

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre a Geometria de Imersões Riemannianas

por

Fábio Reis dos Santos

Campina Grande - PB

Maio de 2015

Sobre a Geometria de Imersões Riemannianas

por

Fábio Reis dos Santos [†]

sob orientação do

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa
Associado de Pós-Graduação em Matemática -
UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do
título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Maio de 2015

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em:

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino - UFPI

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante - UFAL

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Mai de 2015

Resumo

Nos propomos estudar a geometria de imersões Riemannianas em certas variedades semi-Riemannianas. Inicialmente, consideramos hipersuperfícies Weingarten lineares imersas em variedades localmente simétricas e, impondo restrições apropriadas à curvatura escalar, garantimos que uma tal hipersuperfície é totalmente umbílica ou isométrica a uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas, sendo uma destas simples. Em codimensão alta, usamos uma fórmula do tipo Simons para obter novas caracterizações de cilindros hiperbólicos a partir do estudo de subvariedades com vetor curvatura média normalizado paralelo em uma forma espacial semi-Riemanniana. Finalmente, investigamos a rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas no steady state space via aplicações de alguns princípios do máximo.

Palavras-chave: Variedades localmente simétricas, subvariedades Weingarten lineares, hipersuperfícies totalmente umbílicas, hipersuperfícies isoparamétricas, subvariedades tipo-espaço, steady state space.

Abstract

Our purpose is to study the geometry of Riemannian immersions in certain semi-Riemannian manifolds. Initially, considering linear Weingarten hypersurfaces immersed in locally symmetric manifolds and, imposing suitable constraints on the scalar curvature, we guarantee that such a hypersurface is either totally umbilical or isometric to a isoparametric hypersurface with two distinct principal curvatures, one of them being simple. In higher codimension, we use a Simons type formula to obtain new characterizations of hyperbolic cylinders through the study of submanifolds having parallel normalized mean curvature vector field in a semi-Riemannian space form. Finally, we investigate the rigidity of complete spacelike hypersurfaces immersed in the steady state space via applications of some maximum principles.

Keywords: Locally symmetric manifolds, linear Weingarten submanifolds, totally umbilical hypersurfaces, isoparametric hypersurfaces, spacelike submanifolds, steady state space.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus, pois sem ele eu não seria. Aos meus pais Maria Renilde e Francisco por todo esforço, pela educação, incentivo, amor e dedicação dadas a mim e, as minha irmãs Sheila e Katiane.

A minha namorada, companheira e futura doutora, Aline Barbosa Tsuyuguchi, pelos inúmeros momentos de alegria, de distração, por sua dedicação, carinho, e sobretudo pelo seu amor... além disso, uma coisa a qual eu não posso deixar de agradecer a ela, é a sua divina paciência, pois não sou uma pessoa fácil de se lidar.

Aos meus amigos e companheiros Luciano Cipriano e Jogli Gidel pelo excelente convívio e momentos de gargalhadas nas madrugadas de estudo. Aos colegas de mestrado e doutorado: Ailton, Alânnio, Romildo, Arthur, Arlandson, Luciano (Cuité), Brito, Débora, Fabrício e a todos que esqueci e que fizeram parte do nosso convívio na famosa "sala do mestrado". Em especial aos amigos e companheiros Claudemir e Pajé (também conhecido por Antônio Marcos) pelas conversas agradáveis e bons momentos.

Aos professores Cícero e Nazareno por comporem minha banca de qualificação e pela parceria em geometria, espero que ela continue bom um bom tempo.

Aos professores Evandro e Maurício do do IM-UFBA pelos pontapés iniciais, ensinamentos transmitidos e incentivo.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática, em especial aos professores Marco Aurélio, Claudianor, Ângelo, Brandão e Diogo Diniz os quais contribuíram substancialmente para a minha formação como estudante de matemática.

Aos meus orientadores Henrique Fernandes e Marco Antonio. Agradeço bastante por toda a atenção, paciência, dedicação e sobretudo, a amizade que cultivamos nesse período de orientação. Não esquecendo dos momentos de descontração com a métrica (humor) cearense do professor Henrique nos cafés em dona Dalva ou no decorrer dos seminários. A esses dois, eu devo uma agradecimento especial.

Agradeço também aos professores Marcos Petrúcio e Márcio Batista da UFAL e

Cícero de Aquino da UFPI por comporem a minha banca de defesa de tese.

A CAPES pelo apoio financeiro.

E a todos que contribuíram de forma direta ou indireta nessa conquista da minha vida, meus sinceros agradecimentos.

“Se quiseres ir rápido, vá sozinho; mas se quiseres ir longe, vá acompanhado.”

Provérbio africano

Dedicatória

Aos meus pais, Maria Renildes e
Francisco

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Formas espaciais semi-Riemannianas e resultados de classificação	4
1.2 Alguns princípios do máximo	6
2 A geometria de hipersuperfícies imersas em ambientes Riemannianos	12
2.1 Uma fórmula do tipo Simons para ambientes Riemannianos	13
2.2 Variedades Riemannianas localmente simétricas e resultados auxiliares .	17
2.3 Rigidez de hipersuperfícies Weingarten lineares em variedades local- mente simétricas	26
2.3.1 L -parabolicidade de hipersuperfícies Weingarten lineares	32
2.4 Hipersuperfícies Weingarten lineares em variedades Riemannianas local- mente simétricas	36
2.4.1 Provas dos Teoremas 2.4.1 e 2.4.2	37
2.5 Hipersuperfícies com duas curvaturas principais distintas	38
2.5.1 Hipersuperfícies Weingarten lineares completas	45
3 A geometria de hipersuperfícies tipo-espaço imersas em ambientes Lorentzianos	49
3.1 Uma fórmula do tipo Simons para ambientes Lorentzianos	50
3.2 Espaços Lorentzianos localmente simétricos e resultados auxiliares . . .	53
3.3 Hipersuperfícies tipo-espaço com duas curvaturas principais distintas .	59

3.3.1	Espaços-tempo de Einstein localmente simétricos	66
3.3.2	Aplicações em formas espaciais	70
3.4	Estudo de hipersuperfícies via curvatura escalar	77
4	Caracterizações de cilindros hiperbólicos	82
4.1	Preliminares	82
4.2	Resultados auxiliares	86
4.3	Resultados de caracterização	90
5	Caracterizações de hiperplanos no <i>steady state space</i> $\mathcal{H}^{n+1}$	97
5.1	Apresentando o ambiente steady state	98
5.1.1	Caracterizando hiperplanos tipo-espaco no steady state space . .	100
5.2	Notações básicas e resultados auxiliares	110
5.2.1	Unicidade em um espaço-tempo do tipo steady state	114
	Referências	120

Introdução

Um dos temas clássicos de estudo na Geometria Diferencial é a caracterização de hipersuperfícies imersas em variedades semi-Riemannianas possuindo curvatura média ou escalar constante. Nesta direção, Brasil, Colares e Palmas [35] utilizaram o princípio do máximo generalizado de Omori-Yau para obter caracterizações de hipersuperfícies completas com curvatura escalar constante imersas na esfera unitária Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Em [7], Alías e García-Martínez, por meio de um princípio do máximo fraco de Omori-Yau devido a Pigola, Rigoli e Setti [81], investigaram o comportamento da curvatura escalar R de uma hipersuperfície completa imersa em uma forma espacial Riemanniana com curvatura média constante e, obtiveram uma estimativa ótima para o ínfimo da curvatura escalar R .

Quando o espaço ambiente é o espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, Goddard [49] conjecturou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço³ completas com curvatura média constante H imersas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ seriam as totalmente umbílicas. Muito embora esta conjectura acabou se mostrando falsa em sua configuração original, ela impulsionou uma série de trabalhos de diversos autores tentando encontrar uma resposta afirmativa para esta conjectura sob certas hipóteses adicionais apropriadas. Por exemplo, Akutagawa [14] mostrou ser verdadeira a conjectura de Goddard se $0 \leq H^2 \leq 1$ e $n = 2$, ou se $0 \leq H^2 < 4(n-1)/n^2$ e $n \geq 3$. Já em [70], Montiel a mostrou ser verdadeira no caso de hipersuperfícies fechadas (isto é, compactas sem bordo). Mais precisamente, ele provou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço fechadas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura média constante são as esferas totalmente umbílicas. Além disso, ele exibiu exemplos

³Lembremos que uma subvariedade é dita tipo-espaço quando sua métrica induzida for Riemanniana.

de cilindros hiperbólicos que cumprem todas as hipóteses da conjectura mais não são hipersuperfícies totalmente umbílicas.

Relacionado ao caso curvatura escalar constante, Li em [66], mostrou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço fechadas com curvatura escalar constante satisfazendo $\frac{n-2}{n} \leq R \leq 1$ em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ são as totalmente umbílicas. Neste mesmo trabalho, Li propôs a seguinte conjectura: *as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura escalar normalizada constante satisfazendo $\frac{n-2}{n} \leq R \leq 1$ são as totalmente umbílicas.* Em resposta a tal conjectura, Caminha [25], impondo a condição de que a curvatura média atinge o supremo, atestou sua veracidade. Logo após, supondo apenas a curvatura média limitada, Camargo, Chaves e Sousa [23] estenderam uma técnica devido a Cheng e Yau em [31] e mostraram também ser verdadeira a conjectura para este caso.

Uma outra temática interessante, é o estudo acerca da geometria de hipersuperfícies Weingarten lineares. Dizemos que uma hipersuperfície é *Weingarten linear* quando suas curvaturas média e escalar normalizada são linearmente relacionadas. Nesta configuração, Hou e Yang [57] ampliaram as idéias de Li, Suh e Wei em [65] e obtiveram resultados de caracterização para hipersuperfícies tipo-espaço completas Weingarten lineares em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Em [39], de Lima e Velásquez aplicaram uma extensão apropriada do princípio do máximo no infinito de Yau [92] devido a Caminha [27] e caracteriza as hipersuperfícies tipo-espaço completas não-compactas Weingarten lineares em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Notemos que uma extensão natural das formas espaciais são os *espaços localmente simétricos*, os quais são variedades semi-Riemannianas cujas componentes da derivada covariante do seu tensor curvatura são identicamente nulas. Neste contexto, estendendo resultados prévios de Cheng e Nakagawa [32] e de Ki, Kim e Nakagawa [62], Ok Baek, Cheng e Suh [76] mostraram que, sob restrições apropriadas na curvatura média de uma hipersuperfície tipo-espaço completa, uma tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou isométrica a uma hipersuperfície isoparamétrica possuindo duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples.

Passando a codimensão alta, Ishihara [60] mostrou que as únicas subvariedades de dimensão n completas e maximais do espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_p^{n+p}$ de índice p são as totalmente geodésicas, estendendo para codimensão arbitrária, o resultado clássico de Cheng-Yau [31]. Por outro lado, Cheng [33] estendeu o resultado de Aku-

tagawa [14] para subvariedades tipo-espaço completas com vetor curvatura média paralelo no espaço de Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}$ de índice p . Pouco tempo depois, Alías e Romero em [11] desenvolveram fórmulas integrais para subvariedades tipo-espaço fechadas em $\mathbb{S}_p^{n+p}$ e, como aplicação, eles obtiveram um resultado do tipo-Bernstein para subvariedades tipo-espaço completas maximais em $\mathbb{S}_q^{n+p}$, estendendo o resultado anterior devido a Ishihara [60]. No que tange ao espaço anti-de Sitter $\mathbb{H}_p^{n+p}$ de índice p , Ishihara [60] mostrou que uma subvariedade tipo-espaço completa e maximal de dimensão n imersa em $\mathbb{H}_p^{n+p}$ deve ter o quadrado da norma de sua segunda forma fundamental limitado superiormente por np . Além disso, ele provou que as únicas subvariedades que atingem essa estimativa são os cilindros hiperbólicos maximais da forma $\mathbb{H}^{k_1} \left(-\frac{n}{k_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{H}^{k_{p+1}} \left(-\frac{n}{k_{p+1}}\right)$, onde $k_1 + \cdots + k_{p+1} = n$.

Motivados pelos trabalhos previamente descritos, nesta tese nos propomos estudar a geometria de imersões Riemannianas em certas variedades semi-Riemannianas. Para tal, iniciamos apresentando os ambientes os quais serão estudados bem como alguns princípios do máximo que servirão de maquinário analítico para a obtenção dos nossos resultados (cf. Capítulo 1). Em seguida, impondo restrições apropriadas à curvatura escalar, obtemos resultados no sentido de garantir que uma hipersuperfície completa imersa num espaço semi-Riemanniano localmente simétrico é totalmente umbílica ou isométrica a uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas, sendo uma das quais simples (cf. Capítulos 2 e 3). Em codimensão alta, estudamos as subvariedades completas com vetor curvatura média normalizado paralelo e usamos uma fórmula do tipo Simons para estabelecermos novas caracterizações dos cilindros hiperbólicos em formas espaciais semi-Riemannianas (cf. Capítulo 4). Finalmente, investigamos a rigidez de hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas no steady state space via aplicações de alguns princípios do máximo (cf. Capítulo 5).

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo estabelecer os ambientes os quais serão trabalhados, resultados de caracterização, bem como alguns princípios do máximo os quais serão usados ao longo deste trabalho de tese bem como enunciar um resultado de classificação de hipersuperfícies Riemannianas. Antes disso, fixaremos algumas notações básicas. Aqui, M^n sempre denotará uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n , $\mathcal{C}^\infty(M)$ denotará o espaço das funções suaves definidas sobre M^n e $\mathfrak{X}(M)$ denotará o $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo dos campos vetoriais suaves definidos sobre M^n .

1.1 Formas espaciais semi-Riemannianas e resultados de classificação

Seja $\mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 2$ e $p \geq 1$, o espaço Euclidiano de dimensão $(n+p)$ munido com a métrica canônica. Consideremos $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ a variedade Riemanniana $(n+p)$ -dimensional completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante c . A variedade $\mathbb{Q}_c^{n+p}$ damos o nome de forma espacial Riemanniana. De acordo com o sinal de c , podemos determinar a forma de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ (cf. por exemplo o Teorema 4.1 de [43]) como sendo:

- (a) o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p}$ se $c = 0$;
- (b) a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+p}(c)$ se $c > 0$;
- (c) o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}(c)$ se $c < 0$;

Levando em conta o Teorema 4 de [63] (veja também os clássicos resultados sobre hipersuperfícies isoparamétricas de uma forma espacial de Cartan [28], Levi-Civita [64] e Segre [85]), enunciamos o seguinte resultado de classificação

Teorema 1.1.1 *Seja M^n uma hipersuperfície Riemanniana imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ de curvatura seccional constante c . Suponha que M^n admite no máximo duas curvaturas principais distintas e constantes. Então, a menos de isometrias, M^n é uma subvariedade aberta de:*

- (i) $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde $c_1 > 0$, quando $c = 0$;
 - (ii) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c > 0$;
 - (iii) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c < 0$,
- onde $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Por outro lado, no contexto dual, quando munimos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^{n+p}$ com a seguinte métrica

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{j=n+1}^{n+p} x_j y_j,$$

temos que a variedade $\mathbb{R}_p^{n+p}$ é chamada de espaço *semi-Euclidiano* e possui curvatura seccional constante igual a zero.

Consideremos uma variedade semi-Riemanniana $(n+p)$ -dimensional completa, conexa com curvatura seccional constante c e denotada por $L_p^{n+p}(c)$. A esta variedade damos o nome de forma espacial semi-Riemanniana de índice p e quando $p = 1$, $L_1^{n+1}(c)$ é dita ser uma variedade Lorentziana.

Vejamos que o sinal de c determina a forma de $L_p^{n+p}(c)$, a saber:

- (a) se $c = 0$, então $L_p^{n+p}(c) = \mathbb{R}_p^{n+p}$;
- (b) se $c > 0$, então $L_p^{n+p}(c) = \mathbb{S}_p^{n+p} = \{x \in \mathbb{R}_p^{n+p+1}; \langle x, x \rangle = 1/c\}$, o qual é conhecido por espaço de Sitter de índice p ;
- (c) se $c < 0$, então $L_p^{n+p}(c) = \mathbb{H}_p^{n+p} = \{x \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+p+1}; \langle x, x \rangle = -1/c\}$, o qual é conhecido por espaço anti-de Sitter de índice p .

Para a obtenção dos nossos resultados de caracterização, enunciaremos um resultado o qual será de extrema importância para a obtenção dos mesmos, devido a Abe, Koike e Yamaguchi (cf. Teorema 5.1 de [1]).

Teorema 1.1.2 *Seja M^n uma hipersuperfície Riemanniana imersa em uma forma espacial Lorentziana $L_1^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante c . Suponha que M^n admite no máximo duas curvaturas principais distintas e constantes. Então, a menos de isometrias, M^n é uma subvariedade aberta de:*

(i) $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;

(ii) $\mathbb{S}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c > 0$;

(iii) $\mathbb{H}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c < 0$,

onde $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

1.2 Alguns princípios do máximo

Iniciaremos citando a seguinte consequência do conhecido teorema de Stokes, que é o teorema da Divergência para o caso em que a variedade Riemanniana M^n é fechada.

Teorema 1.2.1 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientável fechada e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo suave definido em M^n , então*

$$\int_M \operatorname{div}(X) dM = 0,$$

onde dM denota o elemento volume de M^n .

No caso em que M^n é uma variedade Riemanniana completa, Yau [92] obteve a seguinte versão do teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não-compactas. Apenas por razões de conhecimento básico, iremos apresentar uma ideia de sua demonstração.

Lema 1.2.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada completa e não-compacta e seja ω uma $(n-1)$ -forma diferencial definida em M^n tal que $\int_M |\omega| < \infty$. Então existe uma sequência de domínios $B_i \subset B_{i+1}$ tais que $M^n = \bigcup_i B_i$ e*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Esboço da prova. Fixado um ponto $p_0 \in M^n$, consideremos a função distancia em p_0

$$\begin{aligned} \phi: M^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \phi(q) = d(p_0, q), \end{aligned}$$

onde $d(p_0, q)$ denota a distância Riemanniana do ponto q ao ponto fixo p_0 . Para cada $r > 0$, seja $B(r)$ a bola de raio r e centro p_0 . Nesta configuração, de acordo com Gaffney [46], sobre $B(r)$, podemos aproximar a função ϕ por uma função suave e não negativa, g_r tal que

- (i) para quase todo $t < r$, a menos de um número finito, $g_r^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície compacta regular;
- (ii) $|dg_r| \leq \frac{3}{2}$ em $g_r^{-1}([0, r])$;
- (iii) $g_r^{-1}(t) \subset B(t+1) - B(t-1)$ para $t \leq r$.

Por meio do teorema de mudança de variáveis, temos o seguinte

$$\int_{g_r^{-1}([0, t])} |dg_r| |\omega| = \int_0^t \left(\int_{g_r^{-1}(s)} |\omega| \right) ds.$$

Agora, ao usarmos a condição (ii) na igualdade acima, temos

$$\int_0^t \left(\int_{g_r^{-1}(s)} |\omega| \right) ds \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|,$$

ou ainda

$$\int_{r/2}^t \left(\int_{g_r^{-1}(s)} |\omega| \right) ds \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|.$$

Da condição (i) e do teorema do valor médio para integrais, temos que para algum $r/2 \leq t_r \leq r$,

$$\int_{g_r^{-1}(t_r)} |\omega| \leq \frac{3}{r} \int_M |\omega|. \quad (1.1)$$

Logo, usando o teorema de Stokes, de (1.1), obtemos

$$\left| \int_{g_r^{-1}([0, t_r])} d\omega \right| \leq \int_{g_r^{-1}(t_r)} |\omega| \leq \frac{3}{r} \int_M |\omega|.$$

Uma vez que a função g_r satisfaz a condição (iii), podemos escrever

$$M = \bigcup_i g_i^{-1}([0, t_i]), \quad (1.2)$$

Portanto, de (1.2), concluimos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{g_i^{-1}([0, t_i])} d\omega = 0.$$

■

Denotando por $\mathcal{L}^1(M)$ o espaço das funções definidas sobre M^n que são integráveis à Lebesgue, como uma aplicação do resultado acima, Yau [92] obteve a seguinte extensão do teorema de Hopf para variedades Riemannianas completas.

Teorema 1.2.3 *Seja M^n uma variedade Riemanniana, orientada completa e não-compacta. Se $u \in \mathcal{C}^2(M)$ é uma função subharmônica tal que $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(M)$ então u é harmônica.*

Seguindo os mesmos passos do Yau [92], Caminha [27], obteve uma extensão do Lema 1.2.3 trocando o ∇u por um campo vetorial suave X com norma integrável. Este princípio do máximo, será de grande valia na obtenção dos nossos resultados e, por esta razão, apresentaremos a sua prova encontrada em [27].

Teorema 1.2.4 *Seja X um campo vetorial suave sobre uma n -dimensional variedade Riemanniana, orientada e completa M^n , tal que $\operatorname{div} X$ não muda de sinal sobre M^n . Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\operatorname{div} X = 0$ sobre M^n .*

Demonstração. Se M^n é fechada, o resultado segue do Lema 1.2.1. Mostraremos então o caso em que M^n é completa. Uma vez que $\operatorname{div} X$ não muda de sinal, suponhamos, sem perda da generalidade que $\operatorname{div} X \geq 0$. Consideremos ω , uma $(n-1)$ -forma suave definida sobre M^n dada por $\omega = i_X(dM)$, onde $i_X(dM)$ denota a contração da n -forma dM na direção do campo vetorial X .

Afirmção: $d\omega = (\operatorname{div} X)dM$.

De fato, seja $p \in M^n$ um ponto fixo e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal e geodésico em p . Neste referencial, podemos escrever $X = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, onde $f_i = \langle X, e_i \rangle$. Sejam ω_i , $i = 1, \dots, n$, formas diferenciais de grau um definidas em uma vizinhança de p por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Um cálculo simples e direto nos permite verificar que o elemento de volume de M^n é escrito como segue

$$dM = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Pondo $\theta_i = \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_n$, é possível escrever

$$i_X(dM) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \theta_i. \quad (1.3)$$

Tomando a derivada em (1.3), decorre que

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i \quad (1.4)$$

Sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $T_p M$, temos que $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ é uma base para o espaço das 1-formas, então

$$df_i = \sum_{j=1}^n df_i(e_j) \omega_j.$$

Mas considerando que $\omega_i \wedge \omega_i = 0$, vem

$$\begin{aligned}
(-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i &= (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=1}^n df_i(e_j) \omega_j \right) \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i+1} df_i(e_i) \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n \\
&= df_i(e_i) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_n.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Desde que $df_i(e_i) = e_i(f_i)$, de (1.5) obtemos

$$(-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i = e_i(f_i) dM. \tag{1.6}$$

Logo das igualdades (1.4) e (1.6), temos

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \left(\sum_{i=1}^n e_i(f_i) \right) dM + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i$$

Sendo o referencial geodésico, quando avaliamos em p , temos que $d\theta_i = 0$, pois

$$\begin{aligned}
d\omega_k(e_i, e_j) &= e_i \omega_k(e_j) - e_j \omega_k(e_i) - \omega_k([e_i, e_j]) \\
&= \omega_k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i),
\end{aligned}$$

e além disso, $e_i(f_i) = e_i \langle X, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$.

Portanto,

$$d\omega(p) = d(i_X(dM))(p) = \left(\sum_j \langle \nabla_{e_j} X, e_j \rangle(p) \right) dM = \operatorname{div} X(p) dM,$$

uma vez que o ponto p foi escolhido arbitrariamente, temos mostrado o afirmado.

Por outro lado,

$$|\omega|^2 = |i_X(dM)|^2 = \sum_j \langle X, e_j \rangle^2 = |X|^2.$$

Assim, estamos em condições de usar o Lema 1.2.3 para garantir a existência de uma sequência de domínios $B_i \subset B_{i+1}$ tais que $M^n = \bigcup_i B_i$ e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} d\omega = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} (\operatorname{div} X) dM = 0.$$

Sendo $\operatorname{div} X \geq 0$, devemos ter $\operatorname{div} X = 0$, que é o resultado desejado. ■

Observação 1.2.5 *O Lema 1.2.4 pode ser também visto como uma consequência da versão do Teorema de Stokes obtida por Karp em [61]. De fato, usando o Teorema em [61], a condição $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$ pode ser enfraquecida à seguinte condição técnica:*

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r) \setminus B(r)} |X| dM = 0,$$

onde $B(r)$ denota a bola geodésica de raio r centrada em algum ponto fixo $o \in M^n$. Veja o Corolário 1 e a Observação em [61] para alguma outra condição geométrica aumentando a segurança desse fato.

Uma fato bastante conhecido em variedades Riemannianas compactas é a existência de pontos de máximo (ou mínimo) de uma função. Assim, essa tal função neste ponto, possui gradiente nulo e Hessiano ou Laplaciano não-positivo (não-negativo). Quando a variedade Riemanniana é completa, nem sempre é verdade a existência de um tal ponto, assim surge a ideia de sequência maximizante (minimizante) com tais propriedades. Nesta vertente, citamos o seguinte resultado devido a Omori [78], o qual será aplicado na obtenção do nosso primeiro resultado do tipo Omori (cf. Lema 2.5.5).

Teorema 1.2.6 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais limitadas inferiormente e $f \in \mathcal{C}^2(M)$ uma função limitada superiormente. Então existe uma sequência de pontos $\{q_k\} \subset M^n$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(q_k) = \sup_M f$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla f(q_k)| = 0$ e*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max\{\text{Hess}f(q_k)(X, X) ; |X| = 1\} \leq 0.$$

Interessado pelo problema proposto por Omori, Yau [91] obteve a seguinte melhoria do Lema 1.2.6 trocando a limitação inferior da curvatura seccional pela limitação do Ricci e considerando o Laplaciano ao invés do Hessiano

Teorema 1.2.7 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e $f \in \mathcal{C}^2(M)$ uma função limitada superiormente em M^n . Então, existe uma sequência de pontos $\{q_k\}_k \subset M^n$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(q_k) = \sup_M f, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla f(q_k)| = 0 \quad e \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \Delta f(q_k) \leq 0.$$

Dizemos que o *Princípio do Máximo de Omori-Yau* vale sobre M^n para um operador de segunda ordem $\mathcal{L}$ se para qualquer função u de classe $\mathcal{C}^2$ definida sobre M^n com $u^* = \sup_M u < \infty$, existe uma sequência $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ com as seguintes propriedades

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \quad e \quad \mathcal{L}u(p_k) < \frac{1}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. O nosso princípio do máximo do tipo Omori-Yau (cf. Proposição 2.3.1), será obtido como uma aplicação do seguinte resultado, o qual é um caso particular do Corolário 3 de Alías, Impera e Rigoli [9].

Teorema 1.2.8 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, não-compacta orientada com curvatura seccional limitada inferiormente. Então o princípio do máximo de Omori-Yau vale sobre M para qualquer operador semi-elíptico $\mathcal{L} = \text{tr}(\mathcal{P} \circ \text{Hess})$ com $\sup_M \text{tr}(\mathcal{P}) < +\infty$.*

Em seguida, citamos o princípio do máximo devido a Eschenburg [45], o qual será aplicado na obtenção do nosso princípio da tangência

Teorema 1.2.9 *Sejam W_+ e W_- dois domínios abertos e disjuntos de uma variedade semi-Riemanniana com fronteiras Riemannianas de classe $\mathcal{C}^2$ possuindo um ponto em comum. Se as curvaturas médias H_+ de ∂W_+ e H_- de ∂W_- satisfazem*

$$H_- \leq -a \quad \text{e} \quad H_+ \leq a$$

para algum numero real a , então $\partial W_+ = \partial W_-$ e, $H_+ = -H_- = a$.

Citamos também o bastante conhecido princípio do máximo forte de Hopf para variedades Riemannianas completas, cuja a prova pode ser encontrada em [48].

Teorema 1.2.10 *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientável e completa. Considere sobre M^n , um operador L elíptico e $u \in \mathcal{C}^2(M)$. Se $Lu \geq 0$ em M^n e u atinge seu máximo em M^n , então u é constante.*

Finalizamos este capítulo citando o seguinte critério de parabolicidade de superfícies devido a Huber [58].

Teorema 1.2.11 *Toda superfície Riemanniana completa, não-compacta e com curvatura Gaussiana não negativa é parabólica.*

Capítulo 2

A geometria de hipersuperfícies imersas em ambientes Riemannianos

No presente capítulo, apresentamos os resultados referentes aos artigos [10], [17] e [53]. Inicialmente apresentamos uma fórmula do tipo Simons para ambientes mais gerais e logo em seguida alguns resultados que auxiliarão na demonstração dos nossos teoremas. Feito isso, estabeleceremos um princípio do máximo para hipersuperfícies orientáveis completas e não compactas imersas em uma variedade Riemanniana localmente simétrica que satisfaz duas condições sobre sua curvatura seccional (veja Proposição 2.3.1). Com restrições adequadas sobre o quadrado da norma do operador sem traço, mostramos que uma tal hipersuperfície deve ser totalmente umbílica ou, caso contrário, deve ser isométrica a uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo que uma delas é simples (cf. Teoremas 2.3.2 e 2.3.4). Além disso, estabelecemos um critério suficiente para a L -parabolicidade de hipersuperfícies Weingarten lineares imersas em uma variedade de Einstein localmente simétrica (cf. Proposição 2.3.9). Logo após, na subseção seguinte, usando um outro princípio do máximo e impondo certas restrições sob a curvatura média e o supremo do quadrado da norma do operador sem traço, provamos que uma hipersuperfície Weingarten linear imersa em uma variedade Riemanniana localmente simétrica deve ser ou totalmente umbílica ou isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples (cf. Teoremas 2.4.1 e 2.4.2). Por fim, vamos explorar a geome-

tria de hipersuperfícies Weingarten lineares com duas curvaturas principais distintas prescritas suas multiplicidades, imersa em uma variedade Riemanniana localmente simétrica. Nesta configuração, provamos que uma tal hipersuperfície é isoparamétrica (veja teoremas 2.5.2 e 2.5.6).

2.1 Uma fórmula do tipo Simons para ambientes Riemannianos

Esta seção tem por objetivo obter uma fórmula do tipo Simons para uma hipersuperfície M^n a qual será considerada orientada e conexa imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$. Para isto, desenvolveremos as equações de estrutura de M^n e indicamos para uma leitura mais ampla acerca deste assunto a seguinte referência [42]. A partir disso, escolhemos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ em $\overline{M}^{n+1}$ com co-referencial dual $\{\omega_1, \dots, \omega_{n+1}\}$, tal que, em cada ponto de M^n , $e_1, \dots, e_n$ são tangentes à M^n e e_{n+1} é normal à M^n . Usaremos a seguinte convenção para os índices:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+1 \quad \text{e} \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n.$$

Nesta configuração, denotando por $\{\omega_{AB}\}$ as formas de conexão de $\overline{M}^{n+1}$, temos que as equações de estrutura de $\overline{M}^{n+1}$ são dadas por:

$$d\omega_A = - \sum_i \omega_{Ai} \wedge \omega_i - \omega_{An+1} \wedge \omega_{n+1}, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad (2.1)$$

$$d\omega_{AB} = - \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2} \sum_{C,D} \overline{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D. \quad (2.2)$$

Aqui, $\overline{R}_{ABCD}$, $\overline{R}_{CD}$ e $\overline{R}$ denotam, respectivamente, o tensor de curvatura Riemanniano, o tensor de Ricci e a curvatura escalar da variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$.

Assim, temos

$$\overline{R}_{CD} = \sum_B \overline{R}_{BCDB} \quad \text{e} \quad \overline{R} = \sum_A \overline{R}_{AA}.$$

Restringindo todos os tensores à M^n evidenciamos que $\omega_{n+1} = 0$ sobre M^n . Então a métrica Riemanniana de M^n é dada por

$$ds^2 = \sum_i \omega_i^2.$$

Como, $d\omega_{n+1} = -\sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_i = 0$ pelo Lema de Cartan, podemos escrever

$$\omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij} \omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (2.3)$$

Denotando por A a segunda forma fundamental de M^n , temos que a mesma é dada por $A = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i \omega_j e_{n+1}$ e o quadrado de sua norma é $S = |A|^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2$. Além disso, a curvatura média H de M^n é definida por $H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$.

As equações de estrutura de M^n são dadas por

$$d\omega_i = -\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad (2.4)$$

$$d\omega_{ij} = -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l. \quad (2.5)$$

Usando as equações (2.1), (2.2) e (2.3) juntamente com (2.4) e (2.5), obtém-se a *equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \quad (2.6)$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M^n .

As curvaturas de Ricci e a curvatura escalar normalizada de M^n são dadas, respectivamente, por

$$R_{ij} = \sum_k \bar{R}_{ikjk} + nHh_{ij} - \sum_k h_{ik}h_{kj} \quad (2.7)$$

e

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i R_{ii}. \quad (2.8)$$

Das equações (2.7) e (2.8) obtemos a seguinte relação

$$n(n-1)R = \sum_{i,j} \bar{R}_{ijij} + n^2H^2 - S. \quad (2.9)$$

A primeira derivada covariante h_{ijk} de h_{ij} satisfaz

$$\sum_k h_{ijk} \omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj} \omega_{ki} + \sum_k h_{ik} \omega_{kj}, \quad (2.10)$$

com

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

Neste momento, convém lembrar que uma hipersuperfície é dita ser *isoparamétrica* quando todos os autovalores do operador de Weingarten são constantes, no contexto acima, este fato se traduz $\nabla A = 0$.

Retornando, quando tomamos a derivada exterior em (2.3), obtemos a *equação de Codazzi*

$$h_{ijk} - h_{ikj} = -\bar{R}_{(n+1)ijk}. \quad (2.11)$$

Analogamente, a segunda derivada covariante h_{ijkl} de h_{ij} cumpre a seguinte identidade

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}.$$

Derivando exteriormente a equação (2.10), obtemos *fórmula de Ricci*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{im}R_{mjkl} + \sum_m h_{jm}R_{mikl}. \quad (2.12)$$

Restringindo as derivadas covariantes $\bar{R}_{ABCD;E}$ de $\bar{R}_{ABCD}$ sobre M^n , temos que $\bar{R}_{(n+1)ijk;l}$ é dada por

$$\begin{aligned} \bar{R}_{(n+1)ijk;l} &= \bar{R}_{(n+1)ijkl} - \bar{R}_{(n+1)i(n+1)k}h_{jl} \\ &\quad - \bar{R}_{(n+1)ij(n+1)}h_{kl} + \sum_m \bar{R}_{mijk}h_{ml}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $\bar{R}_{(n+1)ijkl}$ denota a derivada covariante de $\bar{R}_{(n+1)ijk}$ como um tensor sobre M^n .

O Laplaciano Δh_{ij} de h_{ij} é definido por $\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}$. Assim, das equações (2.6), (2.11), (2.12) e (2.13) deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= (nH)_{ij} + \sum_k h_{kk}\bar{R}_{(n+1)i(n+1)j} + nH \sum_k h_{ik}h_{kj} - \sum_k h_{ij}\bar{R}_{(n+1)k(n+1)k} \\ &\quad - Sh_{ij} + \sum_{k,m} (h_{mi}\bar{R}_{mkjk} + h_{mj}\bar{R}_{mkik} + 2h_{km}\bar{R}_{mijk}) \\ &\quad - \sum_k (\bar{R}_{(n+1)ijk;k} + \bar{R}_{(n+1)kik;j}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

À vista disso, uma vez que

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij}\Delta h_{ij}, \quad (2.15)$$

tomamos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, e das equação (2.14) e (2.15), após cálculos simples, obtemos a seguinte fórmula do tipo Simons

Proposição 2.1.1 *Seja $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$. Então,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} + nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 + \sum_i \overline{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH\lambda_i - S) \\ &\quad + \sum_{i,j} \overline{R}_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 - \sum_{i,j,k} h_{ij} (\overline{R}_{(n+1)ijk;k} + \overline{R}_{(n+1)kik;j}). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\Psi = \sum_{i,j} \psi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ um tensor simétrico sobre M^n definido por

$$\psi_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}. \quad (2.16)$$

De acordo com Cheng-Yau [31], introduzimos um operador $\square$ associado a Ψ agindo em qualquer função $u \in \mathcal{C}^2(M)$ por

$$\square u = \sum_{i,j} \psi_{ij} u_{ij} = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) u_{ij}. \quad (2.17)$$

No caso em que M^n é fechada e h_{ij} é um tensor de Codazzi, segue de [92] que o operador $\square$ é auto-adjunto com respeito ao produto interno de L^2 de M^n , isto é,

$$\int_M f \square g dM = \int_M g \square f dM, \quad (2.18)$$

onde $f, g \in \mathcal{C}^2(M)$ e dM denota o elemento volume de M^n .

Considerando $u = nH$ em (2.17) e um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, da equação (2.9) obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \square(nH) &= nH\Delta(nH) - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} \\ &= \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - \sum_i (nH)_i^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} \\ &= \frac{1}{2}\Delta \left(n(n-1)R - \sum_i \overline{R}_{ijij} \right) + \frac{1}{2}\Delta S - n^2 |\nabla H|^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii}. \end{aligned}$$

e consequentemente, levando em conta a equação (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} \square(nH) &= \frac{1}{2}\Delta \left(n(n-1)R - \sum_i \overline{R}_{ijij} \right) + |\nabla A|^2 - n^2 |\nabla H|^2 + nH \sum_i \lambda_i^3 \\ &\quad + \sum_i \overline{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH\lambda_i - S) + \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \overline{R}_{ijij} \\ &\quad - \sum_{i,j,k} h_{ij} (\overline{R}_{(n+1)ijk;k} + \overline{R}_{(n+1)kik;j}) - S^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Observação 2.1.2 *Quando o espaço ambiente é uma forma espacial Riemanniana, a equação (2.19) também pode ser reobtida do Corolário 3.3 (caso $r = 1$) em [26].*

2.2 Variedades Riemannianas localmente simétricas e resultados auxiliares

No estudo geometria Riemanniana, desigualdades relacionadas a curvatura seccional tais como $K \geq c$ e $a \leq K \leq b$ para a, b, c números reais, têm sido intensamente estudadas, como por exemplo no estudo de resultados com curvatura *pinched* (veja [88, 89, 90]). Dentro deste contexto e, consoante a [59], vamos assumir a existência de constantes c_1 e c_2 tais que as curvaturas seccionais $\bar{K}$ do espaço ambiente $\bar{M}^{n+1}$ satisfazem as duas seguintes condições

$$\bar{K}(\eta, v) = \frac{c_1}{n}, \quad (2.20)$$

para vetores $\eta \in T^\perp M$ e $v \in TM$, e

$$\bar{K}(u, v) \geq c_2, \quad (2.21)$$

para vetores $u, v \in TM$.

A seguinte definição será bastante usual

Definição 2.2.1 *Uma variedade semi-Riemanniana é dita ser localmente simétrica quando todas as componentes da derivada covariante $\bar{R}_{ABCD;E}$ do seu tensor curvatura são identicamente nulas.*

Observação 2.2.2 *Obviamente, quando a variedade ambiente $\bar{M}^{n+1}$ têm curvatura seccional constante c , então ela é localmente simétrica e as condições de curvatura (2.20) e (2.21) são satisfeitas para cada hipersuperfície imersa M^n , com $\frac{c_1}{n} = c_2 = c$. Assim, em certo sentido, as nossas suposições são uma generalização natural do caso onde a variedade ambiente possui curvatura seccional constante. Por exemplo, quando a variedade ambiente é um produto Riemanniano de duas variedades Riemannianas de curvatura seccional constante, a saber $\bar{M} = \mathbb{M}_1(\kappa_1) \times \mathbb{M}_2(\kappa_2)$, então $\bar{M}$ é localmente simétrica. Neste caso, considere a imersão*

$$M := \Sigma \times \mathbb{M}_2(\kappa_2) \hookrightarrow \bar{M} = \mathbb{M}_1(\kappa_1) \times \mathbb{M}_2(\kappa_2),$$

onde $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{M}_2(\kappa_2)$ é uma hipersuperfície conexa imersa isometricamente a qual assumiremos ser orientável e orientada por um campo vetorial normal e unitário globalmente definido ν . Denotemos por A_Σ o tensor segunda forma fundamental da imersão com respeito a direção normal ν .

A curvatura seccional $\bar{K}$ de $\bar{M}$ satisfaz

$$\bar{K}(\eta, (X, U)) = \langle X, X \rangle_{\mathbb{M}_1} \cdot \kappa_1 \quad (2.22)$$

onde $\eta = (\nu, 0) \in T^\perp M$ e $(X, U) \in TM$ com

$$\langle \eta, \eta \rangle_{\overline{M}} = \langle (X, U), (X, U) \rangle_{\overline{M}} = 1.$$

Por outro lado, através de um cálculo direto obtemos

$$\overline{K}((X, U), (Y, V)) = \langle R_{\mathbb{M}_1}(X, Y)X, Y \rangle_{\mathbb{M}_1} + \langle R_{\mathbb{M}_2}(U, V)U, V \rangle_{\mathbb{M}_2}$$

para cada $(X, U), (Y, V) \in T\overline{M} = T\mathbb{M}_1 \times T\mathbb{M}_2$ tal que

$$\langle (X, U), (Y, V) \rangle_{\overline{M}} = 0, \quad \langle (X, U), (X, U) \rangle_{\overline{M}} = \langle (Y, V), (Y, V) \rangle_{\overline{M}} = 1$$

Consequentemente,

$$\overline{K}((X, U), (Y, V)) = \kappa_1(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) + \kappa_2(|U|^2|V|^2 - \langle U, V \rangle^2),$$

e

$$\overline{K}((X, U), (Y, V)) \geq 0 \tag{2.23}$$

quando $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$. Portanto, se $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_2 \geq 0$ observamos de (2.22) e (2.23) que as condições de curvatura (2.20) e (2.21) são satisfeitas para cada hipersuperfície da forma $\Sigma \times \mathbb{M}_2(\kappa_2)$, com $c_1 = c_2 = 0$.

Seguindo a nomenclatura estabelecida na Seção 2.1, se denotarmos por $\overline{R}_{AB}$ as componentes do tensor curvature de Ricci de uma variedade Riemanniana localmente simétrica $\overline{M}^{n+1}$ que satisfaz a condição de curvatura (2.20), temos que a curvatura escalar $\overline{R}$ de $\overline{M}^{n+1}$ é dada por

$$\overline{R} = \sum_{A=1}^{n+1} \overline{R}_{AA} = \sum_{i,j=1}^n \overline{R}_{ijij} + 2 \sum_{i=1}^n \overline{R}_{(n+1)i(n+1)i} = \sum_{i,j=1}^n \overline{R}_{ijij} + 2c_1.$$

Além disso, um fato bastante conhecido é que a curvatura escalar de uma variedade Riemanniana localmente simétrica é constante. Assim, $\sum_{i,j} \overline{R}_{ijij}$ é uma constante naturalmente ligada a uma variedade Riemanniana localmente simétrica que satisfaz a condição de curvatura (2.20). Por questões de simplificar a notação, denotaremos ao longo deste capítulo a constante $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \overline{R}_{ijij}$ por $\overline{\mathcal{R}}$ e por

$$c = 2c_2 - \frac{c_1}{n},$$

a constante associada a variedade Riemanniana localmente simétrica satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21).

Uma outra definição que será bastante usual é a seguinte

Definição 2.2.3 *Seja M^n uma hipersuperfície orientável de uma variedade Riemanniana localmente simétrica. Dizemos que M^n é uma hipersuperfície Weingarten linear se sua curvatura escalar normalizada e curvatura média satisfazem a seguinte relação: $rR = aH + b$, onde $a, b, r \in \mathbb{R}$.*

Observação 2.2.4 *Constatamos que, quando $a = 0$, a Definição 2.2.3 reduz-se ao caso curvatura escalar constante. Sendo assim, no nosso estudo, consideraremos apenas as hipersuperfícies Weingarten lineares que satisfazem a relação $R = aH + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.*

No que segue, arrolaremos alguns resultados que darão a fundação necessária para a obtenção dos nossos resultados. O primeiro deles é uma extensão do Lema 3.2 de [15] (veja também a Proposição 3.1 de [16]).

Lema 2.2.5 *Seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear imersa em uma variedade Riemanniana localmente simétrica $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo a condição de curvatura (2.20), tal que $R = aH + b$ com*

$$(n-1)a^2 + 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0. \quad (2.24)$$

Então,

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2 |\nabla H|^2. \quad (2.25)$$

Além disso, se a desigualdade (2.24) é estrita e a igualdade ocorre em (2.25) sobre M^n , então H é constante em M^n e consequentemente R é constante.

Demonstração. Sejam $p \in M^n$ e $\{e_k\}$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de p , geodésico¹ em p e, denotemos por $e_k(f) = f_{,k}$ a derivada de $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Então, tomando a derivada covariante na equação (2.9), obtemos em p

$$e_k(S) = 2 \sum_{i,j} h_{ij} h_{ijk} = 2n^2 H H_{,k} - n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}})_{,k}. \quad (2.26)$$

Por outro lado, uma vez que M^n é tal que $R = aH + b$ e $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a condição de curvatura (2.20), da equação (2.26) temos

$$2 \sum_{i,j} h_{ij} h_{ijk} = (2n^2 H - n(n-1)a) H_{,k}.$$

Assim, somando membro a membro a igualdade acima para $1 \leq k \leq n$, obtém-se finalmente

$$4 \sum_k \left(\sum_{i,j} h_{ij} h_{ijk} \right)^2 = (2n^2 H - n(n-1)a)^2 |\nabla H|^2.$$

¹Um referencial móvel $\{e_k\}$ é geodésico em $p \in M^n$ quando $\nabla_{e_j} e_i(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Logo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} 4S|\nabla A|^2 &= 4 \sum_{i,j} (h_{ij})^2 \sum_{i,j,k} (h_{ijk})^2 \geq 4 \sum_k \left(\sum_{i,j} h_{ij} h_{ijk} \right)^2 \\ &= (2n^2 H - n(n-1)a)^2 |\nabla H|^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por outro lado, novamente da relação $R = aH + b$ e da equação (2.9) podemos facilmente verificar que

$$(2n^2 H - n(n-1)a)^2 = n^2(n-1) [(n-1)a^2 + 4n(b - \overline{\mathcal{R}})] + 4n^2 S. \quad (2.28)$$

Assim, das expressões (2.27) e (2.28) temos

$$4S|\nabla A|^2 \geq n^2(n-1) [(n-1)a^2 + 4n(b - \overline{\mathcal{R}})] |\nabla H|^2 + 4n^2 S |\nabla H|^2 \quad (2.29)$$

e, aplicando a nossa hipótese $(n-1)a^2 + 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$ a (2.29) obtemos a seguinte desigualdade

$$S|\nabla A|^2 \geq S n^2 |\nabla H|^2.$$

Em consequência, ou

$$S = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla A|^2 = n^2 |\nabla H|^2 = 0$$

ou

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2 |\nabla H|^2.$$

Por fim, se a desigualdade (2.24) é estrita, da equação (2.28) temos que

$$(2n^2 H - n(n-1)a)^2 > 4n^2 S.$$

Agora, assumiremos em adição, que a igualdade em (2.25) ocorre sobre M^n . Neste caso, o nosso objetivo é mostrar que H é constante sobre M^n . De fato, suponhamos por contradição que isso não ocorre, então existe um ponto $p \in M^n$ tal que $|\nabla H(p)| > 0$. Então, deduzimos de (2.27) que $4S(p)|\nabla A|^2(p) > 4n^2 S(p)|\nabla H(p)|^2$ e, uma vez que $|\nabla A|^2(p) = n^2 |\nabla H(p)|^2 > 0$, chegamos a uma contradição. Portanto, neste caso, concluímos que H deve ser constante sobre M^n . ■

No estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante, um operador que é naturalmente utilizado para a obtenção dos resultados é o operador Laplaciano Δ . Por outro lado, quando estudamos hipersuperfícies com curvatura escalar constante,

naturalmente introduzimos o operador $\square$ o qual foi definido na seção anterior. Para o nosso estudo de hipersuperfícies Weingarten lineares satisfazendo $R = aH + b$, para $a, b \in \mathbb{R}$, precisaremos de um operador que se comporte tão bem quanto os anteriores, em outras palavras, definimos o operador modificado de Cheng-Yau da seguinte forma

$$L = \square - \frac{n-1}{2}a\Delta. \quad (2.30)$$

Equivalentemente, para qualquer $u \in \mathcal{C}^2(M)$, a definição (2.30) pode ser reescrita da seguinte forma

$$L(u) = \text{tr}(P \circ \nabla^2 u), \quad (2.31)$$

com

$$P = \left(nH - \frac{n-1}{2}a \right) I - A, \quad (2.32)$$

onde I é a identidade na álgebra dos campos suaves definidos sobre M^n e $\nabla^2 u$ representa o operador linear auto-adjunto metricamente equivalente ao Hessiano de u .

Observação 2.2.6 *Observando a equação (2.9) e considerando que a curvatura escalar de M^n satisfaz $R = aH + b$, temos*

$$n^2 H^2 = S + n(n-1)(aH + b - \overline{\mathcal{R}}). \quad (2.33)$$

Suponha que $b \geq R$ e que a condição de curvatura (2.20) seja satisfeita de modo que $\overline{\mathcal{R}}$ seja constante. No caso em que $b > \overline{\mathcal{R}}$, segue de (2.33) que $H(p) \neq 0$ para cada $p \in M^n$, do contrário, se existe um $p_0 \in M^n$ tal que $H(p_0) = 0$, aplicamos a equação (2.33) e obtemos que

$$0 = n^2 H^2(p_0) = S(p_0) + n(n-1)(aH(p_0) + b - \overline{\mathcal{R}}) > S(p_0).$$

Relembrando que $S(p_0) = |A|^2(p_0)$, chegamos a um absurdo. Logo, neste caso, escolhemos a orientação sobre M^n de tal forma $H > 0$, e portanto $a \leq 0$.

Por outro lado, quando $b = \overline{\mathcal{R}}$ e $a \neq 0$, sendo $aH = R - b \leq 0$, concluímos que H não muda de sinal sobre M^n . Neste caso, escolhemos a orientação sobre M^n tal que $H \geq 0$, e portanto $a < 0$.

Finalmente, quando $b = \overline{\mathcal{R}}$ e $a = 0$, a condição Weingarten linear reduz-se ao caso curvatura escalar constante. Neste caso, seguindo [7] assumimos que H não muda de sinal sobre M^n e escolhemos a orientação sobre M^n tal que $H \geq 0$.

Sabemos que o operador Laplaciano é sempre elíptico, em verdade, ele é uniformemente elíptico. Por outro lado, também é de conhecimento que sob determinadas

condições o operador $\square$ é elíptico. Neste sentido, uma vez definido o operador L , o nosso próximo resultado tem como proposito, estabelecer um critério suficiente para a sua elipsidade. Resultado este, que em particular estende o Lema 5 de [8].

Lema 2.2.7 *Seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear imersa em uma variedade Riemanniana localmente simétrica $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo a condição de curvatura (2.20), tal que $R = aH + b$ com $b \geq R$ e $b \geq \overline{R}$. No caso onde ou $b > \overline{R}$ ou $b = \overline{R}$ e $a \neq 0$, escolha a orientação tal que $H \geq 0$. No caso onde $b = \overline{R}$ e $a = 0$, assuma que a função curvatura média H não muda de sinal. Sejam μ_- e μ_+ , respectivamente, o mínimo e o máximo dos autovalores do operador P definido em (2.32) em cada ponto $p \in M^n$. Então,*

$$\mu_- \geq 0,$$

e

$$\mu_+ \leq 2nH - (n-1)a.$$

Além disso, no caso onde $b > \overline{R}$ sobre M^n , as desigualdades acima são estritas e o operador L definido em (2.31) é elíptico.

Demonstração. Por meio da equação (2.9) e da relação $R = aH + b$, chegamos a

$$n^2 H^2 = S + n(n-1)(aH + b - \overline{R}) \geq \lambda_i^2 + n(n-1)aH,$$

para cada curvatura principal λ_i de M^n , $i = 1, \dots, n$.

Por outro lado, com um cálculo simples e direto, verificamos que

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 &\leq n^2 H^2 - n(n-1)aH = \left(nH - \frac{n-1}{2}a\right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4}a^2 \\ &\leq \left(nH - \frac{n-1}{2}a\right)^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A partir da análise realizada na Observação 2.2.6, obtemos que $H \geq 0$ e $a \leq 0$. Assim, de (2.34) temos

$$-nH + \frac{n-1}{2}a \leq \lambda_i \leq nH - \frac{n-1}{2}a, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, para cada i , a desigualdade

$$0 \leq nH - \frac{n-1}{2}a - \lambda_i \leq 2nH - (n-1)a$$

se verifica. Contudo, se definirmos $\mu_i := nH - \frac{n-1}{2}a - \lambda_i$, podemos inferir que os μ_i 's são precisamente os autovalores do operador P definido em (2.32). Em particular, concluímos que $\mu_- \geq 0$ e $\mu_+ \leq 2nH - (n-1)a$.

Além disso, se $b > \overline{\mathcal{R}}$ sobre M^n , então obtemos $\mu_- > 0$ e $\mu_+ < 2nH - (n-1)a$, o que significa que o espectro do operador P é positivo definido e, portanto, L é elíptico.

■

Dado $\Phi_{ij} = h_{ij} - H\delta_{ij}$, consideraremos também o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j. \quad (2.35)$$

Note que para cada ponto de M^n , Φ é um operador linear com norma de Hilbert-Schmidt $|\Phi|^2 = \sum_{i,j} \Phi_{ij}^2$. Além disso o operador Φ é conhecido na literatura como *segunda forma sem traço* pois o mesmo possui traço nulo, como pode ser facilmente verificado

$$\text{tr}(\Phi) = \sum_i \Phi_{ii} = \sum_i (h_{ii} - H\delta_{ii}) = \sum_i h_{ii} - H \sum_i \delta_{ii} = nH - nH = 0.$$

Ademais, vale a seguinte relação

$$|\Phi|^2 = S - nH^2. \quad (2.36)$$

Pela própria definição do operador Φ não é difícil verificar que o mesmo é simétrico e qualquer base que diagonaliza o operador de Weingarten também o diagonaliza. Além disso, quando $|\Phi| = 0$, não é difícil verificar com o auxílio da desigualdade de Cauchy-Schwarz que a imersão é totalmente umbílica. Por fim, juntando a equação (2.36) a (2.9) obtemos

$$|\Phi|^2 = n(n-1)H^2 + n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - R). \quad (2.37)$$

Prosseguindo no sentido de estabelecer os nossos resultados de caracterização, citaremos um lema algébrico devido a Okumura [77], que foi completado com o caso em que ocorre a igualdade por Alencar e do Carmo em [3].

Lema 2.2.8 *Sejam $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ números reais tais que $\sum_i \kappa_i = 0$ e $\sum_i \kappa_i^2 = \beta^2$, com $\beta \geq 0$. Então,*

$$-\frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i \kappa_i^3 \leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \quad (2.38)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, pelo menos $(n-1)$ dos números κ_i são iguais.

A ideia de sua prova consiste em encontrar os pontos críticos de $\sum_i \kappa_i^3$ por meio da técnica do multiplicador de Lagrange sujeito as condições $\sum_i \kappa_i = 0$ e $\sum_i \kappa_i^2 = \beta^2$.

Provaremos agora o principal resultado desta seção cuja configuração é, uma limitação inferior para o operador L agindo sobre a norma do quadrado do sem traço de uma hipersuperfície Weingarten linear.

Proposição 2.2.9 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21), tal que $R = aH + b$ com $b \geq R$ e $b \geq \overline{R}$. Nos casos onde, ou $b > \overline{R}$ ou $b = \overline{R}$ e $a \neq 0$, escolha a orientação tal que $H \geq 0$. No caso onde $b = \overline{R}$ e $a = 0$, assuma que a função curvatura média H não muda de sinal. Então,*

$$L(|\Phi|^2) \geq \frac{2}{\sqrt{n(n-1)}} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \left(\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R - \overline{R})} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} a \right),$$

onde

$$Q_R(x) = -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R - \overline{R})} + n(n-1)(R - \overline{R} + c). \quad (2.39)$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que a simetria local de $\overline{M}^{n+1}$ nos leva a

$$\sum_{i,j,k} h_{ij} (\overline{R}_{(n+1)ijk;k} + \overline{R}_{(n+1)kik;j}) = 0. \quad (2.40)$$

Consequentemente, sendo A_p um operador simétrico, para cada $p \in M^n$, podemos escolher um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Então, das equações (2.19) e (2.30), obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2 |\nabla H|^2 + nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 \\ &\quad + \sum_i \overline{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH \lambda_i - S) + \sum_{i,j} \overline{R}_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned}$$

Por meio da nossa hipótese sobre b , não é difícil verificar que a condição $b \geq \overline{R}$ implica na desigualdade (2.24). Assim, pelo Lema 2.2.5 reescrevemos a equação acima como

$$\begin{aligned} L(nH) &\geq nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 + \sum_i \overline{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH \lambda_i - S) \\ &\quad + \sum_{i,j} \overline{R}_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Uma vez que qualquer referencial ortonormal que diagonaliza h_{ij} também diagonaliza Φ_{ij} , consideremos então $\{e_1, \dots, e_n\}$ como sendo esse referencial em $p \in M^n$ tal que

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \Phi_{ij} = \kappa_i \delta_{ij}.$$

Nesta configuração, podemos imediatamente verificar que

$$\sum_i \kappa_i = 0, \quad \sum_i \kappa_i^2 = |\Phi|^2 \quad \text{e} \quad \sum_i \kappa_i^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3H|\Phi|^2 - nH^3.$$

Logo, aplicando o Lema 2.2.8 aos números reais $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, obtemos

$$\begin{aligned} nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 &= n^2 H^4 + 3nH^2 |\Phi|^2 + nH \sum_i \kappa_i^3 - (|\Phi|^2 + nH^2)^2 \\ &\geq -|\Phi|^4 + nH^2 |\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi|^3. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Agora, das condições de curvatura (2.20) e (2.21), através de um simples cálculo chegamos a

$$\sum_i \bar{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH\lambda_i - S) = c_1 (nH^2 - S) = -c_1 |\Phi|^2 \quad (2.43)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \bar{R}_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 &\geq c_2 \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &= 2nc_2 (S - nH^2) = 2nc_2 |\Phi|^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Portanto, inserindo (2.42), (2.43) e (2.44) na equação (2.41) obtemos

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 \left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| + n(H^2 + c) \right), \quad (2.45)$$

onde $c = 2c_2 - \frac{c_1}{n}$.

Por outro lado, da equação (2.37) e da relação $R = aH + b$, escrevemos

$$\frac{n}{n-1} |\Phi|^2 = n^2 H^2 - n^2 aH - n^2 (b - \bar{\mathcal{R}}). \quad (2.46)$$

Como $\bar{M}^{n+1}$ satisfaz a condição de curvatura (2.20), temos que $\bar{\mathcal{R}}$ é uma constante. Além disso, da hipótese $b \geq \bar{\mathcal{R}}$ (resp. $b > \bar{\mathcal{R}}$), o Lema 2.2.7 assegura-nos que o operador L é positivo semi-definido (resp. positivo definido). Assim, da equação (2.46) temos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-1} L(|\Phi|^2) &= 2nHL(nH) + 2n^2 \langle P(\nabla H), \nabla H \rangle - anL(nH) \\ &\geq 2n \left(H - \frac{a}{2} \right) L(nH), \end{aligned} \quad (2.47)$$

uma vez que a equação (2.31) garante-nos que $L(u^2) = 2uL(u) + 2\langle P(\nabla u), \nabla u \rangle$ para cada $u \in \mathcal{C}^2(M)$.

Logo, substituindo (2.45) em (2.47) chegamos a

$$\frac{n}{2(n-1)}L(|\Phi|^2) \geq n \left(H - \frac{a}{2} \right) |\Phi|^2 \left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2 + c) \right).$$

Evidenciando a curvatura média na equação (2.37) em termos da curvatura escalar normalizada, temos

$$H^2 = \frac{1}{n(n-1)}|\Phi|^2 + R - \overline{\mathcal{R}}, \quad (2.48)$$

e consequentemente, levando em conta que $H \geq 0$, podendo escrever

$$H = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}})}. \quad (2.49)$$

Após um simples cálculo, das equações (2.48) e (2.49), temos

$$H - \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}})} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}a \right) \quad (2.50)$$

e

$$-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| + n(H^2 + c) = \frac{1}{n-1}Q_R(|\Phi|), \quad (2.51)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_R(x) = & -(n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}})} \\ & + n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}} + c). \end{aligned}$$

Portanto, de (2.50) e (2.51) obtemos a limitação desejada. ■

2.3 Rigidez de hipersuperfícies Weingarten lineares em variedades localmente simétricas

Em consonância com o Capítulo 1, o primeiro resultado desta seção, será obtido como uma aplicação do Lema 1.2.8 o qual é um caso particular do Corolário 3 de [9]. Sendo mais específicos, vamos estabeleceremos o seguinte princípio máximo de Omori-Yau

Proposição 2.3.1 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície completa, não-compacta imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21), tal que $R = aH + b$ com $b \geq R$ e $b \geq \overline{R}$. Nos casos onde, ou $b > \overline{R}$ ou $b = \overline{R}$ e $a \neq 0$, escolha a orientação tal que $H \geq 0$. No caso onde $b = \overline{R}$ e $a = 0$, assuma que a função curvatura média H não muda de sinal. Se $\sup_M |\Phi|^2 < +\infty$, então o princípio do máximo de Omori-Yau vale sobre M^n para o operador L definido em (2.31).*

Demonstração. Uma vez que $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a condição de curvatura (2.20), temos que $\overline{R}$ é constante. Agora, se levarmos em conta que $R = aH + b$, reescrevemos a equação (2.37) da seguinte forma

$$|\Phi|^2 = n(n-1)(H^2 - aH) - n(n-1)(b - \overline{R}). \quad (2.52)$$

Como estamos assumindo que $\sup_M |\Phi|^2 < +\infty$, por intermédio da equação (2.52) segue que $\sup_M H < +\infty$. Assim, pela definição do operador P dada em (2.32) temos que seu traço satisfaz

$$\text{tr}(P) = n(n-1)H - \frac{n(n-1)}{2}a$$

e, portanto,

$$\sup_M \text{tr}(P) < +\infty. \quad (2.53)$$

Por outro lado, usando mais uma vez (2.9) temos também que $\sup_M S < +\infty$. Assim, da equação de Gauss (2.6) e da condição de curvatura (2.21), obtemos que a curvatura seccional de M^n satisfaz

$$R_{ijij} \geq c_2 - \sup_M S > -\infty. \quad (2.54)$$

Ademais, pelo Lema 2.2.7 temos a garantia que o operador L é semi-elíptico. Portanto, levando em conta as equações (2.31), (2.53) e (2.54), podemos aplicar o Lema 1.2.8 para concluir o resultado desejado. ■

Como uma primeira aplicação da Proposição 2.3.1, provaremos o nosso primeiro resultado concernente a caracterização de hipersuperfícies Weingarten lineares imersa em uma variedade localmente simétrica Riemanniana.

Teorema 2.3.2 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $b \geq R \geq \overline{R}$. No caso onde $R = \overline{R}$, assuma em adição que a função curvatura média H não muda de sinal. Então*

(i) ou $|\Phi| = 0$ e M^n é uma hipersuperfície totalmente umbilica,

(ii) ou $\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R)$.

Em particular, se $R > \overline{\mathcal{R}}$, a igualdade $\sup_M |\Phi|^2 = \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R)$ vale e este supremo é atingido em algum ponto de M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples.

Demonstração. Iniciamos a demonstração observando que se $|\Phi| = 0$, então o item (i) é satisfeito. Se $\sup_M |\Phi|^2 = +\infty$, então o item (ii) é trivialmente satisfeito. Sendo assim, suponhamos então que $0 < \sup_M |\Phi|^2 < +\infty$ e consideremos $u = |\Phi|^2$. Então, pela Proposição 2.2.9 temos

$$L(u) \geq f(u), \quad (2.55)$$

onde

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{n(n-1)}} u \left(\sqrt{u + n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}})} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} a \right) Q_R(\sqrt{u})$$

e $Q_R(x)$ está definido em (2.39).

Se M^n for compacta, então existe um ponto $p_0 \in M^n$ tal que $u(p_0) = u^*$. Consequentemente, $\nabla u(p_0) = 0$ e $Lu(p_0) \leq 0$. Portanto, por meio da desigualdade (2.55) obtemos que $f(u^*) \leq 0$ e consequentemente $Q_R(\sqrt{u^*}) \leq 0$, mostrando o item (ii). Assumiremos então que M^n seja completa e não-compacta. Neste ponto, a Observação 2.2.6 garante-nos que $H \geq 0$ e $a \leq 0$. Uma vez que $u^* < +\infty$, a Proposição 2.3.1 assegura-nos que existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ satisfazendo

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad Lu(p_k) < \frac{1}{k} \quad (2.56)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, avaliando (2.55) em p_k e usando (2.56), temos

$$\frac{1}{k} > Lu(p_k) \geq f(u(p_k)). \quad (2.57)$$

Portanto, tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$ em (2.57), por continuidade, obtemos

$$f(u^*) = \frac{2u^*}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\sqrt{u^* + n(n-1) \left(\sup_M R - \overline{\mathcal{R}} \right)} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} a \right) Q_R(\sqrt{u^*}) \leq 0.$$

Uma vez que $u^* > 0$ e $a \leq 0$, da desigualdade acima devemos ter que

$$Q_R(\sqrt{u^*}) \leq 0. \quad (2.58)$$

Sendo $c > 0$, a hipótese $R \geq \overline{\mathcal{R}}$ garante-nos que

$$Q_R(0) = n(n-1) (R - \overline{\mathcal{R}} + c) > 0$$

e, portanto, a função $Q_R(x)$ é estritamente decrescente para $x \geq 0$, com $Q_R(x_0) = 0$ em

$$x_0 := x_0(R) = (R - \overline{\mathcal{R}} + c) \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)(nR + 2c - n\overline{\mathcal{R}})}} > 0.$$

Portanto, (2.58) implica em

$$u^* \geq x_0^2 = \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R) = \frac{n(n-1) (R + c - \overline{\mathcal{R}})^2}{(n-2)(nR + 2c - n\overline{\mathcal{R}})},$$

isto é,

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R),$$

mostrando a desigualdade em (ii).

Além disso, a igualdade $\sup_M |\Phi|^2 = \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R)$ vale se, e somente se, $\sqrt{u^*} = \sqrt{\inf_M x_0}$. Assim $Q_R(\sqrt{u}) \geq 0$ sobre M^n que, juntamente com a desigualdade (2.55), implica em

$$L(u) \geq 0 \quad \text{sobre } M^n.$$

Suponhamos agora que $R > \overline{\mathcal{R}}$. Uma vez que $a \leq 0$, da relação $R = aH + b$, temos que $b > \overline{\mathcal{R}}$ e, portanto, podemos usar o Lema 2.2.7 para assegurar-nos que o operador L é elíptico. Logo, se existe um ponto $p_0 \in M^n$ tal que $|\Phi(p_0)| = \sup_M |\Phi|$, então aplicamos o princípio do máximo forte de Hopf (cf. Lema 1.2.10) à função $u = |\Phi|^2$, para garantir que a mesma é constante, e consequentemente, $|\Phi| \equiv \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R)$. Assim,

$$0 = L(|\Phi|^2) \geq \frac{2|\Phi|^2}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}})} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} a \right) Q_R(|\Phi|)$$

e dessa forma, todas as desigualdade obtidas ao longo da prova da Proposição 2.2.9 são, de fato, igualdades. Em particular, como o operador L é elíptico se, e somente se, P é positivo definido, quando retornamos a (2.47) obtemos que H é constante. Além disso, a igualdade também ocorre em (2.24) ou, equivalentemente,

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2 |\nabla H|^2 = 0.$$

Assim, segue que λ_i é constante para cada $i = 1, \dots, n$, isto é, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica. Finalmente, a desigualdade em (2.42) também deve ser uma igualdade, a qual garante-nos que ocorre a igualdade no Lema 2.2.8. Isto implica que a hipersuperfície possui exatamente duas curvaturas principais distintas sendo uma das quais simples. ■

Levando em consideração a classificação dada no Teorema 1.1.1, o Teorema 2.3.2, a análise das possibilidades dos diferentes valores da constante $|\Phi|^2$ para hipersuperfícies isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ remetemos ao final da prova do Teorema 1 de [8], e obtemos a seguinte extensão do referido resultado no contexto de hipersuperfícies Weingarten lineares.

Corolário 2.3.3 *Seja M^n uma hipersuperfície completa Weingarten linear imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, $n \geq 3$, tal que $R = aH + b$ com $b \geq R \geq 1$. No caso onde $R = 1$, assumamos também que a função curvatura média H não muda de sinal e escolha a orientação tal que $H \geq 0$. Então*

(i) *ou $|\Phi| = 0$ e M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica,*

(ii) *ou $\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,1}(R)$.*

Em particular, $R > 1$ a igualdade $\sup_M |\Phi|^2 = \inf_M \alpha_{n,1}(R)$ vale e este supremo é atingido em algum ponto de M^n se, e somente se, M^n é um toro de Clifford

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1},$$

com $0 < r = \sqrt{(n-2)/nR} < \sqrt{(n-2)/n}$.

No nosso próximo resultado, lidamos com o caso em que o parâmetro c é não positivo.

Teorema 2.3.4 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21) com $c \leq 0$, tal que $R = aH + b$ com $b \geq R > \overline{\mathcal{R}} - c$. Então*

(i) *ou $|\Phi| = 0$ e M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica,*

(ii) *ou $\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R)$.*

Em particular, se a igualdade $\sup_M |\Phi|^2 = \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R)$ vale e este supremo é atingido em algum ponto de M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo que uma delas é simples.

Demonstração. A demonstração segue como a primeira parte da demonstração do Teorema 2.3.2 até chegarmos à desigualdade (2.58).

Note que a condição $R > \overline{\mathcal{R}} - c$ implica em

$$Q_R(0) = n(n-1)(R - \overline{\mathcal{R}} + c) > 0.$$

Assim a função $Q_R(x)$ é estritamente decrescente para $x \geq 0$, com $Q_R(x_0) = 0$ em

$$x_0 = (R - \overline{\mathcal{R}} + c) \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)(nR + 2c - n\overline{\mathcal{R}})}} > 0$$

e, consequentemente

$$\sup |\Phi|^2 = u^* \geq x_0^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c,\overline{\mathcal{R}}}(R),$$

provando a desigualdade em (ii).

No caso da igualdade, notamos apenas que as condições $R > \overline{\mathcal{R}} - c$ e $c \leq 0$ implicam em $R > \overline{\mathcal{R}}$. Então, temos a garantia, através da Observação 2.2.6 e do Lema 2.2.7, que o operador L é elíptico. Neste ponto, podemos prosseguir como na última parte da prova do Teorema 2.3.2 para concluir o resultado. ■

Raciocinando de modo análogo ao que fizemos no Corolário 2.3.3, do Teorema 2.3.4, e da classificação das isoparamétricas dada no Teorema 1.1.1, também obtemos a seguinte extensão do Teorema 2 em [8] para hipersuperfícies Weingarten lineares.

Corolário 2.3.5 *Seja M^n be a hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ ($c=0, -1$, e $n \geq 3$) tal que $R = aH + b$ com $b \geq R > 0$. Então*

(i) *ou $|\Phi| = 0$ e M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica,*

(ii) *ou $\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c}(R)$.*

Em particular, a igualdade $\sup_M |\Phi|^2 = \inf_M \alpha_{n,c}(R)$ vale e este supremo é atingido em algum ponto de M^n se, e somente se,

(a) *$c = 0$ e M^n é um cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$,*

(b) *$c = -1$ e M^n é um cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, onde $r = \sqrt{(n-2)/nR} > 0$.*

2.3.1 L -parabolicidade de hipersuperfícies Weingarten lineares

Relembremos que uma variedade Riemanniana M^n é dita ser *parabólica* se as funções constantes são as únicas funções subharmônicas sobre M^n as quais são limitadas superiormente; isto é, para uma função $u \in \mathcal{C}^2(M)$

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{e} \quad u \leq u^* < +\infty \quad \text{implica em} \quad u = \text{constante}.$$

Um exemplo de uma variedade Riemanniana que é parabólica é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$ (cf. Teorema de Liouville em [48]). Por outro lado, não é difícil construir exemplos de variedades parabólicas, basta considerar variedades produto $N \times \mathbb{R}^2$ onde N é uma variedade Riemanniana compacta. Assim, considerando o operador modificado de Cheng-Yau L dado em (2.30), diremos que M^n é *L -parabólica* se, e somente se, as únicas soluções da desigualdade $L(u) \geq 0$ que são limitadas superiormente são as funções constantes. Nesta configuração, e motivados pelo Teorema 3 de [8], temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.6 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21), tal que $R = aH + b$ com $b \geq R \geq \overline{R}$ e $R > \overline{R} - c$. No caso onde $c > 0$ e $R = \overline{R}$, assumamos em adição que a função curvatura média H não muda de sinal. Suponha que M^n não é totalmente umbílica. Se M^n é L -parabólica, então*

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c,\overline{R}}(R). \quad (2.59)$$

Além disso, se a igualdade ocorre em (2.59), então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples.

Demonstração. Se $\sup_M |\Phi|^2 = +\infty$, então não há o que mostrar. Por outro lado, no caso em que $0 < \sup_M |\Phi|^2 < +\infty$, raciocinando como na primeira parte da prova dos Teoremas 2.3.2 e 2.3.4, temos que $\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c,\overline{R}}(R)$. Além disso, se a igualdade vale em (2.59), então temos $Q_R(|\Phi|) \geq 0$ e, consequentemente, $L(|\Phi|^2) \geq 0$ sobre M^n . Portanto, da L -parabolicidade de M^n concluímos que a função $u = |\Phi|^2$ deve ser constante e igual a $\inf_M \alpha_{n,c,\overline{R}}(R)$. Neste ponto, podemos raciocinar como nas provas dos teoremas anteriores. ■

Como antes, dos Teoremas 2.3.6 e 2.3.4 juntamente com o Teorema 1.1.1 obtemos

Corolário 2.3.7 *Seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa isometricamente em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ ($c=-1,0,1$ e $n \geq 3$) tal que $R = aH + b$ com $b \geq R \geq c$ e $R > 0$. No caso onde $c = 1$ e $R = 1$, assumamos em adição que a função curvatura média H não muda de sinal. Se M^n é L -parabólica, então*

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \inf_M \alpha_{n,c}(R),$$

com igualdade se, e somente se,

- (a) $c = 0$ e M^n é um cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
- (b) $c = 1$ e M^n é um toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$,
- (c) $c = -1$ e M^n é um cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^1(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^{n+1}$, onde $r = \sqrt{(n-2)/nR} > 0$.

A fim de obter o nosso último resultado, observemos inicialmente que o operador L definido em (2.30) é um operador do tipo-divergência quando o espaço ambiente é uma variedade de Einstein².

De fato, da equação (2.17) e para todo $u \in \mathcal{C}^2(M)$, temos que

$$\square u = \text{tr}(P_1 \circ \nabla^2 u), \quad (2.60)$$

onde $P_1 = nHI - A$. Assim, escolhendo um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n e usando a notação padrão $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para a métrica (induzida) de M^n , de (2.60) obtemos

$$\square u = \sum_{i=1}^n \langle P_1(\nabla_{e_i} \nabla u), e_i \rangle. \quad (2.61)$$

Por meio de (2.61) podemos verificar

$$\begin{aligned} \text{div}(P_1 \nabla u) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(P_1 \nabla u), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_1) \nabla u, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_1(\nabla_{e_i} \nabla u), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla u, (\nabla_{e_i} P_1) e_i \rangle + \square u \\ &= \langle \text{div} P_1, \nabla u \rangle + \square u, \end{aligned} \quad (2.62)$$

²Uma variedade é dita ser de Einstein quando o seu tensor de Ricci é uma múltiplo da métrica.

onde

$$\operatorname{div} P_1 = \operatorname{tr}(\nabla P_1) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} P_1) e_i.$$

Portanto, do Lema 25 de [9] (veja também Lema 3.1 de [6]) temos

$$\langle \operatorname{div} P_1, \nabla u \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(N, e_i) \nabla u, e_i \rangle = \bar{\operatorname{Ric}}(N, \nabla u), \quad (2.63)$$

onde $\bar{R}$ e $\bar{\operatorname{Ric}}$ são a curvatura e o tensor de Ricci $\bar{M}^{n+1}$, respectivamente, e N denota a orientação de M^n . Assim, assumindo que o espaço ambiente $\bar{M}^{n+1}$ é uma variedade de Einstein, de (2.63) obtemos

$$\langle \operatorname{div} P_1, \nabla u \rangle = 0.$$

Logo, no neste caso, de (2.62) concluimos que

$$\square u = \operatorname{div}(P_1(\nabla u)).$$

Além disso, retornando ao operador L , obtemos

$$L(u) = \operatorname{div}(P(\nabla u)), \quad (2.64)$$

onde P está definido em (2.32).

Observação 2.3.8 *De um ponto de vista geométrico, a parabolicidade de uma variedade Riemanniana completa está fortemente relacionada à taxa de crescimento do volume de bolas geodésicas. Por exemplo no Teorema 7.5 de [54], Grigor'yan mostrou que um critério suficiente para M^n ser parabólica é que ela seja geodésicamente completa e, para algum ponto de referência $o \in M^n$,*

$$\operatorname{vol}(\partial B_r)^{-1} \notin \mathcal{L}^1(M).$$

Aqui B_r denota a bola geodésica de raio r em M^n centrada na origem o .

Diante de todo o observado, estabelecemos o seguinte critério de L -parabolicidade, o qual pode ser considerado como uma pequena extensão do Corolário 12 em [8].

Proposição 2.3.9 *Seja $\bar{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade de Einstein localmente simétrica e seja M^n hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em $\bar{M}^{n+1}$ satisfazendo a condição de curvatura (2.20), tal que $R = aH + b$ e $b \geq R \geq \bar{R}$. Se $\sup_M |\Phi|^2 < +\infty$ e, para algum ponto de referência $o \in M^n$,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{\operatorname{vol}(\partial B_r)} = +\infty, \quad (2.65)$$

então M^n é L -parabólica.

Demonstração. Consideremos sobre M^n seguinte o tensor simétrico do tipo $(0, 2)$ dado por

$$h(X, Y) = \langle PX, Y \rangle,$$

ou, equivalentemente,

$$h(\nabla u, \cdot)^\# = P(\nabla u),$$

para cada $u \in \mathcal{C}^2(M)$, onde $^\# : T^*M \rightarrow TM$ denota o isomorfismo musical. Logo, pela digressão anterior a Observação 2.3.8, podemos usar (2.64), a fim de escrever

$$L(u) = \operatorname{div} (h(\nabla u, \cdot)^\#).$$

Por outro lado, como na prova da Proposição 2.3.1, obtemos que $\sup_M H < +\infty$. Logo, podemos definir uma função contínua e positiva h_+ sobre $[0, +\infty)$, por

$$h_+(r) = 2n \sup_{\partial B_r} H - (n-1)a. \quad (2.66)$$

Então, da equação (2.66) temos

$$h_+(r) = 2n \sup_{\partial B_r} H - (n-1)a \leq 2n \sup_M H - (n-1)a < +\infty. \quad (2.67)$$

Portanto, de (2.65) e (2.67) obtemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dr}{h_+(r) \operatorname{vol}(\partial B_r)} = +\infty.$$

Consequentemente, podemos aplicar o Lema 11 de [8] (veja também o Teorema 2.6 de [80]) para concluir a demonstração. ■

Observação 2.3.10 *Levando em conta a Proposição 2.3.9, é natural perguntar-se sobre a existência de variedades de Einstein que são localmente simétricas. Nesta direção, Tod [87] mostrou que para dimensão 4 variedades de Einstein que são também espaços de D'Atri são necessariamente localmente simétricas. Mais recentemente, Brendle [22] provou que uma variedade de Einstein compacta de dimensão $n \geq 4$ possuindo curvatura isotrópica não-negativa deve ser localmente simétrica, estendendo um resultado anterior devido a Micallef e Wang para $n = 4$ (cf. Teorema 4.4 de [69]). Veja também [89] para outras condições suficientes para uma variedade de Einstein ser localmente simétrica.*

2.4 Hipersuperfícies Weingarten lineares em variedades Riemannianas localmente simétricas

Prosseguiremos no estudo de hipersuperfícies Weingarten lineares imersas em ambientes Riemannianos localmente simétricos com restrições em sua curvatura seccional. Nesta seção, com o mesmo maquinário algébrico e analítico utilizado na seção anterior, provaremos dois resultados de caracterização. No primeiro resultado, utilizando como ferramenta analítica o princípio do máximo forte de Hopf e impondo restrições sobre a o supremo do quadrado da norma do operador sem traço, obtemos que uma tal hipersuperfície ou é totalmente umbílica ou isométrica a uma isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples, em outras palavras, mostramos o seguinte

Teorema 2.4.1 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21), tal que $R = aH + b$ com $b > \overline{\mathcal{R}}$. Suponha que $R \geq \overline{\mathcal{R}} - c$, quando $c \leq 0$, e $R > \overline{\mathcal{R}} - \frac{2}{n}c$, quando $c > 0$. Se H atinge seu máximo sobre M^n e*

$$\sup_M |\Phi|^2 \leq \frac{n(n-1)(R+c-\overline{\mathcal{R}})^2}{(n-2)(nR+2c-n\overline{\mathcal{R}})},$$

então M^n ou é totalmente umbílica ou uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples.

Aqui convém ressaltar que, no caso em que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ é uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, observando a última parte da demonstração do Teorema 1.1 de [15], podemos inferir que as hipersuperfícies isoparamétrica de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas, das quais uma delas é simples, são tais que $|\Phi|^2 \equiv \frac{n(n-1)R^2}{(n-2)(nR-(n-2)c)}$. Portanto, levando em conta que neste caso $\overline{\mathcal{R}} = c$, concluímos que nossa restrição sobre $|\Phi|$ é, de fato, uma hipótese leve.

Logo após, para o próximo resultado, utilizaremos como maquinário analítico, um princípio do máximo devido a Caminha [26] que é uma generalização do princípio do máximo de [92]. Impondo como restrição a limitação da função curvatura média e que o seu gradiente tem norma integrável a Lebesgue, o nosso outro resultado de caracterização de hipersuperfícies Weingarten lineares, concerne ao caso em que o espaço ambiente é uma variedade de Einstein, isto é,

Teorema 2.4.2 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma variedade de Einstein localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21), tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 + 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) > 0$. Suponha que $R \geq \overline{\mathcal{R}} - c$, quando $c \leq 0$, e $R > \overline{\mathcal{R}} - \frac{2}{n}c$, quando $c > 0$. Se H é limitada, $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$ e*

$$\sup_M |\Phi|^2 \leq \frac{n(n-1)(R+c-\overline{\mathcal{R}})^2}{(n-2)(nR+2c-n\overline{\mathcal{R}})},$$

Então M^n ou é totalmente umbílica ou uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples.

2.4.1 Provas dos Teoremas 2.4.1 e 2.4.2

Prova do Teorema 2.4.1.:

Pela Proposição 2.2.9 temos a seguinte limitação inferior para o operador L em termos da norma do operador de Weingarten sem o traço

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 \left(-|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| + n(H^2 + c) \right). \quad (2.68)$$

Por outro lado, da equação (2.48) e da desigualdade (2.68) obtemos a seguinte limitação inferior para o operador L agora em termos da curvatura escalar normalizada

$$L(H) \geq \frac{1}{n(n-1)} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|),$$

onde Q_R esta definido em (2.39).

Das condições impostas sobre R , temos que $Q_R(0) > 0$. Além disso a função $Q_R(x)$ é estritamente decrescente para $x \geq 0$, com $Q_R(x^*) = 0$ em

$$x^* = (R+c-\overline{\mathcal{R}}) \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n-2)(nR+2c-n\overline{\mathcal{R}})}} > 0.$$

Assim, da restrição imposta a $|\Phi|$, obtemos que

$$L(H) \geq \frac{1}{n(n-1)} |\Phi|^2 P_R(|\Phi|) \geq 0. \quad (2.69)$$

Uma vez que o Lema 2.2.7 garante-nos que o operador L é elíptico e como estamos supondo H atinge seu máximo sobre M^n , da desigualdade (2.69), aplicamos o Lema 1.2.10 a fim de concluir que H é constante sobre M^n . Assim, levando em conta a equação (2.41), obtemos

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2 |\nabla H|^2 = 0,$$

donde segue que λ_i é constante para cada $i = 1, \dots, n$.

Se $|\Phi| < x^*$, então $Q_R(|\Phi|)$ é estritamente positivo e consequentemente de (2.69) temos que $|\Phi| = 0$, ou seja, M^n é totalmente umbílica. Se $|\Phi| = x^*$, então $Q_R(|\Phi|) = 0$ e assim, todas as desigualdades obtidas anteriormente a (2.45), tornam-se igualdades. Em particular, ocorre a igualdade em (2.38), então do Lema 2.2.8, concluímos que é uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas uma das quais é simples. ■

Prova do Teorema 2.4.2.:

Uma vez que $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a condição de curvatura (2.20), temos que $\overline{\mathcal{R}}$ é constante. Por outro lado, como H é suposta ser limitada sobre M^n , e além disso, a relação $R = aH + b$ vale sobre M^n , da equação (2.9) obtemos que A é também limitada sobre M^n . Consequentemente, uma vez que P é dado em termos de H e A , temos que o mesmo é limitado, isto é, existe uma constante positiva C tal que $|P| \leq C$. Assim, como também estamos assumindo que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, obtemos que

$$|P(\nabla H)| \leq |P||\nabla H| \leq C|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M). \quad (2.70)$$

Assim, de (2.64), (2.69) e (2.70), podemos aplicar o Lema 1.2.4 a fim de obter que $L(nH) = 0$ sobre M^n . Consequentemente, levando em conta que todas as desigualdades obtidas ao longo da prova da Proposição 2.2.9 são de fato igualdades, a equação (2.41) garante-nos que

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2 |\nabla H|^2.$$

Portanto, uma vez que estamos assumindo que $(n-1)a^2 + 4n(b-\mathcal{R}) > 0$ acontece, aplicamos o Lema 2.2.5 e obtemos que H é uma constante sobre M^n .

Portanto, de maneira similar a feita na última parte da demonstração do Teorema 2.4.1 concluímos que M^n ou é totalmente umbílica ou uma hipersuperfície isoparamétrica com duas curvaturas principais distintas sendo uma delas simples. ■

2.5 Hipersuperfícies com duas curvaturas principais distintas

Nesta seção estudaremos hipersuperfícies com duas curvaturas principais distintas prescritas as suas multiplicidades. Utilizaremos como técnica, um maquinário algébrico

que em certo sentido substitui a técnica de *Okumura* para hipersuperfícies com duas curvaturas principais distintas de multiplicidades p e $n - p$. Ao agregar a fórmula tipo-Simons desenvolvida em (2.15) com este maquinário, obtemos a seguinte limitação inferior para o operador Laplaciano operando sobre o quadrado da norma do operador sem traço $|\Phi|^2$ de uma hipersuperfície de curvatura média constante imersa em uma variedade Riemanniana localmente simétrica que satisfaz as duas condições sob sua curvatura seccional, em outras palavras,

Proposição 2.5.1 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana localmente simétrica satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21). Seja M^n uma hipersuperfície imersa em $\overline{M}^{n+1}$ com curvatura média constante H e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Então,*

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 \geq |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|), \quad (2.71)$$

onde

$$P_{H,p,c}(x) = x^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}}|H|x - n(H^2 + c). \quad (2.72)$$

Demonstração. Inicialmente, escolhemos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ e $\Phi_{ij} = \kappa_i \delta_{ij}$. Como M^n é suposta ter duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, então existem κ e ν tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 = \dots = \kappa_p = \kappa, \\ \kappa_{p+1} = \dots = \kappa_n = \kappa, \\ \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \kappa + H, \\ \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \kappa + H. \end{array} \right.$$

Assim, com um simples cálculo é possível obter

$$0 = \sum_{i=1}^n \mu_i = p\kappa + (n-p)\nu, \quad |\Phi|^2 = \sum_{i=1}^n \kappa_i^2 = p\kappa^2 + (n-p)\nu^2,$$

e

$$\text{tr}(\Phi^3) = \sum_{i=1}^n \kappa_i^3 = p\kappa^3 + (n-p)\nu^3.$$

Logo, das equações acima evidenciamos que

$$\kappa = -\frac{n-p}{p}\nu \quad \text{e} \quad \nu = \pm \sqrt{\frac{p}{n(n-p)}}|\Phi|,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Phi^3) &= \sum_{i=1}^n \kappa_i^3 = \left((n-p) - \frac{(n-p)^3}{p^2} \right) \nu^3 \\ &= n(n-p)(2p-n) \frac{\nu^3}{p^2} = \pm \frac{(2p-n)}{\sqrt{pn(n-p)}} |\Phi|^3.\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\left| \sum_{i=1}^n \kappa_i^3 \right| = \frac{(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |\Phi|^3. \quad (2.73)$$

Por outro lado, da relação $\phi_{ij} = h_{ij} - H\delta_{ij}$ juntamente ao fato de ser H constante, temos

$$\Delta|\Phi|^2 = \Delta S \quad \text{e} \quad |\nabla\Phi|^2 = |\nabla A|^2. \quad (2.74)$$

Logo, das equações (2.15) e (2.74) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= |\nabla\Phi|^2 + nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 - \sum_{i,k} \lambda_i (\bar{R}_{(n+1)ii k; k} + \bar{R}_{(n+1)kik; i}) \\ &\quad + \sum_i \bar{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH\lambda_i - S) + \sum_{i,j} \bar{R}_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2.\end{aligned} \quad (2.75)$$

Agora, da relação (2.36) e $\kappa_i = \lambda_i - H$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_i \kappa_i^3 &= \sum_i (\lambda_i - H)^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3HS + 3nH^3 - nH^3 \\ &= \sum_i \lambda_i^3 - 3H|\Phi|^2 - nH^3.\end{aligned} \quad (2.76)$$

Assim, de (2.36), (2.73) e (2.76) temos

$$\begin{aligned}nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 &= nH \sum_i \kappa_i^3 + 3nH^2|\Phi|^2 + n^2H^4 - (|\Phi|^2 + nH^2)^2 \\ &\geq -|\Phi|^4 + nH^2|\Phi|^2 - n|H| \left| \sum_i \kappa_i^3 \right| \\ &\geq -|\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - nH^2 \right).\end{aligned} \quad (2.77)$$

Portanto, ao inserirmos (2.40), (2.43), (2.44) e (2.77) em (2.75), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &\geq |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - nH^2 \right) - c_1|\Phi|^2 + 2nc_2|\Phi|^2 \\ &= |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - n(H^2 + c) \right).\end{aligned}$$

■

Como uma aplicação da Proposição 2.5.1, temos um resultado de caracterização concernente a hipersuperfícies com curvatura média constante possuindo duas curvaturas principais distintas imersas em uma variedade Riemanniana localmente simétrica.

Teorema 2.5.2 *Seja $\overline{M}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície completa imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21) com curvatura média constante H . Suponha que M^n possui duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, e $H^2 + c > 0$. Então,*

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \frac{n}{4p(n-p)} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H| \right)^2. \quad (2.78)$$

Além disso, se a igualdade ocorre em (2.78) e $|\Phi(q)| = \sup_M |\Phi|$ em algum ponto $q \in M^n$, então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\overline{M}^{n+1}$.

Demonstração. Se $\sup_M |\Phi|^2 = \infty$ então, o resultado é válido. Suponhamos então que $\sup_M |\Phi|^2 < +\infty$. Uma vez que $H^2 + c > 0$, temos

$$P_{H,p,c}(0) = -n(H^2 + c) < 0,$$

onde $P_{H,p,c}(x)$, está definido em (2.72).

Além disso, $P_{H,p,c}(x)$ é estritamente crescente para $x \geq 0$, com $P_{H,p,c}(x^*) = 0$ em

$$x^* = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H| \right),$$

e $P_{H,p,c}(x) \geq 0$ se, e somente se, $x \geq x^*$.

Como estamos supondo $\sup_M |\Phi|^2 < +\infty$ e H constante, sendo $|\Phi|^2 = S - nH^2$ temos que $\sup_M S < +\infty$. Portanto, da equação de Ricci (2.7) e da condição de curvatura (2.21), obtemos

$$R_{ii} \geq (n-1)c_2 - nH \sup_M \sqrt{S} - \sup_M S > -\infty,$$

isto é, a curvatura de Ricci de M^n é limitada por baixo.

Assim, podemos aplicar o Lema 1.2.7 a função $|\Phi|$ a fim de garantir a existência de uma sequência de pontos $\{q_k\}_k \subset M^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|(q_k) = \sup_M |\Phi|, \quad |\nabla |\Phi|| (q_k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \Delta |\Phi|(q_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.79)$$

Por outro lado, das propriedades elementares do Laplaciano,

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2(q_k) = |\Phi|(q_k)\Delta|\Phi|(q_k) + |\nabla|\Phi|(q_k)|^2 < |\Phi|(q_k)\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}. \quad (2.80)$$

Logo, de (2.71) e (2.80), obtemos

$$|\Phi|(q_k)\frac{2}{k} + \frac{2}{k^2} > \Delta|\Phi|^2(q_k) \geq -2|\Phi|^2(q_k)P_{H,p,c}(|\Phi|(q_k)). \quad (2.81)$$

Portanto, quando k é arbitrariamente grande em (2.81), de (2.79), temos

$$\left(\sup_M |\Phi|\right)^2 P_{H,p,c} \left(\sup_M |\Phi|\right) \geq 0.$$

Como $\sup_M |\Phi| > 0$, pois M^n possui duas curvaturas principais distintas, segue que $P_{H,p,c}(\sup_M |\Phi|) \geq 0$, o que implica na veracidade da desigualdade em (2.78).

Agora, supondo que a igualdade ocorre em (2.78) e $|\Phi(q)| = \sup_M |\Phi|$ em algum ponto $q \in M^n$. Então, $P_{H,p,c}(|\Phi|) \leq 0$ e, de (2.71), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 \geq |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|) \geq 0. \quad (2.82)$$

Assim, a função $|\Phi|^2$ é uma função subharmônica sobre M^n , e consequentemente, aplicamos o Lema 1.2.10 para obter que $|\Phi|^2$ é constante. Retornando a (2.82) obtemos que $|\nabla\Phi|^2 = 0$. Portanto, de (2.35) e H constante, concluímos que $\nabla A = 0$ e, assim, M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Observação 2.5.3 *Por intermédio de (2.78), não é difícil verificar que $|\Phi|^2 = 0$ se, e somente se, $H^2 + c = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Além disso esta igualdade é verdadeira apenas nos casos onde o parâmetro c é não positivo. Por este motivo e por estarmos assumindo que a hipersuperfície possui duas curvaturas principais distintas, é que surge a hipótese $H^2 + c > 0$.*

Quando o espaço ambiente é uma forma espacial Riemanniana, do Teorema 2.5.2 obtemos

Corolário 2.5.4 *(Teorema 1 de [50]) Seja M^n uma hipersuperfície completa imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, $n \geq 2$, com curvatura média constante H . Suponha que M^n possui duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, e $H^2 + c > 0$. Então,*

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \frac{n}{4p(n-p)} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H| \right)^2. \quad (2.83)$$

Em particular, se a igualdade ocorre em (2.83) e $|\Phi(q)| = \sup_M |\Phi|$ em algum ponto $q \in M^n$, então M^n é isométrica a

- (i) $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{R}^p$ para algum $r \in (0, +\infty)$, quando $c = 0$;
- (ii) $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{S}^p(\sqrt{1-r^2})$ para algum $r^2 \in \left(0, \frac{n-p}{n}\right]$, quando $c = 1$, e $r^2 = \frac{n-p}{n}$ se, e somente se, $H = 0$;
- (iii) $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{H}^p(-\sqrt{1+r^2})$, para algum $r \in (0, +\infty)$, quando $c = -1$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.5.2, M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. Assim, pelo Teorema 1.1.1, temos o seguinte:

(i) *Caso $c = 0$:* M^n é isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$, para algum $r \in (0, +\infty)$ e $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Além do mais, escolhendo apropriadamente o vetor normal, temos

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Assim,

$$H = \frac{k}{nr}, \quad S = \frac{k}{r^2}, \quad \text{e} \quad |\Phi| = \sqrt{\frac{n(n-k)}{k}} H.$$

Por outro lado

$$x^* = \sqrt{\frac{np}{n-p}} H.$$

Então, $|\Phi| = x^*$ se, e somente se, $k = n - p$.

(ii) *Caso $c = 1$:* M^n é isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, para algum $r \in (0, 1)$ e $k \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$. Novamente por uma escolha apropriada do vetor normal temos

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

e

$$H = \frac{nr^2 - k}{nr\sqrt{1-r^2}}. \tag{2.84}$$

Logo,

$$S = \frac{nr^4 + k - 2kr^2}{r^2(1-r^2)} \quad \text{e} \quad |\Phi| = \frac{\sqrt{k(n-k)}}{r\sqrt{n(1-r^2)}}.$$

Portanto, usamos a equação (2.84) e vemos que

$$r^2 = \frac{2k + nH^2 \pm |H|\sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)}}{2n(1+H^2)},$$

onde o sinal é $+$ ou $-$ se $r^2 > \frac{k}{n}$ ou $r^2 \leq \frac{k}{n}$, respectivamente. Consequentemente, se $H = 0$ então $r = \sqrt{\frac{k}{n}}$ e $|\Phi| = \sqrt{n} = x^*$. Assim, para $k = n - p$ temos o toro de Clifford

mínimo $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{\frac{n-p}{n}}) \times \mathbb{S}^p(\sqrt{\frac{p}{n}})$. Em geral, para $k = n - p$ temos

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}}(\sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)} \pm (n-2p)|H|).$$

Em particular, $|\Phi| = x^*$ quando $r^2 \leq \frac{n-p}{n}$, e $|\Phi| > x^*$ se $r^2 > \frac{n-p}{n}$.

(iii) *Caso* $c = -1$: M^n é isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{1+r^2})$, para algum $r \in (0, +\infty)$ e $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Uma vez mais, fazendo uma escolha adequada do vetor normal, temos

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} H &= \frac{nr^2 + k}{nr\sqrt{1+r^2}}, \\ S &= \frac{nr^4 + 2kr^2 + k}{r^2(1+r^2)}, \end{aligned} \tag{2.85}$$

e

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{k(n-k)}}{r\sqrt{n(1+r^2)}}. \tag{2.86}$$

Agora, a equação (2.85) permite-nos deduzir que $H^2 - 1 > 0$ se, e somente se,

$$n(2k - n)r^2 + k^2 > 0.$$

Além disso

$$n^2(H^2 - 1)r^4 + n(nH^2 - 2k)r^2 - k^2 = 0$$

e

$$r^2 = \frac{2k - nH^2 + H\sqrt{n^2H^2 - 4k(n-k)}}{2n(H^2 - 1)}. \tag{2.87}$$

Logo, para $k = p$ temos $H^2 - 1 > 0$ se, e somente se, $r^2 < \frac{p^2}{n(n-2p)}$, com $p \neq \frac{n}{2}$. Além disso, segue de (2.87) e (2.86) que

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}}(\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} + (n-2p)H) > x^*.$$

Finalmente, para $k = n - p$ temos $H^2 - 1 > 0$ para qualquer $r > 0$, e novamente de (2.87) e (2.86) obtemos

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}}(\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)H) = x^*.$$

■

2.5.1 Hipersuperfícies Weingarten lineares completas

Nesta seção vamos estabelecer uma versão do Teorema 2.5.2, e seu respectivo corolário, para o contexto de hipersuperfícies Weingarten lineares. Vimos que na demonstração do Teorema 2.5.2 foi utilizado como ferramenta analítica o Lema 1.2.7. Seguindo este raciocínio, para estabelecermos esta versão, precisaremos de um resultado que garanta a existência de uma sequência do tipo Omori relacionada ao operador de Cheng-Yau modificado L . Diante disso, o nosso próximo resultado versa sobre a existência dessa sequência e o mesmo estende a Proposição 3.2 de [16].

Lema 2.5.5 *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear imersa em $\overline{M}^{n+1}$ satisfazendo a condição de curvatura (2.21), tal que $R = aH + b$, com $a \leq 0$ e $(n-1)a^2 + 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$. Se H é limitada sobre M^n , então existe uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que*

$$(i) \lim_{k \rightarrow +\infty} H(q_k) = \sup_M H, \quad (ii) \lim_{k \rightarrow +\infty} |\nabla H(q_k)| = 0, \quad (iii) \limsup_{k \rightarrow \infty} L(H(q_k)) \leq 0.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Da definição do operador modificado (2.30) obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) &= \square(nH) - \frac{n-1}{2}a\Delta(nH) \\ &= \sum_i \left(nH - \frac{n-1}{2}a - \lambda_i \right) (nH)_{ii}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Por outro lado, observamos que se H é identicamente nulo sobre M^n , então o resultado é válido. Assim, deixe-nos supor que H não é identicamente nulo e escolhamos a orientação de M^n tal que $\sup_M H > 0$.

Logo, para todo $i = 1, \dots, n$, de (2.9) temos

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 &\leq \sum_i \lambda_i^2 = S = n^2 H^2 - n(n-1)aH - n(n-1)b + \sum_{i,j} \overline{R}_{ijji} \\ &= \left(nH - \frac{n-1}{2}a \right)^2 - \frac{1}{4} [(n-1)^2 a^2 + 4n(n-1)(b - \overline{\mathcal{R}})] \\ &\leq \left(nH - \frac{n-1}{2}a \right)^2, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usado o fato de que a desigualdade (2.61) vale. Consequentemente, temos

$$|\lambda_i| \leq \left| nH - \frac{n-1}{2}a \right|. \quad (2.89)$$

Agora, pela condição de curvatura (2.21) e das equações de Gauss (2.17) e de (2.89) obtemos

$$R_{ijij} = \bar{R}_{ijij} + \lambda_i \lambda_j \geq c_2 - \left(nH - \frac{n-1}{2}a \right)^2. \quad (2.90)$$

Uma vez que estamos assumindo que H é limitada sobre M^n , segue de (2.90) que a curvatura seccional de M^n é limitada por baixo, além disso

$$(nH)_{ii} \leq \max\{n(\text{Hess}H)(X, X) ; |X| = 1\} \leq 0,$$

e portanto, podemos aplicar o Lema 1.2.6 a função nH para obter uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ satisfazendo $\lim_{k \rightarrow \infty} nH(q_k) = \sup_M nH$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla nH(q_k)| = 0$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_i (nH)_{ii}(q_k) \leq 0. \quad (2.91)$$

Passando a subsequência se necessário, podemos considerar que $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ satisfaz (2.91) e é tal que $H(q_k) \geq 0$. Assim, levando em conta que $a \leq 0$, de (2.89) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq nH(q_k) - \frac{n-1}{2}a - |\lambda_i(q_k)| \leq nH(q_k) - \frac{n-1}{2}a - \lambda_i(q_k) \\ &\leq nH(q_k) - \frac{n-1}{2}a + |\lambda_i(q_k)| \leq 2nH(q_k) - (n-1)a. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Consequentemente, usando uma vez mais o fato de H ser limitada sobre M^n , de (2.92) podemos inferir que $nH(q_k) - \frac{n-1}{2}a - \lambda_i(q_k)$ é não-negativo e limitado sobre M^n , para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (2.88), (2.91) e (2.92) concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_i L(nH(q_k)) \leq \sum_i \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left[\left(nH - \frac{n-1}{2}a - \lambda_i \right) (q_k) (nH)_{ii}(q_k) \right] \leq 0.$$

■

Agora estamos em condições de provar o nosso último resultado.

Teorema 2.5.6 *Seja $\bar{M}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana localmente simétrica e seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em $\bar{M}^{n+1}$ satisfazendo as condições de curvatura (2.20) e (2.21), tal que $R = aH + b$ com $a \leq 0$ e $b > \bar{\mathcal{R}}$. Suponha que M^n possui duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n-p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, e que $H^2 + c > 0$. Se H é limitada, então*

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \frac{n}{4p(n-p)} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H| \right)^2. \quad (2.93)$$

Além disso, se a igualdade ocorre em (2.93), $|\Phi(q)| = \sup_M |\Phi|$ em algum ponto $q \in M^n$ e H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\bar{M}^{n+1}$.

Demonstração. Vamos supor novamente que $\sup_M |\Phi|^2 < +\infty$, uma vez que se $\sup_M |\Phi|^2 = +\infty$ não há o que mostrar. Sendo $\overline{M}^{n+1}$ localmente simétrico e M^n hipersuperfície Weingarten linear, de (2.19) e (2.30), obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) = & \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2 |\nabla H|^2 + nH \sum_i \lambda_i^3 - S^2 \\ & + \sum_{i,j} \overline{R}_{(n+1)i(n+1)i} (nH\lambda_i - S) + \sum_{i,j} \overline{R}_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Das nossas hipóteses sobre a constante b , temos que a desigualdade (2.61) vale e, portanto, do Lema 2.2.5 temos

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2 |\nabla H|^2. \quad (2.95)$$

Agora, inserindo (2.43), (2.44), (2.77) e (2.95) em (2.94) obtemos

$$L(nH) \geq -|\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|), \quad (2.96)$$

onde $P_{H,p,c}(x)$ é o polinômio definido em (2.72). Pela demonstração do Teorema 2.5.2, $P_{H,p,c}(x)$ é estritamente crescente para todo $x \geq 0$, com $P_{H,p,c}(x^*) = 0$ em

$$x^* = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H| \right),$$

e $P_{H,p,c}(x) \geq 0$ se, e somente se, $x \geq x^*$.

Por outro lado, uma vez que $b > \overline{\mathcal{R}}$, H é limitada sobre M^n e $a \leq 0$, o Lema 2.5.5 assegura-nos que existe uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} nH(q_k) = \sup_M nH, \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH(q_k)) \leq 0. \quad (2.97)$$

Assim, sendo M^n Weingarten linear tal que $R = aH + b$, da equação (2.9) temos que

$$|\Phi|^2 = n(n-1) (\overline{\mathcal{R}} + H^2 - aH - b). \quad (2.98)$$

Logo, (2.97) e (2.98) garante-nos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi(q_k)| = \sup_M |\Phi|. \quad (2.99)$$

Então, de (2.72), (2.96) e (2.99) temos

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH(q_k)) \geq - \left(\sup_M |\Phi| \right)^2 P_{\sup_M H, p, c} \left(\sup_M |\Phi| \right).$$

Portanto,

$$\left(\sup_M |\Phi|\right)^2 P_{\sup_M H, p, c} \left(\sup_M |\Phi|\right) \geq 0.$$

Uma vez que M^n é suposta possuir duas curvaturas principais distintas, temos que $\sup_M |\Phi| > 0$. Donde, segue que $P_{\sup_M H, p, c}(\sup_M |\Phi|) \geq 0$, o que implica que a desigualdade (2.93) vale.

Agora, suponha que a igualdade ocorre em (2.93). Então, $P_{H, p, c}(|\Phi|) \leq 0$ e, de (2.96), temos

$$L(nH) \geq -|\Phi|^2 P_{H, p, c}(|\Phi|) \geq 0. \quad (2.100)$$

Como H atinge seu máximo em M^n e, sendo $b > \overline{\mathcal{R}}$, o operador L é elíptico, e podemos aplicar o princípio do máximo forte de Hopf (cf. Lema 1.2.10) para concluir que H é constante em M^n . Assim, de (2.100)

$$0 = L(nH) \geq -|\Phi|^2 P_{H, p, c}(|\Phi|) \geq 0,$$

e, portanto, todas as desigualdades obtidas na prova da Proposição 2.2.9, bem como a desigualdade (2.95), são de fato igualdades. Assim, obtemos

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i, j, k} h_{ijk}^2 = n|\nabla H|^2 = 0.$$

Portanto, temos que M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de $\overline{M}^{n+1}$. ■

Aplicando o Teorema 2.5.2, podemos raciocinar como na prova do Corolário 2.5.7 para obter o seguinte

Corolário 2.5.7 (Teorema 2 de [50]) *Seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear completa imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, $n \geq 2$, tal que $R = aH + b$ com $a \leq 0$ e $b > c$. Suponha que M^n possui duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, e $H^2 + c > 0$. Se H é limitada, então H não muda de sinal sobre M^n e*

$$\sup_M |\Phi|^2 \geq \frac{n}{4p(n-p)} \left(\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H| \right)^2. \quad (2.101)$$

Em particular, se a igualdade ocorre em (2.101) e H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é isométrica a

- (i) $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{R}^p$ para algum $r \in (0, +\infty)$, quando $c = 0$;
- (ii) $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{S}^p(\sqrt{1-r^2})$ para algum $r^2 \in \left(0, \frac{n-p}{n}\right)$, quando $c = 1$.
- (iii) $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{H}^p(-\sqrt{1+r^2})$, para algum $r \in (0, +\infty)$, quando $c = -1$.

Capítulo 3

A geometria de hipersuperfícies tipo-espaco imersas em ambientes Lorentzianos

Este capítulo corresponde aos artigos [52], [40] e [51] e tem como objetivo, apresentar uma versão Lorentziana dos resultados obtidos no Capítulo 2. Iniciamos o mesmo apresentando uma fórmula do tipo Simons para ambientes Lorentzianos mais gerais. Logo em seguida, nos restringiremos apenas aos espaços localmente simétricos que satisfazem certas condições de curvatura e, nesse contexto, apresentaremos alguns resultados auxiliares com respeito a hipersuperfícies tipo-espaco Weingarten lineares satisfazendo $R = aH + b$ imersas no mesmo. Posteriormente, estabelecemos uma limitação inferior para o operador L aplicado a curvatura média da hipersuperfície que possui duas curvaturas principais distintas prescritas as suas multiplicidades (cf. Proposição 3.3.1). Em seguida, usando o maquinário desenvolvido na seção anterior, e com restrições adequadas sobre o quadrado da norma do operador sem traço, mostramos que uma tal hipersuperfície deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica e que a imposição colocada sobre o quadrado da norma do operador sem traço é realizada (cf. Seção 3.3). Com base na seção anterior, porém com um maquinário analítico diferente, abordamos os resultados anteriores no caso em que o ambiente é um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico que satisfaz as duas condições sob sua curvatura (cf. Subseção 3.3.1). Mais a frente, no caso em que o ambiente é uma forma espacial

Lorentziana, classificamos as hipersuperfícies isoparamétricas obtidas na Seção 3.3 (cf. Subseção 3.3.2). Por fim, estudamos a rigidez de hipersuperfícies imersas em espaços localmente simétricos controlando a sua curvatura escalar (cf. Seção 3.4).

3.1 Uma fórmula do tipo Simons para ambientes Lorentzianos

Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço conexa imersa isometricamente em um espaço de Lorentz L_1^{n+1} . Vamos dizer que uma hipersuperfície é *tipo-espaço*, quando a métrica induzida pelo ambiente sobre M^n for positiva definida, ou seja, uma métrica Riemanniana. A partir de então, denotaremos esta métrica por $\langle, \rangle$. Neste contexto, consideremos um referencial ortonormal local semi-Riemanniano $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ em L_1^{n+1} , com co-referencial dual $\{\omega_1, \dots, \omega_{n+1}\}$, tal que, em cada ponto de M^n , $e_1, \dots, e_n$ são tangentes a M^n e e_{n+1} é normal a M^n . No que segue, usaremos a mesma convenção de índices do capítulo anterior:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+1 \quad \text{e} \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n.$$

Iremos denotar as formas de conexão de L_1^{n+1} por $\{\omega_{AB}\}$. Assim, as equações de estrutura de L_1^{n+1} são dadas por:

$$d\omega_A = - \sum_B \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad \varepsilon_i = 1, \varepsilon_{n+1} = -1,$$

$$d\omega_{AB} = - \sum_C \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D \bar{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D.$$

Aqui, $\bar{R}_{ABCD}$, $\bar{R}_{CD}$ e $\bar{R}$ denotam o tensor curvatura Riemanniano, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar do espaço Lorentz L_1^{n+1} , respectivamente. Nesta configuração, temos

$$\bar{R}_{CD} = \sum_B \varepsilon_B \bar{R}_{BCDB} \quad \text{e} \quad \bar{R} = \sum_A \varepsilon_A \bar{R}_{AA}.$$

Além disso, as componentes $\bar{R}_{ABCD;E}$ da derivada covariante do tensor curvatura Riemanniano de L_1^{n+1} são definidas por

$$\begin{aligned} \sum_E \varepsilon_E \bar{R}_{ABCD;E} \omega_E &= d\bar{R}_{ABCD} - \sum_E \varepsilon_E (\bar{R}_{EBCD} \omega_{EA} \\ &\quad + \bar{R}_{AECD} \omega_{EB} + \bar{R}_{ABED} \omega_{EC} + \bar{R}_{ABCE} \omega_{ED}). \end{aligned}$$

Agora, restringiremos todos os tensores a hipersuperfície tipo-espaço M^n . Antes de qualquer coisa observemos que $\omega_{n+1} = 0$ sobre M^n , e assim,

$$\sum_i \omega_{(n+1)i} \wedge \omega_i = d\omega_{n+1} = 0.$$

Consequentemente, pelo Lema de Cartan, existem funções h_{ij} que satisfazem

$$\omega_{(n+1)i} = \sum_j h_{ij} \omega_j \quad \text{e} \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (3.1)$$

Veja que da equação (3.1), temos que a segunda forma fundamental de M^n é dada por $A = \sum_{i,j} h_{ij} \omega_i \omega_j e_{n+1}$, e a sua curvatura média, H é definida por $H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$.

As formas de conexão $\{\omega_{ij}\}$ de M^n são caracterizadas pelas equações de estrutura de M^n :

$$d\omega_i = - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$d\omega_{ij} = - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l,$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M^n .

Das equações de estrutura, obtemos a *equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \quad (3.2)$$

As componentes R_{ij} do tensor de *Ricci* e a *curvatura escalar* R de M^n são dados, respectivamente, por

$$R_{ij} = \sum_k \bar{R}_{kijk} - nHh_{ij} + \sum_k h_{ik}h_{kj} \quad (3.3)$$

e

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i R_{ii}. \quad (3.4)$$

Uma consequência imediata das expressões (3.3) e (3.4) é a seguinte

$$n(n-1)R = \sum_{i,j} \bar{R}_{ijji} - n^2H^2 + S. \quad (3.5)$$

A primeira derivada covariante h_{ijk} de h_{ij} satisfaz

$$\sum_k h_{ijk} \omega_k = dh_{ij} - \sum_k h_{ik} \omega_{kj} - \sum_k h_{jk} \omega_{ki}. \quad (3.6)$$

Então, tomando a derivada exterior em (3.1), obtemos a *equação de Codazzi*

$$h_{ijk} - h_{ikj} = \bar{R}_{(n+1)ijk}. \quad (3.7)$$

A segunda derivada covariante h_{ijkl} de h_{ij} são dadas por

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} - \sum_l h_{ljk}\omega_{li} - \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} - \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}.$$

Pela derivação exterior de (3.6), podemos obter a seguinte *fórmula de Ricci*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = - \sum_m h_{im}R_{mjkl} - \sum_m h_{jm}R_{mikl}. \quad (3.8)$$

Restringindo a derivada covariante $\bar{R}_{ABCD;E}$ de $\bar{R}_{ABCD}$ sobre M^n , temos $\bar{R}_{(n+1)ijk;l}$.

Por conseguinte, ela satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{(n+1)ijk;l} &= \bar{R}_{(n+1)ijkl} + \bar{R}_{(n+1)i(n+1)k}h_{jl} \\ &\quad + \bar{R}_{(n+1)ij(n+1)}h_{kl} + \sum_m \bar{R}_{mijk}h_{ml}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\bar{R}_{(n+1)ijkl}$ denota a derivada covariante de $\bar{R}_{(n+1)ijk}$ como um tensor sobre M^n de modo que

$$\begin{aligned} \sum_l \bar{R}_{(n+1)ijkl}\omega_l &= d\bar{R}_{(n+1)ijk} - \sum_l \bar{R}_{(n+1)ljk}\omega_{li} \\ &\quad - \sum_l \bar{R}_{(n+1)ilk}\omega_{lj} - \sum_l \bar{R}_{(n+1)ijl}\omega_{lk}. \end{aligned}$$

O *Laplaciano* Δh_{ij} de h_{ij} é definido por $\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}$. Das equações (3.7), (3.8) e (3.9), obtemos, após alguns cálculos

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= (nH)_{ij} - nH \sum_l h_{il}h_{lj} + Sh_{ij} + \sum_k (\bar{R}_{(n+1)ijk;k} + \bar{R}_{(n+1)kik;j}) \\ &\quad - \sum_k (h_{kk}\bar{R}_{(n+1)ij(n+1)} + h_{ij}\bar{R}_{(n+1)k(n+1)k}) \\ &\quad - \sum_{k,l} (2h_{kl}\bar{R}_{lijk} + h_{jl}\bar{R}_{lkik} + h_{il}\bar{R}_{lkjk}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Consequentemente, sendo $\Delta S = 2 \left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij}\Delta h_{ij} \right)$, da equação (3.10) obtemos a seguinte fórmula tipo-Simons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S &= S^2 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij}(nH)_{ij} + \sum_{i,j,k} h_{ij}(\bar{R}_{(n+1)ijk;k} + \bar{R}_{(n+1)kik;j}) \\ &\quad - \left(nH \sum_{i,j} h_{ij}\bar{R}_{(n+1)ij(n+1)} + S \sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i,j,k,l} (h_{kl}h_{ij}\bar{R}_{lijk} + h_{il}h_{ij}\bar{R}_{lkjk}) - nH \sum_{i,j,l} h_{il}h_{lj}h_{ij}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por fim, de (2.17) e (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}
\Box(nH) &= \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - \sum_i (nH)_i^2 - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii} \\
&= \frac{1}{2}\Delta S - n^2|\nabla H|^2 - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Delta \left(\sum_{i,j} \bar{R}_{ijji} - n(n-1)R \right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Observação 3.1.1 *Quando o espaço ambiente é uma forma espacial Riemanniana, a equação (3.12) pode também ser reobtida do Corolário 2 (caso $r = 1$) em [25].*

3.2 Espaços Lorentzianos localmente simétricos e resultados auxiliares

No capítulo anterior estudamos a geometria de hipersuperfícies imersas em variedades Riemannianas que respeitam certas condições sob sua curvatura. Destacamos que esse é um ramo de estudo que tem sido exaustivamente estudado e, por sua vez, no contexto de variedades Lorentzianas não é diferente. Em 1984, Nishikawa [75], introduziu uma importante classe de variedades de Lorentz que satisfazem duas condições em sua geometria. Nos anos decorrentes, vários trabalhos surgiram nesta vertente, inclusive em ambientes um pouco mais gerais (e.g. [34, 86, 67]). Seguindo tais ideias, vamos impor condições geométricas sobre o nosso ambiente de estudo, isto é, consideremos a existência de constantes c_1 e c_2 tais que a curvatura seccional $\bar{K}$ de L_1^{n+1} satisfaz as duas seguintes condições:

$$\bar{K}(u, v) = -\frac{c_1}{n}, \tag{3.13}$$

para quaisquer vetores tipo-espaço $u \in TM$ e tipo-tempo $v \in T^\perp M$, e

$$\bar{K}(u, v) \geq c_2, \tag{3.14}$$

para quaisquer vetores tipo-espaço u e v .

Observe que, se $L_1^{n+1}(c)$ é forma espacial Lorentziana de índice 1 com curvatura seccional constante c , então ela satisfaz as condições de curvatura (3.13) e (3.14) para $-\frac{c_1}{n} = c_2 = c$. Por outro lado, existe uma grande quantidade de exemplos de variedades semi-Riemanniana (que não são formas espaciais Lorentzianas) que satisfazem

as condições de curvatura (3.13) e (3.14). Listaremos aqui alguns desses exemplos que podem ser encontrados em [86].

Exemplo 3.2.1 (a) *Considere a seguinte variedade produto:*

$$\mathbb{H}_1^k(-c_1/n) \times N^{n-k+1}(c_2),$$

onde $c_1 \geq 0$, $c_2 < 0$ e $-\frac{c_1}{n} \leq c_2$. Note que a sua curvatura seccional é dada por:

$$\overline{K}(u_1, u_b) = \overline{K}(u_a, u_b) = -\frac{c_1}{n}, \quad \overline{K}(u_a, u_r) = 0 \quad e \quad \overline{K}(u_r, u_s) = c_2$$

onde $a, b, \dots = 2, \dots, k$ e $r, s, \dots = k+1, \dots, n-k+1$. Além disso, u_1 denota um vetor tipo-tempo, u_a e u_r vetores tipo-espaço.

(b) *Seja*

$$\mathbb{R}_1^k \times \mathbb{S}^{n-k+1}(1).$$

Veja que a sua curvatura seccional é dada por

$$\overline{K}(u_1, u_b) = \overline{K}(u_a, u_b) = \overline{K}(u_a, u_r) = 0 \quad e \quad \overline{K}(u_r, u_s) = 1,$$

onde $a, b, \dots = 2, \dots, k$ e $r, s, \dots = k+1, \dots, n-k+1$. Em particular, $\mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{S}^n$ é conhecido como o Universo Estático de Einstein.

(c) *Como descrito em O'Neill [79], consideremos o espaço-tempo Robertson-Walker $M(c, f)$. Desse modo, a variedade de Lorentz M pode ser considerada de tal modo que*

$$M(c, f) = I \times_f M^3(c), \quad c = -1, 0, 1.$$

onde I denota um intervalo de $\mathbb{R}_1^1$ e $f > 0$ é uma função suave definida sobre I . Assim a sua curvatura seccional é dada por

$$\overline{K}(u, v) = \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{c}{f^2},$$

para quaisquer vetores tipo-espaço u, v e

$$\overline{K}(e_{n+1}, v) = \frac{\langle v, v \rangle}{Q(e_{n+1}, v)} \frac{f''}{f},$$

onde

$$Q(e_{n+1}, v) = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle \langle v, v \rangle - \langle e_{n+1}, v \rangle^2,$$

e_{n+1} é um vetor tipo-tempo e v um vetor tipo-espaço qualquer. Observe que, quando $c > 0$ e $f'' = 0$, $\overline{K}$ satisfaz a nossa condição de curvatura para $c_1 = 0$ e $c_2 \geq \frac{c}{f^2}$.

Vejamos que se L_1^{n+1} é espaço de Lorentz que satisfaz a condição de curvatura (3.13), então para uma escolha apropriada da constante c_1 , temos a seguinte observação

Observação 3.2.2 *Sejam L_1^{n+1} um espaço de Lorentz que satisfaz a condição de curvatura (3.13) e $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal local semi-Riemanniano sendo $e_1, \dots, e_n$ vetores tipo-espaço e e_{n+1} vetor tipo-tempo. Ponhamos*

$$\overline{R}(e_A, e_B)e_C = \sum_D \overline{R}_{ABCD}e_D.$$

Então, a curvatura seccional $\overline{K}(e_A, e_B)$ determinada pelo subespaço bidimensional $\{e_A, e_B\}$ é dado por

$$\overline{K}(e_A, e_B) = \frac{\langle \overline{R}(e_A, e_B)e_B, e_A \rangle}{\langle e_A, e_A \rangle \langle e_B, e_B \rangle - \langle e_A, e_B \rangle^2} = \varepsilon_A \varepsilon_B \overline{R}_{ABBA}.$$

Assim, $\overline{K}(e_i, e_{n+1}) = -\overline{R}_{(n+1)ii(n+1)}$ e $\overline{K}(e_i, e_j) = \overline{R}_{ijji}$. Disto, segue que

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(e_A, e_A) &= \sum_B \varepsilon_B \langle \overline{R}(e_A, e_B)e_B, e_A \rangle \\ &= \sum_B \varepsilon_B \overline{R}_{ABBA} \\ &= \sum_B \varepsilon_B \overline{K}(e_A, e_B). \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\overline{Ric}(e_{n+1}, e_{n+1}) = \sum_j \overline{K}(e_{n+1}, e_j) = - \sum_j \overline{R}_{(n+1)jj(n+1)}.$$

Logo a condição de curvatura (3.13) implica em

$$\overline{Ric}(v, v) = c_1, \tag{3.15}$$

para quaisquer vetor tipo-tempo v .

Neste momento, relembremos que uma variedade Lorentziana satisfaz a condição de convergência forte (a condição de convergência tipo-tempo em Hawking-Ellis [56]) se a sua curvatura de Ricci, $\overline{Ric}$, é positiva semi-definida para todos os vetores tipo-tempo, isto é, $\overline{Ric}(v, v) \geq 0$, para todo vetor tipo-tempo v (cf. [75]).

Retornando a (3.15), podemos inferir que se L_1^{n+1} é uma variedade Lorentziana de índice 1 que satisfaz a condição de curvatura (3.13) com $c_1 \geq 0$, então ela satisfaz a condição de energia forte.

Consideremos L_1^{n+1} uma variedade Lorentziana localmente simétrica. Denotemos por $\overline{R}_{ABCD;E}$ as componentes da derivada covariante do seu tensor curvatura e por $\overline{R}_{AB}$

as componentes do seu tensor de Ricci. Dessa forma, de modo análogo ao Capítulo 2, temos que se L_1^{n+1} satisfaz a condição de curvatura (3.13), então a sua curvatura escalar $\bar{R}$ é dada por

$$\bar{R} = \sum_{A=1}^{n+1} \varepsilon_A \bar{R}_{AA} = \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ijji} - 2 \sum_{i=1}^n \bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} = \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ijji} + 2c_1. \quad (3.16)$$

Relembrando que a curvatura escalar de um espaço localmente simétrico é sempre constante, da equação (3.16), temos que $\sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ijji}$ é uma constante naturalmente obtida em um espaço localmente simétrico que satisfaz a condição de curvatura (3.13). Novamente por simplicidade, denotaremos $\bar{\mathcal{R}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{ijji}$ e $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2$.

Apresentaremos, no decorrer desta seção, alguns resultados que auxiliarão na obtenção dos nossos resultados. Os dois próximos resultados são a versão Lorentziana dos Lemas 2.2.5 e 2.5.5 vistos no Capítulo 2. A prova dos mesmos pode ser obtida (com pequenas adaptações) de modo análogo aos respectivos Riemannianos. O primeiro deles corresponde ao Lema 3.2 de [38].

Lema 3.2.3 *Seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear tipo-espaço imersa num espaço de Lorentz localmente simétrico L_1^{n+1} satisfazendo a condição de curvatura (3.13). Se M^n é tal que $R = aH + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$(n-1)a^2 - 4n(b - \bar{\mathcal{R}}) \geq 0, \quad (3.17)$$

então

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2 |\nabla H|^2. \quad (3.18)$$

Além disso, se a desigualdade (3.17) é estrita e ocorre a igualdade em (3.18), então H é constante sobre M^n .

Para o que segue, consideremos o seguinte operador de Cheng-Yau modificado dado por

$$L = \square + \frac{n-1}{2} a \Delta. \quad (3.19)$$

O segundo resultado garante a existência de uma sequência do tipo Omori para operador de Cheng-Yau modificado.

Lema 3.2.4 *Seja L_1^{n+1} um espaço de Lorentz localmente simétrico e seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo a condição de curvatura (3.14), tal que $R = aH + b$ com $a \geq 0$ e $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$. Se H é limitada sobre M^n , então existe uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que*

$$(i) \lim_{k \rightarrow +\infty} H(q_k) = \sup_M H, \quad (ii) \lim_{k \rightarrow +\infty} |\nabla H(q_k)| = 0, \quad (iii) \limsup_{k \rightarrow \infty} L(H(q_k)) \leq 0.$$

Observação 3.2.5 *Quando o ambiente é uma forma espacial Lorentziana, a constante $\overline{\mathcal{R}}$ é exatamente a curvatura seccional do ambiente. Assim, o Lema 3.2.3 é uma generalização do resultado para formas espaciais obtido por [67]. Por outro lado, já no caso onde $a = 0$, o Lema 3.2.4 reduz-se a Proposição 2.3 de [29].*

Um ultimo resultado auxiliar garante um critério suficiente para que o operador L definido em (3.19) seja elíptico. Por razões de completude apresentaremos a sua prova aqui (veja também, Lema 3.3 de [37]).

Lema 3.2.6 *Seja M^n uma hipersuperfície Weingarten linear tipo-espaço imersa em um espaço de Lorentz L_1^{n+1} . Se M^n é tal que $R = aH + b$ com $b < \overline{\mathcal{R}}$, então H tem sinal estrito e L é elíptico.*

Demonstração. Sendo $b < \overline{\mathcal{R}}$, por meio da equação (3.5), podemos facilmente verificar que H tem sinal estrito sobre M^n e, por uma escolha apropriada da aplicação normal de Gauss, podemos assumir que $H > 0$ sobre M^n .

Uma vez que a é uma constante, analisaremos dois casos: o caso em que $a = 0$ e o caso em que $a \neq 0$. No caso de $a = 0$, o operador L definido em (3.19) reduz-se ao operador quadrado, e portanto a hipótese $b < \overline{\mathcal{R}}$, implica em $R < \overline{\mathcal{R}}$. Por outro lado, considerando um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, da equação de Gauss (3.2), podemos verificar o seguinte:

$$2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - R). \quad (3.20)$$

Sendo $R < \overline{\mathcal{R}}$, da equação (3.20), obtemos que $\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j > 0$. Consequentemente, juntando esta desigualdade com a seguinte identidade algébrica

$$n^2 H^2 = \sum_i \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j, \quad (3.21)$$

concluimos que $nH - \lambda_i > 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Isto significa que a forma quadrática associada ao operador quadrado é positiva definida e, portanto, o operador L é elíptico neste caso.

Consideremos agora o caso em que $a \neq 0$. Neste caso, a equação (3.5), nos garante que

$$a = \frac{1}{n(n-1)H} (S - n^2 H^2 + n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - b)).$$

Consequentemente, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, e com um cálculo algébrico simples, verificamos que

$$\begin{aligned} nH - \lambda_i + \frac{n-1}{2}a &= nH - \lambda_i + \frac{1}{2nH} (S - n^2 H^2 + n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - b)) \\ &= \frac{1}{2nH} \left((nH - \lambda_i)^2 + \sum_{j \neq i} \lambda_j^2 + n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - b) \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Portanto, uma vez que $b < \overline{\mathcal{R}}$, concluimos, para este caso, que a forma quadrática associada ao operador L é positiva definida implicando que o operador L é elíptico. ■

Observação 3.2.7 *No contexto do Lema 3.2.6, se assumirmos também que L_1^{n+1} satisfaz a condição de curvatura (3.13) e que a curvatura média H de M^n é limitada, então garantiremos que o operador L será, na verdade, uniformemente elíptico. De fato, se H é limitada sobre M^n , então existe uma constante $C > 0$ tal que $H(p) \leq C$, para todo $p \in M^n$. Por outro lado, como L_1^{n+1} é um espaço de Lorentz localmente simétrico que satisfaz a condição de curvatura (3.13), segue de (3.16), que $\overline{\mathcal{R}}$ é uma constante. Assim, da equação (3.22), obtemos*

$$nH - \lambda_i + \frac{n-1}{2}a \geq \frac{n-1}{2H}(\overline{\mathcal{R}} - b) \geq \frac{n-1}{2C}(\overline{\mathcal{R}} - b) =: \delta_0 > 0,$$

onde δ_0 é uma constante positiva. Portanto, L é uniformemente elíptico.

Recorde que o operador sem traço Φ definido no capítulo anterior, é dado por $\Phi_{ij} = h_{ij} - nH$. Como M^n é suposta ser uma hipersuperfície Weingarten linear satisfazendo $R = aH + b$ para alguns $a, b \in \mathbb{R}$, das equações (2.36) e (3.5) encerramos esta seção com a seguinte identidade

$$|\Phi|^2 = n(n-1) (H^2 + aH + b - \overline{\mathcal{R}}). \quad (3.23)$$

3.3 Hipersuperfícies tipo-espaço com duas curvaturas principais distintas

Iniciaremos esta seção estabelecendo uma limitação inferior para o operador L aplicado a função curvatura média de uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear possuindo duas curvaturas principais distintas. Estimativa esta, essencial para a prova dos nossos resultados.

Proposição 3.3.1 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 2$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear imersa em L_1^{n+1} satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14), tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \bar{\mathcal{R}}) \geq 0$ e possui duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n-p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, então*

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|), \quad (3.24)$$

onde

$$P_{H,p,c}(x) = x^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H|x - n(H^2 - c), \quad (3.25)$$

com $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2$.

Demonstração. A demonstração procede igual a da Proposição 2.3.9 até a igualdade (2.73). Para o que segue, consideremos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ e $\Phi_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$. Assim, uma vez que $R = aH + b$, das equações (2.40), (3.11), (3.12) e (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) = & S^2 - nH \sum_i \lambda_i^3 + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2 |\nabla H|^2 \\ & - \left(nH \sum_i \lambda_i \bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S \sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k} \right) \\ & - 2 \sum_{i,k} (\lambda_i \lambda_k \bar{R}_{kiiik} + \lambda_i^2 \bar{R}_{ikik}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como estamos assumindo que a relação (3.17) é satisfeita, podemos aplicar o Lema 3.2.3 para garantir que

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2 |\nabla H|^2 \geq 0.$$

Consequentemente, podemos estimar a equação (3.26) e obter

$$L(nH) \geq S^2 - nH \sum_i \lambda_i^3 - 2 \sum_{i,k} (\lambda_i \lambda_k \bar{R}_{kii} + \lambda_i^2 \bar{R}_{ikik}) \quad (3.27)$$

$$- \left(nH \sum_i \lambda_i \bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S \sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k} \right).$$

Por um lado, de

$$\sum_i \mu_i^3 = \sum_i (\lambda_i - H)^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3H|\Phi|^2 - nH^3,$$

e das equações (2.36), e (2.73) escrevemos

$$\begin{aligned} S^2 - nH \sum_i \lambda_i^3 &= (|\Phi|^2 + nH^2)^2 - nH \sum_i \mu_i^3 - 3nH^2|\Phi|^2 - n^2H^4 \\ &= |\Phi|^4 - nH^2|\Phi|^2 - nH \sum_i \mu_i^3 \\ &\geq |\Phi|^4 - nH^2|\Phi|^2 - n|H| \left| \sum_i \mu_i^3 \right| \\ &\geq |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - nH^2 \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Mas por outro lado, usando as condições de curvatura (3.13) e (3.14), após alguns cálculos obtemos

$$- \left(nH \sum_i \lambda_i \bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} + S \sum_k \bar{R}_{(n+1)k(n+1)k} \right) = c_1(S - nH^2) \quad (3.29)$$

e

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i,k} (\lambda_i \lambda_k \bar{R}_{kii} + \lambda_i^2 \bar{R}_{ikik}) &\geq c_2 \sum_{i,k} (\lambda_i - \lambda_k)^2 \\ &= 2nc_2(S - nH^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Portanto quando inserimos as expressões (3.28), (3.29) e (3.30) na expressão (3.27), concluímos que

$$\begin{aligned} L(nH) &\geq |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - nH^2 \right) + c_1|\Phi|^2 + 2nc_2|\Phi|^2 \\ &= |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - nH^2 \right) + nc|\Phi|^2 \\ &= |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - n(H^2 - c) \right), \end{aligned}$$

onde $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2$. ■

Antes de apresentar os nossos resultados, faremos uma breve análise a respeito do comportamento do polinômio $P_{H,p,c}$ definido em (3.25) em termos do sinal do parâmetro c de um espaço localmente simétrico que satisfaz as condições de curvatura (3.13) e (3.14), em outras palavras, é o que diz a seguinte

Observação 3.3.2 *Se $P_{H,p,c}$ é o polinômio definido em (3.25), então temos os seguintes casos:*

(a) *Caso $c > 0$.*

Neste caso, se $n^2 H^2 - 4p(n-p)c < 0$, então $H^2 < \frac{4p(n-p)c}{n^2}$ e, portanto $P_{H,p,c}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $H^2 = \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, então podemos escrever $|H| = \frac{2\sqrt{p(n-p)c}}{n}$ e o polinômio $P_{H,p,c}$ tem exatamente uma raiz real, a saber

$$x^* = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}}(n-2p)|H| = \frac{(n-2p)\sqrt{c}}{\sqrt{n}}.$$

Assim, neste caso,

$$P_{H,p,c}(x) = \left(x - \frac{(n-2p)\sqrt{c}}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $H^2 > \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, então $P_{H,p,c}$ possui duas raízes reais, que são dadas por

$$x_{\pm}^* = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.31)$$

Observe que x_+^ é sempre positiva, enquanto x_-^* é positiva, se e somente se,*

$$\frac{4p(n-p)c}{n^2} \leq H^2 < c.$$

(b) *Caso $c \leq 0$.*

Neste caso, $P_{H,p,c}$ possui duas raízes reais distintas que coincidem com (3.31). Note que x_+^ é sempre positiva, enquanto x_-^* é sempre negativa. Consequentemente, $P_{H,p,c}(x) \geq 0$ se, e somente se, $x \geq x_+^*$, onde*

$$x_+^* = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right).$$

Por meio da Proposição 3.3.1 juntamente com análise feita acima, somos capazes de provar os nossos resultados com respeito a caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço Weingarten lineares completas imersas em um espaço localmente simétrico Lorentziano possuindo duas curvaturas principais distintas.

Teorema 3.3.3 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $b < \overline{R}$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Se $H^2 \leq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$ e H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} com $|H| = \frac{2\sqrt{p(n-p)c}}{n}$ e $|\Phi| = \frac{(n-2p)\sqrt{c}}{\sqrt{n}}$.*

Demonstração. Iniciamos observando que, da restrição imposta sobre o parâmetro b , podemos usar o Lema 3.2.6 no sentido de garantir que H tem sinal estrito e que o operador L é elíptico, além disso, a condição (3.17) é satisfeita.

Assim, pela Proposição 3.3.1, temos

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|), \quad (3.32)$$

onde

$$P_{H,p,c}(|\Phi|) = |\Phi|^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H| |\Phi| - n(H^2 - c).$$

Uma vez que estamos assumindo $c > 0$ e $H^2 \leq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, o item (a) da Observação 3.3.2 garante-nos que $P_{H,p,c}(|\Phi|) \geq 0$ e, conseqüentemente, de (3.32), $L(nH) \geq 0$. Como também estamos assumindo que H atinge seu máximo sobre M^n , podemos utilizar o Lema 1.2.10 para garantir que H é constante sobre M^n . Então, da expressão (3.27) obtemos

$$0 = L(nH) \geq \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2 |\nabla H|^2 + |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|) \geq 0. \quad (3.33)$$

Conforme as nossas hipóteses, temos que (3.33) é soma de termos não-negativos, e portanto devemos ter

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 - n^2 |\nabla H|^2 = 0 \quad \text{e} \quad |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|) = 0. \quad (3.34)$$

Sendo H constante, de (3.34) obtemos que $h_{ijk} = 0$ para todo i, j, k . Afirmamos que $h_{ijk} = 0$ implica que M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica. De fato, se considerarmos um referencial ortonormal local tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ e $i = j$ na identidade (3.6),

temos

$$0 = \sum_k h_{iik} \omega_k = d\lambda_i - 2 \sum_k h_{ik} \omega_{ki}.$$

Usando o fato das formas de conexão ω_{ij} serem anti-simétricas, obtemos que $d\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ e assim, todos os λ_i são constantes, mostrando o afirmado.

Além disso, como M^n é suposta ter duas curvaturas principais distintas, temos que $|\Phi|^2 > 0$. Assim, de (3.34), concluímos que $P_{H,p,c}(|\Phi|) = 0$. Portanto devemos ter $|H| = \frac{2\sqrt{p(n-p)c}}{n}$ e consequentemente $|\Phi| = \frac{(n-2p)\sqrt{c}}{\sqrt{n}}$. ■

Observação 3.3.4 *Veja que o Teorema 3.3.3 pode ser considerado como um resultado do tipo "gap", uma vez que a desigualdade sob a curvatura média não pode ser estrita.*

Prosseguindo, obtemos o seguinte resultado de não existência

Teorema 3.3.5 *Não existe hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em um espaço de Lorentz localmente simétrico L_1^{2m+1} , satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $(2m-1)a^2 - 8m(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$ e $a \geq 0$, possuindo duas curvaturas principais distintas com a mesma multiplicidade tal que $H^2 \leq c$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista M^{2m} , uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear, completa e possuindo duas curvaturas principais de mesma multiplicidade. Sendo H limitada e $a \geq 0$, podemos aplicar o Lema 3.2.4 a função $2mH$, obtendo uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^{2m}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (2mH(q_k)) = \sup_M 2mH, \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} L(2mH)(q_k) \leq 0. \quad (3.35)$$

Uma vez que L_1^{n+1} satisfaz a condição de curvatura (3.13), temos que $\overline{\mathcal{R}}$ é constante. Assim, tomando o limite em (3.23) e usando (3.35) obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\Phi(q_k)| = \sup_M |\Phi|. \quad (3.36)$$

Por outro lado, de (3.24) e (3.36), segue que

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(2mH)(q_k) \geq \sup_M |\Phi|^2 P_{\sup H, m, c} \left(\sup_M |\Phi| \right).$$

Logo, como M^{2m} é suposta ter duas curvaturas principais distintas, concluímos que

$$P_{\sup H, m, c} \left(\sup_M |\Phi| \right) \leq 0,$$

e conseqüentemente, levando em conta nossa restrição sobre H , de (3.25) obtemos

$$0 \leq \sup_M |\Phi|^2 \leq 2m(\sup_M H^2 - c) \leq 0.$$

Portanto, devemos ter $|\Phi|^2 = 0$ sobre M^{2m} chegando a uma contradição. ■

Retornando a caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço Weingarten lineares, temos

Teorema 3.3.6 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $b < \overline{\mathcal{R}}$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Suponha que $\frac{4p(n-p)c}{n^2} \leq H^2 < c$ e que*

$$|\Phi| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.37)$$

Se H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, igualdade ocorre em (3.37).

Demonstração. Das nossas restrições sobre H e $|\Phi|$ remetemo-nos a Observação 3.3.2 para garantir que $P_{H,p,c}(|\Phi|) \geq 0$ com $P_{H,p,c}(|\Phi|) = 0$ se, e somente se, a igualdade ocorre em (3.37). Agora procedendo como na prova do Teorema 3.3.3, concluímos que M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} com igualdade ocorrendo em (3.37). ■

De maneira similar a demonstração do Teorema 3.3.3, também obtemos o próximo resultado

Teorema 3.3.7 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $b < \overline{\mathcal{R}}$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$. Suponha que ou $H^2 > \frac{4p(n-p)c}{n^2}$ para $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, ou $H^2 \geq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$ para $1 \leq p < \frac{n}{2}$ e que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.38)$$

Se H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.38).

Como uma aplicação do Lema 3.2.4, obtemos o seguinte

Teorema 3.3.8 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $a \geq 0$, $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$. Suponha que ou $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ e $H^2 > \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, ou $1 \leq p < \frac{n}{2}$ e $H^2 \geq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, e que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p) \sup_M |H| + \sqrt{n^2(\sup_M H)^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.39)$$

Se H é limitada M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.39).

Demonstração. Aplicando o Lema 3.2.4 a função H , obtemos uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(q_k) = \sup_M H \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} L(H)(q_k) \leq 0.$$

Assim, da Proposição 3.3.1 temos

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH)(q_k) \geq \sup_M |\Phi|^2 P_{\sup H, p, c} \left(\sup_M |\Phi| \right). \quad (3.40)$$

Logo, uma vez que M^n é suposta ter duas curvaturas principais distinta, da desigualdade (3.40) concluimos que

$$P_{\sup H, p, c} \left(\sup_M |\Phi| \right) \leq 0.$$

Por outro lado, das nossas restrições sobre H e sobre $|\Phi|$, temos que $P_{H, p, c}(|\Phi|) \geq 0$, com $P_{H, p, c}(|\Phi|) = 0$ se, e somente se,

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right).$$

Consequentemente, da desigualdade (3.39) obtemos que

$$\sup_M |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p) \sup_M |H| + \sqrt{n^2(\sup_M H)^2 - 4p(n-p)c} \right)$$

e, levando em conta mais uma vez a nossa restrição sobre $|\Phi|$, temos que $|\Phi|$ é constante sobre M^n . Uma vez que L_1^{n+1} satisfaz a condição de curvatura (3.13) e M^n é uma hipersuperfície Weingarten linear tal que $R = aH + b$, obtemos da expressão (3.23),

que H é constante sobre M^n . A partir deste ponto, a prova procede como a prova do Teorema 3.3.3. ■

Finalmente, quando o parâmetro c é não-positivo, podemos raciocinar como antes para obter os seguintes resultados

Teorema 3.3.9 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14) com $c \leq 0$, tal que $R = aH + b$ com $b < \overline{\mathcal{R}}$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Suponha que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.41)$$

Se H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.41).

E,

Teorema 3.3.10 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço de Lorentz localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $a \geq 0$, $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Suponha que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p) \sup_M |H| + \sqrt{n^2 \sup_M H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.42)$$

Se H atinge seu máximo sobre M^n , então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.42).

3.3.1 Espaços-tempo de Einstein localmente simétricos

Esta seção tem como objetivo reproduzir os resultados da seção anterior para o contexto em que o espaço ambiente é um espaço-tempo de Einstein. Antes disso vejamos que, de modo análogo ao caso Riemanniano, temos

$$\operatorname{div}(P_1 \nabla f) = \langle \operatorname{div} P_1, \nabla f \rangle + \square f, \quad (3.43)$$

onde P_1 é a primeira transformação de Newton dada por $P_1 = A - nH$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Por outro lado, denotando por $\overline{R}$ e $\overline{\text{Ric}}$ são os tensores de curvatura e Ricci de L_1^{n+1} , respectivamente e por N a aplicação de Gauss de M^n , obtemos do Lema 3.1 de [21] que

$$\langle \text{div} P_1, \nabla f \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, e_i) e_i, \nabla f \rangle = - \overline{\text{Ric}}(N, \nabla f) = 0,$$

uma vez que L_1^{n+1} é suposta ser um espaço-tempo de Einstein.

Consequentemente, retornando a equação (3.43) concluimos que

$$\square f = \text{div}(P_1(\nabla H)),$$

ou seja, obtemos que o operador quadrado é uma divergência. Além disso, retornando ao operador L , temos

$$L(nH) = \text{div}(P(\nabla H)), \quad (3.44)$$

onde

$$P = nP_1 + \frac{n(n-1)}{2}aI. \quad (3.45)$$

Motivados pela discussão acima, vamos tratar o caso em que o espaço ambiente L_1^{n+1} , é um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14).

Assim, estamos em posição de demonstrar os nossos próximos resultados.

Teorema 3.3.11 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo espaço completa Weingarten linear imersa em L_1^{n+1} satisfazendo (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) > 0$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n-p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Se $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $H^2 \leq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, $|H| = \frac{2\sqrt{p(n-p)c}}{n}$ e $|\Phi| = \frac{(n-2p)\sqrt{c}}{\sqrt{n}}$.*

Demonstração. Uma vez que M^n é tal que $R = aH + b$ e H é limitada, segue que M^n tem curvatura escalar normalizada R é limitada. Por outro lado, como L_1^{n+1} satisfaz a condição de curvatura (3.13), segue que $\overline{\mathcal{R}}$ é constante e consequentemente por meio da equação (3.5), a segunda forma fundamental A de M^n é limitada. Logo, o operador P definido em (3.45) é também limitado e, como estamos assumindo que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, concluimos que

$$|P(\nabla H)| \leq |P||\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Assim, podemos usar o Lema 1.2.4 para garantir que $\operatorname{div}(P(\nabla H)) = 0$ sobre M^n e, portanto, da igualdade (3.44) obtemos $L(nH) = 0$ sobre M^n .

Por outro lado, da restrição $H^2 \leq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, temos que $P_{H,p,c}(|\Phi|) \geq 0$ e de (3.33) obtemos

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2 |\nabla H|^2. \quad (3.46)$$

Como assumimos que $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) > 0$, através do Lema 3.2.3 temos que H é constante sobre M^n e portanto, da igualdade (3.46), M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} , com $|H| = \frac{2\sqrt{p(n-p)c}}{n}$ e $|\Phi| = \frac{(n-2p)\sqrt{c}}{\sqrt{n}}$. ■

Com um raciocínio análogo ao feito na demonstração anterior, obtemos os próximos resultados.

Teorema 3.3.12 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo espaço completa Weingarten linear imersa em L_1^{n+1} satisfazendo (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) > 0$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n-p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Suponha que $\frac{4p(n-p)c}{n^2} \leq H^2 < c$, e*

$$|\Phi| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.47)$$

Se $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.47).

Teorema 3.3.13 *Sejam L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico e M^n uma hipersuperfície tipo espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo (3.13) e (3.14) com $c > 0$, tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) > 0$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n-p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Se $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$. Suponha que ou $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ e $H^2 > \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, ou $1 \leq p < \frac{n}{2}$ e $H^2 \geq \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, e que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right). \quad (3.48)$$

Se $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.48).

Assim como na Seção anterior, também contemplamos o caso em que o parâmetro c do espaço localmente simétrico é não negativo no contexto dos espaços-tempo de Einstein.

Teorema 3.3.14 *Seja L_1^{n+1} , $n \geq 3$, um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico e seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} satisfazendo (3.13) e (3.14) com $c \geq 0$, tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) > 0$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Se $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$ e*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right), \quad (3.49)$$

então M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de L_1^{n+1} . Além disso, a igualdade ocorre em (3.49).

Encerramos esta seção estabelecendo um resultado de não existência para hipersuperfícies fechadas.

Teorema 3.3.15 *Não existe hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear fechada imersa em um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico L_1^{n+1} , satisfazendo (3.13) e (3.14), tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$, possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, e $H^2 < \frac{4p(n-p)c}{n^2}$.*

Demonstração. Suponha por contradição, que exista M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear fechada imersa em um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico L_1^{n+1} satisfazendo (3.13) e (3.14). Uma vez que estamos assumindo que a desigualdade (3.17) é satisfeita, então podemos usar a Proposição 3.3.1.

Por um lado, da expressão (3.44) temos que o operador L é uma divergência. Assim, aplicando o Lema 1.2.1 a estimativa (3.24), obtemos

$$0 = \int_M \operatorname{div}(P(\nabla H)) dM = \int_M L(nH) dM \geq \int_M |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|) dM. \quad (3.50)$$

Por outro lado, da nossa hipótese, $H^2 < \frac{4p(n-p)c}{n^2}$, a Observação 3.3.2 garante nos que o polinômio $P_{H,p,c}(|\Phi|) > 0$. Logo, de (3.50) obtemos que $|\Phi|^2 = 0$ sobre M^n , ou seja, M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de L_1^{n+1} . Mas, levando em conta que M^n é suposta ter duas curvaturas principais distintas, chegamos a uma contradição. ■

Observação 3.3.16 *Veja que, a priori, não podemos aplicar a Proposição 1 de [31] no contexto do Teorema 3.3.15, mesmo sendo M^n uma hipersuperfície fechada. De fato, consideremos M^n uma variedade Riemanniana fechada e, seguindo a notação encontrada em [31], seja*

$$\varphi_{ij} = \left(\sum_k \phi_{kk} \right) \delta_{ij} - \phi_{ij}, \quad (3.51)$$

onde ϕ_{ij} é um tensor de Codazzi simétrico. Neste contexto, não é difícil verificar que $\sum_j \varphi_{ijj} = 0$. Portanto, do Teorema 1 de Cheng-Yau [31], temos que a igualdade (2.18) é satisfeita. Uma vez que ϕ é um tensor simétrico qualquer, façamos $\phi_{ij} = h_{ij}$ e observemos que (3.51) coincide com (2.16). Por outro lado, a equação de Codazzi (3.7) nos garante que o tensor h_{ij} é um tensor de Codazzi se apenas quando a variedade ambiente possuir curvatura seccional constante. Portanto, o operador quadrado definido a partir de (2.16) é auto-adjunto apenas quando o tensor h_{ij} for de Codazzi, ou seja, quando o espaço ambiente possuir curvatura seccional constante. Nesse sentido, vemos que a escolha do espaço ambiente ser uma variedade Einstein no Teorema 3.3.15 torna-se necessária.

3.3.2 Aplicações em formas espaciais

Como vimos na seção anterior, as formas espaciais Lorentzianas satisfazem as condições de curvatura (3.13) e (3.14) para $-\frac{c_1}{n} = c_2 = c$ e além disso, a constante $\bar{\mathcal{R}}$ é exatamente a curvatura seccional c . Dessa forma, todos os Lemas auxiliares bem como a Proposição 3.3.1 continuam válidas para as formas espaciais. Em toda essa seção, o parâmetro c indicará a curvatura seccional da forma espacial e que pode ser $\{-1, 0, 1\}$.

Teorema 3.3.17 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, $n \geq 3$, tal que $R = aH + b$, e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Suponha que $H^2 \leq \frac{4p(n-p)}{n^2}$. Se uma das seguintes condições é satisfeita*

(i) $b < 1$ e H atinge seu máximo sobre M^n ;

(ii) $(n - 1)a^2 + 4n(1 - b) > 0$ e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$,

então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(c_1) \times \mathbb{H}^p(c_2)$, com $c_1 = \frac{n - 2p}{n - p}$ e $c_2 = -\frac{n - 2p}{p}$.

Demonstração. Observe que em ambas as condições as restrições impostas sobre a e b , nos garante que o Lema 3.2.6 é válido. Como o ambiente possui curvatura seccional constante, $\bar{R}_{(n+1)ii(n+1)} = 0$. Dessa forma, com as devidas adaptações, podemos escrever

$$\begin{aligned} L(nH) &= |\nabla A|^2 - n^2 |\nabla H|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq |\Phi|^2 P_{H,p,1}(|\Phi|), \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde

$$P_{H,p,1}(x) = x^2 - \frac{n(n - 2p)}{\sqrt{np(n - p)}} |H|x - n(H^2 - 1). \quad (3.53)$$

Além disso, da nossa restrição sobre H , temos que $P_{H,p,1}(|\Phi|) \geq 0$ e consequentemente de (3.52) obtemos $L(nH) \geq 0$.

Neste momento, assumamos que o item (i) seja satisfeito. Uma vez que $b < 1$, o Lema 3.2.6 assegura-nos que o operador L é elíptico. Agora como H atinge o seu máximo sobre M^n , podemos aplicar o princípio do máximo forte de Hopf para concluir que H é constante. Retornando a (3.52), obtemos que todas as desigualdades obtidas nesta expressão são, em verdade, igualdades. Em particular a seguinte igualdade ocorre

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2 |\nabla H|^2 = 0,$$

e daí inferimos que M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Suponhamos agora que ocorre o item (ii), isto é, $(n-1)a^2 + 4n(1-b) > 0$ e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$ valem. Uma vez que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ possui curvatura seccional constante, temos que o operador $\square$ é uma divergência. Logo, não é difícil verificar que o operador L definido em (3.19) pode ser escrito como segue

$$L(nH) = \operatorname{div}_M(P(\nabla H)), \quad (3.54)$$

onde P está definido em (3.45).

Além disso, uma vez que $R = aH + b$ e H é limitada sobre M^n , da equação (3.5) temos que A é limitada sobre M^n . Consequentemente, o operador P definido em (3.45) é também limitado. Portanto, como também estamos assumindo que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, obtemos que

$$|P(\nabla H)| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Assim, levando em conta mais uma vez que $L(nH) \geq 0$, usamos o Lema 1.2.4 e obtemos que $L(nH) = 0$ sobre M^n . Logo, retornando a (3.52) temos

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = n^2 |\nabla H|^2.$$

Portanto, neste caso, o Lema 4.2.1 assegura-nos que H é constante. Consequentemente, também concluímos que M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Além disso, de (3.52) temos que $|\Phi|^2 P_{H,p,1}(|\Phi|) = 0$, mas como M^n é suposta ter duas curvaturas principais distintas, devemos ter $P_{H,p,1}(|\Phi|) = 0$. Logo, não podemos ter a desigualdade estrita na nossa hipótese sobre H^2 , e consequentemente (a menos

de escolha de orientação), $H = \frac{2\sqrt{p(n-p)}}{n}$. Assim, retornando a (3.31), com um cálculo simples e direto, verificamos que $|\Phi| = \frac{n-2p}{\sqrt{n}}$.

Por outro lado, como em ambos os casos constatamos que M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica e, por hipótese, possui duas curvaturas principais distintas. Neste ponto, usando o Teorema 1.1.2 concluímos que M^n deve ser isométrica a $\mathbb{S}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $k \in \{p, n-p\}$, $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$. Além disso, por uma mudança adequada do vetor normal, não é difícil ver que as curvaturas principais de $\mathbb{S}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2) \hookrightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ são dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = \sqrt{1-c_1} \quad \text{e} \quad \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = \sqrt{1-c_2}.$$

Consequentemente,

$$nH = (n-k)\sqrt{1-c_1} + k\sqrt{1-c_2} \quad (3.55)$$

e

$$|A|^2 = (n-k)(1-c_1) + k(1-c_2). \quad (3.56)$$

Assim, inserindo (3.55) e (3.56) em (3.5), e com uma manipulação algébrica simples temos

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4k(n-k)} \left((n-2k)H \pm \sqrt{n^2H^2 - 4k(n-k)} \right)^2.$$

Portanto, levando em conta mais uma vez que $H = \frac{2\sqrt{p(n-p)}}{n}$, M^n deve se isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(c_1) \times \mathbb{H}^p(c_2)$, com $c_1 = \frac{n-2p}{n-p}$ e $c_2 = -\frac{n-2p}{p}$. ■

Na sequência, estabelecemos o seguinte resultado de não existência

Teorema 3.3.18 *Não existe hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{S}_1^{2m+1}$, satisfazendo $R = aH + b$ com $(2m-1)a^2 + 8m(1-b) \geq 0$ e $a \geq 0$, possuindo duas curvaturas principais distintas com a mesma multiplicidade tal que $H^2 \leq 1$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista uma tal hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa M^{2m} com $H^2 \leq 1$. Nestas condições, podemos aplicar o Lema 4.2.3 a função H , para obter uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^{2m}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(q_k) = \sup_M H, \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} L(H)(q_k) \leq 0. \quad (3.57)$$

Sendo $R = aH + b$, usando (3.57) em (3.23), temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\Phi(q_k)| = \sup_M |\Phi|. \quad (3.58)$$

Assim, tomando o limite sobre k em (3.52), e levando em conta (3.57) e (3.58) obtemos

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(2mH)(q_k) \geq \sup_M |\Phi|^2 P_{\sup H, m, 1} \left(\sup_M |\Phi| \right).$$

Logo, uma vez que M^{2m} é suposta ter duas curvaturas principais distintas, concluímos que

$$P_{\sup H, m, 1} \left(\sup_M |\Phi| \right) \leq 0.$$

Consequentemente, tendo em conta a nossa restrição sobre H , de (3.53) obtemos

$$0 \leq \sup_M |\Phi|^2 \leq 2m(\sup_M H^2 - 1) \leq 0.$$

Portanto, devemos ter $|\Phi| = 0$ sobre M^{2m} o que é uma contradição. ■

A partir do Teorema 3.3.18 e da classificação das hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ devido a Montiel [70], também obtemos o seguinte

Corolário 3.3.19 *Seja M^2 uma superfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{S}_1^3$, tal que $R = aH + b$ com $a^2 + 8(1 - b) \geq 0$ e $a \geq 0$. Se $\sup_M H^2 \leq 1$, então M^2 é isométrica ou a $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{S}^2$, a menos de homotetias.*

Impondo uma limitação adequada na norma do operador sem traço, obtemos um outro teorema de caracterização no espaço de Sitter.

Teorema 3.3.20 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, $n \geq 3$, tal que $R = aH + b$, possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Suponha que $\frac{4p(n-p)}{n^2} \leq H^2 < 1$ e*

$$|\Phi| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right). \quad (3.59)$$

Se uma das seguintes condições é satisfeita

(i) $b < 1$ e H atinge um máximo sobre M^n ;

(ii) $(n-1)a^2 + 4n(1-b) > 0$, $b \neq 1$ e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$,

então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(c_1) \times \mathbb{H}^p(c_2)$, com $0 < c_1 < \frac{n(n-2p)}{(n-p)^2}$, $-\frac{n(n-2p)}{p^2} < c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$.

Demonstração. Das restrições impostas sobre H e $|\Phi|$, não é difícil verificar, a partir da Observação 3.3.2, que $P_{H,p,1}(|\Phi|) \geq 0$ para

$$|\Phi| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right),$$

com $P_{H,p,1}(|\Phi|) = 0$ se, e somente se,

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right).$$

Logo, de modo similar a prova do Teorema 3.3.17, concluímos que M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e, portanto, podemos aplicar o Teorema 5.1 de [1] para obter que M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $k \in \{p, n-p\}$, $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$. Além disso, levando em conta mais uma vez a nossa hipótese sobre H juntamente com a hipótese (3.59), da equação (3.55) obtemos que $k = p$, $0 < c_1 < \frac{n(n-2p)}{(n-p)^2}$ e $-\frac{n(n-2p)}{p^2} < c_2 < 0$. ■

Podemos raciocinar como na prova do Teorema 3.3.20 para também obter o seguinte

Teorema 3.3.21 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, $n \geq 3$, tal que $R = aH + b$ e possuindo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n-p$. Suponha que ou $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ e $H^2 > \frac{4p(n-p)}{n^2}$, ou $1 \leq p < \frac{n}{2}$ e $H^2 \geq \frac{4p(n-p)}{n^2}$, e que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p) \sup_M |H| + \sqrt{n^2 \sup_M H^2 - 4p(n-p)} \right).$$

Se uma das seguintes condições é satisfeita

(i) $(n-1)a^2 + 4n(1-b) \geq 0$, $a \geq 0$, $b \neq 1$ e H é limitada sobre M^n ;

(ii) $b < 1$ e H atinge o seu máximo sobre M^n ;

(iii) $(n-1)a^2 + 4n(1-b) > 0$, $b \neq 1$, H é limitada e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$,

então M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(c_1) \times \mathbb{H}^p(c_2)$, com $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 1$.

Demonstração. Vamos supor que a situação do item (i) ocorre. Neste caso, podemos aplicar o Lema 3.2.4 a função H , obtendo uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(q_k) = \sup_M H, \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} L(H)(q_k) \leq 0. \quad (3.60)$$

Assim, de (3.52) e (3.60) temos

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH)(q_k) \geq \sup_M |\Phi|^2 P_{\sup H, p, 1} \left(\sup_M |\Phi| \right). \quad (3.61)$$

Logo, como M^n é suposta ter duas curvaturas principais distintas, de (3.61) concluimos que

$$P_{\sup H, p, 1} \left(\sup_M |\Phi| \right) \leq 0. \quad (3.62)$$

Por outro lado, das nossas restrições sobre H e $|\Phi|$, não é difícil verificar que $P_{H, p, 1}(|\Phi|) \geq 0$, com $P_{H, p, 1}(|\Phi|) = 0$ se, e somente se,

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right).$$

Consequentemente de (3.62) obtemos que

$$\sup_M |\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p) \sup_M |H| + \sqrt{n^2 \sup_M H^2 - 4p(n-p)} \right)$$

e, tendo em conta mais uma vez a nossa restrição sobre $|\Phi|$, temos que $|\Phi|$ é constante sobre M^n . Assim, desde que M^n é uma hipersuperfície Weingarten linear, de (3.5) temos que H também é constante sobre M^n . Neste ponto, procedemos como na prova do Teorema 3.3.17.

Finalmente se ocorre ou o item (ii) ou (iii), podemos raciocinar de maneira análoga a prova do Teorema 3.3.17. ■

Encerramos esta seção contemplando os casos em que o espaço ambiente $L_1^{n+1}(c)$, ou é o espaço de Lorentz-Minkowski ou o espaço anti-de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$.

Teorema 3.3.22 *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em uma forma espacial Lorentziana $L_1^{n+1}(c)$ ($c = 0, -1$ e $n \geq 3$), tal que $R = aH + b$ e possuindo duas curvaturas principais distintas de multiplicidades p e $n-p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Suponha que*

$$|\Phi| \geq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)c} \right).$$

Se uma das seguintes condições é satisfeita

- (i) $(n-1)a^2 + 4n(c-b) \geq 0$, $a \geq 0$ e H é limitada sobre M^n ;
- (ii) $b < c$ e H atinge o máximo sobre M^n ;
- (iii) $(n-1)a^2 + 4n(c-b) > 0$, H é limitada e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$,

então M^n é isométrica a

(a) $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;

(b) $\mathbb{H}^{n-p}(c_1) \times \mathbb{H}^p(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = -1$, quando $c = -1$.

Demonstração. A demonstração procede de maneira análoga a feita no Teorema 3.3.21 a fim de assegurar que uma tal hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear e completa M^n deve ser uma hipersuperfície isoparamétrica de $L_1^{n+1}(c)$. Visto que M^n é suposta ter duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $n - p$, onde $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, usamos mais uma vez o Teorema 1.1.2 para concluir que M^n é isométrica a:

(a) $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;

(b) $\mathbb{H}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = -1$, quando $c = -1$,

onde $k \in \{p, n - p\}$.

Além disso, quando $c = 0$, por uma escolha adequada do campo normal, temos que as curvaturas principais de $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{H}^k(c_2) \hookrightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ são dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = \sqrt{-c_2}.$$

Assim,

$$nH = k\sqrt{-c_2} \tag{3.63}$$

e

$$|A|^2 = -kc_2. \tag{3.64}$$

Consequentemente, inserindo (3.63) e (3.64) em (3.31), com uma simples manipulação algébrica, obtemos

$$|\Phi|^2 = \frac{n(n-k)}{k} H^2. \tag{3.65}$$

Logo, tendo em conta a nossa hipótese (3.41), de (3.65) temos que M^n deve ser isométrica a $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(c_2)$, com $c_2 < 0$.

Finalmente, quando $c = -1$, por uma outra escolha do vetor normal, temos que as curvaturas principais de $\mathbb{H}^{n-k}(c_1) \times \mathbb{H}^k(c_2) \hookrightarrow \mathbb{H}_1^{n+1}$ são dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = \sqrt{-1 - c_1} \quad \text{e} \quad \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = -\sqrt{-1 - c_2}.$$

Assim,

$$nH = (n - k)\sqrt{-1 - c_1} - k\sqrt{-1 - c_2} \quad (3.66)$$

e

$$|A|^2 = (n - k)(-1 - c_1) + k(-1 - c_2). \quad (3.67)$$

Consequentemente, inserindo (3.66) e (3.67) em (3.31), obtemos

$$|\Phi|^2 = \frac{n}{4k(n - k)} \left((n - 2k)H + \sqrt{n^2 H^2 + 4k(n - k)} \right)^2. \quad (3.68)$$

Portanto, levando em conta mais uma vez a nossa hipótese (3.41), de (3.68) temos que M^n deve ser isométrica a $\mathbb{H}^{n-p}(c_1) \times \mathbb{H}^p(c_2)$, com $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = -1$. ■

3.4 Estudo de hipersuperfícies via curvatura escalar

No ano de 1997, Li [66], estudando a geometria de hipersuperfícies tipo-espaço fechadas imersas no espaço de Sitter, mostrou que uma hipersuperfície fechada com curvatura escalar normalizada constante R satisfazendo

$$\frac{n - 2}{n} \leq R \leq 1,$$

deve ser totalmente umbílica.

Neste mesmo trabalho, Li propôs um problema bastante interessante: *O resultado acima continuaria sendo verdade se trocassemos a compacidade de M^n pela sua completude?* Adicionando a hipótese do supremo da curvatura média de M^n ser atingido em algum ponto, o Caminha [26] respondeu afirmativamente. Logo depois, relaxando a hipótese sob a curvatura média, pedindo apenas que a mesma fosse limitada, Camargo, Chaves e Souza Jr. em [23] também mostraram que a mesma é verdadeira.

Assim, o objetivo desta seção é estudar a umbilicidade de hipersuperfícies Weingarten lineares imersas isometricamente em espaços Lorentzianos mais gerais, a saber, localmente simétricos que satisfazem duas condições em sua curvatura. Obtendo assim, resultados que estendem os resultados anunciados previamente para esse contexto. Antes disso, encontraremos uma limitação inferior para o operador L em termos da curvatura escalar.

Proposição 3.4.1 *Seja L_1^{n+1} um espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14). Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço*

Weingarten linear imersa em L_1^{n+1} tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$.
Então,

$$L(nH) \geq \frac{1}{n-1} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|), \quad (3.69)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_R(x) = & (n-2)x^2 - (n-2)x\sqrt{x^2 + n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - R)} \\ & + n(n-1)(c + R - \overline{\mathcal{R}}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

com $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2$.

Demonstração. Considere um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M^n tal que

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \phi_{ij} = \mu_i \delta_{ij},$$

Levando em conta as igualdades (2.40), (3.29) e as desigualdades (3.30), (3.18), a partir de (3.19) temos a seguinte estimativa

$$L(nH) \geq S^2 - nH \sum_i \lambda_i^3 + c_1 |\Phi|^2 + 2nc_2 |\Phi|^2. \quad (3.71)$$

Além disso, não é difícil verificar as seguintes relações algébricas

$$\sum_i \mu_i = 0, \quad \sum_i \mu_i^2 = |\Phi|^2 \quad \text{e} \quad \sum_i \mu_i^3 = \sum_i \lambda_i^3 - 3H |\Phi|^2 - nH^3. \quad (3.72)$$

Logo, do Lema 2.2.8 e das equações (2.36) e (3.72) temos

$$\begin{aligned} S^2 - nH \sum_i \lambda_i^3 &= (|\Phi|^2 - nH^2)^2 - nH \sum_i \mu_i^3 - 3nH^2 |\Phi|^2 - n^2 H^4 \\ &= |\Phi|^4 - nH^2 |\Phi|^2 - nH \sum_i \mu_i^3 \\ &\geq |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| - nH^2 \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Portanto, inserindo (3.73) em (3.71), temos que

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| - n(H^2 - c) \right), \quad (3.74)$$

onde $c = \frac{c_1}{n} + 2c_2$.

Agora, rescrevendo a equação (3.5) em termos do quadrado da curvatura média, obtemos

$$H^2 = \frac{1}{n(n-1)} |\Phi|^2 + \overline{\mathcal{R}} - R, \quad (3.75)$$

e, uma vez que estamos assumindo que $H > 0$ sobre M^n ,

$$H = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{|\Phi|^2 + n(n-1)(\overline{\mathcal{R}} - R)}. \quad (3.76)$$

Portanto, substituindo as equações (3.75) e (3.76) em (3.74), obtemos finalmente

$$L(nH) \geq \frac{1}{n-1} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|),$$

onde $Q_R(x)$ está definido em (3.70). ■

Agora, demonstraremos nosso primeiro resultado.

Teorema 3.4.2 *Seja L_1^{n+1} um espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14), com $n \geq 3$ e $c > 0$. Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} , tal que $R = aH + b$ com $b < \overline{\mathcal{R}}$. Se H atinge o máximo sobre M^n e $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$, então M^n é totalmente umbílica.*

Demonstração. Iniciamos esta demonstração afirmando que $Q_R(x) > 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$, onde Q_R está definido em (3.70). De fato, se existe um ponto x_0 tal que $Q_R(x_0) = 0$, um simples cálculo nos permite verificar que

$$x_0^2 = \frac{(n-1)(c + R - \overline{\mathcal{R}})^2}{(n-2)(\overline{\mathcal{R}} - R - \frac{2c}{n})}.$$

Assim,

$$\left(R - \overline{\mathcal{R}} + \frac{2c}{n}\right) x_0^2 = -\frac{(n-1)}{(n-2)} (c + R - \overline{\mathcal{R}})^2,$$

e isso contradiz a nossa suposição de que $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$.

Portanto, $Q_R(x) > 0$ ou $Q_R(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Mas, da nossa hipótese $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$, obtemos que $c + R - \overline{\mathcal{R}} > 0$, uma vez que $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n} > \overline{\mathcal{R}} - c$. Assim

$$Q_R(0) = n(n-1)(c + R - \overline{\mathcal{R}}) > 0$$

e, portanto temos provado a nossa afirmação.

Logo, de (3.69) temos

$$L(nH) \geq \frac{1}{n-1} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \geq 0. \quad (3.77)$$

Além disso, uma vez que estamos supondo que $b < \overline{\mathcal{R}}$, o Lema 3.2.6 assegura-nos que o operador L é elíptico. Consequentemente como também estamos assumindo que H atinge o máximo sobre M^n , de (3.77) podemos aplicar o Lema 1.2.10 para concluir que H é constante sobre M^n . Então, retornando a (3.77), obtemos que $|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) = 0$ e, portanto, $|\Phi|^2 = 0$. Isso mostra que M^n é totalmente umbílica. ■

Observação 3.4.3 No caso em que L_1^{n+1} é o espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$, temos que $-\frac{c_1}{n} = c_2 = c > 0$. Neste contexto, Caminha [25] provou que se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$, com curvatura escalar constante R satisfazendo

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)c < R < c$$

e curvatura média atingindo seu máximo, então M^n é totalmente umbílica. Neste sentido, observando que quando $a = 0$ o caso Weingarten linear reduz-se ao caso curvatura escalar normalizada constante e que nesta configuração as hipóteses $b < \overline{\mathcal{R}}$ e $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$ são equivalentes a $\frac{n-2}{n}c \leq R < c$, o Teorema 3.4.2 pode ser visto como uma extensão do Teorema 2 de [25].

Prosseguindo, também temos o seguinte resultado

Teorema 3.4.4 Seja L_1^{n+1} um espaço de Lorentz localmente simétrico satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14), com $n \geq 3$ e $c > 0$. Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em L_1^{n+1} , tal que $R = aH + b$ com $a \geq 0$ e $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$. Se H é limitada sobre M^n e $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$, então M^n é totalmente umbílica.

Demonstração. Vejamos que da equação (3.69) e da nossa hipótese $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$, temos

$$L(nH) \geq \frac{1}{n-1}|\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \geq 0. \quad (3.78)$$

Por um lado, sendo H é limitada sobre M^n e $a \leq 0$, podemos aplicar o Lema 3.2.4 para garantir a existência uma sequência de pontos $\{q_k\}_k \subset M^n$ satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (nH)(q_k) = \sup_M nH \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH)(q_k) \leq 0. \quad (3.79)$$

Mas, por outro lado, de (3.79) e da expressão (3.5) obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|^2(q_k) = \sup_M |\Phi|^2. \quad (3.80)$$

Agora, avaliando (3.78) em $\{q_k\}_k$, e tomando o limite em k , das (des)igualdades (3.79) e (3.80) temos que

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH)(q_k) \geq \frac{1}{n-1} \sup_M |\Phi|^2 Q_{\sup R} \left(\sup_M |\Phi| \right) \geq 0.$$

Logo,

$$\left(\sup_M |\Phi|^2 \right) Q_{\sup R} \left(\sup_M |\Phi| \right) = 0,$$

e portanto, $\sup_M |\Phi|^2 = 0$, mostrando que M^n é totalmente umbílica. ■

Observação 3.4.5 *Analogamente a Observação 3.4.3, vemos que o Teorema 3.4.4 pode ser considerado como uma extensão do Teorema 1.1 de [23].*

No contexto em que L_1^{n+1} é um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico, apresentamos o nosso último resultado.

Teorema 3.4.6 *Seja L_1^{n+1} um espaço-tempo de Einstein localmente simétrico satisfazendo as condições de curvatura (3.13) e (3.14), com $n \geq 3$ e $c > 0$. Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço Weingarten completa linear imersa em L_1^{n+1} , tal que $R = aH + b$ com $(n-1)a^2 - 4n(b - \overline{\mathcal{R}}) \geq 0$. Se H é limitada sobre M^n , $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$, então M^n é totalmente umbílica.*

Demonstração. Uma vez que L_1^{n+1} um espaço localmente simétrico que satisfaz a condição de curvatura (3.13), temos que $\overline{\mathcal{R}}$ é constante. Por outro lado, sendo H limitada sobre M^n , segue da equação (3.5) que a segunda forma fundamental A de M^n é limitada. Consequentemente, o operador P definido em (3.45) é também limitado. Como estamos assumindo que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, temos

$$|P(\nabla H)| \leq |P||\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Assim, o Lema 1.2.4 garante-nos que $\operatorname{div}(P(\nabla H)) = 0$ sobre M^n e portanto, de (3.54) obtemos $L(nH) = 0$ sobre M^n .

Uma vez que $R \geq \overline{\mathcal{R}} - \frac{2c}{n}$, temos que $Q_R(|\Phi|) > 0$ e de (3.69) obtemos

$$0 = L(nH) \geq \frac{1}{n-1} |\Phi|^2 Q_R(|\Phi|) \geq 0,$$

concluindo que $|\Phi|^2 = 0$ sobre M^n , ou seja, M^n é totalmente umbílica. ■

Capítulo 4

Caracterizações de cilindros hiperbólicos

Neste capítulo, vamos apresentar os resultados referente ao artigo [41]. Na primeira parte, considerando o vetor curvatura média normalizado, apresentamos uma fórmula do tipo Simons para subvariedades tipo-espaço imersas em ambientes com curvatura seccional constante. Logo em seguida, arrolaremos alguns resultados concernentes a subvariedades tipo-espaço Weingarten lineares que auxiliarão no desenvolvimento dos nossos teoremas. Feito isso, partimos em busca dos nossos resultados, iniciamos estabelecemos uma estimativa inferior para o operador L agindo na função curvatura média (cf. Proposição 4.3.1). Em seguida, usando um princípio do máximo do tipo-Omori estabelecemos o nosso primeiro resultado de caracterização (cf. Teorema 4.3.4 e Corolário 4.3.6). Finalizamos este capítulo reobtendo os resultados anteriores utilizando a integrabilidade do gradiente do vetor curvatura média (cf. Teorema 4.3.7 e Corolário 4.3.8).

4.1 Preliminares

Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço conexa de dimensão n imersa isometricamente em uma forma espacial semi-Riemanniana $L_p^{n+p}(c)$, com curvatura seccional constante c . Escolhamos um referencial ortonormal semi-Riemanniano local adaptado $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ sobre $L_p^{n+p}(c)$, com co-referencial dual $\{\omega_1, \dots, \omega_{n+p}\}$ tal que, em cada

ponto de M^n , $e_1, \dots, e_n$ são tangentes a M^n . No que segue, assim como nos capítulos anteriores, usaremos a seguinte convenção de índices:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+p, \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n \quad \text{e} \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n+p.$$

Nesta configuração, a métrica Lorentziana de $L_p^{n+p}(c)$ é dada por

$$ds^2 = \sum_A \epsilon_A \omega_A^2,$$

onde $\epsilon_i = 1$ e $\epsilon_\alpha = -1$, $1 \leq i \leq n+1$, $n+1 \leq \alpha \leq n+p$. Denotando por $\{\omega_{AB}\}$ as formas de conexão de $L_p^{n+p}(c)$, temos que as equações de estrutura de $L_p^{n+p}(c)$ são dadas por:

$$d\omega_A = \sum_B \epsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad (4.1)$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \epsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \epsilon_C \epsilon_D K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \quad (4.2)$$

onde

$$K_{ABCD} = c\epsilon_A \epsilon_B (\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC}).$$

O próximo passo é restringir todos os tensores a M^n , e assim,

$$\omega_\alpha = 0, \quad n+1 \leq \alpha \leq n+p.$$

Logo, a métrica Riemanniana de M^n é escrita como $ds^2 = \sum_i \omega_i^2$. Sendo $\sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i = d\omega_\alpha = 0$, pelo Lema de Cartan podemos escrever

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \quad (4.3)$$

Isto dá a segunda forma fundamental de M^n , $A = \sum_{\alpha, i, j} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j e_\alpha$. Além disso, definimos o vetor curvatura média h e a função curvatura média de M^n , respectivamente por $h = \frac{1}{n} \sum_\alpha (\sum_i h_{ii}^\alpha) e_\alpha$ e $H = |h| = \sqrt{\sum_\alpha (\sum_i h_{ii}^\alpha)^2}$.

Neste momento introduziremos a seguinte definição

Definição 4.1.1 Se $\nabla^\perp$ denota a conexão de Levi-Civita do fibrado normal de M^n , dizemos que o vetor curvatura média h é paralelo quando para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se $\nabla_X^\perp h = 0$.

Com respeito a definição acima, a seguinte observação torna-se bastante usual

Observação 4.1.2 *Se o vetor curvatura média h é paralelo, então H é constante. De fato, considere a função $f = \langle h, h \rangle$ definida sobre M^n . Note que f é suave e que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que*

$$X(f) = X\langle h, h \rangle = 2\langle \nabla_X^\perp h, h \rangle = 0$$

uma vez que h é paralelo. Logo f é constante e, consequentemente, $|h| = H$ é constante.

Retornando ao contexto anterior, por meio das equações de estrutura (4.1) e (4.2), escrevemos as equações de estrutura de M^n que são divididas em parte tangente

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned}$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M^n e satisfaz a *equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - \sum_{\alpha} (h_{ik}^{\alpha} h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha}), \quad (4.4)$$

e, parte normal

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha} &= - \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_{\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0, \\ d\omega_{\alpha\beta} &= - \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{\alpha\beta kl} \omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $R_{\alpha\beta jk}$ satisfaz a equação de Ricci

$$R_{\alpha\beta jk} = \sum_l \left(h_{il}^{\beta} h_{lj}^{\alpha} - h_{jl}^{\alpha} h_{li}^{\beta} \right). \quad (4.6)$$

A curvatura de Ricci e a curvatura escalar de M^n são dadas, respectivamente, por

$$R_{ij} = c(n-1)\delta_{ij} - \sum_{\alpha} \left(\sum_k h_{kk}^{\alpha} \right) h_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,k} h_{ik}^{\alpha} h_{kj}^{\alpha} \quad (4.7)$$

e

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i R_{ii}. \quad (4.8)$$

Juntado as equações (4.7) e (4.8) obtemos a seguinte relação fundamental

$$|A|^2 = n^2 H^2 + n(n-1)(R - c), \quad (4.9)$$

onde $|A|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2$ denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental A de M^n .

As componentes h_{ijk}^α da derivada covariante ∇A satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}^\alpha \omega_k = dh_{ij}^\alpha + \sum_k h_{ik}^\alpha \omega_{kj} + \sum_k h_{jk}^\alpha \omega_{ki} - \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_{\beta\alpha}. \quad (4.10)$$

Nesta configuração, de (4.3) e (4.10) obtemos a *equação de Codazzi*

$$h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha = h_{kij}^\alpha. \quad (4.11)$$

A primeira e segunda derivada covariante de h_{ij}^α denotadas por h_{ijk}^α e h_{ijkl}^α , respectivamente, satisfazem

$$\sum_l h_{ijkl}^\alpha \omega_l = dh_{ijk}^\alpha + \sum_l h_{ljk}^\alpha \omega_{li} + \sum_l h_{ilk}^\alpha \omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}^\alpha \omega_{lk} - \sum_\beta h_{ijk}^\beta \omega_{\beta\alpha}. \quad (4.12)$$

Assim, tomando a derivada exterior em (4.10), obtemos a *identidade de Ricci*

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ijl}^\alpha = \sum_m h_{mj}^\alpha R_{mikl} + \sum_m h_{im}^\alpha R_{mjkl} + \sum_{k,\beta} h_{ik}^\beta R_{\alpha\beta jk}. \quad (4.13)$$

O Laplaciano Δh_{ij}^α de h_{ij}^α é definido por $\Delta h_{ij}^\alpha = \sum_k h_{ijk}^\alpha$. Das equações (4.11) e (4.13), obtemos que

$$\Delta h_{ij}^\alpha = \sum_k h_{kij}^\alpha + \sum_{k,l} h_{kl}^\alpha R_{lij} + \sum_{k,l} h_{li}^\alpha R_{lkjk} + \sum_{k,\beta} h_{ik}^\beta R_{\alpha\beta jk}. \quad (4.14)$$

No que segue, consideraremos o caso em que $H > 0$. Assim, escolhemos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ tal que $e_{n+1} = \frac{h}{H}$. Assim,

$$H^{n+1} = \frac{1}{n} \text{tr}(h^{n+1}) = H \quad \text{e} \quad H^\alpha = \frac{1}{n} \text{tr}(h^\alpha) = 0, \quad \alpha \geq n+2, \quad (4.15)$$

e portanto das equações (4.4), (4.6), (4.14) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij}^\alpha &= nH_{ij}^\alpha + cnh_{ij}^\alpha - cnH^\alpha \delta_{ij} + \sum_{\beta,k,m} h_{km}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta - 2 \sum_{\beta,k,m} h_{km}^\alpha h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta \\ &\quad + \sum_{\beta,k,m} h_{mi}^\alpha h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta - nH \sum_m h_{mi}^\alpha h_{mj}^{n+1} + \sum_{\beta,k,m} h_{jm}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ki}^\beta, \end{aligned} \quad (4.16)$$

para todo $n+1 \leq \alpha \leq n+p$.

Sendo

$$\Delta |A|^2 = 2 \left(\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha + \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 \right), \quad (4.17)$$

inserimos (4.16) em (4.17), e obtemos a seguinte fórmula do tipo Simons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|A|^2 = & \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha H_{ij}^\alpha + nc(|A|^2 - nH^2) + \sum_{\alpha,\beta} (\text{tr}(h^\alpha h^\beta))^2 \\ & - nH \sum_{\alpha} \text{tr}(h^{n+1}(h^\alpha)^2) + \sum_{\alpha,\beta} N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha), \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $N(B) = \text{tr}(BB^t)$, para toda matriz $B = (b_{ij})$, sendo B^t sua transposta.

Encerramos esta seção com a seguinte observação relacionada a função $N(B)$.

Observação 4.1.3 *Se $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes $n \times n$ sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$, então $N(B) = \text{tr}(BB^t) \geq 0$, para todo $B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Com efeito, observemos que um elemento genérico da matriz BB^t é dado por $(BB^t)_{ij} = \sum_k b_{ik}b_{kj}^t$. Assim, uma vez que $b_{ij} = b_{ji}^t$, temos a seguinte sequência de igualdades*

$$N(B) = \text{tr}(BB^t) = \sum_i (BB^t)_{ii} = \sum_{i,k} b_{ik}b_{ki}^t = \sum_{i,k} (b_{ik})^2 \geq 0.$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, $B = 0$.

4.2 Resultados auxiliares

Nesta seção apresentaremos alguns lemas que auxiliarão na obtenção dos nossos resultados. Resultados estes, que correspondem a versão (para codimensão alta) dos resultados estabelecidos em hipersuperfícies. A demonstração dos mesmos serão omitidas uma vez que podem ser obtidas de modo similar as encontradas nos capítulos anteriores.

Lema 4.2.1 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço Weingarten linear imersa em uma forma espacial semi-Riemannian $L_p^{n+p}(c)$, tal que $R = aH + b$ para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que*

$$(n-1)a^2 + 4n(c-b) \geq 0. \quad (4.19)$$

Então,

$$|\nabla A|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 \geq n^2 |\nabla H|^2. \quad (4.20)$$

Além disso, se a desigualdade (4.19) é estrita e vale a igualdade em (4.20) sobre M^n , então H é constante sobre M^n .

De maneira similar a feita no estudo de hipersuperfícies, considere o seguinte tensor simétrico $\Psi = \sum_{i,j=1}^n \psi_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ sobre M^n definido por

$$\psi_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1}.$$

Nesta configuração, introduzimos um operador $\square$ associado a Ψ atuando sobre qualquer função suave f , da seguinte maneira

$$\square f = \sum_{i,j=1}^n \psi_{ij} f_{ij} = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}^{n+1}) f_{ij}, \quad (4.21)$$

onde f_{ij} denota das componentes do Hessiano de f . Assim, ao tomarmos $f = nH$ em (4.21), obtemos

$$\square(nH) = nH\Delta(nH) - n \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} H_{ij}. \quad (4.22)$$

Por outro lado, das equações (4.9) e (4.22) e da relação

$$\frac{1}{2}\Delta(nH)^2 = nH\Delta(nH) + n^2|\nabla H|^2$$

escrevemos

$$\square(nH) = \frac{1}{2}\Delta|A|^2 - \frac{n(n-1)}{2}\Delta R - n^2|\nabla H|^2 - n \sum_{ij} h_{ij}^{n+1} H_{ij}. \quad (4.23)$$

Sendo M^n uma subvariedade Weingarten linear tal que $R = aH + b$, temos das equações (4.18) e (4.23) que

$$\begin{aligned} \square(nH) &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} H_{ij}^{n+1} - n \sum_{ij} h_{ij}^{n+1} H_{ij} - n^2|\nabla H|^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta} N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha) + nc(|A|^2 - nH^2) + n \sum_{\alpha>n+1} \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha H_{ij}^\alpha \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta} (\text{tr}(h^\alpha h^\beta))^2 - \frac{n-1}{2}a\Delta(nH). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Doravante, M^n será sempre considerada uma subvariedade tipo-espaço de $L_p^{n+p}(c)$ que possui *vetor curvatura média normalizado paralelo*. Neste contexto, a equação (4.24) pode ser reescrita de uma maneira mais simples. Para isto, escolha $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ um referencial ortonormal local sobre M^n tal que $e_{n+1} = \frac{h}{H}$. Uma vez que e_{n+1} é paralelo, segue que

$$0 = \nabla_X^\perp e_{n+1} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha n+1}(X) e_{\alpha}, \quad (4.25)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, de (4.25) concluímos que

$$\omega_{\alpha n+1} = 0, \quad \text{para todo } \alpha > n+1. \quad (4.26)$$

Por outro lado, fazendo $i = j$ na equação (4.10), temos

$$\sum_{i,k} h_{iik}^\alpha \omega_k = \sum_i dh_{ii}^\alpha + 2 \sum_{i,k} h_{ik}^\alpha \omega_{ki} - \sum_{i,\beta} h_{ii}^\beta \omega_{\beta\alpha}. \quad (4.27)$$

Logo ao considerarmos $\alpha = n + 1$, de (4.26) e (4.27) segue que

$$\sum_k H_k^{n+1} \omega_k = dH. \quad (4.28)$$

Neste ponto, relembremos que, dada uma função suave f sobre M^n , a primeira e segunda derivadas f_i e f_{ij} são dadas por

$$df = \sum_i f_i \omega_i \quad \text{e} \quad \sum_j f_{ij} \omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}. \quad (4.29)$$

Assim, fazendo $f = H$ na primeira equação de (4.29) e comparando a mesma com (4.28) devemos ter $H_k = H_k^{n+1}$. Quando $\alpha > n + 1$, recorde que $H^\alpha = 0$. Daí, as equações (4.26) e (4.27) garante-nos que $\sum_k H_k^\alpha \omega_k = -H \omega_{n+1\alpha} = 0$ e, portanto, $H_k^\alpha = 0$.

Passemos agora a analisar o que acontece com a derivada covariante H_{kl}^α . Tomando $i = j$ na identidade (4.12) escrevemos

$$\sum_{i,l} h_{iikl}^\alpha \omega_l = \sum_i dh_{iik}^\alpha + 2 \sum_{i,l} h_{ikl}^\alpha \omega_l + \sum_{i,l} h_{iil}^\alpha \omega_{lk} - \sum_{i,\beta} h_{iik}^\beta \omega_{\beta\alpha}. \quad (4.30)$$

Por meio das equações (4.26) e (4.30) também temos

$$\sum_l H_{kl}^{n+1} \omega_l = dH_k + \sum_l H_l \omega_{lk}. \quad (4.31)$$

Considerando novamente $f = H$ na segunda equação de (4.29), quando comparamos com a equação (4.31) obtemos $H_{kl} = H_{kl}^{n+1}$. Além disso, no caso em que $\alpha > n + 1$, de (4.26) e (4.30) temos

$$\sum_l H_{kl}^\alpha \omega_l = -H_k \omega_{n+1\alpha} = 0,$$

de onde comprovamos que $H_{kl}^\alpha = 0$.

Como um sub-produto da prévia digressão, substituindo $H_{kl} = H_{kl}^{n+1}$ e $H_{kl}^\alpha = 0$ para $\alpha > n + 1$ em (4.24), e escrevendo a mesma em termos da definição (3.19), ultimamos que

$$\begin{aligned} L(nH) &:= \square(nH) + \frac{n-1}{2} a \Delta(nH) \\ &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 - n^2 |\nabla H|^2 - nH \sum_\alpha \text{tr}(h^{n+1}(h^\alpha)^2) \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta} N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha) + \sum_{\alpha,\beta} (\text{tr}(h^\alpha h^\beta))^2 \\ &\quad + nc(|A|^2 - nH^2). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Observação 4.2.2 *A suposição acerca do vetor curvatura média normalizado paralelo foi introduzido pela primeira vez por Chen em [30]. A esse respeito, temos que sub-variedades com vetor curvatura média paralelo não-nulo também têm vetor curvatura média normalizado paralelo, ocorrendo a equivalência apenas no caso em que a função H é constante. Por outro lado, a condição para ter vetor curvatura média normalizado paralelo é muito mais fraca que ter vetor curvatura média paralelo. Por exemplo, toda hipersuperfície imersa em uma variedade semi-Riemanniana sempre tem vetor curvatura média normalizado paralelo.*

Prosseguindo, o próximo resultado garante-nos a existência de uma sequência do tipo Omori relacionada ao operador L . Este resultado pode ser obtido de maneira análoga ao Lema 2.5.5 do Capítulo 2.

Lema 4.2.3 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em uma forma espacial semi-Riemanniana $L_p^{n+p}(c)$, tal que $R = aH + b$, com $a \geq 0$ e $(n-1)a^2 + 4n(c-b) \geq 0$. Se H é limitado sobre M^n , então existe uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que*

$$(i) \lim_{k \rightarrow +\infty} H(q_k) = \sup_M H, \quad (ii) \lim_{k \rightarrow +\infty} |\nabla H(q_k)| = 0, \quad (iii) \limsup_{k \rightarrow \infty} L(H(q_k)) \leq 0.$$

Finalizamos esta seção citando o Lema, cuja prova é inteiramente algébrica e pode ser encontrada em [84].

Lema 4.2.4 *Sejam $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações lineares e simétricas tais que $AB = BA$ e $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$. Então*

$$|\text{tr}(A^2 B)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} N(A) \sqrt{N(B)}. \quad (4.33)$$

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $(n-1)$ dos autovalores x_i de A e os correspondentes autovalores y_i de B satisfazem

$$|x_i| = \sqrt{\frac{N(A)}{n(n-1)}}, \quad x_i y_i \geq 0 \quad e \quad y_i = \sqrt{\frac{N(B)}{n(n-1)}} \left(\text{resp.} - \sqrt{\frac{N(B)}{n(n-1)}} \right).$$

Observe que a desigualdade (4.33), pode ser considerada como uma generalização do Lema de Okumura (cf. Lema 2.2.8), o qual é bastante utilizado na obtenção de resultados concernente ao estudo de hipersuperfícies.

4.3 Resultados de caracterização

Considere o seguinte tensor simétrico

$$\Phi = \sum_{\alpha, i, j} \Phi_{ij}^{\alpha} \omega_i \omega_j e_{\alpha},$$

onde $\Phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha} \delta_{ij}$ com H^{α} está definido em (4.15).

Seja $|\Phi|^2 = \sum_{\alpha, i, j} (\Phi_{ij}^{\alpha})^2$ o quadrado da norma do operador Φ . De maneira inteiramente análoga ao caso de hipersuperfícies, não há dificuldades em verificar que Φ tem traço zero e é auto-adjunto. Além do mais, de (4.9), temos a seguinte relação

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2 = n(n-1)H^2 + n(n-1)(R-c). \quad (4.34)$$

No próximo resultado estabeleceremos uma limitação inferior para o operador L atuando sobre a função curvatura média de uma subvariedade tipo-espaço Weingarten linear.

Proposição 4.3.1 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço Weingarten linear em uma forma espacial semi-Riemanniana $L_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média normalizado paralelo. Se M^n é tal que $R = aH + b$, com $(n-1)a^2 + 4n(c-b) \geq 0$, então*

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 P_{H,p,c}(|\Phi|), \quad (4.35)$$

onde

$$P_{H,p,c}(x) = \frac{x^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2 - c). \quad (4.36)$$

Demonstração. Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço com vetor curvatura média normalizado paralelo. Através da equação (4.26) constatamos que $\omega_{n+1\alpha} = 0$, para todo $\alpha > n+1$. Por outro lado, da identidade (4.5), segue que $R_{n+1\alpha ij} = 0$, para todo α, i, j . Logo, da equação de Ricci (4.6), temos que

$$h^{n+1}h^{\alpha} - h^{\alpha}h^{n+1} = 0$$

o que implica que a matriz h^{n+1} comuta com todas matrizes h^{α} para todo α . Sendo $\Phi^{\alpha} = (\Phi_{ij}^{\alpha})$, temos que $\Phi^{\alpha} = h^{\alpha} - H^{\alpha}$ e, portanto,

$$\Phi^{n+1} = h^{n+1} - H^{n+1} \quad \text{e} \quad \Phi^{\alpha} = h^{\alpha}, \quad (4.37)$$

uma vez que $H^{\alpha} = 0$ para $\alpha > n+1$. Dessas observações, temos que a matriz Φ^{n+1} comuta com todas as matrizes Φ^{α} . Por fim, sendo a matriz Φ^{α} sem traço e simétrica,

pois as matrizes h^α são simétricas, podemos usar o Lema 4.2.4, tomando $A = \Phi^\alpha$ e $B = \Phi^{n+1}$, a fim de obter

$$|\text{tr}((\Phi^\alpha)^2 \Phi^{n+1})| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} N(\Phi^\alpha) \sqrt{N(\Phi^{n+1})}. \quad (4.38)$$

Por um lado, com um cálculo simples e direto garantimos que

$$\begin{aligned} -nH \sum_{\alpha} \text{tr} [h^{n+1}(h^\alpha)^2] + \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(h^\alpha h^\beta)]^2 &= -nH \sum_{\alpha} \text{tr} [\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2] \\ &\quad -nH^2 |\Phi|^2 + \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^\beta)]^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Tomando a soma em α na desigualdade (4.38), temos

$$-\sum_{\alpha} \text{tr}((\Phi^\alpha)^2 \Phi^{n+1}) \geq -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{\alpha} N(\Phi^\alpha) \sqrt{N(\Phi^{n+1})}. \quad (4.40)$$

Inserindo as relações

$$N(\Phi^{n+1}) = \text{tr}(\Phi^{n+1})^2 \leq |\Phi|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{\alpha} N(\Phi^\alpha) = |\Phi|^2$$

na desigualdade (4.40), obtemos

$$-nH \sum_{\alpha} \text{tr}(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2) \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi|^3. \quad (4.41)$$

Ademais, pela Observação 4.1.3, temos

$$N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha) = N(\Phi^\alpha \Phi^\beta - \Phi^\beta \Phi^\alpha) \geq 0. \quad (4.42)$$

Por intermédio da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} p \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^\beta)]^2 &\geq p \sum_{\alpha} [\text{tr}(\Phi^\alpha)^2]^2 = p \sum_{\alpha} [N(\Phi^\alpha)]^2 \\ &\geq \left(\sum_{\alpha} N(\Phi^\alpha) \right)^2 = |\Phi|^4. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da hipótese (4.19), vemos que o Lema 4.2.1 vale, isto é

$$|\nabla A|^2 = \sum_{\alpha, i, j, k} (h_{ijk}^\alpha)^2 \geq n^2 |\nabla H|^2. \quad (4.44)$$

Portanto, implementando em (4.32) as expressões (4.41), (4.39), (4.42), (4.43) e (4.44), obtemos

$$L(nH) \geq |\Phi|^2 \left(\frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} |\Phi| H - n(H^2 - c) \right).$$

■

Observação 4.3.2 *Note que, no caso $p = 1$, o polinômio definido em (4.38) coincide com o polinômio encontrado em (3.74) para o caso de hipersuperfícies (veja também o Teorema 1.2 de [21]).*

Uma outra observação é a seguinte

Observação 4.3.3 *Quando $c > 0$, se $H^2 \geq \frac{4(n-1)c}{Q(p)}$, onde*

$$Q(p) = (n-2)^2 p + 4(n-1),$$

então o polinômio $P_{H,p,c}$ definido em (4.38) possui (pelo menos) uma raiz real positiva dada por

$$C(n, p, H) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left(p(n-2)H + \sqrt{pQ(p)H^2 - 4p(n-1)c} \right).$$

Por outro lado, no caso em que $c \leq 0$, o mesmo ocorre sem qualquer restrição sobre os valores da função curvatura média H .

Agora, estamos em condições de provar o nosso primeiro teorema.

Teorema 4.3.4 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em uma forma espacial semi-Riemanniana $L_p^{n+p}(c)$, com vetor curvatura média normalizado paralelo, tal que $R = aH + b$ com $a \geq 0$ e $(n-1)a^2 + 4n(c-b) \geq 0$. Quando $c > 0$, assuma em adição que $H^2 \geq \frac{4(n-1)c}{Q(p)}$. Se H é limitado sobre M^n e $|\Phi| \geq C(n, p, \sup H)$, então $p = 1$ e M^n é isométrica a*

- (a) $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;
- (b) $\mathbb{S}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c > 0$;
- (c) $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c < 0$.

Demonstração. Uma vez que estamos assumindo que $a \geq 0$ e que a desigualdade (4.19) ocorre, estamos em condições de aplicar o Lema 4.2.3 a função nH a fim de obter uma sequência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} nH(q_k) = \sup_M nH \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} L(nH)(q_k) \leq 0. \quad (4.45)$$

Assim, avaliando (4.38) em q_k e tomando o limite sobre k , temos de (4.45) que

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} L(nH)(q_k) \geq \sup_M |\Phi|^2 P_{\sup H, p, c} \left(\sup_M |\Phi| \right). \quad (4.46)$$

Por outro lado, da nossa restrição imposta sob $|\Phi|$ temos a garantia que $\sup_M |\Phi|^2 > 0$ e, portanto, de (4.46) concluimos que

$$P_{\sup H, p, c} \left(\sup_M |\Phi| \right) \leq 0. \quad (4.47)$$

Suponha, inicialmente o caso $c > 0$. Das restrições impostas sobre H e $|\Phi|$, temos que $P_{H, p, c}(|\Phi|) \geq 0$, com $P_{H, p, c}(|\Phi|) = 0$ se, e somente se, $|\Phi| = C(n, p, H)$. Consequentemente, de (4.47) obtemos

$$\sup_M |\Phi| = C(n, p, \sup H).$$

Levando em conta mais uma vez a nossa restrição sobre $|\Phi|$, temos

$$C(n, p, \sup H) \leq |\Phi| \leq \sup_M |\Phi| = C(n, p, \sup H)$$

e, portanto, $|\Phi|$ é uma constante sobre M^n . Assim, sendo M^n uma subvariedade Weingarten linear tal que $R = aH + b$, de (4.34) temos que H é também constante sobre M^n . Portanto, de (4.39) obtemos

$$0 = L(nH) \geq |\Phi|^2 P_{H, p, c}(|\Phi|) \geq 0. \quad (4.48)$$

Desde que $|\Phi| > 0$, devemos ter $P_{H, p, c}(|\Phi|) = 0$. Assim, todas as desigualdades obtidas ao longo da prova da Proposição 4.3.1 são, de fato, igualdades. Em particular, da desigualdade (4.41) concluimos que

$$\text{tr}(\Phi^{n+1})^2 = |\Phi|^2.$$

Assim, de (4.34) obtemos

$$\text{tr}(\Phi^{n+1})^2 = |\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2. \quad (4.49)$$

Por outro lado, da igualdade (4.37), temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Phi^{n+1})^2 + \sum_{\alpha > n+1} \sum_{i, j} (h_{ij}^\alpha)^2 &= \sum_{i, j} (h_{ij}^{n+1} - H\delta_{ij})^2 + \sum_{\alpha > n+1} \sum_{i, j} (h_{ij}^\alpha)^2 \\ &= \sum_{i, j} (h_{ij}^{n+1})^2 - nH^2 + \sum_{\alpha > n+1} \sum_{i, j} (h_{ij}^\alpha)^2 \\ &= |A|^2 - nH^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Logo, de (4.49) e (4.50) concluimos que $\sum_{\alpha > n+1} \sum_{i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 = 0$. Mas, quando olhamos a desigualdade (4.43) temos que

$$\begin{aligned} |\Phi|^4 &= p \sum_{\alpha \geq n+1} [N(\Phi^\alpha)]^2 = p \sum_{\alpha > n+1} [N(\Phi^\alpha)]^2 + pN(\Phi^{n+1})^2 \\ &= \sum_{\alpha > n+1} \sum_{i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 + pN(\Phi^{n+1})^2 = p|\Phi|^4. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Portanto, uma vez que $|\Phi| > 0$, devemos ter que $p = 1$.

Nesta configuração, de (4.44) e (4.51) obtemos

$$\sum_{i,j,k} (h_{ijk}^{n+1})^2 = n^2 |\nabla H|^2 = 0,$$

isto é, $h_{ijk}^{n+1} = 0$ para todo i, j e, portanto, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{Q}_1^{n+1}(c)$. Quando $c \leq 0$, procedemos como antes até alcançar a equação (4.47) e, de $|\Phi| \geq C(n, p, \sup H)$, temos que $P_{H,p,c}(|\Phi|) \geq 0$. Neste ponto, podemos raciocinar como no caso anterior para obter que H é constante, $p = 1$ e, em consequência, também concluir que M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{Q}_1^{n+1}(c)$.

Logo, como a igualdade ocorre em (4.39), temos que ela também ocorre no Lema 4.2.4. Consequentemente, M^n deve ter no máximo duas curvaturas principais distintas. À vista disso, podemos aplicar o Teorema 1.1.2 para finalizar a prova. ■

Observação 4.3.5 *Podemos inferir do Teorema 4.3.4 que, para codimensão maior que 1, não existem subvariedades tipo-espaço imersas em uma forma espacial semi-Riemanniana nas condições do referido resultado. Por outro lado, no momento em que todas as desigualdades na demonstração da Proposição 4.3.1 tornam-se igualdades, a igualdade também ocorre em (4.42). Assim a Observação 4.1.3, garante que $N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha) = 0$ se, e somente se, $h^\alpha h^\beta = h^\beta h^\alpha$. Assim, da equação de Ricci (4.6) também podemos inferir que $R^\perp = 0$, o que é compatível com a conclusão do Teorema 4.3.4.*

No Corolário 1.2 de [24], Camargo, Chaves e Souza Jr., mostraram que se M^n é uma subvariedade tipo-espaço completa imersa no espaço de Sitter $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média normalizado paralelo, curvatura escalar normalizada constante $R \leq c$ e curvatura média satisfazendo $H^2 < \frac{4(n-1)c}{Q(p)}$, então ele deve ser totalmente umbílica. O Teorema 4.3.4, em particular, contempla o caso complementar tratado no Corolário 1.2 de [24], e além disso, também contempla as outras formas espaciais. Mais precisamente, temos o seguinte

Corolário 4.3.6 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço completa imersa em uma forma espacial semi-Riemanniana $L_p^{n+p}(c)$, com vetor curvatura média normalizado paralelo e curvatura escalar normalizada constante R satisfazendo $R \leq c$. Quando $c > 0$, assuma em adição que $H^2 \geq \frac{4(n-1)c}{Q(p)}$. Suponha que H é limitado sobre M^n e $|\Phi| \geq C(n, p, \sup H)$, então $p = 1$ e M^n é isométrica a*

- (a) $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;
- (b) $\mathbb{S}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c > 0$;
- (c) $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c < 0$.

Utilizando como maquinário analítico o Lema 1.2.4, temos o nosso segundo resultado de caracterização de cilindros hiperbólicos.

Teorema 4.3.7 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço Weingarten linear completa imersa em uma forma espacial semi-Riemanniana $L_p^{n+p}(c)$, com vetor curvatura média normalizado paralelo, tal que $R = aH + b$, com $(n-1)a^2 + 4n(c-b) > 0$. Quando $c > 0$, assuma em adição que $H^2 \geq \frac{4(n-1)c}{Q(p)}$. Se H é limitado sobre M^n , $|\Phi| \geq C(n, p, H)$ e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $p = 1$ e M^n é isométrica a*

- (a) $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;
- (b) $\mathbb{S}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c > 0$;
- (c) $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c < 0$.

Demonstração. Inicialmente, observamos que de (2.64) e (4.21) temos que

$$L(nH) = \operatorname{div}_M(P(\nabla H)), \quad (4.52)$$

onde

$$P = \left(n^2 H + \frac{n(n-1)}{2} a \right) I - nh^{n+1}, \quad (4.53)$$

$h^{n+1} = (h_{ij}^{n+1})$ representa a segunda forma fundamental de M^n com respeito a e_{n+1} .

Por outro lado, como M^n é suposta ser Weingarten linear satisfazendo $R = aH + b$ e H é limitada, por meio da equação (4.9) temos que A também é limitada sobre M^n . Consequentemente, da definição (4.53) concluímos que o operador P é limitado, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|P| \leq C$. Uma vez que também estamos assumindo que $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, obtemos

$$|P(\nabla H)| \leq |P||\nabla H| \leq C_1 |\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M).$$

Assim, do Lema 1.2.4 e (4.52) obtemos que $L(nH) = 0$ sobre M^n . Logo, (4.48) vale e, conseqüentemente, temos que todas as desigualdades são, de fato, igualdades. Em particular, de (4.44) obtemos

$$\sum_{\alpha, i, j, k} (h_{ijk}^\alpha)^2 = n^2 |\nabla H|^2.$$

Portanto, como estamos supondo que $(n-1)a^2 + 4n(c-b) > 0$, o Lema 4.2.1 também dá que H é constante. Neste ponto, podemos prosseguir como na última parte da demonstração do Teorema 4.3.4 para concluir o resultado. ■

Encerramos este capítulo citando a seguinte consequência do Teorema 4.3.7

Corolário 4.3.8 *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço completa imersa em uma forma espacial semi-Riemannian $L_p^{n+p}(c)$, com vetor curvatura média normalizado paralelo e curvatura escalar normalizada constante R satisfazendo $R < c$. Quando $c > 0$, assumamos em adição que $H^2 \geq \frac{4(n-1)c}{Q(p)}$. Se H é limitada sobre M^n , $|\Phi| \geq C(n, p, H)$ e $|\nabla H| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $p = 1$ e M^n é isométrica a*

- (a) $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_2 < 0$, quando $c = 0$;
- (b) $\mathbb{S}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c > 0$;
- (c) $\mathbb{H}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, onde $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$, quando $c < 0$.

Capítulo 5

Caracterizações de hiperplanos no *steady state space* $\mathcal{H}^{n+1}$

A nossa proposta neste último capítulo, é investigar a geometria de hipersuperfícies tipo-espaço imersas no *steady state space* bem como em sua generalização natural que são os espaços-tempo do tipo *steady state*. Aqui apresentaremos os resultados referentes ao artigo [18] e [19]. Na primeira parte, apresentaremos o *steady state space* e algumas notações básicas concernentes a imersões isométricas bem como alguns resultados auxiliares e alguns fatos básicos relacionados a folheação de $\mathcal{H}^{n+1}$ por hiperplanos tipo-espaço. Após isso, na seção seguinte, estabelecemos os nossos resultados de caracterização concernente a hiperplanos tipo-espaço do *steady state space* $\mathcal{H}^{n+1}$ (cf. Teoremas 5.1.5 e 5.1.10). Além disso, destacamos que por meio de um princípio do máximo devido ao Eschenburg [45], obtemos um princípio da tangência e como aplicação mostramos que uma hipersuperfície tipo-espaço completa deve ser um hiperplano tipo-espaço (cf. Teorema 5.1.16). Na sequência, estendemos a técnica devido a Colares e de Lima [35] a fim de obter resultados de caracterização relacionados a domínios inteiramente contidos em slices tipo-espaço de um espaço-tempo do tipo *steady state* (cf. Teorema 5.2.4 e Corolário 5.2.5). Em seguida, aplicamos tais resultados de caracterização no estudo da unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço completas com *um fim* (isto é, hipersuperfícies tipo-espaço completas que podem ser consideradas como a união de uma hipersuperfície compacta cuja fronteira está contida em um slice do

espaço ambiente, com uma hipersuperfície completa difeomorfa a um cilindro circular) imersa em um espaço-tempo do tipo steady state (cf. Teorema 5.2.8 e Corolário 5.2.9).

5.1 Apresentando o ambiente steady state

Seja $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor tipo-luz apontando para o passado, isto é, $\langle a, a \rangle = 0$ e $\langle a, e_{n+2} \rangle > 0$, onde $e_{n+2} = (0, \dots, 0, 1)$. Então a região aberta do espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, dada por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a \rangle > 0\}$$

é conhecido como *steady state space* (cf. [73], Example 4.2). Observe que $\mathcal{H}^{n+1}$ é uma variedade estendível e portanto não-completa, sendo apenas uma metade do espaço de Sitter. A sua fronteira, como um subconjunto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, é a hipersuperfície nula

$$\mathcal{L}_0 = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a \rangle = 0\},$$

cujas a topologia é a de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ (cf. [74], Seção 2).

Agora, consideremos em $\mathcal{H}^{n+1}$ o campo tipo-tempo

$$\mathcal{V} = -\langle p, a \rangle p + a. \quad (5.1)$$

Por meio da definição do campo $\mathcal{V}$, não é difícil verificar que, para todo campo suave $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}^{n+1})$, temos

$$\bar{\nabla}_V \mathcal{V} = -\langle p, a \rangle V,$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{H}^{n+1}$. Em outras palavras, $\mathcal{V}$ é um campo conforme e fechado com fator conforme $\phi = -\langle p, a \rangle$ (no sentido de que a sua 1-forma dual é fechada; veja o Exemplo 2 da Seção 4 de [73]).

A próxima proposição é devida a Montiel (cf. Proposição 1 de [73]) e, ela garante que steady state space pode ser folheado por hipersuperfícies totalmente.

Proposição 5.1.1 *Seja $\mathcal{H}^{n+1}$, $n \geq 1$ uma variedade de Lorentz dotada de um campo tipo-tempo $\mathcal{V}$ conforme e fechado. Então temos que*

(i) *A distribuição n -dimensional $\mathcal{D}$ definida em $\mathcal{H}^{n+1}$ por*

$$p \in \mathcal{H}^{n+1} \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p \mathcal{H}^{n+1}; \langle \mathcal{V}(p), v \rangle = 0\}$$

determina uma folheação tipo-espaço de codimensão um $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ com orientação de $\mathcal{V}$. Além disso, as funções $\langle \mathcal{V}, \mathcal{V} \rangle$, $\text{div} \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}\phi$ são constantes sobre as folhas conexas de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$.

(ii) O campo unitário tipo tempo definido por $\nu = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{-\langle \mathcal{V}, \mathcal{V} \rangle}}$ em $\mathcal{H}^{n+1}$ satisfaz:

$$\bar{\nabla}_\nu \nu = 0 \quad e \quad \bar{\nabla}_u \nu = \frac{\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{V}, \mathcal{V} \rangle}} u \quad se \quad \langle \nu, u \rangle = 0.$$

Então, o fluxo do campo ν é um fluxo geodésico normalizado que aplica as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ homoteticamente em folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ e cada folha de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ é totalmente umbílica e tem curvatura média constante $H = \frac{-\phi}{\sqrt{-\langle \mathcal{V}, \mathcal{V} \rangle}}$.

Além disso, do Exemplo 1 de [70], concluímos que as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ são dadas por

$$\mathcal{L}_{a,\tau} = \{p \in \mathcal{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}, \quad \tau > 0,$$

as quais são hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathcal{H}^{n+1}$, isométricas ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e possuem curvatura média constante igual a 1 com respeito ao campo normal e tipo-tempo

$$N_\tau = -p + \frac{1}{\tau}a, \quad p \in \mathcal{L}_\tau. \quad (5.2)$$

Uma isometria explícita entre as folhas $\mathcal{L}_{a,\tau}$ e o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ pode ser encontrada na Seção 2 de [2] (veja também [44]). Neste sentido, ao longo deste trabalho, cada $\mathcal{L}_{a,\tau}$ será dito um *hiperplano tipo-espaço* de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado pelo vetor tipo-luz a .

Observação 5.1.2 Também é conveniente notar que os hiperplanos tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,\tau}$ se aproximam da fronteira de $\mathcal{H}^{n+1}$ quando τ tende para zero e que, quando τ tende para $+\infty$, eles se aproximam do infinito futuro tipo-espaço para linhas tipo-tempo e tipo-luz do espaço de Sitter, que, seguindo [56], denotaremos por $\mathcal{I}^+$. Uma outra maneira de definir o infinito futuro é considerando a seguinte isometria

$$\phi : \mathcal{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

dada por

$$\phi(p) = \frac{1}{\langle p, a \rangle} (p - \langle p, a \rangle b - \langle p, b \rangle a, 1),$$

onde $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um outro vetor tipo-luz tal que $\langle a, b \rangle = 1$. É importante frisar que ϕ é uma isometria desde que $\mathbb{R}_+^{n+1}$ esteja munido com a seguinte métrica Lorentziana

$$g_{(x,x_{n+1})}(u,v) = \frac{1}{x_{n+1}^2} \langle u, v \rangle, \quad (x \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+)$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nesta configuração, ϕ inverte a orientação temporal, além disso, os hiperplanos tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,\tau}$ de $\mathcal{H}^{n+1}$ correspondem aos hiperplanos horizontais $x_{n+1} = 1/\tau = t$ no modelo do semi-espaço superior. Assim, neste modelo, o infinito futuro tipo-espaço $\mathcal{J}^+$ é representado pelo hiperplano fronteira $x_{n+1} = 0$ (cf. Montiel [74]).

Consideremos as funções suporte

$$l_a = \langle \psi, a \rangle \quad \text{e} \quad f_a = \langle N, a \rangle$$

definidas sobre Σ^n . Seguindo a nomenclatura estabelecida por Montiel em [74], a seguinte definição, por si só, será bastante recorrente

Definição 5.1.3 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathcal{H}^{n+1}$. Dizemos que Σ^n está contida no fecho do domínio interior determinado pelo hiperplano $\mathcal{L}_{a,\tau}$ com $\tau > 0$, quando a sua função suporte satisfizer $l_a \leq \tau$ e, no domínio exterior quando $l_a \geq \tau$.*

Encerramos esta ocasião com o seguinte exercício que será bastante usual (cf. Exercício 3.7 de [79])

Lema 5.1.4 *Seja P é uma subvariedade de uma variedade semi-Riemanniana M . Se P é completa e M é conexa, então $P = M$.*

5.1.1 Caracterizando hiperplanos tipo-espaço no steady state space

Nesta seção, trabalharemos com hipersuperfícies tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$. Com esta configuração, ∇ denotará a conexão de Levi-Civita de Σ^n e vamos escolher a orientação N de ψ apontando para o passado cronológico, o qual significa que N deve estar na mesma metade do cone de nulidade de $\mathbb{L}^{n+2}$ como o vetor tipo-luz a é, em outras palavras,

$$\langle N, a \rangle < 0$$

ao longo de Σ^n . A função curvatura média de uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n é definida como $H = \frac{1}{n} \text{tr}(A)$, onde A denota o operador de Weingarten (ou segunda forma fundamental) de Σ^n com respeito a sua orientação apontando para o passado N .

Posto isso, estamos em condições de afirmar e provar o nosso primeiro resultado.

Teorema 5.1.5 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média $H \geq 1$, a qual esta contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) $n = 2$ e Σ^2 é parabólica;

(b) $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$,

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a .

Demonstração. Consideremos as funções suporte

$$l_a = \langle \psi, a \rangle \quad \text{e} \quad f_a = \langle N, a \rangle$$

definidas sobre Σ^n . Uma vez que $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$, temos que a função l_a é sempre positiva. Além do mais, seguindo a orientação N de Σ^n escolhida anteriormente, a função f_a será uma função negativa.

Por outro lado, um cálculo simples e direto nos permite verificar que o gradiente de tais funções são dados por

$$\nabla l_a = a^\top \quad \text{e} \quad \nabla f_a = -A(a^\top),$$

onde $a^\top$ denota a projecção ortogonal de a no fibrado tangente $T\Sigma$, isto é,

$$a^\top = a + f_a N - l_a \psi. \tag{5.3}$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \nabla l_a &= \overline{\nabla}_X a^\top = \overline{\nabla}_X (a + f_a N - l_a \psi) \\ &= \overline{\nabla}_X a + X(f_a)N + f_a \overline{\nabla}_X N - X(l_a)\psi - l_a \overline{\nabla}_X \psi \end{aligned}$$

tomando a componente tangente, obtemos

$$\nabla_X \nabla l_a = -f_a A X - l_a X. \tag{5.4}$$

Consequentemente, da equação (5.4) obtemos

$$\Delta l_a = -n H f_a - n l_a. \tag{5.5}$$

Sendo a tipo-luz, por intermédio da identidade (5.3) chegamos a

$$f_a^2 - l_a^2 = |\nabla l_a|^2. \tag{5.6}$$

Em particular, de (5.6) e dos respectivos sinais das funções suporte l_a e f_a , temos que

$$0 < l_a \leq -f_a. \quad (5.7)$$

Além disso, das propriedades fundamentais do Laplaciano juntamente com a equação (5.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta l_a^2 &= l_a\Delta l_a + |\nabla l_a|^2 \\ &= -nHl_af_a - nl_a^2 + |\nabla l_a|^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Agora, ao considerarmos as desigualdades (5.7) em (5.8), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta l_a^2 \geq n(H-1)l_a^2 + |\nabla l_a|^2. \quad (5.9)$$

Consequentemente, uma vez que estamos supondo que $H \geq 1$, de (5.9) temos que

$$\frac{1}{2}\Delta l_a^2 \geq |\nabla l_a|^2. \quad (5.10)$$

Por outro lado, considerando que

$$\mathcal{L}_{a,\tau} = \{p \in \mathcal{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \tau\}, \quad \tau > 0 \quad (5.11)$$

é o hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ o qual Σ^n esta contida no seu fecho de domínio interior, temos que $l_a \leq \tau$.

Portanto, de (5.10) concluímos que l_a^2 é uma função subharmônica limitada. Suponha que $n = 2$ e que Σ^2 seja parabólica. Sendo l_a^2 uma função subharmônica e limitada superiormente devemos ter, da parabolicidade de Σ^2 , que l_a é constante em Σ^2 , isto é, existe $\tilde{\tau} > 0$ tal que $l_a = \tilde{\tau}$. Assim, $\Sigma^2 \subset \mathcal{L}_{a,\tilde{\tau}}$ e pelo Lema 5.1.4 concluímos que $\Sigma^2 = \mathcal{L}_{a,\tilde{\tau}}$, ou seja, Σ^2 é um plano tipo-espaço de $\mathcal{H}^3$ determinado por a .

Agora suponha que $|\nabla l_a| = |a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Logo, uma vez que

$$|\nabla l_a^2| = 2l_a|\nabla l_a| \leq \tau|\nabla l_a|, \quad (5.12)$$

temos que $|\nabla l_a^2| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Assim, neste caso, podemos aplicar o Lema 1.2.3 a fim de concluir que l_a^2 é harmônica. Portanto, quando retornamos a igualdade (5.10), temos que l_a é constante em Σ^n . Neste ponto procedemos como anteriormente para concluir que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço. ■

Pedindo que a curvatura Gaussiana da superfície seja não negativa, podemos usar o Teorema 1.2.11 para obter a seguinte consequência do Teorema 5.1.5

Corolário 5.1.6 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média $H \geq 1$, a qual esta contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) *$n = 2$ e a curvatura Gaussiana de Σ^2 é não negativa;*

(b) *$|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$,*

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a .

Observação 5.1.7 *Levando em conta mais uma vez o Exemplo 1 de [70], a partir da descrição das hipersuperfícies totalmente umbílicas do steady state space dada na Seção 3 de [74] segue que não existem hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas com curvatura média $|H| < 1$ em $\mathcal{H}^{n+1}$. Assim, uma vez que nosso objetivo neste capítulo é a caracterização de hiperplanos tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$, é natural restringir a nossa atenção à hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas com função curvatura média $H \geq 1$ em $\mathcal{H}^{n+1}$.*

Observemos que qualquer vetor tipo-tempo unitário N normal a uma imersão tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ pode ser visto como uma aplicação

$$N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1},$$

a qual toma valores no espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle p, p \rangle = -1, \langle p, a \rangle < 0\},$$

onde a é um vetor tipo-luz em $\mathbb{L}^{n+2}$. Nesta configuração, a imagem $N(\Sigma)$ é conhecido como a *aplicação de Gauss hiperbólica* de Σ^n .

Assim, com a escolha da orientação de ψ , a aplicação de Gauss hiperbólica N de Σ^n toma valores na folha inferior do correspondente hiperbolóide, que será simplesmente denotado por $\mathbb{H}^{n+1}$. Além disso, de modo semelhante à Seção 4 de [68], notamos que os conjuntos de nível

$$L_{a,\rho} = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a \rangle = \rho\}, \quad \rho < 0,$$

folheiam todo o espaço $\mathbb{H}^{n+1}$ por meio de horoesferas paralelas.

Em alusão a Definição 5.1.3, também temos a seguinte definição

Definição 5.1.8 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathcal{H}^{n+1}$. Dizemos que a imagem da aplicação de Gauss hiperbólica de Σ^n esta contida no fecho do domínio interior determinado por uma horoesfera $L_{a,\rho}$ com $\rho < 0$ de $\mathbb{H}^{n+1}$, quando a sua função suporte satisfizer $f_a \geq \rho$ e, no domínio exterior quando $f_a \leq \rho$.*

Em [74], Montiel provou que se Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço completa no espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ com curvatura média constante $H \geq 1$ e tal que $N(\Sigma)$ esta contida no fecho do domínio interior determinado por uma horoesfera, então a sua curvatura é, de fato, igual a 1. Quando $n = 2$, de [14] ou [82], segue que Σ^2 é também uma superfície totalmente umbílica. Através do Teorema 5.1.5 obtemos uma espécie extensão deste resultado do Montiel. Mais precisamente,

Corolário 5.1.9 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média $H \geq 1$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss hiperbólica de Σ^n esta contida no fecho do domínio interior determinado por uma horoesfera de $\mathbb{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (a) $n = 2$ e a curvatura Gaussiana de Σ^2 é não negativa;
- (b) $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$,

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado pelo vetor tipo-luz a .

Demonstração. Observamos que se $N(\Sigma)$ esta contida no fecho do domínio interior determinado por uma horoesfera $L_{a,\rho}$ de $\mathbb{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor a , então temos o seguinte

$$0 > f_a \geq \rho.$$

Portanto, de (5.7) temos que $0 < l_a \leq -\rho$, o que significa que Σ^n esta contida no fecho do domínio interior determinado pelo hiperplano tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,-\rho}$ de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado pelo vetor tipo-luz a . Portanto, o resultado segue do Teorema 5.1.5. ■

Da definição do campo normal (5.2), vemos que as funções suporte $l_a = \langle \psi, a \rangle$ e $f_a = \langle N_\tau, a \rangle$ de um hiperplano tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,\tau}$ de $\mathcal{H}^{n+1}$ satisfaz a relação $l_a = -f_a$. Motivados por este fato, consideraremos hipersuperfícies tipo-espaço completa de $\mathcal{H}^{n+1}$ cujas funções suporte são linearmente relacionadas, isto é, que satisfazem a seguinte relação

$$l_a = \lambda f_a, \tag{5.13}$$

onde $\lambda : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.

Neste contexto, temos o seguinte resultado de caracterização:

Teorema 5.1.10 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa cujas funções suporte com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ satisfazem a relação (5.13). Suponha que Σ^n esta contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz a e que sua curvatura média H é tal que $H \geq -\lambda$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) $n = 2$ e Σ^2 é parabólica;

(b) $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$,

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a e $\lambda \equiv -1$.

Demonstração. Iniciamos observando que a partir dos sinais das funções suporte l_a e f_a , temos que o sinal da função λ é estritamente negativo em Σ^n . Assim, de (5.6) concluímos que λ toma seus valores no intervalo $[-1, 0)$.

Por outro lado, da equação (5.8) e da relação (5.13), temos que

$$\Delta l_a^2 = -2n \left(\frac{H}{\lambda} + 1 \right) l_a^2 + 2|\nabla l_a|^2. \quad (5.14)$$

Uma vez que Σ^n esta contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,\tau}$ de $\mathcal{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz a , temos que $l_a \leq \tau$. Consequentemente, como estamos supondo que a curvatura média de Σ^n é tal que $H \geq -\lambda$, de (5.14) concluímos que l_a^2 é uma função subharmônica limitada sobre Σ^n .

No caso que $n = 2$, se Σ^2 é parabólica concluímos que a função l_a é constante. Portanto, Σ^2 deve ser um plano tipo-espaço de $\mathcal{H}^3$ determinado por a .

Agora, suponha que $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Então da desigualdade (5.12), o campo suave ∇l_a^2 possui norma integrável em Σ^n . Assim, da equação (5.14) concluímos, pela aplicação do Lema 1.2.3, que l_a^2 é uma função harmônica e, retornando a equação (5.14), obtemos que

$$0 = \Delta l_a^2 = -2n \left(\frac{H}{\lambda} + 1 \right) l_a^2 + 2|\nabla l_a|^2 \geq 0. \quad (5.15)$$

Portanto, $|\nabla l_a|^2 = 0$ em Σ^n e, consequentemente, l_a é constante. Donde concluímos que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a . Por fim, ainda da igualdade (5.15) e levando em conta que $l_a > 0$, temos que $H = -\lambda$. Mas, de (5.2) devemos ter $\lambda \equiv -1$. ■

Raciocinando de maneira análoga a descrita antes do Corolário 5.1.6, do Teorema 5.1.10, temos

Corolário 5.1.11 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa cujas funções suporte com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ satisfazem a relação (5.13). Suponha que Σ^n esta contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz a e que sua curvatura média H é tal que $H \geq -\lambda$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (a) $n = 2$ e a curvatura Gaussiana Σ^2 é não negativa;
- (b) $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$,

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a e $\lambda \equiv -1$.

A seguir exibiremos um exemplo em que a hipótese da hipersuperfície estar no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano não pode ser retirada.

Exemplo 5.1.12 *De acordo com a Seção 3 de [74] (veja também o Exemplo 2 de [70] ou a Seção 2 de [72]), os conhecidos cilindros hiperbólicos do espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, os quais são definidos por*

$$\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; p_1^2 + \cdots + p_{k+1}^2 = \cosh^2 r\},$$

onde $1 \leq k \leq n-1$ e $r > 0$, possui duas componentes conexas as quais são isométricas a $\mathbb{S}^k(\cosh r) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sinh r)$. Além disso, uma das componentes do cilindro hiperbólico esta contida no steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$, e será denotada por $\mathcal{C}_{k,r}$.

Não é difícil verificar que $\mathcal{C}_{k,r}$ possui a seguinte aplicação de Gauss hiperbólica apontando para o passado (isto é, esta contido no mesmo cone temporal do vetor tipo-luz a)

$$N(p) = \frac{1}{\cosh r \sinh r} (\xi(p) - \cosh^2 r p), \quad (5.16)$$

onde $\xi : \mathcal{C}_{k,r} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2}$ é dada por $\xi(p) = (p_1, \dots, p_{k+1}, 0, \dots, 0)$. Consequentemente, de (5.16) concluímos que $\mathcal{C}_{k,r}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço isoparamétrica de $\mathcal{H}^{n+1}$, cuja curvatura média H com respeito a N é dada por

$$H = \frac{1}{n} (k \tanh r + (n-k) \coth r). \quad (5.17)$$

Em particular, decorre da igualdade (5.17) que para todo $r > 0$ e para qualquer valor de k no intervalo $[1, n/2]$ devemos ter $H \geq 1$. Além disso, de (5.16) vemos que as funções suporte de $\mathcal{C}_{k,r}$ satisfazem a seguinte relação

$$l_a = -\tanh r f_a.$$

Por outro lado, levando em conta mais uma vez o Lema 1 de [2], temos que $\mathcal{C}_{k,r}$ não pode estar contida no fecho do domínio interior determinado por qualquer hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$.

Usando a mesma ideia da prova do Corolário 5.1.9, rescrevemos o Teorema 5.1.10 na seguinte maneira:

Corolário 5.1.13 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa cujas funções suporte satisfazem a relação (5.13). Suponha que a $N(\Sigma^n)$ esta contida no fecho do domínio interior determinado por uma horoesfera de $\mathbb{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, e que sua curvatura média H é tal que $H \geq -\lambda$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (a) $n = 2$ e a curvatura Gaussiana de Σ^2 é não-negativa;
- (b) $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$,

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a e $\lambda \equiv -1$.

Observação 5.1.14 *No Lema 1 de [2], Albuje e Alías mostraram que se uma hipersuperfície tipo-espaço completa esta contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$, então ela deve ser difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Em particular, segue que não existem hipersuperfícies tipo-espaço compactas (sem bordo) em $\mathcal{H}^{n+1}$. Neste sentido, a suposição de $|a^\top| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ nos resultados anteriores vem suprimir a falta de compacidade de Σ^n . Existe também uma motivação física para uma tal suposição a qual pode ser encontrada na Seção 2.1.3 de [83].*

Ao considerar uma hipersuperfície tipo-espaço completa $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ como sendo a fronteira de um domínio adequado de $\mathcal{H}^{n+1}$, aplicamos o Lema 1.2.9 a fim de obter o seguinte princípio da tangência (veja também Teorema 2 de [74], para uma versão correspondente a hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante):

Proposição 5.1.15 *Seja Σ_1 e Σ_2 hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas em $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvatura média H_1 e H_2 , respectivamente. Suponha que Σ_1 encontra-se acima de Σ_2 . Se, em uma vizinhança de um ponto de tangência comum, temos que $H_1 \leq \alpha \leq H_2$, para algum numero real α , então Σ_1 e Σ_2 devem coincidir.*

Vamos nos referir ao ângulo hiperbólico θ de uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ com sendo o ângulo entre a sua aplicação hiperbólica de Gauss N e o vetor tipo-tempo $\mathcal{V}$ definido em (5.1). Em outras palavras,

$$\cosh \theta = -\langle N, \nu \rangle,$$

$$\text{onde } \nu = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{-\langle \mathcal{V}, \mathcal{V} \rangle}}.$$

Como uma aplicação da Proposição 5.1.15, revisitaremos o Teorema 3.2 de [36] e apresentaremos uma prova diferente e mais simples que a apresentada pelos autores, sem pedir que a curvatura média da hipersuperfície tipo-espaço seja limitada por cima.

Teorema 5.1.16 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média $H \geq 1$ e contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ com respeito ao vetor tipo-luz $a \in \mathbb{L}^{n+2}$. Se o ângulo hiperbólico θ de Σ^n satisfaz $\cosh \theta \leq \inf_{\Sigma} H$, então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado pelo vetor tipo-luz a .*

Demonstração. Suponha, sem perda da generalidade que Σ^n esteja contida no fecho interior determinado pelo hiperplano tipo-espaço

$$\mathcal{L}_{a,\hat{\tau}} = \{p \in \mathcal{H}^{n+1} : \langle p, a \rangle = \hat{\tau}\},$$

para algum $\hat{\tau} > 0$. Seja $H_0 = \inf_{\Sigma} H$. Se $H_0 = 1$, então $\cosh \theta = 1$ e, conseqüentemente $\theta = 0$. Logo Σ^n seria um hiperplano tipo-espaço mostrando o desejado. Suponha então que $H_0 > 1$ e consideremos a família de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathcal{H}^{n+1}$, as quais denotaremos por S , possuindo curvatura média constante H_0 e tal que suas correspondentes aplicações de Gauss apontam para o passado, vindas do futuro infinito $\mathcal{J}^+$. Observemos que, de acordo com a descrição das hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathcal{H}^{n+1}$ devido ao Montiel na Seção 3 de [74], tal hipersuperfície tipo-espaço são isométricas a espaços hiperbólicos apropriados. Assim, em analogia com o contexto da geometria hiperbólica, chamamos tal hipersuperfície tipo-espaço de hipersuperfícies equidistantes de $\mathcal{H}^{n+1}$.

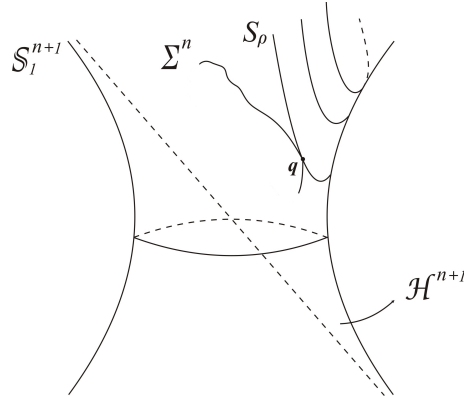


Figura 5.1: Aproximando Σ^n por equidistantes.

Por um movimento rígido desta família, chegamos até o primeiro ponto de contato de Σ^n com uma das tais hipersuperfícies equidistantes, a qual vamos denotar por S_ρ . Seja então $q \in \Sigma^n \cap S_\rho$ o tal ponto interior comum a ambas as hipersuperfícies onde ocorre a tangência.

Uma vez que $H \geq H_0 = \inf_\Sigma H$, podemos aplicar a Proposição 5.1.15, e obter que Σ^n deve ser uma das hipersuperfícies equidistantes. Mas, tendo em conta mais uma vez o estudo feito por Montiel na Seção 3 de [74], vemos que tal hipersuperfície equidistante não pode estar contida no fecho do domínio interior determinado por um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$. Logo, chegamos a uma contradição e, consequentemente, $H_0 = 1$.

Portanto, usamos a hipótese $\cosh \theta \leq H_0$ para concluir que $\cosh \theta = 1$ em Σ^n , ou seja, $\theta = 0$. Consequentemente, temos que N é colinear a ν e, assim, $\Sigma^n \subset \mathcal{L}_{a,\beta}$ para algum $\beta > 0$. Portanto, do Lema 5.1.4 temos que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$. ■

Através do Teorema 5.1.16 obtemos o seguinte

Corolário 5.1.17 *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média $H \geq 1$ e contida no fecho do domínio exterior determinado por um hiperplano tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,\tau}$ de $\mathcal{H}^{n+1}$. Suponha que a imagem hiperbólica $N(\Sigma)$ esta contida no fecho do domínio interior determinado por uma horosfera $L_{a,\rho}$. Suponha que $-\frac{\rho}{\tau} \leq \inf_\Sigma H$, então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado pelo vetor tipo-luz a .*

Demonstração. Inicialmente, observemos que o ângulo hiperbólico θ de Σ^n é tal que

$$\cosh \theta = -\langle N, \nu \rangle = -\langle N, -\psi + \frac{1}{\langle \psi, a \rangle} a \rangle = -\frac{1}{\langle \psi, a \rangle} \langle N, a \rangle. \quad (5.18)$$

Consequentemente, uma vez que estamos supondo que Σ^n esta contida no fecho do domínio exterior determinado pelo hiperplano tipo-espaço $\mathcal{L}_{a,\tau}$, de (5.18) temos

$$\cosh \theta \leq -\frac{1}{\tau} \langle N, a \rangle. \quad (5.19)$$

Portanto, tendo em conta a nossa hipótese sobre a image hiperbólica da aplicação de Gauss de Σ^n , da desigualdade (5.19) temos

$$\cosh \theta \leq -\frac{\rho}{\tau} \leq \inf_\Sigma H.$$

Portanto, uma vez que a desigualdade (5.7) garante-nos que Σ^n esta também contida no fecho do domínio interior determinado pelo hiperplano tipo-espaço $\mathcal{L}_{-\rho}$, podemos

aplicar o Teorema 5.1.16 a fim de concluir que Σ^n é um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$ determinado por a . ■

Observação 5.1.18 *Quando Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa com curvatura média constante $H > 1$ em $\mathcal{H}^{n+1}$, cuja fronteira $\partial\Sigma$ esta contida em um hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$, o Teorema 7 de [74] assegura que o ângulo hiperbólico θ de Σ^n satisfaz a estimativa $\cosh \theta \leq H$. Nesta sentido, nossa restrição sobre o ângulo hiperbólico no Teorema 5.1.16 é uma hipótese leve.*

5.2 Notações básicas e resultados auxiliares

Seja M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional conexa e orientada, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva. Além disso, na variedade produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ sejam π_I e π_M , as projeções sobre os fatores I e M^n , respectivamente. O nosso estudo versará acerca de uma classe de variedades Lorentzianas que nada mais é a variedade $\overline{M}^{n+1}$ munida com a seguinte métrica Lorentziana

$$\langle v, w \rangle_p = -\langle (\pi_I)_*v, (\pi_I)_*w \rangle_{\pi_I(p)} + (f \circ \pi_I)(p)^2 \langle (\pi_M)_*v, (\pi_M)_*w \rangle_{\pi_M(p)},$$

para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$. Em tal caso, escrevemos

$$\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n, \quad (5.20)$$

e dizemos que $\overline{M}^{n+1}$ é um produto warped Lorentziano com função warped f .

Acerca desses espaços, de acordo com a terminologia estabelecida por Alías, Romero e Sánchez [11], um espaço produto warped (5.20) é chamado um *espaço-tempo Robertson-Walker generalizado (GRW)*. Note que, nesta definição a fibra não é assumida ter curvatura seccional constante. Quando esta é assumida e a dimensão do espaço-tempo é igual a 3, o espaço-tempo *GRW* é o espaço-tempo clássico de *Robertson-Walker*.

Observamos também que, sendo ∂_t um vetor tipo-tempo normal e unitário globalmente definido sobre espaço-tempo ambiente, existe um único vetor normal e tipo-tempo N globalmente definido sobre a hipersuperfície tipo-espaço Σ^n o qual possui a mesma orientação temporal de ∂_t . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa para vetores tipo-tempo, temos

$$\langle N, \partial_t \rangle \leq -1 < 0,$$

em Σ^n . Vamos nos referir ao campo normal N como a *aplicação de Gauss apontando para o futuro* da hipersuperfície tipo-espaco Σ^n .

Associado ao operador de Weingarten $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ de Σ^n (com respeito a N ou $-N$) existem n invariantes algébricos, a saber, as funções simétricas elementares S_r das curvaturas principais $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ de A , dadas por

$$S_r = \sigma_r(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_r},$$

onde, para $1 \leq r \leq n$, $\sigma_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ é o r -ésimo polinômio simétrico elementar sobre as indeterminadas $X_1, \dots, X_n$.

A r -ésima curvatura média H_r de Σ^n é então definida por

$$\binom{n}{r} H_r = (-1)^r S_r.$$

Em particular,

$$H_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i = -\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)$$

é a curvatura média H de Σ^n , a qual é a principal curvatura extrínseca de Σ^n .

Também é interessante notar que H_2 define uma quantidade geométrica a qual esta intimamente relacionada com a (intrínseca) curvatura escalar R de Σ^n . Por exemplo, quando $\overline{M}^{n+1}$ possui curvatura seccional constante $\bar{c}$, podemos facilmente checar que da equação de Gauss

$$R = n(n-1)(\bar{c} - H_2)$$

Usando a definição de H e a identidade (3.21), podemos rescrever esta expressão como

$$R = n(n-1)\bar{c} + |A|^2 - n^2 H^2,$$

onde $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt de A (isto é, $|A|^2 = \operatorname{tr}(A^* A)$, onde A^* é o operador adjunto de A).

Para o que segue, dizemos que $p_0 \in \Sigma^n$ é um *ponto elíptico* de Σ^n se todas as curvaturas principais $\kappa_i(p_0)$ são negativas com respeito a uma escolha apropriada da aplicação de Gauss de Σ^n em p_0 .

Das ideias de Montiel e Ros concernente ao Lema 1 de [71] e seu uso das desigualdades de Garding (cf. [47]) e, além disso, levando em conta a nossa convenção de sinais na definição das r -ésima curvatura média, decorre o seguinte resultado (veja também a Proposição 2.3 de [26]).

Lema 5.2.1 *Suponha que Σ^n possui um ponto elíptico. Se H_r é positivo em Σ^n , então o mesmo vale para H_k , $k = 1, \dots, r-1$. Além disso,*

$$H_{k-1} \geq H_k^{(k-1)/k} \quad e \quad H \geq H_k^{1/k}$$

para $k = 1, \dots, r$. Também, se $k \geq 2$, então a igualdade acontece em um das desigualdades acima somente em pontos umbílicos.

Agora, para $0 \leq r \leq n$, seja $P_r : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ as r -ésimas transformações de Newton de Σ^n , definidas indutivamente pondo $P_0 = I$ (a identidade de $\mathfrak{X}(\Sigma)$) e, para $1 \leq r \leq n$,

$$P_r = \binom{n}{r} H_r I + A P_{r-1}.$$

Um fato bastante conhecido acerca das transformações de Newton é o seguinte:

$$\text{tr}(P_r) = (r+1) \binom{n}{r+1} H_r, \quad (5.21)$$

para $1 \leq r \leq n$, onde $c_r = (n-r) \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1}$ (cf., por exemplo, [4]).

Se $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ denota o anel das funções suaves definidas sobre Σ^n , então, associado a cada P_r , temos um operador linear diferenciável de segunda ordem $L_r : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, dado por

$$L_r(\xi) = \text{tr}(P_r \text{Hess } \xi). \quad (5.22)$$

Para qualquer função suave $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, de (5.22) e das propriedades elementares do operador Hessiano segue que

$$L_r(g \circ \xi) = g'(\xi) L_r(\xi) + g''(\xi) \langle P_r \nabla \xi, \nabla \xi \rangle. \quad (5.23)$$

Dado um sistema de coordenadas local $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ de Σ^n em um ponto p , através de um cálculo direto, não é difícil obter de (5.22), a seguinte expressão local do operador linear L_r :

$$L_r(\xi)(p) = \sum_{i,j,k,l} g^{ik} t_{kl} g^{lj} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j,k,l,s} g^{ik} t_{kl} g^{lj} \Gamma_{ij}^s \frac{\partial \xi}{\partial x_s}, \quad (5.24)$$

onde

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad G = (g_{ij}), \quad G^{-1} = (g^{ij}), \quad t_{ij} = P_r \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right), \quad (5.25)$$

e Γ_{ij}^s são os coeficientes da conexão ∇ .

Da expressão local acima, sabemos que os operadores L_r são elípticos se, e somente se, os P_r são positivos definidos. Em particular, quando $r = 0$, o operador L_r reduz-se ao operador Laplaciano. Assim, L_0 é sempre um operador elíptico. No que segue, citaremos dois resultados que garantem condições suficientes para a elipsidade dos operadores L_r em geral (cf. [5], Lemas 3.2 e 3.3).

Lema 5.2.2 *Se $H_2 > 0$ em Σ^n , então o operador P_1 é positivo definido para uma escolha apropriada da aplicação normal de Gauss N .*

Lema 5.2.3 *Suponha que Σ^n possui um ponto elíptico com respeito a uma escolha apropriada da aplicação normal de Gauss. Se $H_{r+1} > 0$ em Σ^n para algum $2 \leq r \leq n-1$, então P_k é positivo definido para todo $1 \leq k \leq r$.*

Doravante, consideraremos duas funções naturalmente ligadas a uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa em um espaço-tempo GRW $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$, a saber, a *função altura* (vertical) $h = (\pi_I)|_\Sigma$ e a *função suporte* $\langle N, \partial_t \rangle$, onde lembramos que N denota a aplicação de Gauss apontando para o futuro de Σ^n .

Para uma função suave ϕ em $\overline{M}^{n+1}$, denotemos por $\overline{\nabla}\phi$ e $\nabla\phi$ o gradiente de ϕ em $\overline{M}^{n+1}$ e a sua restrição a Σ^n , respectivamente. Um simples cálculo mostra que

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\langle \overline{\nabla}\pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t,$$

de modo que

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^\top = -\partial_t^\top = -\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N.$$

Portanto,

$$|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t \rangle^2 - 1,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma de um campo suave em Σ^n .

Do Lema 4.1 de [5], temos que

$$L_r h = -(\log f)'(h) (c_r H_r + \langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle) - c_r H_{r+1} \langle N, \partial_t \rangle. \quad (5.26)$$

Por outro lado, do Corolário 8.2 de [5] temos que

$$\begin{aligned} \Delta(f(h)\langle N, \partial_t \rangle) &= n f(h) \langle \nabla H, \partial_t \rangle + n H f'(h) + f(h) \langle N, \partial_t \rangle |A|^2 \\ &\quad - (n-1) f(h) \langle N, \partial_t \rangle (\log f)''(h) |\nabla h|^2 \\ &\quad + f(h) \langle N, \partial_t \rangle \text{Ric}_M(N^*, N^*), \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde Ric_M denota o tensor de Ricci da fibra Riemanniana M^n , e $N^* = (\pi_M)_*(N)$. Além disso, se $-I \times_f M^n$ é uma espaço-tempo RW , do Corolário 8.4 de [5], também temos o seguinte

$$\begin{aligned} L_r(f(h)\langle N, \partial_t \rangle) &= \binom{n}{r+1} f(h) \langle \nabla H_{r+1}, \partial_t \rangle + c_r H_{r+1} f'(h) \\ &\quad + \binom{n}{r+1} f(h) \langle N, \partial_t \rangle (n H H_{r+1} - (n-r-1) H_{r+2}) \\ &\quad + f(h) \langle N, \partial_t \rangle \left(\frac{\kappa_M}{f^2(h)} - (\ln f)''(h) \right) \cdot \\ &\quad \cdot (c_r H_r |\nabla h|^2 - \langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle), \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde κ_M denota a curvatura seccional da fibra Riemanniana M^n .

5.2.1 Unicidade em um espaço-tempo do tipo steady state

Iniciamos observando que o steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$ pode ser também expressado como o seguinte espaço-tempo RW

$$-\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n.$$

Para ver este fato, basta tomar um outro vetor tipo-luz $b \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\langle a, b \rangle = 1$ e considerar a aplicação $\Phi : \mathcal{H}^{n+1} \rightarrow -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ definida por

$$\Phi(x) = \left(\ln(\langle x, a \rangle), \frac{x - \langle x, a \rangle b - \langle x, b \rangle a}{\langle x, a \rangle} \right).$$

Pode-se verificar que a aplicação Φ é uma isometria entre os dois espaços que preserva a orientação temporal (cf. [2], Seção 4, ou para mais detalhes [44]).

A fim de obter os nossos resultados, seguiremos as ideias de Albuje e Alías em [2], e consideraremos uma extensão natural do steady state space $\mathcal{H}^{n+1} = -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. Seja M^n uma variedade Riemanniana, conexa e orientada de dimensão n e, considere o espaço-tempo GRW

$$-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n.$$

Vamos referir-nos a essa família mais ampla de espaços-tempo GRW como *espaços-tempo do tipo steady state*. Note que para cada $t \in I$, orientamos o *slice* (tipo-espaço) $M_t^n = \{t\} \times M^n$ usando o seu vetor normal e unitário ∂_t . Em conformidade com [12], M_t^n possui curvatura média constante $H = \frac{f'}{f}(t)$ com respeito a ∂_t .

Nesta configuração, vamos enunciar e provar o nosso primeiro resultado.

Teorema 5.2.4 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço - tempo tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, cuja fibra Riemanniana M^n possui curvatura seccional constante não-negativa κ_M . Suponha que Σ^n encontra-se sobre um slice $M_t = \{t\} \times M^n$, para algum $t \in \mathbb{R}$, com sua fronteira $\partial\Sigma$ contida em M_t . Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i). H_2 é uma constante com $1 \leq H \leq H_2$, ou
- (ii). H_{r+1} é uma constante com $1 \leq H_r \leq H_{r+1}$ ($r \geq 2$) e existe um ponto elíptico em Σ^n ,

então Σ^n é um domínio de M_t .

Demonstração. Assumiremos, sem perda da generalidade, que $t = 0$. Consequentemente, como estamos pedindo que Σ^n esteja sobre M_0 , temos que h é não-negativa. Diante desta configuração, definimos a função $\xi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\xi = c e^h - \langle N, K \rangle, \quad (5.29)$$

onde h é a função altura vertical de Σ^n , $K = e^h \partial_t$, N é a aplicação de Gauss apontando para o futuro de Σ^n e c é uma constante positiva arbitrária. Pela própria definição da função ξ , vemos que a mesma é suave e portanto das equações (5.23), (5.26) e (5.28) escrevemos

$$\begin{aligned} L_r(\xi) = & -c c_r e^h (H_r + \langle N, \partial_t \rangle H_{r+1}) - e^h c_r H_{r+1} \\ & - \binom{n}{r+1} e^h \langle N, \partial_t \rangle (n H H_{r+1} - (n-r-1) H_{r+2}) \\ & - e^{-h} \langle N, \partial_t \rangle \kappa_M (c_r H_r |\nabla h|^2 - \langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle), \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde $c_r = (r+1) \binom{n}{r+1}$.

Por outro lado, de (i) ou (ii), podemos usar ou o Lema 5.2.2 ou o Lema 5.2.3 a fim de concluir que o operador L_k é elíptico, para qualquer $k \in \{0, \dots, r\}$. Uma vez que existe uma equivalência entre a elipsidade dos operadores L_r e a positividade dos operadores P_r (cf. Proposição 3.2 de [20]), temos de (5.21) que a seguinte desigualdade ocorre

$$\langle P_r \nabla h, \nabla h \rangle \leq \text{tr}(P_r) |\nabla h|^2 = c_r H_r |\nabla h|^2. \quad (5.31)$$

Assim, levando em conta que $\langle N, \partial_t \rangle \leq -1$ e $\kappa_M \geq 0$, de (5.30) e (5.31) obtemos

$$\begin{aligned} L_r(\xi) \geq & -c c_r e^h (H_r + \langle N, \partial_t \rangle H_{r+1}) - e^h c_r H_{r+1} \\ & - \binom{n}{r+1} e^h \langle N, \partial_t \rangle (n H H_{r+1} - (n-r-1) H_{r+2}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Neste ponto da demonstração, afirmamos que:

$$nHH_{r+1} - (n - r - 1)H_{r+2} \geq (r + 1)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)}. \quad (5.33)$$

De fato, tendo em conta as nossas restrições impostas em H_r e H_{r+1} , por meio do Lema 5.2.1 temos que

$$H_r \geq H_{r+1}^{r/(r+1)} > 0 \quad \text{e} \quad H \geq H_r^{1/r}. \quad (5.34)$$

Além disso, da desigualdade de Newton (cf. [55], Teorema 144; veja também [26], Proposição 2.3), temos que

$$H_{r+2} \leq \frac{H_{r+1}^2}{H_r}. \quad (5.35)$$

Em seguida, de (5.34) e (5.35), obtemos a seguinte sequência de desigualdades

$$\begin{aligned} HH_{r+1} - H_{r+2} &\geq \frac{H_{r+1}}{H_r} (HH_r - H_{r+1}) \geq \frac{H_{r+1}}{H_r} (HH_r - H_r^{(r+1)/r}) \\ &= H_{r+1} (H - H_r^{1/r}) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Após uma simples manipulação algébrica e usando a desigualdade (5.36), concluímos de (5.34) que

$$\begin{aligned} nHH_{r+1} - (n - r - 1)H_{r+2} &= nHH_{r+1} - (n - r - 1)H_{r+2} + (r + 1)HH_{r+1} \\ &\quad - (r + 1)HH_{r+1} \\ &= (n - r - 1)(HH_{r+1} - H_{r+2}) + (r + 1)HH_{r+1} \\ &\geq (r + 1)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \end{aligned}$$

e a afirmação esta mostrada.

Portanto, levando em conta mais uma vez as hipóteses sobre H_r e H_{r+1} , de (5.32) e (5.33) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_r} L_r(\xi) &\geq e^h \left(-c H_r - c \langle N, \partial_t \rangle H_{r+1} - H_{r+1} - \langle N, \partial_t \rangle H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \right) \\ &\geq e^h \left(-c H_r + c H_{r+1} - H_{r+1} + H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \right) \\ &= e^h \left(c (H_{r+1} - H_r) + H_{r+1} (H_{r+1}^{1/(r+1)} - 1) \right). \end{aligned}$$

Assim, das expressões acima concluímos que $L_r(\xi) \geq 0$ em Σ^n . Agora, o princípio do máximo garante que

$$\xi \leq \xi|_{\partial\Sigma}. \quad (5.37)$$

Consequentemente, de (5.29) e (5.37), segue que

$$c e^h \leq c e^h - \langle N, e^h \partial_t \rangle = \xi \leq \xi|_{\partial\Sigma} \leq c + \alpha,$$

onde $\alpha = \max_{\partial\Sigma} |\langle N, \partial_t \rangle|$. Assim, temos que

$$e^h \leq 1 + \frac{\alpha}{c}. \quad (5.38)$$

Portanto, uma vez que c é uma constante positiva e arbitrária, fazendo $c \rightarrow +\infty$ e usando que $h \geq 0$, da desigualdade (5.38) temos que a função altura h é identicamente nula em Σ^n e, portanto, concluímos que $\psi(\Sigma^n) \subset M_0$ e isto finaliza a prova. ■

Da equação (5.27), podemos raciocinar como na prova do Teorema 5.2.4 a fim de obter o seguinte:

Corolário 5.2.5 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço-tempo do tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, cuja fibra Riemanniana M^n possui curvatura de Ricci não-negativa. Suponha que Σ^n esta sobre um slice $M_t = \{t\} \times M^n$, para algum $t \in \mathbb{R}$, com sua fronteira $\partial\Sigma$ contida em M_t . Se Σ^n tem curvatura média constante $H \geq 1$, então Σ^n é um domínio de M_t .*

Observação 5.2.6 *Notemos que a restrição na curvatura seccional da fibra do espaço ambiente no Teorema 5.2.4 corresponde, no contexto do espaço-tempo do tipo steady state, a condição de convergência nula forte, que foi estabelecida por Alías e Colares em [5]. Além disso, a restrição sobre a curvatura de Ricci da fibra no Corolário 5.2.5 é exatamente a conhecida condição de convergência nula (veja, por exemplo, [13] e [73]).*

De acordo com a Seção 5 de [35], dizemos que uma hipersuperfície tipo-espaço completa Σ^n imersa em um espaço-tempo do tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ possui um fim $\mathcal{C}^n$ se, para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $M_t \cap \Sigma^n \neq \emptyset$, podemos considerar Σ^n da seguinte forma

$$\Sigma^n = \Sigma_t \cup \mathcal{C}^n,$$

onde Σ_t é uma hipersuperfície conexa e compacta cuja fronteira esta contida no slice $M_t = \{t\} \times M^n$ e $\mathcal{C}^n$ é uma variedade difeomorfa ao cilindro circular $[t, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ que se encontra em uma região de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ da forma $[t, +\infty) \times M^n$ ou $(-\infty, t] \times M^n$.

Neste momento introduzimos a seguinte definição

Definição 5.2.7 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa com um fim imersa em um espaço-tempo do tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Dizemos que Σ^n é tangente por cima no infinito a um slice M_t , se ou Σ^n é um slice $M_{\tilde{t}}$, para algum $\tilde{t} \geq t$, ou, para todo $\tilde{t} \geq t$, uma das seguintes condições é satisfeita*

- (a) $M_{\tilde{t}} \cap \Sigma^n = \emptyset$;
- (b) $M_{\tilde{t}} \cap \Sigma^n \neq \emptyset$ e a parte compacta $\Sigma_{\tilde{t}}^n$ de Σ^n esta acima de $M_{\tilde{t}}^n$.

Consoante a definição acima e ao Teorema 5.2.4, obtemos o seguinte resultado de unicidade:

Teorema 5.2.8 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa com um fim imersa em um espaço-tempo do tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, cuja fibra Riemanniana M^n é completa com curvatura seccional constante não-negativa. Suponha que Σ^n é tangente por cima no infinito a um slice $M_t = \{t\} \times M^n$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i). H_2 é uma constante com $1 \leq H \leq H_2$, ou
- (ii). H_{r+1} é uma constante com $1 \leq H_r \leq H_{r+1}$ ($r \geq 2$) e existe um ponto elíptico em Σ^n ,

então Σ^n é um slice $M_{\tilde{t}}$, para algum $\tilde{t} \geq t$.

Demonstração. Suponha por contradição que Σ^n não é um slice de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Então existem constantes $t_2 > t_1$ tais que

$$M_{t_1} \cap \Sigma^n \neq \emptyset \quad \text{e} \quad M_{t_2} \cap \Sigma^n \neq \emptyset.$$

Como Σ^n é suposta ser tangente por cima no infinito a um slice $M_t = \{t\} \times M^n$, para algum $t \in \mathbb{R}$, temos que $\Sigma_{t_1}^n$ é a parte compacta de Σ^n que esta acima de $M_{t_1}^n$ e $\Sigma_{t_2}^n$ é a parte compacta de Σ^n que esta acima de $M_{t_2}^n$.

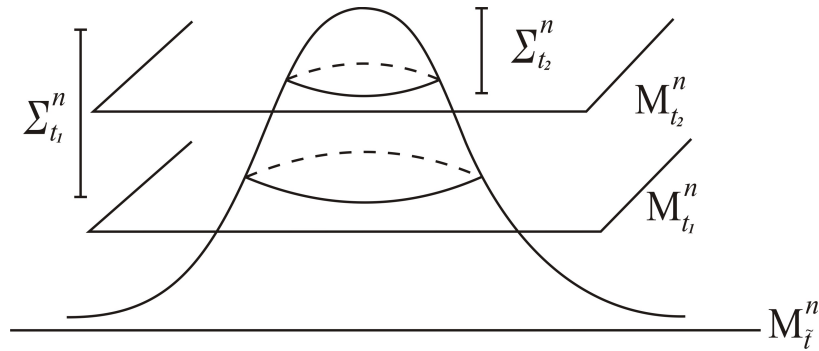


Figura 5.2: Seções em Σ^n .

Logo, estamos em condições de aplicar o Teorema 5.2.4, a fim de concluir que $\Sigma_{t_1}^n \subset M_{t_1}$ e que $\Sigma_{t_2}^n \subset M_{t_2}$. Portanto, uma vez que $\Sigma_{t_2}^n \subset \Sigma_{t_1}^n$, deveríamos ter que $M_{t_1} \cap M_{t_2} \neq \emptyset$ o que é uma contradição, pois $t_2 > t_1$. ■

Do Corolário 5.2.5, podemos raciocinar como na prova do Teorema 5.2.8 para obter o seguinte:

Corolário 5.2.9 *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa com um fim imersa em um espaço-tempo do tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, cuja fibra Riemanniana M^n é completa com curvatura de Ricci não-negativa. Suponha que Σ^n é tangente por cima no infinito a um slice $M_t = \{t\} \times M^n$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Se Σ^n possui curvatura média constante $H \geq 1$, então Σ^n é um slice M_t , para algum $t \in \mathbb{R}$.*

Observação 5.2.10 *No Lema 7 de [2] Albuje e Alías, mostraram que uma condição necessária para a existência de hipersuperfícies tipo-espaço completas em um espaço do tipo steady state $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, é que a fibra Riemanniana seja completa. Além disso, no Teorema 5.3 e Corolário 5.4 de [35], Colares e de Lima obtiveram resultados de unicidade e não-existência concernente a hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante com um fim e sobre um hiperplano tipo-espaço do steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$.*

Referências Bibliográficas

- [1] N. Abe, N. Koike e S. Yamaguchi, *Congruence theorems for proper semi- Riemannian hypersurfaces in a real space form*, Yokohama Math. J. **35** (1987), 123–136.
- [2] A.L. Albuje e L.J. Alías, *Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space*, Proc. American Math. Soc. **137** (2009), 711–721.
- [3] H. Alencar e M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1223–1229.
- [4] L.J. Alías, A. Brasil Jr. e A.G. Colares, *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **46** (2003), 465–488.
- [5] L.J. Alías e A.G. Colares, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **143** (2007), 703–729.
- [6] L.J. Alías, J.H.S. de Lira e J.M. Malacarne, *Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 527–562.
- [7] L.J. Alías e S.C. García-Martínez, *On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms*, J. Math. Anal. Appl. **363** (2010), 579–587.
- [8] L.J. Alías, S.C. García-Martínez e M. Rigoli, *A maximum principle for hypersurfaces with constant scalar curvature and applications*, Ann. Glob. Anal. Geom. **41** (2012), 307–320.

- [9] L.J. Alías, D. Impera e M. Rigoli, *Hypersurfaces of constant higher order mean curvature in warped products*, Trans. American Math. Soc. **365** (2013), 591–621.
- [10] L.J. Alías, H.F. de Lima e F.R. dos Santos, *Rigidity of linear Weingarten hypersurfaces in locally symmetric manifolds*, Preprint.
- [11] L.J. Alías e A. Romero, *Integral formulas for compact spacelike n -submanifolds in de Sitter spaces Applications to the parallel mean curvature vector case* Manuscripta Math. **87** (1995), 405–416.
- [12] L.J. Alías, A. Romero e M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation **27** (1995), 703–729.
- [13] L.J. Alías, A. Romero e M. Sánchez, *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems*, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 337–345.
- [14] K. Akutagawa, *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space* Math. Z. **196**, 13–19 (1987).
- [15] C.P. Aquino, H.F. de Lima e M.A.L. Velásquez, *A new characterization of complete linear Weingarten hypersurfaces in real space forms*, Pacific J. Math. **261** (2013), 33–43.
- [16] C.P. Aquino, H.F. de Lima e M.A.L. Velásquez, *Generalized maximum principles and the characterization of linear Weingarten hypersurfaces in space forms*, Michigan Math. J. **63** (2014), 27–40.
- [17] C.P. Aquino, H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *On complete linear Weingarten hypersurfaces in locally symmetric Riemannian manifolds*, Comm. Math. Univ. Carolinae (Printed ed.), (2015).
- [18] C.P. Aquino, H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *Characterizations of spacelike hyperplanes in the steady state space via generalized maximum principles*, Milan Journal of Mathematics (Printed ed.), (2015).

- [19] C.P. Aquino, H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *Spacelike hypersurfaces with constant r th mean curvature in steady state type spacetimes*, Journal of Geometry, **106** (2015), 85–96.
- [20] J.L.M. Barbosa e A.G. Colares, *Stability of Hypersurfaces with Constant r -Mean Curvature*, Ann. Global Anal. Geom., **15** (1997), 277–297.
- [21] A. Brasil Jr., A.G. Colares e O. Palmas, *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space: A gap theorem*, Illinois J. of Math **47** (2003), 847–866.
- [22] S. Brendle, *Einstein manifolds with nonnegative isotropic curvature are locally symmetric*, Duke Math. J. **151** (2009), 1–21.
- [23] F.E.C. Camargo, R.M.B. Chaves e L.A.M. Sousa Jr., *Rigidity theorems for complete spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in de Sitter space*, Diff. Geom. Appl. **26**, 592–599 (2008).
- [24] F.E.C. Camargo, R.M.B. Chaves e L.A.M. Sousa Jr., *New Characterizations of Complete Space-Like Submanifolds in Semi-Riemannian Space Forms*, Kodai Math. J. **32** (2009), 209–230.
- [25] A. Caminha, *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature lorentz manifolds*, J. of Geometry and Physics **56** (2006), 1144–1174.
- [26] A. Caminha, *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature*, Kodai Math. J. **29** (2006), 185–210.
- [27] A. Caminha, *The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces*, Bull. Brazilian Math. Soc. **42** (2011), 277–300.
- [28] É. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), 177–191.
- [29] X. Chao, *Complete spacelike hypersurfaces in the de Sitter space*, Osaka J. Math. **50**, 715–723 (2013).

- [30] B.Y. Chen, *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector*, Monatsh. Math. **90** (1980), 185–194.
- [31] S.Y. Cheng e S.T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), 195–204.
- [32] Q.-M. Cheng e H. Nakagawa, *Totally umbilic hypersurfaces*, Hiroshima Math. J. **20** (1990), 1–10.
- [33] Q.-M. Cheng, *Complete space-like submanifolds with parallel mean curvature vector*, Math. Z. **206** (1991), 333–339.
- [34] S.M. Choi, S.M. Lyu e T.J. Suh, *Complete space-like hypersurfaces in a Lorentz manifolds*, Math. J. Toyama Univ. **22**, 53–76 (1999).
- [35] A.G. Colares e H.F. de Lima, *Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the steady state space*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **17** (2010), 287–302.
- [36] A.G. Colares e H.F. de Lima, *On the rigidity of spacelike hypersurfaces immersed in the steady state space $\mathcal{H}^{n+1}$* , Publ. Math. Debrecen **81** (2012), 103–119.
- [37] H.F. de Lima e J.R. de Lima, *Characterizations of linear Weingarten spacelike hypersurfaces in Einstein spacetimes*, Glasgow Mathematical Journal (Print) **55**, 567–579 (2013).
- [38] H.F. de Lima e J.R. de Lima, *Complete linear Weingarten spacelike hypersurfaces immersed in a locally symmetric Lorentz space*, Results in Mathematics **63**, 865–876 (2013).
- [39] H.F. de Lima e M.A. Velásquez, *On the geometry of linear Weingarten spacelike hypersurfaces in the de Sitter space*, Bull. Brazilian Math. Soc. **44** (2013), 49–65.
- [40] H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *On the umbilicity of complete linear Weingarten spacelike hypersurfaces in a locally symmetric Lorentz space*, Preprint.
- [41] H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *New characterization of hyperbolic cylinder in Lorentz space forms*, Preprint.

- [42] M.P. do Carmo, *O Metodo do Referencial Movel*, III Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, (1976).
- [43] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).
- [44] F.R. dos Santos, *Hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante no espaço de Sitter*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande (2013).
- [45] J.-H. Eschenburg, *Maximum principles for hypersurfaces*, Manuscripta Math. **64** (1989), 55–75.
- [46] M. Gaffney, *A special Stokes' Theorem for complete Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **60** (1954), 140–145.
- [47] L. Garding, *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8** (1959), 957–965.
- [48] D. Gilbarg e N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin: Springer-Verlag (1983).
- [49] A.J. Goddard, *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **82**, 489–495 (1977).
- [50] J.N. Gomes, H.F. de Lima e M.A.L. Velásquez, *Complete hypersurfaces with two distinct principal curvatures in a spaces forms*, Results. Math. Online First (2014).
- [51] J.N. Gomes, H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *On the complete spacelike hypersurfaces with two distinct principal curvatures in Lorentzian spaces forms*, J. Math. Anal. Appl. **418** (2014), 248–263.
- [52] J.N. Gomes, H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *Spacelike hypersurfaces with two distinct principal curvatures in locally symmetric Lorentzian spaces*, Collectanea Mathematica (Printed ed.), (2015).
- [53] J.N. Gomes, H.F. de Lima, F.R. dos Santos e M.A.L. Velásquez, *On the complete hypersurfaces with two distinct principal curvatures in a Riemannian manifold*, Preprint.

- [54] A.A. Grigor'yan, *Analytic and geometric backgroud of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifold*, Bull. Am. Math. Soc. (N.S) **36** (1999), 135–249.
- [55] G. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge (1989).
- [56] S.W Hawking e G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1973.
- [57] Z.H. Hou e D. Yang, *Linear Weingarten spacelike hypersurfaces in de Sitter space*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **17** (2010), 769–780.
- [58] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.
- [59] H.S. Kim e Y-S. Pyo, *Complete minimal hypersurfaces in a locally symmetric space*, Balkan J. Geom. Appl. **4** (1999), 103–115.
- [60] T. Ishihara, *Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature*, Mich. Math. J. **35** (1988), 345–352.
- [61] L. Karp, *On Stokes' theorem for noncompact manifolds*, Proc. American Math. Soc. **82**, 487–490 (1981).
- [62] U-H. Ki, H-J. Kim e H. Nakagawa, *On space-like hypersurfaces with constant mean curvature of a Lorentz space form*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 205–216.
- [63] H.B. Lawson, *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. **89** (1969), 187–197.
- [64] T. Levi-Civita, *Famiglia di superfici isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. **26** (1937), 355–362.
- [65] H. Li, Y.J. Suh e G. Wei, *Linear Weingarten hypersurfaces in a unit sphere*, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 321–329.
- [66] H. Li, *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, Ark. Math. **35** (1997), 327–351.

- [67] H. Li, *Complete Spacelike Submanifolds in de Sitter Space with Parallel Mean Curvature Vector Satisfying $H^2 = 4(n - 1)/n^2$* , Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 335–345.
- [68] R. López e S. Montiel, *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*, Calc. Var. and PDE **8** (1999), 177–190.
- [69] M.J. Micallef e M.Y. Wang, *Metrics with nonnegative isotropic curvature*, Duke Math. J. **72** (1993), 649–672.
- [70] S. Montiel, *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in the de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), 909–917.
- [71] S. Montiel e A. Ros, *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, in *Differential geometry* (ed. B. Lawson e K. Tenenblat), pp. 279–296 (Longman, 1991).
- [72] S. Montiel, *A characterization of hyperbolic cylinders in the de Sitter space*, Tôhoku Math. J. **48** (1996), 23–31.
- [73] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurface of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. **314** (1999), 529–553.
- [74] S. Montiel, *Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter spaces*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 915–938.
- [75] S. Nishikawa, *On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorentzian manifolds*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 117–124.
- [76] J. Ok Baek, Q.M. Cheng e Y. Jin Suh, *Complete space-like hypersurfaces in locally symmetric Lorentz spaces*, J. Geom. Phys. **49** (2004), 231–247.
- [77] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math. **96** (1974), 207–213.
- [78] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19**, 205–214 (1967).

- [79] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [80] S. Pigola, M. Rigoli e A.G. Setti, *A Liouville-type result for quasi-linear elliptic equations on complete Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **219** (2005), 400–432.
- [81] S. Pigola, M. Rigoli e A.G. Setti, *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **822** (2005).
- [82] J. Ramanathan, *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 349–359.
- [83] R.K. Sachs e H. Wu, *General Relativity for Mathematicians*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 48, Springer-Verlag, New York (1977).
- [84] W. Santos, *Submanifolds with Parallel Mean Curvature Vector in Sphere*, Tôhoku Math. J. **46** (1994), 403–415.
- [85] B. Segre, *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. **27** (1938), 203–207.
- [86] T.J. Suh, S.M. Choi e H.Y. Yang, *On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in a Lorentz manifold*, Houston J. Math. **28**, 47–70 (2002).
- [87] K.P. Tod, *Four-dimensional D'Atri Einstein spaces are locally symmetric*, Diff. Geom. Appl. **11** (1999), 55–67.
- [88] H. Xu e X. Ren, *Closed hypersurfaces with constant mean curvature in a symmetric manifold*, Osaka J. Math. **45** (2008), 747–756.
- [89] H. Xu e J.R. Gu, *Rigidity of Einstein manifolds with positive scalar curvature*, Math. Ann. **358** (2014), 169–193.
- [90] H. Xu, e Z. Xu, *A new characterization of the Clifford torus via scalar curvature pinching*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 3931–3962.

- [91] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228.
- [92] S.T. Yau, *Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry*, Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 659–670.