Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Módulos de Ulrich

por

Mariana de Brito Maia

2013

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Módulos de Ulrich

por

Mariana de Brito Maia

sob a orientação de

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2013

João Pessoa - PB

M217m Maia, Mariana de Brito.
Módulos de Ulrich / Mariana de Brito Maia.- João Pessoa, 2013.
60f.
Orientador: Cleto Brasileiro Miranda Falcão
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Módulo Ulrich. 3. Módulo Cohen-Macaulay maximal. 4. Número mínimo de geradores. 5. Multiplicidade.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Módulos de Ulrich

por

Mariana de Brito Maia

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada em 29 de Abril de 2013

____

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB (Orientador)

____

Prof. Dr. Aron Simis - UFPE

____

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus em primeiro lugar.

A meus pais e minha irmã pela dedicação e compreensão por todos os momentos em que eu não pude estar lá.

A minha família. Meus avós: Antônio, Humberto, Inês e Lindalva. Meus tios: Josinaldo, Maria, Conceição, Helder, Gorete, José Wilson, Graça, Lindeberto, Zileide, Graça. Meus primos: Catarina, Júnior, Vitória, Silas, Lorena, William, Leandro, Naldinho... A todos enfim pelo amor e cuidado.

A Tony, a melhor coisa que a matemática me deu.

A minha família Pedregal, sem a qual eu não teria conseguido terminar este trabalho, seja pela ajuda acadêmica de fato ou só pelas risadas nas horas mais difíceis: Mônica, Eudes, Gérsica, Mylenna, Wanderson, Luan, Ginaldo, Renato, Veve, Lili.

Aos demais colegas do mestrado, pelas correntes de união e fé durante as disciplinas: Rafael, Eberson, Paulo, Chicó, Carlos, Wallace, Vivi, Luis, Edna, Júnior, Ricardo, Enieze, Yane, Desterro, Nacib, Reginaldo, Uelisson, Felipe, Gilson, Diego, Kelyane...

A meus professores que tanto fizeram pelo meu crescimento: Bruno, Alexandre, Jacqueline, Lizandro, Napoleon, Miriam, Daniel, Bedregal, João Marcos, Aron, Claudianor.

A meu orientador, Cleto, pela confiança depositada.

A meus amigos da graduação: Wanderley, Sérgio, Marília, Paula, Marta, Márcia, Cícero, Paulo, Edney, Aglaer, Petrick, Thayana, Will, Carlinha, Diana, Caio... Em especial meu orientador, Falcão, que me fez acreditar que tudo isso era possível.

A seu Mariano, pelo combustível.

Enfim a todos que contribuíram de alguma forma pra que eu chegasse aqui.

À Antônio, Tânia, Heloisa e Tony

Resumo

Neste trabalho, após introduzirmos alguns conceitos de Álgebra Comutativa, como dimensão, número mínimo de geradores, e multiplicidade, provamos a existência de uma classe de módulos bastante especial sobre anéis Cohen-Macaulay, os chamados *módulos de Ulrich*. É sabido que, se M é um A-módulo Cohen-Macaulay maximal sobre um tal anel, então $\mu(M) \leq e(M)$. O objetivo do nosso estudo é demonstrar os principais casos em que vale $\mu(M) = e(M)$.

Palavras - chave: Módulo de Ulrich, Módulo Cohen-Macaulay maximal, Número mínimo de geradores, Multiplicidade.

$\hookrightarrow$

Abstract

In this work, after the introduction of some concepts of Commutative Algebra, for instance dimension, minimal number of generators, and multiplicity, we prove the existence of a very special class of modules over Cohen-Macaulay rings, the so-called *Ulrich modules*. It is known that, if M is a maximal Cohen-Macaulay module over such ring, then $\mu(M) \leq e(M)$. Our goal in this study is to prove the main cases where the equality $\mu(M) \leq e(M)$ holds.

Keywords: Ulrich module, Maximal Cohen-Macaulay module, Minimal number of generators, Multiplicity.

Sumário

Introdução

Em 1984, Ulrich publica *Gorenstein rings and modules with high numbers of generators* [31], onde, ao mostrar a desigualdade

$$\mu(M) \leq e(M)$$

faz a seguinte pergunta:

Se A é um anel local Cohen-Macaulay de dimensão positiva e corpo de classes residuais infinito, então sempre existirá um A-módulo Cohen-Macaulay M de posto positivo tal que $\mu(M) = e(M)$?

Aqui, $\mu(-)$, $e(-)$ e $\mathrm{rk}(-)$ denotam, respectivamente, número mínimo de geradores, multiplicidade e posto.

Observamos que, se M é um módulo finitamente gerado sobre um anel local Noetheriano A, e além disso, possui um posto positivo, então vale $e(M) = e(A)\mathrm{rk(M)}$.

Em 1987, Brennan, Herzog e Ulrich publicam *Maximally generated Cohen-Macaulay modules* [7], onde tratam da existência e propriedades de tais A-módulos maximais Cohen-Macaulay maximalmente gerados. Mais tarde, em *Maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki sequences* [16], Herzog e Kühl passam a chamá-los *Módulos de Ulrich*. Outras nomenclaturas também são encontradas na literatura, como *módulos maximais Cohen-Macaulay lineares* e *Módulos Top-Heavy*.

A pergunta de Ulrich, aqui tratada, foi respondida de forma afirmativa nos seguintes casos:

1. $dim(A) \leq 1$, em [7];

2. A tem multiplicidade minimal, em [7];

3. A é domínio homogêneo 2-dimensional Cohen-Macaulay com corpo de classes residuais infinito, em [7];

4. A é uma intersecção completa estrita, em [5].

O objetivo do nosso estudo será demonstrar os quatro casos citados acima.

Iniciamos com um capítulo de pré-requisitos, onde constam as principais noções e resultados aqui usados. Alguns deles podem ser encontrados em um curso básico de Álgebra Comutativa; outros requerem um pouco mais de experiência por parte do leitor. Muitos resultados nesse capítulo preliminar serão admitidos sem maiores discussões, visto que suas demonstrações tornariam o presente trabalho excessivamente extenso.

No segundo capítulo, tratamos da existência de módulos de Ulrich sobre as quatro classes de anéis listadas acima. Para tal, recorremos a resultados do capítulo anterior, a outros que se encontram no apêndice e a vários outros que desenvolvemos neste mesmo capítulo.

Incluímos ainda um apêndice onde apresentamos os elementos básicos da teoria de fatoração matricial e módulos de Clifford, que foram utilizados em parte do segundo capítulo.

Mencionamos, *en passant*, a importância da teoria dos módulos de Ulrich também em Geometria Algébrica, através dos chamados *fibrados de Ulrich*, investigados recentemente por R. Hartshorne e outros autores (vide, por exemplo, [9] e [10]).

Esperamos proporcionar ao leitor um material suficientemente interessante, e que seja capaz de estimulá-lo a buscar mais sobre este assunto que tanto nos cativou.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, definiremos alguns dos conceitos que serão necessários ao longo deste trabalho. Para maiores detalhes sugerimos ao leitor consultar os livros [8] e [22].

Convenção: Neste trabalho, a menos de menção explícita em contrário, todos os anéis serão comutativos e com 1.

1.1 Geradores e posto de um módulos

Definição 1.1 Seja A um anel. Um A-módulo M é dito *finitamente gerado* (sobre A) se existir um subconjunto finito $\{m_1, ..., m_r\} \subset M$, chamado um *conjunto de geradores de* M, tal que $M = \sum_{i=1}^{r} Am_i$, ou seja, cada $m \in M$ se expressa como combinação A-linear $m = a_1m_1 + ... + a_rm_r, \quad a_i \in A$. Tal conjunto de geradores será dito *minimal* se $m_j \notin \sum_{i \neq j} Am_i, \forall j = 1, ..., r$. Se, além disso, o conjunto $\{m_1, ..., m_r\}$ for linearmente independente sobre A, isto é, se $m = \sum_{i=1}^{r} a_im_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \quad \forall i$, dizemos que $\{m_1, ..., m_r\}$ é uma *base* para M, e neste caso M será chamado um A-módulo *livre*.

Teorema 1.2 *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local, $k = \frac{A}{\mathfrak{m}}$ seu corpo residual e M um A-módulo finitamente gerado. Sejam $m_1, ..., m_r \in M$ tais que $\{\bar{m}_1, ..., \bar{m}_r\}$ é uma base do k-espaço vetorial $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$. Então, $\{m_1, ..., m_r\}$ é um conjunto minimal de geradores de M.*

Prova:. Defina $N = \sum_{i=1}^{r} Am_i \subseteq M$. Considere o diagrama,

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "\pi"] & \\ N \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, dotted, "f=\pi\circ i"] & & \frac{M}{\mathfrak{m}M} \end{tikzcd}$$

Assim, dado $n \in N \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i$ para $a_1, ..., a_r \in A$. Logo, $f(n) = \sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i \bar{m}_i$.

Note que f é sobrejetor pois os $\bar{m}_i's$ geram $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ como $\frac{A}{\mathfrak{m}}$-espaço vetorial.

Seja agora $n = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \in ker(f) \subseteq N \Rightarrow f(n) = \sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i \bar{m}_i = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_i = \bar{0} \Rightarrow a_i \in \mathfrak{m}, \forall i = 1, ..., r \Rightarrow n \in \mathfrak{m}M \cap N \Rightarrow ker(f) = \mathfrak{m}M \cap N$.

Pelo teorema do isomorfismo,

$$\frac{N}{\mathfrak{m}M \cap N} \cong \frac{M}{\mathfrak{m}M}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathfrak{m}M + N}{\mathfrak{m}M} \cong \frac{M}{\mathfrak{m}M}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{m}M + N = M$$

Assim, por Nakayama, $M = N$, e portanto $\{m_1, ..., m_r\}$ gera M, e além disso é um conjunto minimal de geradores. De fato, supondo o contrário, teríamos,

$$m_j \in \sum_{i=1, i\neq j}^{r} A m_i, \text{ para algum } j = 1, ..., r \Rightarrow \bar{m}_j = \pi(\sum_{i=1, i\neq j}^{r} a_i m_i) \Rightarrow \bar{m}_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{r} \bar{a}_i \bar{m}_i.$$

Contradição, pois os $\bar{m}_i's$ são linearmente independentes. Logo, $\{m_1, ..., m_r\}$ é um conjunto minimal de geradores.

■

Definição 1.3 Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local. A cardinalidade de um conjunto minimal de geradores de um A-módulo finitamente gerado M (tal número está bem definido devido ao teorema 1.2), será o *número mínimo de geradores* de M, denotado por $\mu_A(M)$, e dado por $\mu_A(M) = \dim_k(\frac{M}{\mathfrak{m}M})$.

Um caso especial a ser considerado é quando o módulo finitamente gerado é o próprio $\mathfrak{m}$; neste caso, $\mu_A(\mathfrak{m}) = \dim_k(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2})$, que será chamada *dimensão de imersão* de A, denotado por edim(A).

Proposição 1.4 *Seja M finitamente gerado sobre A. Então M é livre se, e somente se, $M \cong A^r$.*

Prova:. Se M é livre, então M possui uma base $\{m_1, ..., m_r\} \subset M$. Assim defina,

$$\phi : A^r \to M,\ \phi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i.$$

Note que ϕ é sobrejetiva pois os $m_i's$ geram M, e além disso ϕ é injetiva já que $\phi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i m_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1, ..., r \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i e_i = 0.$

Logo, ϕ é um isomorfismo.

Reciprocamente, suponha que existe um isomorfismo

$$\phi : A^r \to M.$$

Assim, dado qualquer $m \in M$ temos, pela sobrejetividade de ϕ, que $m = \phi(x)$ para algum $x = \sum_{i=1}^{r} a_i e_i \in A^r \Rightarrow m = \phi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i\right)$, e por linearidade, $m = \sum_{i=1}^{r} a_i \phi(e_i)$ de modo que $\phi(e_1), ..., \phi(e_r)$ geram M. Finalmente como ϕ é injetiva podemos escrever: $m = 0 \Leftrightarrow \phi\left(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i e_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1, ..., r$, e assim $\phi(e_1), ..., \phi(e_r)$ são linearmente independentes, o que implica que $\{\phi(e_1), ..., \phi(e_r)\}$ é uma base para M.

■

Definição 1.5 Dizemos que um A-módulo M tem *posto*(genérico, constante) r se, para todo $P \in \mathrm{Ass}(A)$, os A_P-módulos M_P e A_P^r forem isomorfos. Notação: $\mathrm{rk}(M) = r$. Em particular, se $M \cong A^r$ (isto é, M é livre) então $\mathrm{rk}(M) = r$.

1.2 Dimensão de Krull e sistemas de parâmetros

Se A é um anel denotaremos por $\mathrm{Spec}(A)$, como de costume, o conjunto dos ideais primos de A (como sabemos $\mathrm{Spec}(A)$ é um espaço topológico munido da topologia de Zariski).

Definição 1.6 Seja $P \in \mathrm{Spec}(A)$. A *altura* de P é o supremo dos comprimentos t de cadeias estritas,

$$P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_t = P,$$

de ideais primos. Tal número é denotado por $\mathrm{ht}(P)$.

Para um ideal arbitrário I, temos

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(P) \mid P \in \mathrm{Spec}(A), P \supset I\}.$$

Teorema 1.7 (Teorema do ideal primo de Krull) *Sejam A um anel Noetheriano e $I = (x_1, ..., x_n)$ um ideal próprio. Então $\mathrm{ht}(P) \leq n$ para todo ideal primo P que é mínimo entre os ideais primos contendo I.*

Como consequência, temos que todo ideal próprio de um anel Noetheriano tem altura finita.

Teorema 1.8 *Sejam A um anel Noetheriano e I um ideal próprio com altura n. Então existem $x_1, x_2, ..., x_n \in I$, tais que $\mathrm{ht}(x_1, ..., x_i) = i$ para $i = 1, 2, ..., n$.*

Definição 1.9 A *dimensão de Krull* de um anel A é o supremo das alturas de seus ideais primos,

$$\dim(A) = sup\{\mathrm{ht}(P) \mid P \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

Exemplo 1.10 No anel local (A_P, P_P) temos que $\dim(A_P) = \mathrm{ht}(P)$, pois existe uma correspondência entre $\mathrm{Spec}(A_P)$ e o conjunto formado pelos $Q \in \mathrm{Spec}(A)$ tais que $Q \subseteq P$.

Veja ainda que para todo ideal próprio $I \subset A$ vale a desigualdade

$$\mathrm{ht}(I) + \dim\left(\frac{A}{I}\right) \leq \dim(A).$$

De fato, se $\dim(A) = \infty$ nada há a discutir. Caso contrário, se $\dim(A) = n < \infty$, seja $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(P) = k$, assim existe $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_k = P$. Assim, em $\frac{A}{I}$, podemos considerar uma cadeia de primos $\frac{P}{I} = \frac{Q_0}{I} \subset \frac{Q_1}{I} \subset ... \subset \frac{Q_l}{I}$, onde cada $Q_i \in \mathrm{Spec}(A)$ contém I e l é a dimensão de $\frac{A}{I}$.

Logo, $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_k = P = Q_0 \subset Q_1 \subset ... \subset Q_l$ é uma cadeia de primos em A e, portando, $k + l \leq n \Rightarrow \mathrm{ht}(I) + \dim\left(\frac{A}{I}\right) \leq \dim(A)$.

Em particular, segue que

$$\dim(\tfrac{A}{I}) \leq \dim(A),.$$

Definição 1.11 Seja M um A-módulo. Então $\dim(M)$ é o supremo dos comprimentos de cadeias estritas,

$$P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_t, \text{ com } P_i \in \mathrm{Supp}(M),$$

onde $\mathrm{Supp}(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_P \neq 0\}$.

Nosso caso de interesse é quando M é finitamente gerado sobre A. Nesta situação vale

$$\mathrm{Supp}(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \mid P \supset 0 : M\},$$

consequentemente,

$$\dim(M) = \dim\left(\tfrac{A}{0:M}\right).$$

Em particular, $\dim(M) \leq \dim(A)$.

Definição 1.12 Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, x_2, ..., x_t \in A$ é um *sistema de parâmetros* de M, se t é o menor inteiro tal que

$$\dim(\tfrac{M}{(x_1,...,x_t)M}) = 0$$

ou equivalentemente

$$\mathrm{Supp}(\tfrac{M}{(x_1,...,x_t)M}) = \mathfrak{m}.$$

Em particular, $(x_1, ..., x_t)M$ é um submódulo $\mathfrak{m}$-primário. O inteiro t, que denotaremos por $s(M)$, é um invariante do módulo M.

Se $\mathrm{Supp}(M) = \mathfrak{m}$, então $s(M) = 0$.

Teorema 1.13 (Chevalley-Krull-Samuel) *Se A é um anel local Noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado, então*

$$s(M) = \dim(M).$$

Para esta demonstração veja [30].

1.3 Sequências regulares e módulos Cohen-Macaulay

Definição 1.14 Seja M um módulo sobre um anel A. Um elemento $x \in A$ é dito *M-regular*, se x é *não divisor-de-zero* de M, ou seja, se $xz = 0$ para $z \in M$, então $z = 0$.

Notação. $\mathcal{Z}(M) = \{\text{divisores-de-zero de } M\}$.

Definição 1.15 Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, x_2, ..., x_n$, com $x_i \in A$ é dita uma *sequência M-regular* ou uma *M-sequência* se satisfaz as seguintes condições:

1. $\frac{M}{\mathbf{x}M} \neq 0$.

2. x_i é um elemento $\frac{M}{(x_1,...,x_{i-1})M}$-regular, para $i = 1, ...n$.

Uma sequência que satisfaz apenas 2 é chamada uma *M-sequência fraca*.

Note que no caso em que A é um anel local, e $M \neq 0$ um A-módulo finitamente gerado, então o lema de Nakayama garante que a condição 1 será sempre satisfeita.

Exemplo 1.16 A sequência $x_1, ..., x_n$ das indeterminadas em um anel de polinômios $A = \mathbb{K}[x_1, ...x_n]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo, é uma A-sequência.

Observações 1.17

1. Em geral, se uma sequência $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ é uma sequência M-regular, uma permutação de seus elementos pode não ser. No entanto, se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local Notheriano, e M é um A-módulo finitamente gerado, então qualquer permutação de uma M-sequência em $\mathfrak{m}$ ainda será uma M-sequência.

2. Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local, então toda sequência M-regular será parte de um sistema de parâmetros.

Definição 1.18 Sejam I um ideal de um anel Noetheriano A e M um A-módulo finitamente gerado com $IM \neq M$. Uma *M-sequência maximal em I* é uma M-sequência $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq I$, tal que $\{x_1, ..., x_n, x\}$ não é M-sequência para qualquer $x \in I$.

Quando A é um anel Noetheriano, toda M-sequência pode ser estendida a uma M-sequência maximal.

Lema 1.19 *Sejam A um anel, e M, N A-módulos. Tome $I = 0 : N$.*

1. *Se I contém um elemento M-regular, então $\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$.*
2. *Inversamente, se A é Noetheriano e M, N são finitamente gerados, com $\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$, então I contém um elemento M-regular.*

Prova:.

1. Seja $a \in I = 0 : N$ M-regular. Se existe $f \in \mathrm{Hom}_A(N, M)$, não nulo, então existe $n \in N$ tal que $f(n) \neq 0$. Agora sabemos que $an = 0, \quad \forall n \in N$, logo $f(an) = 0 \Rightarrow af(n) = 0 \Rightarrow a \in \mathcal{Z}(M)$, o que contradiz a hipótese de que a é M-regular.

2. Façamos por contra-positiva.

   Suponhamos que $I \subseteq \mathcal{Z}(M)$. Sendo A Noetheriano, temos que $\mathcal{Z}(M) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(M)} P$ e, pelo lema da esquiva, $I \subseteq P$ para algum $P \in \mathrm{Ass}(M)$, isto é, $P = 0 : (m)$ para algum $m \neq 0 \in M$. Assim a aplicação

   $$\varphi : \tfrac{A}{P} \longrightarrow M \text{ dada por } \varphi(a + P) = am$$

   está bem definida e ainda é um homomorfismo injetivo.

   Como N é um A-módulo finitamente gerado, então, dado $n \in N$, existem $a_1, ..., a_r \in A$ e $n_1, ..., n_r \in N$ tal que $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i n_i$, induzindo o seguinte homomorfismo,

   $$\psi : N \to \tfrac{A}{P},\ \psi(\sum_{i=1}^{r} a_i n_i) = a_1 + P,$$

   que é sobrejetivo.

   Portanto, $\phi = \varphi \circ \psi \in \mathrm{Hom}(N, M)$ e $\phi \neq 0$. O que termina a demonstração.

■

Lema 1.20 *Sejam A um anel, M, N A-módulos, e $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ uma M-sequência fraca em $0 : N$. Então*

$$\mathrm{Hom}_A\left(N, \frac{M}{\mathbf{x}M}\right) \cong \mathrm{Ext}^n_A(N, M).$$

Prova:. Façamos por indução sobre n.

1. $n = 0$

   Sabemos, da construção do funtor Ext, que $\mathrm{Hom}_A(N, M) \cong \mathrm{Ext}^0_A(N, M)$.

2. $n \geq 1$

   Como $\mathbf{x}' = x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ é uma sequência M-regular fraca, por hipótese de indução,

   $$\mathrm{Hom}_A\left(N, \frac{M}{\mathbf{x}'M}\right) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, M).$$

   Agora, como $x_n \notin \mathcal{Z}\left(\frac{M}{\mathbf{x}'M}\right)$ e $x_n \in 0 : N$, então $\mathrm{Hom}_A\left(N, \frac{M}{\mathbf{x}'M}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, M) = 0$.

   Considere a sequência exata,

   $$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x_1} M \longrightarrow \frac{M}{x_1 M} \longrightarrow 0.$$

Pela sequência exata longa do Ext temos

$$0 = \mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, \tfrac{M}{x_1 M}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^n_A(N, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}^n_A(N, M) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}^n_A(N, \tfrac{M}{x_1 M}) \longrightarrow ...$$

Assim, sendo φ induzida pela multiplicação por $x_1 \in 0 : N$ temos que $\varphi \equiv 0$, logo, $\mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, \frac{M}{x_1 M}) \cong \mathrm{Ext}^n_A(N, M)$ via Δ.

Como $x_2, ..., x_n$ é M-regular fraca, a hipótese de indução $\mathrm{Ext}^{n-1}_A(N, \frac{M}{x_1 M}) \cong \mathrm{Hom}_A\left(N, \frac{M}{\mathbf{x}M}\right)$ garante que $\mathrm{Ext}^n_A(N, M) \cong \mathrm{Hom}_A\left(N, \frac{M}{\mathbf{x}M}\right)$.

■

Teorema 1.21 (Rees) *Seja A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado, e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Então toda M-sequência maximal em I tem o mesmo comprimento,*

$$n = min\left\{i \mid \mathrm{Ext}^i_A(\tfrac{A}{I}, M) \neq 0\right\}.$$

Prova:. Seja $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ uma M-sequência maximal em I. Como I contém um elemento $\frac{M}{(x_1,...,x_{i-1})M}$-regular, $i = 1, ..., n$, temos

$$\mathrm{Ext}_A^{i-1}\left(\tfrac{A}{I}, M\right) \cong \mathrm{Hom}_A\left(\tfrac{A}{I}, \tfrac{M}{(x_1,...,x_{i-1})M}\right) = 0.$$

Logo,

$$\mathrm{Ext}_A^{j}\left(\tfrac{A}{I}, M\right) = 0 \ \forall j \leq n-1.$$

E mais,

$$\mathrm{Ext}_A^{n}\left(\tfrac{A}{I}, M\right) \cong \mathrm{Hom}_A\left(\tfrac{A}{I}, \tfrac{M}{\mathbf{x}M}\right) \neq 0.$$

Provando o teorema.

■

Este resultado nos permite introduzir a seguinte definição.

Definição 1.22 Seja A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado, e I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Então, o comprimento comum das M-sequências maximais em I será chamado *grade de I em M*,

$$\mathrm{grade}(I, M).$$

No caso especial em que $M = A$ escreveremos $\mathrm{grade}(I)$ ao invés de $\mathrm{grade}(I, A)$.

Definição 1.23 Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local, e M um A-módulo finitmente gerado. A *profundidade* de M é o número

$$\mathrm{prof}(M) = \mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M).$$

Definição 1.24 Seja A um anel local Noetheriano. Um A-módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é um *módulo Cohen-Macaulay* se $\mathrm{prof}(M) = \dim(M)$. Se A for Cohen-Macaulay visto como módulo sobre ele proprio, é dito um *anel Cohen-Macaulay*.

Definição 1.25 Um *módulo Cohen-Macaulay Maximal* é um módulo Cohen-Macaulay M tal que $\dim(M) = \dim(A)$.

Finalizamos esta seção com mais algumas noções extremamente importantes.

Definição 1.26 Um anel local Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ é *regular* se $\mathfrak{m}$ pode ser gerado por uma A-sequência, chamada sistema regular de parâmetros.

Exemplo 1.27 Um anel local regular $(A, \mathfrak{m})$ é um anel Cohen-Macaulay. De fato, um sistema regular de parâmetros será uma sequência regular maximal em $\mathfrak{m}$.

Definição 1.28 Um anel local Noetheriano B, será um *anel interseção completa* se $B \cong \frac{A}{I}$, onde A é um anel local regular e $I \subset A$ é um ideal gerado por uma A-sequência.

Definição 1.29 Um anel quociente $B = A/I$ de um anel regular local $(A, \mathfrak{m})$ é chamado uma *intersecção completa estrita* se o anel graduado associado $\mathrm{gr}_{\frac{\mathfrak{m}}{I}}(B)$ é uma interseção completa. Mais precisamente, se $\mathrm{gr}_{\frac{\mathfrak{m}}{I}}(B) = \frac{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} A}{(f_1^*, ..., f_n^*)}$, onde $f_1^*, ..., f_n^*$ é uma $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$-sequência. Neste caso, $f_1, ..., f_n$ é uma A-sequência, e $B = \frac{A}{(f_1, ..., f_n)}$.

1.4 Resolução livre e dimensão homológica

Seja A um anel local Noetheriano. Dado M um A-módulo finitamente gerado por $m_1, ..., m_n$, existe uma sequência exata natural,

$$0 \to Ker(\varphi_0) \longrightarrow A^n \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0,$$

onde a aplicação A-linear φ_0 é dada por $\varphi_0(a_1, ..., a_n) = a_1 m_1 + ... + a_n m_n$.

A sequência exata curta acima é chamada *apresentação livre de M*, e o módulo $ker(\varphi_0) = \{(a_1, ..., a_n) \in A^n \mid a_1 m_1 + ... + a_n m_n = 0\}$ é dito o *primeiro módulo de sizigias de M*, denotado por $\mathrm{Syz}(M)$.

Note que, sendo A Noetheriano, temos que $\mathrm{Syz}(M)$ é finitamente gerado, digamos, gerado por $= n_1$. Assim é possível encontrar um apresentação livre de $\mathrm{Syz}(M)$,

$$0 \to \mathrm{Syz}(\mathrm{Syz}(M)) = \mathrm{Syz}_2(M) \longrightarrow A^{n_1} \longrightarrow \mathrm{Syz}(M) \to 0,$$

onde por composição ganhamos,

$$A^{n_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^n \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0.$$

Esse processo pode ser continuado, induzindo uma sequência

$$... \xrightarrow{\varphi_{i+1}} A^{n_i} \longrightarrow ... \longrightarrow A^{n_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^n \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0.$$

Veja que $ker(\varphi_i) = Im(\varphi_{i+1})$, e portanto, a sequência acima será uma sequência exata longa de módulos livres, ou ainda, uma *resolução livre de* M. Eventualmente ela pode ser infinita e podemos truncá-la em qualquer etapa,

$$0 \to \mathrm{Syz}_n(M) = ker(\varphi_{n-1}) \longrightarrow A^{n_{i-1}} \longrightarrow ... \longrightarrow A^{n_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^n \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0,$$

deixando de ser uma resolução livre a menos que $\mathrm{Syz}_n(M)$ seja um módulo livre.

Tomando $n = \mu(M)$ e $n_i = \mu(\mathrm{Syz}_i(M))$, para cada $i \geq 1$, tal resolução livre é *minimal*. Neste caso o número mínimo de geradores $n_i = \mu(\mathrm{Syz}_i(M))$ é chamado o *i-ésimo número de Betti de* M, denotado por $\beta_i(M)$. Além disso, $\mathrm{Syz}_i(M)$ é único a menos de isomorfismo, e tal resolução livre minimal é determinada por M a menos de isomorfismos de complexos. Com isto podemos definir:

Definição 1.30 O comprimento de uma resolução livre minimal de M sobre o anel local A é a *dimensão homológica de* M. Tal número é denotado por $\mathrm{hd}_A(M)$, ou simplesmente $\mathrm{hd}(M)$ quando não houver risco de ambiguidade.

Definição 1.31 Seja A um anel local Noetheriano. Um A-módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é dito *perfeito* se

$$\mathrm{hd}(M) = \mathrm{grade}(0 : M).$$

Um ideal $I \subset A$ será perfeito se $\frac{A}{I}$ for um módulo perfeito, ou seja, $\mathrm{hd}(\frac{A}{I}) = \mathrm{grade}(I)$.

1.5 Módulos canônicos e anéis Gorenstein

Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano.

Definição 1.32 A dimensão do k-espaço vetorial

$$\mathrm{Ext}^n(k, M) \neq 0, \text{ onde } n = \mathrm{prof}(M),$$

será o *tipo de* M, ou seja,

$$\text{tipo}(M) = \dim_k(\text{Ext}^n(k, M)).$$

Definição 1.33 Um anel local Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ é dito *Gorenstein* se

$$Sup\left\{i \mid \text{Ext}^i(k, A) \neq 0\right\} < \infty,$$

onde $Sup\left\{i \mid \text{Ext}^i(k, A) \neq 0\right\}$ é a *dimensão injetiva* de A (injdim(A)). Um anel Noetheriano A é Gorenstein, se para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, a localização $A_{\mathfrak{m}}$ é um anel Gorenstein.

Note que prof$(M) \leq$ injdim(A).

Definição 1.34 Um ideal $I \subset A$, onde A é um anel local local regular (ou um anel de polinômios sobre um corpo k), será um *ideal Gorenstein* se I é perfeito e $\text{Ext}^g_A(\frac{A}{I}, A) \cong \frac{A}{I}$, onde $g = \text{grade}(I)$.

Definição 1.35 Seja M um A-módulo finitamente gerado sobre um anel local $(A, \mathfrak{m})$. Então,

$$\text{Soc}(M) = (0 :_M \mathfrak{m}) \cong \text{Hom}(k, M).$$

é o socle de M.

Proposição 1.36 *Sejam um anel local* $(A, \mathfrak{m})$*,* M *finitamente gerado sobre* A *e* $\mathbf{x} = x_1, ..., x_n$ *uma* M*-sequência maximal em* $\mathfrak{m}$*. Então* $\text{tipo}(M) = \dim_k \text{Soc}\left(\frac{M}{\mathbf{x}M}\right)$.

Teorema 1.37 *A é Gorenstein se, e somente se, A é Cohen-Macaulay de tipo 1.*

Definição 1.38 Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Cohen-Macaulay. Um módulo Cohen-Macaulay maximal M, de tipo 1 e de dimensão injetiva finita, é chamado *módulo canônico*, e será denotado por ω_A.

1.6 Multiplicidade

Definição 1.39 Um anel $A \neq 0$ é dito *graduado* ($\mathbb{N}$-graduado), se existe uma família $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subgrupos aditivos $A_n \subset A$, satisfazendo:

1. $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$;

2. $A_iA_j \subseteq A_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

A_n é dita uma *componente homogênea* de grau n de A. Cada elemento de A_n é um *elemento homogêneo de grau* n.

Seguem-se as seguintes observações:

1. $0 \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, pois A_n é subgrupo aditivo, logo 0 tem todos os graus.

2. Todo elemento de A é uma soma finita de elementos homogêneos.

3. A_0 é subanel de A, logo A_n é A_0-módulo $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.40 Dizemos que um A-módulo M é *graduado*, se existe uma família de subgrupos aditivos $\{M_n\}_{n\in\ \lambda}$ tal que:

1. $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$;

2. $A_iM_j \subseteq M_{i+j}, \forall i, j \geq 0$.

Um elemento $x \in M$ é dito *homogêneo* se $x \in M_n$, para algum n. Cada M_n é um A_0-módulo, e todo elemento de M será uma soma finita de elementos homogêneos.

Definição 1.41 Dizemos que um A-módulo $M \neq 0$ é um módulo *simples*, se seus únicos A-submódulos são 0 e o próprio M.

Definição 1.42 Se M é A-módulo, uma cadeia

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_r = M$$

de submódulos de M é chamada uma *série de composição de M* quando $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ é simples, $\forall i = 1, ..., r$.

Se uma série de composição de M existe, então o seu comprimento é um invariante de M (independe da escolha da série de composição) chamado o *comprimento de M*, denotado por $l(M)$.

Assumiremos agora que A_0 é um anel local Artiniano e que A será finitamente gerado como A_0-módulo.

Definição 1.43 Seja A como acima e M um A-módulo graduado finitamente gerado. Definimos:

$$H(M, -) : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ H(M, n) = l(M_n),$$

como sendo a *função de Hilbert de M*.

Note que cada componente homogênea de M, M_n, será um A_0-módulo finito e assim terá comprimento finito.

A partir de agora assumiremos que A é gerado, sobre A_0, por elementos de grau 1, isto é $A = A_0[A_1]$. Admitiremos o seguinte resultado:

Teorema 1.44 *Seja M um A-módulo graduado finitamente gerado de dimensão d. Então $H(M, -)$ é de tipo polinomial de grau $d - 1$, isto é, $H(M, n)$ é uma função polinomial para $n \gg 0$.*

Para esta demonstração vide [8]

Definição 1.45 O polinômio $p(x) = p_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $H(M, n) = p(n)$ para $n \gg 0$ é chamado *polinômio de Hilbert*,

$$p_M(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{x+i}{i},$$

onde $e_i \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.46 Seja M um A-módulo graduado finitamente gerado. A *multiplicidade de* M, denotada por $e_A(M)$, será definida por

$$e_A(M) = \begin{cases} e_0 & , \text{ se } \quad \dim(\mathrm{M}) > 0 \\ l(M) & , \text{ se } \quad \dim(\mathrm{M}) = 0. \end{cases}$$

Observação 1.47 Quando não houver risco de ambiguidade denotaremos a multiplicidade apenas por $e(M)$.

Note que definimos multiplicidade para anéis e módulos graduados, mas precisamos expandir tal conceito para o caso não-graduado.

Definição 1.48 Seja A um anel. Uma *filtração* $\mathcal{F}$ sobre A é uma cadeia descendente $A = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ de ideais tal que $I_i I_j \subset I_{i+j}$ para todo i e j. Um *anel filtrado* é um par $(A, \mathcal{F})$ onde A é um anel e $\mathcal{F}$ é uma filtração.

A filtração dada pelas potências de um ideal I é chamada *filtração I-ádica.*

Seja A um anel filtrado com a filtração $\mathcal{F} = (I_i)_{i \geq 0}$. Nós

definimos o *anel graduado associado a A* com respeito a $\mathcal{F}$ por

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{I_i}{I_{i+1}}.$$

Podemos agora adaptar a definição acima para A-módulos. Dado o A-módulo M e uma filtração $\mathcal{F}$, temos que $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{I_i M}{I_{i+1} M}$ será um $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(A)$-módulo. Caso $\mathcal{F}$ seja uma filtração I-ádica, nossa notação será substituída por $\mathrm{gr}_I(M)$.

Agora considere o anel local graduado associado a A com respeito a $\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é a filtração $\mathfrak{m}$-ádica. Então, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ será um anel graduado e ainda $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ será um $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$-módulo graduado.

Finalmente estamos aptos a definir multiplicidade quando M é um A-módulo finitamente gerado no contexto local.

Definição 1.49 Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e $M \neq 0$ um A-módulo finitamente gerado. Definimos a *multiplicidade de M* por

$$e(M) = e(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{M}))$$

Mais geralmente, podemos considerar um *ideal de definição de M*, ou seja, $I \subseteq \mathfrak{m}$ tal que $\mathfrak{m}^n M \subset IM$, bem como seu respectivo anel graduado associado $\mathrm{gr}_I(A)$, (que é uma álgebra homogênea) e o $\mathrm{gr}_I(A)$-módulo graduado $\mathrm{gr}_I(M)$. Neste contexto a *multiplicidade de M com respeito a I* é definida por $e(I, M) = e(\mathrm{gr_I(M)})$.

Definição 1.50 A função dada por

$$\chi_M^I(n) = H_1(\mathrm{gr}_I(M), n) = \sum_{i=0}^n H(\mathrm{gr}_I(M), i) = \sum_{i=0}^n l\left(\frac{I^i M}{I^{i+1}M}\right) = l\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right)$$

será chamada função de *Hilbert-Samuel de M relativamente ao ideal I.*

Proposição 1.51 *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local com dim$(A) = d$, $M \neq 0$ um A-módulo finitamente gerado, e I um ideal de definição de M. Então*

(a) a função de Hilbert-Samuel $\chi_M^I(n)$ é de tipo polinomial de grau d;

(b) $e(I, M) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} l\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right)$.

Desta proposição seguem imediatamente as seguinte observações:

Observações 1.52

1. Se $d = 0$ então $e(I, M) = l(M)$;
2. $e(I, M) > 0$ se dim$M = d$, e $e(I, M) = 0$ se dim$M < d$;
3. $e(I^r, M) = e(I, M)r^d$;
4. Se I e I' são ideais de definição de M tais que $I \supset I'$ então $e(I, M) \leq e(I', M)$.

Definição 1.53 Definimos $e(I) := e(I, A)$ como sendo a *multiplicidade de I*, e escrevemos $e(A)$ para indicar a multiplicidade de $\mathfrak{m}$.

Lema 1.54 (Artin-Rees) *Sejam A um anel Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado, $N \subset M$ submódulo, e I um ideal de A. Então existe um inteiro positivo c tal que para todo $n > c$, temos*

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N).$$

Agora seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano.

Teorema 1.55 *Seja* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *uma sequência exata de* A*-módulos finitamente gerados. Então, dado um* I *ideal de definição de* M,

$$e(I, M) = e(I, M') + e(I, M'').$$

Em particular, $e(M) = e(M') + e(M'')$

Prova:. Pela injetividade da aplicação, podemos ver M' como submódulo de M. Então,

$$l\left(\tfrac{M}{I^n M}\right) = l\left(\tfrac{M''}{I^n M''}\right) + l\left(\tfrac{M'}{M' \cap I^n M}\right)$$

e $I^n M' \subset M' \cap I^n M$. Por outro lado, pelo Lemma de Artin-Rees, existe $c > 0$ tal que

$$M' \cap I^n M \subset I^{n-c} M', \text{ para todo } n > c.$$

Assim,

$$l\left(\tfrac{M'}{I^{n-c} M'}\right) \leq l\left(\tfrac{M'}{M' \cap I^n M}\right) \leq l\left(\tfrac{M'}{I^n M'}\right)$$

Agora da proposição 1.51 teremos que

$$e(I, M) - e(I, M'') = \lim_{n \to \infty} \tfrac{d!}{n^d} l\left(\tfrac{M'}{M' \cap I^n M}\right) = e(I, M').$$

■

Definição 1.56 Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local, e I um ideal de definição de A, isto é, um ideal $\mathfrak{m}-$primário. Fixado um inteiro q, para todo A-módulo finito M de dimensão menor ou igual a q, definimos

$$e_q(I, M) = \begin{cases} e(I, M) & , \text{ se } \dim(M) = q, \\ 0 & , \text{ se } \dim(M) < q. \end{cases}$$

Lema 1.57 (Fórmula de Associatividade) *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel Noetheriano local,* I *um ideal de definição de* A*, e* M *um* A*-módulo finitamente gerado tal que* $dim(M) \leq q$*. Então*

$$e_q(I, M) = \sum_{\mathfrak{p}} l(M_{\mathfrak{p}}) e_q\left(I, \frac{A}{\mathfrak{p}}\right),$$

onde $\mathfrak{p}$ *percorre todos os ideais primos com* $\dim(\frac{A}{\mathfrak{p}}) = q$.

Prova:. Veja o Corolário 4.7.8 de [8]. ■

Teorema 1.58 *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado de posto positivo, e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário de A. Então*

$$e(I, M) = e(I, A)\mathrm{rk}(M).$$

Em particular, $e(M) = e(A)\mathrm{rk}(M)$.

Prova:. Seja $r = \mathrm{rk}(M)$. Temos que, para todo $\mathfrak{p}$ tal que $\dim(\frac{A}{\mathfrak{p}}) = d = \dim(A)$, $M_{\mathfrak{p}}$ é um $A_{\mathfrak{p}}$-módulo livre de posto r, assim, $M_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}^r$. Em particular M tem dimensão maximal e assim, $e(I, M) = e_d(I, M)$. Logo pelo lema anterior,

$$e(I, M) = \sum_{\mathfrak{p}} l(M_{\mathfrak{p}})e\left(I, \frac{A}{\mathfrak{p}}\right) = \sum_{\mathfrak{p}} r \cdot l(A_{\mathfrak{p}})e\left(I, \frac{A}{\mathfrak{p}}\right) = e(I, A)\mathrm{rk}(M).$$

O que conclui a demonstração. ■

Capítulo 2

Módulos de Ulrich

A teoria dos chamados *módulos de Ulrich* vem ganhando destaque na Álgebra Comutativa moderna, desde 1984 quando a questão foi levantada por B.Ulrich em [31]. Introduziremos este conceito na definição 2.3.

A título de informação, salientamos que tal teoria tem recebido notável tratamento geométrico através dos chamados *fibrados de Ulrich* ("Ulrich bundles"), como tem sido estudado, recentemente, por R. Hartshorne e outros autores (veja, por exemplo, [9] e [10]).

Vejamos algumas motivações importantes para nosso estudo sobre esta classe de módulos(vide a introdução de [5]):

1. Uma classe de anéis muito fundamental em Álgebra Comutativa é a dos anéis Gorenstein e sabemos que uma maneira de testar tal propriedade é a seguinte:

   A é um anel Gorenstein se, e somente se, $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$*, para* $i = 1, ..., \dim(A)$ *e para todo A-módulo maximal Cohen-Macaulay.*

   Usando módulos de Ulrich obtemos um teste mais simples:

   A é um anel Gorenstein se existe um módulo de Ulrich M tal que $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$*, para* $i = 1, ..., \dim(A)$

2. Mais adiante neste trabalho falaremos sobre a relação entre a propriedade de um A-módulo M ser de Ulrich e a existência de uma resolução linear apropriada associada a M. Dos resultados obtidos nesta seção seguirá que $\mathrm{prof}(M) = \mathrm{prof}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M))$, e assim teremos como consequência que o módulo graduado $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ associado a um módulo

de Ulrich M também será um módulo de Ulrich; porém, a reciproca é, em geral, falsa. Além disso, a existência de um módulo de Ulrich nos leva ao seguinte critério:

> Se um anel homogêneo A é o anel graduado associado de um anel local Cohen-Macaulay, então A tem, necessariamente, um módulo Cohen-Macaulay maximal graduado finitamente gerado.

3. A existência de um módulo de Ulrich sobre um anel de uma hipersuperfície garante, ainda, que para todo polinômio homogêneo $f \in B = k[X_1, ..., X_n]$ existe uma potência adequada f^m que pode ser escrita como determinante de uma matriz cujas as entradas são formas lineares em B.

Assim, nosso objetivo, neste capítulo, será estudar algumas classes importantes de anéis Cohen-Macaulay sobre os quais existe de módulos de Ulrich.

De agora em diante, todos os anéis serão admitidos locais Noetherianos Cohen-Macaulay. O ideal maximal de um anel local A será denotado $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}$ e o seu corpo residual $k = \frac{A}{\mathfrak{m}}$ que suporemos infinito.

2.1 O problema proposto por B. Ulrich

O resultado geral a seguir é básico:

Proposição 2.1 *Se M é um A-módulo Cohen-Macaulay maximal, então $\mu(M) \leq e(M)$.*

Prova:. Após uma extensão transcendente pura do corpo residual de A podemos assumir que $\mathfrak{m}$ possui uma redução minimal gerada por uma M-sequência máxima $\mathbf{x}$ (para uma prova desta afirmação vide [25]). Então, como M é Cohen-Macaulay maximal temos que $e(M) = l(\frac{M}{\mathbf{x}M})$ (veja [14]). Assim,

$$\mu(M) = \dim_k(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) = l(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) \leq l(\frac{M}{\mathbf{x}M}) = e(M)$$

■

Observação 2.2 Se M tem posto bem definido, então $e(M) = e(A)\mathrm{rk}(M)$. Isto segue do Teorema 1.58.

Questão(B. Ulrich): Existe A-módulo Cohen-Macaulay maximal M tal que $\mu(M) = e(M)$?

A intrigante questão acima originou a importante teoria dos chamados *Módulos de Ulrich*, o que constitui o nosso principal tema de estudo.

Definição 2.3 Um A-módulo maximal Cohen-Macaulay M é dito um *módulo de Ulrich* se $\mu(M) = e(M)$.

2.2 O caso 0-dimensional e alguns resultados gerais

Começaremos com o caso Artiniano:

Proposição 2.4 *Seja A zero-dimensional, então M é um módulo de Ulrich sobre A se, e somente se, $M \cong \bigoplus^{\mu(M)} k$.*

Prova:. ($\Rightarrow$) Se M é um módulo de Ulrich, então

$$\mathrm{dim_k}(\frac{\mathrm{M}}{\mathfrak{m}\mathrm{M}}) = \mu(\mathrm{M}) = \mathrm{e(M)}.$$

Como dim(A) = 0, temos que $e(M) = l(M)$. Logo,

$$\mathrm{dim_k}(\frac{\mathrm{M}}{\mathfrak{m}\mathrm{M}}) = \mathrm{l}(\frac{\mathrm{M}}{\mathfrak{m}\mathrm{M}}) = \mathrm{l(M)}$$

$$\Rightarrow 0 : M = \mathfrak{m}$$

Afirmação: $0 : M = \mathfrak{m} \Rightarrow M \cong \bigoplus^{\mu(M)} k$.

Defina φ: $M \rightarrow \bigoplus^{\mu(M)} k$ de forma que, denotando por $x_1, ...x_n$ geradores de M, temos $\varphi(x_1) = (\bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}), \varphi(x_2) = (\bar{0}, \bar{1}, ..., \bar{0}), ..., \varphi(x_n) = (\bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{1})$. É fácil ver que φ está bem definida, é linear e sobrejatora por construção. Mostremos sua injetividade:

$$ker(\varphi) = \left\{m \in M \mid \varphi(m) = 0_{\bigoplus^{\mu(M)} k}\right\} =$$
$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in M \mid \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = (\bar{a_1}, \bar{a_2}, ..., \bar{a_n}) = (\bar{0}, ..., \bar{0})\right\} \Leftrightarrow a_i \in \mathfrak{m} = 0 : M, \forall i \in$$
$$\{1, ..., n\} \Rightarrow a_i x_i = 0, \forall i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow m = 0$$

Assim, $M \cong \bigoplus^{\mu(M)} k$.

($\Leftarrow$) Se M é um A-módulo com A zero-dimensional e tal que $M \cong \bigoplus^{\mu(M)} k$, então

$$e(M) = l(M) = l(\bigoplus^{\mu(M)} k) = \mu(M).l(k) = \mu(M),$$

logo, M é um módulo de Ulrich.

■

Assim temos que, dado o anel A com $\dim(A) = 0$, o A-módulo $\bigoplus^{\mu(M)} k$ será um módulo de Ulrich; mais ainda, será o único módulo de Ulrich sobre o anel A, a menos de isomorfismo.

Em Álgebra Comutativa, é sempre importante discutir o comportamento de certas propriedades com respeito a sequências exatas curtas. Assim, nosso próximo objetivo é mostrar que a propriedade ser de Ulrich é preservada, em certo sentido, ao longo de sequências exatas. Mas, antes, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.5 *Seja M um A-módulo finitamente gerado tal que* $\dim(M) = \dim(A)$ *(por exemplo, se M possui posto bem definido sobre A), então, M é um módulo de Ulrich se, e somente se, existe uma M-sequência $\mathbf{x} \subset A$ tal que $\mathbf{x}M = \mathfrak{m}M$.*

Prova:. Sabemos que M é de Ulrich se, e somente se, $\dim_k(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) = \mu(M) = e(M)$. Analogamente à prova de 2.1 usamos que se M é Cohen-Macaulay máximo se, e somente se, existe uma M-sequência, $\mathbf{x}$, tal que $e(M) = l(\frac{M}{\mathbf{x}M})$. Finalmente note que ,

$$l(\frac{M}{\mathbf{x}M}) = l(\frac{M}{\mathfrak{m}M}) \Leftrightarrow \mathbf{x}M = \mathfrak{m}M.$$

■

Proposição 2.6 *Sejam M um A-módulo de Ulrich e M'' um A-módulo Cohen-Macaulay maximal, em uma sequência exata curta*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Então M' e M'' são módulos de Ulrich.

Prova:. Estendo k, se necessário, podemos selecionar uma M-sequência maximal tal que $\mathbf{x}M = \mathfrak{m}M$, e mais ainda, $\mathbf{x}$ ainda é uma sequência regular em M' e M''. Assim, tensorizando a dada sequência exata curta, por $\frac{A}{\mathbf{x}}$, obtemos

$$0 \to M' \otimes_A \frac{A}{\mathbf{x}} \to M \otimes_A \frac{A}{\mathbf{x}} \to M'' \otimes_A \frac{A}{\mathbf{x}} \to 0.$$

Onde, $M \otimes_A \frac{A}{\mathbf{x}} \cong \frac{M}{\mathbf{x}M} = \frac{M}{\mathfrak{m}M} =\cong \bigoplus^{\mu(M)} k$, e, portanto, $M' \otimes_A \frac{A}{\mathbf{x}} = \bigoplus^{\mu(M')} k$ e $M'' \otimes_A \frac{A}{\mathbf{x}} = \bigoplus^{\mu(M'')} k$. Pela proposição 2.4, M' e M'' são módulos de Ulrich. ■

2.3 Resoluções lineares e o caso 1-dimensional

Mostraresmos aqui algumas propriedades importantes que relacionam resoluções lineares à existência de Módulos de Ulrich. Para tal, comecemos com a noção de resolução linear.

Definição 2.7 Sejam $(A,\mathfrak{m})$ um anel local e $(B,\mathfrak{n})$ uma anel local regular, com uma sobrejeção local $B \twoheadrightarrow A$. Então um A-módulo M tem uma B-resolução linear, se para uma B-resolução livre minimal de M construída como na seção 1.4,

$$\dots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus^{\beta_1(M)} B \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus^{\beta_0(M)} B \xrightarrow{\varphi_0} M \to 0 \ ,$$

o complexo

$$\dots \xrightarrow{\mathrm{gr}(\varphi_2)} \mathrm{gr}\left(\bigoplus^{\beta_1(M)} B\right) \xrightarrow{\mathrm{gr}(\varphi_1)} \mathrm{gr}\left(\bigoplus^{\beta_0(M)} B\right) \xrightarrow{\mathrm{gr}(\varphi_0)} \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M) \to 0$$

é exato. Onde, $\bigoplus^{\beta_i(M)} B$ é filtrado por,

$$F_j\left(\bigoplus^{\beta_i(M)} B\right) = \begin{cases} \bigoplus^{\beta_i(M)} B & para \quad j \ < \ i \\ \mathfrak{n}^{j-i}(\bigoplus^{\beta_i(M)} B) & para \quad j \ \geq \ i \end{cases} .$$

Definição 2.8 ([7]) Uma sequência de elementos $x_1, ..., x_n$ de um anel A é uma d-sequência com respeito a um A-módulo M se, para cada i:

1. $x_i \notin (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$;

2. $((x_1, .., x_i)M :_M x_{i+1}) \cap (x_1, ..., x_n)M = (x_1, ..., x_i)M$.

Observação 2.9 No caso $M = A$, a condição 2 da definição acima é equivalente a: dada qualquer permutação de $x_1, ..., x_n$, $\forall i \geq 1$ e $\forall k \geq i+1$, vale $((x_1, ..., x_i) :_A x_{i+1}x_k) = ((x_1, ..., x_i) :_A x_k)$, que foi a definição inicialmente proposta por Huneke em [19].

Proposição 2.10 *Seja $(B,\mathfrak{n}) \twoheadrightarrow (A,\mathfrak{m})$ uma sobrejeção local, com $(B,\mathfrak{n})$ um anel local regular. Se M é um A-módulo Cohen-Macaulay maximal, são equivalentes:*

1. *M é um A-módulo de Ulrich;*

2. *O ideal $\mathfrak{n}$ é gerado por uma d-sequência sobre M;*

3. *M tem uma resolução B-linear.*

Prova:. 1. $\Rightarrow$ 2. Como M é um A-módulo de Ulrich, existe uma M-sequência maximal em A, $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_d\}$ tal que $\bar{\mathbf{x}}M = \mathfrak{m}M$ (pelo lema 2.5). Seja x_i uma pré-imagem pela sobrejeção de $\bar{x}_i$ em B. Estendemos o conjunto $\{x_1, ..., x_d\}$ para um conjunto minimal de geradores de $\mathfrak{n}$, $\{x_1, ..., x_n\}$. Assim, se $i < d$, então

$$(x_1, ..., x_i)M :_M x_{i+1} \cap \mathfrak{n}M = (\bar{x}_1, ...\bar{x}_i)M :_M \bar{x}_{i+1} \cap \mathfrak{m}M = (\bar{x}_1, ...\bar{x}_i)M = (x_1, ..., x_i)M.$$

Se $i \geq d$, então

$$(x_1, ..., x_i)M :_M x_{i+1} \cap \mathfrak{n}M = (\bar{x}_1, ...\bar{x}_i)M :_M \bar{x}_{i+1} \cap \mathfrak{m}M = \mathfrak{m}M = (\bar{x}_1, ...\bar{x}_i)M = (x_1, ..., x_i)M.$$

Logo, $\{x_1, ..., x_n\}$ é uma d-sequência sobre M.

2. $\Rightarrow$ 3. Foi provada Herzog, Simis e Vasconcelos em [18], Corolário 13.4.

3. $\Rightarrow$ 1. Como M admite uma resolução B-linear, existe uma resolução,

$$0 \to \bigoplus^{\beta_p(M)} \mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(B)(-p) \to ... \to \bigoplus^{\beta_1(M)} \mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(B)(-1) \to \bigoplus^{\beta_0(M)} \mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(B) \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M) \to 0.$$

Aplicando o resultado provado em [15], pg.1632,

$$e(M) = e(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)) = \mu(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)) \left\{ \sum_{i=1}^{p} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{p} \frac{j}{i-j} \right) \cdot \binom{i}{p} \right\} = \mu(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)) \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{j}{p-j} \right) = \mu(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)) = \mu(M)$$

Portanto, M é um A-módulo de Ulrich.

$\blacksquare$

Da propriedade acima vem a terminologia *Módulos Cohen-Macaulay Maximais Lineares.*

Corolário 2.11 *Se M é um A-módulo de Ulrich, então $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ é um $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$-módulo Cohen-Macaulay maximal com o mesmo número mínimo de geradores de M. E mais, assumindo que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{M})$ tem posto, então $\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M))$, e se $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ é Cohen-Macaulay, então $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ é um módulo de Ulrich.*

Prova:. Seja $(B, \mathfrak{n})$ um anel regular com $\widehat{A} \cong \frac{B}{I}$. Então os números de Betti de $\widehat{M}$ como B-módulo são os mesmos de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ como $\mathrm{gr}_{\mathfrak{n}}(B)$-módulo. Portanto, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ é um módulo Cohen-Macaulay maximal com o mesmo número de geradores de M. Se $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)$ tem posto bem definido, então

$$\mathrm{rk}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)) = e(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A))^{-1}e(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(M)) = e(A)^{-1}e(M) = \mathrm{rk}(M).$$

Como queríamos. ■

Tratemos agora do caso em que A é 1-dimensional.

Lema 2.12 *Se A é um anel 1-dimensional, então $\mathfrak{m}^{e(A)-1}$ é um A-módulo de Ulrich.*

Prova:. Como $\dim(A) = 1$ temos que $e(A) = \dim_k(\frac{\mathfrak{m}^{e(A)-1}}{\mathfrak{m}^{e(A)}})$ (veja pg.36 de [27]), e assim,

$$e(\mathfrak{m}^{e(A)-1}) = e(A) = \dim_k(\frac{\mathfrak{m}^{e(A)-1}}{\mathfrak{m}^{e(A)}}) = \mu(\mathfrak{m}^{e(A)-1}).$$

■

2.4 Anéis com multiplicidade minimal

Nosso objetivo agora é mostrar que quando A é um anel com multiplicidade minimal, então ele admite um módulo de Ulrich. Mais ainda, tal resultado não será só existencial, mas garantirá que $\mathrm{Syz}_i(k)$ é um A-módulo de Ulrich, para todo $i \geq d$, onde d é a dimensão de A.

Lema 2.13 *A é um A-módulo de Ulrich se, e somente se, A é regular.*

Prova:. Sabemos que A será um A-módulo de Ulrich se, e somente se, $e(A) = \mu(A) = 1$, mas como A é Cohen-Macaulay, a sua multiplicidade será 1 se, e somente se, A é regular. ■

Proposição 2.14 *([1]) Tem-se: $e(A) \geq \mathrm{edim}(A) - \dim(A) + 1$.*

Prova:. Podemos tomar um ideal I $\mathfrak{m}$-primário, gerado por um sistema de parâmetros com $\dim(A) = n$ elementos, e tal que $e(I) = e(A)$ (veja [29], Teorema 22, pg.294).
Então

$$l(\tfrac{A}{I}) - 1 = l(\tfrac{\mathfrak{m}}{I}) \geq l(\tfrac{\mathfrak{m}}{I+\mathfrak{m}^2}) = l(\tfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}) - l(\tfrac{I+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}).$$

Agora,

$$l(\tfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}) = \dim_k(\tfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}) = \mathrm{edim}(A) \text{ e } l(\tfrac{I+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}) = \dim_k(\tfrac{I+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}),$$

como I é gerado por n elementos, temos que $\dim_k(\frac{I+\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}) \leq \dim(A)$ e sendo A Cohen-Macaulay e I gerado por um sistema de parâmetros, tem-se $l(\frac{A}{I}) = e(I)$ de acordo com [29], Teorema 3, pg.400. Daí segue o resultado. ∎

Definição 2.15 No caso da igualdade $e(A) = \text{edim}(A) - \dim(A) + 1$, dizemos que A tem multiplicidade minimal.

Exemplo 2.16 Seja k um corpo e f um polinômio homogêneo de grau 2 em $k[x_1, ..., x_n]$, então $\left(\frac{k[x_1,...,x_n]}{(f)}\right)_{(x_1,...,x_n)}$ é um anel de multiplicidade minimal.

Lema 2.17 *Sejam M um A-módulo e $x \in A$ um elemento M-regular. Seja $\bar{M} = \frac{M}{xM}$. Então existe uma sequência exata*

$$0 \to \text{Syz}_n(M) \longrightarrow \text{Syz}_n(\bar{M}) \longrightarrow \text{Syz}_{n-1}(M) \to 0,$$

para todo $n \geq 0$.

Esboço. Considere $\mathcal{F}$ uma A-resolução livre minimal de M. A aplicação $\mu_x : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dada pela multiplicação por x nos dará a seguinte sequência exata curta de complexos

$$0 \to \mathcal{F} \longrightarrow C(\mu_x) \longrightarrow \mathcal{F}[-1] \to 0,$$

com $C(\mu_x)$ o "mapping cone"da aplicação μ_x, que é uma resolução minimal de $\bar{M}$ como A-módulo. Truncando a sequência em cada $n > 1$ obtemos o resultado. No caso $n = 1$ é claro. ∎

Proposição 2.18 *Seja $d = \dim(A) > 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\text{Syz}_i(k)$ *é um A-módulo de Ulrich, para algum $i > 0$;*

2. *Existe um A-módulo de Ulrich N tal que* $\text{Syz}_i(N)$ *é um A-módulo de Ulrich;*

3. *A tem multiplicidade minimal;*

4. $\text{Syz}_i(k)$ *é um A-módulo de Ulrich, para todo $i \geq d$.*

Prova:. $1 \Rightarrow 2$) Considere $M = \text{Syz}_i(k)$ um A-módulo de Ulrich. Seja $\{x_1, ..., x_d\}$ uma sequência M-regular maximal e considere, $\bar{M} = M \otimes_A \frac{A}{(\mathbf{x_1,...,x_{d-1}})}$ e $\bar{\bar{M}} = M \otimes_A \frac{A}{(\mathbf{x_1,...,x_d})}$. Pelo lema 2.17 temos,

$$0 \to \mathrm{Syz}_i(\bar{M}) \longrightarrow \mathrm{Syz}_i(\bar{\bar{M}}) \longrightarrow \mathrm{Syz}_{i-1}(\bar{M}) \to 0.$$

Agora, sendo M um A-módulo de Ulrich, $\bar{\bar{M}} \cong \bigoplus^{\mu(M)} k \Rightarrow \mathrm{Syz}_i\bar{\bar{M}} \cong \bigoplus^{\mu(M)}(\mathrm{Syz}_i(k))$. Portanto $\mathrm{Syz}_i\bar{\bar{M}}$ é um módulo de Ulrich e além disso, $i \geq d$, porque M é Cohen-Macaulay. Assim, $\mathrm{Syz}_{i-1}(\bar{M})$ é um módulo Cohen-Macaulay maximal e, pela proposição 2.6, $\mathrm{Syz}_i(\bar{M})$ e $\mathrm{Syz}_{i-1}(\bar{M})$ são módulos de Ulrich. Finalmente, tome $N = \mathrm{Syz}_{i-1}(\bar{M})$.

$2 \Rightarrow 3$) Considere uma apresentação livre de N,

$$0 \to \mathrm{Syz}_1(N) \longrightarrow \bigoplus^{\mu(N)} A \longrightarrow N \to 0.$$

Tomemos uma N-sequência maximal $\mathbf{x}$. Tensorizando obtemos

$$0 \to \mathrm{Syz}_1(N) \otimes_A \tfrac{A}{\mathbf{x}} \longrightarrow \bigoplus^{\mu(N)} A \otimes_A \tfrac{A}{\mathbf{x}} \longrightarrow N \otimes_A \tfrac{A}{\mathbf{x}} \to 0,$$

E assim a sequência

$$0 \to \mathrm{Syz}_1(N) \otimes_A \bar{\bar{A}} \longrightarrow \bigoplus^{\mu(N)} \bar{\bar{A}} \longrightarrow \bigoplus^{\mu(N)} k \to 0$$

é exata, e vale $\dim(\bar{\bar{A}}) = 0$.
Assim,

$$\mathrm{Syz}_1(N) \otimes \bar{\bar{A}} \cong \bigoplus^{\mu(N)} \mathfrak{m}_{\bar{\bar{A}}} = \bigoplus^{\mu(N)} \mathfrak{m} \otimes_A \tfrac{A}{\mathbf{x}}.$$

Por outro lado, $\mathrm{Syz}_1(N)$ é módulo de Ulrich, logo $\mathfrak{m}_{\bar{\bar{A}}}$ anula $\mathrm{Syz}_1(N) \otimes \bar{\bar{A}}$, e portanto, $\mathfrak{m}^2_{\bar{\bar{A}}} = 0$. E então,

$$e(A) = e(\bar{\bar{A}}) = \mathrm{edim}(\bar{\bar{A}}) + 1 = \mathrm{edim}(A) - d + 1.$$

Portanto A tem multiplicidade minimal.

$3 \Rightarrow 4$) Sabemos por [27] que em um anel de multiplicidade minimal,

$$\beta_i(k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{d} [e(A)-1]^{i-j} \binom{d}{j} & \textit{para} \quad i \quad \geq \quad d \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{i} [e(A)-1]^{i-j} \binom{d}{j} & \textit{para} \quad i \quad \leq \quad d \end{cases}.$$

Logo,

$$\mu(\mathrm{Syz}_i(k)) = \beta_i(k) = [e(A)-1]^{i-d} e(A)^d, \text{ para } i \geq d$$

Temos,

$$e(\mathrm{Syz}_{i+1}(k)) = e(A)\beta_i(k) - e(\mathrm{Syz}_i(k)).$$

Se $\mathrm{Syz}_i(k)$ é um módulo de Ulrich, então,

$$e(\mathrm{Syz}_{i+1}(k)) = [e(A)-1]^{i-d}e(A)^{d+1} - [e(A)-1]^{i-d}e(A)^d = [e(A)-1]^{i+1-d}e(A)^d = \mu(\mathrm{Syz}_{i+1}(k)).$$

Portanto, $\mathrm{Syz}_{i+1}(k)$ é um módulo de Ulrich. Como $\beta_d(k) = e(A)^d$, devemos mostrar que $e(\mathrm{Syz}_d(k)) = e(A)^d$. Veja que,

$$e(\mathrm{Syz}_d(k)) = \left|\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^i\beta_i(k)e(A)\right| = \left|\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^i e(A)\sum_{j=0}^{i}[e(A)-1]^{i-j}\binom{d}{j}\right|$$

$$= \tfrac{e(A)}{[e(A)-1]^d}\left|\sum_{j=0}^{d-1}\left(\sum_{i=1}^{d-1}(-1)^i[e(A)-1]^i\right)\binom{d}{j}[e(A)-1]^{d-j}\right|$$

$$= \tfrac{1}{[e(A)-1]^d}\left|\sum_{j=0}^{d-1}\left\{(-1)^j[e(A)-1]^j - (-1)^d[e(A)-1]^d\right\}\binom{d}{j}[e(A)-1]^{d-j}\right|$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j\binom{d}{j} + (-1)^{d+1}\sum_{j=0}^{d-1}\binom{d}{j}[e(A)-1]^{d-j}\right|$$

$$= \left|1 + (e(A)^d - 1)\right| = e(A)^d = \mu(\mathrm{Syz}_d(k))$$

$4 \Rightarrow 1)$ Não há o que provar. ■

Observe que a hipótese do anel ter dimensão positiva não pode ser enfraquecida, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.19 Seja K um corpo, $n \geq 2$ um inteiro e seja $A = \frac{K[x]}{(x^n)}$. Então a sequência $0 \longrightarrow K \to A \to A \to K \longrightarrow 0$ é exata, assim $\mathrm{Syz}_2(K)$ é um módulo de Ulrich, enquanto, A tem multiplicidade minimal se, e somente se, $n = 2$.

Proposição 2.20 *Se o anel local A é Gorenstein, zero-dimensional e $\mathrm{Syz}_i(k)$ é um módulo de Ulrich para algum $i > 0$, então A é um anel de uma hipersuperfície.*

Prova:. Considere o complexo minimal

$$0 \to \mathrm{Syz}_i(k) \to \cdots A \to k \to 0.$$

Como A é zero-dimensional, denotando por $N := \mu(\mathrm{Syz}_i(k))$, a proposição 2.4 implica, $\mathrm{Syz}_i(k) \cong \bigoplus^N k$. Dualizando este complexo, com respeito a A, como A é auto-injetivo, obtemos

$$0 \to k \to A \to \cdots \to \bigoplus^N A \to \bigoplus^N k \to 0,$$

e assim $N = 1$. Os números de Betti de k estão, assim, limitados e a conclusão segue de [11]. ■

2.5 Domínios homogêneos Cohen-Macaulay 2-dimensionais

Para a prova do próximo resultado, começaremos mostrando que o anel quociente associado ao menor maximal de uma matriz apropriada admite um modulo de Ulrich.

Proposição 2.21 *Sejam r, s inteiros não-negativos, com $s \geq r$. Seja $B = k[X_1, ..., X_n]$ e seja $\mathcal{C}$ uma $r \times s$-matriz cujas entradas são formas lineares em B, com $I = I_r(\mathcal{C})$ o ideal de B gerado pelo menor maximal de $\mathcal{C}$, tendo grade $(s - r + 1)$. Então o anel $A = B/I$ admite um módulo de Ulrich M. Se I é um ideal primo, então M pode ser tomado de posto um.*

Prova:. Se I é primo, seja $\mathcal{Y}$ a matriz obtida a partir da matriz $\mathcal{C}$ retirando uma linha. Então $I_{r-1}(\mathcal{Y}) \supsetneq I$, assim

$$ht(I_{r-1}(\mathcal{Y})) \geq ht(I) + 1 = s - (r - 1) + 1.$$

Por outro lado, temos $ht(I_{r-1}(\mathcal{Y})) \leq s - (r - 1) + 1$, logo

$$ht(I_{r-1}(\mathcal{Y})) = s - (r - 1) + 1 = ht(I) + 1.$$

Portanto, já que $I_{r-1}(\mathcal{Y})$ é um ideal Cohen-Macaulay, $I_{r-1}(\mathcal{Y})/I$ é um ideal de Cohen-Macaulay de altura 1 e, assim, $I_{r-1}(\mathcal{Y})/I$ é um A-módulo Cohen-Macaulay Maximal com posto 1 (veja [17], 4.13). Além disso,

$$\mu(I_{r-1}(\mathcal{Y})/I) = \mu(I_{r-1}(\mathcal{Y})) = \binom{s}{r-1} = e(A) = e\left(I_{r-1}(\mathcal{Y})/I\right) \cdot \mathrm{rk}\left(\mathrm{I_{r-1}}(\mathcal{Y})/\mathrm{I}\right) = \mathrm{e}\left(\mathrm{I_{r-1}}(\mathcal{Y})/\mathrm{I}\right)$$

(veja [20], Exemplo 1.9, pg.1153). Assim A admite um módulo de Ulrich de posto um.

Caso contrário, seja $\mathcal{X}$ uma $r \times s$-matriz genérica e $S = B[\mathcal{X}]/I_r(\mathcal{X})$. Então $A \cong S/(y_1, ..., y_{rs})$, onde $y_1, ..., y_{rs}$ é uma sequência regular que consiste de formas lineares. Então,

$e(A) = e(S)$. Pelo que acabamos de ver, S admite um módulo de Ulrich M. O módulo $M \otimes_S A$ é um A-módulo de Ulrich.

■

Este resultado pode ser generalizado:

Proposição 2.22 *Sejam $B = k[X_1, ..., X_n]$, I um ideal homogêneo Cohen-Macaulay de grade g admitindo uma resolução linear com geradores de grau d, e seja J um ideal homogêneo Cohen-Macaulay de grade $g+1$ com resolução linear, que contém I e tem geradores de grau d ou $d-1$. Então $\frac{B}{I}$ possui um módulo de Ulrich de posto um.*

Para $\frac{B}{I}$ ter um módulo de Ulrich de posto um não é suficiente que I tenha uma resolução linear.

Exemplo 2.23 Sejam $n > 2$ um inteiro positivo, $\mathcal{X}$ uma $n \times n$-matriz simétrica genérica, $B = k[X]$, $I = I_{n-1}(X)$ e considere $A = \frac{B}{I}$. O ideal I tem uma resolução linear (Vide [21], §3, pg.599) e $e(A) = \binom{n+1}{3}$ (veja [20], Exemplo 1.10, pg.1153), enquanto que o grupo de classes de A é cíclico de ordem 2 com elemento não trivial dado por um ideal com n geradores ([13]). Então, A não tem um módulo de Ulrich de posto um.

Prosseguindo rumo ao nosso objetivo, vamos construir ideais Gorenstein com elevado número de geradores. Suporemos que $A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A_i$ é um domínio homogêneo e $A_0 = K$ é um corpo infinito.

Definição 2.24 Seja $\mathcal{A}$ uma matriz quadrada cujas entradas são formas lineares em $K[X_1, ..., X_m]$. Dizemos que $\mathcal{A}$ *não tem zeros generalizados* se nenhuma combinação K-linear não-trivial das linhas e colunas de $\mathcal{A}$ possui uma entrada nula.

Teorema 2.25 *Seja $\mathcal{A}$ uma $n \times n$-matriz de formas lineares em $K[X_1, ..., X_m]$ sem zeros generalizados, e sejam $z_1, .., z_{n-1}$ formas lineares em $K[X_1, ..., X_m]$. Então $det\mathcal{A} \notin (z_1, .., z_{n-1})$. Em particular, $det\mathcal{A} \neq 0$.*

Prova:. Veja [12]. ■

Vamos agora construir uma matriz $\mathcal{A}$ sem zeros generalizados.

Seja U um subespaço de A_i e V um subespaço de A_j com $\dim_K U = \dim_K V$ e considere $\{u_1, ..., u_n\}$ e $\{v_1, ..., v_n\}$ bases de U e V, respectivamente, e $\{c_1, ..., c_m\}$ uma base para A_{i+j}. Então,

$$u_i v_j = \sum_{t=1}^m y_{ij}^t c_t, \text{ para algum } y_{ij}^t \in K,$$

e como $y_{ij}^t \neq 0$ para algum $t = 1, ..., m$. Considere

$$a_{ij} = \sum_{t=1}^m y_{ij}^t X_t \in K[X_1, ..., X_m],$$

assim, temos uma matriz $n \times n$, $\mathcal{A}$, cujas entradas serão dadas por a_{ij}.

Lema 2.26 *A matriz $\mathcal{A}$ não tem zeros generalizados.*

Prova:. Realizar combinações K-lineares entre linhas e colunas da matriz $\mathcal{A}$ é equivalente a selecionarmos bases diferentes para os K-subespaços U e V. Como A é domínio, o produto de elementos não nulos em U por elementos não nulos em V será diferente de zero. Portanto, pela forma que construímos $\mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A}$ não tem zeros generalizados. ■

Proposição 2.27 *Seja s um inteiro não negativo e sejam U_i e V_i subespaços de A_i, para $i = 0, ..., s$ tais que $\dim_K U_i \leq \dim_K V_{s-i}$. Então, existe $W \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de $A_s^* = \mathrm{Hom}_K(A_s, K)$ tal que para todo $\varphi \in W$, todo $i = 0, ..., s$ e todo $u \in U_i$ não nulo, tem-se $\varphi(u.V_{s-i}) \neq 0$ (ou seja, existe um $v \in V_{s-i}$ tal que $\varphi(uv) \neq 0$).*

Prova:. Veja que é suficiente provar o caso em que $\dim_K U_i = \dim_K V_{s-i}$ $\forall i = 0, ..., s$. Para isto, fixemos i e sejam $\{u_1, ..., u_n\}$ uma base de U_i, $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V_{s-i} e $\{c_1, ..., c_m\}$ uma base de A_s. Com $u_p v_j = \sum_{t=1}^m y_{pj}^t c_t$, seja $\mathcal{A}_i(\mathfrak{x})$ a matriz $n \times n$ onde suas entradas serão as formas lineares dadas por $a_{pj} = \sum_{t=1}^m y_{pj}^t X_t$, com $\mathfrak{x} = (X_1, ..., X_m)$. Seja $c_t^* \in A_s^*$ tal que $c_t^*(c_j) = \delta_{tj}$. Então $\{c_1^*, ..., c_m^*\}$ formam uma base de A_s^*. Para cada i, seja

$$W_i = \{\varphi \in A_s^*; \varphi = \sum_{t=1}^m z_t c_t^*, det\mathcal{A}_i(\mathfrak{z}) \neq 0, z_t \in K\}, \text{ onde } \mathfrak{z} = (z_1, ..., z_m).$$

Para $\varphi = \sum_{t=1}^m z_t c_t^* \in A_s^*$, a matriz $det\mathcal{A}_i(\mathfrak{z})$ coincide com a matriz $(\varphi(u_p v_j))$. Agora se $\varphi \in w_i$ então $det\mathcal{A}_i(\mathfrak{z}) \neq 0$, assim φ define uma forma bilinear $U_i \times Vs - i \to K$ não degenerada. Portanto,$\varphi(u.V_{s-i}) \neq 0$ para todo $0 \neq u \in U$. Pelo lema anterior, $\mathcal{A}_i(\mathfrak{x})$ é uma matriz sem zeros generalizados, segue-se do teorema 2.25 que o conjunto $W_i \neq \emptyset$ é um aberto. No entanto, como k é infinito, o conjunto $W = \cap_{i=0}^{s} W_i$, sendo uma interseção finita de abertos, W será o conjunto que procurávamos.

■

Notação. Para $\varphi \in A_s^*$, denotaremos por $I(\varphi)_i$ o $k-$espaço vetorial $\{a \in A_i; \varphi(aA_{s-i}) = 0\}$ e por $I(\varphi)$ o $k-$espaço vetorial $\bigoplus_{i\geq 0} I(\varphi)_i$. Além disso, $A(\varphi) = \frac{A}{I(\varphi)}$.

Proposição 2.28 *Para $\varphi \in A_s^*$, $\varphi \neq 0$, $I(\varphi)$ é um ideal homogêneo Gorenstein, primário para o ideal maximal irrelevante. O anel Artiniano $A(\varphi)$ tem seu socle gerado em grau, pelo menos, s.*

Prova:. É claro que $I(\varphi)$ é um ideal homogêneo, de fato, é suficiente provar que $I(\varphi)_i A_j \subseteq I(\varphi)_{i+j}$, logo, seja $a \in I(\varphi)_i A_j$, então existem $a_1 \in I(\varphi)_i$ e $a_2 \in A_j$ tais que $a = a_1 a_2$, note que

$$\varphi(aA_{s-(i+j)}) = \varphi(a_1 a_2 A_{s-(i+j)}) = \varphi(a_1 A_{s-i}) = 0,$$

portanto $a \in I(\varphi)_{i+j}$.

Se $i > s$, então $A_{s-i} = 0$, assim $I(\varphi)_i = A_i$. Logo, $I(\varphi)$ é $\mathfrak{m}$-primário, onde $\mathfrak{m}$ é o maximal irrelevante. O socle de $A(\varphi)$ será a imagem do conjunto $X = \{x \in A; x\mathfrak{m} \in I(\varphi)\}$ que está contida em $A(\varphi)$. Como $I(\varphi)$ é homogêneo, todo elemento de X será a soma de elementos homogêneos de X. Se $x \in A_i \cap X$, então $\varphi(xA_1 A_{s-i-1}) = 0$. Assim, sempre que $i \neq s$, tem-se $x \in I(\varphi)$. Portanto, o socle de $A(\varphi)$ é gerado em grau, pelo menos, s. Desde que $\dim_K ker\varphi = \dim_K A_s - 1$, teremos que $\dim_K \mathrm{Soc}(A(\varphi)) = 1$, assim $A(\varphi)$ será de tipo 1, logo Gorenstein, portanto o ideal $I(\varphi)$ é Gorenstein. ■

Corolário 2.29 *Sejam s um inteiro não negativo e U_i, $\quad i = \{0, ..., s\}$ subespaços de A_i tal que $\dim_K U_i \leq \dim_K A_{s-i}$, para $i = 0, ..., s$. Então existe um $\emptyset \neq W \subset A_s^*$ aberto, tal que para $\varphi \in W$ tem-se $U_i \cap I(\varphi) = 0$.*

Prova:. Aplique 2.27 para $V_i = A_i, i = \{0, ..., s\}$.

■

A existência de um ideal Gorenstein com alto número de geradores pode agora ser mostrada em dimensional 2.

Corolário 2.30 *Seja $A = \bigoplus_{i\geqslant 0} A_i$ um domínio homogêneo 2-dimensional (não necessariamente Cohen-Macaulay), com $A_0 = K$ um corpo infinito. Então existe um ideal Gorenstein de A, $\mathfrak{m}$-primário, com, pelo menos, $2e(A)$ geradores.*

Prova:. Como A é 2-dimensional para $i \gg 0$ temos

$$\dim_K A_i - \dim_K A_{i-1} = e(A) \tag{2.1}$$

Seja t um inteiro suficientemente grande tal que 2.1 ocorre para todo $i \geq t$. Tome $s = 2t$, pelo corolário anterior, usando $U_i = 0$ para $i \neq t$ e $U_t = A_t$, existe $(\varphi) \in A_s^*$ com $I(\varphi) \cap A_t = 0$. Assim, sendo A um domínio homogêneo, $I(\varphi) \cap A_i = 0$ se $i \leq t$. Assim $\mu(I(\varphi)) \geq \mathrm{dim_K I(\varphi)_{t+1}}$. Como $A(\varphi)$ é Gorenstein pela proposição 2.28, teremos a função de Hilbert simétrica, e obteremos

$$\dim_k I(\varphi)_{t+1} = \dim_K A_{t+1} - \dim_k A(\varphi)_{t+1} = \dim_K A_{t+1} - \dim_K A(\varphi)_{t-1}$$

Mas $A(\varphi)_{t-1} \cong A_{t-1}$, como $I(\varphi)_{t-1} = 0$. Portanto,

$$\dim_K I(\varphi)_{t+1} = \dim_K A_{t+1} - \dim_K A_{t-1} = 2e(A).$$

A ultima equação é satisfeita, pois 2.1 é válida para t e $t+1$. Portanto

$$\mu(I(\varphi)) \geq 2e(A).$$

■

Para os próximos resultados vamos supor que A é Cohen-Macaulay (como antes), A admite um módulo canônico ω_A, e $I \subset A$ um ideal Cohen-Macaulay de altura 2. Lembre que $\mathrm{tipo}(\frac{A}{I}) = \mu(\mathrm{Ext}^2_A(\frac{A}{I}, \omega_A))$.

Teorema 2.31 *Para A e I com as hipóteses acima, existe um A-módulo Cohen-Mcaulay maximal M, com no mínimo $\mu(I)$ geradores e multiplicidade igual a $e(A)[\mathrm{tipo}(\frac{A}{I}) + 1]$.*

Prova:. A sequência exata curta dada por

$$0 \to I \to A \to \frac{A}{I} \to 0$$

nos dá os seguintes isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_A(I,\omega_A) \cong \omega_A$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(I,\omega_A) \cong \mathrm{Ext}^2_A(\tfrac{A}{I},\omega_A) \cong \omega_{\frac{A}{I}}$$

Temos ainda que

$$\mathrm{Ext}^i_A(I,\omega_A) = 0, \text{ para todo } i \geq 2.$$

(Para detalhes consulte, [17])

Além disso, ω_A é um módulo Cohen-Macaulay maximal com $\mathrm{Hom}_A(\omega_A,\omega_A) = A$ e $e(\omega_A) = e(A)$. Seja $\xi_1,...,\xi_{\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})}$ um conjunto mínimo de geradores para $\mathrm{Ext}^1_A(I,\omega_A)$ e seja M a extensão de I por $\bigoplus^{\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})}\omega_A$ correspondendo ao elemento $\xi_1,...,\xi_{\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})}$ de

$$\mathrm{Ext}^1_A(I,\bigoplus^{\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})}\omega_A) \cong \bigoplus^{\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})}\mathrm{Ext}^1_A(I,\omega_A).$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-,\omega_A)$ à sequência exata curta,

$$0 \to \bigoplus^{\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})}\omega_A \to M \to I \to 0, \tag{2.2}$$

obtemos a seguinte sequência exata longa

$$0 \to \omega_A \to \mathrm{Hom}_A(M,\omega_A) \to \bigoplus^{\mathrm{Tipo}(\frac{A}{I})} A \xrightarrow{\delta} \omega_{\frac{A}{I}} \to \mathrm{Ext}^1_A(M,\omega_A) \to 0, \tag{2.3}$$

bem como $\mathrm{Ext}^i_A(M,\omega_A) = 0$, para $i \geq 2$. Da maneira como escolhemos M a aplicação δ será sobrejetiva, logo $\mathrm{Ext}^1_A(M,\omega_A) = 0$. Assim, M é Cohen-Macaulay maximal. Agora pela exatidão de 2.2 temos que $\mu(M) \geq \mu(I)$ e

$$e(M) = e(I) + \mathrm{tipo}(\tfrac{A}{I})e(\omega_A) = e(A)[\mathrm{tipo}(\tfrac{A}{I}) + 1].$$

O que conclui a demonstração.

■

Corolário 2.32 *Sejam A e I como no teorema acima com $\mu(I) \geq e(A)[\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})+1]$. Então A admite um módulo de Ulrich com $e(A)[\mathrm{tipo}(\frac{A}{I})+1]$ geradores.*

Prova:. Seja M o módulo Cohen-Macaula máximo fornecido pelo teorema anterior. Temos

$$\mu(I) \leq \mu(M) \leq e(M) = e(A)[\text{tipo}(\tfrac{A}{I}) + 1],$$

no entanto, por hipótese $\mu(I) \geq e(A)[\text{tipo}(\frac{A}{I}) + 1]$, e portanto

$$\mu(M) = e(M) = e(A)[\text{tipo}(\tfrac{A}{I}) + 1]$$

■

Definição 2.33 Dado um A-módulo M, dizemos que M é *auto-dual com respeito a* ω_A, se $M \cong \text{Hom}_A(M, \omega_A)$.

Corolário 2.34 *Sejam A e I como acima, com I um ideal Gorenstein. Então A admite um módulo Cohen-Macaulay maximal auto-dual com respeito a ω_A e com, pelo menos, $\mu(I)$ geradores, e multiplicidade $2e(A)$.*

Prova:. Tome M como construído em 2.31. Desde que $\frac{A}{I}$ é Gorenstein, o complexo 2.3 torna-se

$$0 \to \omega_A \to \text{Hom}_A(M, \omega_A) \to A \xrightarrow{\delta} \tfrac{A}{I} \to 0$$

Assim, $ker(\delta) = I$. Logo $\text{Hom}_A(M, \omega_A)$ é uma extensão de I por ω_A. $\text{Hom}_A(M, \omega_A)$ é um módulo Cohen-Macaulay maximal. Assim, como

$$\text{Ext}^1_A(I, \omega_A) \cong \omega_{\frac{A}{I}} \cong \tfrac{A}{I},$$

e M corresponde a ξ_M e $\text{Hom}_A(M, \omega_A)$ corresponde a $\xi_{\text{Hom}_A(M,\omega_A)}$, onde ξ_M e $\xi_{\text{Hom}_A(M,\omega_A)}$ são geradores de $\frac{A}{I}$, daí segue que $\xi_M = u\xi_{\text{Hom}_A(M,\omega_A)}$ com $u \in A$ uma unidade. Então $M \cong \text{Hom}_M(M, \omega_A)$.

■

Definição 2.35 Um anel A é dito *genericamente Gorenstein*, se para todo $P \in Ass(A)$ o anel A_P é Gorenstein. Neste caso, ω_A tem posto um.

Corolário 2.36 *Sejam A e I como acima, e além disso suponhamos A genericamente Gorenstein. Então A admite um módulo maximal Cohen-Macaulay com* $\text{rk}(M) = [\text{tipo}(\frac{A}{I}) + 1]$ *e com, no mínimo, $\mu(I)$ geradores.*

Prova:. Aplicando o teorema 2.31, é suficiente observar que M terá posto bem definido, logo,

$$e(M) = e(A)\mathrm{rk}(M) = e(A)[\mathrm{tipo}(\tfrac{A}{I}) + 1].$$

∎

Definição 2.37 Um anel A é *normal* se todas as suas localização são domínios integralmente fechados. Sendo A um anel normal e M um A-módulo com $\mathrm{rk}(M) = m$, o determinante de M, $detM$, é a classe de $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(\Lambda^m M, A), A)$ no grupo de classes de A. Um A-módulo será chamado orientável se $detM = 0$.

Valem as seguintes propriedades:

1. Se $0 \to N' \to N \to N" \to 0$ é exata, então $detN = detN' + detN"$;
2. N será um módulo orientável, livre de torção, de posto um se, e somente se, N é livre ou isomorfo a um ideal de codimensão, pelo menos, 2.

Corolário 2.38 *Sejam A e I como acima, e mais ainda A Gorenstein e normal. Então A admite um módulo M orientável Cohen-Macaulay maximal com* $\mathrm{rk}(M) = [\mathrm{tipo}(\frac{A}{I}) + 1]$ *e pelo menos $\mu(I)$ geradores.*

Note que, pelo teorema 2.31

$$\mu(I) \leq e(A)[\mathrm{tipo}(\tfrac{A}{I}) + 1],$$

Consequentemente o ideal de 2.30 tem exatamente $2e(A)$ geradores e será gerado por elementos de grau $t + 1$. Assim, aplicando os resultados anteriores obtemos,

Teorema 2.39 *Se A é um domínio homogêneo Cohen-Macaulay 2-dimensional com corpo de classes residuais infinito, então A admite um módulo de Ulrich, auto-dual com respeito a ω_A e com* $\mathrm{rk}(M) = 2$.

2.6 Interseções completas estritas

Seja $(A, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay e seja $f \in \mathfrak{m}$ um não divisor de zero. Vamos construir um módulo Cohen-Macaulay maximal sobre $\frac{A}{(f)}$ usando as fatorações matriciais de f.

Definição 2.40 Sejam M e M' A-módulos e sejam $M = U_0 \supseteq U_1 \supseteq ...$ e $M' = U'_0 \supseteq U'_1 \supseteq ...$ duas cadeias de submódulos. Tais cadeias são isomorfas se existe um isomorfismo $\phi : M \tilde{\to} M'$ que induz isomorfismos $\phi|_{U_i} : U_i \tilde{\to} U'_i$ para todo i.

Teorema 2.41 *Existe uma bijeção entre as classes de equivalência das fatorações matriciais* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ *de* f *de ordem* s *tais que cada* α_i *tem entradas em* $\mathfrak{m}$*, e a classe de isomorfismos de cadeias de submódulos* $F = U_0 \supseteq U_1 \supseteq ... \supseteq U_d = 0$ *de um* $\frac{A}{(f)}$*-módulo livre* F *de posto* s*, tal que*

(1) $U_{i+1} \subseteq \mathfrak{m}U_i$*, para* $i = 0, ..., d-1$*, e*

(2) $\frac{U_i}{U_{i+1}}$ *é um módulo Cohen-Macaulay máximo sobre* $\frac{A}{(f)}$*, com dimensão homológica finita sobre* A*, e minimalmente gerado por* s *elementos para* $i = 0, ..., d-1$*.*

Prova:. Dada uma fatoração matricial $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ de ordem s, consideremos $G = A^s$, e seja $\varphi_i \in \mathrm{End}(G)$ um epimorfismo definido por α_i com respeito a base canônica de G. Além disso, consideremos $\psi_0 = Id_G$, $\psi_i = \varphi_d \circ ... \circ \varphi_{d-i-+1}$ para $i = 1, ..., d$, e seja $V_i = \psi_i(G) \subseteq G$. Note que $\psi_d = f \circ Id_G$. Agora V_i são A-módulos livres de posto s com $G = V_0 \supseteq V_1 \supseteq ... \supseteq V_d = f.G$ e $V_{i+1} \subseteq \mathfrak{m}V_i$. E mais existem as seguintes sequências exatas

$$0 \to V_{i+1} \cong G \to V_i \cong G \to \tfrac{V_i}{V_{i+1}} \to 0$$

Agora os módulos $U_i = \frac{V_i}{V_d} = \frac{V_i}{fG}$ satisfazem (1) e (2). Se substituirmos α por uma fatoração matricial equivalente $\alpha' = (\alpha'_1, ..., \alpha'_d)$, e φ_i por φ'_i, então existem isomorfismos $\delta_i : G \tilde{\to} G$ para $i = 1, ..., d$, tal que o diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
G & \xrightarrow{\varphi_1} & G & \xrightarrow{\varphi_2} & G & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi_d} & G \\
\downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \delta_3 & & & & \downarrow \delta_d & & \downarrow \delta_1 \\
G & \xrightarrow{\varphi'_1} & G & \xrightarrow{\varphi'_2} & G & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi'_d} & G
\end{array}$$

Em particular, o isomorfismo $\delta_1 : G \to G$ induz os isomorfismos $\delta_1|_{V_i} : V_i = \psi_i(G)\tilde{\to}V_i' = \psi_i'(G)$ para $i = 1, ..., d$. Assim obtemos um isomorfismo $\bar{\delta_1} : F := \frac{G}{V_d}\tilde{\to}F' := \frac{G}{V_d'}$ que induz os isomorfismos $\bar{\delta_1}|_{U_i} : U_i = \frac{V_i}{V_d}\tilde{\to}U_i' = \frac{V_i'}{V_d'}$ para $i = 1, .., d$. Reciprocamente, assumindo que existe uma filtração $F = U_0 \supseteq U_1 \supseteq ... \supseteq U_d = 0$ com as propriedades (1) e (2). Seja V_i a pré-imagem de U_i pela da projeção natural $G = A^s \to F = \left(\frac{A}{(f)}\right)^s$. Então $G = V_0 \supseteq V_1 \supseteq ... \supseteq V_d = fG$ com $V_{i+1} \subseteq \mathfrak{m}V_i$, e agora provemos por indução sobre i que V_i são A-módulos livre de posto s. Quando $i = 0$ não há o que provar. Agora assuma que a afirmação é válida para algum $i \geq 0$. Como $\frac{U_i}{U_{i+1}}$ é um $\frac{A}{(f)}$-módulo Cohen-Macaulay maximal de dimensão homológica sobre A finita, sua dimensão homológica como A-módulo deve ser um. Mas então a sequência exata

$$0 \to V_{i+1} \to V_1 \to \frac{U_i}{U_{i+1}} \to 0$$

com $V_i\tilde{\to}A^s$, implica que V_{i+1} é um A-módulo livre de posto s. Como os V_i são A-módulos livres de posto s, e $V_i \subseteq \mathfrak{m}V_{i-1}$, existe uma matriz $s \times s$ com entradas em $\mathfrak{m}$ tal que $\varphi_{d-i+1}(V_{i-1}) = V_i$, onde $\varphi_{d-i+1} \in \mathrm{End}(G)$ é o endomorfismo definido por α_{d-i+1} com respeito a base canônica de $G = V_0$. Então $\varphi_d \circ ... \circ \varphi_1(G) = V_d = fG$, e assim por composição de φ_d com o isomorfismo adequado sobre G, podemos assumir que $\varphi_d \circ ... \circ \varphi_1 = f.Id_G$. Além disso, desde que f é não divisor de zero, a última igualdade permanece verdadeira mesmo depois de uma permutação cíclica de endomorfismo. Assim, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ é uma fatoração matricial de f de ordem s. Como na primeira parte da prova mostramos que uma filtração isomórfica de F induz uma equivalência nas fatorações matriciais. E portanto esta correspondência estabelece a bijeção. ■

Definição 2.42 Seja M um A-módulo finitamente gerado e seja

$$A^p \xrightarrow{\psi} A^q \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

uma apresentação do módulo M sobre A. O *i-ésimo ideal de Fitting de M*, denotado por $\mathfrak{F}_i(M)$, será o ideal de A gerado por todos os menores $(q-i) \times (q-i)$ da matriz ψ, para $q > i \geq q - p$. $\mathfrak{F}_i(M) = A$, se $i \geq q$ e $\mathfrak{F}_i(M) = 0$, se $i < q - p$.

Teorema 2.43 *Seja N um A-módulo Cohen-Macaulay maximal, e $d > 1$ um inteiro. Então para qualquer ideal próprio $I \subsetneq A$ tal que $f \in I^d$, existe um $\frac{A}{(f)}$-módulo Cohen-Macaulay maximal $M(I)$ tal que:*

(1) $\mathrm{hd}_A M(I) = 1$;

(2) $\mathfrak{F}_{\mu(M(I))-1}(M(I)) = I$;

(3) $M(I) \cong M(J)$ *implica* $I = J$;

(4) $N \otimes_A M(I)$ *é um* $\frac{A}{(f)}$*-módulo Cohen-Macaulay máximo com*

$$e_{\frac{A}{(f)}}(N \otimes_A M(I)) \leq \mu(M(I)).\frac{e_{\frac{A}{(f)}}(\frac{N}{fN})}{d}.$$

Prova:. Pelo teorema A.2 existe uma fatoração matricial $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ de f tal que $I(\alpha) = I(\alpha_i) = I$, para $i = 1, ..., d$. Seja s a ordem de α e considere os módulos M_i definidos pelas sequências exatas

$$0 \to A^s \xrightarrow{\alpha_i} A^s \longrightarrow M_i \to 0.$$

Desde que $(\alpha_i, \alpha_{i+1}...\alpha_d\alpha_1...\alpha_{i-1})$ é uma fatoração matricial de f, estes módulos serão Cohen-Macaulay maximais sobre $\frac{A}{(f)}$ com $I = I(\alpha_i) = \mathfrak{F}_{s-1}(M_i)$ para $i = 1, ..., d$. Logo, estes módulos satisfazem as condições (1) e (2). Nosso módulo $M(I)$ será um deles, para o qual $e_{\frac{A}{(f)}}(N \otimes_A M_i)$ é minimal. Como (2) implica (3), é suficiente provar que (4) é satisfeita. No teorema 2.41 atribuímos a matriz α um $\frac{A}{(f)}$-módulo livre F de posto s, e uma cadeia de submódulos $F = U_0 \supseteq U_1 \supseteq ... \supseteq U_d = 0$ cujos quocientes $\frac{U_i}{U_{i+1}}$ são isomorfos a M_i. Como N é um A-módulo maximal Cohen-Macaulay, as sequências exatas

$$0 \to A^s \xrightarrow{\alpha_i} A^s \longrightarrow M_i \to 0.$$

irão permanecer exatas por tensorização

$$0 \to N \otimes_A A^s \xrightarrow{Id\otimes\alpha_i} N \otimes_A A^s \longrightarrow N \otimes_A M_i \to 0.$$

Em particular, os $\frac{A}{(f)}$-módulos $N \otimes_A M_i$ Cohen-Macaulay maximais, e $\mathrm{Tor}_1^A(N, M_i) = 0$. Logo, as sequências

$$0 \to N \otimes_A U_{i+1} \longrightarrow N \otimes_A U_i \longrightarrow N \otimes_A M_i \to 0.$$

são exatas, e usando a propriedade aditiva da multiplicidade, obtemos

$$d.e_{\frac{A}{(f)}}(N \otimes_A M(I)) \leq \sum_{i=1}^d e_{\frac{A}{(f)}}(N \otimes_A M_i) = e_{\frac{A}{(f)}}(N \otimes_A F) = s.e_{\frac{A}{(f)}}(\tfrac{N}{fN}) = \mu(M(I)).e_{\frac{A}{(f)}}(\tfrac{N}{fN}).$$

Portanto, $M(I)$ satisfaz também (4).

■

Sabemos da proposição 2.1 que $\mu(M) \leq e_A(M)$. Assim definimos

$$q(M) = \tfrac{\mu(M)}{e_A(M)}$$

Então, $0 < q(M) \leq 1$, sendo $q(M) = 1$ se, e somente se, M é um módulo de Ulrich. Assim, o número q mede o quão perto o módulo está de ser de Ulrich.

Corolário 2.44 *Seja $(B, \mathfrak{n}, k)$ um anel de hipersuperfície de multiplicidade $e \geq 4$, tal que k é infinito e $r := \mu(\mathfrak{n}) = \mathrm{edimB} \geq 2$. Então existem uma infinidade de B-módulos Cohen-Macaulay maximais M não-isomorfos com $q(M) \geq \dfrac{1}{2}$ se e é par e $q(M) \geq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}$ se e é ímpar.*

Prova:. Escrevemos $B = \frac{A}{(f)}$, onde $(A, \mathfrak{m}, k)$ é regular e $f \in \mathfrak{m}^2$. Como k é infinito e $\mu(\mathfrak{m}) = r \geq 2$, existe uma infinidade de k subespaços vetoriais $U \subseteq \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ de codimensão 1. Se U é um tal espaço vetorial, escolhemos $x_1, ..., x_{r-1} \in \mathfrak{m}$ tal que $x_1 + \mathfrak{m}^2, ..., x_{r-1} + \mathfrak{m}^2$ é uma base de U, e seja $I_U := (x_1, ..., x_{r-1}) + \mathfrak{m}^2$.
É claro que I_U depende somente de U (e não da escolha de x_i), e que $I_U \neq I_{U'}$, para $U \neq U'$. Podemos completar $x_i, ..., x_{r-1}$ até um sistema mínimo de geradores $x_1, ..., x_r$ de $\mathfrak{m}$. Então $I_U = (x_1, ..., x_{r-1}, x_r^2)$, e vemos que $I_U^d \supseteq \mathfrak{m}^{2d}$ para todo $d > 1$.
Escolhemos d maximal tal que $f \in \mathfrak{m}^{2d}$. Então $d = \left[\dfrac{e}{2}\right]$ $\left(\text{a parte inteira de } \dfrac{e}{2}\right)$. Para este d e I_U construímos um módulo maximal Cohen-Macaulay $M(I_U)$ como no Teorema 2.43, e definimos $M := M(I_U)$. O módulo satisfaz

$$q(M) = \frac{\mu(M)}{e_{B(M)}} \geq \frac{d}{e} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } e \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e} & \text{se } e \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Como existem infinitos I_U, também existem infinitos $M(I_U)$ não isomorfos.

■

Pode-se melhorar o corolário anterior, observando a pergunta:

Dado $f \in \mathfrak{m}$, para qual $d > 1$ existem infinitos ideais I tal que $f \in I^d$?

Considerando os argumentos usados na prova acima, conjecturou-se em [5]:

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$; então existe um inteiro $e = e(\varepsilon) \geq 1$ tal que para qualquer anel de hipersuperfície B de multiplicidade maior ou igual a e, existe uma infinidade de módulos Cohen-Macaulay maximais não isomorfos com $q(M) \geq 1 - \varepsilon$.

O próximo resultado implica que para qualquer anel de hipersuperfície há pelo menos um M módulo de Ulrich, isto é, um módulo com $q(M) = 1$.

Corolário 2.45 *Suponha que A tem um módulo de Ulrich. Seja $f \in \mathfrak{m}$ um elemento cuja forma líder f^* em $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A})$ é um não divisor de zero. Então $A/(f)$ tem um módulo de Ulrich.*

Prova:. Seja N um A-módulo de Ulrich. Suponha que $f \in \dfrac{\mathfrak{m}^d}{\mathfrak{m}^{d+1}}$, então $f^* = f + \mathfrak{m}^{d+1}$. Como f^* é um não divisor de zero em $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A})$, será um não divisor de zero em $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{N})$, já que $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{N})$ é um módulo maximal Cohen-Macaulay sobre $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A})$, pelo corolário 2.11. Assim, temos $e_{\frac{A}{(f)}}(\frac{N}{fN}) = e_A(N) \cdot d$. Se $d = 1$, então $e_{\frac{A}{(f)}}(\frac{N}{fN}) = e_A(N)$, e assim $\frac{N}{fN}$ é um A-módulo de Ulrich. Se $d > 1$, escolhemos d, o ideal $\mathfrak{m}$ e tomamos o módulo maximal Cohen-Macaulay como no teorema 2.43, e obtemos

$$e_{\frac{A}{(f)}}(N \otimes_A M) \leq \mu(M) \cdot e_A(N) = \mu(M) \cdot \mu(N) = \mu(N \otimes_A M).$$

Como $N \otimes_A M$ é $\frac{A}{(f)}$-modulo Cohen-Macaulay maximal, novamente, pelo teorema 2.43, essa desigualdade diz que $N \otimes_A M$ é de Ulrich. ■

Portanto como consequência direta do último corolário temos finalmente o teorema:

Teorema 2.46 *Todo anel de interseção completa estrita admite um módulo de Ulrich.*

Apêndice A

Fatoração matricial

Neste capítulo introduziremos os conceitos de fatoração matricial e módulo de Clifford, que serão utilizados mais adiante na seção 2.6.

A.1 Fatoração matricial

Definição A.1 Seja A um anel comutativo com unidade e $f \in A$. Uma família $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, $d > 1$, de matrizes quadradas de ordem m, com coeficientes em A é chamada uma *fatoração matricial de* f (com d fatores e de ordem m) se

$$f \cdot E_m = \alpha_1.....\alpha_d = \alpha_2.....\alpha_d.\alpha_1 = ... = \alpha_d.....\alpha_{d-1}$$

onde, E_m é a matriz identidade de ordem m.

Duas fatorações matriciais de f, α e β, são ditas equivalentes se existem matrizes invertíveis γ_i tais que $\beta_i = \gamma_i \alpha_i \gamma_{i+1}^{-1}$, para $i = 1, ..., d$, com $\gamma_{d+1} = \gamma_1$.

Dada uma fatoração matricial com d fatores, denotaremos por $I(\alpha_i)$ o ideal gerado pelas entradas de α_i, e por $I(\alpha) = \sum_{i=1}^{d} I(\alpha_i)$. É fácil ver que $I(\alpha_i) = I(\beta_i)$, $\forall\ i = 1, ..., d$, se α e β são equivalentes.

Teorema A.2 *Sejam* $I \subsetneq A$ *e* $d > 1$ *um inteiro. Se* $f \in I^d$, *então existe uma fatoração matricial* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ *de* f *tal que* $I(\alpha) = I(\alpha_i) = I$, *para* $i = 1, ..., d$. *Além disso, é possível escolher* $\alpha_1 = ... = \alpha_d$.

Para provar este teorema serão necessários alguns conceitos, como de Álgebras de Clifford e Módulos de Clifford.

Definição A.3 Seja K um corpo. Para alguma forma homogênea $0 \neq f \in K[X_1, ..., X_n]$ de grau $d \geq 2$, associamos a *Álgebra Universal de Clifford* $C(f)$:
Seja $L = \bigoplus_{i=1}^{n} KX_i$ o espaço vetorial de 1-formas, e $V = L^*$ o seu espaço dual com base $(e_1, ..., e_n)$ dual para $(X_1, ..., X_n)$. Para todo $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$, consideremos $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ e definamos

$$C(f) = \tfrac{T(V)}{I},$$

onde $T(V)$ é a álgebra tensorial sobre V, e I o ideal bilateral gerado pelos elementos

$$x \otimes ... \otimes x - f(x),\ x \in V.$$

A projeção $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}(a \mapsto \bar{a} = a + d\mathbb{Z})$ induz uma estrutura $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$-graduada natural sobre $T(V) : T(V) = \bigoplus_{\bar{a} \in \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}} T(V)_{\bar{a}}$, onde $T(V)_{\bar{a}} := \bigoplus_{i \in \bar{a}} T(V)_i$. Como os elementos que geram I são homogêneos com respeito a esta graduação, podemos munir $C(f)$ com uma estrutura $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$-graduada.

Um *módulo de Clifford* (para f) é um $C(f)$-módulo $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$-graduado

$$M = \oplus_{\bar{a} \in \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}} M_{\bar{a}}, \text{ para os quais } \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{M} < \infty.$$

É conveniente considerar $M_i := M_{\bar{i}}$ para $i \in \mathbb{Z}$. Nesta notação teremos $M = \bigoplus_{i=0}^{d-1} M_i = \bigoplus_{i=t}^{d+t-1} M_i$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Sejam $f \in K[X_1, ..., X_n]$ e $g \in K[Y_1, ..., Y_m]$ polinômios homogêneos de grau d. Vamos supor também que K contém uma raíz ξ do d-ésimo polinômio ciclotômico ϕ_d.

O *produto tensorial torcido* $C(f)\hat{\otimes}C(g)$ é definido como o produto tensorial graduado de K-espaços vetoriais $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$-graduados, com multiplicação dada por

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = \xi^{(grau(b))(grau(c))} ac \otimes bd,$$

onde $a, c \in C(f)$ e $b, d \in C(g)$ são elementos homogêneos.

Definiremos $f+g := f(X_1,...,X_n)+g(X_{n+1},...,X_{n+m})$ e considere $V := (\oplus_{i=1}^{n} KX_i)^*$. $W := (\oplus_{j=n+1}^{n+m} KX_j)^*$. Segue que $C(f+g)$ é gerada sobre K por $V \oplus W$, enquanto $C(f)\hat{\otimes}C(g)$ é gerado sobre K por $(V\otimes 1)\oplus(1\otimes W)$.

É possível mostrar que

$$V \oplus W \to (V \otimes 1) \oplus (1 \otimes W),\ x+y \mapsto x\otimes 1 + 1 \otimes y,$$

induz um epimorfismo $\varphi(f,g) : C(f+g) \twoheadrightarrow C(f)\hat{\otimes}C(g)$. (Se d=2, então $\varphi(f,g)$ é um isomorfismo).

Agora suponha que associamos um módulo de Clifford M para f, e um módulo de Clifford N para g. Então definimos o $C(f)\hat{\otimes}C(g)$-módulo $M\hat{\otimes}N$ como o produto tensorial $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$-graduado de espaços vetoriais $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$-graduados M e N, com a estrutura de $C(f)\hat{\otimes}C(g)$-módulo dada por $(a\otimes b)(m\otimes n) = \xi^{(grau(b))(grau(m))} am \otimes bn$.

Usualmente consideraremos $M\hat{\otimes}N$ como $C(f+g)$-módulo via $\varphi(f,g)$ e denotaremos da mesma forma. Assim, $M\hat{\otimes}N$ é um módulo de Clifford para $f+g$, e $\dim_K(M\hat{\otimes}N) = (\dim_K(M))(\dim_K(N))$.

Teorema A.4

(a) A inclusão natural $V \hookrightarrow T(V)$ induz uma aplicação injetiva $V \hookrightarrow C(f)$. Em particular, $C(f) \neq 0$.

(b) $\dim_K(C(f)) < \infty \Leftrightarrow n = 1$ ou $d = 2$.

O próximo resultado justificará nosso estudo sobre módulos de Clifford.

Teorema A.5 *Se $f(x) \neq 0$ para algum $x \in K^n$, então as classes de equivalência da fatoração matricial $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_d)$ de f, onde as entradas de α_i são formas lineares, correspondem, bijetivamente, as classes de isomorfismo de módulos de Clifford $M \neq 0$ para f.*

Esboço. Vamos descrever essa bijeção: Seja $M \neq 0$ um módulo de Clifford. Mostrou-se em [3] que toda componente homogênea de M tem a mesma K-dimensão, digamos m. Agora seja $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; então a multiplicação por x induz aplicações K-lineares $\alpha_j(x) : M_j \to M_{j+1}$ $(j = 1,...,d)$. Para cada j escolha uma base de M_j. Com respeito a esta base $\alpha_j(x)$ pode ser expressa por matrizes de ordem m, $(\alpha_{j,kl}(x))_{k,l=1,...,m}$, onde cada $\alpha_{j,kl}(x)$ é uma forma linear em $x_1,...,x_n$. Portanto $\alpha_{j,kl}(x) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{j,kl}^{(p)} x_p$, com $\alpha_{j,kl}^{(p)} \in K$. Consideremos $\alpha_{j,kl} = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{j,kl}^{(p)} X_p$ e $\alpha_j = (\alpha_{j,kl})_{k,l=1,...,m}$ para $j = 1,...,d$. Então $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_d)$ é uma fatoração matricial de f de ordem m com matrizes cujas entradas são formas lineares.

■

Note que a condição acima sempre é satisfeita se K é infinito.

Voltemos à prova do teorema A.2.

Queremos construir uma fatoração matricial genérica de g, isto é, uma fatoração matricial de g considerada como um elemento de $\mathbb{Z}[X_{ij}]_{i=1,...,s,j=1,...,d}$. Para isto, seja $\xi \in \mathbb{C}$ a d-ésima raiz primitiva da unidade. Temos o seguinte:

Lema A.6 *A forma genérica* $g = \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{d} X_{ij}$ *tem uma fatoração matricial* $\beta = (\beta_1,...,\beta_d)$ *de ordem* d^{s-1} *com entradas em* $B := \mathbb{Z}[\xi][X_{ij}]$. *Mais precisamente, temos que*

(1) As entradas de β_i *são todas da forma* 0 *ou* $\xi^k X_{ij}$, *e*

(2) $I(\beta) = I(\beta_l) = (\{X_{ij}\}_{i=1,...,s,j=1,...,d})$ *para* $l = 1,...,d$.

Prova:. Vamos proceder por indução sobre s. Para $s = 1$ escolha $\beta_l = X_{1l}$ para $l = 1,...,d$.

Agora suponha que $s \geq 2$ e que para $\tilde{g} := \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{d} X_{ij}$ temos a fatoração matricial $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1,...,\tilde{\beta}_d)$ de ordem $p := d^{s-2}$ satisfazendo (1) e (2). Então temos que $\beta = (\beta_1,...,\beta_d)$ é a fatoração matricial de g, onde

$$\beta_l = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{l-1} & \xi^{l-1} X_{s1} E_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\beta}_{l-2} & \xi^{l-2} X_{s2} E_p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\beta}_{l-3} & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\beta}_{l-d+1} & \xi^{l-d+1} X_{s(d-1)} E_p \\ \xi^{l-d} X_{sd} E_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\beta}_{l-d} \end{pmatrix},$$

com $\beta_j := \beta_i$ para $j \equiv i \,(mod\, d)$. Além disso, $\xi\tilde{\beta}_{l-i}$, para $i = 1,...,d$, são interpretados como blocos de ordem p ao invés de elementos.

Considere $k := \mathbb{Q}(\xi)$. Pela correspondência dada em A.5, $\tilde{\beta}$ corresponde a um módulo de Clifford M sobre $C(\tilde{g})$; e $X_{s1}, ..., X_{sd}$ corresponde a um módulo de Clifford (trivial) N sobre $C(X_{s1}, ..., X_{sd})$. Se escolhermos bases de M, N e $M\hat{\otimes}N$ apropriadamente, encontraremos que β é a fatoração matricial correspondente a $M\hat{\otimes}N$, e assim, em particular, é a fatoração matricial de $\tilde{g} + X_{s1}...X_{sd} = g$.

Logo, (1) e (2) seguem da hipótese de indução.

■

Observação A.7 O polinômio minimal de raiz ξ sobre $\mathbb{Z}$ é o d-ésimo polinômio ciclotômico $\sum_{i=0}^{r} x^i \in \mathbb{Z}[X]$, onde $r = \phi(d)$ para a função ϕ de Euler.

Lema A.8 *A forma g (como acima) tem uma fatoração matricial $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_d)$ de ordem $d^{s-1}r$ com entradas em $B := \mathbb{Z}[X_{ij}]$. Mais precisamente temos que*

(1) as entradas de β_l são todas da forma qX_{ij} $(q \in \mathbb{Z})$, e

(2) $I(\gamma) = I(\gamma_l) = (\{X_{ij}\}_{i=1,...,s,j=1,...,d})$ para $l = 1, ..., d$.

Prova:.

A matriz $\mathcal{A}$ que descreve a aplicação $\mathbb{Q}$-linear $\mathbb{Q}(\xi) \to \mathbb{Q}(\xi)$ dada pela multiplicação por ξ é

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & & \cdots & & 0 & -\alpha_{r-1} \end{pmatrix},$$

assim, como anéis temos $\mathbb{Z}[\xi] \tilde{\to} \mathbb{Z}[\mathcal{A}]$, $\xi \mapsto \mathcal{A}$.

Construindo γ_l a partir de β_l substituindo as entradas de β_l por blocos $r \times r$ satisfazendo:

(i) Se a entrada é 0, substituímos por uma matriz nula $r \times r$.

(ii) Se a entrada é $\xi^k X_{ij}$, substituímos por $\mathcal{A}^k X_{ij}$.

A partir das propriedades de β, vemos que γ satisfaz (1) e (2).

■

Prova do Teorema A.2. Existem elementos $x_{ij} \in I$ tal que $f = \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{d} x_{ij}$. Podemos assumir que $I = (\{x_{ij}\}_{i=1,...,s,j=1,...,d})$, caso contrário, poderíamos escolher $y \in I \backslash (\{x_{ij}\}_{i,j})$ e estender a soma acima adicionando $yy_2...y_d + (-y).y_2...y_d$, com $y_i \in I$ arbitrários. Considere as indeterminadas X_{ij} e seja $g = \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{d} X_{ij}$. Construindo a fatoração matricial $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ de f, a partir da fatoração matricial $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_d)$ de g, satisfazendo as condições do lema A.8, substituindo as indeterminadas X_{ij} pelos elementos $x_{ij} \in A$, então, se α é de ordem m, é fácil ver que $f.E_{dm} = \mathcal{D}^d$ e $I(\mathcal{D}) = I(\alpha_1) = I$, onde

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & \alpha_{d-1} \\ \alpha_d & 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

assim, podemos escolher uma nova α com $\alpha_1 := ... := \alpha_d := D$.

■

Corolário A.9 *Toda forma homogênea $\neq 0$ tem um módulo de Clifford $M \neq 0$.*

Referências Bibliográficas

[1] Abhyankar, S. S. *Local rings of high embedding dimension*, Amer. J. Math. 89 (1967), 1073-1077.

[2] Atiyah, M.F.; MacDonalds, L.G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[3] Backelin, J.; Herzog, J.; Sanders H. *Matrix factorizations of homogeneous polynomials*, in: Algebra, Some Current Trends, Proceedings, Varna 1986, Lecture Notes in Mathematics 1352 (Springer, Berlin) 1-33.

[4] Backelin, J.; Herzog, J. *On Ulrich-modules over hypersurface rings*, in: Proceedings of the Microprogram on Commutative Algebra at MSRI, Berkeley (1987) 15, 63-68.

[5] Backelin, J.; Herzog, J.; Ulrich, B. *Linear Maximal Cohen-Macaulay modules over strict complete intersections*, in: Journal of Pure and Applied Algebra, North-Holland, 71 (1991), 187-202.

[6] Bedregal, R. C. *Notas de Aula de Anéis Cohen-Macaulay*. Paraíba, 2012.

[7] Brennan, J.; Herzog, J.; Ulrich, B. *Maximally generated Cohen-Macaulay modules*, Math. Scand. 61 (1987) 181-203.

[8] Bruns, W.; Herzog, J. *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[9] Casanellas, M.; Hartshorne, R. *ACM bundles on cubic surfaces*. J. Eur. Math. Soc. 13 (2011), 709-731.

[10] Casanellas, M.; Hartshorne, R.; Geiss, F.; Scheyer, F.-O. *Stable Ulrich Bundles*. Internat. J. Math. 23 (2012), no.8, 50pp.

[11] Eisenbud, D. *Homological algebra on a complete intersection, with application to group representations*, Trans. Amer. Math. Soc 260 (1980), 35-64.

[12] Eisenbud, D. *Linear sections of determinantal varieties*, Amer. J. Math. 110 (1988), 541-575.

[13] Goto, S. *The divisor class group of a certain Krull domain*, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 47-50.

[14] Herzog, J. *Ein Cohen-Macaulay-Kriterium mit Anwendungen auf den Konormalenmodul und den Differentialmodul*. Math. Z. 163, 149-162 (1978).

[15] Herzog, J.; Kühl, M. *On the betti numbers of finite pure and linear resolutions*, Comm. Algebra 12 (1984), 1627-1646.

[16] Herzog, J.; Kühl, M. *Maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki sequences*, in: Commutative Algebra and Combinatorics, eds. M. Nagata and H. Matsumura (Advanced Studies in Pure Mathematics 11), pp. 65-92, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[17] Herzog, J.; Kunz, E. *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay Rings*, (Lecture Notesin Math. 238), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[18] Herzog, J.; Simis, A. Vasconcelos, W. V. *Koszul homology and blowing up rings*, in: Commutative Algebra, Proceeding of the Trento Conference, 1981, eds. S. Greco and G. Valla, (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 84), pp. 79-169. marcel Dekker, Inc., New York, 1983.

[19] Huneke, C. *The theory of d-sequences and powers of ideals*. Adv. in Math. 46 (1982), no.3, 249-279.

[20] Huneke, C.; Miler, M. *A note on the multiplicity of Cohen-Macaulay algebras with pure resolution*, Canad. J. Math. 37 (1985), 1149-1162.

[21] Józefiak, T. *Ideals generated by minors of a simmetric matrix*. Comment. Math. Helv. 53 (1978), 595-607.

[22] Matsumura, H. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[23] Miranda Neto, C. B. *Notas de Aula de Álgebra Comutativa*. Paraíba, 2011.

[24] Northcott, D. C. *Lessons on rings, modules and multiplicities*. Cambridge: Univ. Press 1968.

[25] Northcott, D. C.; Rees, D. *Reductions of ideals in local rings*. Proc. Camb. Phil. Soc. 50, 145-158 (1954).

[26] Sally, J. *Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension*. J. Algebra 56 (1979), 168-183.

[27] Sally, J. *Numbers of generators of Ideals in Local Rings*, (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 35), Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[28] Sally, J. *Bounds for numbers of generators of Cohen-Macaulay ideals*. Pacific J. Math. 63, 517-520 (1976).

[29] Samuel, P.; Zariski, O. *Commutative Algebra II*. SpringerD. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1960.

[30] Simis, A.; Andrade, J. F. *Tópicos de Álgebra Comutativa* . IMPA, Minas Gerais, 1981.

[31] Ulrich, B. *Gorenstein rings and modules with high numbers of generators*, Math. Z. 188 (1984) 23-32.