

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

PATRICIO JOSÉ FELIX DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE REFERENCIAIS NÃO-INERCIAIS
NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI E OS EFEITOS DA
ACELERAÇÃO EM RELÓGIOS ATÔMICOS

TESE DE DOUTORADO

João Pessoa
- Agosto/ 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

PATRICIO JOSÉ FELIX DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE REFERENCIAIS NÃO-INERCIAIS
NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI E OS EFEITOS DA
ACELERAÇÃO EM RELÓGIOS ATÔMICOS

TESE DE DOUTORADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

João Pessoa
- Agosto/2015 -

S586u Silva, Patricio José Felix da.
Um estudo sobre referências não-inerciais no espaço-tempo de Minkowski e os efeitos da aceleração em relógios atômicos/
Patricio José Felix da Silva.- João Pessoa, 2015.
122f. : il.
Orientador: Fábio Leal de Melo Dahia
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Relatividade especial ou restrita. 3. Espaço-tempo de Minkowski. 4. Referenciais não-inerciais. 5. Princípio físico da localidade. 6. Relógios atômicos acelerados.

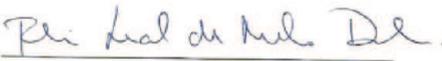
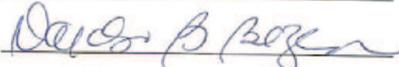
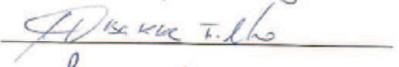
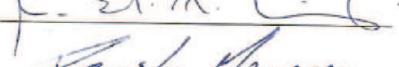
UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Patrício José Felix da
Silva**, candidato ao Título de Doutor em Física
na Área de Concentração Gravitação e
Cosmologia.

1 AOs trinta e um dias do mês de agosto ano de dois mil e cinco, às 10h00, no Auditório
2 da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Patrício José Felix da Silva**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), orientador e
7 presidente da banca examinadora, *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), *Knut Bakke Filho*
8 (UFPB), *Júlio César Fabris* (UFES) e *Maria Emília Xavier Guimarães* (UFF). Dando
9 início aos trabalhos, o Prof. *Fábio Leal de Melo Dahia* comunicou aos presentes a
10 finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo
11 fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Um estudo sobre*
12 *referenciais não-inerciais no espaço-tempo de Minkowski e os efeitos da aceleração em*
13 *relógios atômicos*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca
14 Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a
15 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na
16 forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário,
17 redigiu a presente ata que vai assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca
18 Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **31 de agosto de 2015**.

19

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia	
<i>Orientador - UFPB</i>	
Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Knut Bakke Filho	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Júlio César Fabris	
<i>UFES</i>	
Prof. Dr. Maria Emília Xavier Guimarães	
<i>UFF</i>	
Danilo Wilson Lemos Menezes	
<i>Secretário</i>	

“Estamos na situação de uma criancinha que entra em uma imensa biblioteca, repleta de livros em muitas línguas. A criança sabe que alguém deve ter escrito aqueles livros, mas não sabe como. Não compreende as línguas em que foram escritos. Tem uma pálida suspeita de que a disposição dos livros obedece a uma ordem misteriosa, mas não sabe qual ela é”. (Albert Einstein)

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo a Deus que, presente em cada momento da minha vida, criou com perfeição a Natureza, estabelecendo cada lei física, possibilitando-me a concluir este trabalho.

Ao Prof. Fábio Leal de Melo Dahia, não só pela orientação e competência inquestionável, mas também pela paciência, incentivo e amizade, ingredientes essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Carlos Romero, pela orientação e disponibilidade que sempre demonstrou.

Em especial a minha esposa (Eliane dos Santos Felix) e a meu filho (Ryan Felix da Silva) por compreenderem minha ausência e meus momentos de preocupação e ansiedade.

Ao meu pai (Pedro Trajano da Silva), a minha mãe (Marluce Felix da Silva) e meus irmãos (Petrônio Felix da Silva e Petrócio José Felix da Silva) pelo apoio, confiança e incentivo.

Ao meu colega de pós-graduação e de trabalho Alex de Albuquerque Silva e ao meu ex-aluno de Física e atualmente colega de pós-graduação Adiel da Silva Lêmos.

A José Orlando Rodrigues pela colaboração na edição dos gráficos e figuras.

A todos que fazem a Pós-Graduação e o Departamento de Física da UFPB - João Pessoa.

A todos que fazem o CDSA/UFCEG em especial a Unidade Acadêmica de Tecnologia do Desenvolvimento (UATEC).

A CAPES/CNPQ pelo suporte financeiro.

RESUMO

Um sistema de coordenadas tem a função de localizar os eventos do espaço-tempo com respeito a um sistema de referência. A construção do sistema de coordenadas depende crucialmente da noção de simultaneidade associada ao referencial. No entanto, não existe uma maneira natural, ou privilegiada, de definir simultaneidade para referenciais não-inerciais, mesmo no espaço-tempo de Minkowski. Cada procedimento conduz a diferentes sistemas de coordenadas. Neste trabalho, discutimos alguns métodos bem conhecidos da literatura especializada. Estudamos as coordenadas de Rindler, de Fermi-Walker, as coordenadas de Radar e as coordenadas de Emissão (ou GPS). O sistema de coordenadas de Rindler é um dos sistemas de grande destaque porque permite simular algumas propriedades da geometria do Buraco Negro mesmo em um espaço-tempo plano. As coordenadas de Rindler estão associadas a uma família de observadores uniformemente acelerados que obedecem à relação $a = \frac{1}{\rho}$, onde a é a aceleração própria do observador e ρ a sua posição inicial com respeito a algum sistema de referência inercial. Neste trabalho, propomos um método para construção de sistemas de coordenadas adaptados a observadores cuja aceleração depende de sua posição inicial da forma geral $a = a(\rho)$, utilizando para isso o princípio físico da localidade. O sistema de coordenadas de Rindler surge como uma particularidade de nossa generalização. Outros casos particulares nos permitem discutir a relação entre a geometria não-Euclidiana das seções espaciais e referenciais acelerados, como originalmente foi proposto por Einstein. Além disso, com a generalização podemos simular o comportamento de observadores estáticos tanto nas proximidades do horizonte de um Buraco Negro, que estão submetidos a um campo de aceleração do tipo $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$, quanto em regiões afastadas, para as quais, $a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$. Nestes dois últimos casos, ρ

corresponde à distância do observador acelerado até o horizonte de eventos. Com a intenção de analisarmos os efeitos da aceleração instantânea sobre o ritmo de relógios atômicos, consideramos uma partícula livre massiva, dentro de uma caixa ou poço de potencial infinito, que é arrastada por observadores de Rindler. Admitimos que a partícula obedece a equação de Klein-Gordon e assim, encontramos as frequências dos estados estacionários deste sistema. As transições entre os estados estacionários são usadas para definir uma frequência padrão para o nosso protótipo de relógio atômico acelerado. Comparando o espectro de energia do sistema acelerado com o espectro de energia de um sistema idêntico em um referencial inercial, determinamos a influência da aceleração instantânea sobre o ritmo de relógios atômicos.

ABSTRACT

The main role of a coordinate system is to localize the events of spacetime with respect to a frame of reference. The construction of a coordinate system depends crucially on the notion of simultaneity associated to the frame of reference. However, there is no natural manner of defining simultaneity adapted to non-inertial frames of reference, even in the case of Minkowski spacetime. Each procedure leads to different coordinate systems. In this work, we discuss some well-known methods found in the literature. We study the Rindler coordinates, Fermi-Walker coordinates, Radar coordinates and Emission (or GPS) coordinates. The system of Rindler coordinates has a great interest because it simulates in a flat spacetime some aspects of a Black Hole's geometry. We can say that Rindler coordinates are adapted to a family of uniformly accelerated observers which obey the relation $a = \frac{1}{\rho}$, where a is the proper acceleration and ρ is the initial position with respect to some inertial system. In this work, we also propose a method in order to construct coordinate systems adapted to observers whose accelerations depend on their initial position of general $a = a(\rho)$, making use of the principle of locality. The Rindler coordinate system appears as a particular case of our generalization. Other special cases allow us to discuss the connection between non-Euclidean geometry of the spatial sections and non-inertial frames of reference, as it was originally suggested by Einstein. In addition, with this generalization, we can also simulate the behavior of static observers in the vicinity of a Black Hole's Horizon, which are subject to a kind of acceleration field $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$ and also in distant regions, for which $a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$. In the latter case, ρ is the distance to the event horizon. With the intention of analyzing the effects of instantaneous acceleration of the rate of atomic clocks, we consider a free massive particle in a box or infinite

potential well, which is dragged by observers Rindler. We assume that the particle obeys the Klein-Gordon equation and so we found the frequencies of the stationary states of the system. The transitions between the stationary states are employed to set a standard frequency for our atomic clock toy. Comparing the energy spectrum of the accelerated system with the energy spectrum of a identical system in an inertial frame, we determined the influence of instantaneous acceleration of the rate of atomic clocks.

Conteúdo

1	Introdução	14
2	Observadores Uniformemente Acelerados	20
2.1	Algumas Grandezas Físicas Definidas no Espaço-Tempo de Minkowski.	21
2.2	Equações de Movimento para Observadores Uniformemente Acelerados	23
2.3	Observadores Brevemente Acelerados	25
2.4	Sistema de Coordenadas de Rindler	28
2.5	Novo Sistema de Coordenadas Baseado na Família de Observadores de Rindler	32
2.6	Coordenadas Usuais de Rindler e o Novo Sistema de Coordenadas. . . .	37
3	Alguns Métodos de Construção de Sistemas de Coordenadas	39
3.1	Transporte de Fermi-Walker	39
3.2	Coordenadas de Fermi-Walker.	43
3.2.1	Sistema de Coordenadas Local de Um Observador Uniformemente Acelerado.	45
3.2.2	Coordenadas de Fermi para um Observador Movendo-se em Círculo no Espaço de Minkowski.	48
3.3	Coordenadas de Radar.	54
3.3.1	Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador Inercial . . .	59
3.3.2	Coordenadas de Radar Aplicadas a um Observador de Rindler .	60

3.3.3	Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador em Movimento Circular e Uniforme:	61
3.4	Coordenadas de Emissão.	68
3.4.1	Coordenadas de Emissão para Observadores Inerciais no Espaço-Tempo de Minkowski.	70
3.4.2	Coordenadas de Emissão para Observadores de Rindler no Espaço-Tempo de Minkowski.	74
4	Sistemas de Coordenadas Adaptados a Observadores Uniformemente Acelerados.	78
4.1	Equações de Movimento Generalizada para Observadores Uniformemente Acelerados.	79
4.2	Casos Particulares do Sistema de Coordenadas Generalizado.	84
4.2.1	Sistema de Coordenadas de Observadores que Possuem a Mesma Aceleração ($a = 1$).	84
4.2.2	Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$. (Sistema de Coordenadas de Rindler).	85
4.2.3	Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$	87
4.3	Geometria das Hipersuperfícies de Simultaneidade	89
4.4	Observador Estático nas Proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild.	95
5	Efeitos da Aceleração sobre Relógios Atômicos	100
5.1	Relógio Atômico Acelerado	102
5.2	Relação Entre o Ritmo do Relógio Atômico Acelerado e o Relógio Atômico Inercial	108
5.3	Efeito Doppler Relativístico para Observadores Acelerados	111
6	Comentários e Conclusões	114

Capítulo 1

Introdução

Um sistema de coordenadas consiste em um conjunto de regras utilizadas para atribuir coordenadas (temporais e espaciais) a eventos. Neste trabalho estudamos a construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski. Em trabalhos recentes, muito se tem discutido sobre as formas encontradas de rotular eventos no espaço-tempo [1]-[31]. Nossa intenção consiste em apresentar sistematicamente algumas maneiras de construir sistemas de coordenadas e também propor novos métodos.

A Relatividade Especial constitui a teoria indispensável para desenvolvimento deste trabalho e por este motivo iniciamos o capítulo 2 definindo algumas grandezas físicas no espaço-tempo de Minkowski. Em seguida, dedicamos nosso estudo a sistemas de coordenadas associados a observadores uniformemente acelerados e as dificuldades inerentes à construções dos mesmos. É importante ressaltar que nosso estudo está restrito ao espaço-tempo plano (espaço-tempo de Minkowski). Mesmo assim, a tarefa de se construir sistemas de coordenadas adaptados a observadores acelerados não é trivial. Em geral, estas coordenadas são válidas apenas em um domínio restrito do espaço-tempo. Esta limitação está bem ilustrada no clássico exemplo de um observador brevemente acelerado [31, 32].

Um conhecido sistema de coordenadas baseado em referenciais não-inerciais é o sistema de coordenadas de Rindler [2], que é construído utilizando uma família de observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski. Este sistema

sempre atraiu grande atenção devido a suas características de “ simular ” alguns aspectos da geometria de buracos negros [2, 32], como está melhor discutido no capítulo 4.

As regras utilizadas para rotular os eventos no espaço-tempo podem variar de um referencial para outro. Na verdade, usando um único referencial, podemos até mesmo atribuir diferentes coordenadas a um mesmo evento, por meio de diferentes procedimentos. É com este argumento que vamos, ainda no capítulo 2, baseados nos observadores de Rindler, atribuir novas coordenadas aos eventos, que diferem das coordenadas usuais de Rindler em um aspecto específico [20]. Como veremos, a construção das coordenadas de Rindler privilegia um membro da família de observadores, pois a coordenada temporal do evento é atribuída pelo relógio de um único observador. Em contrapartida, iremos seguir um procedimento que deverá tratar todos os membros da família da mesma maneira. As novas coordenadas atribuídas por um referencial não-inercial possuem características bem interessantes. As secções espaciais, isto é, o conjunto de eventos que são rotulados com a mesma coordenada temporal, são curvas. Em outras palavras, a geometria das secções espaciais são não-Euclidianas. Naturalmente, a mudança de referencial não modifica a curvatura do espaço-tempo. O espaço-tempo de Minkowski é plano e esta propriedade geométrica não depende do referencial que escolhemos para descrevê-lo. É importante enfatizar que neste trabalho nós estaremos interessados na geometria das secções espaciais que podem ser não-Euclidianas apesar do espaço-tempo ser plano.

Nos primeiros momentos da Teoria Geral da Relatividade, Einstein discutiu um exemplo envolvendo referenciais não-inerciais (um disco girante) para explicar a conexão entre a aceleração e geometria não-Euclidiana. Esta ideia foi um importante passo para estabelecer a relação entre gravitação e geometria, que constitui o conceito básico da Teoria da Relatividade Geral. O passo complementar é o princípio da equivalência que relaciona aceleração e gravidade. Juntos, eles sugerem que gravitação e geometria podem estar conectados de alguma forma [33]. Neste contexto, o novo sistema de

coordenadas que definimos pode ser utilizado para ilustrar de forma simples a conexão entre referenciais não-inerciais e espaço curvo.

O capítulo 3 foi destinado a uma revisão bibliográfica das formas mais conhecidas de construir sistema de coordenadas. Entre os diferentes procedimentos destacamos:

Coordenadas de Fermi-Walker

De acordo com este procedimento, os rótulos dos eventos ocorridos no espaço-tempo são atribuídos a partir de um sistema de coordenadas co-móvel ao observador, cujos eixos coincidem com a direção de uma tetrad que é carregada ao longo da linha de universo do observador, segundo o transporte de Fermi-Walker [5]-[7].

Coordenadas de Radar

Outro método de construção de sistemas de coordenadas de grande interesse consiste nas Coordenadas de Radar ou Coordenadas de Märzke-Wheeler. Estas coordenadas são construídas por meio de um observador que, percorrendo o espaço-tempo, emite de forma contínua pulsos luminosos [12]-[15]. Os pulsos são recebidos pelo evento a ser registrado e imediatamente emitidos de volta ao observador, que, ao receber novamente seu sinal, atribui, como rótulo temporal, a média aritmética do tempo gasto pelo sinal para ir e voltar, de acordo com seu ponto de vista. Já o rótulo espacial consiste na metade da distância percorrida pelo sinal durante o movimento de ida e volta.

Coordenadas de Emissão

A literatura possui muitos trabalhos sobre o procedimento que produzem as Coordenadas de Emissão ou Coordenadas de GPS [22]-[28]. Estas coordenadas são geradas a partir de quatro observadores que, movendo-se arbitrariamente no espaço-tempo, propagam, através de pulsos luminosos, seus respectivos tempos próprios. Um evento qualquer no espaço-tempo recebe como rótulo os tempos próprios difundidos pelos pulsos luminosos que interceptam-se naquele evento.

No capítulo 4, desenvolvemos uma formulação geral para construir sistemas de coordenadas adaptados a observadores não-inerciais que se movem com aceleração própria “ a ”, que mantêm-se constante ao longo de suas linhas de universo, mas que variam de um observador para outro de acordo com suas distâncias iniciais ρ em relação à origem do referencial inercial. De acordo com nossa generalização, o sistema de coordenadas de Rindler surge como um caso particular, pois é construído a partir de observadores que experimentam aceleração $a = \frac{1}{\rho}$. A razão para escolha desta aceleração está relacionado às propriedades geométricas das secções de simultaneidade deste sistema de coordenadas. No entanto, do ponto de vista físico, é mais sugestivo que aquela dependência ($a = \frac{1}{\rho}$) esteja conectada pelo comportamento de observadores estáticos na geometria de Schwarzschild, nas vizinhanças do horizonte de eventos. Pensando deste modo, se ρ corresponde a distância radial de um observador ao horizonte de eventos, então, a aceleração própria a que o observador deve estar submetido, a fim de permanecer em repouso em sua posição perto do horizonte de eventos é proporcional a $\frac{1}{\rho}$. Portanto, observadores de Rindler e observadores de Schwarzschild estáticos experimentam a mesma aceleração $a(\rho)$. Esta equivalência reforça a ligação entre o sistema de coordenadas de Rindler e o exterior de um buraco negro.

Entretanto, a lei do inverso da distância é válida apenas na região onde ρ é pequeno em comparação com o raio de Schwarzschild do buraco negro. Observadores estáticos suficientemente afastados estão submetidos a acelerações proporcionais a $\frac{1}{\rho^2}$, (isto é, eles obedecem a lei do inverso quadrado da distância da gravitação Newtoniana) e em um domínio intermediário, a dependência de a em termo de ρ é descrita por uma função muito mais complicada.

Podemos dizer que observadores estáticos na geometria de Schwarzschild são acelerados de acordo com a função geral $a(\rho)$ que se reduz a lei do inverso $\frac{1}{\rho}$ apenas nas regiões próximas ao horizonte de eventos. Estas considerações nos levaram a estudar sistemas de coordenadas com campo de aceleração $a(\rho)$ coincidentes com o campo de aceleração dos observadores estáticos no espaço-tempo de Schwarzschild.

Claro que esta discussão não está limitada ao espaço-tempo de Schwarzschild, ela pode ser estendida e englobar todo e qualquer espaço estático. Motivados por esta idéia, nós estudamos sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski que obedecem a lei geral $a(\rho)$. O ingrediente fundamental neste formalismo é a determinação das hipersuperfícies de simultaneidade relativas a referenciais não-inerciais, que são obtidas utilizando o princípio físico da localidade [29, 45].

No capítulo 5, investigamos como a aceleração instantânea pode influenciar o ritmo de um relógio atômico. A Teoria da Relatividade admite que o fluxo do tempo depende do estado de movimento do observador. A comparação entre as medidas de tempo decorrido entre dois eventos, realizadas por observadores inerciais distintos é feita utilizando as equações de transformação de Lorentz. No entanto, os postulados da Teoria da Relatividade não são suficientes para deduzir o ritmo temporal de um relógio acelerado. Esse problema é analisado fazendo uso da suposição adicional conhecida como "hipótese do relógio". De acordo com esta suposição, o ritmo de um relógio não é afetado por sua aceleração instantânea. A hipótese do relógio, admite uma equivalência local entre um observador acelerado e um observador inercial comóvel, de maneira que estes observadores terão instantaneamente a mesma noção de tempo. Este resultado vem sendo confirmado experimentalmente com precisão cada vez maior [43, 44]. Entretanto, a hipótese do relógio conta com a definição de estado físico estabelecido pela mecânica clássica e considerando que a natureza manifesta um caráter quântico, esta hipótese possui limitações conceituais. Deste modo, sugere-se [45, 46, 47] que o ritmo de um relógio acelerado deve ser influenciado pela sua aceleração instantânea. Analisamos esse problema, investigando o comportamento de um relógio atômico acelerado. Para simplificar nosso estudo, o relógio atômico está descrito por um modelo protótipo que consiste de uma partícula massiva livre em uma caixa. Admitimos que o sistema obedece a equação de Klein-Gordon e que as paredes da caixa são arrastadas por observadores de Rindler. Em seguida, resolvendo a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Rindler e utilizando as condições de contorno

adequadas, obtivemos a frequência dos estados estacionários do sistema. Comparando o espectro obtido no sistema de coordenadas acelerado e o espectro de um sistema inercial idêntico, determinamos a relação entre o ritmo do “ tique-taque ” do relógio acelerado e o ritmo do “ tique-taque ” de um relógio atômico inercial. Através desta relação, concluímos que o ritmo de um relógio acelerado é afetado pela sua aceleração instantânea, mais do que isso, podemos identificar os parâmetros físicos pertinentes e portanto, fazer uma estimativa da ordem de magnitude desse efeito.

Capítulo 2

Observadores Uniformemente Acelerados

A Relatividade Especial ou Restrita é compatível com a geometria Minkowskiana. Esta geometria “ une ” o espaço e o tempo em um único conjunto quadridimensional, que passamos a chamar espaço-tempo. De acordo com o Princípio da Relatividade, as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, ou seja, não existe sistema inercial preferencial. No entanto, em muitas situações físicas, precisamos descrever fenômenos em referenciais não-inerciais.

Uma classe particular de referenciais não-inerciais é formada por referenciais contruídos com base em observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo. Esses observadores desenvolvem aceleração própria constante e suas linhas de universo são descritas por hipérboles no diagrama do espaço-tempo de Minkowski. Uma família de observadores acelerados muito conhecida na literatura é constituída pelos observadores de Rindler, que, como estudaremos neste capítulo, apresentam características bem interessantes.

A construção de sistemas de coordenadas baseados em observadores acelerados, mesmo em um espaço-tempo plano, apresenta limitações. Uma delas é que geralmente esses sistemas de coordenadas não cobrem univocamente todo espaço-tempo [31, 32].

Convenientemente, ao longo deste capítulo vamos trabalhar em um sistema de

medidas que a velocidade da luz possui valor unitário ($c = 1$).

2.1 Algumas Grandezas Físicas Definidas no Espaço-Tempo de Minkowski.

Antes de iniciarmos de fato nosso estudo sobre observadores uniformemente acelerados, vamos primeiro definir algumas grandezas físicas referentes ao espaço-tempo de Minkowski. São elas:

4-Vetor Deslocamento:

O 4-vetor deslocamento dx^μ no espaço-tempo pode ser entendido como a separação entre dois eventos infinitesimalmente próximos. Escrito em coordenadas cartesianas, temos:

$$dx^\mu = (dt, dx, dy, dz) \quad (2.1)$$

Seu módulo quadrado corresponde ao intervalo ds^2 , tal que:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.2)$$

onde $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nos fornece as componentes da métrica de Minkowski no referencial inercial.

4-Vetor Velocidade (v^μ):

Matematicamente definimos a 4-velocidade v^μ como sendo a razão do 4-deslocamento dx^μ com o tempo próprio $d\tau$, ou seja, o tempo medido por um observador que acom-

panha o movimento do corpo [32]. Assim, temos:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.3)$$

A 4-velocidade possui módulo unitário, ou seja:

$$|v| = v^\mu v_\mu = -1 \quad (2.4)$$

4-Vetor Aceleração (a^μ):

A 4-aceleração a^μ é definida como a derivada da 4-velocidade v^μ com relação ao tempo próprio τ .

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad (2.5)$$

De sua própria definição a 4-aceleração é perpendicular a 4-velocidade. Matematicamente temos:

$$a^\mu v_\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} \bar{v}_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (v^\mu v_\mu) = 0 \quad (2.6)$$

Relação entre Tempo Próprio(τ) e o Intervalo (ds^2):

Considere agora um observador executando um movimento arbitrário no espaço-tempo, analisado do ponto de vista do referencial inercial K . Dado dois eventos infinitesimalmente próximos ocorridos sobre a linha de universo do observador. Caso adotemos apenas uma dimensão espacial, o intervalo de separação entre esses dois eventos será:

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 \quad (2.7)$$

Considere agora um segundo referencial inercial K' instantaneamente co-móvel a partícula (mesma posição e velocidade), ou seja, um referencial em que a partícula encontra-se instantaneamente em repouso. Neste referencial K' , o intervalo é dado por:

$$ds'^2 = -(dt')^2 \quad (2.8)$$

De acordo com o princípio físico da localidade [29, 45] o tempo próprio $d\tau$, medido pelo observador, é igual a dt' , pois ambos possuem instantaneamente o mesmo estado físico (posição e velocidade) e portanto devem ser considerados equivalentes.

Sendo o intervalo invariante ($ds^2 = ds'^2$), segue que:

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (2.9)$$

Conseqüentemente:

$$d\tau = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.10)$$

Essa equação é também conhecida como “ hipótese do relógio ” . Voltaremos a analisá-la no capítulo 5, onde estudaremos o efeito da aceleração instantânea no ritmo do relógio.

2.2 Equações de Movimento para Observadores Uniformemente Acelerados

Vamos agora admitir um observador arbitrário que percorre o espaço-tempo de Minkowski descrevendo determinada linha de universo que é registrada por um sistema de coordenadas inercial K . Para simplificar, vamos estudar este movimento em (1 + 1)-dimensões, de modo que:

$$x^\mu = (t, x) \quad v^\mu = (v^0, v^1) \quad a^\mu = (a^0, a^1)$$

Dizemos que um observador estará realizando um movimento acelerado caso sua linha de universo não descreva uma reta no sistema K . Suponhamos agora que o observador acima descrito experimente uma aceleração própria¹ uniforme de magnitude

¹Aceleração medida por um referencial inercial instantaneamente co-móvel (mesma posição e momento) ao observador.

“ a ”, tal que:

$$a^\mu a_\mu = -(a^0)^2 + (a^1)^2 = a^2 \quad (2.11)$$

A partir das equações (2.4) e (2.6) temos para este movimento:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -1 \quad (2.12)$$

$$-u^0 a^0 + u^1 a^1 = 0 \quad (2.13)$$

Sendo a equação (2.5) a equação geral para o movimento de um observador com respeito a um sistema inercial K , podemos resolvê-la utilizando as condições (2.11)-(2.13). Admitindo que o observador inicia seu movimento do repouso, partindo da posição $x(0) = a^{-1}$, obtemos as equações paramétricas que descrevem sua linha de universo:

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau) \quad (2.14)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau) \quad (2.15)$$

É fácil verificarmos que a linha de universo deste observador descreve uma hipérbole no diagrama do espaço-tempo já que as soluções acima satisfazem à equação:

$$x^2 - t^2 = a^{-2} \quad (2.16)$$

Através das equações de movimento (2.14) e (2.15) podemos determinar, para um dado instante τ , a velocidade relativa do observador uniformemente acelerado como sendo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \tanh(a\tau) \quad (2.17)$$

No limite de baixas velocidades ($v \ll 1$), temos, $a\tau \ll 1$. Expandindo as eqs. (2.14) e (2.15) até termos de segunda potência em τ , obtemos:

$$t(\tau) = \tau \quad (2.18)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{a} + a\frac{\tau^2}{2} \quad (2.19)$$

As eqs. (2.18) e (2.19) como era de se esperar, correspondem as equações de movimento Newtoniano para um observador uniformemente acelerado.

2.3 Observadores Brevemente Acelerados

O sistema de coordenadas cartesiano pode rotular eventos em todo espaço-tempo de Minkowski sem ambiguidade, pois está construído com base em observadores inerciais. Entretanto, de maneira geral, sistemas de coordenadas adaptados a observadores acelerados apresentam problemas que dificultam a sua construção. O fato é que suas linhas de universo e até mesmo suas linhas de simultaneidade podem se cruzar. Como resultado, não podemos atribuir de maneira unívoca coordenadas a todos os eventos ocorridos no espaço-tempo. Sendo assim, deve-se restringir seu domínio de validade às regiões do espaço-tempo onde não há intersecção entre linhas de universo e entre linhas de simultaneidade [31, 32].

Consideremos dois sistemas de coordenadas inerciais K e K' tal que o referencial K' move-se com velocidade relativa v , paralela e no sentido positivo de um eixo espacial de K e que em $t = 0$ seus relógios sejam coincidentes ($x = x', t = t'$). Tomemos agora um observador que estando em repouso na origem do referencial K , experimenta uma breve aceleração de módulo constante “ a ”, atingindo a velocidade v no instante em que cruza a origem do referencial K' . A partir daí o observador mantém-se em repouso com relação a K' , ou seja, mantém-se com velocidade v em relação ao referencial K (ver fig.2.1).

Vamos admitir que o observador carrega consigo réguas e relógios constituindo as-

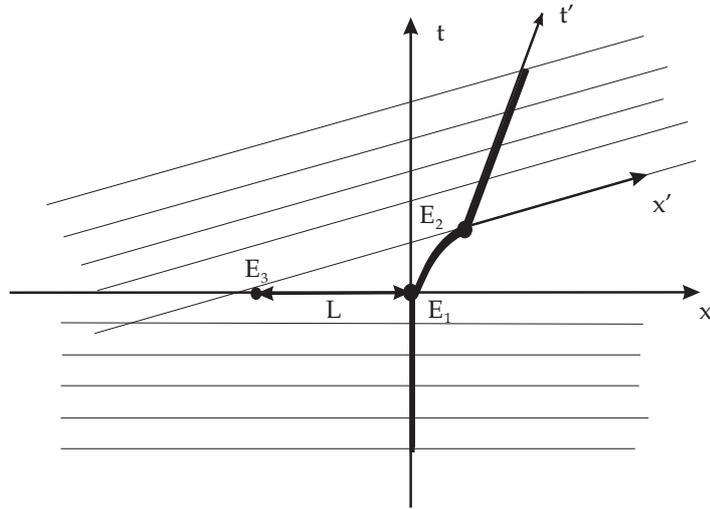


Figura 2.1: Representação geométrica da linha de universo de um observador que estando em repouso com relação ao referencial K, sofre uma breve aceleração e mantém-se em repouso com relação ao referencial K'.

sim, um sistema de coordenadas em sua vizinhança. Utilizando o princípio físico da localidade² [29, 45], ou seja, tomando emprestado a noção de simultaneidade pertencente a um observador inercial co-móvel, o observador brevemente acelerado mapeia o espaço-tempo antes e depois da aceleração, obtendo como linhas de simultaneidade retas paralelas ao eixo x (ver fig.2.1) antes da aceleração e retas paralelas ao eixo x' depois da aceleração. Notemos que sobre o eixo espacial x , (de acordo com a fig.2.1) para distâncias maiores que L , há um encontro de linhas de simultaneidade, resultando em uma ambiguidade, pois eventos ocorridos em regiões afastadas da origem seriam rotulados com duas coordenadas temporais. Devemos então restringir a validade do sistema de coordenadas para regiões próximas à origem [31, 32].

Seja $E_1 = (0, 0)$ o evento que caracteriza o início da aceleração, já o evento E_2 constitui a saída do movimento uniformemente acelerado e $E_3 = (0, L)$ a posição da primeira intersecção entre as linhas de simultaneidade. Pela nossa construção, as coordenadas do evento E_2 , de acordo com as equações (2.14) e (2.15), são dadas por:

$$E_2 = (a^{-1} \sinh a\tau, a^{-1} \cosh a\tau - a^{-1})$$

²De acordo com o princípio da localidade dois observadores que se encontram instantaneamente na mesma posição e velocidade possuem o mesmo estado físico (física não-quântica) e portanto devem ser considerados equivalentes inclusive quanto à determinação do que é simultâneo.

Sendo os sistemas de coordenadas K e K' inerciais, eles devem estar relacionados pelas equações de transformação de Poincarè, que corresponde as equações de transformação de Lorentz (2.20)-(2.23), mas uma translação.

$$t' = \gamma (t - v(\tau) x) \quad (2.20)$$

$$x' = \gamma (x - v(\tau) t) \quad (2.21)$$

$$y' = y \quad (2.22)$$

$$z' = z \quad (2.23)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v(\tau)^2}}$ e $v(\tau)$ corresponde a velocidade do observador no instante τ .

A linha de simultaneidade (ou secção de simultaneidade) correspondente a K' , é constituída pelo conjunto de eventos que recebem a mesma coordenada temporal t' . Vamos considerar o caso particular da linha de simultaneidade em que $t'=0$, que coincide com o eixo espacial x' . Utilizando a equação (2.20), podemos construir a equação que descreve esta linha de simultaneidade. Para isto, devemos observar que a posição inicial do referencial K' coincide com as coordenadas do evento E_2 e por este motivo, devemos levar em consideração a translação da linha de simultaneidade $t'=0$. Essa translação pode ser obtida encontrando o instante (t) que a linha de simultaneidade possui coordenada $x=0$. Para a linha de simultaneidade $t'=0$, encontramos uma translação de $(\frac{1}{a} \tanh(a\tau), 0)$. Assim, obtemos a equação que descreve esta linha de simultaneidade como sendo:

$$t = v(\tau)x + \frac{1}{a} \tanh(a\tau) \quad (2.24)$$

A linha de simultaneidade que passa pelo evento E_2 cruza a linha de simultaneidade $t = 0$, determinando a posição L do evento E_3 que delimita a região de validade do sistema de coordenadas. Tomando $t = 0$ na eq. (2.24) e utilizando a eq. (2.17) para

a velocidade do observador em E_2 , encontramos:

$$L = a^{-1} \quad (2.25)$$

Concluimos que há inconsistência física para rotular, com este sistema de coordenadas, eventos ocorridos em regiões mais afastadas que a^{-1} . Para adquirirmos uma intuição do grau desta restrição, vamos considerar o caso de um observador que experimenta uma aceleração igual ao valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra. Fazendo uma análise dimensional para recuperarmos a unidade de distância, temos:

$$L = \frac{c^2}{a} \cong 9 \times 10^{15} m \quad (2.26)$$

A restrição acima não é muito severa, mas pode tornar-se apreciável à medida que a aceleração aumenta.

2.4 Sistema de Coordenadas de Rindler

A linha de universo de um observador uniformemente acelerado descreve uma hipérbole onde a concavidade depende da intensidade da aceleração [2]. Consideremos agora, uma “ família ” ou conjunto de observadores uniformemente acelerados distribuídos continuamente ao longo de todo o eixo espacial de um referencial inercial K. Definindo “ ρ ” como a posição inicial de um observador ($x(0) = \rho$) em relação a origem de K e “ a ” como a aceleração que este observador experimenta, vamos admitir que estas grandezas estão relacionadas pela equação:

$$a = \frac{1}{\rho} \quad (2.27)$$

Admitindo um contínuo de observadores sobre o eixo espacial, vamos considerar que cada observador da família executa individualmente seu movimento com aceleração que obedece a equação (2.27), construímos dessa forma a família de observadores de

Rindler.

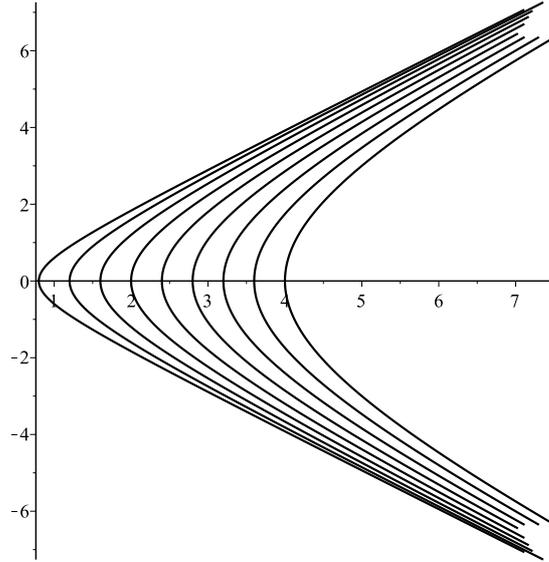


Figura 2.2: Família de observadores de Rindler. Linha de universo de alguns observadores uniformemente acelerados cujas acelerações individualmente diminuem com suas respectivas posições iniciais $(0, \rho)$.

É importante ressaltar que cada observador executa individualmente um movimento uniformemente acelerado, porém cada um está submetido a uma aceleração diferente que depende do inverso de sua posição inicial. Observadores próximos a origem estão fortemente acelerados, com linha de universo descrevendo uma hipérbole de concavidade acentuada (ver fig. 2.2), já observadores que partem de pontos afastados da origem encontram-se suavemente acelerados.

Vamos agora construir as coordenadas de Rindler [1, 2]. Para isso, vamos admitir um observador acelerado particular (que chamaremos de O). Para um dado instante τ existe um sistema inercial K' co-móvel ao observador escolhido O . Como a velocidade do observador está mudando no tempo, para cada instante τ corresponderá um diferente sistema inercial co-móvel K' . Para levarmos isto em conta vamos escrever $K'(\tau)$.

A construção das coordenadas de Rindler está baseada na hipótese da localidade [29, 45]. Sendo assim, a secção espacial Σ_τ relativa ao observador acelerado no instante τ (isto é, o conjunto de eventos que ocorrem simultaneamente de acordo com o

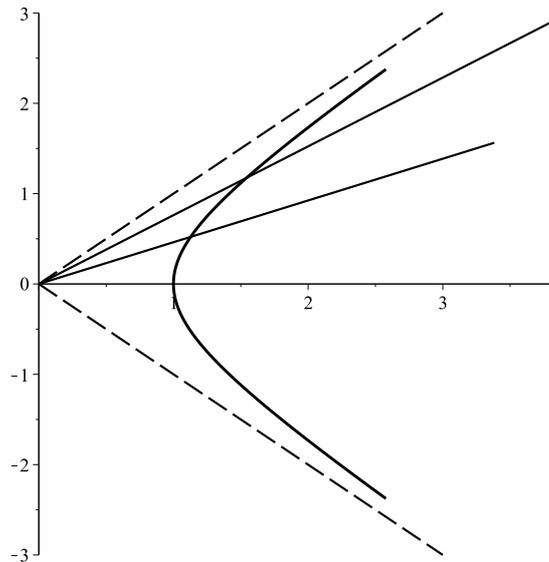


Figura 2.3: A hipérbole representa a linha de universo do observador uniformemente acelerado que parte da posição $\rho = 1$. As linhas retas correspondem a seções de simultaneidade relativas ao observador acelerado para diferentes valores do tempo ($\tau = 0.5$ e 1 respectivamente). Em $\tau = 0$ a seção de simultaneidade coincide com o eixo-x. As linhas tracejadas representam parte do cone de luz.

observador O naquele instante) coincide com o eixo espacial x' do referencial $K'(\tau)$.

A origem de $K'(\tau)$ corresponde a posição do observador acelerado no instante τ , que é dado pelas equações (2.14) e (2.15) (lembrando que neste caso $a = a(\rho)$).

No diagrama do espaço-tempo, Σ_τ corresponde a uma linha reta que cruza a origem de K e tem coeficiente angular que depende da velocidade relativa do observador naquele instante. Como a velocidade do observador está aumentando no tempo, o ângulo da seção espacial Σ_τ com respeito ao eixo x do referencial K também aumenta. Deste modo, concluímos que as seções de simultaneidade relativas ao observador acelerado são linhas retas que convergem para a origem de K e assintoticamente tendem à geratriz do cone de luz à medida que a velocidade do observador torna-se próxima da velocidade da luz (fig.(2.3)).

Vamos agora considerar um evento E qualquer. Este evento está situado sobre alguma seção de simultaneidade Σ_τ . Será o valor τ que iremos considerar como coordenada temporal de Rindler para o evento E. Já a coordenada espacial desse evento, que chamaremos de ξ é definida usando o referencial $K'(\tau)$ mais uma vez. O evento

E está rotulado no referencial $K'(\tau)$ com coordenadas $(t' = 0, x')$. Consideramos x' como a coordenada espacial do novo sistema. Assim, as coordenadas de Rindler para o evento serão $(\tau, \xi = x')$, por construção.

Vamos descobrir a lei de transformação entre as coordenadas de Rindler e as coordenadas (t, x) do referencial K . Sendo os referenciais K e $K'(\tau)$ inerciais, eles devem estar relacionados pelas equações de transformação de Poincarè. Tomamos então, $t' = 0$ e $x' = \xi$ nas eqs. de transformações de Lorentz e sabendo que a posição inicial do referencial $K'(\tau)$ é dado pelas eqs.(2.14) e (2.15), com velocidade relativa definida na eq.(2.17), obtemos as relações entre coordenadas:

$$t = \left(\frac{1}{a} + \xi \right) \sinh(a\tau) \quad (2.28)$$

$$x = \left(\frac{1}{a} + \xi \right) \cosh(a\tau) \quad (2.29)$$

Estas equações de transformação estão bem definidas para $x > |L|$ [2]. No diagrama do espaço tempo, isto corresponde a região do lado direito do cone de luz (ver fig.2.3). Assim, as coordenadas de Rindler cobrem um domínio restrito do espaço-tempo de Minkowski, a exemplo do observador brevemente acelerado. Neste sistema de coordenadas a forma métrica 2-dimensional é dada por:

$$ds^2 = -a^2 (a^{-1} + \xi)^2 d\tau^2 + d\xi^2 \quad (2.30)$$

Estudando as linhas coordenadas associadas a ξ , ou seja, tomando $\xi = \text{const.}$ e fazendo τ variar de $-\infty$ a $+\infty$, obtemos hipérboles que cruzam o eixo espacial ($t = 0$) em $\rho = (a^{-1} + \xi)$. Como vimos as hipérboles correspondem a linhas de universo de observadores uniformemente acelerados. Sendo assim, podemos dizer que para cada valor de ξ (consequentemente para cada valor de ρ) corresponde uma linha de universo de um observador acelerado, o qual denotaremos por O_ρ . O conjunto dos observadores formam uma família, da qual nosso observador escolhido é um mero membro que

se caracteriza por partir da posição $\xi = 0$. Vamos denotá-lo por O_{a-1} . Notemos que também podemos interpretar a coordenada de Rindler ξ como sendo a posição inicial do observador O_ρ que cruza o evento a ser registrado, medida com relação ao observador O_{a-1} . O observador O_{a-1} tem um papel privilegiado no estabelecimento das coordenadas de Rindler. Afinal, as coordenadas (τ, ξ) são definidos em função dele.

Na próxima seção, vamos construir um sistema de coordenadas utilizando a família de observadores de Rindler, mas que se utiliza de um procedimento diferente para atribuir as coordenadas aos eventos.

2.5 Novo Sistema de Coordenadas Baseado na Família de Observadores de Rindler

A construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo pode ser realizada das mais variadas maneiras [1] e, como é bem natural (mesmo para a geometria euclidiana), um mesmo evento pode ser registrado com diferentes coordenadas de acordo com os referenciais e regras utilizadas.

Empregando procedimentos fisicamente corretos, é possível estabelecermos diferentes sistemas de coordenadas a partir de um mesmo referencial. Pensando assim, vamos utilizar a família de observadores de Rindler, discutida na seção anterior, para definir novas coordenadas aos eventos [20]. Nossa abordagem, ao contrário do procedimento anterior, utilizará todos os observadores democraticamente sem privilegiar nenhum membro da família.

Considere um evento E arbitrário no espaço-tempo. Certamente este evento está situado sobre a linha de universo de algum observador de Rindler O_ρ . Como vimos na seção anterior, Rindler considerou como coordenada temporal do evento o tempo próprio τ medido pelo observador O_{a-1} , ou seja, que parte da posição $\frac{1}{a}$.

Nas novas coordenadas, vamos definir como coordenada temporal do evento E o

tempo próprio medido pelo observador cuja linha de universo cruza o evento E, ou seja, a nova coordenada temporal será o tempo próprio τ_ρ medido pelo observador O_ρ . Já como coordenada espacial para o evento, vamos modificar o rótulo ξ (que consiste na posição inicial relativa ao observador $O_{a^{-1}}$), pela coordenada ρ , que refere-se à posição inicial, com relação ao referencial K, do observador de Rindler que cruza o evento E. Assim o evento E será rotulado pelas coordenadas (τ_ρ, ρ) [20]. É importante enfatizar que as novas coordenadas são tão válidas quanto as coordenadas usuais de Rindler, pois sua definição parte de procedimentos fisicamente válidos.

Devemos agora descobrir como as novas coordenadas (τ_ρ, ρ) estão relacionadas com as coordenadas (t, x) . Primeiro, precisamos determinar a razão entre τ e τ_ρ , isto é, a relação entre os ritmos dos relógios dos observadores $O_{a^{-1}}$ e O_ρ . Ao longo da linha de universo de um observador de Rindler, ρ mantém-se constante, logo, utilizando a métrica (2.30) e as novas coordenadas, podemos escrever:

$$d\tau_\rho = a\rho d\tau \quad (2.31)$$

Admitindo que os relógios estão inicialmente sincronizados, então, por integração direta obtemos:

$$\tau_\rho = a\rho\tau \quad (2.32)$$

Para não confundir a notação, vamos denotar τ_ρ por η . Assim, substituindo a eq.(2.32) em (2.28) e (2.29), obtemos a lei de transformação de coordenadas:

$$t = \rho \sinh \frac{\eta}{\rho} \quad (2.33)$$

$$x = \rho \cosh \frac{\eta}{\rho} \quad (2.34)$$

Nestas novas coordenadas a métrica de Minkowski é dada por:

$$ds^2 = -d\eta^2 + 2\frac{\eta}{\rho}d\eta d\rho + \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 \quad (2.35)$$

Analisando a métrica acima, podemos ver que as novas coordenadas não estão definidas em todo espaço-tempo, apenas para regiões onde $\rho > \eta$. Fora do intervalo $0 < \rho < \eta$, há uma mudança de caráter físico da coordenada ρ , isto é, ela torna-se uma coordenada do tipo tempo. A equação $\rho = \eta$ delimita o domínio das novas coordenadas. De acordo com as equações (2.33) e (2.34), $\rho = \eta$ corresponde a equação $t = x(\tanh 1)$ no referencial de Lorentz K (ver fig.2.4).

As secções de simultaneidade Σ_η , isto é, o conjunto de eventos rotulados com a mesma coordenada temporal η , é formado pelo conjunto de pontos onde os relógios dos observadores registram o mesmo tempo próprio. Para conhecermos o comportamento da secção Σ_η basta tomarmos $\eta = const.$ e variarmos ρ de 0 à ∞ nas equações (2.33) e (2.34).

Vamos chamar atenção para o fato de que, como visto na fig.(2.4), as secções espaciais neste novo referencial não são retas.

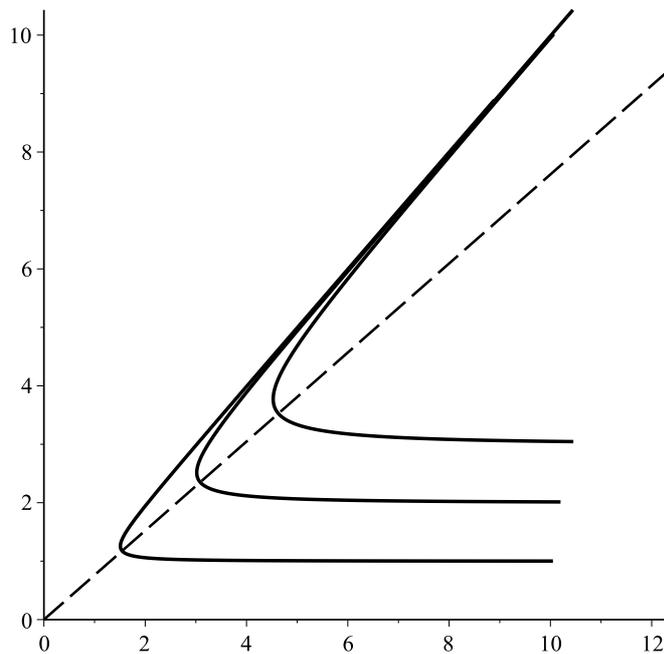


Figura 2.4: Secções de simultaneidade adaptadas ao novo referencial para diferentes valores do tempo ($\eta = 1, 2$ e 3 , respectivamente). As novas coordenadas (η, ρ) são válidas apenas no lado direito da linha tracejada $t = x(\tanh 1)$. Nesta região, as secções de simultaneidade são tipo-espaço.

Podemos enriquecer a discussão introduzindo a segunda dimensão espacial [20]. O espaço-tempo agora é o espaço-tempo de Minkowski com (1+2)-dimensões. O procedimento utilizado para definir as coordenadas é análogo ao procedimento anterior.

Inicialmente, vamos admitir uma família de observadores acelerados que desenvolvem movimento radial com aceleração própria constante. A aceleração depende do inverso de sua posição inicial, justamente como os observadores de Rindler. A diferença agora é que os observadores estão uniformemente distribuídos no plano xOy e experimentam um movimento radial. As linhas de universo dos observadores no referencial de Lorentz K são agora dadas por:

$$t = \rho \sinh \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \quad (2.36)$$

$$x = \rho \cos(\theta) \cosh \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \quad (2.37)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \cosh \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \quad (2.38)$$

onde ρ e θ dão, em coordenadas polares, a posição inicial do observador $(x(0), y(0))$. As linhas de universo dos observadores são hipérbolas no plano especificado por $\theta = const$. A versão bidimensional anterior é um caso particular quando $\theta = 0$.

Considerando a simetria de rotação dos observadores, podemos concluir que as secções de simultaneidade são superfícies de revolução geradas pela rotação das linhas de simultaneidade obtidas anteriormente, (fig.2.4), em torno do eixo-t. Agora, as secções espaciais Σ_η possuem duas dimensões e assim, é possível estudarmos sua estrutura geométrica como uma superfície Rimaniana [38].

No espaço-tempo de Minkowski tridimensional, a métrica nas novas coordenadas é dada por:

$$ds^2 = -d\eta^2 + 2\frac{\eta}{\rho}d\eta d\rho + \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 \cosh^2 \left(\frac{\eta}{\rho} \right) d\theta^2 \quad (2.39)$$

Cada superfície de simultaneidade é caracterizada por um valor específico de η , isto

é, sobre Σ_η a coordenada η mantém-se constante. Assim, a métrica induzida sobre a superfície de simultaneidade Σ_η pode ser obtida de (2.39) tomando $d\eta = 0$:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 \cosh^2\left(\frac{\eta}{\rho}\right) d\theta^2 \quad (2.40)$$

O elemento de linha dl^2 contém todas as informações das propriedades geométricas da secção espacial Σ_η . A superfície Σ_η é do tipo espaço, em outras palavras, ela têm uma métrica definida positiva, para $\rho > \eta$. Os observadores equipados com a métrica (2.40) podem medir comprimentos e ângulos sobre a superfície Σ_η e também determinar se existe curvatura.

Calculando o escalar de curvatura da secção espacial, encontramos:

$$R = -2\eta^3 \frac{\left(\frac{\eta}{\rho} \cosh\left(\frac{\eta}{\rho}\right) - \sinh\left(\frac{\eta}{\rho}\right)\right)}{\rho^5 \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right)^2 \cosh\left(\frac{\eta}{\rho}\right)} \quad (2.41)$$

Podemos observar imediatamente que $R \neq 0$ na região de interesse ($\rho > \eta$). Portanto, as secções espaciais possuem curvatura não-nula. Em outras palavras as secções espaciais relativas ao novo referencial acelerado apresentam uma geometria não-Euclidiana. Não é difícil ver que a curvatura tende a zero para valores de ρ suficientemente grandes. Isto já era esperado pois a aceleração dos observadores tende a zero assintoticamente.

Estudando em detalhes o escalar de curvatura, encontramos que R é positivo³ na região de validade ($\rho > \eta$). Isto significa que Σ_η é uma superfície hiperbólica de acordo com o critério de classificação de superfícies [38].

Há um teorema na geometria diferencial, pertencente a Gauss, que estabelece uma conexão entre curvatura de superfícies e a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico definido sobre a superfície [38]. No caso da geometria Euclidiana, como conhecemos, a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a 180^0 , no caso de uma superfície não-Euclidiana a soma deve ser diferente, podendo ser maior ou

³Convenção do Maple(v.10)

menor que 180^0 dependendo do sinal do escalar de curvatura. Em nosso caso, que trata de superfícies hiperbólicas, a soma é ser menor.

Sendo assim, os observadores de Rindler podem determinar a existência da curvatura das secções espaciais medindo os ângulos internos de um triângulo sobre a superfície de simultaneidade.

2.6 Coordenadas Usuais de Rindler e o Novo Sistema de Coordenadas.

Comparando o novo sistema de coordenadas e as coordenadas de Rindler, podemos notar que a diferença crucial entre eles está no método utilizado para rotular as coordenadas temporais e como os observadores definem a simultaneidade.

Como vimos no referencial de Rindler, secções de simultaneidade são representadas por Σ_τ que coincidem instantaneamente com o eixo espacial do referencial inercial $K'(\tau)$, ou seja, a noção de simultaneidade é construída com base no princípio físico da localidade.

Em contraste, no novo sistema de coordenadas a secção de simultaneidade Σ_η é construída sem ter como base um procedimento físico fundamental. Neste sistema, os eventos são considerados simultâneos quando apresentam a mesma coordenada temporal, sem mais considerações.

Entretanto, a definição do nosso novo sistema de coordenadas não deve ser desprezada, pois está construída por meio de um procedimento legítimo e como mencionamos, é inspirada diretamente pelo método de construção dos sistemas de coordenadas de Lorentz, tratando os observadores da mesma maneira. Além disso, como vimos a superfície Σ_η é curva. Esta característica é consequência dos relógios dos observadores apresentarem ritmos diferentes, uma vez que eles desenvolvem acelerações diferentes. Isto evidencia que a curvatura da secção espacial Σ_η surge de um efeito relativístico. Deste modo, as novas coordenadas fornecem um referencial apropriado para

ilustrar a conexão entre geometria não-Euclidiana das secções espaciais e referenciais não-inerciais, como sugerido por Einstein [33].

Capítulo 3

Alguns Métodos de Construção de Sistemas de Coordenadas

Existem inúmeras maneiras de se rotular os eventos do espaço-tempo. Para o desenvolvimento deste trabalho, torna-se vital realizarmos uma revisão da literatura especializada sobre os principais métodos de construção de sistemas de coordenadas e as características intrínsecas de cada método [1]-[31].

3.1 Transporte de Fermi-Walker

O primeiro método de construção que estudaremos consiste em um referencial construído a partir de um transporte de Fermi-Walker. Para iniciarmos nosso estudo, vamos admitir um observador qualquer descrevendo determinada linha de universo no espaço-tempo de Minkowski registrado pelo referencial inercial K . Vamos denotar por $K'(\tau)$ o referencial que é transportando ao longo da linha de universo do observador.

O transporte de Fermi-Walker oferece uma maneira de construir o referencial $K'(\tau)$ obedecendo a alguns procedimentos físicos que devem regular o posicionamento e a orientação de seus eixos [32]. Cada eixo deverá ser construído a partir de vetores bases $(e_{0'}, e_{1'}, e_{2'}, e_{3'})$ ortonormais em qualquer instante. Juntos estes vetores bases formam o que chamamos de tetrada. Uma tetrada pode ser vista como uma versão infinitesimal

de um sistema de coordenadas que, neste caso, encontra-se em movimento e desloca-se junto ao observador. Estes vetores formam a base para as medidas de $K'(\tau)$, pois a orientação de cada vetor da base coincide com cada um de seus eixos¹.

Estando um observador hipotético inicialmente em repouso na origem do referencial inercial K , ou seja, com linha de universo evoluindo de acordo com a 4-posição $\bar{x}^\mu = (t, 0, 0, 0)$, sua 4-velocidade estará direcionada ao longo do eixo temporal t , pois sua única componente não nula encontra-se neste eixo. Analogamente, para um observador em repouso na origem do referencial $K'(\tau)$, sua 4-velocidade deverá estar direcionada no sentido do eixo temporal $t'(\tau)$, ou seja, no sentido do vetor base $e_{0'}^\mu$. Sendo o módulo da 4-velocidade unitário (eq.(2.4)) e sabendo que a tetrada constitui uma base ortonormal, o vetor base $e_{0'}^\mu$ deve ser idêntico a 4-velocidade:

$$e_{0'}^\mu = u^\mu \quad (3.1)$$

Como os vetores da tetrada estão construídos sobre o sistema de coordenadas inercial $K'(\tau)$, eles devem estar relacionados, em qualquer tempo próprio τ , com os vetores e_μ (vetores da base do referencial K), através das transformações de Lorentz.

$$e_{\mu'}(\tau) = \Lambda^\nu{}_{\mu'}(\tau) e_\nu \quad (3.2)$$

Do mesmo modo, os vetores da base entre dois sucessivos instantes devem também estar relacionados pelas transformações de Lorentz. O fato é que as transformações de Lorentz, (como visto na seção 2.1) além de boosts, também envolvem rotações no espaço. No entanto, o transporte de Fermi-Walker exclui qualquer rotação ordinária entre os três vetores do tipo espaço da base. Devemos ressaltar que a 4-velocidade u^μ mesmo possuindo sempre magnitude unitária, deve modificar sua direção no caso de um movimento acelerado. A aceleração provocará modificações na direção do vetor

¹Devemos ressaltar que o transporte de Fermi-Walker não é o único procedimento possível para transportar uma tetrada ao longo da linha de universo de um observador. Um outro método possível é o transporte de Frenet-Serret, por exemplo [40].

da base do tipo tempo. Desta forma, para que os vetores da tetrada mantenham-se ortonormais é necessário que os vetores espaciais reorganizem suas direções para cada instante τ , provocando uma inevitável rotação.

De acordo com a Física Clássica, a rotação de um vetor pode ser definida em termos do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. Considere na fig.(3.1) o eixo vertical como o eixo de simetria da rotação. Sendo $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+dt)$ as velocidades do observador em dois instantes infinitesimalmente próximos, temos:

$$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v} \quad (3.3)$$

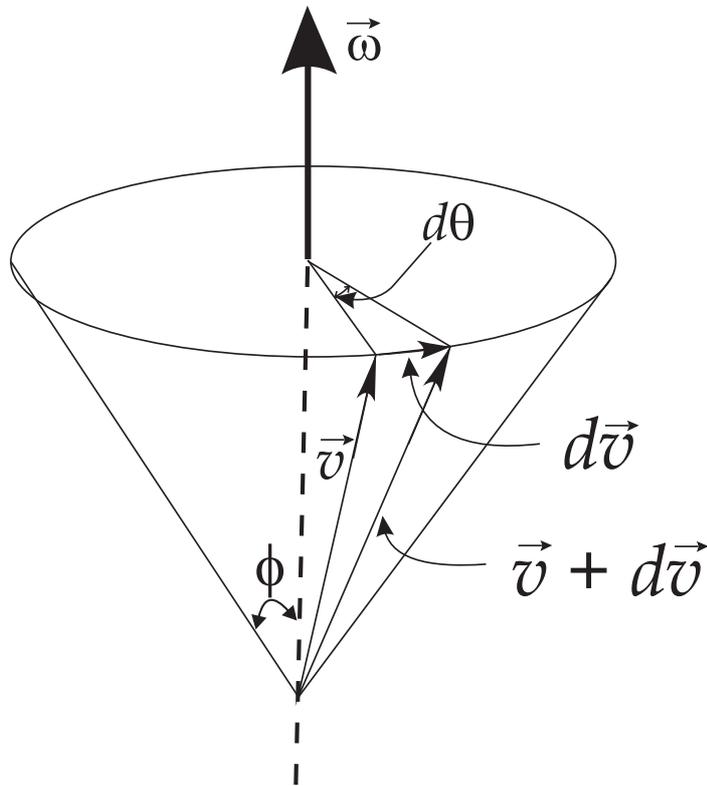


Figura 3.1: Vetor velocidade de módulo constante, girando em torno de um eixo.

Sendo $d\vec{v}$ o vetor variação de velocidade para um determinado intervalo de tempo dt e $dv = |d\vec{v}|$, temos que:

$$dv = v \text{sen}(\phi) d\theta \quad (3.4)$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por dt e definindo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, logo:

$$\frac{dv}{dt} = \omega v \operatorname{sen}\theta \quad (3.5)$$

O vetor aceleração está no plano perpendicular a velocidade angular $\vec{\omega}$ e a velocidade \vec{v} . Sendo assim, a eq.(3.5) corresponde ao módulo do produto vetorial:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (3.6)$$

Em termos das componentes podemos reescrever (3.6) como:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\Omega_{ik}v_k \quad (3.7)$$

onde $\Omega_{jk} = -\Omega_{kj} = \omega_i \epsilon_{ijk}$ ($\epsilon_{ijk} \rightarrow$ pseudo-tensor totalmente anti-simétrico).

Pela nossa construção, Ω_{ik} (tensor anti-simétrico), atua como um operador que rotaciona o vetor velocidade ao longo de um eixo de simetria definido por $\vec{\omega}$.

Para o espaço-tempo quadridimensional definiremos a rotação como:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu}v_\nu \quad (3.8)$$

com $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu}$.

A propriedade de anti-simetria é essencial para garantir que o módulo do vetor não seja afetado pela rotação. De fato, temos:

$$\frac{d}{d\tau}(v_\mu v^\mu) = 2v_\mu \left(\frac{dv^\mu}{d\tau}\right) = -2\Omega^{\mu\nu}v_\mu v_\nu = 0 \quad (3.9)$$

pois $\Omega^{\mu\nu}$ é anti-simétrico e $v_\mu v_\nu$ é simétrico.

O transporte de Fermi-Walker de um vetor v^μ prescreve que, como já mencionado anteriormente, o vetor sofra apenas a rotação necessária para se ajustar à nova direção do vetor e_0 . Para obedecer a esta condição, a matriz de rotação deverá ser formada

pela combinação de u^μ e a^μ , ou seja:

$$\Omega^{\mu\nu} = \alpha(a^\mu u^\nu) + \beta(a^\nu u^\mu) \quad (3.10)$$

com α e β constantes. Sendo $\Omega^{\mu\nu}$ antisimétrico, logo:

$$\alpha = -\beta.$$

De (3.8), fazendo $v^\mu = u^\mu$, temos:

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu}u_\nu = -[\alpha(a^\mu u^\nu) + \beta(a^\nu u^\mu)]u_\nu$$

Assim, devemos ter $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, de modo que:

$$\Omega^{\mu\nu} = (a^\mu u^\nu) - (a^\nu u^\mu) \quad (3.11)$$

Deste modo, seja v^μ um vetor qualquer que obedece à relação:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = (a^\nu u^\mu - a^\mu u^\nu) v_\nu \quad (3.12)$$

o que significa que este vetor sofreu um transporte de Fermi-Walker ao longo da linha de universo do observador cuja 4-velocidade é u^μ [32]. Construimos então, o sistema de coordenadas associado ao observador acelerado, realizando o transporte de Fermi-Walker dos vetores da tetrada $(e_{0'}, e_{1'}, e_{2'}, e_{3'})$ ao longo da linha de universo do observador.

3.2 Coordenadas de Fermi-Walker.

Agora que conhecemos como a tetrada é transportada (de acordo com o transporte de Fermi-Walker) ao longo da linha de universo do observador, podemos definir as coordenadas de Fermi-Walker [6].

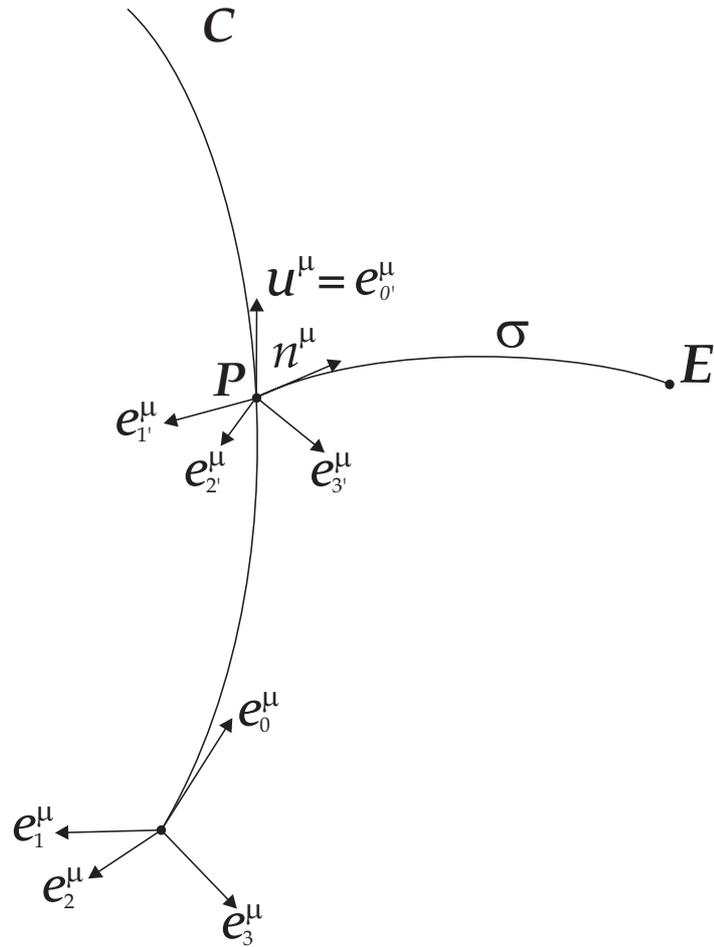


Figura 3.2: Representação geométrica da construção das coordenadas de Fermi-Walker. Um observador que descreve linha de universo C , transporta uma tetrad de acordo com o transporte de Fermi-Walker.

Vamos admitir o observador percorrendo o espaço-tempo quadridimensional examinado pelo sistema de coordenada inercial K . Este referencial atribui a um dado evento E as coordenadas x_E^μ . Por sua vez, o mesmo evento é registrado com as coordenadas de Fermi-Walker F^μ . As coordenadas de Fermi-Walker F^μ são atribuídas a partir de uma geodésica do tipo espaço que parte do evento e cruza a linha de universo do observador, perpendicularmente.

Vamos nomear o evento P sobre a linha de universo do observador como sendo o ponto de interseção com a geodésica tipo espaço (ver fig.(3.2)). A primeira coordenada de Fermi-Walker (F^0) corresponde ao tempo próprio τ medido pelo observador no instante em que ocorre o evento P .

Seja n^μ um vetor unitário na direção da geodésica (consequentemente perpendicular a quadrivelocidade u^μ do observador naquele ponto) e σ^2 o intervalo entre os eventos P e E, consequentemente σn^μ corresponde ao vetor que liga estes dois eventos no espaço-tempo. As coordenadas espaciais (F^i) correspondem, respectivamente, às projeções do vetor σn^μ na direção de cada vetor da tetrad e_i^μ carregada pelo observador.

$$F^i = \sigma n^\alpha e_\alpha^i = g_{\mu\nu} \sigma n^\mu (\tau) \eta^{ij} e_j^\nu (\tau) \quad (3.13)$$

η_{ij} correspondem as componentes espaciais da métrica de Minkowski.

Vamos a seguir realizar algumas aplicações particulares que podem mostrar-se bastante instrutivas.

3.2.1 Sistema de Coordenadas Local de Um Observador Uniformemente Acelerado.

Uma aplicação de interesse consiste em analisar um observador que executa um movimento com aceleração constante, de módulo “ a ” que, como estudamos no capítulo anterior, realiza um movimento hiperbólico [32]. As equações (2.14) e (2.15) correspondem as equações de movimento para o observador uniformemente acelerado no plano do espaço-tempo. Para este caso, observemos o seguinte conjunto de vetores :

$$(e_{0'})^\mu = (\cosh a\tau, \sinh a\tau, 0, 0) \quad (3.14)$$

$$(e_{1'})^\mu = (\sinh a\tau, \cosh a\tau, 0, 0) \quad (3.15)$$

$$(e_{2'})^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (3.16)$$

$$(e_{3'})^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (3.17)$$

Podemos verificar que os vetores acima constituem uma base (tetrad), que obedece a relação (3.12), ou seja, formam uma base de vetores ortonormais, que foi transportada ao longo da linha de universo do observador, por meio do transporte de Fermi-Walker.

Notemos que o vetor base $(e_{0'})^\mu$ definido acima é igual a 4-velocidade do observador.

Agora que conhecemos a tetrada transportada ao longo da linha de universo do observador em movimento uniformemente acelerado, podemos construir as coordenadas de Fermi-Walker para esta aplicação.

Seja E um evento a ser registrado com as coordenadas de Fermi-Walker (F^μ) . As coordenadas que rotulam o evento são construídas a partir de uma geodésica do tipo espaço, que passa pelo evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente no ponto P . Sejam x_E^μ e x_P^μ respectivamente, as coordenadas do evento E e P registrados pelo referencial inercial K . Como trata-se do espaço-tempo de Minkowski, esta geodésica coincide com uma reta que conecta os eventos E e P . Assim, podemos escrever:

$$n^\mu = C (x_E^\mu - x_P^\mu) \quad (3.18)$$

onde C é a constante de normalização, que faz de n^μ um vetor unitário.

A primeira coordenada de Fermi-Walker (F^0) corresponde ao tempo próprio τ medido pelo observador no instante em que ocorre o evento P . Sendo n^μ o vetor unitário na direção da geodésica, o mesmo deverá ser naquele instante, perpendicular a 4-velocidade $u^\mu|_P$. Assim, a coordenada temporal τ será obtida resolvendo a equação:

$$n^\mu u_\mu|_P = g_{\mu\nu} n^\mu e_{0'}^\nu(\tau) = 0 \quad (3.19)$$

O conjunto de vetores unitários n^μ perpendiculares à 4-velocidade $u^\mu|_P$ pertencem a um mesmo plano, em outras palavras, as superfícies de simultaneidade construídas no espaço-tempo de Minkowski, através do procedimento de Fermi-Walker, serão sempre planas.

A partir da eq. (3.19), considerando apenas uma dimensão espacial, admitindo $g_{\mu\nu}$ como os coeficientes da métrica de Minkowski, n^μ dado por (3.18) e $e_{0'}^\nu(\tau)$ dados por (3.14) e (3.15), obtemos:

$$x_E^0 = [\tanh(a\tau)] x_E^1 \quad (3.20)$$

As coordenadas espaciais (F^i) são obtidas a partir da eq. (3.13). Admitimos σ^2 como o intervalo entre os eventos P e E, conseqüentemente σn^μ corresponde ao vetor que liga os dois eventos no espaço-tempo. As coordenadas espaciais, surgem da projeção do vetor σn^μ na direção de cada vetor da tétrada e_i^μ , carregada pelo observador. Considerando o movimento no espaço-tempo (1+1)-dimensões, obtemos:

$$F^1 = C\sigma \left[\frac{x_E^1}{\cosh(a\tau)} - \frac{1}{a} \right] \quad (3.21)$$

No entanto, da condição de normalização:

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1 \quad (3.22)$$

Concluimos que:

$$C\sigma = 1 \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.21) e isolando x_E^1 , obtemos:

$$x_E^1 = \left(\frac{1}{a} + F^1 \right) \cosh(a\tau) \quad (3.24)$$

Agora, substituindo (3.24) em (3.20), encontramos:

$$x_E^0 = \left(\frac{1}{a} + F^1 \right) \sinh(a\tau) \quad (3.25)$$

As equações (3.24) e (3.25) correspondem as equações de transformação entre as coordenadas de Fermi-Walker ($F^0 = \tau, F^1$) e as coordenadas inerciais (x_E^0, x_E^1), atribuídas pelo referencial K .

Como já afirmado anteriormente, a geodésica do tipo espaço que liga os eventos é uma reta, pois, estamos considerando o espaço-tempo plano. Para a situação descrita,

a projeção do vetor σn^μ na direção do vetor da tétrada e_1^μ carregada pelo observador, ou seja, a coordenada de Fermi F^1 coincide com a coordenada espacial ξ atribuída pelos observadores de Rindler.

Desta forma, o procedimento de Fermi-Walker, quando aplicado a um observador de aceleração constante, reproduz as coordenadas usuais de Rindler (2.28) e (2.29).

3.2.2 Coordenadas de Fermi para um Observador Movendo-se em Círculo no Espaço de Minkowski.

Vamos agora admitir um observador com velocidade de magnitude constante no espaço-tempo de Minkowski, descrevendo no plano espacial xOy um círculo de raio constante “ R ”, centrado na origem de um dado sistema de coordenadas K [5, 12].

Analisando apenas o movimento espacial, as equações de movimento para este observador serão:

$$x = R \cos \omega t \tag{3.26}$$

$$y = R \sin \omega t \tag{3.27}$$

$$z = 0 \tag{3.28}$$

onde ω é a velocidade angular. Para este movimento, a velocidade linear v é tal que: $v = \omega R$.

Estando o observador munido de réguas e relógios ideais, ele poderá construir em sua vizinhança um sistema de coordenadas. Para este fim, vamos reexpressar suas equações de movimento em função do tempo próprio τ . De acordo com a eq.(2.10), estando os relógios inicialmente sincronizados, por integração direta, temos que:

$$t = \gamma \tau \tag{3.29}$$

onde $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$.

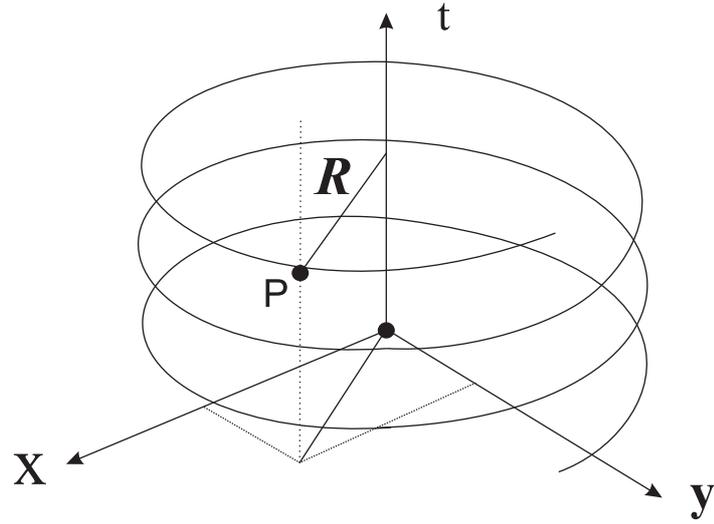


Figura 3.3: Representação geométrica de uma partícula executando movimento circular e uniforme no espaço-tempo de Minkowski.

Vamos considerar que a base do sistema de coordenadas constituído pelo observador acelerado, ou seja, os quadrivetores ortonormais $e_{(\sigma)}^\mu$, que juntos formam a tetrada, são carregados ao longo da sua linha de universo do observador, por meio do transporte de Fermi-Walker.

Calculando a 4-velocidade u^μ e a 4-aceleração a^μ , para este movimento, em função do tempo próprio, encontramos respectivamente:

$$u^\mu = \gamma [1, -R\omega \sin(\omega\gamma\tau), R\omega \cos(\omega\gamma\tau), 0] \quad (3.30)$$

$$a^\mu = -R\gamma^2\omega^2 [0, \cos(\omega\gamma\tau), \sin(\omega\gamma\tau), 0] \quad (3.31)$$

Pelo transporte de Fermi-Walker, em qualquer instante sobre a linha de universo do observador, os vetores da base (tétrada) transportada satisfazem à relação:

$$g_{\mu\nu} e_{(\alpha)}^\mu e_{(\beta)}^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (3.32)$$

Seja P_0 um determinado ponto sobre a linha de universo da partícula (ou observador) caracterizado por $\tau = 0$. De acordo com a eq.(3.1) para a tetrada, neste ponto

P_0 , temos:

$$e_0^\mu(\tau = 0) = \gamma(1, 0, v, 0) \quad (3.33)$$

Determinando o vetor da base do tipo tempo em P_0 , podemos agora com um certo grau de liberdade, definir os vetores da base relativos aos eixos espaciais. Um possível conjunto de vetores que obedecem à relação (3.32) é:

$$e_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (3.34)$$

$$e_2^\mu = (v\gamma, 0, \gamma, 0) \quad (3.35)$$

$$e_3^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (3.36)$$

As equações (3.33)-(3.36) representam as componentes dos vetores da tétrada no ponto P_0 . Consideremos agora, um ponto P arbitrário sobre a linha de universo do observador. Precisamos encontrar a tetrad que foi transportada de P_0 a P , através do transporte de Fermi-Walker, ou seja, uma tetrad que obedeça à relação (3.12). Como sabemos, o vetor $e_{0'}^\mu$ deverá coincidir com a 4-velocidade u^μ . Já os demais vetores da base, podem ser calculados resolvendo a eq.(3.12) e impondo a condição inicial de ortogonalidade. Notemos que os vetores abaixo satisfazem às seguintes condições.

$$e_{0'}^\mu = [\gamma, -\gamma v \sin(\omega\gamma\tau), \gamma v \cos(\omega\gamma\tau), 0] \quad (3.37)$$

$$e_{1'}^\mu = [\gamma v \sin(\gamma^2\omega\tau), -\gamma \cos(\gamma\omega\tau) \cos(\gamma^2\omega\tau) + \gamma \sin(\omega\gamma\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), \quad (3.38)$$

$$\cos(\gamma^2\omega\tau) \sin(\gamma\omega\tau) - \gamma \cos(\gamma\omega\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), 0]$$

$$e_{2'}^\mu = [\gamma v \cos(\gamma^2\omega\tau), -\gamma \cos(\gamma^2\omega\tau) \sin(\gamma\omega\tau) + \cos(\omega\gamma\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), \quad (3.39)$$

$$\gamma \cos(\gamma\omega\tau) \cos(\gamma^2\omega\tau) + \sin(\gamma\omega\tau) \sin(\gamma^2\omega\tau), 0]$$

$$e_{3'}^\mu = [0, 0, 0, 1] \quad (3.40)$$

Verificando que esses vetores satisfazem à eq.(3.12), podemos assegurar que os mesmos foram transportados de P_0 à P , através do transporte de Fermi-Walker.

Agora que conhecemos a tetrada transportada ao longo da linha de universo do observador em movimento circular, podemos definir regras para atribuir coordenadas aos eventos ocorridos no espaço-tempo [1, 5, 12].

Dado um evento E arbitrário, ocorrido no espaço-tempo, as coordenadas de Fermi (F^μ) que rotulam este evento são, como vimos, atribuídas a partir da geodésica do tipo espaço que passa pelo evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente. Chamemos de P este ponto de intersecção. Agora, sejam x_E^μ e x_P^μ , respectivamente as coordenadas do evento E e P registrados pelo referencial inercial K . Como já sabemos, a 4-velocidade u^μ é um 4-vetor tangente à linha de universo do observador. Por sua vez, um vetor unitário n^μ na direção da geodésica que liga os eventos P e E deve ser normal à linha de universo do observador e conseqüentemente perpendicular à sua 4-velocidade, obedecendo à eq.(3.19).

A solução da eq.(3.19) nos revelará o instante τ , em que a 4-velocidade do observador é perpendicular à geodésica que liga os pontos P e E . A primeira coordenada de Fermi (F^0) corresponderá ao tempo próprio τ medido pelo observador, ou seja:

$$F^0 = \tau \quad (3.41)$$

Como já mencionamos, a situação em estudo trata do espaço-tempo de Minkowski, e por isso, a geodésica é uma linha reta que conecta os eventos E e P . Assim, o vetor unitário n^μ pode ser determinado por (3.18).

Desenvolvendo a eq.(3.19) e usando (3.18) e (3.37), encontramos após isolar x_P^0 ; o seguinte resultado:

$$x_P^0 = t = \gamma\tau = x_E^0 + v [(x_E^1 - x_P^1) \sin(\gamma\omega\tau) - (x_E^2 - x_P^2) \cos(\gamma\omega\tau)] \quad (3.42)$$

com $x_P^1 = R \cos(\omega\gamma\tau)$ e $x_P^2 = R \sin(\omega\gamma\tau)$.

Resolvendo a eq.(3.42) para τ , encontramos a coordenada temporal do evento E, no sistema de coordenadas de Fermi-Walker. Acontece que, a resolução exata não é simples. No entanto, para limites de baixas velocidades, podemos estudá-la pelo método das aproximações.

Primeiro notemos que quando ($v \rightarrow 0$), a eq.(3.42) pode ser aproximada a:

$$x_P^0 = x_E^0 = t = \tau \quad (3.43)$$

Ou seja, na aproximação de primeira ordem, a coordenada temporal de Fermi (τ) para o evento E, coincide com o tempo coordenado t do referencial K (ver fig.(3.4)).

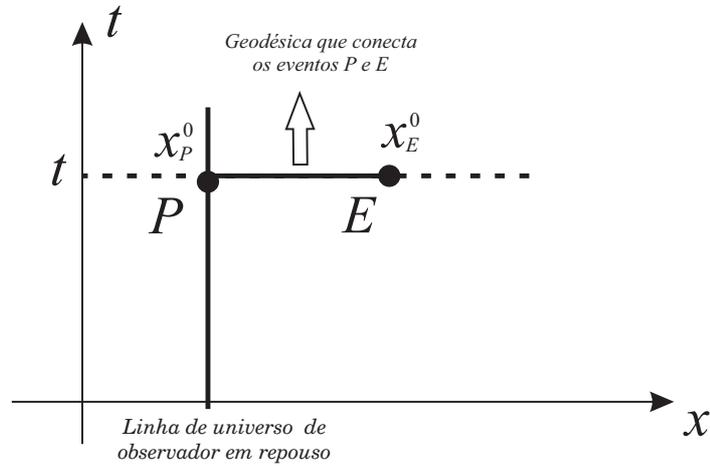


Figura 3.4: Coordenada temporal de Fermi para um observador em repouso no espaço-tempo de Minkowski. A reta vertical representa a linha de universo do observador, já a reta horizontal representa a geodésica que conecta os eventos P e E.

Podemos prosseguir expandindo a eq.(3.42), em série de Taylor, obtendo, como resposta para termos até segunda ordem, a seguinte expressão:

$$F^0 = x_E^0 + [x_E^1 \sin(x_E^0 \omega) - x_E^2 \cos(x_E^0 \omega)] v - \frac{1}{2} x_E^0 v^2 \quad (3.44)$$

A equação acima corresponde a coordenada temporal de Fermi para o evento E.

Resta-nos agora, determinar as coordenadas espaciais ($F^{(i)}$). Sendo σ^2 o intervalo entre os eventos P e E, consequentemente σn^μ corresponde ao vetor que liga os dois

eventos no espaço-tempo. Vamos então, projetar este vetor na direção de cada vetor da tetrada carregada pelo observador. As coordenadas espaciais de Fermi corresponderão respectivamente as projeções encontradas. Assim, temos:

$$F^i = \sigma n^\alpha e_\alpha^i = g_{\mu\nu} \sigma n^\mu (\tau) \eta^{ij} e_j^\nu (\tau) \quad (3.45)$$

Desenvolvendo a eq.(3.45) para o movimento em estudo e substituído τ pelo valor da coordenada temporal de Fermi obtido em (3.44), obtemos:

$$F^1 = x_E^1 - R \cos(x_E^0 \omega) + \frac{1}{4} [x_E^1 - x_E^1 \cos(2x_E^0 \omega) - x_E^2 \sin(2x_E^0 \omega)] v^2 \quad (3.46)$$

$$F^2 = x_E^2 - R \sin(x_E^0 \omega) + \frac{1}{4} [x_E^2 + x_E^2 \cos(2x_E^0 \omega) - x_E^1 \sin(2x_E^0 \omega)] v^2 \quad (3.47)$$

$$F^3 = x_E^3 \quad (3.48)$$

De maneira inversa, podemos expressar as equações de transformação de coordenadas, como:

$$x_E^0 = F^0 + [F^2 \cos(\omega F^0) - F^1 \sin(\omega F^0)] + \frac{1}{2} F^0 v^2 \quad (3.49)$$

$$x_E^1 = F^1 + R \cos(\omega F^0) + \frac{1}{4} [F^1 - F^1 \cos(2\omega F^0) - F^2 \sin(2\omega F^0)] v^2 \quad (3.50)$$

$$x_E^2 = F^2 + R \sin(\omega F^0) + \frac{1}{4} [F^2 - F^2 \cos(2\omega F^0) - F^1 \sin(2\omega F^0)] v^2 \quad (3.51)$$

$$x_E^3 = F^3 \quad (3.52)$$

Estas equações correspondem às coordenadas espaciais de Fermi medidas pelo observador que executa o movimento circular. Neste sistema de coordenadas, a métrica será dada por:

$$ds^2 = -(1 + \lambda)^2 (dF^0)^2 + (dF^1)^2 + (dF^2)^2 + (dF^3)^2 \quad (3.53)$$

onde $\lambda = -\frac{1}{R} [F^1 \cos(\omega F^0) + F^2 \sin(\omega F^0)] v^2$

3.3 Coordenadas de Radar.

Um outro método conhecido para rotular eventos no espaço-tempo consiste nas coordenadas de Märzke-Wheeler, comumente conhecidas como coordenadas de Radar. Este método consiste em uma extensão da convenção de sincronização de Einstein.

De acordo com Einstein, uma forma de sincronização consiste em equipar um dos observadores com um equipamento que emita luz. Por exemplo, o observador A equipado com uma lanterna, que é acionada no instante t em direção ao observador B . Ao receber o feixe luminoso, B acertará seu relógio para o instante $t + \frac{L}{c}$, pois B deverá levar em conta o avanço do relógio de A durante a propagação do sinal.

Para construirmos a coordenadas de Radar [12]-[15], imaginemos um observador arbitrário que percorre o espaço-tempo construindo determinada linha de universo, que denotaremos por $P(\tau)$. Seja E um evento qualquer ocorrido no espaço-tempo. As coordenadas Radar que localizam este evento são atribuídas da seguinte forma: ao longo de toda sua linha de universo, o observador emite pulsos luminosos. O evento E recebe determinado pulso luminoso e instantaneamente o emite de volta em direção ao observador.

Sejam τ_1 e τ_2 os instantes de emissão e recepção dos sinais pelo observador (ver fig.(3.5)), convencionalmente rotulamos como coordenada temporal e distância espacial do evento E respectivamente:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \quad (3.54)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \quad (3.55)$$

Podemos acrescentar mais duas coordenadas angulares que especificam a direção de E com respeito a $P(\bar{\tau})$. O pulso luminoso emitido pelo observador na posição $P(\tau_1)$ delimita a região de eventos que podem ser influenciadas por $P(\tau_1)$. Analogamente o pulso reenviado pelo evento E e que é recebido pelo observador na posição $P(\tau_2)$ delimita o que chamamos de *passado causal* para o evento $P(\tau_2)$. O evento E

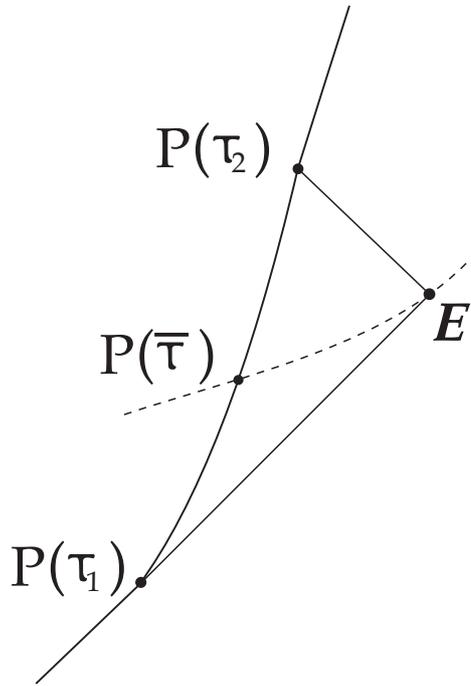


Figura 3.5: Procedimento geral para determinação das coordenadas de Märzke-Wheeler ou coordenadas Radar.

encontra-se no ponto de interseção dos cones que delimitam o passado e o futuro causal de $P(\tau_2)$ e $P(\tau_1)$, respectivamente. De acordo as coordenadas Radar, todos os eventos nesta intersecção recebem a mesma coordenada temporal e portanto, devem ser considerados simultâneos ao evento $P(\bar{\tau})$. Devemos enfatizar que este procedimento torna-se natural se analisado do ponto de vista do observador que emite e recebe o sinal luminoso, pois, como sabemos, a luz apresenta a mesma velocidade independente do referencial, de modo que ele registrará o mesmo intervalo de tempo para a luz ir e retornar, sendo para ele normal considerar a coordenada temporal a média aritmética entre o tempo de emissão e recepção do sinal. Já a coordenada espacial corresponde, do seu ponto de vista, a metade da distância percorrida pela luz para ir ao evento e retornar ao observador.

É de nosso interesse determinar as superfícies de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}}$ geradas a partir deste procedimento. Para que $\Sigma_{\bar{\tau}}$ expresse os eventos que ocorrem simultaneamente, é fundamental que esta superfície seja do tipo espaço².

²Dado dois eventos ocorridos sobre uma superfície do tipo espaço não é possível fisicamente que

Para provarmos que este método garante superfícies de simultaneidade do tipo espaço [30], considere a fig.(3.6). Suponhamos que o observador em estudo emite

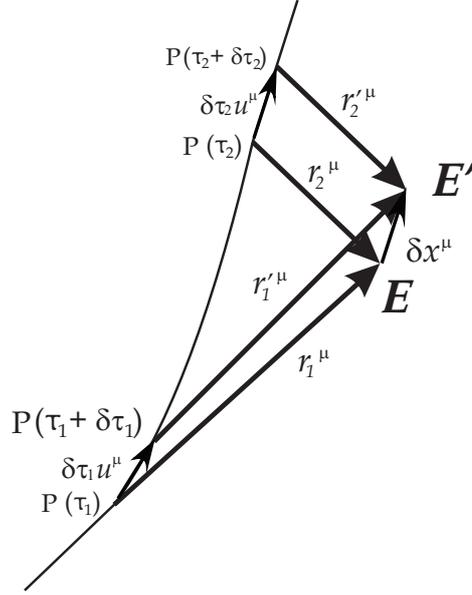


Figura 3.6: Procedimento de Mäzrk-Wheeler. As superfícies de simultaneidade são tipo-espaço.

em intervalos de tempo infinitesimalmente próximos ($P(\tau_1)$ e $P(\tau_1 + \delta\tau_1)$) dois pulsos luminosos que são, respectivamente, recebidos e imediatamente emitidos na posição dos eventos E e E' , retornando ao observador nas posições $P(\tau_2)$ e $P(\tau_2 + \delta\tau_2)$. Os vetores r_1^μ , $r_1'^\mu$, r_2^μ e $r_2'^\mu$ representam deslocamentos do pulso luminoso, conseqüentemente são vetores nulos (ou do tipo luz). Da fig.(3.6) podemos observar que:

$$r_2'^\mu = r_2^\mu + \delta x^\mu - \delta\tau_2 u^\mu$$

Calculando o módulo quadrado para os vetores acima, e desprezando os termos de segunda ordem, temos:

$$|r_2'^\mu|^2 = |r_2^\mu + \delta x^\mu - \delta\tau_2 u^\mu|^2 = 0$$

$$2r_2^\mu (\delta x_\mu - \delta\tau_2 u_\mu) = 0 \tag{3.56}$$

eles mantenham conexão causal.

lembrando que $r^\mu r_\mu = 0$. No entanto, a equação acima pode ser reescrita como:

$$r_2^\nu \delta x_\nu = \delta \tau_2 r_2^\nu u_\nu \quad (3.57)$$

Dividindo (3.57) por δx^μ , obtemos no limite de δ infinitesimalmente pequeno:

$$\frac{\partial \tau_2}{\partial x^\mu} = \frac{r_{2\mu}}{r_2^\mu u_\nu(\tau_2)} \quad (3.58)$$

Analogamente, para $r_1'^\mu$, temos: $r_1'^\mu = r_1^\mu + \delta x^\mu - \delta \tau_1 u^\mu$. Conseqüentemente;

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x^\mu} = \frac{r_{1\mu}}{r_1^\mu u_\nu(\tau_1)} \quad (3.59)$$

Pela nossa construção, $\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^\mu}$ consiste em um vetor normal à superfície de simultaneidade. Da eq.(3.54) podemos escrever:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x^\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{1\mu}}{r_1^\mu u_\nu(\tau_1)} + \frac{r_{2\mu}}{r_2^\mu u_\nu(\tau_2)} \right) \quad (3.60)$$

Portanto:

$$\left| \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x^\mu} \right|^2 = \frac{r_1^\mu r_{2\mu}}{(r_1^\nu u_\nu(\tau_1))(r_2^\nu u_\nu(\tau_2))} \quad (3.61)$$

Observando a fig.(3.6), podemos perceber que o vetor $A^\mu = (r_1^\mu - r_2^\mu)$, ou seja, o vetor que conecta os eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ deve ser do tipo-tempo, já que estes eventos estão conectados causalmente. Deste modo, pela nossa construção:

$$A^\mu A_\mu < 0$$

Sendo r_1^μ e r_2^μ vetores nulos, da equação acima tiramos que:

$$r_1^\mu r_{2\mu} > 0 \quad (3.62)$$

Como sabemos u_ν consiste em um 4-vetor, tal que $u^\mu u_\mu = -1$. Vamos escolher um sistema de coordenadas co-móvel ao observador, no instante τ_1 , de modo que: $u^0 = -1$

e $u^1 = u^2 = u^3 = 0$. Sendo assim, para o espaço-tempo de Minkowski, temos:

$$r_1^{\mu'} u_{\mu'}(\tau_1) = -r_1^{0'} u_{0'} = r_1^{0'}$$

Como o vetor $r_1^{\mu'}$ aponta na direção futura do cone de luz, pela nossa convenção podemos assegurar que $r_1^{0'} > 0$. Sendo o produto interno entre vetores uma quantidade invariante, podemos concluir que:

$$r_1^{\mu} u_{\mu}(\tau_1) > 0 \quad (3.63)$$

em qualquer referencial.

Analogamente, escolhendo um sistema de coordenadas co-móvel ao observador no instante τ_2 , e observando que o vetor $r_2^{\mu'}$ aponta na direção negativa do eixo temporal, podemos assegurar que $r_2^{0'} < 0$, de modo que:

$$r_2^{\mu'} u_{\mu'}(\tau_2) = r_2^{0'} < 0 \quad (3.64)$$

Analisando as eqs.(3.62)-(3.64), podemos facilmente observar que o módulo do vetor normal a uma dada superfície de simultaneidade representado na eq. (3.61) é sempre negativo, ou seja, do tipo tempo. Este critério nos garante que a superfície é do tipo espaço.

A construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski, a partir do método de Fermi-Walker, como vimos, resulta em superfícies (ou hipersuperfícies) de simultaneidades planas (ou hiperplanos), já que a geodésica do tipo espaço utilizada nesse procedimento, para registrar as coordenadas, são retas no espaço-tempo plano.

Entretanto, o sistema de coordenadas de Radar produz superfícies de simultaneidade cuja geometria depende do tipo de movimento do observador. Deste modo, suas superfícies de simultaneidade podem apresentar curvatura, mesmo tratando-se do espaço-tempo plano. É o caso das coordenadas de Radar aplicadas a um observador em movimento circular e uniforme, como veremos a seguir em uma das aplicações.

3.3.1 Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador Inercial

Consideremos outra vez nosso sistema de coordenadas K , que registra o movimento de um observador também inercial no espaço-tempo de Minkowski em (1+1)-dimensões. Este observador carrega consigo uma lanterna e emite continuamente feixes luminosos. Seja $E = (t_E, x_E)$ um evento arbitrário o qual queremos determinar seu rótulo de acordo com as coordenadas de Radar [12, 30].

Sendo v a velocidade do observador, suas coordenadas, vistas pelo referencial K , obedecem à equação:

$$x = vt \quad (3.65)$$

No entanto, como vimos no capítulo 2, podemos escrever as coordenadas x e t em termos do tempo próprio τ . Estando os eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ sobre a linha de universo do observador inercial, as coordenadas $x(\tau)$ e $t(\tau)$ destes eventos serão dadas por:

$$P(\tau_1) = \begin{cases} t_1(\tau_1) = \frac{\tau_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_1(\tau_1) = \frac{v\tau_1}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad P(\tau_2) = \begin{cases} t_2(\tau_2) = \frac{\tau_2}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_2(\tau_2) = \frac{v\tau_2}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases} \quad \text{onde } c=1$$

Os eventos $P(\tau_1)$ e E estão conectados por uma reta de 45° de inclinação, que corresponde a linha de universo do pulso luminoso, conseqüentemente

$$t_E - t_1(\tau_1) = x_E - x_1(\tau_1) \quad (3.66)$$

Analogamente, para os eventos $P(\tau_2)$ e E , temos:

$$t_2(\tau_2) - t_E = -[x_2(\tau_2) - x_E] \quad (3.67)$$

Substituindo as coordenadas dos eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ nas equações acima, obtemos como tempo de emissão e recepção dos pulsos luminosos, respectivamente:

$$\tau_1 = (t_E - x_E) \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.68)$$

$$\tau_2 = (t_E + x_E) \frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.69)$$

De acordo com as eq.(3.54) e (3.55), as coordenadas do evento E serão:

$$\bar{\tau} = \frac{t_E - vx_E}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.70)$$

$$\sigma = \frac{x_E - vt_E}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.71)$$

Notemos que as equações acima coincidem com as equações de transformação de Lorentz (2.20) e (2.21), o que já devíamos esperar, pois, as coordenadas de referenciais inerciais estão relacionadas pelas transformações de Lorentz.

3.3.2 Coordenadas de Radar Aplicadas a um Observador de Rindler

Como já conhecemos, um observador de Rindler é um observador uniformemente acelerado cuja linha de universo descreve o arco de uma hipérbole no diagrama do espaço-tempo de Minkowski, com equações de movimento dadas por (2.14) e (2.15). Vamos trabalhar de maneira semelhante ao realizado com o observador inercial. No sistema K, os eventos $P(\tau_1)$ e $P(\tau_2)$ possuem coordenadas $t(\tau)$ e $x(\tau)$, que, de acordo com (2.14) e (2.15), são:

$$P(\tau_1) = \begin{cases} t_1(\tau_1) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau_1) \\ x_1(\tau_1) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau_1) \end{cases} \quad P(\tau_2) = \begin{cases} t_2(\tau_2) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau_2) \\ x_2(\tau_2) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau_2) \end{cases}$$

As coordenadas dos eventos $P(\tau_1)$ e E devem satisfazer à eq.(3.66). Deste modo, determinamos o tempo próprio no instante de emissão do pulso luminoso que atinge E:

$$\tau_1 = -\frac{1}{a} \ln [(x_E - t_E) a] \quad (3.72)$$

Já os eventos $P(\tau_2)$ e E devem satisfazer à eq.(3.67). Segue que o tempo próprio do instante de recepção do pulso luminoso refletido em E , é:

$$\tau_2 = \frac{1}{a} \ln [(x_E + t_E) a] \quad (3.73)$$

De acordo com as eq.(3.54) e (3.55), as coordenadas do evento E para este observador serão a partir do procedimento de coordenadas de radar:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{x_E + t_E}{x_E - t_E} \right] \quad (3.74)$$

$$\sigma = \frac{1}{2a} \ln [a^2 (x_E^2 - t_E^2)] \quad (3.75)$$

De maneira inversa, temos:

$$t = \frac{1}{a} e^{a\sigma} \sinh(a\bar{\tau}) \quad (3.76)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\sigma} \cosh(a\bar{\tau}) \quad (3.77)$$

As coordenadas de Märzke-Wheeler acima apresentam grandes semelhanças com as coordenadas usuais de Rindler (eqs.(2.28) e (2.29)). Comparando os resultados obtidos, observamos que

$$\bar{\tau} = \tau \quad (3.78)$$

Já a coordenada espacial, obedece a relação:

$$\sigma = \ln(1 + a\xi) \quad (3.79)$$

3.3.3 Coordenadas de Radar Aplicada a um Observador em Movimento Circular e Uniforme:

Para estudarmos um observador que executa um movimento circular e uniforme (M.C.U) no espaço-tempo de Minkowski, necessitamos agora de, no mínimo, (1+2)-

dimensões. Em coordenadas polares, as equações de movimento para este observador, visto pelo referencial padrão $K = K(t, r, \phi)$, serão:

$$t = \gamma\tau \quad (3.80)$$

$$r = R \quad (3.81)$$

$$\phi = \Omega\tau \quad (3.82)$$

com $\gamma = [1 - \omega^2 R^2]^{-1/2}$. Nesta notação ω corresponde a velocidade angular vista pelo referencial K , Ω corresponde a velocidade angular própria e R é o raio da trajetória. Em termos da velocidade angular própria Ω , podemos escrever γ como:

$$\gamma = [1 + \Omega^2 R^2]^{1/2} \quad (3.83)$$

Estamos interessados em atribuir coordenadas de Radar para os eventos [12, 30]. Vamos nos preocupar inicialmente, com os eventos ocorridos sobre a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\tau=0}$. Com este objetivo, vamos determinar todos os eventos que, sobre esta superfície, recebem o mesmo rótulo espacial σ . De acordo com o procedimento descrito (eq.(3.54) e (3.55)), os eventos que obedecem a estas especificações devem fazer parte simultaneamente do cone de luz futuro a $P(\tau = -\sigma)$ e do cone de luz passado a $P(\tau = \sigma)$, ou seja, encontram-se na intersecção dos cones luminosos. Variando o valor σ , construímos a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\tau=0}$.

Em coordenadas cartesianas, as equações de movimento para o observador serão:

$$t = [1 + \Omega^2 R^2]^{1/2} \tau \quad (3.84)$$

$$x^1 = R \cos \Omega\tau \quad (3.85)$$

$$x^2 = R \sin \Omega\tau \quad (3.86)$$

$$x^3 = 0 \quad (3.87)$$

Sejam $S(\sigma)$ as curvas na superfície de simultaneidade $\Sigma_{\tau=0}$ a uma distância σ

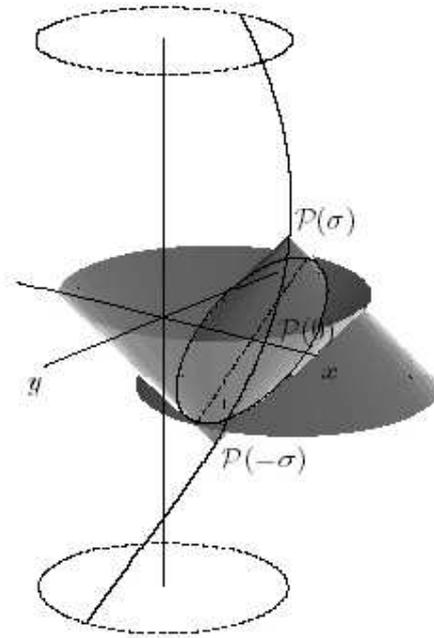


Figura 3.7: Intersecção do cone de luz futuro a $P(\sigma)$ com o cone de luz passado a $P(-\sigma)$ definindo uma elipse

do observador (eq.(3.55)). Estando os eventos $P(-\sigma)$ e E conectados pelo cone de luz ($ds^2 = 0$), conseqüentemente o módulo da separação espacial entre estes eventos deverá coincidir com o módulo da separação temporal, ou seja:

$$|x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| = t_E - t [P(-\sigma)] \equiv \Delta t (-\sigma) \quad (3.88)$$

com $l = 1, 2$ e $|x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| = \left[\sum_{i=1}^3 \{x_E^i - x^i [P(-\sigma)]\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

Analogamente, para os eventos E e $P(\sigma)$, temos:

$$|x_E^l - x^l [P(\sigma)]| = -t_E + t [P(\sigma)] \equiv \Delta t (\sigma) \quad (3.89)$$

Somando (3.88) e (3.89), encontramos:

$$|x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| + |x_E^l - x^l [P(\sigma)]| = t [P(\sigma)] - t [P(-\sigma)] = 2\sqrt{1 + \Omega^2 R^2} \sigma \quad (3.90)$$

A eq.(3.90) nos lembra a equação de uma elipse, pois, a soma das distâncias de

qualquer dos seus pontos aos focos, corresponde a duas vezes o tamanho do semi-eixo maior:

$$\overline{E'P(\sigma)} + \overline{E'P(-\sigma)} = 2A(\sigma) = \text{const.} \quad (3.91)$$

onde E' corresponde à projeção do evento E no plano x^1Ox^2 , sendo $A(\sigma)$ o semi-eixo maior da elipse. A partir desta definição, podemos facilmente observar, que fixado um valor σ , a eq.(3.90) descreve uma elipse, que tem $P(\sigma)$ e $P(-\sigma)$ como seus focos e cujo semi-eixo maior é:

$$A(\sigma) = \sqrt{1 + R^2\Omega^2\sigma} \quad (3.92)$$

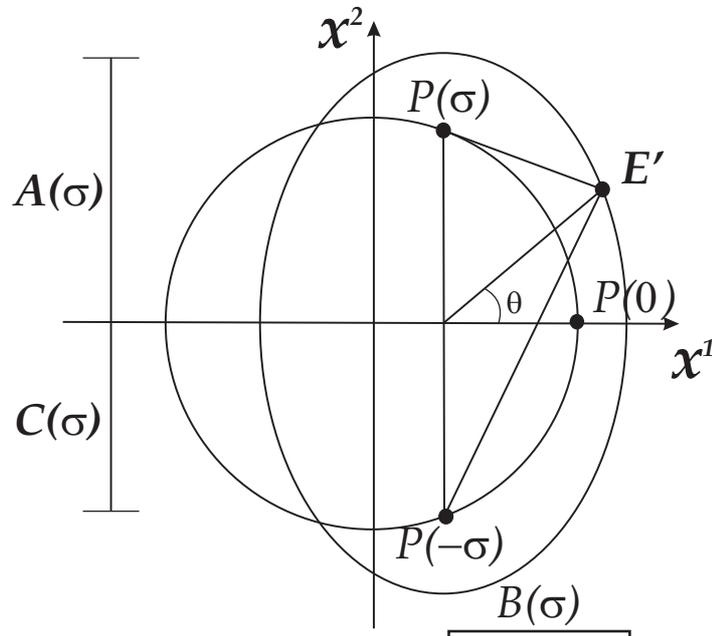


Figura 3.8: A circunferência representa o traço da linha de universo do observador projetado no plano xOy . A elipse é formada pela projeção (no plano x^1Ox^2) da curva $S(\sigma)$, que se encontra na superfície de simultaneidade $\Sigma_{\tau=0}$.

Nossa próxima tarefa consiste em localizar os focos $P(\sigma)$ e $P(-\sigma)$. Como os focos da elipse formada pertencem a linha de universo do observador, podemos determiná-los a partir das equações horárias (3.85) e (3.86). Fazendo $\tau = \sigma$ e $\tau = -\sigma$, obtemos

respectivamente:

$$P(\sigma) \equiv \begin{cases} x^1 = R \cos \Omega \sigma \\ x^2 = R \sin \Omega \sigma \end{cases} \quad (3.93)$$

$$P(-\sigma) \equiv \begin{cases} x^1 = R \cos \Omega \sigma \\ x^2 = -R \sin \Omega \sigma \end{cases} \quad (3.94)$$

A partir das eqs.(3.93) e (3.94), e sabendo que o eixo maior da elipse corta os focos $P(\sigma)$ e $P(-\sigma)$, concluímos que este eixo é paralelo ao eixo espacial x^2 do referencial K . (ver fig.(3.8)).

O centro da elipse é equidistante dos focos e será, então, dada por $(x = R \cos(\Omega\sigma), y = 0)$.

Definimos θ como o ângulo formado entre o eixo horizontal e um segmento de reta traçado do evento E' ao centro da elipse. Assim, podemos parametrizar os pontos da elipse, como:

$$x = B(\sigma) \cos \theta + R \cos \Omega \sigma \quad (3.95)$$

$$y = A(\sigma) \sin \theta \quad (3.96)$$

onde $B(\sigma)$ é o semi-eixo menor.

Definindo $C(\sigma)$ como a metade da distância entre os focos, ou seja, o módulo da distância do centro da elipse a um dos focos, temos:

$$C(\sigma) = R \sin \Omega \sigma \quad (3.97)$$

Da construção da elipse, sabemos que:

$$B(\sigma) = \sqrt{A^2(\sigma) - C^2(\sigma)} = \sqrt{(1 + R^2 \Omega^2) \sigma^2 - R^2 \sin^2 \Omega \sigma} \quad (3.98)$$

Podemos usar σ e θ como as novas coordenadas espaciais, adaptadas ao observador, que identifica os eventos sobre a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$. A coordenada σ

corresponde a distância do ponto ao observador e θ dá a direção. Pensando desta forma, as equações (3.95) e (3.96) podem ser entendidas como a lei de transformação entre as coordenadas espaciais (σ, θ) e as coordenadas (x, y) do sistema inercial K. Resta-nos estudarmos a coordenada temporal.

Isolando t_E nas equações (3.88) e (3.89), encontramos respectivamente que:

$$t_E = t [P(-\sigma)] + \Delta t(-\sigma) \quad (3.99)$$

$$t_E = t [P(\sigma)] - \Delta t(\sigma) \quad (3.100)$$

Calculando a coordenada temporal para os focos $(P(\tau = \sigma))$ e $(P(\tau = -\sigma))$, a partir da equação de movimento (3.84), encontramos:

$$t [P(\sigma)] = -t [P(-\sigma)] = [1 + \Omega^2 R^2]^{1/2} \sigma \quad (3.101)$$

Somando (3.99) e (3.100) e substituindo a primeira igualdade da equação (3.101), obtemos:

$$t_E = \frac{1}{2} [\Delta t(-\sigma) - \Delta t(\sigma)] \quad (3.102)$$

Agora, escrevendo $\Delta t(-\sigma)$ e $\Delta t(\sigma)$ em termos das coordenadas espaciais, como se encontra nas eq.(3.88) e (3.89), podemos escrever:

$$\Delta t(\sigma) = |x_E^l - x^l [P(\sigma)]| \quad (3.103)$$

$$\Delta t(-\sigma) = |x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| \quad (3.104)$$

Substituindo (3.103) e (3.104) em (3.102), encontramos:

$$t_E = \frac{1}{2} |x_E^l - x^l [P(-\sigma)]| - \frac{1}{2} |x_E^l - x^l [P(\sigma)]| \quad (3.105)$$

Desenvolvendo a equação acima e substituindo os respectivos valores das coordenadas espaciais, obtemos:

$$t_E = C(\sigma) \sin \theta \quad (3.106)$$

As equações (3.95), (3.96) e (3.106) são as equações paramétricas da superfície $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$, que pode ser visualizada na fig.(3.9).

Para encontrarmos a transformação de coordenadas completa, isto é, válida para qualquer instante $\bar{\tau}$, podemos aplicar o seguinte raciocínio. Devido a simetria do movimento de rotação, podemos deduzir o comportamento das secções de simultaneidade em um instante arbitrário τ . No instante τ , de acordo com a equação horária, o observador se encontra no ponto $\left[(1 + \Omega^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \tau, R \cos(\Omega\tau), R \sin(\Omega\tau), 0 \right]$. Portanto, com relação à sua posição no instante $\bar{\tau} = 0$, houve uma translação na direção do eixo t da quantidade $(1 + \Omega^2 R^2)^{\frac{1}{2}} \tau$ e uma rotação em torno do eixo z pelo ângulo $\Omega\tau$. Aplicando esta transformação a cada ponto da superfície $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$, encontramos a superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}}$. Segue então, que a completa transformação entre as coordenadas

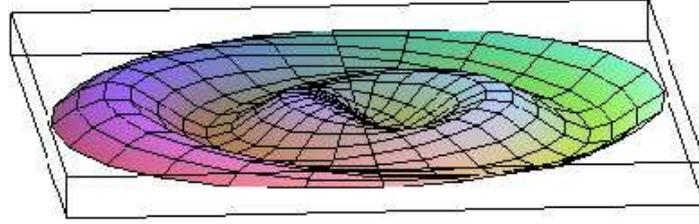


Figura 3.9: Representação geométrica da superfície de simultaneidade $\Sigma_{\bar{\tau}=0}$.

do referencial inercial K e as coordenadas de Radar será:

$$t = C(\sigma) \sin \theta + \sqrt{1 + R^2 \Omega^2} \tau \quad (3.107)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega\tau & -\sin \Omega\tau & 0 \\ \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B(\sigma) \cos \theta + R \cos \Omega\tau \\ A(\sigma) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

3.4 Coordenadas de Emissão.

Um sistema de coordenadas de grande destaque nos últimos anos consiste nas coordenadas de emissão [22]-[28]. Estas coordenadas são construídas a partir de um sistema de posicionamento relativístico, semelhante ao sistema de posicionamento global (GPS³).

O GPS permite a um usuário situado na superfície da Terra ou em suas proximidades, dispor, a qualquer instante, de pelo menos quatro satélites, a partir dos quais pode se localizar com considerável precisão. A localização é feita a partir da distância percorrida pelo sinal eletromagnético, entre o usuário e os satélites, levando-se em conta efeitos relativísticos devido a não sincronização entre os relógios. Conhecendo previamente as coordenadas dos satélites em um sistema de coordenadas apropriado, podemos encontrar as coordenadas do usuário neste mesmo sistema e a localização se reduz a solução de um sistema de equações, como veremos mais adiante.

As coordenadas de emissão, como explicado com detalhes na Ref.[26], no espaço-tempo (1+3)-dimensões, são igualmente construídas a partir de quatro emissores⁴ que se movem com linhas de universo arbitrárias no espaço-tempo, carregando individualmente relógios ideais. Cada emissor envia continuamente sinais luminosos que difundem ao longo das geodésicas nulas o tempo próprio τ_μ do emissor, no instante da emissão. Todos os eventos ocorridos sobre a linha de universo do sinal luminoso devem ser registrados com a mesma coordenada τ_μ .

Como trata-se de quatro emissores que enviam continuamente sinais luminosos, um ponto P do espaço-tempo, deverá ser cortado por quatro geodésicas nulas e conseqüentemente rotulado com quatro números $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, que correspondem respectivamente, aos tempos próprios dos emissores no instante da emissão. Os quatro números $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ correspondem as coordenadas de emissão para o evento P.

No caso do espaço-tempo (1+1)-dimensões, as coordenadas de emissão são cons-

³Global Positioning System

⁴Na prática, os emissores podem ser entendidos como satélites distribuídos ao redor da Terra e o usuário como um indivíduo a ser localizada sobre a superfície da Terra.

truídas utilizando apenas dois emissores, cujas linhas de universo denotaremos por γ_1 e γ_2 . Estes observadores difundem no espaço-tempo, através de sinais luminosos, seus respectivos tempos próprios τ_1 e τ_2 , que são usados como coordenadas para localizar a posição do usuário.

Seja E_1 o instante de emissão da coordenada τ_1 , pelo emissor γ_1 . O emissor γ_2 atribui ao evento E_1 a coordenada $\bar{\tau}_2$ (ver fig.(3.11)). O sinal luminoso emitido pelo observador γ_1 difunde os valores τ_1 e $\bar{\tau}_2$. Analogamente, sendo E_2 o instante de emissão da coordenada τ_2 pelo observador γ_2 , o observador γ_1 atribuirá ao evento E_2 a coordenada $\bar{\tau}_1$. O sinal luminoso emitido pelo observador γ_2 difunde os valores τ_2 e $\bar{\tau}_1$.

Assim, para cada valor de τ_1 temos um respectivo $\bar{\tau}_2$ ($\varphi(\tau_1) = \bar{\tau}_2$) e do mesmo modo, cada valor de τ_2 temos um respectivo $\bar{\tau}_1$ ($\varphi(\tau_2) = \bar{\tau}_1$). Com estas informações, podemos recuperar as equações das trajetórias dos emissores em termos das coordenadas de emissão.

Do mesmo modo como os outros sistemas de coordenadas que apresentamos, as coordenadas de emissão não cobrem todo o espaço-tempo [22, 23]. Como apresentamos acima, as coordenadas de emissão são atribuídas a partir da interseção de geodésicas nulas. Consideremos o caso particular de dois observadores no espaço-tempo plano de (1+1)-dimensões. Analisando a fig.(3.10), podemos verificar que, na região do espaço-tempo entre as linha de universo dos emissores, os eventos podem ser distinguidos pelas coordenadas (τ_1, τ_2) . Entretanto, para as demais regiões, os sinais luminosos percorrem trajetórias que podem coincidir com a trajetória de um outro sinal, havendo ambiguidade na atribuição de coordenadas. Assim, a validade dessas coordenadas está restrita a um domínio local Ω , que corresponde a região entre as linhas de universo dos emissores.

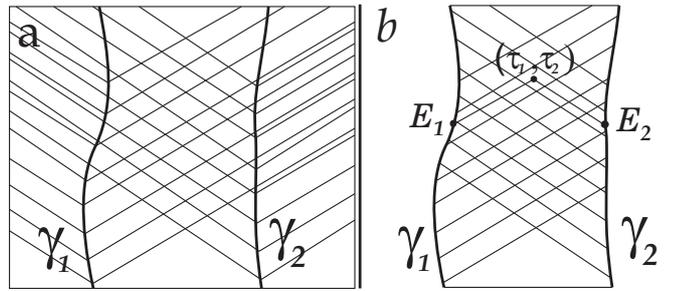


Figura 3.10: (a) Linha de universo dos emissores e dos sinais luminosos que propagam os respectivos tempos próprios. (b) O domínio de validade das coordenadas restringe-se à região entre os observadores.

3.4.1 Coordenadas de Emissão para Observadores Inerciais no Espaço-Tempo de Minkowski.

Uma das situações mais simples para construirmos coordenadas de emissão consiste em trabalharmos com emissores inerciais no espaço-tempo plano [22, 27]. Vamos admitir dois emissores inerciais, de linhas de universo γ_1 e γ_2 , que se movimentam no espaço-tempo de (1+1)-dimensões, com velocidades constantes v_1 e v_2 , respectivamente.

Num determinado ponto $E_1 = (t_1, x_1)$ sobre a linha de universo γ_1 , visto pelo referencial K , o primeiro emissor envia um sinal luminoso, que propaga seu tempo próprio. Este sinal cruza o evento P e o marca com a coordenada τ_1 (ver.fig.(3.11)). Analogamente, no ponto $E_2 = (t_2, x_2)$, sobre a linha de universo γ_2 , o observador inercial emite um sinal luminoso, que propaga seu tempo próprio e cruza o evento P , e o registra com a coordenada τ_2 . Desta maneira, o evento P de coordenadas (t, x) no referencial K é registrado, em coordenadas de emissão, com o rótulo (τ_1, τ_2) .

As linhas de universo dos emissores são descritas no referencial K pelas seguintes equações:

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} t_1 = t \\ x_1 = v_1 t + c_1 \end{cases} \quad (3.109)$$

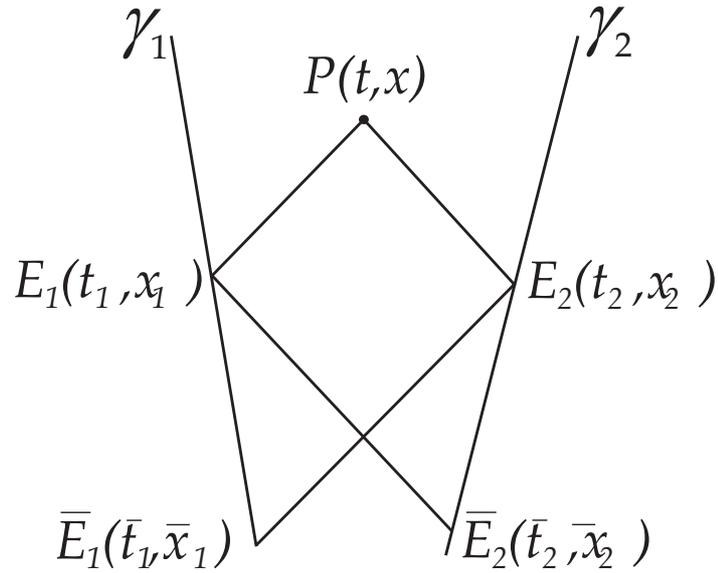


Figura 3.11: Dois observadores inerciais no espaço-tempo plano emitem respectivamente nos pontos E_1 e E_2 sinais luminosos que propagam seus tempos próprios e registram o evento P com coordenadas (τ_1, τ_2) . Os eventos \bar{E}_1 e \bar{E}_2 correspondem aos pontos de emissão dos sinais luminosos que cruzam a linha de universo do observador oposto respectivamente em E_2 e E_1 .

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} t_2 = t \\ x_2 = v_2 t + c_2 \end{cases} \quad (3.110)$$

Nestas coordenadas, c_1 e c_2 são constantes que definem as posições espaciais dos emissores em $t = 0$. Podemos relacionar os tempos próprios dos emissores com o tempo (t), medido pelo referencial inercial K . Através da eq.(2.10), temos:

$$t = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 - (v_1)^2}} \quad (3.111)$$

$$t = \frac{\tau_2}{\sqrt{1 - (v_2)^2}} \quad (3.112)$$

Estamos utilizando a condição de que no instante $t = 0$, os relógios dos observadores registram $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Podemos, então, escrever as equações de movimento (3.109) e

(3.110) dos observadores em termos dos tempos τ_1 e τ_2 :

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} t_1 = \frac{\tau_1}{\sqrt{1-(v_1)^2}} \\ x_1 = \frac{v_1\tau_1}{\sqrt{1-(v_1)^2}} + c_1 \end{cases} \quad (3.113)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} t_2 = \frac{\tau_2}{\sqrt{1-(v_2)^2}} \\ x_2 = \frac{v_2\tau_2}{\sqrt{1-(v_2)^2}} + c_2 \end{cases} \quad (3.114)$$

De acordo com a construção das coordenadas de emissão em (1+1)-dimensões, os eventos $E_1 = (t_1, x_1)$ e $P(t, x)$ estão conectados por uma reta que fisicamente representa a linha de universo do pulso luminoso, e portanto de equação:

$$x - x_1 = t - t_1 \quad (3.115)$$

Substituindo (3.113) na equação acima, obtemos:

$$x - t = -\frac{\tau_1}{\lambda_1} + c_1 \quad (3.116)$$

onde $\lambda_1 = \left[\frac{1+v_1}{1-v_1} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Do mesmo modo, os eventos $E_2 = (t_2, x_2)$ e $P(t, x)$ também devem estar conectados por uma reta, mas agora definida por:

$$x - x_2 = -(t - t_2) \quad (3.117)$$

Substituindo (3.114) na equação acima, obtemos:

$$x + t = \lambda_2\tau_2 + c_2 \quad (3.118)$$

onde $\lambda_2 = \left[\frac{1+v_2}{1-v_2} \right]^{\frac{1}{2}}$.

A partir de (3.116) e (3.118), obtemos a lei de transformação entre as coordenadas

do referencial K e as coordenadas de emissão:

$$x = \frac{1}{2} \left[-\frac{\tau_1}{\lambda_1} + \lambda_2 \tau_2 + c_3 \right] \quad (3.119)$$

$$t = \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_1}{\lambda_1} + \lambda_2 \tau_2 + c_4 \right] \quad (3.120)$$

onde $c_3 = c_1 + c_2$ e $c_4 = c_2 - c_1$.

Neste sistema de coordenadas a métrica bidimensional é dada por:

$$ds^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.121)$$

Podemos também expressar a linha de universo dos emissores γ_1 e γ_2 nas coordenadas de emissão. Este processo é análogo ao utilizado para a determinação da equação de transformação de coordenadas. Sendo $\bar{\tau}_1$ o tempo próprio registrado pelo emissor γ_1 , no instante de emissão do sinal luminoso em $\bar{E}_1(\bar{t}_1, \bar{x}_1)$. O sinal atinge a linha de universo do observador γ_2 no ponto $E_2(t_2, x_2)$, ou seja, no instante τ_2 para este observador. Os eventos \bar{E}_1 e E_2 estão conectados pela reta:

$$x_2 - \bar{x}_1 = t_2 - \bar{t}_1 \quad (3.122)$$

Substituindo as equações de movimento (3.113) e (3.114) para os referidos tempos próprios, obtemos, para a reta acima, a equação:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_2 + \tau_{01} \quad (3.123)$$

onde $\tau_{01} = \lambda_1(c_1 - c_2)$.

Do mesmo modo, sendo $\bar{\tau}_2$ o tempo próprio registrado pelo observador γ_2 no instante de emissão do sinal luminoso em $\bar{E}_2(\bar{t}_2, \bar{x}_2)$. O sinal atinge a linha de universo

do observador γ_1 no ponto $E_1(t_1, x_1)$. Os eventos \bar{E}_2 e E_1 estão conectados pela reta:

$$x_1 - \bar{x}_2 = -(t_1 - \bar{t}_2) \quad (3.124)$$

Conseqüentemente, obtemos:

$$\bar{\tau}_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_1 + \tau_{02} \quad (3.125)$$

onde $\tau_{02} = \frac{1}{\lambda_2} (c_1 - c_2)$.

Assim, as linhas de universo dos observadores são representadas em coordenadas de emissão, por:

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} \tau_1 = \tau_1 \\ \tau_2 = \varphi_1(\tau_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_1 + \tau_{02} \end{cases} \quad (3.126)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} \tau_1 = \varphi_2(\tau_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tau_2 + \tau_{01} \\ \tau_2 = \tau_2 \end{cases} \quad (3.127)$$

3.4.2 Coordenadas de Emissão para Observadores de Rindler no Espaço-Tempo de Minkowski.

Vamos agora construir as coordenadas de emissão, a partir de dois observadores de Rindler [23, 27], que se movimentam no espaço-tempo de (1+1)-dimensões, com linhas de universo γ_1 e γ_2 , que são descritas no referencial K de acordo com a eqs.(2.14) e (2.15), da seguintes forma:

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} t_1 = \rho_1 \sinh\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}\right) \\ x_1 = \rho_1 \cosh\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}\right) \end{cases} \quad (3.128)$$

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} t_2 = \rho_2 \sinh\left(\frac{\tau_2}{\rho_2}\right) \\ x_2 = \rho_2 \cosh\left(\frac{\tau_2}{\rho_2}\right) \end{cases} \quad (3.129)$$

onde τ_1 e τ_2 correspondem as coordenadas de emissão. Já ρ_1 e ρ_2 correspondem às posições iniciais ($t = 0$) dos observadores, que no caso de Rindler, obedecem à

eq.(2.27).

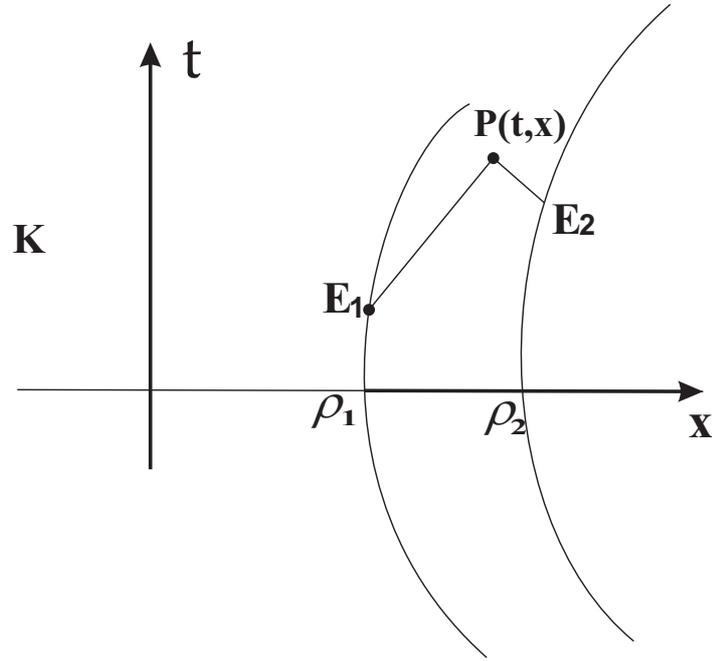


Figura 3.12: Dois observadores de Rindler no espaço-tempo plano, que partem das posições ρ_1 e ρ_2 , emitem respectivamente nos pontos E_1 e E_2 sinais luminosos que propagam seus tempos próprios e registram o evento P com coordenadas (τ_1, τ_2) .

Vamos trabalhar de maneira análoga ao caso inercial, a diferença está apenas nas equações de movimento dos observadores. Considerando E_1 um ponto sobre a linha de universo γ_1 , da qual, é emitido o sinal eletromagnético que registra um evento $P(t, x)$ com a coordenada τ_1 , e E_2 o ponto sobre a linha de universo γ_2 , em que é emitido o sinal eletromagnético que registra um evento $P(t, x)$, com a coordenada τ_2 .

Pela construção das coordenadas de emissão, os eventos $E_1 = (t_1, x_1)$ e $P(t, x)$ estão conectados pela reta:

$$t - t_1 = x - x_1 \quad (3.130)$$

Substituindo x_1 e t_1 de (3.128) obtemos, para a reta acima, a equação:

$$t - x = \rho_1 \left[\sinh \left(\frac{\tau_1}{\rho_1} \right) - \cosh \left(\frac{\tau_1}{\rho_1} \right) \right] \quad (3.131)$$

Do mesmo modo, os eventos $E_2 = (t_2, x_2)$ e $P(t, x)$ também devem estar conectados

por uma reta, mas agora definida por:

$$x - x_2 = -(t - t_2) \quad (3.132)$$

Substituindo x_2 e t_2 de (3.129) na equação acima, obtemos:

$$t + x = \rho_2 \left[\sinh \left(\frac{\tau_2}{\rho_2} \right) - \cosh \left(\frac{\tau_2}{\rho_2} \right) \right] \quad (3.133)$$

As retas definidas em (3.131) e (3.133) exibem a relação entre as coordenadas registradas pelo referencial K e as coordenadas de emissão. Resolvendo essas equações, obtemos:

$$t = \frac{1}{2} \left(-\rho_1 e^{-\frac{\tau_1}{\rho_1}} + \rho_2 e^{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \right) \quad (3.134)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\rho_1 e^{-\frac{\tau_1}{\rho_1}} + \rho_2 e^{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \right) \quad (3.135)$$

As eqs.(3.134) e (3.135) correspondem as equações de transformações, entre as coordenadas cartesianas (t, x) e as coordenadas de emissão (τ_1, τ_2) , para emissores de Rindler.

Neste novo sistema de coordenadas a métrica bidimensional é dada por:

$$ds^2 = -e^{-\frac{\tau_1}{\rho_1}} e^{\frac{\tau_2}{\rho_2}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.136)$$

Vamos agora, expressar a linha de universo dos observadores γ_1 e γ_2 nas coordenadas de emissão τ_1 e τ_2 . De maneira análoga ao caso inercial, o evento $\overline{E}_1(\overline{t}_1, \overline{x}_1)$ (ponto de emissão sobre a linha de universo γ_1 da coordenada $\overline{\tau}_1$) está conectado com o evento $E_2(t_2, x_2)$ através de uma reta. O evento $\overline{E}_2(\overline{t}_2, \overline{x}_2)$ (ponto de emissão sobre a linha de universo γ_2 da coordenada $\overline{\tau}_2$) também está conectado com o evento $E_2(t_2, x_2)$ através de uma reta.

Substituindo nessas retas as equações de movimento (3.128) e (3.129) para os

referidos tempos próprios, obtemos:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tau_2 + \tau'_{01} \quad (3.137)$$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tau_1 + \tau'_{02} \quad (3.138)$$

onde $\tau'_{01} = -\rho_1 \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$ e $\tau'_{02} = \rho_2 \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$.

Capítulo 4

Sistemas de Coordenadas Adaptados a Observadores Uniformemente Acelerados.

O capítulo anterior foi dedicado integralmente ao estudo de sistemas de coordenadas construídos a partir de observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski. O sistema de coordenadas de Rindler, por exemplo, está adaptado a uma família de observadores cuja aceleração própria a de cada observador permanece constante ao longo de sua linha de universo, mas esta aceleração varia de um observador para outro da família, obedecendo a equação $a = \frac{1}{\rho}[2]$, onde ρ corresponde a distância inicial do observador com respeito a origem de um referencial inercial.

Neste capítulo, vamos estudar a construção de sistemas de coordenadas baseados em observadores acelerados cujas acelerações dependem arbitrariamente da posição inicial do observador, isto é, $a = a(\rho)$ [1, 21]. Nesse contexto mais geral, o sistema de coordenadas de Rindler surge como um caso particular. Nossa motivação física encontra-se no fato de que esta generalização pode simular a aceleração sofrida por observadores estáticos tanto nas proximidades de um buraco negro quanto para regiões afastadas [1, 21].

4.1 Equações de Movimento Generalizada para Observadores Uniformemente Acelerados.

No capítulo 2, estudando a linha de universo de um observador uniformemente acelerado (aceleração própria constante “ a ”), determinamos as equações (2.14) e (2.15) como sendo equações que descrevem este tipo de movimento no espaço-tempo bidimensional [32].

Vamos agora, admitir um observador uniformemente acelerado, também no espaço-tempo de Minkowski bidimensional, mapeado pelas coordenadas (t, x) em um referencial inercial K . Este observador está sujeito a uma aceleração própria constante $a(\rho)$, onde ρ corresponde à distância inicial ($x(0) = \rho$) do observador com respeito a origem de um referencial inercial K .

Verificando que o observador inicia seu movimento do repouso, partindo da posição ρ , sua linha de universo, que definiremos aqui como O_ρ , pode ser descrita pelas equações paramétricas¹:

$$t(\tau_\rho) = \frac{1}{a(\rho)} \sinh(a(\rho)\tau_\rho) \quad (4.1)$$

$$x(\tau_\rho) = \frac{1}{a(\rho)} \cosh(a(\rho)\tau_\rho) - \frac{1}{a(\rho)} + \rho \quad (4.2)$$

onde τ_ρ é o tempo próprio medido por este observador.

Note que a linha de universo O_ρ do observador acelerado descreve o arco de uma hipérbole com equação:

$$(x + b(\rho))^2 - t^2 = \frac{1}{a(\rho)} \quad (4.3)$$

onde $\frac{1}{a(\rho)}$ é a distância entre o vértice da hipérbole ao seu centro $b(\rho)$, tal que:

$$b(\rho) = \rho - \frac{1}{a(\rho)} \quad (4.4)$$

¹Ao longo deste capítulo vamos considerar por conveniência $c=1$.

está situado sobre o eixo x .

Vamos agora, considerar uma família de observadores acelerados, com cada membro da família descrevendo seu movimento de acordo com as equações (4.1) e (4.2), onde para cada valor de ρ corresponde um observador diferente. A coordenada ρ pode ser entendida como um parâmetro que identifica cada membro da família. É importante enfatizar que cada observador experimenta uma aceleração uniforme ao longo de sua linha de universo. No entanto, observadores distintos são submetidos a diferentes acelerações de acordo com a regra geral $a(\rho)$ [1, 21].

Queremos agora construir um sistema de coordenadas adaptados a este referencial não-inercial. Como vimos no capítulo anterior, é crucial definirmos a noção de simultaneidade associada ao referencial e para isto, não existe uma única forma estabelecida, mas uma grande variedade de opções pode ser encontrado na literatura. Cada forma possível leva a um diferente tipo de sistema de coordenadas [1]-[31].

Para este sistema de coordenadas vamos utilizar novamente o método do princípio físico da localidade. Como vimos, segundo o princípio da localidade, o observador acelerado e um observador inercial co-móvel, encontram-se instantaneamente na mesma posição e velocidade (mesmo estado físico) são considerados fisicamente equivalentes naquele instante.

Se admitirmos esta hipótese como sendo válida, então, o conjunto de eventos considerados simultâneos para o observador acelerado coincide com o conjunto de eventos considerados simultâneos pelo observador inercial co-móvel.

No espaço-tempo de Minkowski, este conjunto pode ser identificado da seguinte maneira. Considere $K'(\rho, \tau)$ o referencial relativo ao observador inercial co-móvel O_ρ em um certo instante de tempo τ . Pela nossa construção, o observador acelerado deverá ser encontrado em O' , a origem de $K'(\rho, \tau)$, com velocidade nula instantaneamente. Agora, com respeito ao referencial inercial K , definimos R^μ como sendo as componentes do vetor posição de um evento genérico E e R_0^μ o vetor que localiza a origem de $K'(\rho, \tau)$, que corresponde também a posição no espaço-tempo de O_ρ , no instante τ .

Deveremos considerar o evento E simultâneo a O' , no referencial inercial $K'(\rho, \tau)$, se a posição relativa de E (que é dada por $\Delta R^\mu = R^\mu - R_0^\mu$) não tiver componente tipo tempo quando decomposta nas coordenadas da base associadas a K' , uma vez que, neste caso, não haverá separação tipo-tempo entre os eventos E e O' quando vistos a partir do referencial K' [21].

Consideremos que a direção do eixo tipo-tempo do referencial K' coincide com a direção do vetor v^μ (velocidade própria de O_ρ). Então, podemos entender que a condição de simultaneidade é equivalente a condição de ortogonalidade entre a posição relativa e v^μ na métrica de Minkowski.

$$v_\mu (R^\mu - R_0^\mu) = 0 \quad (4.5)$$

No caso bidimensional, a solução da equação acima corresponde exatamente ao eixo x' de K' .

Baseados no princípio da localidade, devemos estar cientes que a validade da equação (4.5) é local, uma vez que v^μ muda no tempo (o observador está acelerado) e no que diz respeito ao espaço (diferentes observadores são submetidos a diferentes acelerações) [1, 21]. Assim, a equação que define os eventos simultâneos relativo aos referenciais acelerados é uma versão infinitesimal da equação (4.5), ou seja:

$$v_\mu dR^\mu = 0 \quad (4.6)$$

Isto significa que a velocidade própria de cada observador deve ser ortogonal a qualquer deslocamento infinitesimal na seção de simultaneidade, dR^μ , em cada ponto da hypersuperfície. Em outras palavras, a velocidade própria é o vetor normal às secções de simultaneidade.

Vamos admitir que as secções de simultaneidade podem ser descritas por uma função φ definida no espaço-tempo de Minkowski. Mais precisamente, vamos admitir que cada equação $\varphi = \text{const.}$ define uma hypersuperfície no espaço-tempo que corresponde a uma secção de simultaneidade adaptada ao observador acelerado. Definindo desta

maneira, o vetor normal à hipersuperfície é proporcional ao gradiente da função φ , ou seja:

$$\frac{1}{|\nabla\varphi|} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = v_\mu \quad (4.7)$$

onde $|\nabla\varphi|$ é o módulo do gradiente na métrica de Minkowski.

Utilizaremos agora as coordenadas ρ e τ para localizar os eventos². Admitindo que temos a função $\varphi(\rho, \tau)$, a equação (4.7) pode ser escrita, utilizando relações envolvendo derivadas parciais como segue:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_\tau d\rho + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_\rho d\tau \quad (4.8)$$

Sobre uma superfície de simultaneidade, $\varphi = \text{const.}$, temos $d\varphi = 0$. Assim, podemos escrever:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_\tau + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_\rho \left(\frac{\partial\tau}{\partial\rho}\right)_\varphi = 0 \quad (4.9)$$

Consequentemente, obtemos:

$$-\left(\frac{\partial\tau}{\partial\rho}\right)_\varphi = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_\tau}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_\rho} = \frac{v_\rho}{v_\tau} \quad (4.10)$$

Por outro lado, usando as equações (4.1) e (4.2) como equações de transformação, v_ρ e v_τ podem ser determinados a partir das componentes da velocidade própria $v_t = -\cosh(a\tau)$ e $v_x = \sinh(a\tau)$. Desse modo, encontramos:

$$v_\tau = \left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)_\rho v_t + \left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)_\rho v_x = -1 \quad (4.11)$$

$$v_\rho = \left(\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)_\tau v_t + \left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)_\tau v_x = -\frac{a'\tau}{a} + \left(\frac{a'}{a^2} + 1\right) \sinh(a\tau) \quad (4.12)$$

onde $a' = \frac{da}{d\rho}$.

²A partir de agora vamos escrever τ no lugar de τ_ρ para tornar mais simples a notação.

Portanto, a equação da hipersuperfície de simultaneidade assume a forma:

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\rho}\right)_{\varphi} = -\frac{a'\tau}{a} + \left(\frac{a'}{a^2} + 1\right) \sinh(a\tau) \quad (4.13)$$

A fim de resolver esta equação é conveniente introduzirmos uma nova coordenada:

$$\eta = a(\rho)\tau \quad (4.14)$$

em termos da qual a equação (4.13) se reduz a:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\right)_{\varphi} = \left(\frac{a'}{a} + a\right) \sinh(\eta) \quad (4.15)$$

Esta equação pode ser diretamente integrada e a solução é:

$$\tau = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1 + f(\varphi) a \exp(\int a d\rho)}{1 - f(\varphi) a \exp(\int a d\rho)} \right) \quad (4.16)$$

onde $f(\varphi)$ é uma função arbitrária de φ . Para cada valor especificado $\varphi = const$, a equação (4.16) nos fornece as coordenadas (τ, ρ) dos eventos simultâneos relativos ao referencial não-inercial [21].

A hipersuperfície de simultaneidade também pode ser descrita pelas equações paramétricas no sistema de coordenadas do referencial inercial K . De fato, usando as equações (4.1), (4.2) e (4.16), encontramos:

$$t = F_{\varphi}(\rho) \equiv \frac{2}{a} \left[\frac{f(\varphi) a \exp(\int a d\rho)}{1 - (f(\varphi) a \exp(\int a d\rho))^2} \right] \quad (4.17)$$

$$x = G_{\varphi}(\rho) \equiv \frac{2}{a} \left[\frac{(f(\varphi) a \exp(\int a d\rho))^2}{1 - (f(\varphi) a \exp(\int a d\rho))^2} \right] + \rho \quad (4.18)$$

Como temos mencionado, a coordenada φ pode ser usada para rotular as hipersuperfície de simultaneidade. Cada valor $\varphi = const$ corresponde a uma hipersuperfície de simultaneidade. Também podemos conectar φ com o tempo próprio que é medido pelo

observador. Escolhendo um certo observador particular para tomar como referência, digamos ρ_0 , então, a partir da equação (4.16), obtemos a seguinte relação:

$$f(\varphi) = \frac{\tanh\left(\frac{a(\rho_0)\tau_0}{2}\right)}{a(\rho_0) \exp\left(\int^{\rho_0} a d\rho\right)} \quad (4.19)$$

Assim, a seção de simultaneidade pode ser rotulada, de forma equivalente, pelo tempo próprio τ_0 do observador ρ_0 .

As equações (4.17) e (4.18) são generalizações e podem ser aplicadas a qualquer função $a(\rho)$. Vamos a seguir, analisarmos alguns casos simples de interesse físico.

4.2 Casos Particulares do Sistema de Coordenadas Generalizado.

4.2.1 Sistema de Coordenadas de Observadores que Possuem a Mesma Aceleração ($a = 1$).

Uma particularidade de nossa generalização é o caso em que $a = 1$. Para este caso todos os observadores sofrem a mesma aceleração, de maneira que suas linhas de universo descrevem no espaço-tempo hipérbolos de mesma concavidade. De acordo com as eqs. (4.1) e (4.2) que descrevem as linhas de universo destes observadores no espaço-tempo de Minkowski, temos:

$$t = \sinh(\tau) \quad (4.20)$$

$$x = \cosh(\tau) - 1 + \rho \quad (4.21)$$

Neste caso, a linha de simultaneidade definida para o primeiro observador, utilizando o princípio da localidade, cruza a linha de universo de um segundo observador que se encontra a uma velocidade maior que o primeiro. Considerando este raciocínio

para um contínuo de observadores desta mesma família, observaremos que suas linhas de simultaneidade inclinam-se cada vez mais (com relação ao eixo espacial), ao nos afastarmos da origem (ver fig.(4.1)).

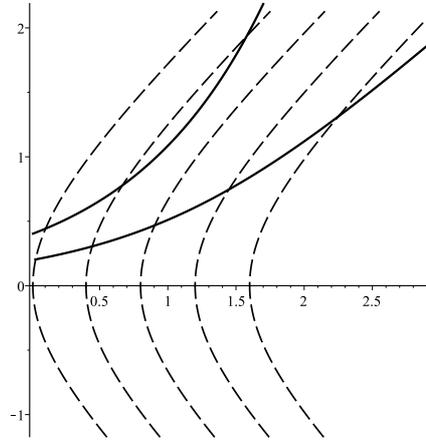


Figura 4.1: Sistema de coordenadas não-inercial associado a uma família de observadores submetidos a mesma aceleração $a=1$. As linhas pontilhadas são hipérbolas que representam as linhas de universo de alguns observadores. As linhas cheias são hipersuperfícies de simultaneidade adaptadas a um referencial não-inercial, correspondentes a diferentes instantes de tempo ($f(\varphi) = 0.1$ e $f(\varphi) = 0.3$, respectivamente.)

Fazendo $a = 1$ em (4.17) e (4.18), obtemos as equações que relacionam as coordenadas atribuídas aos eventos pelo referencial inercial padrão (t,x) e as coordenadas atribuídas por este novo referencial como sendo:

$$t = \frac{2f(\varphi) \exp(\rho)}{1 - (f(\varphi) \exp(\rho))^2} \quad (4.22)$$

$$x = \frac{2(f(\varphi) \exp(\rho))^2}{1 - (f(\varphi) \exp(\rho))^2} + \rho \quad (4.23)$$

4.2.2 Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$. (Sistema de Coordenadas de Rindler).

Este é sem dúvida um caso de grande interesse. Quando a aceleração própria de cada observador cai com o inverso de sua distância inicial à origem $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$, nossa formulação permite recuperar o sistema de coordenadas usuais de Rindler. As

equações de transformação de coordenadas se reduzem a:

$$x = \rho \cosh(\tau) \quad (4.24)$$

$$t = \rho \sinh(\tau) \quad (4.25)$$

onde consideramos a posição inicial do observador de referência como sendo $\rho_0 = 1$ na equação (4.19).

As eqs.(4.24) e (4.25) correspondem exatamente as equações de transformações entre as coordenadas (t, x) e as coordenadas de Rindler (ρ, τ) em (2.28) e (2.29), adaptadas ao observador com aceleração $a = 1$.

É fácil vermos que as linhas de simultaneidade ($\tau = \text{const.}$) são retas e seus coeficientes angulares são numericamente iguais a velocidade instantânea do observador que parte da posição $\rho = 1$.

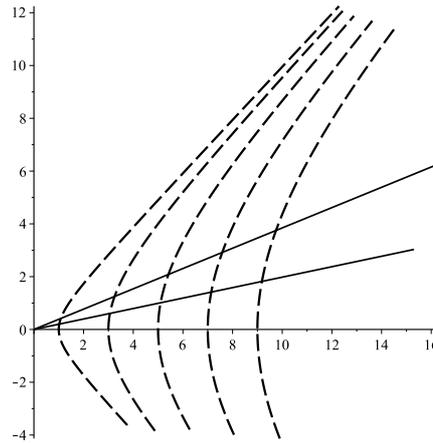


Figura 4.2: Sistema de coordenadas não-inercial associado a família de observadores de Rindler, ou seja, que satisfazem a lei do inverso da distância ($a = \frac{1}{\rho}$). As linhas pontilhadas são hipérbolas que representam as linhas de universo de alguns observadores. As linhas cheias são hipersuperfícies de simultaneidade adaptadas a um referencial não-inercial, correspondentes a diferentes instantes de tempo ($f(\varphi) = 0.1$ e $f(\varphi) = 0.2$, respectivamente.)

É curioso observarmos que neste caso, a linha de simultaneidade definida por um dado observador (com base no princípio físico da localidade), cruza a linha de universo dos demais observadores da família, no exato instante, em que todos possuem a mesma velocidade.

4.2.3 Sistema de Coordenadas de Observadores com Aceleração

$$\text{ção } a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}.$$

No caso em que os observadores sofrem uma aceleração que cai com o quadrado da distância inicial, suas linhas de universo também descrevem hipérbolas no espaço-tempo, no entanto, com concavidades mais acentuadas para observadores mais próximos da origem. As equações que descrevem as linhas de universo destes observadores no espaço-tempo de Minkowski serão:

$$t = \rho^2 \sinh\left(\frac{\tau}{\rho^2}\right) \quad (4.26)$$

$$x = \rho^2 \cosh\left(\frac{\tau}{\rho^2}\right) - \rho^2 + \rho \quad (4.27)$$

Neste caso, a linha de simultaneidade definida para um dado observador acelerado, cruza a linha de universo de um segundo observador a sua direita que se encontra a uma velocidade menor. Considerando este raciocínio para vários observadores desta mesma família, podemos esperar que as linhas de simultaneidade apresentem inclinações cada vez menores com relação ao eixo espacial (ver fig. 4.3).

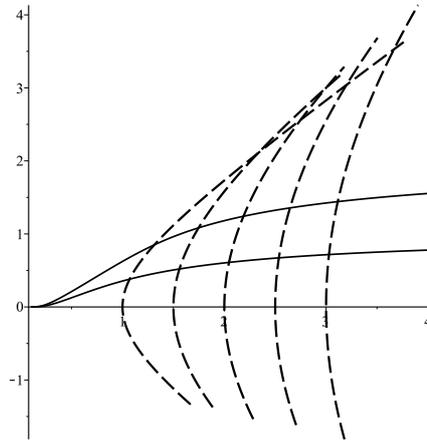


Figura 4.3: Sistema de coordenadas não-inercial associado a família de observadores que obedecem a lei do inverso quadrado ($a = \frac{1}{\rho^2}$). As linhas pontilhadas são hipérbolas que representam as linhas de universo de alguns observadores. As linhas cheias são hipersuperfícies de simultaneidade adaptadas a um referencial não-inercial, correspondentes a diferentes instantes de tempo ($f(\varphi) = 0.5$ e $f(\varphi) = 1$, respectivamente.)

As equações que relacionam as coordenadas atribuídas aos eventos pelo referencial inercial padrão (t,x) e as coordenada atribuídas por este novo referencial são:

$$t = \frac{2\rho^4 f(\varphi) e^{(-\frac{1}{\rho})}}{\rho^4 - \left(f(\varphi) e^{(-\frac{1}{\rho})}\right)^2} \quad (4.28)$$

$$x = \frac{2 \left(f(\varphi) e^{(-\frac{1}{\rho})}\right)^2}{\rho^2 \left(1 - \frac{\left(f(\varphi) e^{(-\frac{1}{\rho})}\right)^2}{\rho^4}\right)} + \rho \quad (4.29)$$

Como discutido no capítulo 2, sistemas de coordenadas associados a observadores acelerados apresentam validade local. Os sistemas de coordenadas aqui descritos não são diferentes. Eles não cobrem todos os eventos do espaço-tempo. Neste caso particular apresentado $\left(a = \frac{1}{\rho^2}\right)$, encontramos observadores cujas linhas de universo se interceptam, provocando ambiguidade na atribuição das coordenadas espaciais dos eventos. Vamos então analisar esta restrição.

Dado um observador que em $\tau = 0$ encontra-se localizado na posição ρ , devemos descobrir a posição ρ' do observador que o intercepta. No ponto de interseção, as linhas de universo devem apresentar as mesmas coordenadas (x, t) :

$$(x + \rho^2 - \rho)^2 - t^2 = \rho^4 \quad (4.30)$$

$$(x + \rho'^2 - \rho')^2 - t^2 = \rho'^4 \quad (4.31)$$

Eliminando t das equações, encontramos três condições:

$$\rho' = \rho, \rho' = -\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \pm \sqrt{-12\rho^2 + 8\rho x + 4\rho + 4x^2 - 12x + 1} \quad (4.32)$$

A primeira condição é trivial. Vamos, assim, nos concentrar nas outras duas. Observe que, se a expressão no interior da raiz quadrada for negativa, não haverá solução real para as equações. Isto significa que os observadores O_ρ e $O_{\rho'}$ não se

cruzam. Sendo assim, a condição:

$$-12\rho^2 + 8\rho x + 4\rho + 4x^2 - 12x + 1 < 0 \quad (4.33)$$

fornece a região do espaço-tempo onde não ocorre interseção entre linhas de universo dos observadores acelerados. Matematicamente ela pode ser expressa por:

$$-\rho + \frac{3}{2} - \sqrt{4\rho^2 - 4\rho + 2} < x < -\rho + \frac{3}{2} + \sqrt{4\rho^2 - 4\rho + 2} \quad (4.34)$$

4.3 Geometria das Hipersuperfícies de Simultaneidade

Uma generalização para (3+1)-dimensões pode ser obtida assim que estabelecermos a simetria da distribuição espacial dos observadores. Isto está diretamente conectado com a interpretação de ρ como uma coordenada espacial. Por exemplo, se a simetria esférica é admitida, então, estamos implicitamente assumindo que os observadores estão realizando um movimento radial e conseqüentemente ρ desempenha o papel de coordenada radial. Segue-se então, que as hipersuperfícies de simultaneidade são descritas pelas equações:

$$t = F_\varphi(\rho) \quad (4.35)$$

$$x = G_\varphi(\rho) \sin \theta \cos \phi \quad (4.36)$$

$$y = G_\varphi(\rho) \sin \theta \sin \phi \quad (4.37)$$

$$z = G_\varphi(\rho) \cos \theta \quad (4.38)$$

Entretanto, no caso de simetria cilíndrica, temos:

$$t = F_\varphi(\rho) \quad (4.39)$$

$$x = G_\varphi(\rho) \cos \phi \quad (4.40)$$

$$y = G_\varphi(\rho) \sin \phi \quad (4.41)$$

$$z = z' \quad (4.42)$$

Enquanto para simetria plana, temos:

$$t = F_\varphi(\rho) \quad (4.43)$$

$$x = G_\varphi(\rho) \quad (4.44)$$

$$y = y' \quad (4.45)$$

$$z = z' \quad (4.46)$$

Agora, uma vez que conhecemos as equações que descrevem as hipersuperfícies de simultaneidade, podemos estudar a geometria induzida nestas hipersuperfícies. Com este propósito, vamos primeiro considerar alguns elementos do formalismo de imersão [21]. Seja $\psi : \Sigma \rightarrow S$ um mapa de imersão de uma hipersuperfície Σ em uma variedade S . Dado um sistema de coordenadas $\{\xi^i\}$ em Σ e $\{x^\alpha\}$ em S , podemos escrever a função de imersão explicitamente como:

$$x^\alpha = \psi^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (4.47)$$

A diferencial $d\psi$, que é injetiva por definição, mapeia vetores do espaço tangente de Σ em vetores do espaço tangente de S . Em particular, podemos escrever os vetores bases como:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^a} = e_a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (4.48)$$

onde

$$e_a^\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \xi^a} \quad (4.49)$$

Se a variedade S está equipada com a métrica $g_{\alpha\beta}$, então, a imersão induz uma métrica h_{ab} na hipersuperfície, que em termos da base de coordenadas é dado por:

$$h_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta} \quad (4.50)$$

O vetor normal da hipersuperfície Σ em relação a S é neste caso, um vetor do tipo tempo v^α . A condição de ortogonalidade com respeito ao vetor tangente $\frac{\partial}{\partial \xi^a}$ como $e_a^\alpha v_\alpha = 0$.

Neste formalismo um conceito importante é o de tensor de projeção $\Pi_{\alpha\beta}$, que mapeia vetores do espaço tangente de S no espaço tangente da hipersuperfície Σ . Em termos de suas componentes podemos definir este tensor como:

$$\Pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta \quad (4.51)$$

É claro que, para qualquer vetor V^α , a projeção $\Pi_\beta^\alpha V^\beta$ pode ser considerada como um vetor do espaço tangente de Σ . Por isso, podemos escrever o tensor de projeção em termos da base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^a} \right\}$. Em particular, a projeção de ∂_α pode ser escrita como $e_\alpha^a \partial_a$, para alguma ‘tétrada’ e_α^a . Assim, temos:

$$\Pi_\alpha^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} = e_\alpha^a \frac{\partial}{\partial \xi^a} \quad (4.52)$$

Considerando esta relação e tomando o produto com vetores da base $\{\partial_\beta\}$, é possível mostrarmos que e_α^a está relacionado com e_a^α de acordo com a seguinte equação:

$$e_\alpha^a = g_{\alpha\beta} h^{ab} e_b^\beta \quad (4.53)$$

A imersão também induz a derivada covariante em Σ . Se ∇ é a derivada covariante

definida em S , compatível com $g_{\alpha\beta}$, então, usando o tensor de projeção, podemos definir a derivada covariante em Σ da seguinte forma:

$$\nabla_{\beta}v^{\alpha} = e_A^{\alpha}e_{\beta}^B\nabla_Bv^A \quad (4.54)$$

onde v^A é algum vetor que pertence ao espaço tangente de Σ (mais precisamente, uma extensão do vetor). Podemos verificarmos que a derivada covariante induzida também é compatível com a métrica induzida h_{ab} [39].

Outro importante conceito no contexto do formalismo de imersão é o de curvatura extrínica K_{ab} . Grosseiramente falando, podemos dizer que ela mede a variação do vetor normal U_{α} ao longo da direção tangente da hipersuperfície Σ . Em termos destas componentes, temos a seguinte definição:

$$K_{ab} = e_a^{\alpha}e_b^{\beta}\nabla_{\beta}U_{\alpha} \quad (4.55)$$

A partir da derivada covariante induzida, o tensor intrínscico de Riemann R_{abcd} da hipersuperfície Σ pode ser naturalmente construído. Da equação (4.54), o tensor R_{abcd} está relacionado com as componentes do tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ definido em S , de acordo com a equação de Gauss [39]:

$$R_{abcd} = e_a^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma}e_d^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + (K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd}) \quad (4.56)$$

Também temos a equação de Codazzi que mede a variação da curvatura intrínseca sobre a hipersuperfície Σ [39]:

$$\nabla_cK_{ab} - \nabla_bK_{ac} = U^{\mu}e_a^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma}R_{\mu\alpha\beta\gamma} \quad (4.57)$$

Para o caso em estudo, o espaço ambiente é o espaço de Minkowski, de maneira

que estas equações se reduzem a:

$$R_{abcd} = K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd} \quad (4.58)$$

$$\nabla_c K_{ab} = \nabla_b K_{ac} \quad (4.59)$$

Agora que fizemos uma rápida revisão sobre os conceitos do formalismo de imersão, vamos voltar nossa atenção a um mapa de imersão particular, a fim de estudar a geometria induzida em Σ . Utilizando as funções de imersão dadas pelo conjunto de equações (4.35)-(4.38), (4.39)-(4.42) e (4.43)-(4.46), e identificando explicitamente as coordenadas intrínsecas a cada mapa de imersão, podemos calcular diretamente e_a^α e K_{ab} .

Primeiro vamos considerar o caso de simetria esférica. Neste caso, as coordenadas intrínsecas da hipersuperfície de simultaneidade são: $\xi^1 = \rho$, $\xi^2 = \theta$, $\xi^3 = \phi$. Neste sistema de coordenadas, a métrica induzida em Σ , de acordo com a equação (4.50), é dada por:

$$dl^2 = \left[\frac{a'}{a^2} - \left(1 + \frac{a'}{a^2} \right) \cosh(\eta) \right]^2 d\rho^2 + G_\varphi^2(\rho) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (4.60)$$

onde $\eta = a\tau$, e τ é dado pela equação (4.16).

Podemos verificar que a curvatura extrínseca é diagonal e suas componentes não nulas são as seguintes:

$$K_{\rho\rho} = \left(\frac{a'}{a} + a \right) \left[\frac{a'}{a} - \left(1 + \frac{a'}{a^2} \right) \cosh(\eta) \right] \sinh(\eta) \quad (4.61)$$

$$K_{\theta\theta} = \left[\frac{1}{a} (\cosh(\eta) - 1) + \rho \right] \sinh(\eta) \quad (4.62)$$

$$K_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) K_{\theta\theta} \quad (4.63)$$

Como é bem conhecido, no espaço tridimensional, o tensor de Riemann tem apenas 6 componentes algebricamente independentes. Em nosso caso, todas as componentes

não nulas de R_{abcd} podem ser determinadas pelo conjunto de componentes:

$$R_{\rho\theta\rho\theta} = -K_{\rho\rho}K_{\theta\theta} \quad (4.64)$$

$$R_{\rho\phi\rho\phi} = -K_{\rho\rho}K_{\theta\theta} \sin^2(\theta) \quad (4.65)$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = -K_{\theta\theta}^2 \sin^2(\theta) \quad (4.66)$$

É interessante notar que a componente $R_{\theta\phi\theta\phi}$ é não nula apenas quando o observador não está acelerado ($a = 0$). Isto significa que a hipersuperfície de simultaneidade adaptada ao observador acelerado são curvas, independentemente da forma da função $a(\rho)$.

Considerando a simetria cilíndrica, a métrica induzida é dada por:

$$dl^2 = \left[\frac{a'}{a^2} - \left(1 + \frac{a'}{a^2} \right) \cosh(\eta) \right]^2 d\rho^2 + G_\varphi^2(\rho) d\phi^2 + dz^2 \quad (4.67)$$

e a curvatura extrínica tem as seguintes componentes não nulas.

$$K_{\rho\rho} = \left(\frac{a'}{a} + a \right) \left[\frac{a'}{a} - \left(1 + \frac{a'}{a^2} \right) \cosh(\eta) \right] \sinh(\eta) \quad (4.68)$$

$$K_{\theta\theta} = \left[\frac{1}{a} (\cosh(\eta) - 1) + \rho \right] \sinh(\eta) \quad (4.69)$$

Neste caso, a única componente não nula do tensor de Riemann é $R_{\rho\theta\rho\theta} = -K_{\rho\rho}K_{\phi\phi}$ e as componentes algebricamente equivalentes. Note que, além do caso de aceleração nula, $R_{\rho\theta\rho\theta}$ é zero para o caso em que a aceleração é $a = \frac{1}{\rho}$. Isto significa que o sistema de coordenadas de Rindler é o único referencial não-inercial cujas hipersuperfícies de simultaneidade não tem curvatura.

Para a simetria plana, temos:

$$dl^2 = \left[\frac{a'}{a^2} - \left(1 + \frac{a'}{a^2} \right) \cosh(\eta) \right]^2 d\rho^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.70)$$

Neste caso as hipersuperfícies não tem curvatura para qualquer função $a(\rho)$.

4.4 Observador Estático nas Proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild.

Intuitivamente esperamos que, com respeito a um observador estático, corpos em queda livre sejam vistos como estando acelerados. Do ponto de vista da mecânica Newtoniana, esta aceleração pode ser interpretada como o efeito do campo gravitacional local [41, 42]. Desta forma, motivados pelo Princípio da Equivalência, vamos estudar observadores acelerados no espaço-tempo de Minkowski com a mesma aceleração própria de observadores estáticos, a fim de simular aspectos do campo gravitacional em seu referencial não-inercial [1, 21]. Isto estabelece uma conexão entre observadores estáticos no espaço curvo e observadores acelerados no espaço-tempo de Minkowski. Vamos analisar essa conexão considerando o caso particular do espaço-tempo de Schwarzschild. Note que esta descrição é válida para todos os espaços-tempos estáticos.

A geometria do espaço-tempo produzida por um Buraco Negro é descrita pela métrica de Schwarzschild, que em coordenadas “ esféricas ” (t, r, θ, ϕ) é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - 2\frac{GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - 2\frac{GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (4.71)$$

onde M é massa do buraco negro e G é a constante de gravitação universal.

Sejam x_P^μ as coordenadas do observador estático no ponto P do espaço-tempo, tal que: $x_P^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Neste sistema de coordenadas, observadores estáticos possuem linhas de universo caracterizadas por coordenadas espaciais que não mudam, ou seja:

$$t = t(\tau) \quad r = \text{const.} \quad \theta = \text{const.} \quad \phi = \text{const.}$$

Fazendo r , θ e ϕ constantes em (4.71) e substituindo (2.9), obtemos:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left[1 - 2\frac{GM}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.72)$$

Seja u_P^μ a 4-velocidade do corpo estático, então:

$$u_P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0 \right) = \left(\left[1 - 2\frac{GM}{r} \right]^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0 \right) \quad (4.73)$$

No espaço-tempo curvo, um observador estático não segue geodésicas. Sua aceleração se opõe a ‘atração gravitacional’ a fim de manter sua posição espacial inalterada.

A quadri-aceleração a_P^μ que o corpo experimenta com relação ao referencial em queda livre pode ser calculada por meio da derivada covariante:

$$a_P^\mu = u^\nu (\nabla_\nu u^\mu) = u_P^\nu \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu u^\alpha \right) \quad (4.74)$$

onde $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} (g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\nu,\beta})$ ³.

Analisando cada componente da quadri-aceleração separadamente, obtemos:

$$a_P^\mu = \left(0, \frac{GM}{r^2}, 0, 0 \right) \quad (4.75)$$

Portanto, calculando o módulo da quadri-aceleração a , verificamos que a aceleração do observador estático depende de sua posição com relação ao buraco negro de acordo com a equação:

$$a = \left(1 - 2\frac{GM}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{GM}{r^2} \quad (4.76)$$

A equação acima fornece uma relação explícita entre a aceleração a e a coordenada r . Para fazermos a comparação com o sistema de coordenadas de Rindler, é interessante obtermos a relação entre a e a coordenada ρ (distância da posição do observador estático ao horizonte de eventos localizado no raio de Schwarzschild ($R_s = 2GM$)). Com este objetivo, integrando o elemento de linha na direção radial de R_s para r , temos:

$$\int_0^\rho d\rho = \int_{R_s=2GM}^r \left[1 - 2\frac{GM}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (4.77)$$

³Notação: $g_{\alpha\beta,\nu} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}$

Resolvendo a integral acima, obtemos:

$$\rho = r \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}R_s \ln \left[\frac{2r}{R_s} - 1 + \frac{2r}{R_s} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} \right] \quad (4.78)$$

É mais conveniente escrevermos r em função de ρ . No entanto, a função inversa não pode ser obtida de forma exata. Entretanto, aplicando o método perturbativo, a expressão pode ser obtida de forma aproximada. Suponha que o observador se encontra próximo do raio de Schwarzschild ($R_s = 2GM$). Podemos então, escrever:

$$r = R_s + \frac{\delta^2(\rho)}{R_s} \quad (4.79)$$

onde $\delta(\rho)$ é alguma função de ρ muito pequena comparada a R_s . Substituindo a equação (4.79) em (4.78) e admitindo termos até $\delta^3(\rho)$, encontramos:

$$\rho = 2\delta(\rho) + \frac{1}{3R_s^2}\delta^3(\rho) \quad (4.80)$$

Vamos agora, expandir a função $\delta(\rho)$ em série de potências:

$$\delta(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + \dots + \quad (4.81)$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ são constantes. Substituindo a equação (4.81) em (4.80) e considerando termos até ρ^3 , encontramos:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{1}{48R_s^2}$$

Segue, então, que:

$$\delta(\rho) = \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{48R_s^2}\rho^3 \quad (4.82)$$

Substituindo (4.79) e (4.82) em (4.76) obtemos, em segunda aproximação, o módulo da 4-aceleração necessária para um observador manter-se estático nas proximidades do

Buraco Negro de Schwarzschild, em termos de ρ :

$$a(\rho \rightarrow 0) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{3R_s^2}\rho^3 \quad (4.83)$$

Este resultado mostra que, em primeira aproximação, observadores estáticos na vizinhanças do Buraco Negro de Schwarzschild estão submetidos a mesma aceleração sofrida pelos observadores de Rindler no espaço-tempo de Minkowski ($a = \frac{1}{\rho}$).

Por outro lado, para $r \gg R_s$, ou seja, para regiões suficientemente afastadas do Buraco Negro, a equação (4.78) nos fornece em aproximação de primeira ordem $\rho = r$ e a equação (4.76) se reduz a

$$a = \frac{GM}{\rho^2}. \quad (4.84)$$

que, como seria de se esperar, coincide com a previsão da Teoria Gravitacional Newtoniana.

A equação (4.76) nos fornece a aceleração própria a que um observador estático no espaço-tempo de Schwarzschild deve estar submetido. No contexto de nossa discussão, vamos agora considerar um sistema de coordenadas construído no espaço-tempo de Minkowski seguindo o modelo de nossa generalização, para o caso em que os observadores experimentam uma aceleração $a(\rho)$ que obedece à equação (4.76). O procedimento geral já foi desenvolvido e discutido nas secções anteriores. Basta então substituímos a equação (4.76) em (4.17) e (4.18) para obtemos as equações que relacionam as coordenadas atribuídas aos eventos pelo referencial inercial padrão (t,x) e as coordenadas atribuídas por este novo referencial. Desta forma, obtemos:

$$F_\varphi(r) = 2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} \left[\frac{f(\varphi)}{1 - \left(f(\varphi) \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^2}\right)^2} \right] \quad (4.85)$$

$$G_\varphi(r) = \left\{ \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} \frac{R_s}{r^2} \left[\frac{f^2(\varphi)}{1 - \left(f(\varphi) \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^2}\right)^2} \right] + r \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} R_s \ln \left[\frac{2r}{R_s} - 1 + \frac{2r}{R_s} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{1/2} \right] \right\} \quad (4.86)$$

Na fig.(4.4), mostramos as secções de simultaneidade relativas a esta família de observadores acelerados.

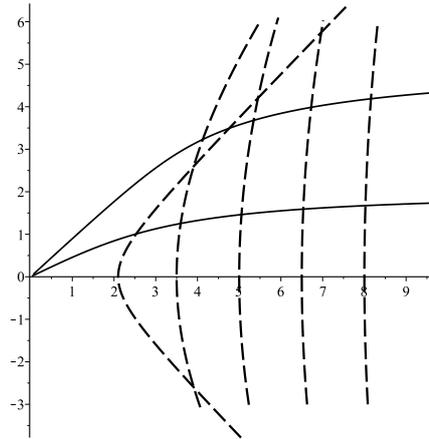


Figura 4.4: Sistema de coordenadas não-inercial associado a família de observadores cuja as acelerações coincidem com a aceleração de observadores estáticos no espaço-tempo de Schwarzschild ($a = \frac{GM}{r^2} (1 - \frac{2GM}{r})^{-\frac{1}{2}}$). As linhas pontilhadas são hipérbolas que representam as linhas de universo de alguns observadores. Admitimos $GM = 1$. As linhas cheias são hipersuperfícies de simultaneidade adaptadas ao referencial não-inercial, correspondentes a diferentes instantes de tempo ($f(\varphi) = 1$ e $f(\varphi) = 2, 5$, respectivamente.). Note a equivalência com o sistema de coordenadas de Rindler para ρ pequeno. Já para grandes distâncias, o comportamento das hipersuperfícies de simultaneidade assemelham-se as definidas pelo sistema de coordenadas que obedecem a lei do inverso quadrado da distância ($a = \frac{1}{\rho^2}$).

A partir da figura (4.4) é possível observamos que próximo a origem do sistema de coordenadas, o comportamento das secções de simultaneidade é semelhante ao descrito na figura (4.2) para o referencial de Rindler, enquanto que assintoticamente a lei do inverso quadrado é recuperada (ver fig.(4.3)). Assim esta proposta de generalização para sistema de coordenadas construídos a partir de observadores que experimentam aceleração uniforme, permite simular o comportamento de observadores tanto nas proximidades de um buraco negro ($a = \frac{1}{\rho}$), quanto para regiões afastadas ($a = \frac{1}{\rho^2}$).

Capítulo 5

Efeitos da Aceleração sobre Relógios

Atômicos

De acordo com a Teoria da Relatividade, o fluxo do tempo depende do estado de movimento do observador. Utilizando as equações de transformações de Lorentz podemos comparar as medidas de tempo decorrido entre eventos, quando são realizados por observadores inerciais. A dilatação de tempo tem sido confirmada experimentalmente em diferentes contextos - efeito Doppler produzido por feixes atômicos, tempo de vida de partículas atômicas e ritmo de relógios atômicos. Estas medidas vem sendo realizadas com precisões cada vez maiores [43, 44]. Entretanto, não podemos deduzir o ritmo temporal de um relógio acelerado a partir dos dois postulados da Teoria da Relatividade. Para analisarmos este problema, fazemos uso de uma suposição adicional, chamada de "*hipótese do relógio*". De acordo com esta suposição, o ritmo de um relógio não é afetado por sua aceleração instantânea " a " ou derivadas da velocidade de ordem superior. Embora a hipótese do relógio seja amplamente aceita (para uma abordagem crítica ver [48]), há especulações sobre as implicações empíricas de hipóteses alternativas [49, 50].

A base física da hipótese do relógio é o princípio da localidade, que como vimos nos capítulos anteriores, estabelece a equivalência local entre um observador acele-

rado e um observador inercial co-móvel [51] de forma que estes observadores terão instantaneamente a mesma noção de tempo. Matematicamente isto implica que o tempo próprio ($d\tau$) medido pelo observador acelerado e o tempo (dt) medido em um referencial inercial estão relacionados pela equação (2.10).

Até os dias atuais a hipótese do relógio tem sido confirmada experimentalmente. Medidas do tempo de vida de partículas instáveis, movendo-se em órbita circular ou mesmo quando elas são submetidas a aceleração longitudinal estão de acordo com a hipótese do relógio [52, 53]. Dentro da precisão dos instrumentos de medidas, esses testes não evidenciam a influência da aceleração na taxa de decaimento, apesar destas partículas terem sido submetidas a uma aceleração muito alta: $10^{18}g$ (para a aceleração centrípeta [52]) e $10^{15}g$ (para uma aceleração média longitudinal, com picos de $10^{22}g$ [53]), onde g é a aceleração gravitacional da Terra.

Por outro lado, é importante mencionar que o princípio da localidade conta com a definição de estado físico estabelecido pela mecânica clássica. No entanto, considerando que a natureza manifesta um caráter quântico, o princípio da localidade possui limitações conceituais [49, 54, 55]. Por causa disto, tem sido sugerido que o ritmo de qualquer relógio deveria ser influenciado pela sua aceleração instantânea ou até mesmo ser afetado por sua linha de universo passada [46, 49, 54]. Assim, a relação entre $d\tau$ e dt deve ser modificada quando o comportamento ondulatório do sistema for levado em conta. Por exemplo, baseado no estudo do tempo de vida de uma partícula artificial muônica em movimento circular [47], foi proposto que, com respeito ao tempo próprio do múon, a nova relação deveria ser: $d\tau = (1 + 2/3 (\lambda/\mathcal{L})^2) dt/\gamma$, onde λ é o comprimento de onda de Compton para o múon e $\mathcal{L} = \frac{c^2}{a}$ a escala de comprimento característico onde o estado da partícula muda significativamente [47]. Sob as condições que o experimento do múon foi realizado [52], a correção é muito pequena $(\lambda/\mathcal{L})^2 \sim 10^{-25}$ e não pode ser detectada com a precisão desse experimento. Então, esses efeitos da aceleração não podem ser descartados e a questão continua em aberto.

Neste capítulo, pretendemos estudar este problema, investigando o comportamento

de um relógio atômico acelerado [46]. Na verdade, por uma questão de simplicidade, nosso relógio atômico está descrito por um modelo de brinquedo (toy model) que consiste de uma partícula em uma caixa que obedece à equação de Klein-Gordon. De acordo com nosso modelo, vamos admitir que as paredes da caixa são arrastadas por observadores de Rindler, que como vimos no capítulo 2, são observadores uniformemente acelerados. Resolvendo a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Rindler e impondo as condições de contorno apropriadas, determinamos a frequência dos estados estacionários do sistema. Comparando este espectro com o espectro de um sistema idêntico em um sistema inercial, podemos determinar a relação entre o ritmo do tique-taque do relógio acelerado e o ritmo de um relógio atômico inercial, podendo desta forma verificar os efeitos da aceleração sobre o relógio atômico.

Ao longo deste capítulo, vamos recuperar as unidades de medida convencionais para a velocidade da luz (c).

5.1 Relógio Atômico Acelerado

Como vimos, o sistema de coordenadas de Rindler é construído utilizando o princípio físico da localidade [2]. As equações que relacionam as coordenadas inerciais (t, x) e as coordenadas de Rindler (τ, ξ) estão descritas nas equações (2.28) e (2.29). Recuperando as unidades de medida convencionais para a velocidade da luz nestas equações, podemos reescrevê-las como:

$$ct = \left(\frac{c^2}{a} + \xi \right) \sinh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \quad (5.1)$$

$$x = \left(\frac{c^2}{a} + \xi \right) \cosh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \quad (5.2)$$

A métrica de Minkowski escrita nas coordenadas de Rindler assume a forma:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 + \frac{a\xi}{c^2} \right)^2 d\tau^2 + d\xi^2 \quad (5.3)$$

Consideremos agora, uma partícula com massa de repouso (m) confinada em uma caixa que é arrastada por observadores de Rindler. Isto significa que a caixa encontra-se em repouso com respeito ao sistema de referência de Rindler. Vamos admitir que as paredes da caixa estão localizadas nas posições ξ_1 e $\xi_1 + \ell$ (onde ℓ é o comprimento próprio da caixa quando medida no referencial de Rindler), em torno do observador de Rindler central (isto é, o observador de Rindler situado em $\xi = 0$) [46]. Dentro da caixa a partícula está livre da ação de qualquer potencial. Vamos admitir que o sistema é governado pela equação de Klein-Gordon:

$$\left[\square - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad (5.4)$$

onde ϕ é a função de onda da partícula e \square é o operador D'Alembertiano. Descrito nas coordenadas de Minkowski, temos: $\square = \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, onde ∇^2 é o operador Laplaciano. Em uma dimensão espacial (x), temos: $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Por sua vez, o D'Alembertiano em coordenadas curvilíneas é da forma: $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right]$, onde $g^{\mu\nu}$ corresponde a inversa da matriz formada pelos coeficientes do tensor métrico e g é o determinante desta matriz. Escrevendo a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Rindler, obtemos a seguinte equação:

$$-\frac{1}{c^2 (1 + a\xi/c^2)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{(1 + a\xi/c^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + a\xi/c^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0 \quad (5.5)$$

É importante salientarmos que a interpretação de ϕ como uma função de onda tem algumas limitações, porém, isto não afeta o propósito desta discussão, uma vez que estamos lidando com um modelo de brinquedo e estamos basicamente preocupados com o problema matemático de encontrar estados estacionários da equação de Klein-Gordon e suas respectivas frequências.

Podemos admitir a solução da equação (5.5) como sendo do tipo $\phi = e^{-i\omega\tau} \psi$, onde

ψ é independente de τ e satisfaz a equação de Bessel modificada:

$$\rho^2 \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \rho \frac{d\psi}{d\rho} - \left(\rho^2 - \frac{\omega^2 c^2}{a^2} \right) \psi = 0 \quad (5.6)$$

onde $\rho = mc/\hbar(c^2/a + \xi)$. Vejamos que é possível identificar três escalas de comprimento: o comprimento de onda de Compton reduzido para a partícula $\lambda = \hbar/mc$, o comprimento ℓ da caixa e o comprimento de aceleração $\mathcal{L} = c^2/a$. A solução geral da equação (5.6) é uma combinação linear da função de Bessel modificada de primeiro tipo $I_\nu(\rho)$ e de segundo tipo $K_\nu(\rho)$, com ordem puramente imaginária $\nu = i(\omega c/a)$, ou seja,

$$\phi(\rho) = AI_\nu(\rho) + BK_\nu(\rho) \quad (5.7)$$

com A e B constantes.

Os estados estacionários em uma caixa e suas frequências correspondentes são determinados utilizando as condições de contorno. Impondo que $\phi = 0$ em ξ_1 e em $\xi_1 + \ell$ na equação (5.6), obtemos:

$$K_{\frac{i\omega c}{a}}(\mathcal{L}/\lambda + \xi_1/\lambda) L_{\frac{i\omega c}{a}}(\mathcal{L}/\lambda + (\xi_1 + \ell)/\lambda) = K_{\frac{i\omega c}{a}}(\mathcal{L}/\lambda + (\xi_1 + \ell)/\lambda) L_{\frac{i\omega c}{a}}(\mathcal{L}/\lambda + \xi_1/\lambda) \quad (5.8)$$

onde $L_\nu(x) = [I_\nu(x) + I_{-\nu}(x)]/2$ corresponde a parte real de $I_\nu(x)$ quando $x > 0$ [57].

Em um regime de pequenas acelerações, podemos considerar a expansão assintótica para a função de Bessel modificada [56, 57]. Tomando os primeiros termos, temos [57]:

$$e^{\alpha\pi/2} K_{i\alpha}(\alpha x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\alpha\theta(x) + \frac{\pi}{4}\right) \Pi_1 + \sin\left(\alpha\theta(x) + \frac{\pi}{4}\right) \Pi_2 \right] \quad (5.9)$$

$$e^{-\alpha\pi/2} L_{i\alpha}(\alpha x) \simeq -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[-\cos\left(\alpha\theta(x) + \frac{\pi}{4}\right) \Pi_2 + \sin\left(\alpha\theta(x) + \frac{\pi}{4}\right) \Pi_1 \right] \quad (5.10)$$

onde $\alpha = \omega c/a$, $\theta(x) = \sqrt{1-x^2} - \ln[(1 + \sqrt{1-x^2})/x]$ e a expressão para Π_1 and

$\Pi 2$ são:

$$\begin{aligned}\Pi 1 &\sim 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} [1-x^2]^{-1/4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{V_{2s}(i[1-x^2]^{-1/2})}{\alpha^{2s}} \\ \Pi 2 &\sim -2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} [1-x^2]^{-1/4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{iV_{2s+1}(i[1-x^2]^{-1/2})}{\alpha^{2s+1}}\end{aligned}$$

Além disso:

$$V_0(q) = 1, V_{s+1}(q) = \frac{1}{2}q^2(q^2 + 1)V'_s(q) + \frac{1}{8}\int_0^q V_s(t)(1 + 5t^2) dt$$

para $s = 0, 1, 2, \dots$ [56, 57]. Utilizando estas aproximações na equação (5.8), considerando a aceleração pequena, obtemos a equação transcendental:

$$\tan(\theta(x_2) - \theta(x_1)) = -\frac{c\hbar [4(E_n)^2 m^2 + c^4 m^4] \ell a^2}{8 [(E_n)^2 - c^4 m^2]^{5/2}} \quad (5.11)$$

onde:

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= \sqrt{1 - (x_1)^2} - \ln \left[\left(1 + \sqrt{1 - (x_1)^2} \right) / x_1 \right] \\ \theta(x_2) &= \sqrt{1 - (x_2)^2} - \ln \left[\left(1 + \sqrt{1 - (x_2)^2} \right) / x_2 \right]\end{aligned}$$

com $x_1 = \frac{mc^2}{E_n}$ e $x_2 = \frac{m(c^2 + a\ell)}{E_n}$. Por sua vez, $E_n = \hbar\omega$ são os autovalores de energia do sistema.

Na equação (5.11), escrevemos a energia dos estados estacionários (E_n) da forma: $E_n = E_n^{(0)}(1 + \delta)$, onde $E_n^{(0)} = [m^2 c^4 + (n^2 \pi^2 \hbar^2 c^2) / \ell^2]^{1/2}$ corresponde a energia do nível quântico “ n ” de um sistema (a massa m em uma caixa de comprimento próprio ℓ) em repouso no referencial inercial e δ corresponde a correção na energia do sistema devido a aceleração da caixa. Em seguida, expandimos o lado direito da equação (5.11) até termos de segunda ordem em a e δ , o que resulta apenas no primeiro termo da

expansão. Assim temos:

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = \arctan \left[-\frac{c\hbar \left[4 \left(E_n^{(0)} \right)^2 m^2 + c^4 m^4 \right] \ell a^2}{8 \left[\left(E_n^{(0)} \right)^2 - c^4 m^2 \right]^{5/2}} \right] + n\pi \quad (5.12)$$

Realizando o mesmo procedimento para o lado esquerdo da equação (5.12), ou seja, expandindo até termos de segunda ordem em a e δ , podemos isolar δ na equação resultante, obtendo o espectro de energia positiva dado por:

$$E_n = E_n^{(0)} \left\{ 1 + \left(\frac{\ell}{2\mathcal{L}} + \frac{\xi_1}{\mathcal{L}} \right) + \left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{8n^2\pi^2} \left(\frac{1}{1 + n^2\pi^2\lambda^2/\ell^2} \right) \right] \left(\frac{\ell}{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(-\frac{5}{n^4\pi^4} + \frac{1}{3n^2\pi^2} \right) \left(\frac{\ell^2}{\mathcal{L}\lambda} \right)^2 \right\} \quad (5.13)$$

Note que o termo linear relativo a aceleração a depende da posição da caixa com respeito ao observador de Rindler central. Em nossa analogia com o átomo real, vamos admitir que o caminho deste observador (em $\xi = 0$) corresponde a trajetória do núcleo atômico. Desta forma, a configuração simétrica das paredes ao redor do núcleo (que aparenta ser a escolha mais natural, caso contrário o átomo teria um dipolo elétrico espontâneo) corresponde a $\xi_1 = -\ell/2$. Neste caso, o termo linear $(\frac{\ell}{\mathcal{L}})$ desaparece, e o termo predominante da correção é quadrático $(\frac{\ell}{\mathcal{L}})^2$. Se escrevermos o comprimento ℓ da caixa, o comprimento de onda λ e a aceleração a em termos do raio de Bohr (r_0), a massa do elétron (m_e) e gravidade terrestre g , encontramos a seguinte estimativa:

$$\frac{\ell}{\mathcal{L}} \sim 10^{-27} \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{a}{g} \right) \quad (5.14)$$

$$\frac{\lambda}{\mathcal{L}} \sim 10^{-29} \left(\frac{m_e}{m} \right) \left(\frac{a}{g} \right) \quad (5.15)$$

Para $a = 10^{18}g$, o termo quadrático $(\frac{\ell}{\mathcal{L}})^2$ produz uma correção da ordem de $10^{-18} (\ell/r_0)^2$.

A expansão das funções $L_{i_\alpha}(\alpha x)$ e $K_{i_\alpha}(\alpha x)$ dadas pelas equações (5.9) e (5.10) são válidas quando o argumento αx é menor que a ordem α , isto é, para $x < 1$. [56, 57].

Para usarmos estas expansões, devemos fazer $\alpha x = \mathcal{L}/\lambda + \xi_1/\lambda$ ou $\alpha x = \mathcal{L}/\lambda + (\xi_1 + \ell)/\lambda$, onde ξ_1 corresponde a posição da primeira parede da caixa. Tomando $\xi_1 = -\frac{\ell}{2}$ (configuração de simetria da caixa) e considerando que $\alpha = \omega c/a$, encontramos que o máximo valor de x é $(c/\lambda + \ell a/2\lambda c)/\omega$. Assim a condição $x < 1$, implica que:

$$\hbar\omega > mc^2 + \frac{1}{2}mal \quad (5.16)$$

Como ω corresponde a frequência de um estado estacionário, então, $\hbar\omega$ é a energia correspondente. Como vimos, em um sistema não-perturbado, a energia é dada por $E_n^{(0)}$, tal que, $E_n^{(0)} = [m^2c^4 + (n^2\pi^2\hbar^2c^2)/\ell^2]^{1/2}$. Em primeira ordem em a , obtemos a condição para a equação (5.13) dada por:

$$n^2 > \frac{1}{\pi^2} \frac{\ell^3}{\lambda^2 \mathcal{L}} \quad (5.17)$$

Esta condição pode ser interpretada de duas formas diferentes. Se o sistema (uma partícula de massa m confinada em uma caixa de tamanho ℓ) está movendo-se com uma aceleração própria conhecida a , então a inequação (5.17) estabelece quais níveis quânticos podem ser usados para definir a frequência padrão do relógio atômico. Por outro lado, se os níveis quânticos são escolhidos previamente, a inequação (5.17) fornece a máxima aceleração que é consistente com nosso esquema de aproximação. Para tomarmos uma estimativa, vamos considerar que $\ell \simeq 0.5 \times 10^{-10}m$ (raio de Bohr) e que m é a massa do elétron, o que corresponde a $\lambda = 2.4 \times 10^{-12}m$. Assim, $\mathcal{L} > 10^{-7}/n^2$. Portanto, para um dado nível $n = 1$, o vínculo sobre a aceleração, ($a < 10^{22}g$), não é rigorosa.

5.2 Relação Entre o Ritmo do Relógio Atômico Acelerado e o Relógio Atômico Inercial

Em analogia com processos atômicos reais, vamos assumir que, em uma transição entre dois estados estacionários de nosso sistema, um quantum de energia de algum campo é emitido com uma frequência bem definida. Algum dispositivo capaz de contar os ciclos da frequência padrão emitida constitui nosso relógio [46].

Vamos agora, considerar uma transição de um certo nível quântico i para um estado f . O quantum de energia emitido possui uma frequência ω_{fi} que será adotada como a frequência padrão do relógio acelerado. Quando medido em termos do parâmetro τ , a frequência $\omega_{fi} = (E_f - E_i) / \hbar$ pode ser determinada a partir da equação (5.13). Por sua vez, para uma sistema idêntico em repouso no referencial inercial K , a frequência do quantum de energia emitido na transição do estado i para o estado f é dada por $\omega_{fi}^0 = (E_f^0 - E_i^0) / \hbar$. Notemos que ω_{fi}^0 é medido em termos das coordenadas de tempo do referencial K . Tendo isto em mente, consideramos agora dois eventos próximos que ocorrem sobre a linha de universo do observador acelerado central ($\xi = 0$), rotulados com coordenadas temporais τ_1 e τ_2 , respectivamente. Se ΔT é o número de oscilações da onda padrão com frequência ω_{fi} executados no intervalo de tempo decorrido entre os eventos, então:

$$\Delta T = (\tau_2 - \tau_1) \omega_{fi} / 2\pi \quad (5.18)$$

Por outro lado, do ponto de vista de K , durante o intervalo $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, o número de ciclos do relógio atômico inercial funcionando na frequência ω_{fi}^0 é:

$$\Delta t = (c/a) [\sinh(a\tau_2/c) - \sinh(a\tau_1/c)] \omega_{fi}^0 / 2\pi \quad (5.19)$$

O resultado acima pode ser obtido a partir da equação (5.1). No limite $\Delta\tau \rightarrow 0$, a

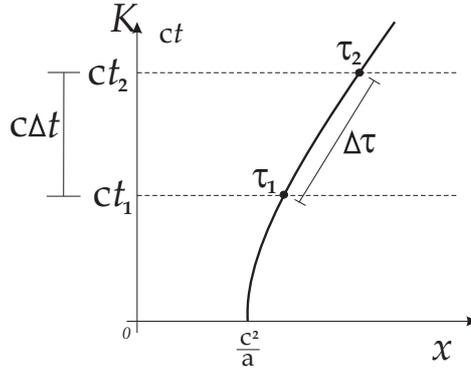


Figura 5.1: Linha de universo de um observador de Rindler que parte da posição ($\xi = 0$). Eventos próximos que ocorrem nos instantes τ_1 e τ_2 de acordo com o observador acelerado, são registrados pelo referencial inercial K com coordenadas ct_1 e ct_2 , respectivamente.

razão instantânea entre os ritmos dos tique-taques dos relógios é:

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \left(\frac{\Delta E_{fi}}{\Delta E_{fi}^0} \right) \quad (5.20)$$

O fator de correção depende da frequência dos relógios atômicos, isto é, em uma transição particular ($f \rightarrow i$) que é escolhida para definir a frequência padrão. No entanto, em transições com altos números quânticos ($n \rightarrow \infty$) de acordo com a equação (5.13), a relação reduz-se a:

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\ell}{\mathcal{L}} \right)^2 \right] \quad (5.21)$$

Este resultado é análogo aos obtidos nas referências [47, 55], que consideram uma correção da ordem de $(\frac{\lambda}{\mathcal{L}})^2$ para o tempo de vida dos múons. No entanto, é importante salientarmos, que em comparação com o estudo do tempo próprio dos múons [47], nosso resultado difere em alguns aspectos. Na referência [47], a razão de decaimento dos múons foi determinada a partir da influência de um campo magnético. Este campo magnético é responsável por manter os múons em movimento circular e sua influência pode ser escrita em termos da aceleração centrípeta [55]. Em nosso trabalho, estudamos a influência da aceleração longitudinal sobre os níveis de energia do átomo. Portanto, os sistemas são fisicamente distintos e são acelerados de maneiras diferentes.

Além disso, os resultados obtidos também são diferentes. A referência [47] segue o procedimento de aproximação por segunda quantização, que é o formalismo adequado para lidar com as correções da ordem do comprimento de onda de Compton. Por outro lado, nosso método é baseado na aproximação de primeira quantização. Nós obtivemos uma correção que não depende do comprimento de onda de Compton da partícula, e sim, do tamanho ℓ do átomo. Assim, os resultados da referência [47, 55] são independentes dos nossos resultados. Podemos considerar estas duas abordagens como complementares, já que contemplam diferentes aspectos do problema.

O efeito da aceleração sobre o ritmo do relógio atômico pode ser muito maior que o efeito sobre o tempo de vida do múon, desde que, consideremos valores realísticos, a correção dependendo de $(\frac{\ell}{\mathcal{L}})^2$ é muito maior que $(\frac{\lambda}{\mathcal{L}})^2$. De fato, se o tamanho da caixa é da ordem do raio de Bohr ($\gtrsim 10^{11}m$), então $(\frac{\ell}{\mathcal{L}})^2$ é ligeiramente maior que 10^{-18} quando $a = 10^{18}g$. Assim, o efeito da aceleração sobre o tempo próprio de um relógio atômico deverá ser de pelo menos 10^6 vezes maior que o previsto para o múon circulando com uma aceleração de mesmo módulo [47, 58]. Além disso, o fato dos sistemas serem acelerados de formas diferentes, pode ter implicações experimentais. Em estudos de partículas aceleradas longitudinalmente, a aceleração atinge picos de $10^{22}g$ [53]. Nesta ordem de magnitude, o efeito da aceleração deverá ser aproximadamente $(\frac{\ell}{\mathcal{L}})^2 = 10^{-10}$, que fica perto da precisão atual ($\sim 10^{-9}$) para testes empíricos da dilatação do tempo [44].

Apesar de mostramos que o ritmo de um relógio é afetado pela sua aceleração instantânea, este resultado não deve ser visto como uma violação da hipótese do relógio [46]. Na realidade, o próprio sistema de coordenadas de Rindler é construído com a ajuda desta hipótese, até mesmo a forma usual que a equação de Klein-Gordon assume em um referencial acelerado é de alguma forma baseado no princípio da localidade.

A influência da aceleração instantânea sobre o ritmo de um relógio atômico é apenas a expressão do fato de que a dinâmica interna de um sistema de tamanho finito é afetada pela aceleração. Isso é verdade mesmo no contexto da mecânica clássica,

como se pode verificar através do cálculo do período de um pêndulo acelerado ou o período de oscilações de um feixe de luz entre espelhos acelerados [59]. Em vista disso, a melhor interpretação para nosso resultado é que o ritmo de um relógio real acelerado se desvia do ritmo de um relógio ideal [60]. Neste sentido, podemos dizer que a equação (5.21), na verdade é compatível com a hipótese do relógio, uma vez que, de acordo com ela, o ritmo de um relógio atômico não depende da aceleração instantânea no limite em que $\ell \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$. No entanto, como ℓ e λ são não nulos para um sistema físico realístico, a aceleração instantânea produz alguns efeitos sobre os ritmos do tique-taques dos relógios acelerados. Como vimos, estes efeitos são muito pequenos, entretanto, como os experimentos estão ficando mais precisos, é importante levá-los em conta a fim de se obter uma interpretação correta dos dados empíricos.

5.3 Efeito Doppler Relativístico para Observadores Acelerados

Como a aceleração instantânea influencia no ritmo do tique-taque do relógio, também podemos analisar o efeito Doppler [46]. Em uma certa transição ($f \rightarrow i$) com altos números quânticos ($n \rightarrow \infty$), a frequência do quantum de energia emitida pela fonte acelerada ω'_E pode ser obtido a partir da equação (5.13), como sendo $\omega'_E = \omega_E^0 (1 - \ell^2/12\mathcal{L}^2)$, onde ω_E^0 é a frequência da mesma transição que acontece em um sistema inercial.

Vamos inicialmente admitir que a fonte acelerada emite sinais para a frente. Então a frequência quando medida por um receptor inercial ω_R^0 pode ser obtida da seguinte maneira: Consideremos um observador acelerado (observador de Rindler) que descreve uma linha de universo registrada pelo sistema de coordenadas inercial K . Sejam τ_1 e τ_2 tempos próprios medidos pelo observador acelerado nos instantes de emissão do primeiro e segundo pulsos eletromagnéticos, respectivamente. As coordenadas de emissão, podem ser determinadas a partir das equações (5.1) e (5.2). O sinal viaja na

velocidade da luz e chega a um observador inercial fixo em $x = 0$, nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente. Assim, podemos escrever

$$t_1 - t(\tau_1) = \frac{1}{c} (x(\tau_1) - 0), \quad (5.22)$$

$$t_2 - t(\tau_2) = \frac{1}{c} (x(\tau_2) - 0). \quad (5.23)$$

Segue que:

$$t_2 - t_1 = t(\tau_2) - t(\tau_1) + \frac{1}{c} (x(\tau_2) - x(\tau_1)) \quad (5.24)$$

Se escrevermos $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau$ e usando as equações (5.1) e (5.2), encontramos:

$$\Delta t = \frac{c}{a} \exp(a\tau_1/c) [\exp(a\Delta\tau/c) - 1], \quad (5.25)$$

onde $\Delta t = t_2 - t_1$. Expandindo a equação acima até a segunda ordem de a , obtemos:

$$\Delta t = \exp(a\tau_1/c) \left[1 + \frac{1}{2} (c\Delta\tau/\mathcal{L}) + \frac{1}{6} (c\Delta\tau/\mathcal{L})^2 \right] \Delta\tau \quad (5.26)$$

Se $\Delta\tau$ é o período da onda medido pelo observador acelerado, então, Δt é o período da onda medido pelo observador inercial. Sendo assim, a relação entre as frequências é:

$$\omega_R^0 = \exp(-a\tau_1/c) \left[1 - \frac{1}{2} (c\Delta\tau/\mathcal{L}) + \frac{1}{12} (c\Delta\tau/\mathcal{L})^2 \right] \omega'_E. \quad (5.27)$$

Como tínhamos mencionado, a frequência emitida é $\omega'_E = \omega_E^0 (1 - \ell^2/12\mathcal{L}^2)$. Portanto, recordando que $\Delta\tau = 2\pi/\omega'_E$, podemos escrever $(c\Delta\tau/\mathcal{L})$ até termos de segunda ordem em a como (λ_0/\mathcal{L}) , onde $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_E^0$ seria o comprimento de onda do sinal, se o mesmo tivesse sido emitido de um referencial inercial. Partindo do fato que a velocidade relativa instantânea é $v = c \tanh(a\tau_1/c)$ podemos escrever $\exp(-a\tau_1/c)$ como $\gamma(1 - (v/c))$. Deste modo, segue que:

$$\omega_R^0 = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left[1 - \frac{1}{2} (\lambda_0/\mathcal{L}) + \frac{1}{12} (\lambda_0/\mathcal{L})^2 - \frac{1}{12} (\ell/\mathcal{L})^2 \right] \omega_E^0 \quad (5.28)$$

Para $\tau_1 > 0$, a velocidade é positiva e o observador acelerado está se afastando do receptor inercial localizado em $x = 0$. Se considerarmos a fonte acelerada emitindo sinais para a frente e para trás, utilizando o mesmo procedimento anterior, podemos obter a forma mais geral para a equação (5.28) que é:

$$\omega_R^0 = \gamma \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \left[1 \pm \frac{\lambda_0}{2\mathcal{L}} + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda_0}{\mathcal{L}}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{\ell}{\mathcal{L}}\right)^2\right] \omega_E^0 \quad (5.29)$$

os sinais $+$ e $-$ correspondem a observadores se aproximando ou se afastando da fonte, respectivamente. A aceleração modifica a equação do efeito Doppler de duas formas: o termo λ_0/\mathcal{L} está associado com a variação da velocidade da fonte durante um ciclo completo, enquanto $(\ell/\mathcal{L})^2$ é uma nova contribuição que aparece devido a mudança no ritmo do tique-taque do relógio devido a aceleração. Note que fazendo $a \rightarrow 0$ na eq. (5.29) recuperamos a já conhecida equação do efeito Doppler relativístico para uma fonte emissora inercial.

Capítulo 6

Comentários e Conclusões

Nesse trabalho estudamos sobre os métodos de construção de sistemas de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski e as dificuldades inerentes a cada método. Vimos que a tarefa de localizar eventos no espaço-tempo consiste, em atribuir quatro números ou rótulos, que constituem as coordenadas do evento. Estes números são provenientes de regras e critérios que podem variar de um sistema de coordenadas para outro.

Nossos sistemas de coordenadas foram construídos no espaço-tempo de Minkowski. Ainda assim, quando os sistemas de coordenadas são construídos a partir de observadores acelerados, os sistemas possuem limitações. Em geral, estes sistemas apresentam validade local, como buscamos evidenciar nos diferentes sistemas de coordenadas que apresentamos.

A literatura apresenta diversas maneiras de construir sistemas de coordenadas. Em nosso trabalho nos preocupamos em sistematizar as formas mais conhecidas de construir sistemas de coordenadas, além de propormos novos métodos. Da literatura, estudamos as coordenadas usuais de Rindler. Vimos que a família de observadores de Rindler é composta de observadores acelerados, com acelerações inversamente proporcionais as suas respectivas posições iniciais (ρ). Para este referencial, as coordenadas são atribuídas a partir de um observador privilegiado da família, que parte da posição $\rho = \frac{1}{a}$, onde a é a aceleração própria do observador.

A partir da família de observadores de Rindler, construímos um novo sistema de coordenadas, adotando uma nova regra para rotular os eventos. Neste novo sistema, a coordenada temporal para o evento corresponde ao tempo próprio τ , medido pelo observador que cruza o evento. Esta modificação resultou em superfícies de simultaneidade com curvatura. Deste modo, este referencial pode ser utilizado para mostrar a conexão entre geometria não-Euclidiana das secções espaciais e referenciais não-inerciais.

Outro método de construção de sistemas de coordenadas de grande destaque que estudamos foi o método de Fermi-Walker. As coordenadas de Fermi-Walker ou coordenadas de Fermi, são, como vimos, construídas através de uma tetrada que experimenta um transporte de Fermi-Walker ao longo da linha de universo do observador. Dado um evento arbitrário, deve existir uma geodésica do tipo espaço que passa pelo evento e cruza a linha de universo do observador perpendicularmente em um certo ponto P. A coordenada temporal de Fermi equivale ao tempo próprio τ medido pelo observador no ponto P. Já as coordenadas espaciais correspondem, respectivamente, as projeções de um vetor que liga P ao evento, na direção de cada eixo espacial da tetrada carregada pelo observador. Aplicando este método a observadores uniformemente acelerados, como vimos, recaímos nas coordenadas usuais de Rindler. Aplicamos também o mesmo procedimento para um observador em movimento circular.

As coordenadas de Marzke-Wheeler, ou coordenadas de Radar, baseiam-se em uma extensão do procedimento de sincronização de Einstein. Estas coordenadas são construídas a partir de um observador que emite pulsos eletromagnéticos que são recebidos e imediatamente reenviados pelo evento a ser registrado. De acordo com as coordenadas de radar, este observador atribui como coordenada temporal, a média aritmética do tempo gasto pelo sinal para ir e voltar, medido por seu relógio. Já a coordenada espacial corresponde a metade da distância percorrida pelo sinal durante o movimento de ida e volta, estimada pelo observador.

Ao contrário do procedimento das coordenadas de Fermi-Walker que, no espaço-

tempo de Minkowski, gera superfícies de simultaneidade planas, o procedimento das coordenadas de radar gera superfícies de simultaneidade que podem apresentar curvatura dependendo do movimento do observador. Construímos as coordenadas Radar para um observador inercial e vimos que, para este caso, as equações de transformações entre essas coordenadas e as coordenadas cartesianas (t, x) , medidas por um referencial inercial, coincidem com as equações de transformações de Lorentz. Aplicamos igualmente este procedimento para um observador de Rindler e um observador em movimento circular e analisamos as suas respectivas superfícies de simultaneidade.

Estudamos também as coordenadas de emissão ou coordenadas de GPS, que recebem este nome pelo fato de serem construídas de modo semelhante ao famoso Sistema de Posicionamento Global. Assim como o GPS, estas coordenadas são construídas utilizando quatro emissores, que na prática podem ser entendidos como satélites. Dado um usuário que deseja se localizar, cada satélite emite um sinal eletromagnético que percorre o espaço-tempo propagando o tempo próprio do emissor, correspondente ao instante da emissão. O usuário, que pode ser pensado como um observador na superfície da Terra, recebe conseqüentemente quatro sinais com a informação $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, que correspondem às coordenadas que localizam o usuário. No espaço-tempo bidimensional, construímos as coordenadas de emissão para emissores inerciais utilizando apenas dois satélites. O mesmo fizemos para emissores pertencentes a família de observadores de Rindler.

Em seguida, vimos uma generalização para sistemas de coordenadas construídos a partir de observadores uniformemente acelerados, os quais experimentam acelerações “ a ” que depende da posição inicial do observador “ ρ ” segundo uma função geral $a = a(\rho)$. Nestes sistemas, as coordenadas temporais são construídas com base no princípio físico da localidade. Porém, ao contrário das coordenadas de Rindler usuais, que são atribuídas utilizando um observador privilegiado, para essas coordenadas, cada observador tem o direito de definir o que é simultâneo nas proximidades de sua linha de universo. As linhas de simultaneidades surgem da ligação, no limite do contínuo,

entre segmentos das linhas de simultaneidade individuais. As coordenadas espaciais correspondem a posição inicial do observador que cruza o evento.

Para estas novas coordenadas, encontramos as equações de transformações com respeito às coordenadas (t, x) de um referencial inercial. No caso particular em que $a = 1$, vimos que todos os observadores apresentam a mesma aceleração. Neste caso, a linha de simultaneidade inclina cada vez mais com relação ao eixo espacial para $x \rightarrow \infty$. Uma das propriedades interessantes desse sistema de coordenadas é que admitindo uma distribuição espacial dos observadores com simetria esférica ou cilíndrica, sobre a superfície de simultaneidade, o escalar de curvatura R não é nulo, significando que as secções espaciais possuem curvatura.

No caso em que $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$, a generalização recupera as coordenadas usuais de Rindler. O curioso é que as coordenadas de Rindler são atribuídas originariamente por um único observador, já nossas coordenadas são atribuídas por toda família de observadores. No entanto, para $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$, todos os observadores concordam com a noção de simultaneidade construída a partir do princípio da localidade, reconduzindo, deste modo, às coordenadas Rindler. No caso de $a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$, os observadores possuem linhas de universo com concavidade mais acentuadas para observadores próximos da origem. Para esta situação a linha de simultaneidade inclina cada vez menos, tornando-se paralela ao eixo espacial para longas distâncias. Como ilustramos geometricamente, para $a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$, as linhas de universo dos observadores podem se cruzar, gerando ambiguidade na hora rotular os eventos. Devemos restringir a validade destas coordenadas para um domínio local.

Como verificamos, esta generalização é útil para mostrar que as secções espaciais de referenciais não-inerciais podem ter uma geometria não-Euclidiana. Além disso, a generalização nos permite simular o comportamento de observadores estáticos, tanto nas proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild (caso $a(\rho) = \frac{1}{\rho}$), quanto para regiões suficientemente afastadas (caso $a(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$).

Estudando o ritmo de relógios atômicos, vimos que a aceleração instantânea afeta

o ritmo dos relógios acelerados. Para obtermos este resultado, admitimos um relógio atômico descrito por um modelo de brinquedo que consiste de uma partícula em uma caixa de paredes infinitas, que obedece a equação de Klein-Gordon. As paredes desta caixa, são arratadas por observadores de Rindler. Resolvendo a equação de Klein-Gordon com as condições de contorno adequadas, determinamos a frequência dos estados estacionários do sistema. Este resultado foi comparado ao espectro de um sistema idêntico inercial e assim obtivemos a relação entre os ritmos dos relógios atômicos (acelerado e inercial). Nosso resultado, evidencia o fato que a dinâmica interna de um sistema de tamanho finito é afetado pela aceleração, uma vez que no limite que $\ell \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$, o ritmo do relógio acelerado não depende da aceleração instantânea. Todavia, considerando que ℓ e λ são não nulos para sistemas físicos reais, a aceleração instantânea produz efeitos que apesar de pequenos, não podem ser desconsiderados. Recentemente o experimento de Ives-Stiwell testou o fator de dilatação do tempo com precisão de 10^{-9} [44]. Se fosse possível utilizar este experimentos envolvendo acelerações de ordem maiores que $10^{23}g$, então, os efeitos da aceleração sobre o ritmo de um relógio acelerado seria detectável. Como já mencionamos, em experimentos já realizados envolvendo acelerações longitudinais [53], a aceleração apresenta picos de $10^{22}g$.

Talvez o resultado mais importante do nosso estudo é o fato de que, com a ajuda deste modelo de brinquedo simples, podemos identificar quais são os parâmetros relevantes que contribuem para os estes efeitos e estimar a ordem de grandeza deles usando a equação (5.21).

Nosso modelo de brinquedo é um sistema muito simplificado. Para lidar com um átomo real, primeiro temos que construir um mecanismo de aceleração. No caso de um átomo neutro, podemos utilizar um campo elétrico não-uniforme para produzir uma aceleração longitudinal. Assim, em um modelo relativístico, devemos considerar a interação do campo externo com as partículas atômicas, cujo comportamento é governado pela equação de Dirac em (3+1) dimensões. Este problema é, naturalmente

mais complicado. Os efeitos da aceleração em relação aos níveis de energia devem aparecer indiretamente, como consequência da interação entre o campo externo e o átomo. No entanto, se o campo externo não for tão forte, em comparação com a força de interação interna, o átomo permanecerá como um sistema ligado, com um centro de massa acelerado. Então, neste sentido, uma partícula em uma caixa acelerada pode ser considerado como um modelo de brinquedo para um átomo real acelerado. No entanto, devemos ter em mente que esse estudo é um trabalho preliminar, e que os resultados precisam ser melhorados à luz dos modelos mais realistas.

A continuidade deste trabalho pode ser realizada utilizando ao invés de observadores de Rindler, partículas executando um movimento circular ou um movimento harmônico simples, sobre o qual é possível estudarmos os efeitos da aceleração sobre átomos da rede.

Bibliografia

- [1] P. J. FELIX DA SILVA, *Referenciais Não-Inerciais no Espaço-Tempo de Minkowski*. Dissertação de Mestrado, UFCG, Campina Grande (2009).
- [2] W. RINDLER, *Am J. Phys.* **34**, 1174 (1975)
- [3] J. R. LETAW AND J. D. PFAUTSCH, *J. Math. Phys.* **23**, 425 (1982).
- [4] S. GAO, Z. KUANG AND C. LIANG, *J. Math. Phys.* **39**, 2862 (1998).
- [5] B. B. THOMAS, *Fermi coordinates of an observer moving in a circle in Minkowski space: Apparent behavior of clocks*. gr-qc/9811009
- [6] KARL-PETER MARZLIN, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 619, (1994), gr-qc/9402010.
- [7] J. W. MALUF, F. F. FARIA, *Annalen Phys.***17**: 326-335, (2008) arXiv: gr-qc/0804.2502.
- [8] D. ALBA AND L. LUSANNA, *Simultaneity, radar 4 coordinates and the (3+1) point of view about accelerated observers in special relativity*, gr-qc/0311058.
- [9] D. ALBA AND L. LUSANNA, *Generalized radar 4-coordinates and equal-time Cauchy surfaces for arbitrary accelerated observers*, gr-qc/0501090.
- [10] D. ALBA AND L. LUSANNA, *Int. J. Mod. Phys D* **16**, 1149-1186 (2007).
- [11] D. ALBA AND L. LUSANNA, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7**, 33-93 (2010).
- [12] D. BINI, L. LUSANNA, B. MASHHOON, *Int. J. Mod. Phys. D* **14**: 1413-1429, 2005 gr-qc/0409052.

- [13] D. BINI, A. GERALICO, M. L. RUGGIERO, A. TARTAGLIA, *Class. Quant. Grav.* **25**, 205011 (2008).
- [14] E. MINGUZZI, *Simultaneity in special and general relativity*, gr-qc/0506127.
- [15] E. MINGUZZI, *Am. J. Phys.* **73**, 1117-1121, 2005, physics/0412024.
- [16] E. MINGUZZI, *Class. Quant. Grav.* **21**, 4123-4146 (2004)
- [17] E. MINGUZZI, *Class. Quantum Grav.* **20**, 2443 (2003).
- [18] C. G.-HUANG AND H.-Y. GUO, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1035 (2006).
- [19] M. LACHIÉZE-REY, "*Space and Spacetime*," *AIP Conference Proceedings*, **668** (2002)
- [20] P. J. FELIX DA SILVA, F. DAHIA, *Int. J. Mod. Phys. A* vol.22, **13**, 2383 (2007)
- [21] P. J. FELIX DA SILVA, F. DAHIA, *Gen. Rel. Grav.* **43**, 269-292 (2011)
- [22] B. COLL, J. J. FERRANDO, J. A. MORALES, *Phys. Rev. D* **73**, 081017 (2006), gr-qc/0602015
- [23] B. COLL, J. J. FERRANDO, J. A. MORALES, *Phys.Rev. D* **74**, 104003, (2006), gr-qc/0607037
- [24] B. COLL, J.M. POZO CLASS. *Quant. Grav.* **23**, 7395-7416, (2006), gr-qc/0606044
- [25] B. COLL, J. J. FERRANDO, J. A. MORALES *Phys. Rev. D* **73**: 084017, (2006), gr-qc/0602015
- [26] B. COLL, *AIP Conf. Proc.* 841:277-284,2006. Also in *OVIEDO 2006, *A century of relativity physics** 277-284, gr-qc/0601110
- [27] M. L. RUGGIERO, A. TARTAGLIA, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 311- 326, (2008), gr-qc/arXiv:0710.0788
- [28] C. ROVELLI, *Phys. Rev. D* **65**, 044017, (2002). gr-qc/0110003

- [29] G. LONGHI, *Found. Phys.* **19**, 201-223, (2006), gr-qc/0610053.
- [30] M. PAURI, M. VALLISNERI, *Found. Phys. Lett.* **13**: 401-425, 2000, gr-qc/0006095.
- [31] K. MARZLIN, *Phys. Lett. A* **215**, 1 (1996)
- [32] C. MISNER, K. THORNE AND J. A. WHEELER, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, New York, 1973), pp.1-70, 163-176, 593-619.
- [33] A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, 5th edn. (Princeton University Press, New Jersey, 1970), pp. 32-34.
- [34] S. M. CARROLL, - *Lectores Notes on General Relativity* (Institute for Theoretical Physics, California, 1997), pp. 1-30.
- [35] R. RESNICK, - *Introdução a Relatividade Especial*, São Paulo, Ed. Univ. de São Paulo e Ed. Polígono, (1971).
- [36] OHANIAN, HANS C. - *Gravitation And Spacetime* -(Rensselaer Polytechnic Institute, New York-London, 1976), 47-83, 306-359.
- [37] D. J. GRIFFITHS, - *Introduction to Eletrodynamics* - 3rd ed. (Upper Saddle River, New Jersey 1999), 477-521.
- [38] M. P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Prentice-Hall, New Jersey, 1976), pp. 264-265.
- [39] M. P. DO CARMO, *Riemannian Geometry* (Birkhauser, Boston, 1992).
- [40] J.B. FORMIGA, C. ROMERO, *On the differential geometry of curves in Minkowski space*, Jan 2006. e-Print: gr-qc/0601002.
- [41] M. A. ABRAMOWICZ, P. NUROWSKI AND N. WEX, *Class. Quant. Grav.*, **10**, L183-6 (1993).
- [42] S. SONEGO, M. MASSAR, *Class. Quant. Grav.* **13** 139-144 (1996).

- [43] G. GWINNER, *Mod. Phys. Lett. A*, **20**, 791 (2005). S. REINHARDT et al., *Nature Phys.* **3**, 861 (2007); CHOU, et al., *Science*, **329**, 1630-1633 (2010).
- [44] BENJAMIN BOTERMANN et al. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 120405 (2014).
- [45] B. MASHHOON, *The hypothesis of locality and its limitation*, gr-qc/0303029.
- [46] P. J. FELIX DA SILVA, F. DAHIA, *Class. Quantum Grav.* **32** 177001, (2015)
- [47] A. M. EISELE, *Helv. Phys. Acta* **60**, 1024 (1987)
- [48] J.E. ROMAIN, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 376 (1963); G. LONGHI, *Found. of Phys. Lett.* **19**, Issue 3, 201 (2006).
- [49] B. MASHHOON, *Phys. Rev. A* **47**, 4498 (1993).
- [50] S. R. MAINWARING AND G. E. STEDMAN, *Phys. Rev. A* **47**, 3611 (1993); P. Y. FRIEDMAN, *Ann. Phys.* **523**, No. 5, 408 (2011); S. RAHVAR, B. MASHHOON, *Phys. Rev. D* **89**, 104011 (2014); B. MASHHOON, *Phys. Rev. D* **90**, 124031 (2014).
- [51] B. MASHHOON, *Phys. Lett. A* **145**, 147 (1990).
- [52] J. BAILEY et al., *Nature* **268**, 301-304 (1977); J. BAILEY et al., *Nucl. Phys. B* **150**, 1 (1979).
- [53] C. E. ROOS et al. *Nature* **286**, 244 - 245 (1980).
- [54] B. MASHHOON, "Limitations of spacetime measurements," *Phys. Lett. A* **143**, 176 (1990).
- [55] B. MASHHOON, "Measurements theory and general relativity," in: *Black Holes: Theory and Observation*, F. W. HEHL, C. KIEFER, AND R. METZLER, eds. (Springer, Berlin, 1998), pp. 269-284; B. MASHHOON, "The hypothesis of locality and its limitations," in *Relativity in Rotating FRAMES*, G. RIZZI AND M. L. RUGGIERO, eds. (Kluwer Academic, Dordrecht, 2004), p. 43.

- [56] T. M. DUNSTER, *Siam J. Math. Anal.*, **2**, No. 4, pp. 995-1018, (1990).
- [57] BRUCE R. FABIJONAS, *J. Computational and Applied Math.*, **146**, 323-342 (2002).
- [58] Concerning the decay rate of unstable particles, in order to have a better estimate for the particle lifetime, it is important to take into account the modifications of the formula of the survival probability for the late time decay. These modifications, which has quantum nature, arise even when the particle is not accelerated. See: E.V. STEFANOVITCH, *Int. J. Theor. Phys.*, **35**, 2539 (1996); M. SHIRKOV, *Int. J. Theor. Phys.*, **43**, 1541 (2004); K.URBANOWSKI, *Physics Letters B* **737**, 346-351, (2014).
- [59] F. V. KOWALSKI, *Phys. Rev. A* **53**, 6, 3761 (1996).
- [60] SAMUEL C. FLETCHER, *Found. Phys.* **43**, 1369 (2013).