foram apresentadas até o presente momento.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. No capítulo II veremos em maiores detalhes as motivações que levaram à formulação de teorias extendidas da gravitação, assim como o porque as teorias $f(R)$ se apresentaram como boas propostas para solucionar os problemas observacionais atuais. No capítulo III iremos deduzir em detalhes as equações de campo para as teorias $f(R)$ e também mostrar sua relação com a teoria escalar-tensorial formulada por Brans e Dicke na década de 60 do século passado. No capítulo IV iremos estudar algumas soluções esfericamente simétricas de uma formulação específica das teorias $f(R)$ e estudar sua aproximação pós-Newtoniana. No capítulo V iremos apresentar outras soluções exatas para teorias $f(R)$, especificamente soluções do tipo-Gödel e para o monopolo global. Também neste capítulo encontraremos a solução correspondente ao monopolo global, com rotação. Finalmente, no capítulo VI apresentaremos as considerações finais.

Capítulo 2

Estendendo a relatividade geral

2.1 Fundamentos da relatividade geral

Antes da relatividade geral, o estudo do movimento de corpos no espaço e no tempo era realizado através da aplicação das leis de Newton, na qual a segunda lei nos diz que a variação do momento de um corpo é consequência da aplicação de uma força.

Quando consideramos um corpo sujeito apenas a força gravitacional nas proximidades da superfície da terra, a segunda lei de Newton reduz-se a

$$m_g g = m_i a \tag{2.1.1}$$

onde a é aceleração do corpo, g é uma constante correspondente a aceleração gravitacional na Terra, e m_g e m_a são a massa gravitacional e a massa inercial, respectivamente. Se admitirmos que a massa que rege a interação gravitacional é a mesma massa que resiste ao movimento, a massa inercial, teremos que $a = g$, e a aceleração dos corpos independe de sua constituição interna. Por isso a história, possívelmente apócrifa, de Galileu ter soltado dois corpos de diferentes massas do alto da torre de pisa: Desprezando a resitência do ar, eles terão o mesmo movimento e atingirão o solo no mesmo momento.

Foi essa equivalência entre massa gravitacional e massa inercial que levou Albert Einstein a propor sua teoria geral da relatividade. Em seu exemplo clássico, um observador em um elevador fechado não poderá distinguir se está parado em um campo gravitacional ou sendo acelerado no vácuo. E apesar de ser, a princípio, uma suposição simples, ela leva a resultados inesperados, como por exemplo, o redshift gravitacional.

E se todos os corpos se movimentam sob a força da gravidade da mesma forma no espaço e no tempo, independentemente de sua estrutura interna, podemos deixar de pensar na gravidade como uma força e começar a vê-la como uma manifestação do próprio espaço-tempo. Segundo a idéia de Einstein, corpos não seriam atraídos pela Terra devido a força gravitacional, mas sim porque esta trajetória, de queda, seria a trajetória natural do espaço-tempo próximo a um corpo massivo.

Com isso o espaço-tempo vira um *ambiente* que dita o movimento dos corpos. Mas o que define uma trajetória natural para os corpos no espaço-tempo? Ou melhor, o que *curva* o espaço-tempo? Segundo Newton, todo corpo massivo influe gravitacionalmente nos outros. Porém, a relatividade restrita de Einstein nos diz que massa e energia são intercambiáveis, e logo, energia também deve influenciar na trajetória natural dos corpos. Então, serão massa e energia que vão definir a estrutura desta arena chamada espaço-tempo.

A partir de agora podemos abandonar qualquer menção a forças gravitacionais e começar a pensar apenas na estrutura do espaço-tempo. Segundo uma frase que tornou-se célebre, *os corpos dizem ao espaço como se curvar e o espaço diz aos corpos como se mover.* E como podemos caracterizar o espaço-tempo? Isso é feito usualmente através de um tensor covariante de ordem 2, a métrica $g_{\mu\nu}$. A princípio, se conhecemos a métrica, conhecemos tudo a respeito do espaço-tempo que estamos estudando (ao menos localmente). Podemos, também, definir um outro objeto matemático, a conexão, que na teoria de Einstein é a princípio dada em relação a métrica por

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\rho\sigma}}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}). \tag{2.1.2}$$

cujo papel é nos dizer como transportar um vetor de um ponto a outro no espaço-tempo. Ela é também utilizada na equação que define o movimento dos corpos, a equação da geodésica, dada por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{2.1.3}$$

Em 1907 o princípio da equivalência de Einstein já estava formulado, porém ele ainda não havia chegado a uma forma de encontrar a métrica do espaço-tempo a partir da massa e energia presentes no mesmo. Uma de suas primeiras tentativas foi a utilização simples do tensor de Ricci na equação

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.1.4}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é um tensor que contém a informação sobre a matéria e a energia presentes na região que estamos estudando, κ é uma constante de acoplamento, e o tensor de Ricci é escrito em termos da conexão da forma

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\rho}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}. \tag{2.1.5}$$

No entanto, essa equação mostrou-se infrutífera, pois pode levar a não-conservação da energia do sistema. No final de 1915, Einstein e Hilbert obtiveram, independentemente, a equação que hoje é aceita como a correta para a descrição dos fenômenos gravitacionais,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.1.6}$$

onde $R = R^{\alpha}_{\alpha}$. Esta equação é não-linear, de segunda ordem, e possibilita calcular a métrica a partir do tensor de energia-momento e das condições de fronteira. Essa equação de campo pode ser obtida através da ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R + S_m \tag{2.1.7}$$

onde $\kappa = 8\pi G$ e S_m é a parte da ação que envolve campos materiais. Até o presente momento, todos os testes experimentais encontram-se em acordo com esta teoria. Então, por que parece cada vez mais urgente encontrar uma teoria que extenda esta formulada por Einstein no início do século passado?

2.2 Motivações filosóficas

Uma das idéias que levaram Einstein a propor sua teoria da relatividade geral foi o princípio de Mach. Apesar de não ter uma formulação quantitativa, ele postula que não existem características absolutas do espaço, e que o movimento só existe em relação a todo o conteúdo material do universo. Ou seja, não faz sentido falar de uma *massa inercial* que dependa somente do corpo que estamos analizando, em vista que a inércia é determinada por *todo* o universo.

Se a relatividade de Einstein incorpora ou não o princípio de Mach é uma questão de debate filosófico, mas podemos apresentar dois contra-exemplos que parecem contradizer o princípio de Mach nesta teoria. São elas as métricas de Minkowski e de Gödel.

A métrica de Minkowski é uma solução da relatividade de Einstein sem a presença de matéria, o que, para Mach, seria inadimissível. Como todo o movimento só se dá em relação ao conteúdo material do universo, um universo vazio não poderia gerar geodésicas privilegiadas. De fato, não há sentido nem em falar de movimento em um universo vazio. Seria preciso alguma forma de se estabelecer condições de fronteiras que impedissem tal universo em uma teoria Machiana, porém até o presente momento não foi encontrada uma forma de descartar o espaço de Minkowski como uma solução possível da teoria de Einstein.

Já a métrica de Gödel apresenta um tipo de rotação para um espaço-tempo homogêneo em todos os pontos, o que também viola o princípio de Mach, pois um espaço-tempo homogêneo em todos os pontos não pode privilegiar qualquer direção no espaço, e logo não poderia apresentar qualquer tipo de movimento. O espaço de Gödel também apresenta outra característica inusitada, que são curvas tipo tempo fechadas, ou seja, apresenta a possibilidade de viagens no tempo. Iremos falar mais sobre os espaços de Gödel nesta dissertação.

Foi a tentativa de incorporação do princípio de Mach, juntamente com a idéia da dependência temporal da constante gravitacional proposta por Dirac [4], que levou P. Jordan [5] e posteriormente Brans e Dicke [1] a propor uma teoria onde a interação gravitacional fosse mediada não apenas pela métrica do espaço-tempo, mas também por um campo escalar.

A Lagrangeana proposta por Brans e Dicke é do tipo

$$L_{JBD} = \int d^4x[\sqrt{-g}(\psi R - \omega \frac{1}{\psi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi] + 8\pi L_{mat}, \tag{2.2.8}$$

onde não estamos muito preocupados com unidades. O ponto principal desta teoria é que o campo escalar funciona como uma espécie de constante gravitacional variante, pois, comparando com a Lagrangena de Einstein-Hilbert

$$L_{EH} = \frac{1}{16\pi G} R, \tag{2.2.9}$$

vemos que

$$\frac{1}{16\pi G} = \psi. \tag{2.2.10}$$

Apesar de filosoficamente interessante, a teoria de Jordan Brans-Dicke apresenta problemas quanto aos testes relativos ao sistema solar. Vamos apresentar rapidamente um pouco dos resultados desta teoria, pois nos será útil nos capítulos seguintes.

A apresentação a seguir será inspirada em [6], onde todos os cálculos estão apresentados em detalhes. Variando a ação (2.2.8) em relação a métrica e ao campo escalar, encontramos as seguintes equações de movimento:

$$2\psi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{\psi}_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu)\psi, \tag{2.2.11}$$

$$\Box\psi = \zeta^2 \psi, \tag{2.2.12}$$

onde $\zeta^{-2} = 6 + 4\omega$, sendo ω um parâmetro, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria calculado de modo tradicional e $T^{\psi}_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento do campo escalar. Juntamente com estas equações temos que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.2.13}$$

que, aplicado a uma partícula pontual, nos remete a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \tag{2.2.14}$$

que nos indica que esta é uma teoria métrica, ou seja, obecede ao princípio de equivalência que apresentamos no início deste trabalho (este princípio de equivalência é conhecido como **princípio de equivalência fraco**. Há outros princípios de equivalência, porém não entraremos nesta discussão e remetemos o leitor para [6] para uma discussão mais abrangente).

Precisamos, agora, estudar como esta teoria se comporta nos testes referentes ao sistema solar, que é onde a teoria de Einstein obteve maior sucesso. A forma mais comum de fazer isso é utilizar a parametrização pós-newtoniana (PPN), que consiste em estudar como a métrica esfericamente simétrica ao redor de uma massa pontual de uma nova teoria se afasta da métrica de Schwarzchild. Com esta formulação é possível impor vínculos aos parâmetros da teoria.

Expandindo os termos g_{00} e g_{rr} da métrica proposta temos

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{a_g}{r} + \frac{\beta - \gamma}{2} a_g^2 r^2 \tag{2.2.15}$$

e

$$-g_{rr} \approx 1 + \gamma \frac{a_g}{r} \tag{2.2.16}$$

onde a métrica de Schwarzchild é reobtida fazendo-se $\gamma = \beta = 1$. Usando esta aproximação, alguns testes clássicos da relatividade geral são dados a partir destes parâmetros,

- Deflexão da luz pelo sol

$$\Delta\phi = \frac{1+\gamma}{2} \frac{2a_g}{r_0}; \tag{2.2.17}$$

- Desvio do periélio de mercúrio

$$\Delta\phi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \frac{3a_g \pi}{l} \tag{2.2.18}$$

Resultados recentes de experimentos no sistema solar [?] nos fornecem o resultado $|\gamma - 1| \leq 2 \times 10^{-5}$, que por sua vez levam aos vínculos

$$\zeta^2 \leq 5 \times 10^{-6} \tag{2.2.19}$$

ou

$$\omega \geq 50.000, \tag{2.2.20}$$

um resultado não muito natural para este parâmetro. Quanto estudarmos teorias $f(R)$ veremos que elas são equivalentes a teorias de Brans-Dicke com um determinado valor para o parâmetro ω, e isto aparentemente exclui ambas as teorias como modelos viáveis para teorias alternativas da gravitação, a menos que mecanismos extras sejam incorporados na teoria para evitar que estas teorias exerçam influência a nível de sistema solar.

2.3 Motivações quânticas

Apesar de todos os esforços empreendidos ao longo dos anos, até o presente momento ainda não foi desenvolvida uma forma de quantizar o campo gravitacional sem que ocorram problemas de renormalização e unitariedade. No entanto, tentativas na década de 60, do século passado, mostraram que a interação gravitacional é renormalizável (ainda que não unitária) em um laço desde que termos de ordem superior no escalar de Ricci sejam adicionados na Lagrangeana.

De forma similar, ao tentar quantizar campos clássicos em um espaço de fundo curvo, contratermos de ordem superior no escalar de Ricci também aparecem na Lagrangeana. Tais fatos contribuíram para o aumento de interesse em teorias extendidas da gravidade já a partir da década de 60 do século xx.

No entanto, a adicão de tais termos sempre foi vista apenas como devido a correções quânticas, tratando tal Lagrangeana como uma teoria efetiva. Esperava-se que tais termos fossem importantes apenas em regimes de altas energias, sem efeito mesurável na fenomenologia de baixas energias. Apenas a física do universo primitivo e próxima a buracos negros seriam afetadas.

Recentemente um novo ingrediente foi adicionado em prol das correções quânticas para a ação de Einstein-Hilbert. Muitos hoje acreditam que os objetos mais fundamentais da natureza não são partículas, porém cordas, e uma teoria de cordas prediz naturalmente não só a equação de Einstein, mas a introdução de termos de ordem superior, assim como a presença de um acoplamento do tipo escalar-tensorial.

2.4 Motivações cosmológicas

Apesar das motivações acima descritas serem válidas, nenhuma delas é tão fundamental hoje quanto as motivações cosmológicas. A teoria de Einstein por si só não é suficiente para explicar o universo observável.

2.4.1 O modelo padrão da cosmologia

O modelo padrão da cosmologia é baseado na teoria da gravitação de Einstein com alguns ingredientes extras. Ele parte do princípio de que o universo em larga-escala é homogêneo e isotrópico, o que condiz com as observações, e pode ser representado pela métrica de Friedmann-Lamaitre-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)(\frac{dr^2}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{2.4.21}$$

onde $a(t)$ é um fator de escala, $d\Omega^2$ é a métrica de uma 2-esfera e a constante k define a geometria do universo onde vivemos para hipersuperfícies $t = cte$. A partir desta métrica podemos definir observadores co-moventes como aqueles que se movem junto à expansão do universo, ou seja, que perfazem geodésicas para a métrica acima.

Para determinarmos a métrica de FLRW são utilizados apenas argumentos de simetria, e o que a equação de Einstein nos dará será a evolução do fator de escala para um determinado tensor de energia-momento. Considerando um fluido perfeito em repouso em relação aos observadores co-moventes,

$$T^0_0 = \rho(t) \quad ; \quad T^i_j = -p(t)\delta^i_j \quad ; \quad T^0_i = 0, \tag{2.4.22}$$

a equação de Einstein juntamente com a conservação do tensor de energia-momento nos dá as seguintes equações

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2.4.23}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{2.4.24}$$

É comum utilizarmos fluidos perfeitos que são caracterizados por uma equação de estado do tipo

$$p_i = \gamma\rho_i, \tag{2.4.25}$$

onde $\gamma = 0$ para matéria e $\gamma = \frac{1}{3}$ para radiação. Integrando (2.4.24) encontramos

$$\rho_i(t) = \rho_i(t_0)(\frac{a}{a_0})^{-3(1+\gamma)}. \tag{2.4.26}$$

No caso de matéria, temos que $\rho \sim\ a^{-3}$ (pois o volume aumenta cubicamente, enquanto a quantidade total de matéria no universo permanece constante) e para radiação temos $\rho \sim\ a^{-4}$ (além do aumento no volume do universo, a radiação também se dilui devido ao redshift). Podemos imaginar também uma equação de estado da forma $p = -\rho$ que nos levaria a uma solução do tipo $\rho = cte$.

Considerando variados fluidos, vemos que a evolução temporal do universo faz com que ele atravesse fases onde em cada uma delas uma determinada fonte será mais influente que as outras. Uma fase de radiação, por exemplo, irá dominar no universo primitivo, porém como sua densidade decai mais rapidamente com o passar do tempo, logo haverá predominância da matéria em relação a radiação.

Apesar de explicar várias características do universo observado, este modelo apresenta tanto problemas estruturais, quanto observacionais. O primeiro grande problema neste modelo padrão da cosmologia está ligado ao universo primitivo e só foi resolvido com a inclusão de uma fase primitiva de expansão acelerada no mesmo. Como nem a matéria nem a radiação podem acelerar o universo, foi necessária a introdução de um campo escalar com auto-interação para dar conta desta expansão.

O segundo problema foi descoberto apenas recentemente. Observações indicam que o universo está atravessando uma segunda fase de expansão acelerada, e que apenas *5%* da densidade do universo está em forma de matéria bariônica, enquanto que aproxidamente *70%* da densidade do universo se apresenta em um tipo de fluido homogêneo e isotrópico que permeia todo o mesmo. Os outros *25%* estão contidos em um tipo de matéria que se aglomera da mesma forma que a matéria bariônica, porém de origem desconhecida.

Apesar do grande sucesso da teoria de Einstein, tais problemas nos deixam apenas com duas possíveis soluções. Ou encontrar quais objetos físicos são responsáveis pelas duas fases de expansão acelerada do universo, assim como pela distribuição de densidade atual, ou construir algum tipo de teoria estendida da gravitação, que solucione os problemas apresentados.

Vamos ver um pouco mais sobre estes problemas, e como teorias do tipo $f(R)$ podem ajudar a solucioná-los.

2.4.2 O modelo ΛCDM

Uma forma de explicar o universo observável mantendo intacta a teoria da gravitação de Einstein é adicionar ingredientes extras que se ajustem aos dados observacionais. O modelo mais aceito para este fim é hoje conhecido como *Lambda* CDM (ou *Lambda Cold Dark Matter*), que adiciona explicitamente na teoria um tipo de matéria escura não-bariônica fracamente interagente, juntamente com a adição de um termo de constante cosmológica.

A adição de um termo de constante cosmológica foi originalmente proposto por Einstein para dar conta de um universo estático. Para isso bastou incluir um termo proporcional à métrica em sua equação,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.4.27}$$

onde divergência do tensor de energia-momento é mantida, dado que

$$\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0, \tag{2.4.28}$$

ou seja, a teoria continua sendo uma teoria métrica. Podemos considerar este termo como um tensor de energia-momento efetivo, com

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{\kappa} \tag{2.4.29}$$

e consequentemente $p = -\rho$.

Atualmente, este termo de constante cosmológica é associado à energia do vácuo, porém cálculos mostram que há uma discrepância de dezenas de ordens de grandeza entre a energia associada a constante cosmológica observada em relação a energia calculada para a energia do vácuo.

Outro problema associado a esta teoria é o problema da coincidência. Já vimos que a evolução da densidade de matéria é diferente da evolução da densidade do vácuo, o que nos leva a questionar por que estamos vivendo uma época em que ambas são comparáveis em ordem de grandeza. A explicação mais recorrente costuma ser do princípio antropomórfico, que nos diz que o universo atual é assim justamente porque estamos vivos para observá-lo. Se ele fosse ligeiramente diferente, não daria condições para a formação de vida e logo não haveria quem observá-lo.

Apesar de ser o modelo atualmente mais aceito, o fracasso até o presente momento na detecção de qualquer tipo de matéria exótica deixa o modelo ΛCDM sem base experimental, abrindo caminho para a proposta de novos modelos que não necessitam de nenhum tipo de componente exótico para a explicação do universo observado. O preço a pagar por isso é alterar as equações da relatividade geral de Einstein.

2.4.3 Modelos cosmológicos em teorias $f(R)$

Como já dissemos, o ressurgimento de teorias do tipo $f(R)$ nos anos recentes deu-se principalmente pela sua utilização para explicar a expansão acelerada do universo. Vamos ver que, espandindo a teoria de gravitação de Einstein, não é necessário incluir um termo de constante cosmológica *ad hoc*, pois ele aparece naturalmente da geometria do espaço-tempo.

Teorias do tipo $f(R)$ consistem em substituir na Lagrangeana de Einstein-Hilbert (2.1.7), o escalar de Ricci por uma função do mesmo,

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_m. \tag{2.4.30}$$

No próximo capítulo iremos deduzir as equações de movimento para esta ação em dois formalismos distintos. Para o formalismo mais usual, chamado formalismo métrico, vamos aqui apresentar sua equação de movimento, obtida variando a ação acima em relação a métrica (no próximo capítulo iremos ver como isso se dá em mais detalhes)

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R)}{f'(R)}. \tag{2.4.31}$$

Vamos, então, reconsiderar a métrica de FLRW, só que agora para um universo espacialmente plano, ou seja, com $\kappa = 0$, dada da forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\omega^2), \tag{2.4.32}$$

juntamente com um tensor de energia-momento de um fluido perfeito nesta nova teoria da gravitação [2] [3]. As novas equações de Friedmann se tornam

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{\kappa}{3f'(R)}[\rho + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}f''(R)] \tag{2.4.33}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{f'(R)}[P + \dot{R}^2 f'''(R)$$
$$+2\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R)], \tag{2.4.34}$$

onde o símbolo ($'$) em f denota derivada em relação ao argumento, o escalar de Ricci. Podemos ver que mesmo em um universo plano e sem matéria, a função $f(R)$ irá determinar a evolução do fator de escala. De fato, podemos reescrever as equações acima de forma igual às equações de Friedmann originais,

$$\frac{\dot{a}}{a}^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{eff} \tag{2.4.35}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa}{6}[\rho_{eff} + 3P_{eff}] \tag{2.4.36}$$

onde densidade e pressão efetivas são dadas por

$$\rho_{eff} = \frac{Rf'(R) - f(R)}{2f'(R)} - \frac{3\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}f''(R)}{f'} \tag{2.4.37}$$

$$P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f'''(R) + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R))}{f'(R)}, \tag{2.4.38}$$

o que nos permite simular uma equação de estado onde o parâmetro γ é dado por

$$\gamma_{eff} = \frac{P_{eff}}{\rho_{eff}}. \tag{2.4.39}$$

A princípio basta utilizarmos a função $f(R)$ correta para simular o comportamento do fator de escala como bem entendermos. De fato, essa *reconstrução cosmológica* têm sido desenvolvida [7], [8] nos últimos anos, onde tanto a recente expansão acelerada do universo quanto a fase inflacionária primitiva são modeladas por uma *única* teoria com a escolha certa da função $f(R)$.

Vamos ver um exemplo simples. Escolhendo a função $f(R) = R^n$, pode-se calcular facilmente o comportamento da equação de estado em função da escolha da potência n [2],

$$\gamma = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3} \tag{2.4.40}$$

para $n \neq 1$. Caso queiramos uma equação de estado que simule uma constante cosmológica do tipo $p = -\rho$, ou seja, $\gamma = -1$, encontramos que $n = 2$ e uma teoria do tipo $f(R) = R^2$ satisfaz nosso requisito.

Não só a energia escura como também a matéria escura podem ser explicadas utilizando teorias $f(R)$. No entanto, tais teorias devem passar nos mesmos testes onde a gravitação de Einstein obteve sucesso, especialmente suas soluções esfericamente simétricas e a comparação com observações no âmbito do sistema solar. Será exatamente isso que vamos fazer nos próximos capítulos, e veremos como tais testes nos obrigam a pensar as teorias estendidas da gravitação com uma maior cautela.

Capítulo 3

Equações de movimento

3.1 Por que $f(R)$?

As equações de Einstein no vácuo podem ser deduziadas a partir da ação de Einstein-Hilbert, dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{3.1.1}$$

onde $\kappa = 8\pi G$ e R é o escalar de Ricci. Caso queiramos estender esta ação, há outros invariantes que podemos construir a partir dos tensores de Riemann e Ricci. Nos limitaremos, no entanto, a substituir o escalar de Ricci por uma função do mesmo, ou seja, vamos substituir R por $f(R)$ na ação acima.

Mas se há várias formas de estender a ação de Einstein-Hilbert, então por que nos limitar apenas a ordens superiores do escalar de Ricci? Há basicamente duas respostas para essa pergunta. A primeira é a da simplicidade. A idéia por trás de tal alteração é estudar como uma extensão da teoria de Einstein pode ajudar a solucionar problemas como da matéria escura e da expansão do universo, como já vimos no capítulo anterior. De fato, teorias do tipo $f(R)$ já são gerais o suficiente para reproduzir todos os resultados desejados.

A segunda resposta é mais física, pois aparentemente teorias do tipo $f(R)$ são as únicas, entre as teorias de ordem superior na gravitação, que pode evitar a instabilidade de Ostrogradski [9].

Teorias do tipo $f(R)$, no entanto, não são únicas, podendo ser formuladas de três formas diferentes, e nesta dissertação iremos apresentar apenas duas delas: A formulação métrica e a formulação de Palatini. Um terceiro tipo de teoria, métrico-afim, que leva em conta a introdução de termos de torção e é, segundo o conceito de Will [10], uma teoria não-métrica, não será apresentada. A principal razão de não levarmos em conta esta terceira formulação está relacionado também a simplicidade: incluir estruturas extras não parece fornecer melhores resultados do que os já obtidos nas duas formulações que serão apresentadas a seguir, ao menos para os fins almejados.

3.2 Equações de movimento para $f(R)$ métrica

O formalismo métrico consiste basicamente em alterar a ação de Einstein-Hilbert generalizando o termo com o escalar de Ricci para uma função do mesmo, de forma a termos a ação

$$S_{met} = \frac{1}{2k}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_M(g_{\mu\nu},\psi) \tag{3.2.2}$$

onde ψ representa todos os campos de matéria presentes na teoria e S_M sua ação correspondente. Para encontrar a equação de movimento proveniente da ação acima basta realizarmos sua variação. Vamos calcular em detalhes o termo extendido de Einstein-Hilbert, já que a variação no setor de matéria se dará de forma tradicional. Temos que

$$\delta S_{met} = \int d^4x(\delta\sqrt{-g})f(R) + \int d^4x\sqrt{-g}f'(R)\delta R \tag{3.2.3}$$

onde, da definição de $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e do fato que $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, temos

$$\delta S_{met} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + \int d^4x\sqrt{-g}f'(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}). \tag{3.2.4}$$

Vamos agora fazer o cálculo mais detalhado do termo $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$. Para isso é útil considerarmos um referencial inercial local, onde

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}(P), \tag{3.2.5}$$

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla_{\mu} = \partial_{\mu}. \tag{3.2.6}$$

Da definição do tensor de Ricci, temos que

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\nu}. \tag{3.2.7}$$

Podemos rearrumar os índices da expressão acima e expressá-la como uma derivada total,

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}W^{\rho}, \tag{3.2.8}$$

onde

$$W^{\rho} \equiv g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}. \tag{3.2.9}$$

É por este motivo que na ação de Einstein-Hilbert este termo não irá contribuir para as equações de movimento, pois ele sozinho já é um termo de fronteira. Nesta nova teoria não será o caso, pois ele está multiplicado por $f'(R)$, e não poderemos utilizar o teorema de Gauss para transformá-lo em um termo de fronteira.

Podemos reescrever este termo da ação na forma

$$\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}f'(R)\partial_\rho W^\rho \tag{3.2.10}$$

$$= -\int d^4x\partial_\rho[\sqrt{-g}f'(R)]W^\rho. \tag{3.2.11}$$

Para isso fizemos uma integração por partes e mesmo desprezando o termo de fronteira, restou-nos um termo que devemos considerar nas novas equações de movimento. Devemos agora trabalhar com o termo W^ρ. A variação da conexão é dada por

$$\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[g^{\sigma\alpha}(\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\delta g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\delta g_{\mu\nu})], \tag{3.2.12}$$

onde nos utilizamos do fato que $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0$, tendo em vista a utilização de um referêncial inercial local. Contraindo dois índices da conexão temos que

$$\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[g^{\nu\alpha}(\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\delta g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\delta g_{\mu\nu})], \tag{3.2.13}$$

onde os dois últimos termos formam um tensor anti-simétrico que se anula quando contraído com a métrica. Logo

$$\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu}. \tag{3.2.14}$$

Vamos contrair a variação da conexão com a métrica,

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}\partial_\nu\delta g_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\delta g_{\mu\nu}, \tag{3.2.15}$$

e trabalhar em maiores detalhes apenas o primeiro termo do lado direito:

$$\frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu(g^{\rho\alpha}\delta g_{\alpha\nu}), \tag{3.2.16}$$

onde nos utilizamos do fato da derivada parcial da métrica ser nula. Utilizando-se do fato que

$$\delta(\delta^{\mu}{}_{\nu}) = \delta(g_{\mu\kappa}g^{\kappa\nu}) = g_{\mu\kappa}\delta g^{\kappa\nu} + g^{\kappa\nu}\delta g_{\mu\kappa} = 0 \tag{3.2.17}$$

temos que

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu(g^{\rho\alpha}\delta_{\alpha\nu}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu}\delta g^{\rho\alpha}). \tag{3.2.18}$$

Da mesma forma podemos reescrever o segundo termo de (3.2.15) como

$$\frac{1}{2}g^{\rho\alpha}g^{\mu\nu}(\partial_\nu\delta g_{\mu\alpha}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu(g_{\alpha\mu}\delta g^{\rho\alpha}) \tag{3.2.19}$$

e rearrumando os termos, após um pouco de álgebra, temos

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\rho(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu(g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho}). \tag{3.2.20}$$

A conexão já contraída (3.2.14) também pode ser parcialmente contraída com a métrica,

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} &= g^{\mu\rho}\frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{2}\partial^\rho(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\rho(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Relembrando que

$$W^{\rho} = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}, \tag{3.2.22}$$

e utlizando (3.2.20) e (3.2.21), podemos reescreve-la da forma

$$W^{\rho} = \partial^{\rho}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho}). \tag{3.2.23}$$

Relembrando a expressão que tínhamos antes,

$$\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\int d^4x\partial_{\rho}[\sqrt{-g}f'(R)]W^{\rho}, \tag{3.2.24}$$

e substituindo W^{ρ}, temos

$$\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\partial_{\rho}[\sqrt{-g}f'(R)[\partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\rho}) - \partial^{\rho}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})]. \tag{3.2.25}$$

Integrando por partes e reorganizando os índices, obtemos

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x g_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial^{\rho}[\sqrt{-g}f'(R)]\delta g^{\mu\nu} + \\ &- \int d^4x g_{\rho\nu}\partial^{\rho}\partial_{\mu}[\sqrt{-g}f'(R)]\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

A expressão total para a variação da ação é, então, dada por

$$\begin{aligned} \delta\int d^4x\sqrt{-g}f(R) = \int d^4x\sqrt{-g}[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)]\delta g^{\mu\nu} + \\ + \int d^4x[g_{\mu\nu}\partial^{\rho}\partial_{\rho}(\sqrt{-g}f'(R)) - g_{\rho\nu}\partial_{\mu}\partial^{\rho}(\sqrt{-g}f'(R))]\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Como a variação na métrica é arbitrária, o integrando tem de ser nulo. Voltando a um referencial arbitrário, chegamos a equação

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu]f'(R) = 0 \tag{3.2.28}$$

no vácuo, ou

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.2.29}$$

se inclurimos matéria, onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento relacionado aos campos de matéria, dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.2.30}$$

e ∇_μ é a derivada covariante associada com a conexão de Levi-Civita da métrica.

Podemos destacar algumas características da equação acima. A primeira é que ela é uma equação diferencial de quarta ordem na métrica (lembre-se que o tensor de Ricci já é uma derivada segunda na métrica), e logo inclui complicações extras na teoria. A segunda é que, caso $f(R) = R$, teremos $f'(R) = 1$ e a equação acima recai na teoria tradicional de Einstein.

Para destacarmos outras características dessa teoria, vamos tomar o traço da equação de movimento. Para isso basta contrairmos a equação (3.2.29) com a métrica $g^{\mu\nu}$. Obtemos

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = \kappa T \tag{3.2.31}$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Para o caso de vácuo, temos

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = 0 \tag{3.2.32}$$

e podemos ver uma diferença fundamental para as equações de Einstein. Nela, $T = 0$ implica que $R = 0$ e $R_{\mu\nu} = 0$. Isto não é verdadeiro para a formulação métrica de $f(R)$, onde temos uma equação diferencial envolvendo o escalar de Ricci.

Estudaremos soluções exatas desta teoria nos próximos capítulos, mas já podemos notar que a equação acima comporta soluções do tipo $R = C$ para $T = 0$, ou seja, soluções do tipo (anti)de Sitter no vácuo. Este é exatamente o comportamento desejado para o universo atual. É fácil ver como isso é possível se reescrevermos a equação (3.2.29) na forma da equação de Einstein. Somando e subtraindo um mesmo termo em (3.2.29),

$$\begin{aligned} f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'(R)Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f'(R)Rg_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \\ &+[\nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu]f'(R) \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

e rearrumando a equação, encontramos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R)}{f'(R)} \tag{3.2.34}$$

que pode ser visto como a teoria de Einstein com um tensor de energia-momento efetivo e uma contante gravitacional alterada,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{f'(R)}(T_{\mu\nu} + T^{eff}_{\mu\nu}). \tag{3.2.35}$$

Dessa forma podemos ver porque é possível encontrar soluções do tipo (anti)de Sitter no vácuo, já que a estrutura da equação simula a presença de matéria.

3.3 O formalismo de Palatini

Existe uma segunda forma de derivar as equações de Einstein partindo da ação de Einstein-Hilbert que consiste em tomar a conexão como um campo independente, a priori, da métrica. Apesar de levar ao mesmo resultado, iremos ver que esta formulação é mais geral, pois resulta na conexão de Levi-Civita dinamicamente.

No caso de $f(R)$, tal formulação não é equivalente a formulação métrica, nos levando a novas equações. Antes de mostrarmos isso, devemos nos ater um pouco ao que significa tomar a conexão e a métrica como campos independentes, pois estamos acostumados a tratar a conexão como escrita em termos da métrica que define a causalidade do espaço-tempo. Neste novo formalismo temos dois campos independentes, a conexão $\overline{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. O traço acima da conexão apenas ressalta que este é um campo independente.

O tensor de Ricci é escrito como de costume, em termos da conexão. Em um referencial localmente inercial, temos

$$\overline{R}_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\overline{\Gamma}^{\rho}_{\mu\rho}. \tag{3.3.36}$$

Porém, o responsável pela causalidade do espaço-tempo ainda é o tensor métrico, logo o escalar de Ricci será dado por

$$\overline{R} = g^{\mu\nu}\overline{R}_{\mu\nu}. \tag{3.3.37}$$

Posto isso, podemos encontrar as equações de movimento a partir da Lagrangeana estendida de

Einstein-Hilbert,

$$S_{pal} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}f(\overline{R}) + S_M(g^{\mu\nu}, \Psi). \tag{3.3.38}$$

Antes de realizarmos a variação, note que o setor de matéria da Lagrangeana não se acopla com a conexão, apenas com a métrica. Fazemos isso para manter esta teoria como uma teoria métrica. É importante chamar a atenção para não confundirem uma teoria métrica com o formalismo métrico. Uma teoria métrica é aquela que os campos não-gravitacionais se acoplam *uniformemente* apenas com a métrica.

Vamos esclarecer melhor este ponto. Como o transporte paralelo é dado em termos da conexão, e não da métrica, e apenas a métrica se acopla diretamente com a matéria, temos apenas duas opções: Consideramos somente campos cujo transporte paralelo não envolva a conexão (escalar, eletromagnético) ou o transporte paralelo será dado em função da conexão de Levi-Civita da métrica.

Como não queremos nos restringir a tipos específicos de campos, devemos considerar que o transporte paralelo será dado em função da conexão de Levi-Civita da métrica, se não da forma usual, ao menos a partir da mesma em conjunto com outros elementos da teoria. Esta questão ficará mais clara a medida que estudarmos este formalismo.

Como tratamos a conexão e a métrica como campos independentes, as equações de movimento devem ser encontradas derivando a ação acima em termos da conexão e da métrica, independentemente. Vamos fazer isso separadamente. A variação em função da métrica resulta em

$$\begin{aligned}\delta S_{Pal} &= \frac{1}{2\kappa}\int d^4x[\delta(\sqrt{-g})f(\overline{R}) + \sqrt{-g}f'(\overline{R})\delta g^{\mu\nu}\overline{R}_{\mu\nu}] + \delta S_M \\ &= \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}(f'(\overline{R})\overline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\overline{R})g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + \delta S_M, \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

e como $\delta g^{\mu\nu}$ é uma variação arbitrária, temos que

$$f'(\overline{R})\overline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\overline{R})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.3.40}$$

onde, como da forma usual,

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{3.3.41}$$

Agora, vamos variar a ação com respeito a conexão. Apenas o tensor de Ricci é função da mesma, logo

$$\delta S_{pal} = \frac{1}{2\kappa}\int \sqrt{-g}f'(\overline{R})g^{\mu\nu}\delta\overline{R}_{\mu\nu}, \tag{3.3.42}$$

onde em um referencial inercial local

$$\delta\overline{R}_{\mu\nu} = \partial_\rho\delta\overline{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\overline{\Gamma}^\rho_{\mu\rho}. \tag{3.3.43}$$

Fazendo uma integração por partes e desprezando os termos de fronteira, temos

$$\delta S_{pal} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x(\partial_\lambda[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}f'(R)]\delta\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\rho(\mu}f'(R)]\delta^{\nu)}_\lambda\delta\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}) \tag{3.3.44}$$

onde os índices foram rearrumados e mantivemos a simetria dos índices da conexão. Como a variação da conexão é arbitrária, retornando a um referencial arbitrário chegamos à equação

$$\overline{\nabla}_\lambda[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}f'(\overline{R})] - \overline{\nabla}_\rho[\sqrt{-g}g^{\rho(\mu}f'(\overline{R})]\delta^{\nu)}_\lambda = 0, \tag{3.3.45}$$

onde $(\mu\nu)$ denota simetrização nos índices μ e ν. Tomando o traço da equação acima, temos

$$\overline{\nabla}_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}f'(\overline{R})) = 0. \qquad (3.3.46)$$

Inicialmente podemos ver que caso $f(R) = R$, então $f'(R) = 1$ e a equação acima nos dá a definição usual da conexão de Levi-Civita. Isso nos mostra que no caso de Einstein-Hilbert a formulação de Palatini é idêntica à formulação métrica, a única diferença é que a conexão é dada dinâmicamente e não a priori.

Vamos agora estudar a equação (3.3.40). Seu traço é dado por

$$f'(\overline{R})\overline{R} - 2f(\overline{R}) = \kappa T, \qquad (3.3.47)$$

que é uma equação algébrica em $\overline{R}$ e não mais dinâmica, como no caso da formulação métrica. No vácuo temos que

$$f'(\overline{R})\overline{R} - 2f(\overline{R}) = 0, \qquad (3.3.48)$$

onde podemos estudar suas possíveis soluções [11].

a) No caso de (3.3.48) não ter soluções reais, as equações de campo são inconsistentes.

b) No caso de $\overline{R} = c$ e $f'(\overline{R}) \neq 0$, a equação (3.3.46) nos dá

$$\overline{\nabla}_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \qquad (3.3.49)$$

que é a definição usual da conexão, e a equação (3.3.40) nos dá

$$R_{(\mu\nu)} = \lambda g_{\mu\nu}, \qquad (3.3.50)$$

onde $\lambda = \frac{f(c)}{2f'(c)}$. Isso nos mostra que a formulação de Palatini no vácuo é equivalente à gravitação de Einstein com uma constante cosmológica.

c) No caso de (3.3.48) ser identicamente nula, não podemos dizer que $\overline{R} = c$. Mas podemos definir uma nova métrica

$$h_{\mu\nu} \equiv f'(\overline{R})g_{\mu\nu}. \tag{3.3.51}$$

É fácil mostrar que

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}f'(\overline{R})g^{\mu\nu}. \tag{3.3.52}$$

Substituindo esse resultado em (3.3.46), temos que a expressão

$$\overline{\nabla}_\rho(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0 \tag{3.3.53}$$

define a conexão de Levi-Civita para a métrica $h_{\mu\nu}$,

$$\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}), \tag{3.3.54}$$

ou, em termos de $g_{\mu\nu}$

$$\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^{\lambda\rho}[(\partial_\mu f'(\overline{R})g_{\nu\rho}) + (\partial_\nu f'(\overline{R})g_{\mu\rho}) - (\partial_\rho f'(\overline{R})g_{\mu\nu})], \tag{3.3.55}$$

e podemos mostrar que recaímos na equação de Einstein com essa nova métrica e conexão [11]. No caso da presença de matéria, a partir da equação (3.3.47) podemos, a princípio, determinar $\overline{R}$ em função de T e escrever a nova métrica e a conexão em termos apenas da métrica $g_{\mu\nu}$ e da matéria, mostrando com isso que a conexão serve apenas como um campo auxiliar, não sendo de todo independente.

Dessa forma podemos escrever o tensor de Ricci da conexão em termos do tensor de Ricci da métrica $g_{\mu\nu}$,

$$\overline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\frac{1}{f'(\overline{R})^2}(\nabla_\mu f'(\overline{R}))(\nabla_\nu f'(\overline{R})) - \frac{1}{f'(\overline{R})}(\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box)f'(\overline{R}). \tag{3.3.56}$$

Contraindo com $g_{\mu\nu}$ temos

$$\overline{R} = R + \frac{3}{2f'(\overline{R})^2}(\nabla_\mu f'(\overline{R}))(\nabla^\mu f'(\overline{R})) + \frac{3}{f'(\overline{R})}\Box f'(\overline{R}). \tag{3.3.57}$$

Substituindo (3.3.56) e (3.3.57) em (3.3.40), encontramos uma equação tipo Einstein para a teoria, dada por

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{f'(\overline{R})}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\overline{R} - \frac{f(\overline{R})}{f'(\overline{R})}) + \frac{1}{f'(\overline{R})}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f'(\overline{R}) \\ &- \frac{3}{2}\frac{1}{f'(\overline{R})^2}[(\nabla_\mu f'(\overline{R}))(\nabla_\nu f'(\overline{R})) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla f'(\overline{R}))^2]. \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

3.4 Equivalência entre $f(R)$ e Brans-Dicke

Iremos mostrar que tanto as formulações métrica quanto de Palatini em $f(R)$ são equivalentes a teorias de Brans-Dicke com um determinado ω. Vamos começar com o formalismo métrico.

No formalismo métrico, o traço da equação de movimento (3.2.31) resulta em uma equação dinâmica para $f'(R)$, o que nos motiva a definir um campo escalar da forma

$$\phi \equiv f'(R) \tag{3.4.59}$$

e um potencial da forma

$$V(\phi) \equiv R(\phi)f'(R) - f(R). \tag{3.4.60}$$

Com isso, nossa ação (3.2.2) pode ser reescrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}[\phi R - V(\phi)] + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \tag{3.4.61}$$

que é a equação de Brans-Dicke sem termo cinético, porém, com um potencial. Tomando a variação desta ação em função do campo escalar, encontramos que

$$R = \frac{dV}{d\phi}, \tag{3.4.62}$$

e podemos usar (3.2.31) para encontrar a equação dinâmica do campo escalar,

$$3\Box\phi + 2V(\phi) - \phi\frac{dV}{d\phi} = \kappa T, \tag{3.4.63}$$

onde percebemos que sua dinâmica é influenciada pela matéria e por sua auto-interação. Como notado em [12], a única condição imposta nas transformações (3.4.59) e (3.4.60) é que a função $f'(R)$ seja inversível. Daí decorre a condição de que $f''(R) \neq 0$, pois de outra forma teríamos que escolher entre diferentes ramos da função. Caso a condição (3.4.62) também seja inversível, podemos reconstruir a teoria $f'(R)$ em termos de Brans-Dicke, mostrando assim que elas são matematicamente equivalentes, desde que $\omega = 0$.

Vamos agora encontrar uma relação entre $f(R)$ e Palatini. Em momento algum da construção feita acima indicamos qual das duas formulações estávamos utilizando, de forma que podemos replicá-la para Palatini. A diferença é que o escalar de Ricci para Palatini não é o mesmo da formulação da métrica, e temos

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}[\phi\overline{R} - V(\phi)] + S_m(g_{\mu\nu},\psi). \tag{3.4.64}$$

Porém, já vimos como relacionar os dois escalares de Ricci (3.3.57), da forma que

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}[\phi(R + \frac{3}{2f'(\overline{R})^2}(\nabla_\mu f'(\overline{R}))(\nabla^\mu f'(\overline{R})) + \frac{3}{f'(\overline{R})}\Box f'(\overline{R})) - V(\phi)] + S_m(g_{\mu\nu},\psi) \tag{3.4.65}$$

e, substituindo $f'(\overline{R}) = \phi$, temos

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}[\phi R + \frac{3}{2\phi}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \Box\phi - V(\phi)] + S_m(g_{\mu\nu},\psi), \tag{3.4.66}$$

onde a derivada segunda nada mais é que um termo de fronteira, deixando-nos assim com a teoria de Brans-Dicke com $\omega = \frac{3}{2}$.

Inicialmente poderíamos achar que na formulação métrica o escalar não teria dinâmica, devido a falta de um termo cinético para o mesmo, enquanto que na formulação de Palatini o escalar teria dinâmica. Porém, o que ocorre é exatamente o contrário e o escalar somente possui dinâmica na formulação métrica, enquanto que na formulação de Palatini ele nada mais é que um campo auxiliar.

Poderíamos ter suspeitado disso olhando o traço da equação de movimento. No caso do formalismo métrico, há dinâmica para $f'(R)$, enquanto que no formalismo de Palatini o traço nos remete a uma equação puramente algébrica. Nosso engano provém da falha em identificar que há um acoplamento a nível de propagador entre a métrica e o escalar de Brans-Dicke. Lembre-se que o escalar de Ricci é formado por derivadas da métrica, e para tornar livres as variações $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta\phi$ serão necessárias derivadas parciais, o que irá alterar a forma de nossa ação.

Nos próximos capítulos iremos estudar algumas soluções exatas da formulação métrica. Soluções exatas da formulação de Palatini não serão abordadas nesta dissertação, porém já foi mostrado a incompatibilidade da formulação de Palatini com soluções coerentes para a descrição de estrelas [13] .

Capítulo 4

Soluções esfericamente simétricas

4.1 A métrica de Schwarzschild

Toda teoria deve poder, em princípio, ser testada experimentalmente, e a forma mais direta de testar uma teoria da gravitação é onde ela é melhor aplicada, na mecânica celeste. Por isso uma das primeiras soluções para as equações de Einstein a ser descoberta foi a solução nas vizinhanças de um corpo massivo, esfericamente simétrico. Com essa solução em mãos, chamada de métrica de Schwarzschild devido a seu descobridor, foi possível testar a gravitação proposta por Einstein nas vizinhanças do sistema solar.

Vamos aqui deduzir a métrica de Schwarzschild. Para isso, primeiro devemos partir de argumentos de simetria. Vamos admitir que a métrica não possui termos cruzados entre espaço e tempo, ou seja, que ela não possui termos do tipo $dx^i dt$. Essa suposição é aceitável em vista que, no caso de termos cruzados, a métrica não seria invariante em respeito a inversões temporais. Nossa segunda suposição é que a métrica preserve a forma de uma 2-esfera, em vista que estamos tratando de uma simetria esférica. Ou seja, a forma mais geral que estamos procurando para a métrica de Schwarzschild é

$$ds^2 = a(r,t)dt^2 - b(r,t)dr^2 - c(r,t)r^2 d\Omega^2 \tag{4.1.1}$$

onde estamos utilizando coordenadas esféricas, (x^0, x^1, x^2, x^3) como sendo (t, r, θ, ϕ), onde $d\Omega^2$ é a métrica de uma 2-esfera, dada por

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2(\theta)d\phi^2 \tag{4.1.2}$$

e $a(r,t)$, $b(r,t)$ e $c(r,t)$ são coeficientes que dependem apenas da componente radial (novamente por questões de simetria) e do tempo. Podemos redefinir a componente radial [14] para eliminar $c(r,t)$, e tudo o que precisamos fazer agora para determinar os coeficientes $a(r,t)$ e $b(r,t)$ é utilizar as equações de Einstein no vácuo, ou seja, quando $T_{\mu\nu}$=0. Neste caso, elas se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4.1.3}$$

ou, abrindo em termos dos coeficientes da conexão,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}. \tag{4.1.4}$$

Os coeficientes da conexão que não se anulam são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{a}}{2a} & \Gamma^1_{00} &= \frac{a'}{2b} & \Gamma^0_{01} &= \frac{a'}{2a} \\
\Gamma^1_{01} &= \frac{\dot{b}}{2b} & \Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{b}}{2a} & \Gamma^1_{11} &= \frac{b'}{2b} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r} & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r} & \Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{b} \\
\Gamma^3_{23} &= \frac{cos(\theta)}{sin\theta} & \Gamma^1_{33} &= -\frac{rsen(\theta)^2}{b} & \Gamma^2_{33} &= -sen(\theta)cos(\theta)
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

onde o símbolo ($'$) representa a derivada em relação a coordenada r e o ponto representa derivada temporal. Substituindo o resultado obtido para os coeficientes da conexão em (4.1.3), chegamos às seguintes equações

$$
\begin{aligned}
R_{01} &= \frac{\dot{b}}{br} = 0 && (4.1.6)\\
R_{00} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{a'b'}{b^2} - \frac{2a''}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{(a')^2}{ab} - \frac{4a'}{br}\right) = 0 && (4.1.7)\\
R_{11} &= \frac{1}{4}\left(-\frac{\dot{a}\dot{b}}{a^2} + \frac{2\ddot{b}}{a} + \frac{(a')^2}{a^2} - \frac{2a''}{a} + \frac{a'b'}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{ab} + \frac{4b'}{br}\right) = 0 && (4.1.8)\\
R_{22} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{a'r}{ab} - \frac{b'r}{b^2} + \frac{2}{b} - 2\right) = 0 && (4.1.9)\\
R_{33} &= R_{22} sen(\theta)^2 = 0. && (4.1.10)
\end{aligned}
$$

Tudo o que devemos fazer agora é manipular as equações acima para determinar os parâmetros $a(r,t)$ e $b(r,t)$. De (4.1.6) temos imediatamente que

$$b(r,t) = b(r) \tag{4.1.11}$$

e, somando (b/a) vezes R_{00} com R_{11}, temos que

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 0, \tag{4.1.12}$$

ou seja, $a(r,t)b(r) = f(t)$, o que nos mostra que podemos separar as variáveis em $a(r,t)$, escrevendo $a(r,t) = f(r)g(t)$, e redefinir a componente temporal de forma que $d\bar{t}^2 = f(t)dt^2$. Com isso concluímos que uma solução esfericamente simétrica para as equações de Einstein no vácuo é necessariamente estática. Este teorema é conhecido como teorema de Jebsen-Birkhoff.

Podemos agora encontrar a solução de Schwarzschild considerando a métrica esfericamente simétrica e estática,

$$ds^2 = a(r)dt^2 - b(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{4.1.13}$$

Refazendo todos os cálculos anteriores, considerando agora uma métrica estática, temos que $a(r)b(r) = \alpha$. Inserindo esta relação em (4.1.9), concluímos que $a + ra' = \alpha$, que pode ser escrita como

$$\frac{d(ra)}{dr} = \alpha \tag{4.1.14}$$

e, integrando, temos que

$$ra = \alpha r + \kappa \tag{4.1.15}$$

ou melhor,

$$a = \alpha(1 + \frac{\kappa}{r}), \tag{4.1.16}$$

e logo

$$b = (1 + \frac{\kappa}{r})^{-1}. \tag{4.1.17}$$

Para encontrarmos as constantes κ e α devemos identificar a solução acima encontrada para $a(r)$ com a aproximação de campo fraco,

$$a(r) \to (1 - \frac{2GM}{r}), \tag{4.1.18}$$

o que nos leva a famosa solução de Schwarzschild,

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2\Omega^2. \tag{4.1.19}$$

É a partir desta métrica que todos os testes da gravitação de Einstein, a nível de sistema solar, são realizados. Uma teoria estendida da gravitação realista deve ter como solução esfericamente simétrica uma métrica que, a nível de sistema solar, possa ser identificada com a métrica de Schwarzschild. Será isso que vamos investigar nas próximas seções.

4.2 Uma solução esfericamente simétrica para $f(R)$ no formalismo métrico

Vamos agora encontrar uma solução esfericamente simétrica para teorias do tipo $f(R)$ no formalismo métrico. Até o presente momento já foram formulados vários métodos diferentes para este fim [15] [16] [17]. Nesta seção iremos seguir o mesmo caminho seguido por [15].

Para isso vamos utilizar a mesma métrica esfericamente simétrica a qual utilizamos para deduzir a solução de Schwarzschild, a saber

$$ds^2 = a(r)dt^2 - b(r)dr^2 - r^2d\Omega^2. \tag{4.2.20}$$

onde vamos nos limitar, inicialmente, a soluções estáticas. Nas próximas seções iremos ver que, ao contrário das equações de Einstein, se tivéssemos começado com uma solução esfericamente simétrica dependente do tempo, as equações estendidas para $f(R)$ *não* a tornariam independnte do tempo, ou seja, mais de um tipo de solução seria possível. O que ocorre é que o teorema Jebsen-Birkhoff não é satisfeito para teorias do tipo $f(R)$, como iremos mostrar mais adiante.

Como vimos no capítulo anterior, a equação de movimento para $f(R)$ no formalismo métrico é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R)}{f'(R)} \tag{4.2.21}$$

e, no vácuo (com $T_{\mu\nu} = 0$), essas equações se reduzem a

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\Box f'(R) = 0. \tag{4.2.22}$$

Contraindo esta equação com a métrica, obtemos o traço dela

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\Box f'(R) = 0, \tag{4.2.23}$$

que pode ser utilizada para eliminar $f(R)$ de (4.2.22), chegando ao seguinte resultado.

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(f'(R)R - \Box f'(R)). \tag{4.2.24}$$

Aparentemente este artifício não nos resultou em uma vantagem prática, porém note que ambos os lados da equação acima são matrizes diagonais (esta equação é de fato um conjunto de equações diferenciais que depende apenas da variável r), e que a combinação

$$A_\mu = \frac{f'(R)R_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu f'(R)}{g_{\mu\mu}}, \tag{4.2.25}$$

onde os índices não estão contraídos, independe do índice μ, e logo a relação $A_\mu - A_\nu$ é válida para todos os índices μ e ν. Com isso podemos utilizá-las para encontrar as soluções que buscamos para $a(r)$ e $b(r)$.

Vamos fazer isso explicitamente para o caso onde o escalar de Ricci é uma constante, ou seja, quando $f'(R) = 0$. Nossa primeira equação se torna

$$\frac{R_{00}}{g_{00}} = \frac{R_{11}}{g_{11}}, \tag{4.2.26}$$

que, aberta em componentes, nos dá

$$\frac{a'b'}{ab^2} - \frac{2a''}{ab} + \frac{(a')^2}{a^2b} - \frac{4a'}{bar} = \frac{(a')^2}{a^2b} - \frac{2a''}{ab} + \frac{a'b'}{ab^2} + \frac{4b'}{b^2r}. \tag{4.2.27}$$

Os três primeiros termos do lado esquerdo da equação se cancelam com termos iguais no outro lado, restanto apenas a relação

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \tag{4.2.28}$$

cuja solução óbvia é $b(r) = c_3/a(r)$. Agora, devemos utilizar a segunda relação que nos resta,

$$\frac{R_{00}}{g_{00}} = \frac{R_{22}}{g_{22}} \tag{4.2.29}$$

que, aberta em componentes, nos dá

$$\frac{a'b'}{ab^2} - \frac{2a''}{ba} + \frac{(a')^2}{a^2b} - \frac{4a'}{bar} = \frac{2a'}{abr} - \frac{2b'}{b^2r} + \frac{4}{br^2} - \frac{4}{r^2} \tag{4.2.30}$$

Utilizando a relação já encontrada, $a'/a = -b'/b$, o primeiro e o terceiro termos do lado esquerdo da equação se cancelam, enquanto o primeiro o segundo termos do lado direito da equação se somam, cancelando-se, então, com o quarto termo do lado esquerdo da equação. Portanto, os únicos termos que restam são

$$1 - \frac{1}{b} - \frac{a''r^2}{2ab} = 0, \tag{4.2.31}$$

que pode ser reescrito como $1 - a - a''r^2 = 0$, cuja solução é

Tabela 4.1: Exemplo de diferentes modelos $f(R)$ e suas respectivas possíveis equações de movimento para escalares de curvatura constantes

$f(R)$		Equações de Campo
R	$\rightarrow$	$R_{\mu\nu}=0$, com $R=0$
$\xi_1 R+\xi_2 R^n$	$\rightarrow$	$\begin{cases} R_{\mu\nu}=0 & \text{com } R=0,\ \xi_1\neq 0 \\ R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0 & \text{com } R=[\frac{\xi_1}{(n-1)\xi_2}]^{\frac{1}{n-1}},\ \xi_1\neq 0,\ n\neq 2 \\ 0=0 & \text{com } R=0,\ \xi_1=0 \\ R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0 & \text{com } R=R_0,\ \xi_1=0,\ n=2 \end{cases}$
$\xi_1 R+\xi_2 R^{-m}$	$\rightarrow$	$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0$ com $R=[-\frac{(m+2)\xi_2}{\xi_1}]^{\frac{1}{m+1}}$
$\frac{R}{\xi_1+R}$	$\rightarrow$	$\begin{cases} R_{\mu\nu}=0 & \text{com } R=0 \\ R_{\mu\nu}=0 & \text{com } R=\frac{-\xi_1}{2} \end{cases}$
$\frac{1}{\xi_1+R}$	$\rightarrow$	$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0$ com $R=-\frac{2\xi_1}{3}$

$$a(r)=c_0+\frac{c_1}{r}+c_2 r^2. \tag{4.2.32}$$

Com isso podemos ver que uma métrica da forma

$$ds^2=a(r)dt^2-1/a(r)dr^2-r^2 d\Omega^2. \tag{4.2.33}$$

onde $a(r)\equiv 1-\frac{2M}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}$ é uma solução possível da teoria acima descrita, desde que possamos identificar os parámetros c_0, c_1 e c_2 desta forma, e que a equação (4.2.23) possua raíz $R=R_0$ constante. Vamos ver esta última condição em detalhes para alguns casos. No caso de um modelo $f(R)$ já bem estudado, $f(R)=R-\mu^4/R$, temos

$$R_0 f'(R_0)-2f(R_0)=R_0(1+\frac{\mu^4}{R_0^2})-2(R_0-\frac{\mu^4}{R_0})=0 \tag{4.2.34}$$

ou seja, a solução encontrada é válida desde que $R_0^2=3\mu^4$. Outros casos podem ser encontrados na tabela acima [17].

Não vamos nos preocupar agora em demonstrar que os coeficientes c_0, c_1 e c_2 podem ser ajustados para a solução encontrada poder ser identificada com a métrica de Schwarzschild mergulhada em um espaço de curvatura constante positiva (de Sitter), em especial porque a solução acima obtida *não* é uma solução válida para uma estrela esfericamente simétrica.

Esse problema, de fato, causou muita confusão na literatura dos últimos anos, especialmente no que diz respeito aos testes relativos ao sistema solar. Voltaremos a esta discussão na próxima seção. Antes disso, vamos concluir nossa discussão sobre soluções esfericamente simétricas.

Além de soluções com escalar de curvatura constante, é possível encontrar soluções estáticas onde a constante de curvatura é uma função da distância radial r. A diferença é que as equações a serem resolvidas tornam-se bastante complicadas. Para uma função $f(R)$ genérica, Capozziello e colaboradores encontram que a solução mais geral possível é dada por

$$a(r) = -\frac{b(r)e^{\frac{2}{3}\int \frac{(Rf'-2f)b(r)}{R'f''}}}{r^4(R')^2(f'')^2} \tag{4.2.35}$$

com $f''(R) \neq 0$, e

$$b(r) = \frac{6[f'(rR'f'')' - r(R')^2(f'')^2}{rf(rR'f'' - 4f') + 2f'(rR(f' - rR'f'') - 3R'f'')}. \tag{4.2.36}$$

Vemos com isso que, ao contrário da relatividade geral, há várias soluções possíveis para uma configuração esfericamente simétrica no vácuo. Calculamos em detalhes o caso em que o escalar de Ricci é uma constante, e mostramos o resultado para o caso do escalar de Ricci depender apenas da coordenada radial e ser estático.

Soluções em que o escalar de Ricci varia no tempo também são possíveis, porém tais foram pouco estudadas na literatura. Tudo isso é possível porque em teorias do tipo $f(R)$, o teorema de Jebsen-Birkhoff não é válido, a menos que algumas condições sejam impostas sobre a derivada do escalar de Ricci. Vamos nos voltar para este assunto agora.

4.3 O teorema de Jebsen-Birkhoff

Começamos este capítulo estudando soluções esfericamente simétricas no vácuo para as equações de Einstein e vimos que, partindo de uma métrica cujas componentes g_{tt} e g_{rr} dependem do tempo e da coordenada radial, as equações de Einstein nos impõem que tais componentes são, de fato, estáticas.

Este é o teorema de Jebsen-Birkhoff, que pode ser enunciado da seguinte forma [18]

Teorema de Jebsen-Birkhoff: *Uma solução esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo é necessariamente estática em uma região em que t é um vetor tipo-tempo e (r, θ, ϕ) são vetores tipo-espaço.*

Para estudarmos a validade deste teorema em $f(R)$, vamos utilizar sua equivalência escalar-tensorial. Partindo da equação de movimento para o formalismo métrico de $f(R)$,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu}\frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\Box f'(R)}{f'(R)}, \tag{4.3.37}$$

podemos utilizar as subsituições já empregadas no capítulo anterior, $f'(R) \to \phi$, e $V = Rf'(R) - f(R)$, para encontrar as equações de movimento para teorias escalares-tensoriais com $\omega = 0$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{\phi} + \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\phi) - \frac{V(\phi)}{2\phi}g_{\mu\nu}. \tag{4.3.38}$$

Vamos utilizar novamente uma métrica esfericamente simétrica do tipo

$$ds^2 = A^2(r,t)dt^2 - B^2(r,t)dr^2 - r^2d\Omega^2 \tag{4.3.39}$$

em (4.3.38) e estudar como se comporta a dependência temporal dos coeficientes. Os coeficientes da conexão desta métrica são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{A}}{A}, \qquad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{A'}{A}, \qquad \Gamma^0_{11} = \frac{B\dot{B}}{A^2} && (4.3.40)\\
\Gamma^1_{00} &= \frac{AA'}{B^2}, \qquad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{B}}{B}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{B'}{B} && (4.3.41)\\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{B^2}, \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{B^2} sen^2\theta && (4.3.42)\\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^2_{33} = -sen\theta cos\theta && (4.3.43)\\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{cos\theta}{sen\theta} && (4.3.44)
\end{aligned}$$

A partir dos coeficientes da conexão, podemos encontrar o d'Alambertiano do campo escalar,

$$\begin{aligned}
\Box\phi &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}\partial^\mu\phi) = -\frac{1}{A^2}(\ddot{\phi} - \frac{\dot{a}}{A}\dot{\phi} - \frac{AA'}{B^2}\phi')\\
&+ \frac{1}{B^2}(\phi'' - \frac{B\dot{B}}{A^2}\dot{\phi} - \frac{B'}{B}\phi') + \frac{2\phi'}{rB^2} && (4.3.45)
\end{aligned}$$

e as componentes das equações de Einstein. As componentes $(0,1), (0,0)$ e $(1,1)$ são, respectivamente,

$$\frac{2\dot{B}}{Br} = \omega\frac{\dot{\phi}\phi'}{\phi^2} + \frac{1}{\phi}(\dot{\phi}' - \frac{A'}{A}\dot{\phi} - \frac{\dot{B}}{B}\phi') \qquad (4.3.46)$$

$$\begin{aligned}
A^2(\frac{1}{r^2} + \frac{2B'}{B^3 r} - \frac{1}{B^2r^2}) &= \frac{\omega}{2\phi^2}(\dot{\phi}^2 + \frac{A^2}{B^2}(\phi')^2) +\\
&+ \frac{A^2}{B^2\phi}(\phi'' - \frac{B\dot{B}}{A^2}\dot{\phi} - \frac{B'}{B}\phi' + \frac{2\phi'}{r}) + \frac{VA^2}{2\phi} && (4.3.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2A'}{Ar} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{\omega}{\phi^2}((\phi')^2 + \frac{B^2}{A^2}\dot{\phi}^2)\\
&+ \frac{B^2}{A^2\phi}(\ddot{\phi} - \frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi} - \frac{AA'}{B^2}\phi' - \frac{2A^2}{B^2 r}\phi') - \frac{VB^2}{2\phi} && (4.3.48)
\end{aligned}$$

onde estas equações dificilmente vão impedir que os coeficientes $A(r,t)$ e $B(r,t)$ não dependam do tempo. Isso ocorre porque a gravitação escalar-tensorial possui um novo grau de liberdade, e este grau de liberdade é responsável pela emissão de radiação de monopolo, o que não existe na gravitação usual de Einstein.

No entanto, podemos estudar o que ocorre caso o campo escalar seja estático (mas não uniforme). A componente $(1,0)$ das equações de Einstein se reduzirá a

$$\frac{\dot{B}}{B}(\frac{2}{r}+\frac{\phi'}{\phi})=0, \tag{4.3.49}$$

o que nos permite duas soluções, ou $\dot{B}=0$ ou $\phi'=2\phi/r$, que pode ser integrado para $\phi(r)=C/r^2$, onde C é uma constante. No caso de $\phi=C/r^2$, a componente $(0,0)$ das equações de Einstein, após alguma álgebra, se reduzirá a

$$B^2=\frac{2C(2\omega+3)}{2C+Vr^4}, \tag{4.3.50}$$

o que mostra que $B=B(r)$, de qualquer forma. Utilizando $\dot{B}=0$ na componente $(1,1)$ das equações de Einstein no regime em que o escalar é estático, esta se reduz a

$$\frac{A'}{A}(\frac{2}{r}+\frac{\phi'}{\phi})=\frac{B^2-1}{r^2}+\omega(\frac{\phi'}{\phi})^2-\frac{2\phi'}{r\phi}-\frac{B^2V}{2\phi} \tag{4.3.51}$$

onde o lado direito da equação é independente do tempo, indicando que $A(r,t)$ pode depender do tempo no máximo por um fator multiplicativo, $A(r,t)=a(t)b(r)$, que pode ser absorvido em uma redefinição da coordenada temporal.

Com isso mostramos que o teorema de Jebsen-Birkhoff é válido para teorias escalares-tensoriais, e consequentemente para teorias do tipo $f(R)$, desde que o campo escalar seja estático ou não-gravitacional. Fora destes limites, o teorema deixa de ser válido e podemos encontrar soluções esfericamente simétricas que sejam dinâmicas.

Um exemplo interessante é a solução encontrada por T. Clifton [19], uma solução exata, dinâmica e esfericamente simétrica para uma teoria da forma $R^{1+\delta}$, que descreve um objeto massivo central mergulhado em um espaço plano. Tal solução é possível, unicamente, devido ao fato da não validade do teorema de Jebsen-Birkhoff.

4.4 Uma solução correta para teorias $f(R)$ nas proximidades de uma estrela

No capítulo anterior, vimos que teorias $f(R)$, tanto no formalismo métrico quanto de Palatini, são equivalentes a teorias do tipo Brans-Dicke com um determinado parâmetro ω. Tal fato levou a contradições na literatura quanto à aplicabilidade dos testes relativos ao sistema solar e suas restrições.

Em 2003, T. Chiba [20] argumentou que, devido a tal equivalência, teorias $f(R)$ não seriam boas candidatas como substitutas para a gravitação, pois o fato de possuírem o fator $\gamma = \frac{1}{2}$ faria com que violassem os limites dos testes relativos ao sistema solar. No entanto, como mostramos em uma seção precedente, pudemos encontrar como solução esfericamente simétrica no vácuo para $f(R)$ uma métrica do tipo Schwarzschild-de Sitter, e tal métrica não viola os testes relativos ao sistema solar, viabilizando assim tais teorias. Alguma coisa parecia errada.

No final de 2006, Erickcek, Smith e Kamionkowski [21] demonstraram que as métricas do tipo Scwarzschild-de Sitter encontradas na seção anterior não são aceitáveis quando tentamos unir as soluções nos lados de fora e de dentro de uma estrela, encontrando explicitamente que as soluções corretas são equivalentes às obtidas para Brans-Dicke, com $\gamma = \frac{1}{2}$.

Vamos ver isto explicitamente nesta seção. Para tornar a idéia mais clara, vamos realizar tal discussão utilizando uma função específica para a teoria, $f(R) = R + \frac{\mu^4}{R}$ [3], onde as equações de campo são dadas por

$$(1 + \frac{\mu^4}{R^4})R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu^4}{R^2})Rg_{\mu\nu} + \mu^4(g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha - \nabla_\mu\nabla_\nu)R^{-2} = 8\pi GT_{\mu\nu} \tag{4.4.52}$$

e cujo traço é dado por

$$\Box\frac{\mu^4}{R^2} - \frac{R}{3} + \frac{\mu^4}{R} = \frac{8\pi GT}{3}. \tag{4.4.53}$$

Neste momento poderíamos utilizar o mesmo procedimento já utilizado e, considerando que $T = 0$ e que o escalar de Ricci é constante, encontramos como solução $R^2 = 3\mu^4$ para a equação acima.

No vácuo, não há problema em fazer isso, e a métrica para um espaço-tempo esfericamente simétrico é mesmo dada por

$$ds^2 = -(1 - H^2r^2)dt^2 + (1 - H^2r^2)^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2, \tag{4.4.54}$$

que é a métrica para o espaço de de Sitter, com $H^2 = \mu^2/(4\sqrt{3})$. No entanto, queremos estudar o problema de uma métrica esfericamente simétrica no vácuo, *mas nas proximidades de uma estrela*, e devemos levar essa informação em consideração, o que não fizemos apropriadamente anteriormente.

Primeiro note que nosso termo $\mu r \ll 1$, porque H^2 é proporcional à constante cosmológica, cujas medidas observacionais, hoje, estabelecem a restrição $H^2 \sim 10^{-56}cm^{-2}$. Vamos considerar uma perturbação na métrica de de Sitter,

$$ds^2 = -(1 + a(r) - H^2r^2)dt^2 + (1 + b(r) - H^2r^2)^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2, \tag{4.4.55}$$

onde $a(r), b(r) \ll 1$ e, para calcular a forma destes coeficientes, devemos utilizar as equações de campo. Antes de fazermos isso, porém, vamos considerar o traço das equações de campo, dado por

(4.4.53), e ver o que ele nos informa. Definamos uma nova variável

$$c(r) \equiv -\frac{1}{3} + \frac{\mu^4}{R^2(r)}, \tag{4.4.56}$$

cujo valor se aproxima de zero quando nos afastamos da fonte, pois para $r \to \infty$, temos de ter $R \to \sqrt{3}\mu^2$, o que implica que $c(r) \to 0$. Essa variável nos indica o quanto o escalar de Ricci se afasta do valor de fundo. Caso encontrássemos $c = 0$, não haveria problema em tomar R como constante. Nossa surpresa será descobrir que isto não é possível.

Podemos reescrever o traço da equação de movimento em termos desta nova variávei da forma

$$\Box c(r) + \frac{\mu^2 c}{\sqrt{c + \frac{1}{3}}} = \frac{8\pi G}{3} T, \tag{4.4.57}$$

onde até o momento não foi feita nenhuma aproximação.

Considerando que no regine Newtoniano a pressão é negligenciável em comparação com a densidade de energia, podemos assumir que $T = -\rho$, e, se considerarmos que $c \ll 1$, temos que

$$\nabla^2 c + \sqrt{3}\mu^4 c = \frac{8\pi G}{3} \rho \tag{4.4.58}$$

onde neglicenciamos os termos de ordem superior em c. Não podemos demonstrar agora que ele é muito menor que um, porém, veremos que nossos resultados são consistentes com tal premissa.

A função de Green da equação acima é dada por

$$G(r) = -\frac{cos(3^{1/4}\mu r)}{4\pi r}, \tag{4.4.59}$$

mas estamos interessando no regime em que $\mu r \ll 1$, o que faz com que a função de Green encontrada se resuma à função de Green do operador Laplaciano. Isso nos diz que, no regime que estamos estudando, a equação que a função $c(r)$ satisfaz é simplesmente $\nabla^2 c(r) = -(8\pi G\rho)/3$.

Integrando esta equação em ambos os lados dentro de um volume esférico de raio r, considerando que $m(r)$ é a massa contida dentro do volume de integração, temos

$$\frac{dc}{dr} = -\frac{2Gm(r)}{3r^2}[1 + 0(\mu r)]. \tag{4.4.60}$$

Realizando uma segunda integração, e utilizando a condição de contorno que $c \to 0$ quando $r \to \infty$, temos

$$c(r) = \frac{2GM}{r}[1 + 0(\mu r)], \tag{4.4.61}$$

onde M é a massa da estrela para $r < R_\odot$, sendo $R_\odot$ o raio da estrela. Considerando o caso do sol, um cálculo bruto de $c(r)$ nas proximidades do raio solar resulta em $c(r) \sim 10^{-5}$, que está de acordo com nossa premissa, da mesma forma que Schwarzschild pode ser pensada como uma perturbação da métrica de Minkowski em regiões afastadas da estrela.

Substituindo o resultado em (4.4.56), temos

$$R = \sqrt{3}\mu^2(1 - \frac{GM}{r}), \qquad r > R_\odot. \tag{4.4.62}$$

Ou seja, partindo apenas do traço da equação de movimento e da suposição que $\mu r \ll 1$, concluímos que o escalar de curvatura não pode ser constante, como consideramos anteriormente para obter a métrica de Schwarzschild-de Sitter para uma $f(R)$ genérica [15]. Caso tivéssemos considerado erroneamente $\rho = 0$, aí então, teríamos encontrado que $c = 0$ e que o escalar de curvatura é constante. Mas não podemos fazer isso, já que vimos que $c(r)$ depende da integração em todo o volume considerado, o que inclui o interior da estrela onde $\rho \neq 0$.

Vamos agora retornar as equações de movimento (4.3.37), e reescrevê-las de forma a explicitar o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = (1 - \frac{\mu^4}{R^4})^{-1}[8\pi G\rho + \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu^4}{R^2})Rg_{\mu\nu} + \mu^4(g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha - \nabla_\mu\nabla_\nu)R^{-2}]. \tag{4.4.63}$$

Para abrir a equação acima, vamos começar descrevendo explicitamente alguns termos que aparecem acima, no limite que $c(r) \ll 1$:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{\mu^4}{R^2})^{-1} &= (\frac{3}{4} - \frac{9}{16}c(r)) \\ (1 - \frac{\mu^4}{R^2}) &= (\frac{2}{3} - c(r)). \end{aligned} \tag{4.4.64}$$

A equação para R^0_0, então, fica explicitamente dada por

$$\begin{aligned} R^0_0 &= (\frac{3}{4} - \frac{9}{16}c(r))[8\pi G(-\rho) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3} - c(r))12H^2(1 - \frac{GM}{r}) \\ &- \mu^4\nabla_r\partial^r R^{-2}]. \end{aligned} \tag{4.4.65}$$

onde vamos trabalhar os termos separadamente para facilitar a visualização. O lado direito da primeira linha da equação acima contém vários termos, porém a maioria será de ordem superior, do tipo $\mu^2 c, G\rho c$ e c^2. Os dois únicos termos que não devem ser negligenciados são $3H^2$ e $-6\pi G\rho$.

A segunda linha dessa equação é dada por

$$\begin{aligned} [\frac{4}{3} - \frac{9}{16}c(r)](-\mu^4)(\nabla_r\partial^r R^{-2}) &= [\frac{4}{3} - c(r)](-\mu^4)\nabla_r[\frac{(-2)}{R^3}\partial^r R) \\ &= [\frac{4}{3} - \frac{9}{16}c(r)](-\mu^4)(-2)[\frac{(-3)}{R^4}\nabla_r R\partial^r R + R^{-3}\nabla^2 R] \end{aligned} \tag{4.4.66}$$

na qual vários termos podem ser cancelados pois são de ordem $c(r)^2$, deixando-nos somente com o resultado $\frac{-3}{4}\nabla^2 c$. Portanto, a correspondente do tensor de Ricci, R^0_0 é dada por

$$R^0_0 = 3H^2 - 6\pi G\rho - \frac{3}{4}\nabla^2 c, \tag{4.4.67}$$

e os demais são

$$R^r_r = 3H^2 - \frac{3c'(r)}{2r} \tag{4.4.68}$$

$$R^\theta_\theta = R^\phi_\phi = 3H^2 - \frac{3}{4}(\frac{c'(r)}{r} + c''(r)). \tag{4.4.69}$$

Devemos, agora, calcular o tensor de Ricci para a métrica perturbada e igualar nas expressões calculadas acima. Da definição do tensor de Ricci (4.1.4), temos

$$R^t_t = 3H^2 - \frac{1}{2}\nabla^2 a(R), \tag{4.4.70}$$

e encontramos a equação

$$\frac{1}{2}\nabla^2 a(r) = 6\pi G\rho + \frac{3}{4}\nabla^2 c(r). \tag{4.4.71}$$

Lembrando que $\nabla^2 c(r) = -(8\pi G\rho)/3$, encontramos finalmente uma equação para $a(r)$, dada por

$$\frac{1}{2}\nabla^2 a(r) = 4\pi G\rho \tag{4.4.72}$$

e mais termos de ordens superiores em $\frac{GM}{r}$ e μr. A solução para a equação acima é direta, basta integrarmos em um volume que englobe a estrela. Então

$$\frac{da}{dr} = 2G\frac{m(r)}{r^2}, \tag{4.4.73}$$

fora da estrela. Uma segunda integração sujeita a condição de contorno $a(r) \to 0$ para $r \to \infty$ nos permite obter uma solução para $a(r)$,

$$a(r) = -\frac{2GM}{r}, \qquad r > R_{\odot} \tag{4.4.74}$$

Para encontrar o coeficiente $b(R)$ devemos utilizar a componente rr do tensor de Ricci,

$$R^r_r = 3H^2 - \frac{b'}{r} - \frac{a''}{2}, \tag{4.4.75}$$

que, igualando à componente R^r_r encontrada para as equações de Einstein, nos dá a relação

$$3H^2 - \frac{3c'(r)}{2r} = 3H^2 - \frac{b'}{r} - \frac{a''}{2}. \tag{4.4.76}$$

Utilizando nossa solução já encontrada $a'(r) = -2Gm(r)/r$ e $c'(r) = -(2/3)Gm(r)/r^2$, temos

$$b'(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} - \frac{Gm'(r)}{r}, \tag{4.4.77}$$

que pode ser escrita como uma diferencial total,

$$\frac{db}{dr} = \frac{d}{dr}[\frac{-Gm(r)}{r}]. \tag{4.4.78}$$

Integrando esta equação sujeita a condição de contorno que $b(r) \to 0$ para $r \to \infty$, encontramos nossa expressão para $b(r)$

$$b(r) = -\frac{Gm(r)}{r}, \tag{4.4.79}$$

e finalmente, nossa métrica para o exterior de uma distribuição de massa esfericamente simétrica é dada por

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r} - H^2r^2)dt^2 + (1 + \frac{GM}{r} + H^2r^2)dr^2 + r^2d\omega^2, \qquad (4.4.80)$$

ou, considerando GM/r e H^2r^2 como perturbações da métrica de Minkowski, tal métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r} - H^2r^2)dt^2 + (1 - \frac{GM}{r} - H^2r^2)^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2, \qquad (4.4.81)$$

diferentemente da métrica encontrada na segunda seção deste capítulo. Para os testes relativos ao sistema solar, podemos considerar $Hr \ll 1$, e nossa métrica se reduz a

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2\gamma GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2, \qquad (4.4.82)$$

onde o fator γ foi acrescentado de propósito, e $\gamma = 1/2$. Esta é a mesma solução encontrada para teorias de Brans-Dicke, como deveríamos esperar, pois já demonstramos que teorias $f(R)$ são equivalentes a teorias de Brans-Dicke. Como comentado no primeiro capítulo desta dissertação, observações relativas ao sistema solar impõem um vínculo ao fator γ tal que $|\gamma - 1| \leq 2 \times 10^{-5}$, excluindo as teorias do tipo $f(R)$ no formalismo métrico de serem boas candidatas para uma teoria da gravitação, a menos que nossa condição inicial $\mu r \ll$ seja violada. Em termos de uma teoria escalar tensorial, isto significa trabalhar com um campo escalar altamente massivo, cujo alcance da interação não tenha influência no sistema solar.

Apesar de ser esta possibilidade atrativa, um campo escalar altamente massivo teria influência apenas no universo primordial, não servindo para explicar o comportamento de expansão acelerada do universo atual. Uma proposta recente de um campo escalar cuja massa seria variável com a densidade de energia do ambiente [22] faria com que tal campo escalar não tivesse qualquer influência a nível de sistema solar, porém, fosse importante em escala cosmológica. Essa é uma forma de contornar os vínculos relativos ao sistema solar e salvar a teoria $f(R)$ no formalismo métrico. No entanto, tal idéia ainda é considerada altamente especulativa.

Apesar de termos feito nossos cálculos utilizando um forma de $f(R)$ específica, a mesma conta pode ser generalizada para teorias $f(R)$ genéricas [23]. O procedimento é similar e não o repetiremos aqui.

Capítulo 5

Espaços tipo-Gödel e o monopolo global

5.1 O universo de Gödel em $f(R)$

Como comentado na introdução deste trabalho, o universo de Gödel é um desafio à ideia Machiana de um espaço totalmente relativo, pois apresenta-se como um universo homogêneo em rotação. Segundo Mach, todo movimento deveria dar-se em relação ao conteúdo material do universo, e se o conteúdo material do universo é homogêneo, então, ele não poderia ter um eixo privilegiado em torno do qual rotacionar.

A solução cosmológica encontrada por Gödel foi apresentada em 1949 [24] e leva até hoje a inúmeras discussões a respeito de seu significado. Antes de estudarmos como este universo se comporta em teorias do tipo $f(R)$ no formalismo métrico, devemos rever rapidamente as características desta solução.

A métrica do universo de Gödel foi originalmente dada por

$$ds^2 = a^2[(dx^0 + e^{x^1}dx^2)^2 - (dx^1)^2 - \frac{1}{2}e^{2x^1}(dx^2)^2 - (dx^3)^2] \tag{5.1.1}$$

onde a é uma constate positiva. Para mostrar que esta métrica satisfaz as equações de Einstein, precisamos calcular os coeficientes da conexão e posteriormente os tensores de Riemann e Ricci. Vamos indicar aqui unicamente os resultados que serão utilizados, todos os outros coeficientes podem ser encontrados em [24]. Os coeficientes da métrica e sua inversa são dadas por

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{x^1} & 0 & e^{2x^1}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2e^{-x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-x^1} & 0 & -2e^{-2x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.1.2}$$

e os únicos tensores de Ricci não nulos são

$$R_{00} = 1, \quad R_{22} = e^{2x^1}, \quad , R_{02} = R_{20} = e^{x^1}. \tag{5.1.3}$$

Utilizando tais resultados, é fácil calcular que $R = 1/a^2$, ou seja, trata-se de um espaço de curvatura constante. Um observador estático de vetor unitário é dado por $u^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$, com dual $u_\mu = (a, 0, ae^{x^1}, 0)$, e podemos escrever o tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} u_\mu u_\nu \tag{5.1.4}$$

Agora resta-nos verificar se tal métrica com tais tensores satisfaz as equações de Einstein. Vamos verificar explicitamente para a componente $(0, 0)$. As equações de Einstein com constante cosmológica são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}. \tag{5.1.5}$$

Escolhendo um flúido perfeito de pressão nula, temos para a componente $(0, 0)$ a relação

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \kappa T_{00} + \lambda g_{00}, \tag{5.1.6}$$

e, substituindo os resultados já encontrados,

$$1 - \frac{1}{2}1\frac{1}{a^2} = \kappa\rho\frac{1}{a^2} + \lambda, \tag{5.1.7}$$

sendo essa equação satisfeita se $\kappa\rho = 1/a^2$ e $\lambda = -1/2a^2$, ou seja, um universo homogêneo com densidade constante e com constante cosmológica, como almejávamos. As outras equações de Einstein são igualmente satisfeitas com esta escolha.

Fazendo uma transformação para coordenadas cilíndricas, a métrica de Gödel se torna

$$ds^2 = [dt + H(r)d\phi^2]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2, \tag{5.1.8}$$

onde $H(r)$ e $D(r)$ são fatores que logo veremos sua forma. Não iremos provar aqui que esta métrica representa um universo em rotação, porém a métrica acima nos mostra que, para ϕ constante, ela se resume a Minkowski, e toda sua diferença se encontra na componente azimutal.

De fato, após a descoberta desta métrica por Gödel, outras métricas com as mesmas propriedades foram descobertas para outras fontes, como por exemplo para uma fonte de poeira carregada com rotação rígida mais constante cosmológica [25]. Tal solução é caracterizada por dois parâmetros, m e ω, relacionadas a parâmetros físicos. Quando a densidade de carga é nula, retorna-se ao universo original de Gödel, dado por $m \to \sqrt{2}\omega$.

Em 1983, Rebouças e Tiomno mostraram que todas as soluções tipo-Gödel homogêneas no espaço-tempo caracterizadas pelo parâmetro ω, chamado de *vorticidade*, e o parâmetro original de Gödel m, são dadas pela métrica

$$ds^2 = [dt^2 + H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \tag{5.1.9}$$

em coordenadas cilíndricas, onde

$$H(r) = \frac{4\omega senh^2}{m^2}(\frac{mr}{2}) \tag{5.1.10}$$

e

$$D(r) = \frac{senh^2(mr)}{m^2}, \tag{5.1.11}$$

com os parâmetros m e ω tais que $\omega^2 > 0$ e $-\infty \leq m^2 \geq +\infty$. Como dito acima, o caso $m^2 = 2\omega^2$ corrsponde a métrica original de Gödel.

Uma das características mais fundamentais da métrica de Gödel é a existência de curvas tipo-tempo fechadas, o que possibilitaria, ao menos em teoria, voltar no tempo. Podemos reescrever a métrica dada na forma

$$ds^2 = dt^2 + 2H(r)dtd\phi - dr^2 - G(r)d\phi^2 - dz^2, \tag{5.1.12}$$

onde $G(r) = D^2(r) - H^2(r)$. Desta forma é fácil ver que, tomando $r, t, z =$ constante, se por acaso $G(r) < 0$, então uma curva fechada pode ter $ds^2 > 0$, que representa uma curva tipo-tempo.

Pode ser mostrado [26] que os aspectos causais dos espaços-tempo tipo Gödel dependem diretamente dos parâmetros ω e m da seguinte forma:

- Para $m = 0$ existe um raio crítico, definido por $\omega r_c = 1$, de tal forma que para todo $r > r_c$ existem círculos de Gödel não-causais.

- Para $m^2 < 0$ existe uma sequência infinita de alternadas regiões causais e não-causais, com e sem círculos de Gödel.

- Para $0 < m^2 < 4\omega^2$ círculos não-causais de Gödel ocorrem para raios maiores que o raio crítico, $r > r_c$, onde
$$senh^2 \frac{mr_c}{2} = [\frac{4\omega^2}{m^2} - 1]^{-1} \tag{5.1.13}$$

- Para $m^2 = 4\omega^2$ o raio crítico é $r_c \to \infty$, logo não há regiões não-causais e o problema da quebra da causalidade neste espaço-tempo tipo Gödel é evitado. O mesmo vale para $m^2 > 4\omega^2$.

O que faremos nesta seção é verificar se espaços-tempo tipo Gödel são possíveis em teorias $f(R)$ no formalismo métrico e estudar seus parâmetros de causalidade [27] [28].

De (5.1.8), podemos calcular o escalar de Ricci, que assume o valor $R = 2(m^2 - \omega^2)$, constante. Recordando nossas equações de movimento para $f(R)$ no formalismo métrico,

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{5.1.14}$$

como o escalar de Ricci é uma constante, essas equações se resumem a

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{5.1.15}$$

Uma simplificação nas coordenadas é feita se escolhermos a seguinte base de tetradas [27]

$$\theta^0 = dt + H(r)d\phi, \qquad \theta^1 = dr \tag{5.1.16}$$

$$\theta^2 = D(r)d\phi, \qquad \theta^3 = dz \tag{5.1.17}$$

que faz com que o elemento de linha do tipo Gödel (5.1.9) se resuma a

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2, \tag{5.1.18}$$

onde a métrica torna-se diagonal, $\eta_{AB} = (1, -1, -1, -1)$. Vamos escrever todas as nossas equações nesta nova base. De (5.1.14), utilizando que o escalar de Ricci é constante, temos

$$f'(R)R_{AB} - \frac{1}{2}f(r)\eta_{AB} = \kappa T_{AB} \tag{5.1.19}$$

e podemos utilizar o traço desta equação,

$$f'(R)R - 2f = \kappa T \tag{5.1.20}$$

para reescrevê-la de uma forma que explicite o tensor de Einstein,

$$f'(R)G_{AB} = \kappa T_{AB} - \frac{1}{2}(f(R) + \kappa T)\eta_{AB}. \tag{5.1.21}$$

Agora devemos procurar por possíveis soluções desta equação, para alguma configuração de matéria e energia. Vamos utilizar um tensor de energia-momento para um fluido perfeito na base acima,

$$T_{AB} = (\rho + p)u_A u_B - p\eta_{AB}. \tag{5.1.22}$$

As componentes do tensor de Einstein podem ser calculadas nesta nova base,

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3\omega^2 - m^2, \qquad G_{11} = G_{22} = \omega^2, \\ G_{33} &= m^2 - \omega^2, \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

de forma que terminamos com uma série de equações que devem ser satisfeitas:

$$2(3\omega^2 - m^2)f'(R) + f(R) = \kappa(\rho + 3p), \tag{5.1.24}$$

$$2\omega^2 f'(R) - f(R) = \kappa(\rho - p), \tag{5.1.25}$$

$$2(m^2 - \omega^2)f'(R) - f(R) = \kappa^2(\rho - p). \tag{5.1.26}$$

Subtraindo (5.1.26) de (5.1.26), encontramos que

$$(2m^2 - 4\omega^2)f'(R) = 0. \tag{5.1.27}$$

Como $f'(R) \neq 0$ é necessário para evitar problemas de consistência, a equação acima resulta em $m^2 = 2\omega^2$, que define exatamente a métrica de Gödel. As outras equações podem ser utilizadas para encontrar ρ e p em função das outras variáveis do problema. Substituindo (5.1.24) em (5.1.25), encontramos

$$\kappa p = \frac{f}{2} \tag{5.1.28}$$

e, multiplicando (5.1.25) por três e subtraindo de (5.1.24), temos

$$\kappa\rho = m^2 f'(R) - \frac{f}{2}, \tag{5.1.29}$$

onde $f(R)$ e $f'(R)$ devem ser calculados em $m^2 = 2\omega^2$. Segundo nossas condições acima, para $0 < m^2 < 4\omega^2$, existe um determinado raio critíco para o qual círculos de Gödel não-causais ocorrem para $r > r_c$, onde r_c é dado por (5.1.13). Logo

$$r_c = \frac{2}{m} senh^{-1}(1) = 2 senh^{-1}(1)\sqrt{\frac{2f'(R)}{2\kappa\rho + f}}, \tag{5.1.30}$$

onde utilizamos (5.1.29) para substituir o parâmetro m. Com isso mostramos a existência da métrica de Gödel em teorias $f(R)$, onde não impusemos nenhuma restrição à teoria, exceto que $f'(R) \neq 0$, que já é uma condição esperada. Para outras fontes de momento-energia, podemos encontrar relações entre os parâmetros m e ω que contenham soluções causais para métricas tipo-Gödel [27], mas nosso objetivo neste trabalho é apenas mostrar a existência de uma solução não-causal. Com isso vemos que teorias do tipo $f(R)$ e suas consecutivas correspondentes em Brans-Dicke apresentam o mesmo problema Machiano já comentado.

5.2 O monopolo global na relatividade

Monopolos globais são um tipo de defeito topológico que acredita-se ter sido formados no universo primitivo através de uma transição de fase de um campo escalar [29], tendo sua simetria inicial $O(3)$ espontâneamente quebrada para o grupo $U(1)$. Defeitos topológicos podem ser uma fonte importante na formação de estruturas em larga escala, e por isso seu estudo continua importante nos dias de hoje.

Vamos fazer uma pequena revisão da métrica de um monopolo global na relatividade geral, e depois prosseguir seu estudo para teorias $f(R)$, seguindo o trabalho apresentado em Bezerra de Mello e colaboradores [30].

A Lagrangeana de um tripleto de campo escalar auto-interagente assume a forma

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - \frac{1}{4}\lambda(\phi^a\phi^a - \eta_0^2)^2, \tag{5.2.31}$$

onde $a = \{1, 2, 3\}$, e η e λ são dois fatores que estão ligados, de alguma forma, a massa e a constante de auto-acoplamento. A configuração do campo escalar para o monopolo é dada da forma

$$\phi^a = \eta_0 f(r)\frac{x^a}{r}, \tag{5.2.32}$$

onde $x^a x^a = r^2$, enfatizando uma simetria esférica. Do capítulo anterior, sabemos que a métrica estática esfericamente simétrica mais geral possível é dada por

$$ds^2 = a(r)dt^2 - b(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2), \tag{5.2.33}$$

da forma que já temos todos os ingredientes para calcular as equações de Einstein. O tensor de energia-momento é facilmente calculado,

$$T^\nu_\mu = \partial_\mu \phi^a \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \phi} - \delta^\nu_\mu L \tag{5.2.34}$$

e, para a lagrangeana do campo escalar dada temos, em componentes

$$T^t_t = -\eta_0^2[\frac{f^2}{r^2} + \frac{(f')^2}{2b} + \frac{\lambda}{4}\eta_0^2(f^2-1)^2] \tag{5.2.35}$$

$$T^r_r = -\eta_0^2[\frac{f^2}{r^2} - \frac{(f')^2}{2b} + \frac{\lambda}{4}\eta_0^2(f^2-1)^2] \tag{5.2.36}$$

$$T^\theta_\theta = T^\phi_\phi = [\frac{f^2}{r^2} - \frac{(f')^2}{2b} + \frac{\lambda}{4}\eta_0^2(f^2-1)^2]. \tag{5.2.37}$$

Porém, queremos tratar o monopolo fora do núcleo, e afastando-se do núcleo é esperado que $f(r) \approx 1$, uma configuração constante. Com isso as componentes do tensor de energia-momento são

$$T^t_t \approx T^r_r \approx -\frac{\eta_0}{r^2}, T^\phi_\phi = T^\theta_\theta \approx 0. \tag{5.2.38}$$

Os coeficientes do tensor de Ricci já foram calculados no capítulo anterior. São eles

$$R_{tt} = -\frac{1}{4}(\frac{a'b'}{b^2} - \frac{2a''}{b} + \frac{(a')^2}{ab} - \frac{4a'}{br}) \quad (5.2.39)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{4}(\frac{(a')^2}{a^2} - \frac{2a''}{a} + \frac{a'b'}{ab} + \frac{4b'}{br}) \quad (5.2.40)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}(\frac{a'r}{ab} - \frac{b'r}{b^2} + \frac{2}{b} - 2) \quad (5.2.41)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} sen(\theta)^2. \quad (5.2.42)$$

Combinando tais coeficientes apropriadamente, encontramos

$$\frac{R_{rr}}{2b} + \frac{R_{tt}}{2a} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{b'r - b + b^2}{b^2 r^2} \quad (5.2.43)$$

que também pode ser escrito da forma

$$(\frac{r}{b})' = 1 - r^2[\frac{1}{2}(R^r_r - R^t_t) + R^\theta_\theta]. \quad (5.2.44)$$

Podemos utilizar as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (5.2.45)$$

para simplificar esta equação. Dos coeficientes do tensor de energia-momento, temos que $T \approx -2\frac{\eta_0}{r^2}$, e $R^r_r = R^t_t$, e portanto, o único coeficiente que vai contribuir com (5.2.44) é $R^\theta_\theta = -8\pi G\eta_0^2/r^2$. Logo

$$(\frac{r}{b})' = 1 - 8\pi G\eta_0^2, \quad (5.2.46)$$

que pode ser facilmente integrada, cujo resultado é dado por

$$b(r)^{-1} = 1 - 8\pi G\eta^2 + \frac{C}{r}. \quad (5.2.47)$$

Para que esta solução forneça o potencial Newtoniano correto em baixas energias, precisamos ter

$$b(r)^{-1} = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}. \qquad (5.2.48)$$

Uma segunda condição é encontrada considerando a seguinte combinação

$$\frac{R_{rr}}{b} + \frac{R_{tt}}{a} = \frac{1}{rb}(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}) = 0, \qquad (5.2.49)$$

cuja solução imediata é que $a(r)b(r) = cte$, onde tal constante pode ser escolhida como o valor unitário. Com isso encontramos a métrica de um monopolo global afastado do núcleo,

$$ds^2 = (1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r})dt^2 - (1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \qquad (5.2.50)$$

Desprezando o termo massivo, e redefinindo a coordenada temporal, a métrica acima toma a seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{\alpha^2} - r^2 d\Omega^2, \qquad (5.2.51)$$

onde $\alpha^2 = (1 - 8\pi G\eta^2) < 1$. Esta métrica representa um monopolo global pontual idealizado, cuja deficiência de ângulo sólido é $\delta\phi = 8\pi^2 G\eta_2^2$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [31]. Vamos agora estudar como se comporta o mesmo tipo de defeito topológico em $f(R)$.

5.3 O monopolo global em $f(R)$

O cálculo de uma solução tipo monopolo global para teorias $f(R)$ segue a mesma técnica introduzida no capítulo anterior. Das equações de movimento para o formalismo métrico,

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\Box f'(R) = \kappa T^m_{\mu\nu}, \tag{5.3.52}$$

podemos reescrever a equação acima utilizando seu traço, que é dado por

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - \kappa T^m_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{4}[f'(R)R - \Box f'(R) - \kappa T^m], \tag{5.3.53}$$

e construir uma combinação de tensores e operadores dada por

$$C_\mu = \frac{f'(R)R_{\mu\mu} - \nabla_\mu\nabla_\mu f'(R) - \kappa T^m_{\mu\mu}}{g_{\mu\nu}}, \tag{5.3.54}$$

que independe do índice utilizado. Isso nos permite utilizar a relação $C_\mu = C_\nu$ para todas as componentes μ e ν. Devido a simetria esférica, $C_2 \propto C_3$, o que nos deixa apenas com três relações. A primeira delas, $C_t = C_r$, vamos apresentar em detalhes. Definindo $F(r) \equiv f'(R(r))$, o coeficiente temporal é dado por

$$C_t = [F(r)R_{tt} - \partial_t\partial_t F(r) + \Gamma^\lambda_{tt}\partial_\lambda F(r) - \kappa T_{tt}]/g_{tt}, \tag{5.3.55}$$

enquanto o coeficiente radial é dado por

$$C_r = [F(r)R_{rr} - \partial_r\partial_r F(r) + \Gamma^\lambda_{rr}\partial_\lambda F(r) - \kappa T_{rr}]/g_{rr}, \tag{5.3.56}$$

onde todos os coeficientes do tensor de Ricci e da conexão podem ser encontrados no capítulo anterior. A relação $C_r - C_t$ é fácil de ser calculada pois $T_{rr}/g_{rr} = T_{tt}/g_{tt}$ e a relação $R_{rr}/g_{rr} = R_{tt}/g_{tt}$ já foi calculada também no capítulo anterior. O resultado é a equação

$$2rF''(r) - rF'(r)(\frac{b'}{b} + \frac{a'}{a}) - 2F(r)(\frac{b'}{b} + \frac{a'}{a}) = 0. \tag{5.3.57}$$

onde agora ($'$) representa a derivada em relação a coordenada radial. O terceiro coeficiente independente C_θ é dado por

$$C_\theta = [F(r)R_{\theta\theta} - \partial_\theta\partial_\theta F(r) + \Gamma^\lambda_{\theta\theta}\partial_\lambda F(r)]/g_{\theta\theta}. \quad (5.3.58)$$

Portanto, uma segunda equação independente, $C_\theta - C_t$, pode ser calculada, obtendo como resultado

$$-4a + 4ab - 4ra\frac{F'}{F} + 2r^2a'\frac{F'}{F} - r^2a'(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}) + 2r^2a'' + 2ar(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}) - \frac{4ab\kappa\eta_0^2}{F} = 0. \quad (5.3.59)$$

Uma terceira equação, da forma $C_\theta - C_r$ não seria independente, pois é a soma das duas primeiras equações encontradas.

Agora que temos as únicas duas equações independentes, devemos resolve-las. Infelizmente, tais equações são muito complicadas para que obtenhamos soluções sem algumas aproximações. Vamos começar definindo um parâmetro $\beta = (\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b})$, de forma a podermos escrever as equações como

$$\frac{\beta}{r} = \frac{F''}{F} - \frac{1}{2}\frac{F'}{F}\beta \quad (5.3.60)$$

e

$$-4a + 4ab - 4ra\frac{F'}{F} + 2r^2a'\frac{F'}{F} + 2r^2a'' - r^2a'\beta + 2ar\beta - \frac{4ab\kappa\eta_0^2}{F} = 0. \quad (5.3.61)$$

Vamos considerar que os coeficientes $a(r)$ e $b(r)$ representam perturbações em um universo plano, ou seja, vamos subsituir $a(r) \to 1 + A(r)$ e $b(r) \to 1 + B(r)$, onde $|A(r)| \ll 1$ e $|B(r)| \ll 1$. Vamos considerar também que esta teoria é uma leve modificação da teoria da relatividade geral, ou seja, $f(R) = R + \phi(r)$, e logo $F(r) = 1 + \psi(r)$, com $|\Psi| \ll 1$.

Com estas aproximações, temos que

$$\frac{F'}{F} = \frac{\psi'}{1+\psi} \approx \psi', \; \frac{F''}{F} = \frac{\psi''}{1+\psi'} \approx \psi'', \tag{5.3.62}$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{A'}{1+A} \approx A', \frac{b}{b'} = \frac{B'}{1+B} \approx B'. \tag{5.3.63}$$

Utilizando tais aproximações, a equação (5.3.60) se torna

$$\frac{\beta}{r} = \psi'' - \frac{1}{2}\psi'\beta. \tag{5.3.64}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima pode ser negligenciado, em vista que é de segunda ordem na perturbação. Já a equação (5.3.61) se torna

$$\begin{aligned} &- \; 4(1+A) + 4(1+A)(1+B) - 4r(1+A)\psi' + 2r^2A'\psi' + 2r^2A'' \\ &- \; r^2A'\beta + 2(1+A)r\beta - \frac{4(1+A)(1+B)\kappa\eta_0^2}{1+\psi} = 0. \end{aligned} \tag{5.3.65}$$

Eliminando os termos de ordem superior, que podem ser negligenciadas, esta equação torna-se

$$4B - 4r\psi + 2r^2A'' + 2r(A' + B') - 4(1 + A + B - \psi r)\kappa\eta_0^2 = 0. \tag{5.3.66}$$

Para continuar, devemos especificar uma escolha para a função $\psi(r)$. Aqui repetiremos a escolha feita em [30], $\psi(r) = \psi_0 r$, que faz com que a equação (5.3.64) se torne

$$\frac{\beta}{r} = 0, \tag{5.3.67}$$

que significa que $A'(r) + B'(r) = 0$, ou seja, $A(r) + B(r) = c_0$. Para $r \to \infty$, devemos ter $A(r) \to 0$,$B(r) \to 0$, logo $c_0 = 0$ é uma escolha apropriada. Com isso chegamos à nossa primeira relação,

$$A(r) = -B(r). \tag{5.3.68}$$

Substituindo (5.3.68) em (5.3.66), temos

$$-A(r) - r\psi_0 + \frac{1}{2}r^2 A''(r) - (1 - \psi_0 r)\kappa\eta_0^2 = 0, \tag{5.3.69}$$

cuja solução é dada por

$$A(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r^2 - \kappa\eta_0^2 - \psi_0 r(1 - \kappa\eta_0^2), \tag{5.3.70}$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração. O primeiro termo do lado direito é obviamente o potencial Newtoniano encontrado na solução de monopolo global, enquanto o segundo é um termo de constante cosmológica, tipicamente presente em soluções para teorias tipo $f(R)$. Em uma teoria sem constante cosmológica e onde possamos desprezar o termo massivo, nossa solução é dada por

$$a(r) = 1 - 8\pi G\eta_0^2 - \psi_0 r(1 - 8\pi G\eta_0^2) \tag{5.3.71}$$

onde o valor de $\kappa = 8\pi G$ foi substituído. Em geral, o termo $\psi_0 r \times 8\pi G\eta_0^2$ também é negligenciável em relação aos outros termos, pois $|\psi_0 r| \ll 1$, deixando-nos com o seguinte termo

$$a(r) = 1 - 8\pi G\eta_0^2 - \psi_0 r \tag{5.3.72}$$

e, como $b(r) = (1 + B(r)) = (1 - A(r))$, tratando-se $A(r)$ e $B(r)$ de perturbações, temos que $b(r) = a(r)^{-1}$, ou seja, a métrica procurada é da forma

$$ds^2 = (1 - 8\pi G\eta_0^2 - \psi_0 r)dt^2 - (1 - 8\pi G\eta_0^2 - \psi_0 r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{5.3.73}$$

A partir dela, podemos facilmente calcular o escalar de curvatura,

$$R = -\frac{-16\pi G\eta_0^2}{r^2} - \frac{6\psi_0}{r}, \tag{5.3.74}$$

sendo o segundo termo presente devido à correções na relatividade geral.

Vamos lembrar que nossa função $F(R)$ foi definida como uma pequena variação da relatividade geral, da forma $F(R) = 1 + \delta = 1 + \psi_0 r$. Como temos R, podemos escrevê-lo em função de δ, da forma

$$R = -\frac{-16\pi G\eta_0^2\psi_0^2}{\delta^2} - \frac{6\psi_0^2}{\delta}, \tag{5.3.75}$$

e inverter esta equação para encontrar δ em função de R. Uma solução possível é

$$\delta = -\frac{(3\psi_0 + \sqrt{9\psi_0^2 - 16R\pi G\eta_0^2})\psi_0}{R}. \tag{5.3.76}$$

Agora para descobrir $f(R)$ basta integrar a função $F(R) = 1 + \delta(R)$. O resultado encontrado é

$$\begin{aligned} f(R) &= R - 3\psi_0^2 ln(\frac{R}{R_0}) - 2\psi_0\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta_0^2 R} \\ &-3\psi_0^2 ln[\frac{\sqrt{9\psi_0^2 - 16R\pi G\eta_0^2} - 3\psi_0}{\sqrt{9\psi_0^2 - 16R_0\pi G\eta_0^2} - 3\psi_0}] \\ &+3\psi_0^2 ln[\frac{\sqrt{9\psi_0^2 - 16R\pi G\eta_0^2} + 3\psi_0}{\sqrt{9\psi_0^2 - 16R_0\pi G\eta_0^2} + 3\psi_0}]. \end{aligned} \tag{5.3.77}$$

Pode ser mostrado que, se ψ_0 for uma constante positiva, a função acima satisfaz os requisitos fundamentais para ser uma teoria $f(R)$ consistente, particularmente que $d^2 f(R)/dR^2 > 0$ e $df(R)/dR > 0$.

Uma característica importante desta solução é que ela é conformalmente relacionada com a solução de monopolo global na relatividade geral. Considerando um particular conjunto de transformações de coordenada (ver [30]), nossa solução (5.3.73) pode ser reescrita como

$$ds^2 = (1 - \psi_0 r^*)[(1 - 8\pi G\eta_0^2)dt^2 - (1 + 8\pi G\eta_0^2)dr^{*2} - r^{*2}d\Omega] \tag{5.3.78}$$

onde r^* nada mais é que uma nova coordenada radial.

5.4 O monopolo global em $f(R)$ com rotação

Nosso objetivo nesta seção é se utilizar de um método desenvolvido por Newman e Janis [32] para transformar a solução do monopolo global em $f(R)$ obtido na seção anterior, que é estática, em uma solução com rotação. Para fazer isso iremos utilizar a métrica do monopolo com o termo massivo, dada por

$$ds^2 = (1 - 8\pi G\eta_0^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_0 r)dt^2 - (1 - 8\pi G\eta_0^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_0 r)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{5.4.79}$$

onde todas as constantes já foram definidas na seção anterior. Vamos começar redefinindo as coordenadas temporal e radial, da seguinte forma

$$t \to \beta t, \qquad r \to \beta^{-1} r, \tag{5.4.80}$$

suplementada pelas redefinições $\overline{M} \equiv \beta^{-3}M$ e $\overline{\psi_0}\beta^{-1} \equiv \psi_0$ onde $\beta^2 = 1 - 8\pi G\eta_0^2$. Com isso, nossa métrica passa a ser

$$ds^2 = (1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0}r)dt^2 - (1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0}r)^{-1}dr^2 - \beta^2 r^2 d\Omega^2, \tag{5.4.81}$$

onde, ao impor $\beta = 1$ e $\psi_0 = 0$, recuperamos a métrica de Schwarzschild.

No entanto, estas não são as coordenadas apropriadas para que apliquemos o método de Newman-Janis. Precisamos encontrar um novo sistema de coordenadas, e consequentemente uma transformação para este novo sistema de coordenadas, que resulte na métrica

$$ds^2 = (1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0}r)du^2 + 2dudt - b^2 r^2 d\Omega^2, \tag{5.4.82}$$

onde (u, r, θ, ϕ) representam este novo sistema de coordenadas. É fácil verificar que uma relação da forma

$$du = dt - dr(1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0}r)^{-1} \tag{5.4.83}$$

satisfaz esse requisito, e bastaríamos integrar a equação acima para encontrar a transformação desejada. Infelizmente o resultado da integral da equação acima é mal comportado no limite em que $\overline{\psi_0} \to 0$, e gostaríamos de poder tomar este limite no futuro para comparar nosso resultado com o resultado do monopolo global com rotação na relatividade geral obtido em [33].

No entanto, como $\overline{\psi_0}$ é uma perturbação na métrica, podemos expandir o segundo termo do lado direito da equação acima em uma série geométrica,

$$\frac{r}{r - 2G\overline{M} - \overline{\psi_0}r^2} = \frac{r}{(r - 2G\overline{M})(1 - \frac{\overline{\psi_0}r^2}{r - 2G\overline{M}})} = \frac{r}{r - 2G\overline{M}}(1 + \frac{\overline{\psi_0}r^2}{r - 2G\overline{M}}) \tag{5.4.84}$$

e a relação que temos de integrar passa a ser

$$du = dt - dr[\frac{r}{r - 2G\overline{M}}(1 + \frac{\overline{\psi_0}r^2}{r - 2G\overline{M}})], \tag{5.4.85}$$

cujo resultado é a transformação que procurávamos

$$\begin{aligned} u &= t - r - 2G\overline{M}ln(-r + 2G\overline{M}) + 4\overline{\psi_0}G\overline{M}r + \frac{1}{2}\overline{\psi_0}r^2 + \\ &\frac{8\overline{\psi_0}G^3\overline{M}^3}{-r + 2G\overline{M}} + 12\overline{\psi_0}G^2\overline{M}^2 ln(-r + 2G\overline{M}). \end{aligned} \tag{5.4.86}$$

No caso de $\overline{\psi_0} = 0$, recaímos na transformação utilizada em [33] para dar rotação ao monopolo global na relatividade geral. Nestas novas coordenadas (u, r, θ, ϕ), os únicos componentes não-nulos da métrica (5.4.82) são dados por

$$g_{00} = (1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0}r), \;\; g_{01} = g_{10} = 1 \tag{5.4.87}$$

$$g_{22} = -b^2r^2, \;\; g_{33} = -b^2r^2sen^2(\theta) \tag{5.4.88}$$

e em termos do inverso da métrica

$$g^{00} = 0, \;\; g^{11} = -(1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0}r), \;\; g^{01} = g^{10} = 1 \tag{5.4.89}$$

$$g^{22} = -\frac{1}{b^2r^2}, \;\; g^{33} = -\frac{1}{b^2r^2sen^2(\theta)}. \tag{5.4.90}$$

Podemos escrever as componentes contravariantes da métrica em uma base de tetradas, da seguinte forma

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu, \tag{5.4.91}$$

onde as tetradas nulas são dadas por

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= \delta_1^\mu, \quad n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}(1 - \frac{2G\overline{M}}{r} - \overline{\psi_0} r)\delta_1^\mu \\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}br}(\delta_2^\mu + \frac{i}{sen\theta}\delta_3^\mu) \\
\overline{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}br}(\delta_2^\mu - \frac{i}{sen\theta}\delta_3^\mu),
\end{aligned}
\tag{5.4.92}
$$

e $\overline{m}$ é o complexo conjugado de m.

O que faremos agora é permitir que a variável r assuma valores complexos. As tetradas são, então, reescritas da forma

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= \delta_1^\mu, \quad n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}(1 - G\overline{M}(\frac{1}{r} + \frac{1}{\overline{r}}) - \frac{1}{2}\overline{\psi_0}(r + \overline{r})\delta_1^\mu) \\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}br}(\delta_2^\mu + \frac{i}{sen\theta}\delta_3^\mu) \\
\overline{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}br}(\delta_2^\mu - \frac{i}{sen\theta}\delta_3^\mu),
\end{aligned}
\tag{5.4.93}
$$

onde $\overline{r}$ é o complexo conjugado de r. Seguindo o método de Newman-Janis [32], vamos fazer uma transformação complexa de coordenadas,

$$u' = u - iacos\theta, \quad r' = r + iacos\theta \tag{5.4.94}$$

$$\theta' = \theta, \quad \phi' = \phi \tag{5.4.95}$$

nas tetradas l^μ, n^μ e m^μ. Se permitirmos que u' e r' sejam reais, obteremos

$$
\begin{aligned}
l'^{\mu} &= \delta_1^{\mu}, \quad n'^{\mu} = \delta_0^{\mu} - \frac{1}{2}(1 - 2G\overline{M}(\frac{r'}{r'^2 + a^2cos^2\theta'}) - \overline{\psi}_0 r')\delta_1^{\mu} \\
m'^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}b(r' + iacos\theta')}(iasen\theta'(\delta_0^{\mu} - \delta_1^{\mu}) + \delta_2^{\mu} + \frac{i}{sen\theta'}\delta_3^{\mu}) \\
\overline{m'}^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}b(r' - iacos\theta')}(-iasen\theta'(\delta_0^{\mu} - \delta_1^{\mu}) + \delta_2^{\mu} - \frac{i}{sen\theta'}\delta_3^{\mu})
\end{aligned} \tag{5.4.96}
$$

onde $\overline{m}'$ é, novamente, o complexo conjugado de m'.

A partir deste novo conjunto de tetradas, podemos calcular a nova métrica em componentes contravariantes, $g'^{\mu\nu}$, e posteriormente a métrica $g'_{\mu\nu}$, correspondente a um monopolo global em $f(R)$ com momento angular por unidade de massa a. Explicitamente, a inversa da métrica $g'^{\mu\nu}$ é dada por

$$
g'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
-\frac{a^2sen^2\theta'}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} & 1 + \frac{a^2sen^2\theta'}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} & 0 & -\frac{a}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} \\
1 + \frac{a^2sen^2\theta'}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} & g'^{r'r'} & 0 & \frac{a}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} \\
0 & 0 & -\frac{1}{b^2(r^2+a^2cos^2\theta)} & 0 \\
-\frac{a}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} & \frac{a}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')} & 0 & \frac{a}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')sen^2\theta'}
\end{pmatrix} \tag{5.4.97}
$$

onde $g'^{r'r'} = -1 + 2GM(\frac{r'}{r'^2+a^2sen^2\theta'}) + \overline{\phi_0}r' - \frac{a^2sen^2\theta'}{b^2(r'^2+a^2cos^2\theta')}$. Invertendo esta matriz, obtemos finalmente a métrica

$$
g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
1 - \frac{2G\overline{M}r'}{r'^2+a^2cos^2\theta'} - \overline{\psi_0}r' & 1 & 0 & \frac{2G\overline{M}ar'sen^2\theta'}{r'^2+a^2cos^2\theta'} + a\overline{\psi_0}sen^2\theta'r' \\
. & 0 & 0 & -asen^2\theta' \\
. & . & -b^2(r'^2 + a^2cos^2\theta') & 0 \\
. & . & . & g'_{\phi'\phi'}
\end{pmatrix} \tag{5.4.98}
$$

onde $g'_{\phi'\phi'} = -sen^2\theta'[b^2r'^2 + \frac{2G\overline{M}a^2r'sen^2\theta'}{r'^2+a^2cos^2\theta'} + a^2(b^2cos^2\theta' + sen^2\theta') + \overline{\psi_0}r'a^2sen^2\theta']$.

Essa é a métrica de um monopolo global com rotação em $f(R)$, porém as coordenadas (u', r', θ', ϕ') não são muito apropriadas para explicitar a rotação. Podemos aplicar transformações do tipo Boyer-Lindquist [34] para escrever a solução obtida nas coordenadas (t, r, θ, ϕ), e para isso utilizaremos o algoritimo estendido desenvolvido por Drake e Szekeres [35]. Iniciamos o algoritimo com uma métrica genérica na forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r,\theta)} & e^{\lambda(r,\theta)+\Phi(r,\theta)} & 0 & asen^2(\theta)e^{\Phi(r,\theta)}(e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)}) \\ . & 0 & 0 & -ae^{\Phi(r,\theta)+\lambda(r,\theta)}sen^2(\theta) \\ . & . & -\Sigma & 0 \\ . & . & . & -sen^2(\theta)(\Sigma + a^2sen^2\theta e^{\Phi(r,\theta)}(2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)})) \end{pmatrix} \tag{5.4.99}$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2cos^2(\theta)$, e, para obter os componentes Φ e λ, basta compara-la com a métrica (5.4.98) para o monopolo global com rotação em $f(R)$. Obtemos então que

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{2}ln(1 - \frac{2G\overline{M}r'}{r'^2 + a^2cos^2\theta'} - \overline{\psi_0}r') \tag{5.4.100}$$

$$\Lambda(r,\theta) = -\Phi(r,\theta). \tag{5.4.101}$$

O próximo passo do algorítimo para é utilizar as seguintes transformações

$$du = dt + g(r')dr,$$

$$d\phi = d\phi' + h(r')dr, \tag{5.4.102}$$

$$dr = dr', \; d\theta = d\theta', \tag{5.4.103}$$

onde $h(r')$ e $g(r')$ são dados por

$$g(r') = -\frac{e^{\lambda(r,\theta)}(\Sigma + a^2sen^2(\theta)e^{\lambda(r,\theta)+\Phi(r,\theta)})}{e^{\Phi(r,\theta)}(\Sigma + a^2sen^2(\theta)e^{2\lambda(r,\theta)})} \tag{5.4.104}$$

$$h(r) = -\frac{ae^{2\lambda(r,\theta)}}{\Sigma + a^2sen^2(\theta)e^{2\lambda(r,\theta)}}, \tag{5.4.105}$$

na métrica original. Substituindo as expressões para λ e Φ que obtivemos, encontramos os seguintes coeficientes de transformação

$$g(r) = \frac{a^2 + r^2}{\overline{\psi_0}ra^2cos^2(\theta) + \overline{\psi_0}r^3 + 2G\overline{M}r - r^2 - a^2} \tag{5.4.106}$$

$$h(r) = \frac{a}{\overline{\psi_0}ra^2cos^2(\theta) + \overline{\psi_0}r^3 + 2G\overline{M}r - r^2 - a^2}. \tag{5.4.107}$$

Utilizando tais transformações em (5.4.98), após um pouco de manipulação algébrica, obtemos finalmente a métrica nas coordenadas (t, r, θ, ϕ),

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2G\overline{M}r}{r^2+a^2cos^2\theta} - \overline{\psi_0}r' & 0 & 0 & \frac{2G\overline{M}arsen^2\theta}{r^2+a^2cos^2\theta} + a\overline{\psi_0}sen^2\theta r \\ . & g_{rr} & 0 & \frac{(b^2-1)(r^2+a^2cos^2(\theta))asen^2(\theta)}{\overline{\psi_0}ra^2cos^2(\theta)+\overline{\psi_0}r^3+2G\overline{M}r-r^2-a^2} \\ . & . & -b^2(r^2+a^2cos^2\theta) & 0 \\ . & . & . & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \tag{5.4.108}$$

onde

$$
\begin{aligned}
g_{rr} &= \frac{r^2 + a^2cos^2(\theta)}{\overline{\psi_0}ra^2cos^2(\theta) + \overline{\psi_0}r^3 + 2G\overline{M}r - r^2 - a^2} \\
&+ (1-b^2)\frac{a^2sen^2(\theta)(r^2 + a^2cos^2(\theta))}{(\overline{\psi_0}ra^2cos^2(\theta) + \overline{\psi_0}r^3 + 2G\overline{M}r - r^2 - a^2)^2}
\end{aligned} \tag{5.4.109}
$$

e

$$
g_{\phi\phi} = -sen^2\theta[b^2r^2 + \frac{2G\overline{M}a^2rsen^2\theta}{r^2 + a^2cos^2\theta} + a^2(b^2cos^2\theta + sen^2\theta) + \overline{\psi_0}ra^2sen^2\theta]. \tag{5.4.110}
$$

Esta métrica representa um monopolo global com rotação no contexto das teorias $f(R)$. Se admitirmos $\overline{\psi_0} = 0$, recaímos na solução para o monopolo global com rotação na relatividade geral encontrado por Bezerra e Teixeira em [33]. A partir do monopolo global com rotação na relatividade geral, admitindo $a = 0$, temos o monopolo global sem rotação já apresentado na primeira seção deste capítulo, e admitindo $b = 1$ temos a métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist.

Capítulo 6

Conclusões

Nos últimos anos surgiu um grande interesse em teorias estendidas da gravitação para explicar a expansão acelerada e a constituição observada do universo. Vimos que teorias do tipo $f(R)$ são capazes de cumprir este papel, pois o termo adicional às equações de Einstein gerados pela substituição de R por $f(R)$ na ação de Einstein-Hilbert podem ser utilizados como uma espécie de tensor de momento-energia efetivo, com o papel de simular uma matéria exótica e com isso causar a aceleração da expansão do universo.

Os melhores testes experimentais das equações de Einstein são, no entanto, a nível do sistema solar, onde a teoria está bem estabelecida. Qualquer teoria que queira substituir ou expandir a teoria original de Einstein deve passar nos mesmos testes. A possibilidade de identificar teorias do tipo $f(R)$ com uma teoria de Brans-Dicke para um determinado parâmetro ω levou a uma confusão na literatura, com a argumentação de alguns autores que, com a descoberta de soluções do tipo Schwarzschild de-Sitter, esta identificação não poderia ser correta, em vista que soluções do tipo Schwarzschild de-Sitter passam em todos os testes relativos ao sistema solar, enquanto teorias de Brans-Dicke falham. Procuramos mostrar neste trabalho como tais soluções foram descobertas e porque elas não são soluções válidas para o exterior de estrelas esfericamente simétricas, apesar de serem soluções esfericamente simétricas de teorias $f(R)$. Aparentemente hoje há uma acordo na comunidade científica na aceitação de que teorias do tipo $f(R)$ apresentam problemas quando aplicadas ao sistema solar.

Mostramos também a existência de outras soluções exatas para teorias $f(R)$, espeificamente soluções tipo-Gödel e o monopolo global. A primeira solução está intimamente ligada com problemas filosóficos na física, tanto no que diz respeito ao problema Machiano quanto a possíveis viagens no tempo. Soluções do tipo monopolo global também foram estudadas, com o objetivo de generalizá-las através da inclusão de rotação.

Recentemente, outras soluções exatas para teorias $f(R)$ tem sido encontradas, muitas das quais já estavam presentes na gravitação de Einstein, ainda que com modificações. Apesar de todos os seus problemas, teorias $f(R)$ ainda podem ser vistas como *toy models*, teorias que aparentemente não são boas para descrever os fenômenos físicos, mas que nos ajudam enormemente a entender características teóricas de nossas modelagens físicas. Somente isto já justificaria a importância do estudo de teorias $f(R)$, porque, ainda que falhas, elas apresentam uma forma simples e elegante de modelar o universo em larga-escala atualmente, sem a necessidade de ingredientes extras e exóticos, como matéria escura e constante cosmológica.

Referências Bibliográficas

[1] Brans, C. and Dicke, R.H. *Mach´s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*. Phys. Rev. 124, 965, 1961

[2] Capozziello, Salvatore *Curvature Quintessence*. Int.J.Mod.Phys. D11, 483. 2002.

[3] Carroll, Sean M., Duvvuri, V., Trodden, M. e Turner, Michael S. *Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?*. Phys.Rev. D70, 043528. 2004.

[4] Dirac, P.A.M. *Proc. Roy. Soc.* A165, 199.

[5] Jordan, P. *Schwerkraft und Weltall*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschwig.

[6] Fujii, Y. and Maeda, K. *The Scalar-tensor theory of gravity*. Cambridge University Press, 2003.

[7] Nojiri, S. e Odintsov, S. D. *Modified f(R) gravity consistent with realistic cosmology: From matter dominated epoch to dark energy universe.*. Phys.Rev. D74, 086005. 2006.

[8] Nojiri, S., Odintsov, S. D. e Sáez-Gómez, D. *Cosmological reconstruction of realistic modified f(R) gravities*. Phys.Lett. B681, 74, 2009.

[9] Wodard, R. P. *Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity*. Lect. Notes Phys. 720, 403.

[10] Will, Clifford M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics* . Cambridge University Press, 1993

[11] Ferraris, M., M. Francaviglia and I.Volovich *The Universality of Einstein Equations.* Class.Quant.Grav 11, 1505, 1994.

[12] Gonzalo J. Olmo, *Limit to general relativity in f(R) theories of gravity.*. Phys. Rev. D. 75, 023511 , 2007.

[13] Barausse, Enrico., Sotiriou, Thomas P. e Miller, John C. *A No-go theorem for polytropic spheres in Palatini f(R) gravity.* Class.Quant.Grav. 25, 062001, 2008.

[14] Carroll, Sean M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Benjamin Cummings, 2003.

[15] Multamäki, T. e Vilja, I. *Spherically symmetric solutions of modified field equations in f(R) theories of gravity.*. Phys.Rev. D74, 064022, 2006.

[16] Bezerra de Mello, E. R. e Caramês, T. R. P. *Spherically symmetric vacuum solutions of modified gravity theory in higher dimensions.*. Eur.Phys.J. C64, 113, 2009.

[17] Capozziello, S., Stabile, A. e Troisi, A. *Spherical symmetry in f(R)-gravity.* Class.Quant.Grav. 25, 085004, 2008.

[18] Faraoni, Valerio *The Jebsen-Birkhoff theorem in alternative gravity.*. Phys.Rev. D81, 44002, 2010.

[19] Clifton, T. *Spherically symmetric solutions to fourth-order theories of gravity.* Class. Quantum Grav. 23, 7445, 2006.

[20] Chiba, T. *1/R gravity and scalar - tensor gravity.*. Phys.Lett. B575, 1, 2003.

[21] Erickcek, Adrienne L., Smith, Tristan L. e Kamionkowski *Solar System tests do rule out 1/R gravity.*. Phys.Rev. D74, 121501, 2006.

[22] Khoury, Justin e Weltman, Amanda. *Chameleon Fields: Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space.*. Phys. Rev. Lett. 93, 171104, 2004.

[23] Chiba, T., Smith, Tristan L. e Erickcek, Adrienne L. *Solar System constraints to general $f(r)$ gravity.* Phys. Rev. D75, 124014, 2007.

[24] Gödel, Kurt. *An Example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of graviation.*. Rev.Mod.Phys. 21, 447, 1949.

[25] Banerjee, A. e Banerji, J. Physics A 1, 161, 1979

[26] Rebouças, M. J. e Tiomno, J. *Homogeneity of Riemannian space-times of Gödel type.*. Phys. Rev. D28, 1251, 1983.

[27] Rebouças, M. J. e Santos, J. *Gödel-type universes in $f(R)$ gravity.* Phys. Rev. D80, 063009, 2009.

[28] Clifton, Timothy e Barrow, John D. *The Existence of godel, Einstein and de Sitter universes*, Phys.Rev. D72, 123003, 2005.

[29] Vilenkin, A. e Shellard, E. P. *Cosmic String and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[30] Carames, T.R.P., Bezerra de Mello, E.R. e Guimaraes, M.E.X. *Gravitational Field of a Global Monopole in a Modified Gravity.*, arXiv:1106.4033

[31] Bezerra de Mello, E. R. *Physics in the Global Monopole Spacetime*, Brazilian Journal of Physics, vol. 31, no. 2, Junho, 2001

[32] Newman, E.T. e Janis, A.I. *Note on the Kerr spinning particle metric* J.Math.Phys. 6, 915-917, 1965

[33] Teixeira Filho, R. M. e Bezerra, V. B. *Gravitational field of a rotating global monopole* Phys.Rev. D64, 084009, 2001

[34] Boyer, Robert H. e Lindquist, Richard W. *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric* J.Math.Phys. 8, 265, 1967

[35] Drake, S.P. e Szekeres, Peter *Uniqueness of the Newman-Janis algorithm in generating the Kerr-Newman metric.* Gen.Rel.Grav. 32, 445-458, 2000