Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Aplicações da Trigonometria [†]

por

Egdemos Brilhante de Oliveira

sob orientação do

Prof.Dr. Napoleón Caro Tuesta

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional PROFMAT-CCEN-UFPB do período 2013.1.

Abril/2015
João Pessoa - PB

[†] O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

O48a Oliveira, Egdemos Brilhante de.
Aplicações da trigonometria / Egdemos Brilhante de Oliveira.- João Pessoa, 2015.
64f. : il.
Orientador: Napoleón Caro Tuesta
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Teorema de Pitágoras. 3. Trigonometria - aplicações. 4. Circunferência trigonométrica. 5. Séries de Fouries.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Aplicações da Trigonometria

por

Egdemos Brilhante de Oliveira

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional PROFMAT-CCEN-UFPB do período 2013.1.

Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. João Bosco Batista Lacerda - UFPB

Prof. Turíbio José Gomes do Santos - UNIPÊ

Abril/2015

Agradecimentos

A meu Deus Jesus Cristo, pela benção que me foi atribuída tornando-me capaz de concluir este trabalho. Ao professor Doutor orientador Napoleón Caro Tuesta pela dedicação a mim concedida para realização do mesmo, a professora Tuca e amigos por aceitarem, prontamente, o convite para participarem desse TCC, Yolanda esposa, Irmãos Sonia, Miguel (em memória) e Geraldo (Cunhado) por me incentivarem em tudo que faço.

Dedicatória

A prof. Tuca e amigos que de forma direta ou indiretamente tiveram uma participação fundamental para que esse trabalho pudesse se tornar realidade; e em especial a Yolanda (esposa), Sonia Maria (irmã), Geraldo (cunhado) e Miguel (irmão em Memória) por serem pessoas de uma Importância indispensável em tudo que faço na vida.

Resumo

Aplicações da trigonometria Traz como foco:

- Contexto histórico: resgatando um pouco as contribuições de povos antigos e alguns nomes de pessoas que com suas descobertas contribuíram para o desenvolvimento teórico da trigonometria;
- Fundamentação teórica: visando explicitar relações trigonométricas utilizadas nas escolas públicas de nível médio, bem como, fortalecer a importância desta matemática básica para assuntos de nível superior.
- As aplicações: visando atender ao questionamento feito pela sociedade em relação às aplicações da trigonometria básica.

.

Abstract

Trigonometry applications brings focus on: Historical context, rescuing some contrubtions of ancient peoples and some names of people with their findings contributed to the theoretical developament of trigonometry; Theoretical framwork: aiming eplicit trigonometric ratios used in the average level of public schools, as well as strengthe the importance of basic math for top-level issues; Applications: to meet the challengs raised by the company in relation to application of basic trigonometry.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Notações

Notações Gerais

- α (alfa); β (beta); θ (teta) para representação angular.
- Exp (e^x) para função exponencial.
- $\sum$ (somatório) para série de funções.
- $\int$ como símbolo para integração.
- $\widehat{\mathrm{AB}}$ para representar um arco de extremos A e B.

Introdução

Aplicações da trigonometria em um trabalho voltado para alunos de escolas públicas de nível médio. Tem por objetivo revisar alguns tópicos importantes, bem como, buscar incentivar os alunos a dedicarem um pouco mais de tempo de seus estudos para a trigonometria.

Para justificar a utilidade dela mesma, estão incluídos:

- No primeiro capítulo um contexto histórico, no qual civilizações egípcias, gregas, mesopotâmicas e indianas são lembradas devido à contribuições para a humanidade. Astrônomos como Hiparco, Ptolomeu e Menelau são lembrados por contribuições para a astronomia e para a trigonometria;
- No capítulo dois encontraremos definições e relações trigonométricas com uso frequente no nível médio, bem como, definições de temas utilizados no nível superior como Série de Funções e Série de Fourier;
- No capítulo três encontraremos aplicações para diversas relações vistas no capítulo anterior, cuja finalidade é mostrar, na prática , a importância da trigonometria básica, tanto no nível médio, quanto no superior.

Capítulo 1

Contexto Histórico

Neste capítulo, recordaremos aplicações da trigonometria feitas por civilizações a.C.. Destacaremos contribuições de astrônomos como Hiparco, considerado o pai da trigonometria, Ptolomeu, pioneiro em realizar melhoras nos trabalhos deixados por Hiparco, e Menelau de Alexandria, o pioneiro na definição para a trigonometria esférica. Povos indianos, árabes e hindus, embora de forma breve, serão mencionados neste trabalho por terem contribuído no avanço da trigonometria aperfeiçoando as criações deixadas pelos egípcios e gregos.

1.1 Gregos e Egípcios

Segundo [11], a trigonometria é o ramo da matemática que trata do cálculo de ângulos, particularmente em triângulos retângulos. Até o século 16, ela era realmente uma parte da geometria, mas desde então ela passou a ser considerada uma área independente da matemática.

Como qualquer polígono pode ser reduzido a um número de triângulos, a trigonometria permite aos matemáticos trabalhar com todas as áreas ou superfícies que sejam limitadas por linhas retas (ver figura 1.1). A trigonometria plana trata de áreas, ângulos e distâncias em um plano. A trigonometria esférica trata de ângulos e distâncias no espaço tridimensional.

Os egípcios tinham algum conhecimento de trigonometria, como demonstra a construção de suas pirâmides. O papiro de *Ahmes* inclui um problema que determina a *seked*, a inclinação da pirâmide (Ver figura 1.2) a partir da altura e da base(ver figura 1.3). Ela era expressa como a relação oposta de nossa medida do gradiente. Porém, os egípcios não eram rigorosos em seu estudo de triângulos. Como em outras áreas da matemática, eles estavam interessados em aplicações práticas e não na trigonometria pura.

Os antigos matemáticos indianos também sabiam alguma coisa sobre trigonometria. Os *Sulba sutras*, no contexto da descrição de altares, contém um cálculo do

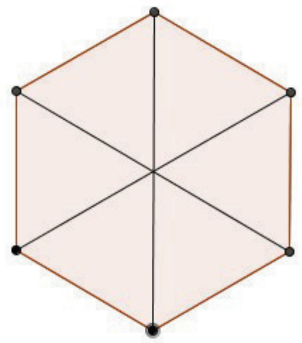


Figura 1.1: hexágono regular

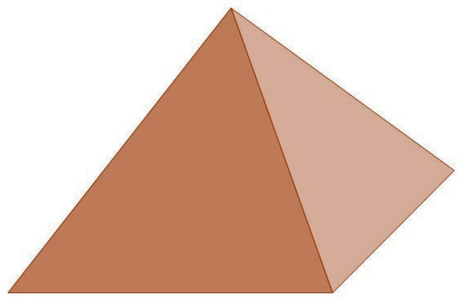


Figura 1.2: Pirâmide

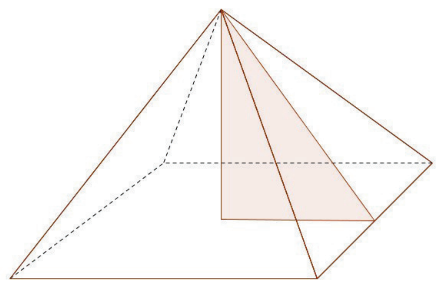


Figura 1.3: Inclinação da pirâmide

seno de 45° como $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. No entanto, ficou por conta dos gregos o desenvolvimento apropriado da trigonometria. Os gregos tomaram a linha reta e o círculo como base de sua geometria e a partir daí desenvolveram a trigonometria.

A convenção de 360° em um círculo e 60 minutos em um grau teve origem na matemática helênica, aparentemente, já estava em uso no tempo de *Hiparco da Bitínia* (c. 190-120 a.C) (figura 1.4). Provavelmente, teve origem na divisão astronômica babilônica do zodíaco (ver figura 1.5) em 12 signos ou 36 decanos e o círculo anual de, aproximadamente, 360 dias.

O sistema superior usado pelos babilônicos para representar frações o tornou mais útil do que os sistemas egípcios ou gregos e *Ptolomeu* (c. 90-168 d.C) usou o sistema de base 60 ao dividir em graus e minutos (*partes minutae primae*) e cada minuto em 60 segundos (partes *minutae secundae*).

Figura 1.4: Hiparco de Bitínia

Figura 1.5: Calendário do Zodíaco

1.2 Trigonometria esférica e planar

Enquanto um triângulo planar está sobre uma superfície plana, um triângulo esférico está sobre a superfície de uma esfera. Ele é composto pelos arcos de três círculos que se intersepta ao redor da esfera, ou planos que cortam a esfera (ver figura 1.6).

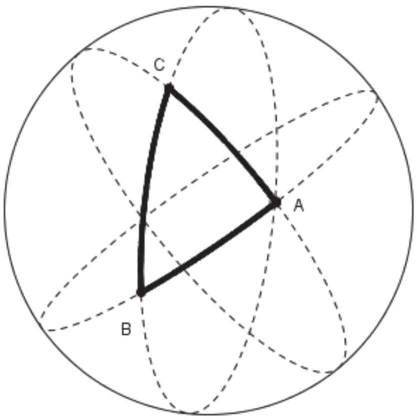


Figura 1.6: Triângulo Esférico ABC

A primeira definição de um triângulo esférico é encontrada em um trabalho do egípcio *Menelau de Alexandria* (c.100 d.C.) (figura 1.7). Ele desenvolveu os equivalentes dos princípios de Euclides da trigonometria planar, mas os aplicou a triângulos esféricos. Os triângulos esféricos são, claramente, essenciais na astronomia, na náutica e navegação.

Figura 1.7: Menelau de Alexandria

Enquanto os ângulos de um triângulo planar totalizam 180°, os ângulos de um triângulo esférico totalizam mais de 180°. Há também outras diferenças fundamentais: até por volta de 1250 e do trabalho de *Nasir al-Din al-Tusi* (1201-74) (Figura 1.8), a trigonometria esférica esteve sempre integrada com a astronomia.

Figura 1.8: Nasir al-Din al-Tusi

Al-Tusi foi o primeiro a listar seis tipos distintos de triângulos retângulos em uma superfície esférica e o primeiro a tratar a trigonometria como uma disciplina discreta. Ele desenvolveu a trigonometria esférica na sua forma atual.

Hiparco foi o primeiro a compilar tabelas de funções trigonométricas. Seu interesse era por triângulos imaginários "traçados"sobre a esfera imaginária do céu à noite, relacionando os corpos celestes uns com os outros de maneira que ele podia calcular e prever as posições dos planetas.

Cláudio Pitolomeu Expandiu o trabalho de Hiparco, ao criar melhores tabelas trigonométricas e definições aproximadas para as funções trigonométricas inversas arco-seno e arco-cosseno.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo trataremos de definições, propriedades, teoremas acompanhados de suas demonstrações, critérios, relações, postulados e algumas funções trigonométricas e suas respectivas inversas que são trabalhadas nas escolas de nível médio, como também, a definição para exp(x) vista no curso de cálculo. Recordaremos a relação de Euler para x real, definiremos cosseno e seno no campo complexo e encerraremos com noções para Série de Fourier.

2.1 Postulado do Trasporte de Segmentos

Definição 2.1 *Dados um segmento* $\overline{AB}$ *e uma semirreta de origem* A'*, existe sobre esta semirreta um único ponto* B' *tal que* $\overline{A'B'}$ *seja congruente a* $\overline{AB}$*.*

Observação 2.1 *A congruência (simbolo* $\equiv$*) de segmento ou de ângulo é uma noção primitiva que satisfaz os postulados da reflexividade, simetria e transitividade.*

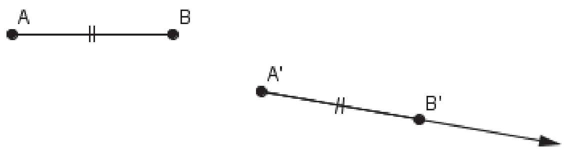


Figura 2.1: Segmentos Congruentes

2.2 Postulado do Transporte de Ângulos

Definição 2.2 *Dado um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente do ângulo $A\hat{O}B$.*

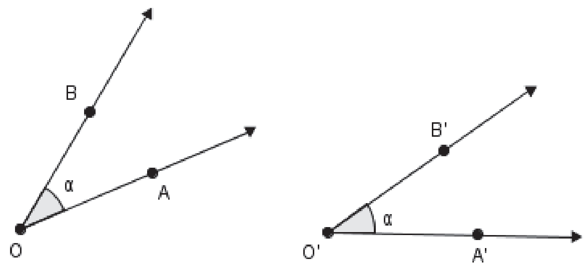


Figura 2.2: Ângulos Congruentes

2.3 Congruência de Triângulos

Definição 2.3 *Dois triângulos T_1 e T_2 são congruentes (Notação $T_1 \equiv T_2$) se, e somente se, existir uma correspondência entre seus vértices de modo que: os lados e os ângulos do primeiro triângulo T_1 sejam ordenadamente congruentes, respectivamente, aos lados e aos ângulos do triângulo T_2.*

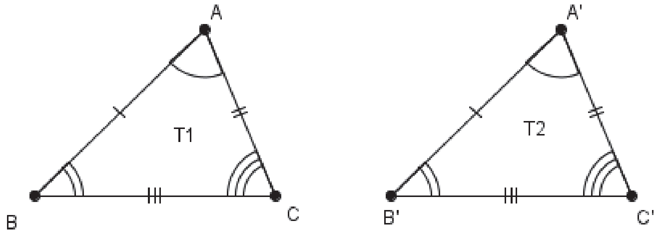


Figura 2.3: Triângulos Congruentes

$$\Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

2.3.1 Caso de Congruência LAL

Esta Definição é postulado e diz que:

Definição 2.4 *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes*

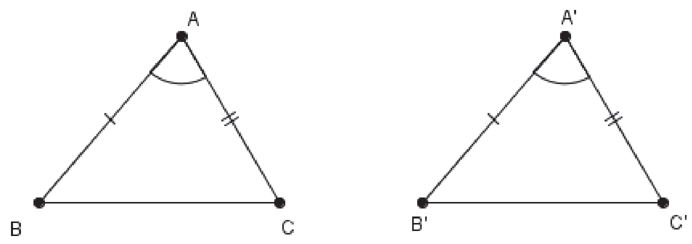


Figura 2.4: Congruência LAL

$$\text{Se} \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'}$$

2.3.2 Caso de Congruência ALA

Definição 2.5 *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então, esses triângulos são congruentes.*

2.4 Semelhança de Triângulos

Definição 2.6 *Dois triângulos são semelhantes (simbologia $\sim$) se, e somente se, os ângulos de um são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro e os lados opostos à ângulos iguais (ou homólogos) são proporcionais.*

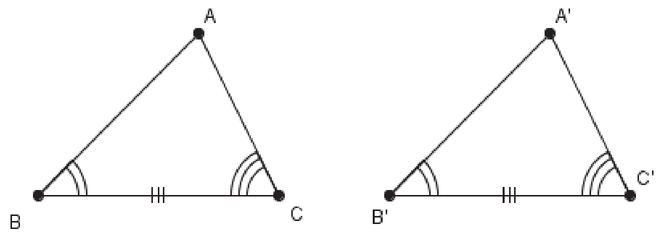


Figura 2.5: Congruência ALA

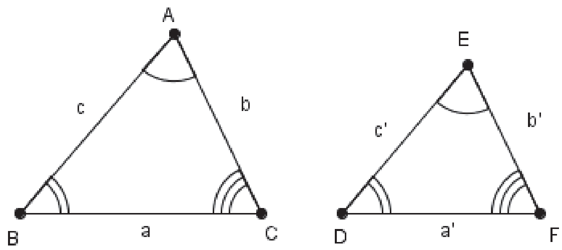


Figura 2.6: Triângulos Semelhantes

$$\Delta_{ABC} \sim \Delta_{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} & \equiv & \hat{A}' \\ \hat{B} & \equiv & \hat{B}' \\ \hat{C} & \equiv & \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

2.4.1 Caso de Semelhança (AA)

Definição 2.7 *Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então, eles são semelhantes.*

2.5 Triângulo Retângulo

Definição 2.8 *Triângulo retângulo, é todo triângulo no qual um de seus ângulos internos é reto (medida em graus 90 ou* $\hat{A} = 90°$*)*

2.5.1 Elementos Notáveis

No triângulo ABC (reto em A), figura 2.8

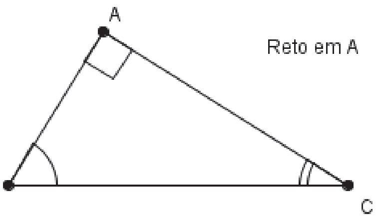


Figura 2.7: Triângulos Retângulo ABC

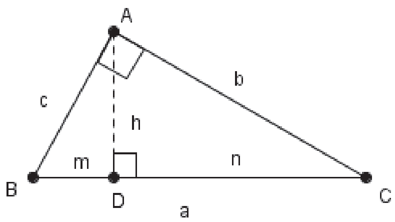


Figura 2.8: Altura $\overline{AD}$ Relativa a Hipotenusa no Triângulo ABC

Adotaremos:

$$\begin{cases} \overline{BC} & = & a & \text{(hipotenusa).} \\ \overline{AC} & = & b & \text{(cateto).} \\ \overline{AB} & = & c & \text{(cateto).} \\ \overline{BD} & = & m & \text{(projeção do cateto } c \text{ sobre a hipotenusa).} \\ \overline{CD} & = & n & \text{(projeção do cateto } b \text{ sobre a hipotenusa).} \\ \overline{AD} & = & h & \text{(altura relativa à hipotenusa).} \end{cases}$$

Percebe-se também que:

$$\begin{cases} A\hat{C}B & = & 90^\circ - A\hat{B}C & = & D\hat{A}B \\ A\hat{B}C & = & 90^\circ - A\hat{C}B & = & D\hat{A}C \end{cases}$$

2.5.2 Teorema de Pitágoras (enunciado)

O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Observação 2.2 *Unidade de medida em metros (m)*

De acordo com o Teorema de Pitágoras:

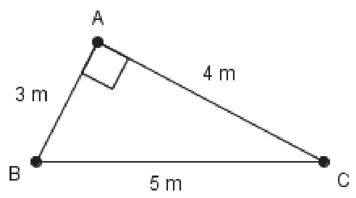


Figura 2.9: Aplicação do Teorema de Pitágoras

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

2.5.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Na figura abaixo, apresentamos um triângulo ABC, reto em A, e seus elementos notáveis.

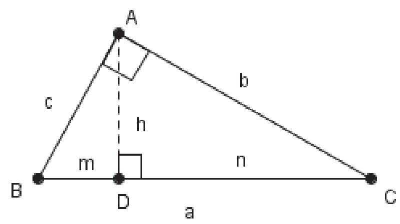


Figura 2.10: Elementos Notáveis no Triângulo Retângulo

Mais ainda:

$$\begin{cases} A\hat{C}B = 90° - A\hat{B}C = D\hat{A}B \\ A\hat{B}C = 90° - A\hat{C}B = D\hat{A}C \end{cases}$$

Nota-se também que:

(i) $m + n = a$

(ii) Por semelhança (caso AA):

- $ABC \sim DBA$, logo: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m (II_i)$

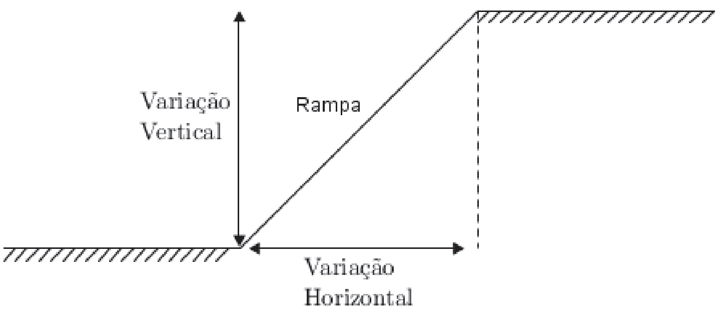
- $ABC \sim DAC$, logo: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n(II_{ii})$

Fazendo $II_i + II_{ii}$, vem:
$c^2 + b^2 = a \cdot (m + n)$. Como, por (i) $m + n = a$, conclui-se que:
$c^2 + b^2 = a \cdot a \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras)

2.6 Declividade ou Inclinação de uma Rampa

Definição 2.9 *A declividade é a razão entre a variação vertical e a variação horizontal.*

Veja o esquema: seja a rampa na figura seguinte.



$$\boldsymbol{DECLIVIDADE = \frac{VARIAÇÃO\ \ VERTICAL}{VARIAÇÃO\ \ HORIZONTAL}}$$

Figura 2.11: Rampa e suas Variações

Exemplo: O que significa uma declividade de 5% (unidade de medida usada em um município de São Paulo para representar inclinação de rampa)? $\diamond$

Solução: 2.1 *A declividade de* 5% *equivale a razão* $\dfrac{1}{20}$, *isto é:*

$$5\% = \frac{5}{100} \Rightarrow 5\% = \frac{1}{20}.$$

Significando que, quando houver uma variação de 1 unidade de comprimento (u.c.) na vertical, causará uma variação de 20 unidade de comprimento (u.c.) na horizontal.

Veja no esquema onde uma variação de 1 (u.c.) na vertical corresponde uma variação de 20 (u.c.) na horizontal.

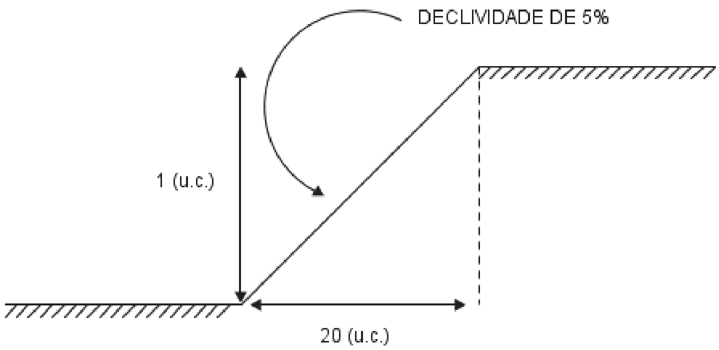


Figura 2.12: Rampa

2.7 Razões Trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo

2.7.1 Tangente de um Ângulo Agudo

Definição 2.10 *Em um Triângulo Retângulo, a tangente de um ângulo agudo θ (notação $\operatorname{tg}\theta$) é dada pela razão entre a medida do cateto oposto a θ e a medida do cateto adjacente a θ.*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{mediade do cateto adjacente a } \theta}$$

Exemplo: Seja o triângulo ABC retângulo em A, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 6 cm e 8 cm, respectivamente. $\diamond$

Sendo o ângulo θ agudo, determine o valor para $\operatorname{tg}\theta$?

Solução: 2.2 $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

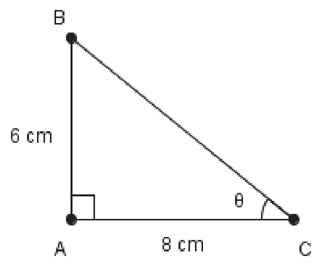


Figura 2.13: Triângulo ABC com Ângulo Fixo θ

2.7.2 Seno e Cosseno de um Ângulo Agudo

Definição 2.11 *Considerando a Figura 2.14 e fixando o θ, a cada 8 cm de deslocamento horizontal (ou a cada 6 cm de deslocamento vertical) o Teorema de Pitágoras garante um deslocamento, sobre a hipotenusa, de 10 cm.*

Relacionando essas grandezas por meio das seguintes razões, definiremos que:

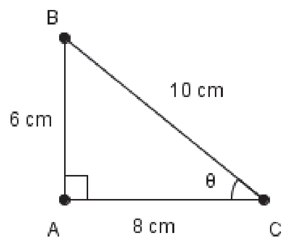


Figura 2.14: Ângulo Fixo θ no Triângulo ABC

$$* \ \frac{6}{10} = \frac{\text{deslocamento vertical}}{\text{deslocamento sobre a hipotenusa}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \operatorname{sen}\theta$$

$$** \ \frac{8}{10} = \frac{\text{deslocamento horizontal}}{\text{deslocamento sobre a hipotenusa}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \cos\theta$$

2.7.3 Arco de Circunferência

Definição 2.12 *Qualquer parte da circunferência limitada por dois de seus pontos.*

Arco AB, Notação: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$

Observação 2.3 *caso os pontos coincidam, teremos um arco nulo ou arco de uma volta.*

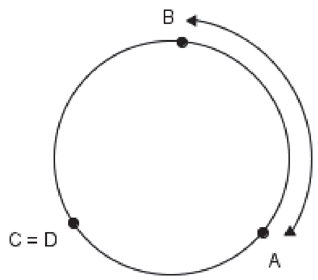


Figura 2.15: Arco AB

2.7.4 Unidade de Medida Grau(Notação:°)

O arco de um Grau (1°) é igual a $\frac{1}{360}$ do arco de uma volta. Logo, o arco de uma volta mede 360°.

2.7.5 Unidade de Medida 1 Radiano (Notação: 1 Rad)

Arco de medida 1 Radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido. Para sabermos quantos radianos têm o arco de uma volta,tomaremos da geometria plana para o comprimento de uma circunferência de raio r o valor de $2\pi r$. Logo, usando a regra de três simples e direta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Medida do arco} & & \text{Comprimento do Arco} \\ 1 \text{ Rad} & \longleftrightarrow & r \\ \theta & \longleftrightarrow & 2\pi r \end{array}$$

Ou seja:

$$\begin{gathered} r \cdot \theta = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 1 \Rightarrow \\ \theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} \cdot 1 \Rightarrow \\ \theta = 2 \cdot \pi (rad). \end{gathered}$$

2.7.6 Conversão: Grau e Radiano

Na transformação de grau para radianos, ou vice-versa, faremos uso da regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{Medida do Arco (em rad)} & & \text{Medida do Arco (em grau)} \\ 2 \cdot \pi & \longleftrightarrow & 360° \\ x & \longleftrightarrow & \theta \end{array}$$

2.8 Trigonometria na Circunferência

2.8.1 Circunferência Trigonométrica

Consideremos num plano um sistema de coordenadas cartesianas xoy e uma circunferência com centro na origem e raio unitário (veja figura 2.16).

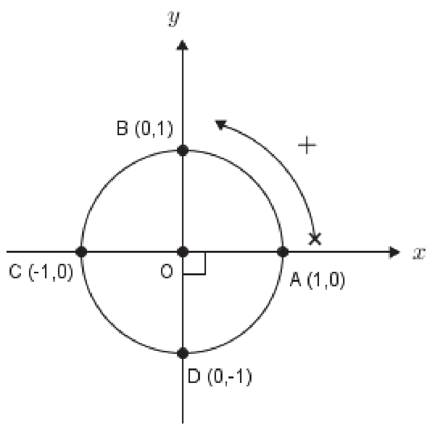


Figura 2.16: Circunferência Trigonométrica de Centro O e Raio 1

Convencionamos o ponto A como origem para a contagem dos arcos e que os arcos percorridos no sentido anti-horário a partir do ponto A terá medida positiva. Essa circunferência orientada será denominada circunferência trigonométrica.

2.8.2 Seno e Cosseno

Na circunferência trigonométrica tomemos um ponto P extremidade do arco $\widehat{\mathrm{AP}}$ (Ver Figura 2.17)

Nota-se que:

(X_P, Y_P) coordenadas do ponto P e que para o triângulo OPP_x, o $\cos\theta = X_P$ e $\operatorname{sen}\theta = Y_P$. Logo, concluímos que o cosseno de θ é a abscissa do ponto P e o seno de θ é a sua ordenada.

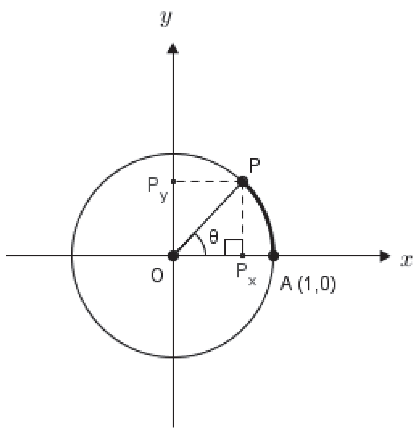


Figura 2.17: Ponto P e Suas Projeções Ortogonais

Observação 2.4 *O Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OPP_x, diz que:*

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

*Esta relação é conhecida como **RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA**.*

2.8.3 Tangente

Tracemos a reta t tangente à circunferência pelo ponto A (ver Figura 2.18)

Prolongando o segmento $\overline{OP}$ até tocar a reta t num ponto (T). Para o triângulo retângulo OAT é conhecida a relação:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}.$$

2.8.4 Outras Relações Trigonométricas

i) $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ $(0° < \theta < 90°)$

Na Figura 2.19:

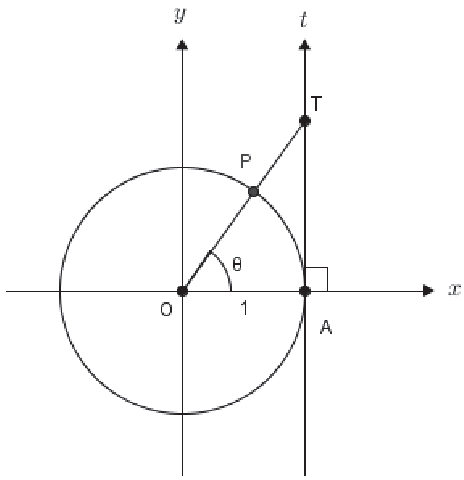


Figura 2.18: Reta t Paralela ao Eixo oy

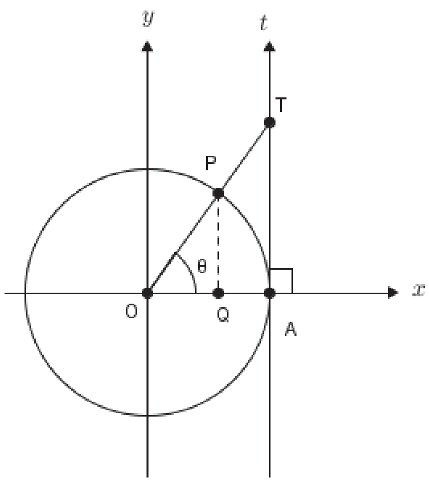


Figura 2.19: Triângulos Semelhantes OPQ e OTA

Os triângulos OPQ e OTA são semelhantes (caso AA). Então:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}.$$

$$\text{Mas:} \begin{cases} \overline{PQ} &= \operatorname{sen}\theta \\ \overline{OQ} &= \cos\theta \\ \overline{OA} &= 1 \\ \overline{TA} &= \operatorname{tg}\theta \end{cases} \text{Logo, } \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{1} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

ii) Cotangente de θ ($0° < \theta < 90°$)

Na Figura 2.20:

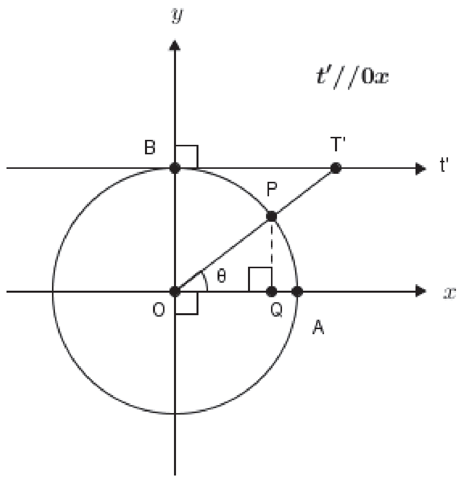


Figura 2.20: Triângulos Semelhantes OPQ e OBT'

A reta t' é tangente à circunferência no ponto B. T' é o ponto que a reta t' intersepta a reta $\overleftrightarrow{OP}$. Os triângulos retângulos PQO e OBT' são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{BT'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BO}}.$$

$$\text{Mas:} \begin{cases} \overline{OQ} &= \cos\theta \\ \overline{PQ} &= \operatorname{sen}\theta \\ \overline{BO} &= 1 \end{cases} \text{Logo, } \frac{\cos\theta}{\overline{BT'}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1} \Rightarrow \overline{BT'} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

definiremos a razão $\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ como sendo cotangente de θ, daí:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

iii) Secante de θ ($0° < \theta < 90°$)

Na Figura 2.21:

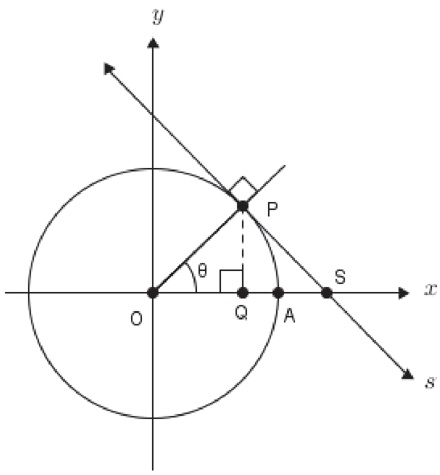


Figura 2.21: Reta s Tangente no Ponto P e Triângulos Semelhantes OPQ e OPS

A reta s é tangente à circunferência no ponto P. S é o ponto que a reta s intersepta o eixo $0x$. Os triângulos retângulos OPS e OQP são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}.$$

Mas: $\begin{cases} \overline{OP} &= 1 \\ \overline{OQ} &= \cos\theta \end{cases}$

Logo,

$$\frac{\overline{OS}}{1} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \overline{OS} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

definiremos a razão $\dfrac{1}{\cos\theta}$ como sendo a secante de θ, daí:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

iv) Cossecante de θ ($0° < \theta < 90°$) na Figura 2.22:

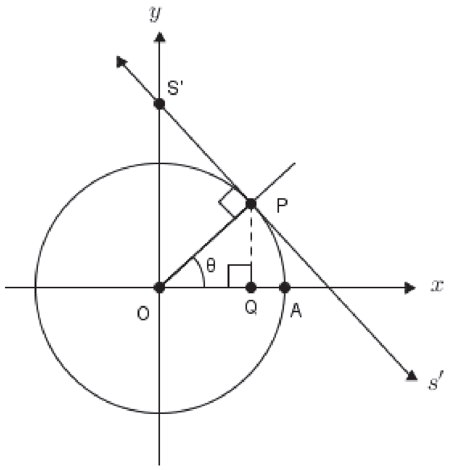


Figura 2.22: Reta s' Tangente no Ponto P e Triângulos Semelhantes OPQ e OPS'

A reta s' é tangente à circunferência no ponto P. S' é o ponto que a reta s' intersepta o eixo $0y$. Os triângulos retângulos OPQ e $S'OP$ são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OS'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}.$$

Mas: $\begin{cases} \overline{OP} & = & 1 \\ \overline{PQ} & = & \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Logo,

$$\frac{\overline{OS'}}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \overline{OS'} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

definiremos a razão $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ como sendo a cossecante de θ, daí:

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

2.8.5 Relações Trigonométricas Para a Soma de Dois Arcos

i) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

Na Figura 2.23:

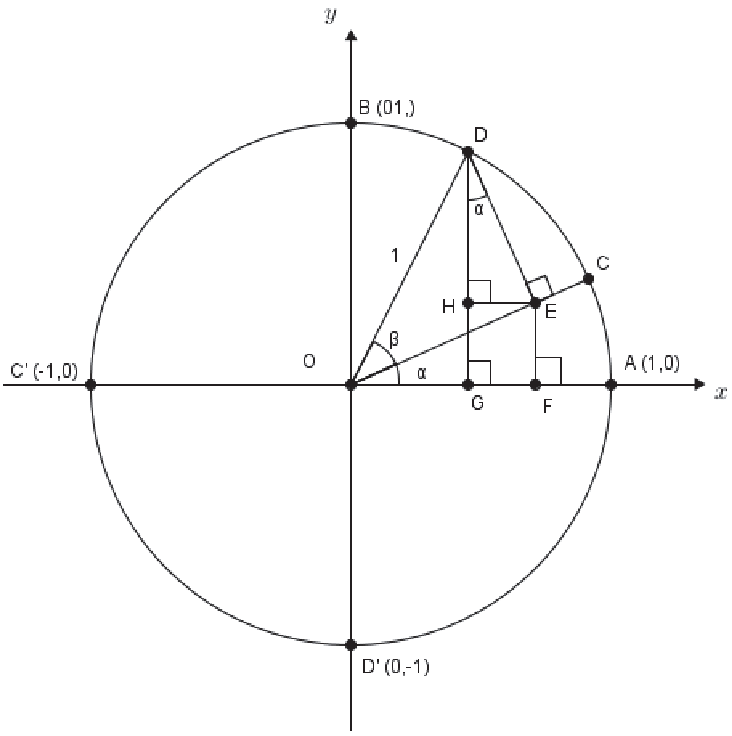


Figura 2.23: Projeções Ortogonais dos Pontos D e E

$\overline{HE}$ foi traçado paralelo a $\overline{GF}$. Logo, $\overline{HE} = \overline{GF}$ (1), o ângulo $H\hat{D}E$ também mede α, pois os seus lados são perpendiculares aos do ângulos $F\hat{O}E$.

o $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ procurado corresponde à medida do segmento $\overline{DG}$, onde $\overline{DG} = \overline{DH} + \overline{HG}$.

- Buscando $\overline{DH}$
  No triângulo HDE da Figura 2.24 note que $\overline{DH} = \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ (2), pois, $\overline{DE} = \operatorname{sen}\beta$.

- Buscando $\overline{HG}$.
  No triângulo OED da Figura 2.25, temos que $\overline{OE} = \cos\beta$.

  No triângulo OFE da Figura 2.26 (onde, $\overline{OE} = \cos\beta$), temos: $\overline{EF} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$, como $\overline{EF} = \overline{HG}$, temos $\overline{HG} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta(3)$.

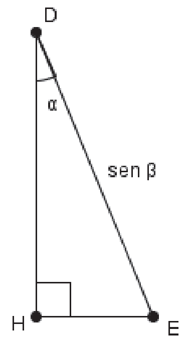


Figura 2.24: Ângulo Fixo α no Triângulo EHD

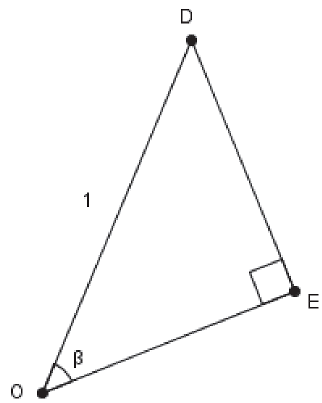


Figura 2.25: Ângulo Fixo β no Triângulo OED

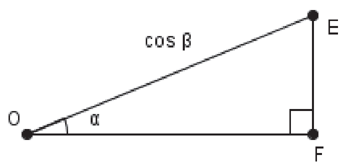


Figura 2.26: Triângulo Retângulo OFE

Portanto, como $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{DE}$ e $\overline{DE} = \overline{DH} + \overline{HG}$, vem:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras também muito importantes, como: $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{sen}(2\alpha)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e etc.

ii) $\cos(\alpha+\beta)$

O $\cos(\alpha+\beta)$ corresponde à medida do segmento $\overline{OG}$, onde $\overline{OG} = \overline{OF} - \overline{GF}$ na figura 2.23.

- Buscando $\overline{GF} = \overline{HE}$ (lados oposto no retângulo $GFEH$).
  No triângulo HDE da Figura 2.27 note que $\overline{HE} = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ ou, como $\overline{HE} = \overline{GF}$, temos $\overline{GF} = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta(4)$.

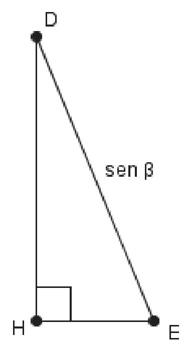


Figura 2.27: Triângulo Retângulo DHE

- Buscando $\overline{OF}$
  No triângulo OFE da Figura, temos: $\overline{OF} = \cos\alpha\cos\beta(5)$.

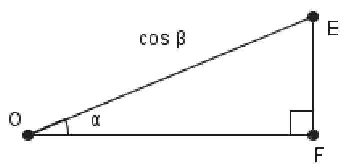


Figura 2.28: Triângulo Retângulo OFE

Portanto, de (5) - (4), vem:

$\overline{OG} = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ ou, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras, também muito importantes, como: $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos 2\alpha$, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e etc.

iii) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

A tangente procurada corresponde a razão $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{OG}} = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ na Figura 2.23. Portanto:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Como $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$ $(0° < \alpha,\ \beta,\ (\alpha+\beta) < 90°)$, a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ é equivalente a:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}},$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}.$$

Portanto, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras como $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ e etc.

2.8.6 Funções Seno, Cosseno, Tangente no Campo Real e Suas Inversas

Definição 2.13 *Dado um número real x, seja o ponto $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$ sua imagem na circunferência trigonométrica (ver Figura2.29).*

Denominaremos função seno, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Para a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ denominaremos função cosseno.

Consideremos agora o eixo das tangentes (ver Figura2.30).

$\overline{OT}$ é o prolongamento do segmento $\overline{OP}$ até tocar o eixo das tangentes no ponto T. uma vez que $\overline{AT} = \operatorname{tg} x$ para $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro), definiremos a função tangente como a função $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ onde $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

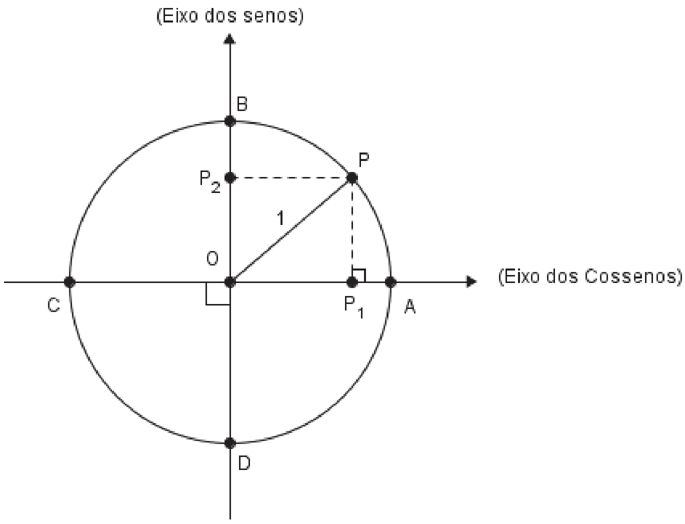


Figura 2.29: Circunferência Trigonométrica de Centro O

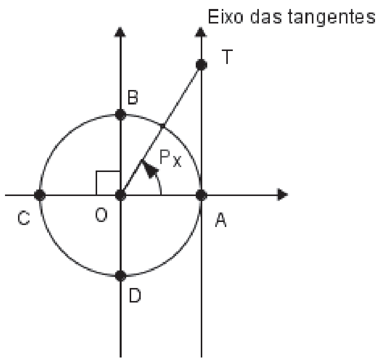


Figura 2.30: Eixo das Tangentes t

2.8.7 Tabela de Valores Notáveis de $[0, 2\pi]$.

Observação 2.5 *As definições de cada função torna evidente cada valor usado no preenchimento da tabela 2.1.*

2.8.8 Gráficos e Suas Propriedades

Função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$

Grau ou Rad	0 ou 2π	$90°$ ou $\dfrac{\pi}{2}$	$180°$ ou π	$270°$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$
Seno	0	1	0	-1
Cosseno	1	0	-1	0
Tangente	0	Não está definida	0	Não está definida

Tabela 2.1: Tabela de Valores Notáveis

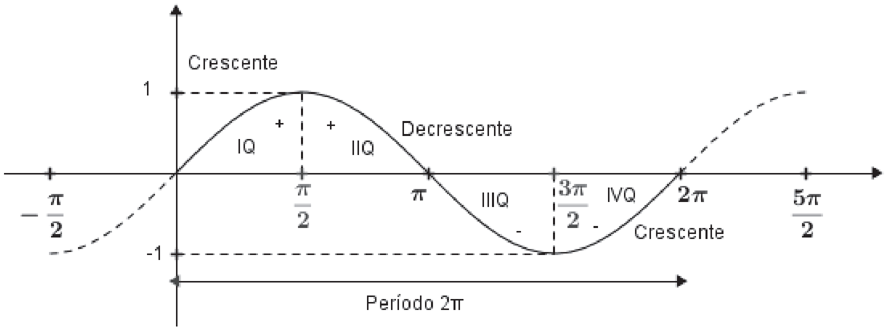


Figura 2.31: Senóide

Período: $P = 2\pi$;
Sinais: IQ (+); IIQ(+); IIIQ(-); IVQ(-);
Paridade: Função Ímpar (Gráfico Simétrico em Relação à Origem).
Função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$.

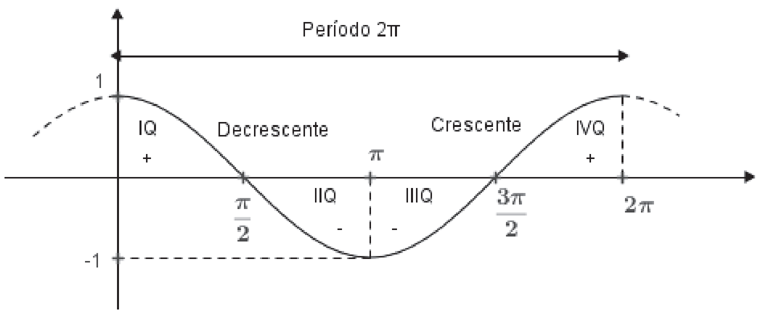


Figura 2.32: Cossenóide

Período: $P = 2\pi$;
Sinais: IQ (+); IIQ(-); IIIQ(-); IVQ(+);

Paridade: Função Par (Gráfico Simétrico em Relação ao Eixo 0Y).
Função $f : \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$

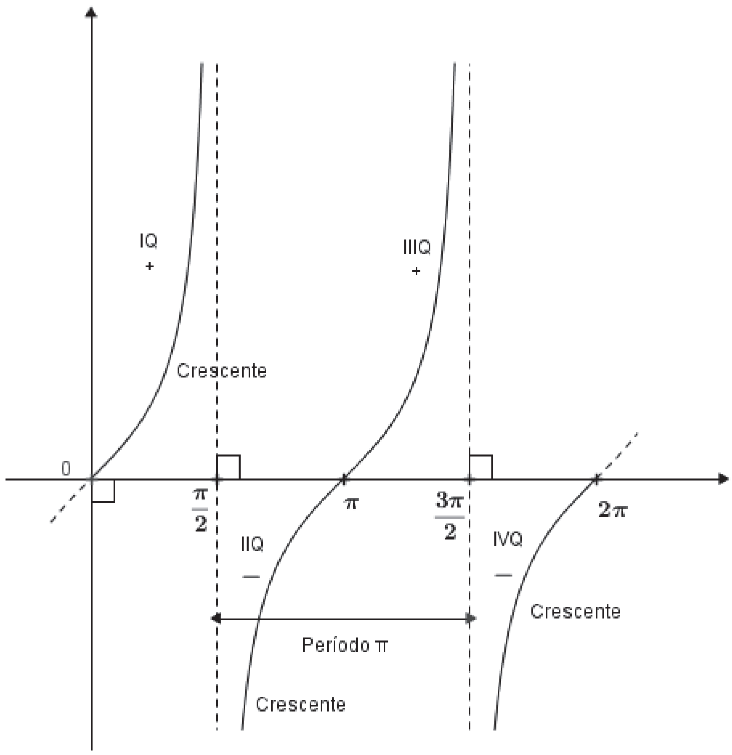


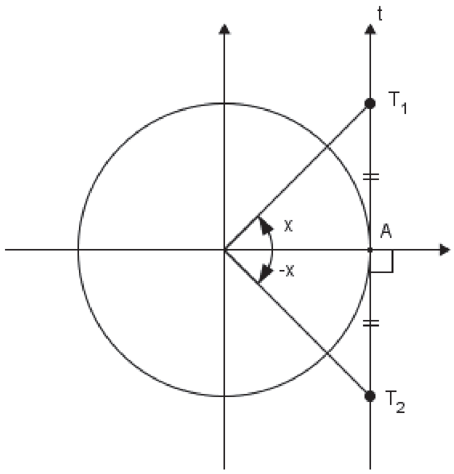
Figura 2.33: Tangentóide

Período: $P = \pi$;
Sinais: IQ (+); IIQ(-); IIIQ(+); IVQ(-);
Paridade: Função Ímpar (Ver Figura 2.34).

2.8.9 Funções Inversas Trigonométricas

Até agora, a partir da medida do ângulo x (ou arco), determinávamos os valores do seno, cosseno e tangente deste ângulo (ou arco).

Agora, percorreremos o sentido inverso



$$\begin{cases} \overline{AT_2} & = & -\overline{AT_1} \\ & \mathbf{e} & \\ f(x)+f(-x) & = & 0 \end{cases}, \text{ daí } f(x) = -f(-x), \text{ isto é : a função tangente é ímpar.}$$

Figura 2.34: Paridade Ímpar no Eixo das Tangentes

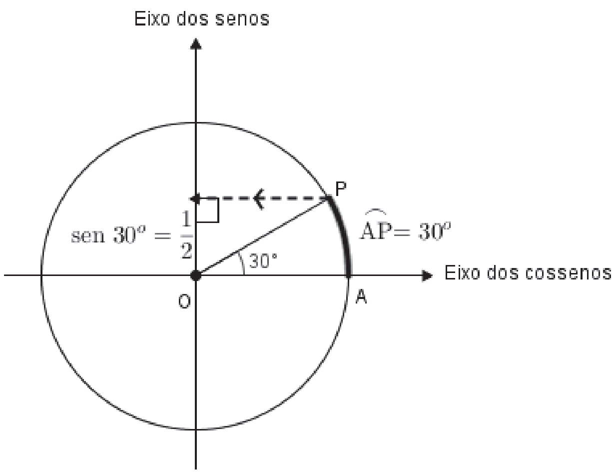


Figura 2.35: Projeção Ortogonal no Eixo dos Senos

Para encontrarmos o valor do ângulo x (ou arco), definiremos as funções trigonométricas inversas.

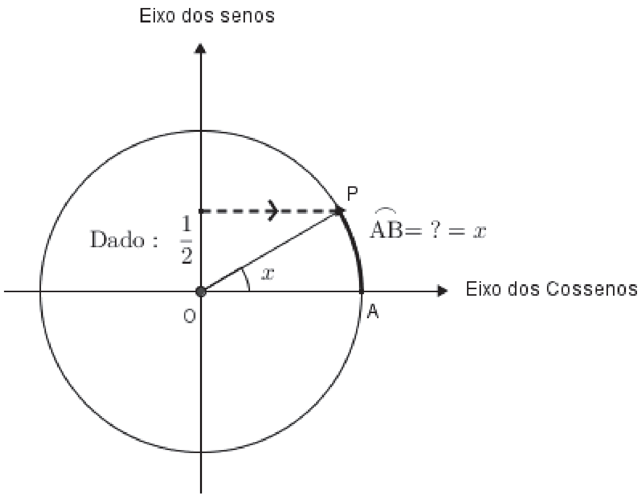


Figura 2.36: Sentido Inverso da Projeção da Figura 2.35

2.8.10 Função Arco Seno

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ não é bijetiva (não admite inversa), caso contrário, existiria algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = 3$. Porém, considerando $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ (ver Figura 2.37), tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$

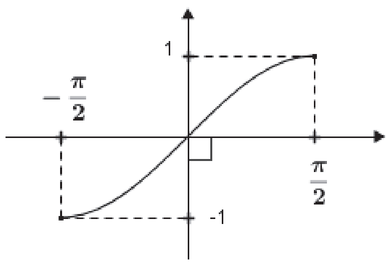


Figura 2.37: Função Seno de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

f é bijetiva. Assim, denominaremos f^{-1} ou arco-seno como a função inversa da função f. Nota-se que:

f^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a cada $x \in [-1, 1]$ corresponde a um só $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que y é um arco cujo seno é x, em símbolos:

$y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Graficamente fica:

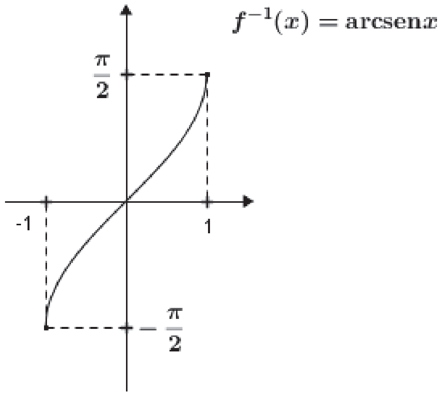


Figura 2.38: Arco Seno

2.8.11 Função Arco Cosseno

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ não é bijetiva ($\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 4$). Porém, considerando $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos x$ (ver Figura 2.39).

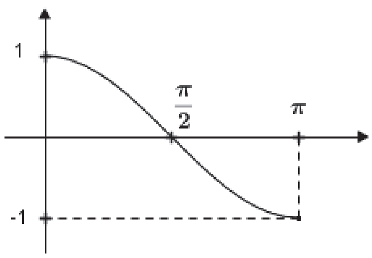


Figura 2.39: Função Cosseno de $[0, \pi] \to [-1, 1]$

f é bijetiva e f^{-1} ou função arco-cosseno passará a ser a sua função inversa.

Nota-se que: $[-1, 1]$ é o domínio de f^{-1}, $[0, \pi]$ é o contradomínio e o fato de que a cada $x \in [-1, 1]$ corresponde a um só $y \in [0, -\pi]$ tal que y é um arco cujo cosseno e x é simbolicamente escrito como, $y = \arccos x \Longleftrightarrow \cos y = x$ e $y \in [0, \pi]$.

Graficamente fica:

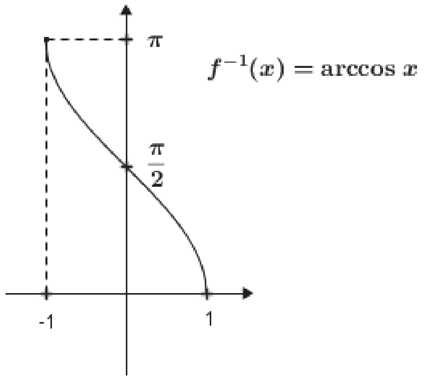


Figura 2.40: Função arco-cosseno

2.8.12 Função Arco Tangente

A função $f : \{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ Tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ não é bijetiva (já que $0° \neq \pi$ e $\operatorname{tg} 0° = \operatorname{tg} \pi$). Se considerarmos $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ (ver Figura 2.41).

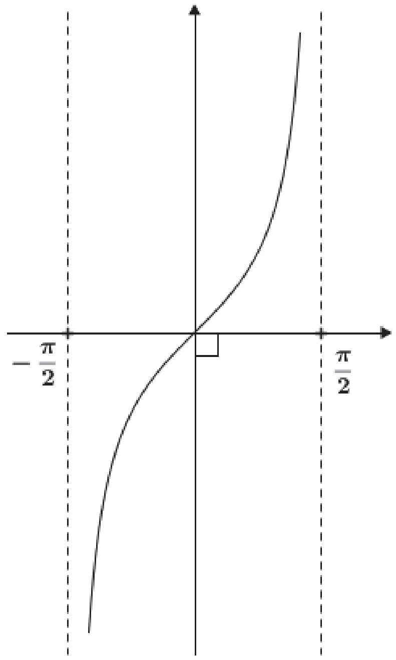


Figura 2.41: Função Tangente de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$

f é bijetiva e f^{-1} ou função Arco-tangente passará a ser a sua função inversa.

Note que: $\mathbb{R}$ é o domínio de f^{-1}, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ o contradomínio e a cada $x \in \mathbb{R}$ corresponde uma só $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que y é um arco cuja tangente é x, em símbolos:

$$y = \operatorname{arctg} x \Longleftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ e } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

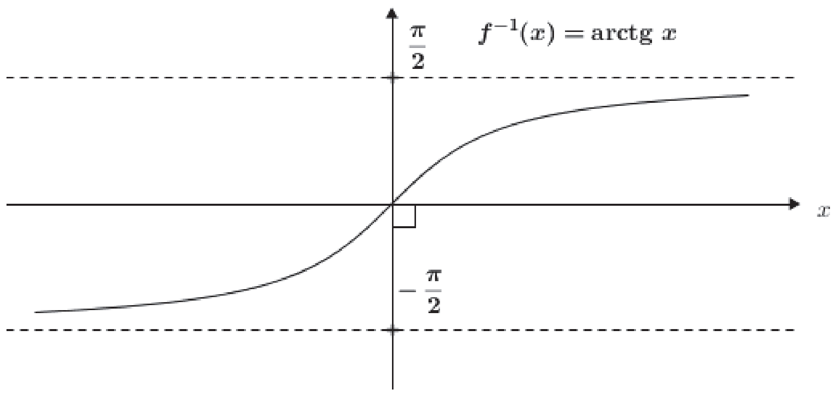


Figura 2.42: Função arco-tangente

2.9 Exp(x) e Relação de Euler

Definição 2.14 *No curso de cálculo define-se a função* e^x $(x \in \mathbb{R})$ *como:*

$$Exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

ou seja, uma soma infinita (Série infinita) com domínio de convergência o conjunto dos números Reais.

2.9.1 Propriedade Multiplicativa

$$e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1 + t_2}, \;\; t_1 \in \mathbb{R} \text{ e } t_2 \in \mathbb{R}$$

2.9.2 Relação de Euler para x Real

$$e^{i\cdot x} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$$

e para

$$e^{-i\cdot x} = \cos(-x) + i \cdot \operatorname{sen}(-x).$$

Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, vem:

$$e^{-i\cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x).$$

2.9.3 Seno e Cosseno Complexo

$$(1)\ e^{i\cdot x} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \ (x \in \mathbb{R})$$

como:

$$(2)\ e^{-i\cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x) \ (x \in \mathbb{R}).$$

Fazendo:
$(1) + (2)$ e $(1) - (2)$, segue-se que:
De $(1) + (2)$, vem: $\cos x = \dfrac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2}$
De $(1) - (2)$, vem: $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2\cdot i}$.
Para cada $z = x + y \cdot i$ com x e y Reais, definamos:

$$\begin{cases} \cos(z) & = \dfrac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2} \\ \text{e} & \\ \operatorname{sen}(z) & = \dfrac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2\cdot i} \end{cases} \text{,com o seno e cossenos complexos.}$$

2.9.4 Noções Para Série de Fourier

Definição 2.15 *(Série de Funções) Uma Série* $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$, *(m natural), na qual cada* f_m *é uma função denominaremos Série de funções.*

Exemplo:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (n natural), x variável real, com $|x| < 1$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + k^2}$ (k natural), x variável real.

c) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$, a_n e b_n números reais dados e n natural $(n \geq 1)$
(Série trigonométrica)

$\diamond$

Observação 2.6 *Dizemos que a Série de funções* $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ *converge uniformemente, em um domínio* D*, à função* $t : D \to \mathbb{R}$ *se, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existir um natural* n_0 *tal que, para todo* $x \in D$*,* $n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{m=0}^{\infty} f_m - t(x) \right| < \epsilon$*. Não devemos esquecer da existência de critérios como de Cauchy e o de Weierstrass, bastante utilizados para decidir se uma convergência é uniforme ou não.*

Definição 2.16 *(Coeficientes de Fourier em uma Função g) Sendo* $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *e* g *integrável os números* $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$*,* $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)dx$ *para* $n \geq 1$ *e* $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen}(nx)dx$ *para* $n \geq 1$ *(n natural), são denominados coeficientes de Fourier de* g*.*

Definição 2.17 *(Série de Fourier de uma função g) A Série* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$ *onde* a_n *e* b_n *são coeficientes de Fourier de* g*, é dita Série de Fourier de* g*.*

Observação 2.7 *Lembraremos neste momento de certas integrais com uso frequente nas Séries de Fourier, bem como, a regra de integração por partes.*

- $\int \cos(nx)\ dx = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + w$ (w constante real, $n \geq 1$ natural)
- $\int \operatorname{sen}(nx)\ dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + w$
- $\int f(x) \cdot g\text{‘}(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f\text{‘}(x) \cdot g(x)\ dx$

Admitamos as funções f e g deriváveis, contínuas e integráveis em um intervalo I.

Capítulo 3

Aplicações

Conviveremos neste capítulo com situações cujo desenvolvimento dependerá do uso de uma ou mais das fundamentações teóricas vista no capítulo anterior.

3.1 Arco soma e função trigonométrica inversa

01) Utilizando a fórmula $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{tgx + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ e a equivalência $\operatorname{arctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = y$ (x e y reais e diferentes de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k inteiro). Verifique que $\dfrac{\pi}{4} = 3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{9}{46}$.

Solução: 3.1 *Seja* $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} a$.

Fazendo:

$$\begin{array}{ccc} x & = & \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} \\ & e & \\ y & = & \operatorname{arctg} a \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{ccc} \operatorname{tg} x & = & \dfrac{1}{5} \\ & e & \\ \operatorname{tg} y & = & a \end{array} \quad (*)$$

Portanto, da igualdade: $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} a$, *vem:*

$\dfrac{\pi}{4} = x + y \Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(x+y)$. *Como* $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{tgx + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ *e* $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, *segue-se que:*

$1 = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$. *Mas, por* $(*)$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{5}$ *e* $\operatorname{tg} y = a$. *Substituindo, Vem:*

$\dfrac{1}{5} + a = 1 - \dfrac{1}{5}a \Rightarrow 1 + 5a = 5 - a \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}$.

Logo, como: $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} a \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$ *(Afirmação 1)*

Seja:

$\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} b.$

Fazendo:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} \\ & e & \\ t & = & \operatorname{arctg} b \end{array} \iff \begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x & = & \dfrac{1}{5} \\ & e & \\ \operatorname{tg} t & = & b \end{array}, \left(t \in \mathbb{R} \ e \ t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) (**).$$

Portanto, da igualdade: $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} b$, *vem:*

$\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} = x + t \iff \operatorname{tg}(x+t) = \dfrac{2}{3}.$

Daí:

$\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} t} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg} t = 2 - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} t$. *Mas, por* $(**)$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{5}$ *e* $\operatorname{tg} t = b$. *Substituindo, vem:*

$\dfrac{3}{5} + 3 \cdot b = 2 - \dfrac{2}{5} \cdot b \Rightarrow 3 + 15 \cdot b = 10 - 2 \cdot b \Rightarrow b = \dfrac{7}{17}.$

Logo, como: $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$ *(Afirmação 1).*

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{17} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{17}$ *(Afirmação 2).*

Seja:

$\operatorname{arctg}\dfrac{7}{17} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} c.$

Fazendo:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} \\ & e & \\ w & = & \operatorname{arctg} c \end{array} \iff \begin{array}{rcl} \operatorname{tg} x & = & \dfrac{1}{5} \\ & e & \\ \operatorname{tg} w & = & c \end{array}, \left(w \in \mathbb{R} \ e \ w \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) (***).$$

Portanto, da igualdade: $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{17} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} c$, *vem:*

$\operatorname{arctg}\dfrac{7}{17} = x + w \iff \operatorname{tg}(x+w) = \dfrac{7}{17}.$

Daí:

$\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} w} = \dfrac{7}{17} \Rightarrow 17 \operatorname{tg} x + 17 \operatorname{tg} w = 7 - 7 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} w$. *Mas, por* $(**\,*)$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{5}$ *e* $\operatorname{tg} w = c$. *Substituindo, vem:*

$\dfrac{17}{5} + 17c = 7 - \dfrac{7}{5}c \Rightarrow 17 + 85c = 35 - 7c \Rightarrow c = \dfrac{9}{46}$.

Logo, como $\dfrac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} \dfrac{7}{17}$ *(Afirmação 2)*

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} \dfrac{9}{46} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg} \dfrac{9}{46}$

Observação 3.1 *Procedendo desta forma, John Machim (1680 - 1751) calculou para π uma aproximação com 100 casas decimais. O mesmo procedimento foi utilizado por William Shanks (1812 - 1882) Calculando para π uma aproximação com 707 casas decimais.*

3.2 Equações trigonométricas no campo complexo

02) Verifique no campo complexo o número de soluções para a equação $\operatorname{sen} z = 3$, onde $z = x + yi$ (x e y reais).

Solução: 3.2 $\operatorname{sen} z = 3$ $\left(\text{\textit{por definição senz}} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$, *daí:*

$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 6i \Leftrightarrow e^{iz} - \dfrac{1}{e^{iz}} - 6i = 0$ *(multiplicando ambos os membros por e^{iz}), vem:*

$(e^{iz})^2 - 6i(e^{iz}) - 1 = 0$ *(fazendo $e^{iz} = w$), temos:* $w^2 - 6iw - 1 = 0$ *(equação do segundo grau em w). Logo:*

$\Delta = (-6i)^2 - 4(1)(-1)$

$\Delta = 36i^2 + 4$ *(como $4 = -4i^2$)*

$\Delta = 36i^2 - 4i^2$

$\Delta = 32i^2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot i^2}$

$\sqrt{\Delta} = 4i\sqrt{2}$. *Como:* $w = \dfrac{6i \pm 4i\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w = (3 \pm 2\sqrt{2})i$.

Porém, como $e^{iz} = w$, vem:

$e^{(x+yi)i} = (3 \pm 2\sqrt{2})i (z = x + yi) \Leftrightarrow e^{xi+yi^2} = (3 \pm 2\sqrt{2})i \Leftrightarrow e^{-y} \cdot e^{xi} = (3 \pm 2\sqrt{2})i$ *(propriedade multiplicativa)* $\Leftrightarrow e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 \pm 2\sqrt{2})i$ *(relação de Euler)*

Analisando cada possibilidade

I) $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 + 2\sqrt{2})i$. *Note que o número no segundo membro da igualdade é Imaginário puro, logo:*

$\cos x = 0$, *isto é,* $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $e^{-y} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -y = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\ln(3 + 2\sqrt{2})$. *Logo: números complexos da forma* $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln(3 + 2\sqrt{2})$ *com* $k \in \mathbb{Z}$ *satisfazem a equação* $\operatorname{sen} z = 3$.

II) $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 - 2\sqrt{2})i$. *Note que* $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *(por motivos análogo a solução anterior) e* $e^{-y} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 3 - 2\sqrt{2}$, *daí:*

$-y = \ln(3 - 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$. *Logo: números complexos da forma* $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln(3 - 2\sqrt{2})$ *com* $k \in \mathbb{Z}$ *satisfazem a equação* $\operatorname{sen} z = 3$. *Portanto, no campo dos números complexos, a equação* $\operatorname{sen} z = 3$ *possui infinitas soluções.*

3.3 Identidades

03) Usando argumentos trigonométricos, prove cada identidade abaixo para m e n inteiros:

a) $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \dfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

b) $\cos(mx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

c) $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

Solução: 3.3 *De fato:*

De $\cos(m+n)x = \cos(mx)\cos(nx) - \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)$ $(*)$.

Trocando n *por* $-n$ *e sendo impar a função seno e par a função cosseno, escrevemos:*

$\cos(m-n)x = \cos(mx)\cos(nx) + \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)$ $(**)$.

Fazendo: $(**) - (*)$ *e* $(**) + (*)$, *vem:*

$\cos(m-n)x-\cos(m+n)x = 2\,\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)$ *e* $\cos(m-n)x+\cos(m+n)x = 2\cos(mx)\cos(nx)$. *Daí:*

$[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\cdot\dfrac{1}{2} = \mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)$ *e* $[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\cdot\dfrac{1}{2} = \cos(mx)\cos(nx)$.

De $\mathrm{sen}(m+n)x = \mathrm{sen}(mx)\cos(nx) + \mathrm{sen}(nx)\cos(mx)$ (1).

De modo análogo ao exercício anterior, escrevemos:

$\mathrm{sen}(m-n)x = \mathrm{sen}(mx)\cos(nx) - \mathrm{sen}(nx)\cos(nx)$ (2).

Fazendo: (1) + (2), *vem:*

$\mathrm{sen}(m+n)x + \mathrm{sen}(m-n)x = 2\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)$. *Daí:* $[\mathrm{sen}(m+n)x + \mathrm{sen}(m-n)x]\cdot\dfrac{1}{2} = \mathrm{sen}(mx)\cos(nx)$.

3.4 Igualdades

04) Mostre que:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\ dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx$; Para $m \neq n$ inteiros

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = 0$; para todo m e n (inteiros)

c $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\ dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx$ para $m = n$ (inteiro).

Solução: 3.4 *a)* $m \neq n$, *daí:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}(m-n)x}{(m-n)} - \frac{\mathrm{sen}(m+n)x}{(m+n)}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\ dx = 0$, *e:*

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\ dx$ *de modo análogo, temos:*

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = 0.$

b) Primeiro caso $m \neq n$, *vem:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]\ dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{(m+n)} + \frac{-\cos(m-n)x}{(m-n)}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = 0$$

Segundo caso $m = n$, vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2}\ dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\operatorname{sen}(2nx)\ dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2nx)}{2n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ dx = 0.$$

c) Para $m = n$, vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)\ dx \ \ e \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx.$$

Daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}[1-\cos^2(nx)]\ dx \ \ e \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2nx)\ dx\right).$$

Segue-se que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx = 2\pi - \left(\pi + \frac{1}{2}\cdot 0\right) \ \ e \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ dx = \pi \ \ e \ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \pi.$$

3.5 Aplicação 1 para a Série de Fourier

05) Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}^*$). Ache a Série de Fourier de $f(x)$.

Solução: 3.5 *I) coeficientes de Fourier.*

$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} ax\ dx$ *e* $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} ax \cdot \cos(nx)\ dx$

$(n \geq 1)$. *como* ax *e* $ax \cdot \cos(nx)$ *são funções impares, temos* $a_0 = 0$ *e* $a_n = 0$.

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} ax \cdot \text{sen}(nx)\ dx$ $(n \geq 1)$. *como* $ax \cdot \text{sen}(nx)$ *é função par, temos:*

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} ax \cdot \text{sen}(nx)\ dx.$

Integrando por partes, segue-se que:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{ax}{n}\cos(nx)\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{a}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\ dx\right].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[(-1)\left(\frac{a\pi}{n}\right)(-1)^n + \frac{a}{n}\left(\frac{\text{sen}(nx)}{n} + w\right)\Bigg|_0^{\pi}\right].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\frac{a\pi}{n}\right] = (-1)^{n+1}\frac{2a}{n}.$$

Logo, a Série de Fourier procurada é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2a}{n}\cdot \text{sen}(nx),\ n \geq 1.$$

3.6 Aplicação 2 para a Série de Fourier

06) Uma onda quadrada é uma função periódica simples de forma analítica $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. Esta forma de onda Básica é encontrada frequentemente nas áreas da eletrônica e do processamento de sinais, ela alterna regularmente e instantaneamente entre dois níveis. Na figura 3.1, tem-se uma exemplo de uma onda quadrada.

Determine a Série de Fourier da onda exposta na figura 3.1.

Solução: 3.6 *Os coeficientes de Fourier:*

$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx$

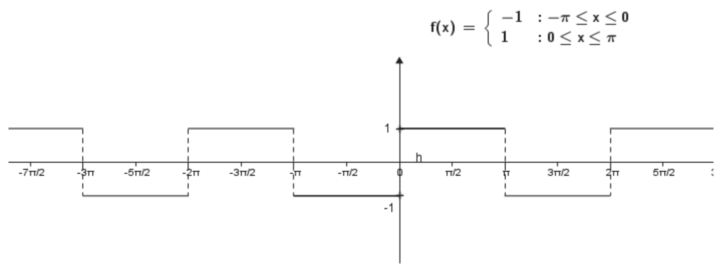


Figura 3.1: Onda Quadrada

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\ dx\right)$$
$$a_0 = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\ dx\right)$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\ dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\mathrm{sen}(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(nx)\ dx\right)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\left(-\frac{1}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right) + \left(-\frac{cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{2\cos(n\pi)}{n}\right)$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)).$$

Logo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))\,\mathrm{sen}(nx)$ *é a Série de Fourier da função* $f(x)$.

3.7 Lei do cosseno e Lei do seno

07) Prove que:

a) Em um triângulo qualquer (ver figuras 3.2 3.3), vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$.

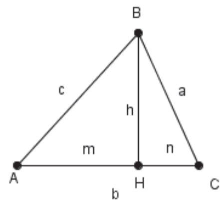


Figura 3.2: Triângulo Acutângulo ABC com Ângulo Agudo Fixo em A

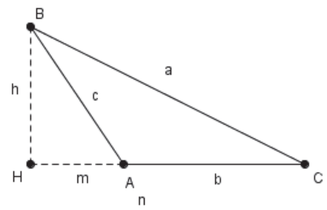


Figura 3.3: Triângulo Obtusângulo ABC com Ângulo Obtuso Fixo em A

b) Em um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência de raio R (ver figura 3.4), vale a relação: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$

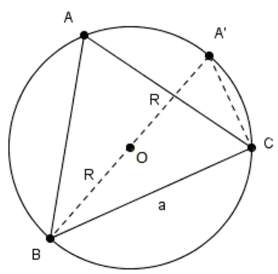


Figura 3.4: Triângulo Inscrito ABC no Circulo de Centro O e Raio R

Solução: 3.7 *a) Caso* $\hat{A} < 90°$

- *Do* Δ_{AHB}*; vem:* $c^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (1)
- *Do* Δ_{CHB}*; vem:* $a^2 = h^2 + n^2$ (2)
- *Do* Δ_{ABC}*; vem:* $m + n = b \Leftrightarrow n = b - m$ (3).

Substituindo em (2) os valores de h^2 e n escritos em (1) e (3), temos:
$a^2 = c^2 - m^2 + (b-m)^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$
mas, $m = c \cdot \cos(\hat{A})$. *Logo:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

Caso $90° < A < 180°$

$\rightarrow$ *Do* Δ_{AHB}; *vem:* $c^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (1)

$\rightarrow$ *Do* Δ_{BHC}; *vem:* $a^2 = h^2 + n^2$ (2).

Como $n = b + m$ (3) *e substituindo os valores de* h^2 *e* n *encontrados em* (1) *e* (3) *em* (2), *vem:*

$a^2 = c^2 - m^2 + (b+m)^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$. *mas,* $m = c \cdot \cos(180° - A)$ *ou* $m = -c \cdot \cos \hat{A}$. *Logo:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

b) Do $\Delta_{A'CB}$, *vem:* $\hat{C} = 90°$ *(ângulo inscrito tendo como lado oposto um diâmetro da circunferência e* $\hat{A} = \hat{A}'$*) ângulos inscritos na mesma circunferência correspondentes a arcos de mesma medida.*

Logo:

$a = 2R \cdot \operatorname{sen} \hat{A}' \Leftrightarrow a = 2R \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \Leftrightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R.$

3.8 Aplicação da Lei do cosseno e Lei do seno

08) De um ponto P a beira mar, Egdemos avista duas ilhas C e D (ver figura 3.5)

Para ele a questão é: como procederia um topografo dispondo de trenas, teodolito e fazendo uso de conceitos básicos de trigonometria, para calcular a distância que separa essas ilhas sem recorrer à medição direta?

Solução: 3.8 • *Primeiro passo:*

Escolhem-se na praia dois pontos A e B, de onde se possam ver as ilhas. usando a trena calcula-se a distância AB (digamos x).

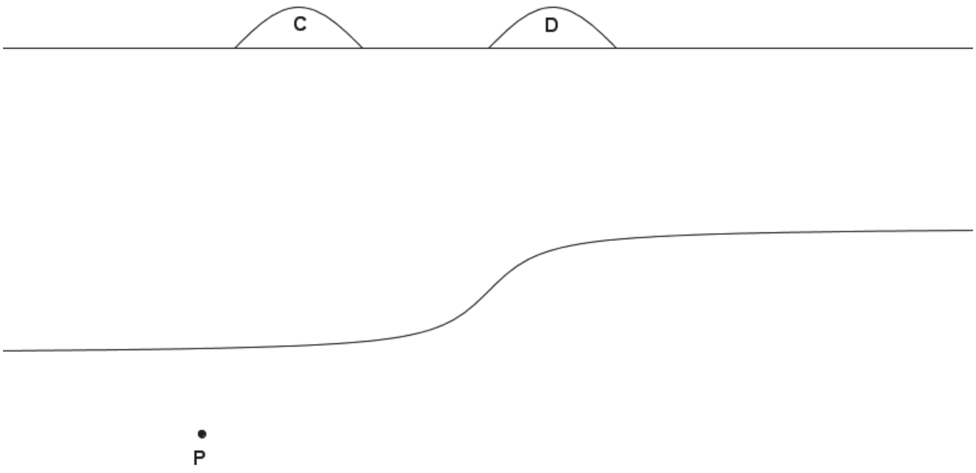


Figura 3.5: Ilhas C e D

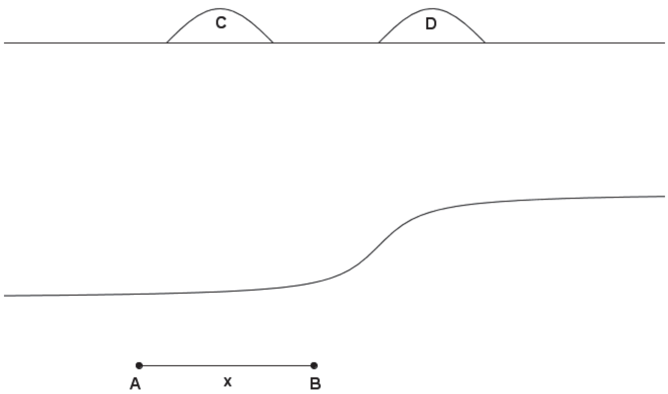


Figura 3.6: Segmento AB

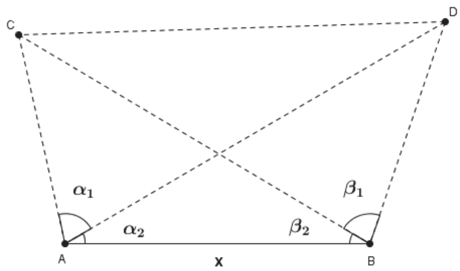


Figura 3.7: Quadrilátero $ABCD$

- *Segundo passo:*

Medem-se os ângulos $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ com o teodolito (ver figura 3.7).

- *Terceiro passo:*
  Destaquemos dois triângulos (Δ_{ABC} e Δ_{ABD}).

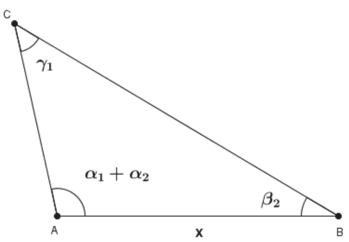


Figura 3.8: Triângulo ABC Interno na Figura 3.7

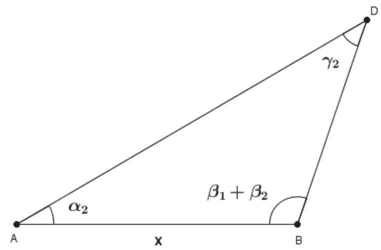


Figura 3.9: Triângulo ABD Interno na Figura 3.7

Mas: $\gamma_1 = 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2)$
Pela lei dos senos
$\dfrac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\beta_2} = \dfrac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma_1} \Leftrightarrow \overline{AC} = x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}\gamma_1}$ (1)
Mas: $\gamma_2 = 180° - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)$ *pela lei dos senos* $\dfrac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}(\beta_1 + \beta_2)} = \dfrac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma_2} \Leftrightarrow$
$\overline{AD} = x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\beta_1 + \beta_2)}{\operatorname{sen}\gamma_2}$ (2)

- *Quarto passo (final)*
  Destaquemos o triângulo ACD:

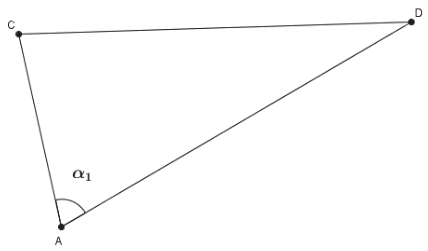


Figura 3.10: Triângulo ACD Interno na Figura 3.7

Note que são conhecidas as medidas de $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e α_1. Pela lei dos cossenos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos\alpha_1 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos\alpha_1}$$

3.9 Razões trigonométricas e teorema de Pitágoras

09) Suponha que uma pessoa está deitada em uma praia observando o pôr do sol em um oceano tranquilamente, a pessoa liga um cronômetro assim que a ponta mais alta do sol desaparece. A pessoa então fica em pé, eleva seus olhos de uma altura h, e para o cronômetro quando a parte mais alta do sol desaparece novamente. Se o tempo decorrido no relógio é t segundos, determine um valor aproximado para o raio da Terra usando $h = 1,70\ m$ e $t = 11,1$ segundos.

Solução: 3.9 *Lembre-se que, à medida que o sol desaparece, a linha de visão do observador até a parte de cima do sol é tangente à superfície da Terra.*

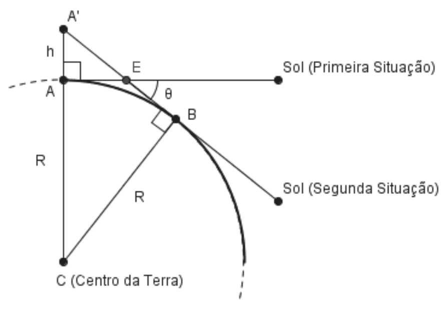


Figura 3.11: Triângulo $A'BC$ com Ângulo Fixo θ

Do $\Delta_{A'BC}$ Retângulo, vem:
$(R+h)^2 = (\overline{A'B})^2 + R^2$ *e* $\overline{A'B} = R \cdot \operatorname{tg}\theta$. *Mas como o ângulo θ é o ângulo descrito pelo sol em torno da Terra durante o tempo medido $t = 11,1$ segundos e durante um dia inteiro (aproximadamente 24 horas), o sol descreve um ângulo de 360° em torno da Terra, isto sugere uma regra de três simples e direta:*

Tempo		*Ângulo*
24 horas	———	360°
11,1 segundos	———	θ*(graus)*

Daí: $\theta = \dfrac{(11,1)\cdot(360°)}{24\cdot 60\cdot 60}$

$\theta = 0,04625°$. *Portanto, de:* $(R+h)^2 = (\overline{A'B})^2 + R^2$ *e* $\overline{A'B} = R\cdot\operatorname{tg}\theta$, *temos,* $R^2+2Rh+h^2 = (R\operatorname{tg}\theta)^2+R^2 \Leftrightarrow 2Rh+h^2 = R^2\cdot\operatorname{tg}^2\theta$. *Como* h *é bem menor que o raio da Terra, então* h^2 *é bem menor em relação a* $2Rh$*, podendo ser desprezado a sua medida. Daí:*

$2Rh = R^2\operatorname{tg}^2\theta \Leftrightarrow \dfrac{2h}{\operatorname{tg}^2\theta} = R$. *Mas:* $h = 1,70\ m$ *e* $\theta = 0,04625°$. *Substituindo, vem:*

$R = \dfrac{2(1,70\ m)}{\operatorname{tg}^2(0,4625°)}$ *(usando uma calculadora cientifica)*

$R \cong 5.220.000\ m$ *(o valor aceito para o raio (médio) da Terra é* $6.370.000\ m$*, cujo resultado anterior não difere mais que 20% deste valor).*

Referências Bibliográficas

[1] Willian G. MacCallum - Álgebra : Forma e Função / produzido pelo Calculus Consortium e Financiado inicialmente por uma bolsa da National Science Foundation; tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio - Rio de Janeiro : LTC, 2011

[2] Antunes, Fernando do Coltro - Matemática por assunto - Trigonometria - São Paulo: Scipione 1988

[3] GOMES, Carlos A. - Pode um seno ser maior do que 1? - RPM revista do professor de matemática. Ed. 81, ano 31. 2013. Grafica e Editora Cruzado Ltda.

[4] Gidorizzi, Hamilton Luiz - Um Curso de Cálculo - 2 ed vol 4 - Rio de Janeiro: 1997

[5] Dante, Luiz Roberto - Matemática: Contexto e Aplicações - 2 ed - São Paulo: 2013

[6] Iezzi, Gelson, 1939 - Fundamentos de Matemática elementar, 3 : Trigonometria - 7 ed - São Paulo : Atual 1993

[7] Júnior, Francisco Ramalho, 1940 - Júnior, Nicolau Gilberto Ferraro, Paulo Antônio de Toledo Soares - Os Fundamentos da Física / 5ª edição - São Paulo : Moderna 1988

[8] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszanjn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida - Matemática: Ciência e aplicações, Volume 1: ensino médio - 7 ed - São Paulo : Saraiva 2013

[9] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszanjn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida - Matemática: Ciência e aplicações, Volume 2: ensino médio - 7 ed - São Paulo : Saraiva 2013

[10] Neto, Aref Antar - Geometria Analítica: 2º grau - São Paulo: Moderna 1980

[11] Rooney, Anne - A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. 2012 - São Paulo - M.Books do Brasil Editora LTDA.

[12] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. - Fundamentos de Física - 6 ed - Rio d Janeiro: Editora LTC. 2002

[13] Wiley, John; Inc, Sons. - Livros Técnicos e Científicos : Contexto e Aplicações - 2 ed - Rio de Janeiro: Editora S.A. 2002